高等数学（2）综合练习 3 参考答案

一、填空题(18%).

1. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx=$________.

【解析】$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+(x+1)^2}d(x+1)=\arctan(x+1)\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，将 $[a,b]$ n 等分，记分点为 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 则梯形法近似公式：$\int_a^b f(x)dx\approx$________________________________.

【解析】$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})$

3. 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，则 $\int_{-a}^{a}x[f(x)+f(-x)]dx=$____________.

【解析】因为 $x[f(x)+f(-x)]$ 在 $[-a,a]$ 是奇函数，所以 $\int_{-a}^{a}x[f(x)+f(-x)]dx=0$，应填答案：0.

4. 若 $\int f(x)dx=F(x)+C$，则 $\int e^{-x}f(e^{-x})dx=$【　　】

（A）$F(e^x)+c$　（B）$-F(e^{-x})+c$　（C）$F(e^{-x})+c$　（D）$-F(e^x)+c$

【解析】$\int e^{-x}f(e^{-x})dx=-\int f(e^{-x})de^{-x}=-F(e^{-x})+C$，应选 B.

5. 将函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数为_________________.

【解析】$f(x)=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2+(x-1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n(x-1)^n,x\in(-1,3)$

6. 设函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，且在 $[-\pi,\pi)$ 上 $f(x)=x$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=\pi$ 收敛于____________.

【解析】$f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于 $\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=\frac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\frac{\pi-\pi}{2}=0$.

二、解答下列各题（42%）

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x(\tan t-\sin t)dt}{\sin x^4}$

【解】
$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x(\tan t-\sin t)dt}{\sin x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x(\tan t-\sin t)dt}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{4x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{4x^3}=\frac{1}{8}$$

2. $\int\left(e^{\sin x}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2x}}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

【解】
$$\int\left(e^{\sin x}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2x}}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int e^{\sin x}d\sin x+\int\frac{1}{\sqrt{2x}}dx+\int\frac{1}{1+x^2}dx$$
$$=e^{\sin x}+\sqrt{2x}+\arctan x+C.$$

3. $\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

解　令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2,dx=2tdt$，

则 $\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx=\int\frac{1}{t+1}2tdt=\int\left(2-\frac{2}{t+1}\right)dt=2t-2\ln|t+1|+C=2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)+C$

4．设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-2x}, & x\ge 0\\ x\cos x, & x<0\end{cases}$,求 $\int_{-1}^{4} f(x)dx$.

解：$\int_{-1}^{4} f(x)dx=\int_{-1}^{0} x\cos xdx+\int_{0}^{4}\sqrt{9-2x}dx$，

$\int_{-1}^{0} x\cos xdx=\left(x\sin x\right)\Big|_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}\sin xdx=1-\cos 1-\sin 1,$

$\int_{0}^{4}\sqrt{9-2x}dx=-\dfrac{1}{2}\int_{0}^{4}\sqrt{9-2x}d(9-2x)=\dfrac{26}{3},$

$\int_{-1}^{4} f(x)dx=1-\cos 1-\sin 1+\dfrac{26}{3}=\dfrac{29}{3}-\sin 1-\cos 1$.

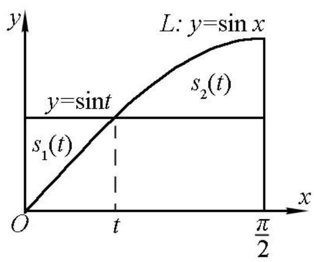
5. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $x^2\sin x$，计算不定积分 $\int xf'(x)dx$.

解：因为$f(x)$的一个原函数为$x^2\sin x$，则$f(x)=\left(x^2\sin x\right)'=2x\sin x+x^2\cos x$，

$\int xf'(x)dx=\int xd\left(f(x)\right)=xf(x)-\int f(x)dx=x\left(2x\sin x+x^2\cos x\right)-x^2\sin x+C$

$=x^2(\sin x+x\cos x)+C$

6．记 $L: y=\sin x\ (0\le x\le \pi/2)$，$s_1(t)$ 表示曲线 L、$x=0$ 及 $y=\sin t$ 围成的面积，$s_2(t)$ 表示曲线 L、$x=\dfrac{\pi}{2}$ 及 $y=\sin t$ 围成的面积，其中 $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$. 求 $s(t)=s_1(t)+s_2(t)$ 的最值.



