一、填空题(18%)

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$, 则 $A^{-1}=$____________.

【解析】$|A|=\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}=1$，$A^*=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}$，$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

2. 设 A 为 2019 阶方阵，且 $A^T=-A$, 则 $|A|=$__________.

【解析】由 $A^T=-A$ 得 $|A|=|A^T|=|-A|=(-1)^{2019}|A|=-|A|$，所以，$|A|=0$.

3. 设 λ_1,λ_2 是三阶实对称阵的两个不同特征值，$\eta_1=(1,1,3)^T,\eta_2=(4,5,a)^T$ 依次是 λ_1,λ_2 对应的特征向量，则实数 $a=$___________.

【解析】由于实对称阵的不同特征值对应的特征向量正交可得，$\eta_1\perp\eta_2$，即 $4+5+3a=0$，解得 $a=-3$.

4. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+tx_2^2+x_3^2+2tx_1x_3$ 正定，则 t 七取值范围____________.

【解析】由 f 正定，可知 f 对应实对称阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&t\\0&t&0\\t&0&1\end{pmatrix}$ 正定，从而，顺序主子式:

$$\Delta_1=1>0，\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1&0\\0&t\end{vmatrix}=t>0，\ \Delta_3=\begin{vmatrix}1&0&t\\0&t&0\\t&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&t\\0&t&0\\0&0&1-t^2\end{vmatrix}=t(1-t^2)>0，$$

解得 $0<t<1$.

5. 设 A,B 为 n 阶方阵，满足 $AB=O$ 则有【　　】

(A) $A=O$ 或 $B=O$　(B) $|A|=0$ 或 $|B|=0$　(C) $A+B=O$　(D) $|A|+|B|=O$

【解析】由 $AB=O$ 及 A,B 为 n 阶方阵得 $|AB|=|A||B|=|O|=0$，所以 $|A|$ 或 $|B|$ 至少一个为零，选 B.

6. 对于 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$, 以下命题正确的是【　　】

A. 若 A 的列向量组线性无关，则 $Ax=0$ 有非零解
B. 若 A 的行向量组线性无关，则 $Ax=0$ 有非零解
C. 若 A 的列向量组线性相关，则 $Ax=0$ 有非零解
D. 若 A 的行向量组线性相关，则 $Ax=0$ 有非零解

【解析】由向量组线性相关定义可得，若 A 的列向量组线性相关，则 $Ax=0$ 有非零解. 选 C.

二、解答下列各题(36%)

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{pmatrix}$, **求** A^TB-2E.

【解】$A^TB-2E=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{pmatrix}-2E=\begin{pmatrix}0&5&8\\0&-5&6\\2&9&0\end{pmatrix}-2E=\begin{pmatrix}-2&5&8\\0&-7&6\\2&9&-2\end{pmatrix}$.

2. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&-1&4&-1\\0&0&1&-3\\2&1&1&0\\-1&2&0&3\end{vmatrix}$.

【解】$D=\begin{vmatrix}1&-1&4&-1\\0&0&1&-3\\2&1&1&0\\-1&2&0&3\end{vmatrix}\overset{c_4+3c_3}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&-1&4&11\\0&0&1&0\\2&1&1&3\\-1&2&0&3\end{vmatrix}=1\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&-1&11\\2&1&3\\-1&2&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-1&11\\2&1&3\\-1&2&3\end{vmatrix}$

$=-\begin{vmatrix}1&-1&11\\0&3&-19\\0&1&14\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&-19\\1&14\end{vmatrix}=-(42+19)=-61$.

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\\0&-2\end{pmatrix}$，且满足 $2X=AX+B$，求矩阵 X.

【分析】由 $2X=AX+B$ 得 $(2E-A)X=B$，即 $X=(2E-A)^{-1}B$.

【解法 1】$(2E-A,B)=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-1&-1&3\\-1&0&1&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0&1&0\\1&1&-1&-1&3\\-1&0&1&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&-1&0&1&0\\0&2&-1&-2&3\\0&-1&1&1&-2\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-2\\0&1&0&-1&1\\0&-1&1&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&-1&1\\0&0&1&0&1\end{pmatrix}$，

$X=(2E-A)^{-1}B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\\0&-1\end{pmatrix}$.

【解法 2】$2E-A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$，$|2E-A|=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\1&1&-1\\-1&0&1\end{vmatrix}\overset{c_1+c_3}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{vmatrix}=1$，

$(2E-A)^*=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-1&-1\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-1&-1\\1&-1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&-1\\-1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&-1\\1&-1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&1\\-1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&-1\\-1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&-1\\1&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\1&1&3\end{pmatrix}$，$(2E-A)^{-1}=\dfrac{(2E-A)^*}{|2E-A|}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\1&1&3\end{pmatrix}$，

$X=(2E-A)^{-1}B=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\\0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\\0&-1\end{pmatrix}$.

