一、填空题、选择填空题（18%）

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&1&5\\-3&1&3\\2&0&0\end{pmatrix}$，则 $|A|=$ <u> -4 </u>．

【解析】$|A|=\begin{vmatrix}4&1&5\\-3&1&3\\2&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{3+1}2\begin{vmatrix}1&5\\1&3\end{vmatrix}=-4$．

2. 齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$ 有非零解的充要条件是【 D 】．

A. $r(A)\le n$ B. $r(A)=n$ C. $r(A)<m$ D. $r(A)<n$

【解析】$A_{m\times n}x=0$ 有非零解的充要条件是有该方程有自由未知量，即 $r(A)<n$．选 D.

3. 设 A 都是 n 阶方阵，满足 $A^2+3A-5E=0$，则 $(A+5E)^{-1}=$ <u>$-\dfrac{A-2E}{5}$</u>．

【解析】要求 $(A+5E)^{-1}$,必须利用方程 $A^2+3A-5E=0$，构造出 $(A+5E)B=E$，

令 $(A+5E)(A+kE)=lE$，即 $A^2+(k+5)A+5kE=lE$，根据题意，令 $k+5=3$，得 $A^2+3A-10E=lE$，再由 $A^2+3A-5E=0$ 得 $-5E=lE$,即 $k=-2,l=-5$，亦即 $(A+5E)(A-2E)=-5E$,解得

$(A+5E)^{-1}=-\dfrac{A+2E}{5}$．

4. 设 A,B 都是 n 阶方阵，且 $(AB)^2=E$，则有【 D 】

A. $A^{-1}=B$ B. $AB=-E$ C. $AB=E$ D. $A^{-1}=BAB$

【解析】由 $(AB)^2=E$ 可得 $|A|^2|B|^2=1$，所以，A,B 都可逆，由 $(AB)^2=ABAB=E$ 两边左乘以 A^{-1} 得 $A^{-1}=BAB$,选 D.

5. 设 3 阶方阵 A 的特征值分别为 $-1,2,3$，则 $|2A^2|=$ <u> 288 </u>．

【解析】$|2A^2|=8|A|^2=8\times(-1\times2\times3)^2=288$．

6. 设二次型 $f=kx_1^2+x_2^2+(k+2)x_3^2+2x_1x_2$ 正定，则 k 满足 <u>k>1</u>．

【解析】$f=kx_1^2+x_2^2+(k+2)x_3^2+2x_1x_2$ 对应的实对称矩阵为 $A=\begin{pmatrix}k&1&0\\1&1&0\\0&0&k+2\end{pmatrix}$，由题意 A 正定，所以，$k>0,k-1>0,(k+2)(k-1)>0$，即 $k>1$.

二、解答下列各题（36%）

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&2&4\\3&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\\0&3\end{pmatrix}$,求 $(2E-A^T)B$．

【解析】$(2E-A^T)B=\left(\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&2&1\\2&4&1\end{pmatrix}\right)\begin{bmatrix}2&1\\-1&3\\0&3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&0&-1\\-2&-4&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-1&3\\0&3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1&-5\\0&-3\\0&-11\end{pmatrix}$.

2. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}2&3&4&5\\3&4&5&2\\4&5&2&3\\5&2&3&4\end{vmatrix}$．

【解析】$\begin{vmatrix}2&3&4&5\\3&4&5&2\\4&5&2&3\\5&2&3&4\end{vmatrix}=14\begin{vmatrix}1&1&1&1\\3&4&5&2\\4&5&2&3\\5&2&3&4\end{vmatrix}=14\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-1\\0&1&-2&-1\\0&-3&-2&-1\end{vmatrix}=14\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-1\\0&0&-4&0\\0&0&4&-4\end{vmatrix}$

$$=14\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-1\\0&0&-4&0\\0&0&0&-4\end{vmatrix}=14\times16=224\ .$$

3. 已知 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{bmatrix}$，且 $X=AX+B$,求矩阵 X .

【解析】由 $X=AX+B$ 得 $(E-A)X=B$，解得 $X=(E-A)^{-1}B$.

