Haskell 第八次作业

软件 62　2016013258　王泽宇

Email:ycdfwzy@outlook.com

2019 年 4 月 27 日

1 $\lambda_{\rightarrow}$ 扩展

1.1

Solution 1 共需要 $2k+3$ 步，推导过程如下：

$$\begin{aligned}
&\textit{if } t_0 \textit{ then } ((\lambda x : \texttt{Bool}.x)\ t_0) \textit{ else } ((\lambda x : \texttt{Bool}.\textit{if } x \textit{ then false else true})\ t_0) \\
&\Rightarrow \textit{if false then } ((\lambda x : \texttt{Bool}.x)\ t_0) \textit{ else } ((\lambda x : \texttt{Bool}.\textit{if } x \textit{ then false else true})\ t_0) \\
&\qquad\qquad (by\ t_0 \Rightarrow_k \mathsf{false}) \\
&\Rightarrow (\lambda x : \texttt{Bool}.\textit{if } x \textit{ then false else true})\ t_0 \qquad (\text{by E-IfFalse}) \\
&\Rightarrow \textit{if } t_0 \textit{ then false else true} \qquad (by\ \beta - reduction) \\
&\Rightarrow \textit{if false then false else true} \qquad (by\ t_0 \Rightarrow_k \mathsf{false}) \\
&\Rightarrow \textit{true} \qquad (\text{by E-IfFalse})
\end{aligned}$$

一共用了 $k+1+1+k+1 = 2k+3$ 步。

1.2

Proof 1

$$\dfrac{\dfrac{x : \texttt{Bool} \in \Gamma_1}{x : \texttt{Bool} \vdash x : \texttt{Bool}}\textit{T-var} \qquad \dfrac{}{\varnothing \vdash \textit{false} : \texttt{Bool}}\textit{T-False}}{\varnothing, x : \texttt{Bool} \vdash (\textit{if } x \textit{ then false else } x) : \texttt{Bool}}\textit{T-If} \tag{M}$$

其中 $\Gamma_1 = x : \texttt{Bool}$

$$\dfrac{f : \texttt{Bool} \to \texttt{Bool} \in \Gamma_2}{f : \texttt{Bool} \to \texttt{Bool} \vdash f : \texttt{Bool} \to \texttt{Bool}}\textit{T-var} \tag{N}$$

其中 $\Gamma_2 = f : \texttt{Bool} \to \texttt{Bool}$

$$\dfrac{\dfrac{(N)\ (M)}{\varnothing, x : \texttt{Bool}, f : \texttt{Bool} \to \texttt{Bool} \vdash f\ (\textit{if } x \textit{ then false else } x) : \texttt{Bool}}\textit{T-App}}{\varnothing, f : \texttt{Bool} \to \texttt{Bool} \vdash \lambda x : \texttt{Bool}.f\ (\textit{if } x \textit{ then false else } x) : \texttt{Bool} \to \texttt{Bool}}\textit{T-Abs}$$

1.3

Solution 2 推导过程如下啊

- 设 $\Gamma = \varnothing, f : T_f, x : T_x, y : T_y$，那么有

$$T_f \to T_x \to T_y = \mathtt{Bool}$$

- y 应用在 $f\ x$ 上，所以 $T_f \to T_x = T_y \to A$，其中 $A = \mathtt{Bool}$
- x 应用在 f 上，所以 $T_f = T_x \to B$，其中 $B = T_y \to A$
- 接上面的方程组，得 $T_f = T_x \to T_y \to \mathtt{Bool}$，所以

$$\Gamma = \varnothing,\ x : T_x,\ y : T_y, f : T_x \to T_y \to \mathtt{Bool}$$

2 类型推断

2.1

Solution 3 从 *Haskell* 中的定义得到

$$\begin{aligned} (.) &:: (b \to c) \to (a \to b) \to a \to c \\ (\$) &:: (a \to b) \to a \to b \end{aligned}$$

