一、填空或选择填空题（18%）

1. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$，则 $|A|=$ __-2__ .

2. 矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=0$,其中 E 为单位阵, 则 $(A-E)^{-1}=$ __$\dfrac{A+2E}{2}$__ .

【解析】由 $A^2+A-4E=0$ 得 $A^2+A-2E=(A-E)(A+2E)=2E$, 所以, $(A-E)^{-1}=\dfrac{1}{2}(A+2E)$.

3. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $-1,1,2$ ，则 $|2A+E|=$ __-15__ .

【解析】$2A+E$ 的特征值为 $2\times(-1)+1=-1$ ， $2\times1+1=3$ ， $2\times2+1=5$ ，所以， $|2A+E|=-15$.

4. 矩阵 A 的秩与 A^T 的秩的关系是【 A 】

A. $r(A)=r(A^T)$　　B. $r(A)<r(A^T)$　　C. $r(A)>r(A^T)$　　D. 以上都不对

5. 对任意 n 阶方阵 A,B , 则下列结论正确的是【 D 】

A. $AB=BA$　　B. $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

C. $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$　　D. 以上都不对

【解析】如果 A,B 可交换，则 A,B,C 都对. 但一般情况下 A,B 不可交换，所以选 D.

6. 设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 正定，则 t 的取之范围是 __$-\dfrac{4}{5}<t<0$__.

【解析】 f 对应的实对称矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1 & t & -1\\ t & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$ ， f 正定的充要条件是：各阶顺序主子式

$\Delta_1=1>0$ ， $\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 1\end{vmatrix}=1-t^2>0$, 即 $-1<t<1$,

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & t & -1\\ t & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & t & -1\\ 0 & 1-t^2 & 2+t\\ 0 & 2+t & 4\end{vmatrix}=4(1-t^2)-(2+t)^2=-t(5t+4)>0$$ ，即 $t(5t+4)<0$,

解得 $-\dfrac{4}{5}<t<0$.

二、计算下列各题(36%)

1. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 4 & 0\end{bmatrix}$,求 AB^T .

【解】 $$AB^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2\\ 3 & 4\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+6 & -2+8\\ 6+12 & -6+16\\ -2+6-1 & 2+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 6\\ 18 & 10\\ 3 & 10\end{bmatrix}.$$

2. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & 2\\ -5 & 1 & 3 & -4\\ 2 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -5 & 3 & -3\end{vmatrix}$.

【解】 $$D=\begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & 2\\ -5 & 1 & 3 & -4\\ 2 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -5 & 3 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 1 & -1 & 1\\ -11 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -5 & -5 & 3 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 1 & 1\\ -11 & 1 & -1\\ -5 & -5 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 1 & 1\\ -6 & 2 & 0\\ -5 & -5 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-6 & 2\\ -5 & -5\end{vmatrix}=40.$$

3. 设 $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$,且 $AX=A+2X$,求 X .

【解】由 $AX=A+2X$ 得 $(A-2E)X=A$,即　$X=(A-2E)^{-1}A$,

由 $[A-2E,A]=\begin{bmatrix}1&1&4&3&1&4\\1&2&3&1&4&3\\0&0&1&0&0&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&1&4&3&1&4\\0&1&-1&-2&3&-1\\0&0&1&0&0&3\end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[r_1-4r_3]{r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&1&0&3&1&-8\\0&1&0&-2&3&2\\0&0&1&0&0&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&5&-2&-10\\0&1&0&-2&3&2\\0&0&1&0&0&3\end{bmatrix}$$

所以，$X=\begin{bmatrix}5&-2&-10\\-2&3&2\\0&0&3\end{bmatrix}$.

或先求出 $(A-2E)^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1&-5\\-1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$X=(A-2E)^{-1}A=\begin{bmatrix}2&-1&-5\\-1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&4\\1&4&3\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-2&-10\\-2&3&2\\0&0&3\end{bmatrix}$.

三、解答下列各题(36%)

1. 判定方程组 $\begin{cases}x_1 \qquad\quad +3x_3+x_4=2\\ x_1-3x_2 \qquad\quad +x_4=-1\\ 2x_1+x_2+7x_3+2x_4=5\\ 4x_1+2x_2+14x_3 \qquad =6\end{cases}$ 是否有解？若有解，求其通解.

【解】方程组的增广矩阵：

$$(A,b)=\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\1&-3&0&1&-1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_3]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&-3&-3&0&-3\\2&1&7&2&5\\0&0&0&-4&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&-3&-3&0&-3\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-4&-4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-r_3}\begin{bmatrix}1&0&3&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

与原方程等价的方程组：

$\begin{cases}x_1=-3x_3+1\\ x_2=-x_3+1\\ x_3=x_3\\ x_4=1\end{cases}$，所以原方程组有解，且通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$.

