高等数学(2)综合练习 1 参考解答

一、填空题

1. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,\pi/2]$ 上连续,则 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[f(x^2)\sin x+\cos x]dx=$________.

【解析】 $f(x^2)\sin x$ 在 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上为连续的奇函数，$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f(x^2)\sin xdx=0$，

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos xdx=2$， 应填答案 2.

2. $\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=$______.

【解析】 利用结果 $\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx=n!$， 得 $\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=2!=2$.

3. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则下列结论中**不正确**的是【　　】

(A) $F'(x)=f(x)$；　　(B) $\int F'(x)dx=f(x)+C$；

(C) $\int f'(x)dx=f(x)+C$；　　(D) $\dfrac{d}{dx}[\int f(x)dx]=f(x)$.

【解析】显然选项 A、C、D 都正确，应选 B.

4.下列级数中条件收敛的是【　　】

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\dfrac{1}{n^2}$；　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

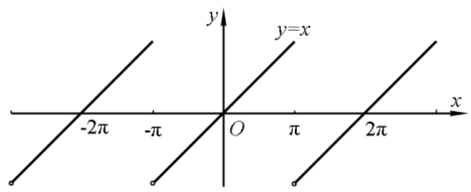
（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$；　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n(n+1)}$.

【解析】对于选项 A，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\sin\dfrac{1}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n^2}\le\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\dfrac{1}{n^2}$ D 绝对收敛；同样选项 D 中级数也绝对收敛，选项 C，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$ 发散（$\because\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$，$\therefore\lim_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$ 不存在），对于选项 B，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 满足 Leibniz 条件，因此收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 发散，所以，B 中级数条件收敛，应选 B.

5. 设 $f(x)=x,0\le x\le\pi$，将 $f(x)$ 展开为正弦级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$，记 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$，则 $s(\pi)=$________________.

【解析】对 $f(x)$ 进行奇延拓得 $f(x)=x,-\pi\le x\le\pi$，

再进行周期延拓(如右图所示)，$s(\pi)=\dfrac{\pi+(-\pi)}{2}=0$.



6. 设 $F(x)=\int_{x^2}^1e^{t^2}dt$，则 $dF(x)=$____________.

【解析】 $dF(x)=d(\int_{x^2}^1e^{t^2}dt)=(\int_{x^2}^1e^{t^2}dt)'dx=(0-2xe^{(2x)^2})dx=\underline{-2xe^{4x^2}dx}$.

二、解答下列各题

1. 求极限 $\lim_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\sin t^2dt}{x^3}$.

【解】 $\lim_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\sin t^2dt}{x^3}=\lim_{x\to0}\dfrac{\sin x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

2. 计算不定积分 $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}dx$.

【解】 $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{2x+2+1}{x^2+2x+2}dx$

$$= \ln(x^2+2x+2) + \int \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

$$= \ln(x^2+2x+2) + \int \frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

$$= \ln(x^2+2x+2) + \arctan(x+1) + C;$$

3. 计算积分 $\int_0^1 x\arctan x dx$.

【解】 $\int_0^1 x\arctan x dx = \frac{x^2}{2}\arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

4. $\int_0^3 \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}dx$ ，

【解】令 $t=\sqrt{x+1}$, 则 $x=t^2-1, dx=2tdt$,

x	0，3
t	1，2

原式$=\int_1^2 \frac{t^2+1}{t}2tdt = 2\int_1^2 (t^2+1)dt = 2\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_1^2 = \frac{20}{3}.$

5. 设 $f(0)=f(3)=f'(3)=3$， $f(x)$ 二阶导数连续，求 $\int_0^3 xf''(x)dx$；

【解】 $\int_0^3 xf''(x)dx = \int_0^3 xdf'(x) = xf'(x)\big|_0^3 - \int_0^3 f'(x)dx = 9 - f(x)\big|_0^3 = 9.$

6. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{3^n}$ 的敛散性，如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

【解】因为 $u_n=(-1)^n\frac{n^2}{3^n}, |u_n|=\frac{n^2}{3^n}$, 又 $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n^2} = \frac{1}{3} < 1.$

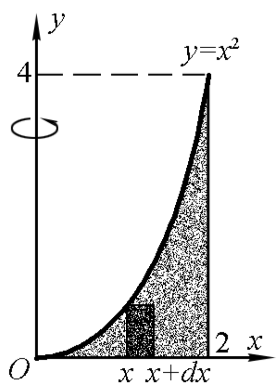
所以 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{3^n}$ 绝对收敛.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\le 0\\ e^x, & x>0\end{cases}$， 求 $\int_{-1}^1 f(x)dx$.