方法 1：$(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\1&0&2\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}0&2&1\\-3&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$， $X=(E-A)^{-1}B=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\\1&-1\end{pmatrix}$.

方法 2：$(E-A,B)=\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\1&0&-1&2&0\\1&0&2&5&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&1&2&4&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&0&3&3&-3\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&0&1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&0&2&0\\0&0&1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&3&-1\\0&1&0&2&0\\0&0&1&1&-1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\\1&-1\end{pmatrix}.$$

三、解答下列各题（36%）

1. 方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+\ \ x_4=3\\ x_1+4x_2+5x_3+2x_4=2\\ 2x_1+9x_2+8x_3+3x_4=7\\ 3x_1+7x_2+7x_3+2x_4=12\end{cases}$ 是否有解？若有解，求出其所有解.

【解析】增广矩阵

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&2&3&1&3\\1&4&5&2&2\\2&9&8&3&7\\3&7&7&2&12\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&3&1&3\\0&2&2&1&-1\\0&5&2&1&1\\0&1&-2&-1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_4}\begin{pmatrix}1&2&3&1&3\\0&1&4&2&-4\\0&5&2&1&1\\0&1&-2&-1&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&3&1&3\\0&1&4&2&-4\\0&0&-18&-9&21\\0&0&-6&-3&7\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&3&1&3\\0&1&4&2&-4\\0&0&6&3&-7\\0&0&-6&-3&7\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&3&1&3\\0&1&4&2&-4\\0&0&6&3&-7\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[3r_2]{6r_1}\begin{pmatrix}6&12&18&6&18\\0&3&12&6&-12\\0&0&6&3&-7\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}6&12&0&-3&39\\0&3&0&0&2\\0&0&6&3&-7\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}6&0&0&-3&31\\0&3&0&0&2\\0&0&6&3&-7\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&-1/2&31/6\\0&1&0&0&2/3\\0&0&1&1/2&-7/6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}，对应同解方程组\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}x_4+\dfrac{31}{6}\\ x_2=\dfrac{2}{3}\\ x_3=-\dfrac{1}{2}x_4-\dfrac{7}{6}\\ x_4=x_4\end{cases},$$

因为 $r(A,b)=r(A)=3<n=4$，所以方程组有无穷多组解。

令 $x_4=2c$ 得，通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}+\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}31\\4\\-7\\0\end{pmatrix}$， $c\in\mathbb{R}$.

【注】考生主要问题，增广矩阵化简不到位。

2. 设有向量组 $A:\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\5\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\0\\3\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\4\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}2\\-1\\6\\2\end{pmatrix}$,判断向量组 A 的线性相关性，求出 A 的一个最大无关组，并将 A 中最大无关组之外的向量用最大无关组线性表示.

【解析】$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&0&2&1&2\\1&2&0&1&-1\\2&1&3&0&6\\2&5&-1&4&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&2&1&2\\0&2&-2&0&-3\\0&1&-1&-2&2\\0&5&-5&2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&0&2&1&2\\0&1&-1&2&-5\\0&1&-1&-2&2\\0&5&-5&2&-2\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&2&1&2\\0&1&-1&2&-5\\0&0&0&-4&7\\0&0&0&-8&23\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&2&1&2\\0&1&-1&2&-5\\0&0&0&-4&7\\0&0&0&0&9\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&2&1&2\\0&1&-1&2&-5\\0&0&0&-4&7\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&2&1&0\\0&1&-1&2&0\\0&0&0&-4&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&2&1&0\\0&1&-1&2&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

所以，A 的一个最大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$，$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2+0\alpha_4+0\alpha_5$.

【注】考生主要问题，矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$ 化简不到位。

3. 设二次型 $f=x_1^2+2x_2^2-2x_3^2+4x_1x_3$，求正交变换 $x=Py$，将二次型 f 化为标准形.

【解析】f 对应对称阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\2&0&-2\end{pmatrix}$,

特征多项式：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&2\\0&2-\lambda&0\\2&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^2(\lambda+3)$，特征值：$\lambda=-3,2,2$.

