



## 一、填空题(21%)

1. 设矩阵  $A, B$  为可逆方阵, 则  $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} =$  \_\_\_\_\_.
2. 设  $A$  为 2019 阶方阵, 满足  $A^T = -A$ , 则  $|A| =$  \_\_\_\_\_.
3. 设三元列向量  $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T$ ,  $\beta = (b_1, b_2, b_3)^T$ ,  $\alpha \neq O, \beta \neq O$ , 则  $R(\alpha\beta^T) =$  \_\_\_\_\_.
4. 已知实矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1/3 & a \\ b & 1/3 \end{pmatrix} (a > 0)$  是正交阵, 则  $b =$  \_\_\_\_\_.
5. 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 则下列命题一定成立的是【     】  
A.  $(AB)^k = A^k B^k$     B.  $|-A| = |A|$     C.  $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$     D. 若  $A$  可逆,  $k \neq 0$ , 则  $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
6.  $n$  阶方阵  $A$  与对角阵相似的充要条件是【     】  
A.  $A$  有  $n$  个互不相同的特征值    B.  $A$  是实对称阵  
C.  $A$  有  $n$  个不同的特征向量    D.  $A$  有  $n$  个线性无关的特征向量
7. 下列标准形哪个是属于 4 元二次型  $f$  的正定规范形【     】  
A.  $y_1^2 + 2y_2^2$     B.  $y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$     C.  $y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2$     D.  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$

## 二、解答下列各题(36%)

1. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , 求  $(A^T - E)B$ .
2. 计算行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1-x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 3-x \end{vmatrix}$ .
3. 已知  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $XA = B$ , 求  $X$ .

## 三、解答下列各题(33%)

1. 当  $a, b$  取何值时, 线性方程组  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = b \end{cases}$  无解? 有惟一解? 有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.
2. 已知向量  $\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\beta_2 = \begin{pmatrix} c \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\beta_3 = \begin{pmatrix} d \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  与向量组  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$  具有相同的秩, 且  $\beta_3$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 求  $c, d$  的值.
3. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = (kE + A)^2$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . (1) 求  $B$  的特征值; (2) 求  $k$  的值, 使  $B$  为正定阵.

## 四、解答下列各题(4%+6%=10%)

1. 设  $A, B, A+B$  都可逆, 证明  $A^{-1} + B^{-1}$  也可逆.
2. 某城市某路段的交通流量如右图所示(单位: 辆/小时), 写出该路段交通流量  $x_1, x_2, x_3$  满足的方程组.