对于 $(\$)_1.(\$)_2$ 设

$$\begin{aligned} \Gamma_1 = (.) &:: (b_0 \to c_0) \to (a_0 \to b_0) \to a_0 \to c_0 \\ \Gamma_2 = (\$)_1 &:: (a_1 \to b_1) \to a_1 \to b_1 \\ \Gamma_3 = (\$)_2 &:: (a_2 \to b_2) \to a_2 \to b_2 \end{aligned}$$

推导过程如下：

$$\textit{CT-Var}\frac{(.) :: (b_0 \to c_0) \to (a_0 \to b_0) \to a_0 \to c_0 \in \Gamma_1}{\Gamma_1 \vdash (.) :: (b_0 \to c_0) \to (a_0 \to b_0) \to a_0 \to c_0 \blacktriangleleft \varnothing} \tag{M.1}$$

$$\textit{CT-Var}\frac{(\$)_1 :: (a_1 \to b_1) \to a_1 \to b_1 \in \Gamma_2}{\Gamma_2 \vdash (\$)_1 :: (a_1 \to b_1) \to a_1 \to b_1 \blacktriangleleft \varnothing} \tag{M.2}$$

$$\textit{CT-Var}\frac{(\$)_2 :: (a_2 \to b_2) \to a_2 \to b_2 \in \Gamma_3}{\Gamma_3 \vdash (\$)_2 :: (a_2 \to b_2) \to a_2 \to b_2 \blacktriangleleft \varnothing} \tag{M.3}$$

$$\textit{CT-App}\frac{\textit{CT-App}\dfrac{(M.1)\ (M.2)}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash (.)(\$)_1 :: (a_0 \to b_0) \to a_0 \to c_0 \blacktriangleleft \Phi_1} \qquad (M.3)}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash (.)(\$)_1(\$)_2 :: (a_2 \to b_2) \to a_2 \to b_2 \blacktriangleleft \Phi}$$

其中 $\Phi_1 = \{b_0 = a_1 \to b_1,\ c_0 = a_1 \to b_1\}, \Phi = \Phi_1 \cup \{a_0 = a_2 \to b_2,\ b_0 = a_2 \to b_2\}$。如果把 $\to$ 替换为逻辑蕴含，那么 $(a_2 \to b_2) \to a_2 \to b_2$ 仍然是有效命题。

2.2

Solution 4 对于 $(.)_1\$(.)_2$ 设

$$\Gamma_1 = (\$) \ :: \ (a_0 \to b_0) \to a_0 \to b_0$$
$$\Gamma_2 = (.)_1 \ :: \ (b_1 \to c_1) \to (a_1 \to b_1) \to a_1 \to c_1$$
$$\Gamma_3 = (.)_2 \ :: \ (b_2 \to c_2) \to (a_2 \to b_2) \to a_2 \to c_2$$

推导过程如下:

$$\textit{CT-Var}\frac{(\$) \ :: \ (a_0 \to b_0) \to a_0 \to b_0 \in \Gamma_1}{\Gamma_1 \vdash (\$) \ :: \ (a_0 \to b_0) \to a_0 \to b_0 \blacktriangleleft \varnothing} \tag{M.1}$$
$$\textit{CT-Var}\frac{(.)_1 \ :: \ (b_1 \to c_1) \to (a_1 \to b_1) \to a_1 \to c_1 \in \Gamma_2}{\Gamma_2 \vdash (.)_1 \ :: \ (b_1 \to c_1) \to (a_1 \to b_1) \to a_1 \to c_1 \blacktriangleleft \varnothing} \tag{M.2}$$
$$\textit{CT-Var}\frac{(.)_2 \ :: \ (b_2 \to c_2) \to (a_2 \to b_2) \to a_2 \to c_2 \in \Gamma_3}{\Gamma_3 \vdash (.)_2 \ :: \ (b_2 \to c_2) \to (a_2 \to b_2) \to a_2 \to c_2 \blacktriangleleft \varnothing} \tag{M.3}$$
$$\textit{CT-App}\frac{\textit{CT-App}\dfrac{(M.1)(M.2)}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash (\$)(.)_1 \ :: \ T_1 \blacktriangleleft \Phi_1} \qquad (M.3)}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash (\$)(.)_1(.)_2 \ :: \ T_2 \blacktriangleleft \Phi}$$