解： $\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 (1+x^2)dx + \int_0^1 e^x dx = (1+\frac{1}{3}) + (e-1) = \frac{1}{3}+e.$

【思考】计算 $F(x)=\int_{-1}^x f(t)dt$.

8. 求由抛物线 $y=x^2$， 直线 $x=2$ 以及 x 轴所围成的平面图形面积,并求该图形绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积.

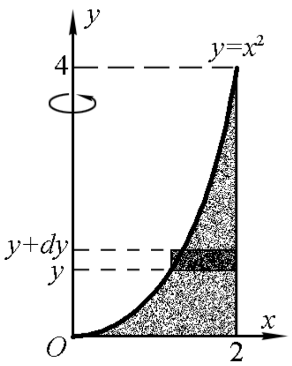


解： （1） $dA = x^2dx, 0\le x\le 2,$

$$A = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3};$$

（2）法① $dV_y = 2\pi x \cdot x^2 dx = 2\pi x^3 dx, 0 \le x \le 2,$

$$V_y = 2\pi\int_0^2 x^3 dx = \pi \left.\frac{x^4}{2}\right|_0^2 = 8\pi.$$



法② $dV_y = \pi(2^2 - \sqrt{y}^2)dy = \pi(4-y)dy, 0 \le y \le 4,$

$$V_y = \pi\int_0^4 (4-y)dy$$

$$= -\pi \left.\frac{(4-y)^2}{2}\right|_0^4 = 8\pi.$$

9. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$的收敛域及和函数,并求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$的和。

解：记$a_n = n,$则 $\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$，由$k=1$得收敛半径为$R = \frac{1}{\rho} = 1$，收敛中心$x=0$，收敛区间为$(-1,1)$；

又$\left.\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right|_{x=-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n$及$\left.\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right|_{x=1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n$都发散，所以，收敛域为$(-1,1)$.

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = (x + x^2 + x^3 + \cdots)'$$

$$= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, |x| < 1.$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} = \frac{1}{2}s(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2.$

10. 将函数$f(x) = x, 0 \le x \le \pi$展开为周期为$2\pi$的正弦级数，并求和$s = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$.

解：对$f(x)$进行奇延拓及周期延拓，Fourier 系数为：

$a_n = 0, n = 0,1,2,\cdots;$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} x d\cos nx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left[x\cos nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos nx dx\right] = -\frac{2}{n\pi}\pi\cos n\pi = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}, n = 1,2,\cdots$$

$f(x)$的 Fourier 级数为：

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx = 2(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx + \cdots) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \pi \\ 0 & x = \pi \end{cases}.$$

在上式中令$x = \frac{\pi}{2}$得，$s = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$.

11.设$f(x)$是连续函数，且$\int_0^x (x-t)f(t)dt = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$，求$f(x)$。

解：原方程变为$x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$，两边关于$x$求导，得

$\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，即$\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，

两边再关于 x 求导，得 $f(x)=\left((1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

【注意】$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 中 $x\int_0^x f(t)dt=x\times\int_0^x f(t)dt$.

12. 将函数 $f(x)=\frac{1}{2-x-x^2}$ 展开为 x 的幂级数.

解： $f(x)=\frac{1}{2-x-x^2}=\frac{1}{(1-x)(2+x)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x+2}\right)$

因为 $\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n$， $t\in(-1,1)$, 所以，

$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,|x|<1$，

$\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}-\cdots+\frac{(-1)^n x^n}{2^n}+\cdots),|x|<2$，

$$f(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x}{2})^n=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)x^n,\quad x\in(-1,1).$$