

一、填空题、选择填空题 (18%)

1. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $|A| =$ ____.
2. 齐次线性方程组 $A_{m \times n} x = 0$ 有非零解的充要条件是【 】.
A. $r(A) \leq n$ B. $r(A) = n$ C. $r(A) < m$ D. $r(A) < n$
3. 设 A 都是 n 阶方阵, 满足 $A^2 + 3A - 5E = 0$, 则 $(A + 5E)^{-1} =$ ____.
4. 设 A, B 都是 n 阶方阵, 且 $(AB)^2 = E$, 则有【 】
A. $A^{-1} = B$ B. $AB = -E$ C. $AB = E$ D. $A^{-1} = BAB$
5. 设 3 阶方阵 A 的特征值分别为 $-1, 2, 3$, 则 $|2A^2| =$ ____.
6. 设二次型 $f = kx_1^2 + x_2^2 + (k+2)x_3^2 + 2x_1x_2$ 正定, 则 k 满足 ____.

二、解答下列各题 (36%)

1. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $(2E - A^T)B$.
2. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.
3. 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, 且 $X = AX + B$, 求矩阵 X .

三、解答下列各题 (36%)

1. 方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 7 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 12 \end{cases}$ 是否有解? 若有解, 求出其所有解.
2. 设有向量组 $A: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, 判断向量组 A 的线性相关性, 求出 A 的一个最大无关组, 并将 A 中最大无关组之外的向量用最大无关组线性表示.
3. 设二次型 $f = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_3$, 求正交变换 $x = Py$, 将二次型 f 化为标准形.

四、解答下列各题 (10%) (本题适用于 2014 级信息、会金、航空、数理学院各专业)

1. 设 A 为 n 阶对称矩阵, B 为 n 阶正交矩阵, 证明: $B^{-1}AB$ 也为对称矩阵.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y 的值.

四、解答下列各题 (10%) (本题适用于 2014 级机车学院各专业)

1. 设 A 为 n 阶正交阵, 证明 A^{-1} 及 A^* 也是正交阵.
2. 设 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & y \end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y 的值及满足 $P^{-1}AP = B$ 的可逆矩阵 P .