其中，$T_1 = a_0 \to b_0, T_2 = (a_1 \to b_2 \to c_2) \to a_1 \to (a_2 \to b_2) \to a_2 \to c_2$，$\Phi_1 = \{a_0 = b_1 \to c_1,\ b_0 = (a_1 \to b_1) \to a_1 \to c_1\}, \Phi = \Phi_1 \cup \{a_0 = (b_2 \to c_2) \to (a_2 \to b_2) \to a_2 \to c_2\}$。如果把 T_2 中的 $\to$ 替换为逻辑蕴含，那么 T_2 仍然是有效命题。

2.3

Solution 5 从 *Haskell* 中的定义得到

$$\mathit{map} \ :: \ (a \to b) \to [a] \to [b]$$
$$\mathit{tail} \ :: \ [a] \to [a]$$

对于`\c f -> if c then map f else tail`，设

$$\Gamma_1 = \mathit{map} \ :: \ (a \to b) \to [a] \to [b]$$
$$\Gamma_2 = \mathit{tail} \ :: \ [d] \to [d]$$
$$\Gamma_3 = c \ :: \ T_c$$
$$\Gamma_4 = c \ :: \ T_f$$

推导过程如下

$$\textit{CT-Var}\frac{map\ ::\ (a\to b)\to[a]\to[b]\in\Gamma_1}{\Gamma_1\vdash map\ ::\ (a\to b)\to[a]\to[b]\blacktriangleleft\varnothing}\tag{M.1}$$

$$\textit{CT-Var}\frac{tail\ ::\ [c]\to[c]\in\Gamma_2}{\Gamma_2\vdash tail\ ::\ [c]\to[c]\blacktriangleleft\varnothing}\tag{M.2}$$

$$\textit{CT-Var}\frac{c\ ::\ T_c\in\Gamma_3}{\Gamma_3\vdash c\ ::\ T_c\blacktriangleleft\varnothing}\tag{M.3}$$

$$\textit{CT-Var}\frac{f\ ::\ T_f\in\Gamma_4}{\Gamma_4\vdash f\ ::\ T_f\blacktriangleleft\varnothing}\tag{M.4}$$

$$\textit{CT-Abs}\frac{\textit{CT-ITE}\dfrac{\textit{CT-App}\dfrac{(M.1)(M.4)}{\Gamma_1,\Gamma_4\vdash map\ f\ ::\ [a]\to[b]\blacktriangleleft\Phi_2}\qquad(M.2)(M.3)}{\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4\vdash \textsf{if}\ c\ \textsf{then}\ map\ f\ \textsf{else}\ tail\ ::\ [a]\blacktriangleleft\Phi_1}}{\Gamma_1,\Gamma_2\vdash \backslash c\ f\to\textsf{if}\ c\ \textsf{then}\ map\ f\ \textsf{else}\ tail\ ::\ [c]\to[c]\blacktriangleleft\Phi_1}$$

其中，$\Phi_2=\{T_f=a\to b\},\Phi_1=\Phi_2\cup\{T_c=\texttt{Bool},\ [a]\to[b]=[c]\to[c]\}$

3 扩展系统的元性质判定（选做题）

3.1

Solution 6 引理 *1* 不正确，考虑 $(\lambda x:\texttt{Bool}.x)$ $\textsf{false}$，第一步应用 *E-App1* 规约，得到 $\texttt{foo}$ $\textsf{false}$，第二应用 *E-Foo2*，得到 $\textsf{true}$ $\textsf{false}$。如果第一步应用 *E-β* 规约，得到 $\textsf{false}$。显然两种规约方式得到的结果不同，规约具有不确定性。