当 $\lambda=2$ 时，$(A-\lambda E)x=0$ 的系数阵：$A-2E=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&0&0\\2&0&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

对应的方程组：$\begin{cases}x_1=2x_3\\x_2=x_2\end{cases}$，特征向量：$p_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

当 $\lambda=-3$ 时，$(A-\lambda E)x=0$ 的系数阵：$A+3E=\begin{pmatrix}4&0&2\\0&5&0\\2&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

对应的方程组：$\begin{cases}2x_1=-x_3\\x_2=0\end{cases}$，特征向量：$p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$.

正交变换 $x=\begin{pmatrix}2/\sqrt5&0&1/\sqrt5\\0&1&0\\1/\sqrt5&0&-2/\sqrt5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，$f$ 的标准形为 $f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$.

【注】①关于 $\lambda=2$ 的两个特征向量不惟一，只要 $p=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 满足 $x_1=2x_3$，且正交即可。

②考生主要问题：特征值计算错误；特征向量计算错误或关于 $\lambda=2$ 只求了一个特征向量。

四、解答下列各题（10%）（本题适用于 2014 级信息、会金、航空、数理学院各专业）

1．设 A 为 n 阶对称矩阵，B 为 n 阶正交矩阵，证明: $B^{-1}AB$ 也为对称矩阵.

【证明】由题意 $A=A^T$，$B^{-1}=B^T$，所以，$(B^{-1}AB)^T=(B^TAB)^T=B^TA^T(B^T)^T=B^{-1}AB$，即 $B^{-1}AB$ 是对称阵。

2．设 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似，求 x,y 的值.

【解析】由题意，$\begin{cases}a_{11}+a_{22}+a_{33}=b_{11}+b_{22}+b_{33}\\|A|=|B|\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2+0+x=2+y-1\\-2=-2y\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$.

四、解答下列各题（10%）（本题适用于 2014 级机车学院各专业）

1．设 A 为 n 阶正交阵，证明 A^{-1} 及 A^* 也是正交阵.

【证明】由题意 $A^TA=E$,从而，A 与 A^T 互逆，$(A^{-1})^TA^{-1}=(A^T)^TA^T=AA^T=E$,即 A^{-1} 是正交阵；

又由 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$ 得 $|A|A^{-1}=A^*$,从而，$(A^*)^TA^*=(|A|A^{-1})^T(|A|A^{-1})=|A|^2(A^T)^{-1}A^T=|A|^2E=E$（这是由于 A 为正交阵，$|A|^2=1$），所以，A^* 也是正交阵.

2．设 $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&y\end{pmatrix}$ 相似，求 x,y 的值及满足 $P^{-1}AP=B$ 的可逆矩阵 P .

【解析】由 A,B 相似可得，$\begin{cases}a_{11}+a_{22}+a_{33}=b_{11}+b_{22}+b_{33}\\|A|=|B|\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2+x+1=-1+2+y\\-2(x-2)=-2y\end{cases}$ 解得 $x-2=y$.

又 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda&0&0\\2&x-\lambda&2\\3&1&1-\lambda\end{vmatrix}=-(2+\lambda)[\lambda^2-(x+1)\lambda+x-2]$，再利用 A , B 特征值相同可得，$y=-2$，即 $x=0$（可代入 $-(2+\lambda)[\lambda^2-(x+1)\lambda+x-2]=0$ 中验证，特征值为 $\lambda=-1,-2,2$）.

于是 $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&0&2\\3&1&1\end{pmatrix}$，特征值为 $\lambda=-1,-2,2$.

对于 $\lambda=-2$，$A-\lambda E=A+2E=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&2&2\\3&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，特征向量：$p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$；

对于 $\lambda=-1$，$A-\lambda E=A+E=\begin{pmatrix}-1&0&0\\2&1&2\\3&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$，特征向量：$p_2=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$；

对于 $\lambda=2$，$A-\lambda E=A-2E=\begin{pmatrix}-4&0&0\\2&-2&2\\3&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，特征向量：$p_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，

所求可逆矩阵 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$.