2. 设向量组 $A:\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\\4\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-6\\6\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\\-9\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\7\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\4\\4\\9\end{pmatrix}$,判定向量组 A 的线性相关性，求向量组 A 的一个最大无关组，并将 A 中最大无关组之外的向量用最大无关组线性表示.

【解】

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{bmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&-2&1&0&-2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-4r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&-2&1&0&-2\\0&3&-3&1&6\\0&2&-2&-2&12\\0&12&-12&7&15\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-4r_2]{r_3\div2}\begin{bmatrix}1&-2&1&0&-2\\0&3&-3&1&6\\0&1&-1&-1&6\\0&0&0&3&-9\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4\div3]{3r_3}\begin{bmatrix}1&-2&1&0&-2\\0&3&-3&1&6\\0&3&-3&-3&18\\0&0&0&1&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&-2&1&0&-2\\0&3&-3&1&6\\0&0&0&-4&12\\0&0&0&1&-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&-2&1&0&-2\\0&3&-3&1&6\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\div3]{r_2-r_3}\begin{bmatrix}1&-2&1&0&-2\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{bmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

由于 $r(A)=3<5$,所以，该组向量线性相关；最大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，

且 $\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2,\alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4$.【验证】

3. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{bmatrix}$,求正交矩阵 Q ,使得 Q^TAQ 为对角阵.

【解】特征多项式

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&-2\\1&-2-\lambda&1\\-2&1&1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+(r_2+r_3)}\begin{vmatrix}-\lambda&-\lambda&-\lambda\\1&-2-\lambda&1\\-2&1&1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-2-\lambda&1\\-2&1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-\lambda\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-3-\lambda&0\\0&3&3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(3+\lambda)(3-\lambda),$$

特征值 $\lambda=-3,0,3$,

当 $\lambda=-3$ 时, $A-\lambda E=A+3E=\begin{bmatrix}4&1&-2\\1&1&1\\-2&1&4\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1&1&1\\4&1&-2\\-2&1&4\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-3&-6\\0&3&6\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$, 对应方程组 $\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=-2x_3\end{cases}$,

特征向量 $p_1=(1,-2,1)^T$;

当 $\lambda=0$ 时, $A-\lambda E=A=\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&3&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$,

对应方程组 $\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=x_3\end{cases}$, 特征向量 $p_2=(1,1,1)^T$;

当 $\lambda=3$ 时, $A-\lambda E=A-3E=\begin{bmatrix}-2&1&-2\\1&-5&1\\-2&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}-1&-4&-1\\1&-5&1\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,

对应方程组 $\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=0\end{cases}$, 特征向量 $p_3=(1,0,-1)^T$.

构造 $Q=\begin{bmatrix}1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}\\-2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}&0\\1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$,容易验证 Q 是正交阵, $Q^TAQ=\begin{pmatrix}-3&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}$.

【注】这里的 Q 在不计较其列的顺序的前提下是惟一的.

四、解答下列各题(10%)

1. 已知向量组 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,证明对任意常数 μ_1,μ_2,μ_3 向量组 $\alpha_1+\mu_1\beta,\alpha_2+\mu_2\beta,\alpha_3+\mu_3\beta$ 也线性无关.

【证】用线性相关性定义证明: 令 $x_1(\alpha_1+\mu_1\beta)+x_2(\alpha_2+\mu_2\beta)+x_3(\alpha_3+\mu_3\beta)=0$,

即 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+(x_1\mu_1+x_2\mu_2+x_3\mu_3)\beta=0$,

由 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关可知, 必有 $x_1=x_2=x_3=0$, 所以, 任意常数 μ_1,μ_2,μ_3 向量组 $\alpha_1+\mu_1\beta,\alpha_2+\mu_2\beta,\alpha_3+\mu_3\beta$ 线性无关.

2. 设方阵 $A=\begin{bmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{bmatrix}$ 与 $\Lambda=\begin{bmatrix}5&&\\&y&\\&&-4\end{bmatrix}$ 相似,求 x,y 的值.

【解】由 A,Λ 相似可得, $\begin{cases}a_{11}+a_{22}+a_{23}=5+y-4\\|A|=-20y\end{cases}$,

又 $a_{11}+a_{22}+a_{33}=2+x$, 从而 $2+x=y+1$ 即 $x-y=-1$,

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & x & -2\\ -4 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & -4\\ 0 & x-4 & -10\\ 0 & -10 & -15\end{vmatrix}=-15x+60-100=-15x-40,$$

即 $-15x-40=-20y$ 化为 $3x-4y=-8$，联立 $\begin{cases}x-y=-1\\ 3x-4y=-8\end{cases}$，解得 $x=4,y=5$.