【解】$s_1(t)=\int_0^t(\sin t-\sin x)dx$，$s_2(t)=\int_t^{\pi/2}(\sin x-\sin t)dx$，

$s(t)=\int_0^t(\sin t-\sin x)dx+\int_t^{\pi/2}(\sin x-\sin t)dx$

$=t\sin t-\int_0^t\sin xdx+\int_t^{\pi/2}\sin xdx-(\dfrac{\pi}{2}-t)\sin t$

$=2t\sin t-\int_0^t\sin xdx+\int_t^{\pi/2}\sin xdx-\dfrac{\pi}{2}\sin t$

$=1+2t\sin t-2\int_0^t\sin xdx-\dfrac{\pi}{2}\sin t=2t\sin t+2\cos t-\dfrac{\pi}{2}\sin t-1$，

$s'(t)=2\sin t+2t\cos t-\sin t-\sin t-\dfrac{\pi}{2}\cos t=(2t-\dfrac{\pi}{2})\cos t$，驻点 $t=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}$，

又 $s(0)=1$，$s(\dfrac{\pi}{4})=1+\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}+\sqrt{2}-2-\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}=\sqrt{2}-1$，$s(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}-1$，

故 $s_{\min}=s(\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}-1$，$s_{\max}=s(0)=1$.

三、解答下列各题（28%）

1．设 $f(0)=f(3)=f'(3)=3$，$f(x)$ 二阶导数连续，求 $\int_0^3 xf''(x)dx$.

解：$\int_0^3 xf''(x)dx=\int_0^3 xdf'(x)=\left[xf'(x)\right]_0^3-\int_0^3 f'(x)dx=\left[xf'(x)\right]_0^3-\left[f(x)\right]_0^3=9$.

2. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{3^n}$ 的敛散性. 若收敛，是绝对收敛还是条件收敛.

解：这里$u_n=\dfrac{(-1)^n n}{3^n}$，由 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3^{n+1}}\cdot\dfrac{3^n}{n}=\dfrac{1}{3}<1$，故$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$收敛

从而原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{3^n}$绝对收敛.

3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的收敛区间以及和函数，并计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{3^n}$.

解：这里$a_n=n$，由$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$，k=1，故$R=\dfrac{1}{\rho}=1$，收敛中心$x=0$，收敛区间为(−1, 1)

$$从而\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=x(\frac{1}{1-x})'=\frac{x}{(1-x)^2},$$

$$则\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}}{(1-\frac{1}{3})^2}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{5}{4}.$$

4. 设$f(x)=x, x\in[0,\pi]$，试将其展开为余弦级数，并计算$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

解：由题意可知应将函数作偶沿拓，从而一个周期内$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x<\pi\end{cases}$.

$$则b_n=0, n=1,2,\cdots;$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi,$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)\cos nx=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x,\ (0\le x\le\pi)$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}\frac{-4}{n^2\pi}, & n=1,3,\cdots\\ 0, & n=2,4,\cdots\end{cases}$$

$$令x=0,得s_1=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8},\ 令s=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots,$$

则$\dfrac{s}{4}=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{6^2}+\dfrac{1}{8^2}+\cdots$，两式相减，得 $\dfrac{3s}{4}=1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{8}$，故$s=\dfrac{\pi^2}{6}$.

四、解答下列各题（12%）

1. 设曲线$y=f(x)$ $(-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2})$，且$(y')^2=\cos^8 x-1$，求该曲线的弧长.

【解】弧长元素$ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\cos^4 xdx$，$-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$，弧长

$$s=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 xdx=2\int_0^{\pi/2}\cos^4 xdx=2I_4=2\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}I_0=\frac{3}{4}\int_0^{\pi/2}dx=\frac{3\pi}{8}.$$

【注】也可以利用倍角公式计算：

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 xdx=2\int_0^{\pi/2}(\frac{1+\cos 2x}{2})^2dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2})dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{3}{2}dx=\frac{3\pi}{8}.$$

2. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)>0$，$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\dfrac{1}{f(t)}dt,\quad x\in[a,b]$

（1）求$F'(x)$;（2）证明$F'(x)\ge 2$;（3）证明方程$F(x)=0$在区间(a,b)内有且只有一个根.

$$解:(1)F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)},$$

$$(2)F'(x)-2=\frac{f^2(x)-2f(x)+1}{f(x)}=\frac{(f(x)+1)^2}{f(x)}>0,$$

$$或F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\ge 2\sqrt{f(x)\frac{1}{f(x)}}=2$$

$(3)F'(x)>2>0$，故$F(x)$在$[a,b]$严格单增，

且$F(a)=\int_b^a\dfrac{1}{f(t)}dt<0, F(b)=\int_a^b f(t)dt>0$，方程$F(x)=0$在$(a,b)$存在唯一的实根.