引理 *2* 正确。

引理 *3* 不正确，反例同样取 $(\lambda x:\texttt{Bool}.x)$ $\textsf{false}$。

3.2

Solution 7 引理 *1* 正确，

引理 *2* 不正确。考虑 $((\lambda x.x)(\lambda x.x))\textsf{true}$，由于没 *E-App1*，所以无法进行规约；这也不是一个 *value*。

引理 *3* 正确。

3.3

Solution 8 引理 *1* 正确，

引理 *2* 正确。

引理 *3* 不正确。考虑 $(\lambda x:Bool.(\lambda y:Bool.y))$ $\textsf{false}$，按照 *T-FunnyApp*，这是一个 $\texttt{Bool}$ 类型的表达式，如果进行一步规约，得到 $\lambda y:Bool.y$，是一个 $\texttt{Bool}\to\texttt{Bool}$ 类型的表达式，类型没有得到保持。

3.4

Solution 9 引理 *1* 正确，

引理 *2* 正确。

引理 *3* 正确。考虑 $t = (\lambda x : \mathtt{Bool}.(\lambda y : \mathtt{Bool}.\mathit{true}))\mathit{false}$，根据原来的规则，容易得到 $t : \mathtt{Bool} \to \mathtt{Bool}$。在用 β 规约，可以得到 $t \Rightarrow \lambda y : \mathtt{Bool}.\mathit{true} = t_1$，根据新规则 *T-FunnyAbs*，$t_1 : Bool$，$t$ 和 t_1 的类型不同，所以违反了引理 *3*。

3.5

Solution 10 引理 *1* 正确，

引理 *2* 不正确。考虑 $\mathit{true}\ \mathit{false}$，根据 *T-FunnyApp'* 规则，他是一个 $\mathtt{Bool}$ 类型的，但是这不是一个 *value*，也不可以进行规约。

引理 *3* 正确。

4 System F 的元性质证明（选做题）

引理 4 F-progress

Proof 2 下面证明在 F 中新增的 *Term* 满足引理 *4*。

- $s = \lambda X.t$。由于 F 系统中定义了 $\lambda X.t$ 是一个 *value*，所以 $s = \lambda X.t$ 满足引理 *4*。
- $s = t[T]$。如果 t 不是一个 *value*，那么 $t \Rightarrow t'$，根据 *E-TApp*，$s = t[T] \Rightarrow t'[T]$。如果 t 是 *value*，即 $t = \lambda X.t$，根据 *E-Tβ* 规则，$s = t[T] = (\lambda X.t)[T] \Rightarrow t[X := T]$。

综上，F 系统满足引理 *4*。

引理 5 F-preservation

Proof 3 下面证明在 F 中新增的 *Term* 满足引理 *5*。

- $s = \lambda X.t$，设 $t : T$，那么 $s : \forall X.T$。由于 s 不可规约，所以不违反引理 *5*。
- $s = t[T]$，按 t 的不同，分为以下两种情况：
  - $t = \lambda X.t_1$，设其中 $t_1 : T_1$，由 *T-TAbs* 知 $t = \lambda X.t_1 : \forall X.T_1$。根据 *E-Tβ* 规约，$s = (\lambda X.t_1)[T] \Rightarrow t_1[X := T]$，再由 *T-TApp* 类型规则知 $t_1[X := T] : T_1[X := T]$。
  - $t = t_1[T_1]$，即 t 可以继续进行规约，设 $t \Rightarrow t'$。用归纳法可知 t, t' 具有相同的类型，假设为 $\forall X.T'$，所以 s 的类型为 $T'[X := T]$*(T-TApp)*。现在应用 *E-TApp*，$s = t[T] \Rightarrow t'[T]$，同样由 *T-TApp* 得 $t'[T] : T'[X := T]$。所以 $s = t[T]$ 与 $t'[T]$ 具有相同的类型。

综上，F 系统满足引理 *5*。