三、解答下列各题(36%)

1. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\t\end{pmatrix}$，(1) 当 t 取何值时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关？

(2) 当 t 取何值时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关？此时，将 α_3 用 α_1,α_2 线性表示.

【解】$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&2&t-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&t-5\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&t-5\end{pmatrix}$，

(1) 当 $t\neq5$ 时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

(2) 当 $t=5$ 时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，且 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=2\alpha_2-\alpha_1$.

2. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&-2&2\\-2&-3&4\\2&4&-3\end{bmatrix}$ 的全部特征值为 $1,1,-8$，求可逆阵 T 和对角阵 Λ，使得 $T^{-1}AT=\Lambda$.

【解】当 $\lambda=1$ 时，$A-\lambda E=A-E=\begin{bmatrix}-1&-2&2\\-2&-4&4\\2&4&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$(A-E)x=0$ 等价于 $x_1+2x_2-2x_3=0$，

可取两个线性无关的特征向量 $p_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda=-8$ 时，

$$A-\lambda E=A+8E=\begin{bmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}2&4&5\\-2&5&4\\8&-2&2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2+r_1}\begin{bmatrix}2&4&5\\0&9&9\\0&-18&-18\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$(A+8E)x=0$ 等价于 $\begin{cases}2x_1+x_3=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x_1=-x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$，特征向量 $p_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$，

令 $T=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&2\\1&1&-2\end{pmatrix}$，则 $T^{-1}AT=\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-8\end{pmatrix}$.

【注】①关于 $\lambda=1$ 的特征向量 p_1,p_2 的取法不惟一，只要满足 $x_1+2x_2-2x_3=0$，且线性无关即可；
②关于 $\lambda=-8$ 的特征向量可取为 $kp_3(k\neq0)$.

3. 设 A 是秩为 3 的 3×4 矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为非齐次线性方程组 $Ax=b(b\neq0)$ 的三个不同的解，且

$\alpha_1+2\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$2\alpha_1+a_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，求 $Ax=b$ 的通解.

【解】由题意 $Ax=b$ 是四元非齐次线性方程组，$r(A)=3$，故 $Ax=0$ 的基础解系中只有一个解，

又 $A(\alpha_1+2\alpha_3)=3b,A(2\alpha_1+\alpha_2)=3b$ 得 $(2\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_1+2\alpha_3)=\begin{pmatrix}0\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，$\dfrac{\alpha_1+2\alpha_3}{3}=\begin{pmatrix}1/3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

是 $Ax=b$ 的解，从而，$Ax=b$ 的通解为 $x=c\begin{pmatrix}0\\2\\3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

【注】① $Ax=0$ 的基础解系可以是 $k(0,2,3,4)^T$，$k\neq0$；
② $Ax=b$ 的特解只要满足 $Ax=b$ 即可.

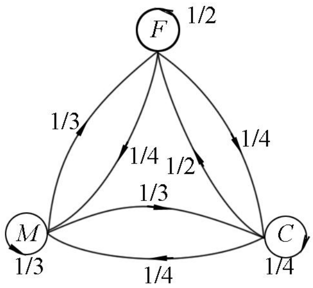
二、解答下列各题(6%+4%=10%)

1. 设 A 正定矩阵，证明 A^{-1} 也是正定矩阵.

【解】首先由 $A^T=A$ 得，$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$，即 A^{-1} 是对称阵；又由 A 正定可以 A 的所有特征值 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 得，A^{-1} 的全部特征值为 $\frac{1}{\lambda_i}>0(i=1,2,\cdots,n)$，故 A^{-1} 也是正定阵.

2. 某原始部落只有三种产业：F——农业，M——工具手工制作，C——缝制衣物，产品在本部落交换，其交换量如下图所示. 假设没有资本积累和债务，且每一种产品的价格均可反映其价值. 问如何定价三种产品的价格，方可使本交易系统公平，写出定价满足的方程组.

【解】所谓“公平”即各产业产品售出的总价值=购买其他产业产品的总价值：



分别记三种产品的价格也为 F,M,C，则又 $\begin{cases}\frac{1}{3}M+\frac{1}{2}C=\frac{1}{2}F\\ \frac{1}{4}F+\frac{1}{4}C=\frac{2}{3}M\\ \frac{1}{4}F+\frac{1}{3}M=\frac{3}{4}C\end{cases}$.