高等数学(2)综合练习 4 答案

一、填空题（18%）

1．设 $f(x)$ 连续，则 $\int_{-\pi}^{\pi} x[x+f(\cos x)]dx =$【　　】

A.　0　　　B.　1　　　C.　π^2　　　D.　$2\pi^3/3$

【解析】被积函数 $g(x)=xf(\cos x)$ 是连续的奇函数，所以，

$$\int_{-\pi}^{\pi} x[x+f(\cos x)]dx=\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx+\int_{-\pi}^{\pi}xf(\cos x)dx=2\int_0^{\pi}x^2dx+0=\frac{2\pi^3}{3}$$，应选 D.

2. 设 $f(x)$ 满足狄利克雷收敛定理条件，它的 Fourier 级数的和函数为 $s(x)$，已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处左连续，且 $f(0)=-1, s(0)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=$__________.

【解析】由狄利克雷收敛定理可知，

$$s(0)=\frac{\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)+\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)}{2}=\frac{f(0)+\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)}{2}=\frac{-1+\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)}{2}=2$$，解得 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=5$.

3. 广义积分（也称反常积分）$\int_0^{+\infty}4x^2e^{-2x}dx$【　　】

A.　发散　　　B.　收敛于 1　　　C.　收敛于 2　　　D.　收敛于 4

【解析】$\int_0^{+\infty}4x^2e^{-2x}dx=\int_0^{+\infty}t^2e^{-t}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^2e^{-t}dt=\frac{1}{2}\times 2!=1$，应选 B.

4．函数 $y=e^x$ 展开成 x 的幂级数____________________________________.

【解析】$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},-\infty<x<\infty.$

5. 若常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$　　【　　】

A. 收敛　　　B. 发散　　　C. 不确定

【解析】由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$ 也收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 收敛，应选 A.

6. 设 $f(x)=\pi-x^2(-\pi<x\le\pi)$ 是周期为 2π 的连续函数，将 $f(x)$ 展开为 Fourier 级数时，系数 $b_1=$_________.

【解析】由于 $f(x)$ 是偶函数，所有 $b_n=0$，从而 $b_1=0$；或直接计算 $b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x^2)\sin xdx=0$.

二、计算题（42%）

1.　$\int(x+\frac{1}{1+x^2})dx.$

【解】$\int(x+\frac{1}{1+x^2})dx=\frac{x^2}{2}+\arctan x+C.$

2．计算不定积分 $\int\frac{dx}{x(2+\ln x)}$.

【解】$\int\frac{dx}{x(2+\ln x)}=\int\frac{d\ln x}{2+\ln x}=\int\frac{d(\ln x+2)}{2+\ln x}=\ln|2+\ln x|+C$.

3．计算定积分 $\int_1^9\frac{x+1}{\sqrt{4x}}dx.$

【解】令 $\sqrt{4x}=t, x=\frac{t^2}{4}, dx=\frac{t}{2}dt,$　$\begin{array}{c|cc} x & 1 & 9 \\ t & 2 & 6\end{array}$,

$$\int_1^9 \frac{x+1}{\sqrt{4x}}\,dx = \int_2^6 \frac{t^2/4+1}{t}\frac{t}{2}dt = \frac{1}{8}\int_2^6 (t^2+4)dt = \frac{1}{8}[\frac{t^3}{3}\Big|_2^6 + 16] = \frac{32}{3}$$

4. 计算定积分 $\int_0^1 xe^x\,dx$.

【解】$\int_0^1 xe^x\,dx = \int_0^1 x\,de^x = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = 1$

5. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)}/\frac{1}{n^2}=1$ ，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛.

三、解答题（28%）

1. 设 $f(x)=x^3-\sin x\int_0^{\pi/2} f(x)dx$，求 $\int_0^{\pi/2} f(x)dx$.

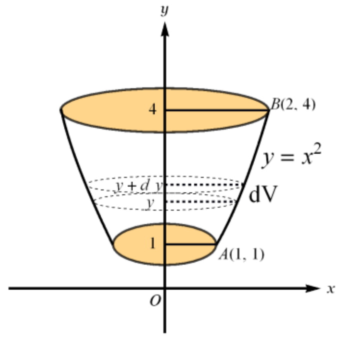
【解】记 $\int_0^{\pi/2} f(x)dx = a$，则 $f(x)=x^3-a\sin x$，两边从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 积分得，

$$\int_0^{\pi/2} f(x)dx = \int_0^{\pi/2} x^3dx - a\int_0^{\pi/2}\sin x dx，即\ a=\frac{x^4}{4}\Big|_0^{\pi/2} - a = \frac{\pi^4}{64}-a，$$

解得 $\int_0^{\pi/2} f(x)dx = a = \frac{\pi^4}{128}$.

2.（1）求曲线 $y=x^2, y=1, y=4, y$ 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V(如右图所示).

（2）现将一放置在平地上的且盛满水的水缸（形状如右图所示，下底圆的半径为1米），试问要把缸内的水全部吸出要做多少功？（取 g=9.8m/s^2）



解：(1)体积元素：$dV=\pi x^2dy=\pi ydy, 1\le y\le 4$，

体积： $V=\int_1^4 \pi ydy = \frac{15}{2}\pi$.

(2) 功元素：$dW=\rho g(4-y)dV=\pi\rho g(4-y)ydy,\quad 0\le y\le 3$

$$W=\int_0^3 \pi\rho g(4-y)ydy$$

3. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1}$ 的收敛区间及和函数.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)x^{n+1}}{(n+1)x^n}\right| = |x|<1,$ 所以，当 $|x|<1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1}$ 绝对收敛，当 $|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)\ne 0$，所以，收敛区间为 $(-1,1)$【实际上，收敛域也为 $(-1,1)$】

【或记 $a_n=n+2$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+2}=1$ 得，收敛区间为 $(-1,1)$】

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+2})' = (\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2})' = \left(x^2\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)' = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = \frac{x(2-x)}{(x-1)^2}，\quad |x|<1.$$

4. 将函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 及 $g(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数.

解：由于 $\frac{1}{1+u}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n, u\in(-1,1)$. 所以

$$f(x)=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2+x-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-1}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}},\quad x\in(-1,3).$$

$$g(x)=\frac{1}{(1+x)^2}=-f'(x)=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(x-1)^{n-1}}{2^{n+1}},x\in(-1,3)$$

四、解答下列问题（12%）

1. 设 $f(x)$处处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=1$， $F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)dt$（$n\in N^+$），计算$\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}$.

【解】令 $u=x^n-t^n$，则 $t:0\to x$ 变为 $u:x^n\to 0$

$$F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)dt=-\frac{1}{n}\int_0^x f(x^n-t^n)d(x^n-t^n)=\frac{1}{n}\int_0^{x^n}f(u)du,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^n}f(u)du}{x^{2n}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\frac{nx^{n-1}f(x^n)}{2nx^{2n-1}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)}{2x^n}=\frac{1}{n}\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{2t}=\frac{1}{n}.$$

【注】题中“ $f(x)$可导”可以减弱为“ $f(x)$连续”.

2. 举例说明幂级数的应用.

【答】例如利用幂级数做函数的近似计算或多项式逼近等.

如利用 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},-\infty<x<\infty$，

令 $x=1$，取前10项可得 e 的近似值： $e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{9!}$；

同样取前10项得到e^x在 $x=0$处的9次多项式逼近公式： $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^9}{9!}$.