高等数学（2）综合练习 5 参考解答

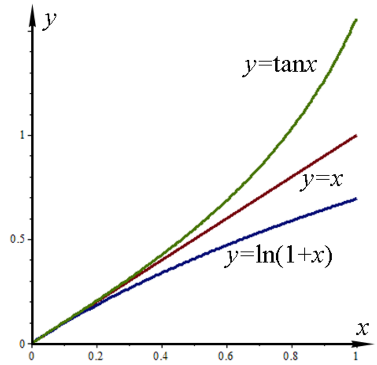
一、填空与选择填空题（18%）

1．设 $g(u)$ 在 R 上连续，则 $d(\int_{\sin x}^{2x}[\int_0^t g(u)du]dt)=$__________________.

【解析】记 $f(t)=\int_0^t g(u)du$，则

$$d(\int_{\sin x}^{2x}[\int_0^t g(u)du]dt)=d(\int_{\sin x}^{2x}f(t)dt)=\left[\int_{\sin x}^{2x}f(t)dt\right]'dx=[2f(2x)-\cos xf(\sin x)]dx$$

$$=[2\int_0^{2x}g(u)du-\cos x\int_0^{\sin x}g(u)du]dx.$$



2. 设 $I=\int_0^1 xdx$，$J=\int_0^1\ln(1+x)dx$，$K=\int_0^1\tan xdx$，则【　　】

A. $K<I<J$　　B. $J<I<K$

C. $I<J<K$　　D. $I<K<J$

【解析】因为当 $0<x<\pi/2$ 时，$\ln(1+x)<x<\tan x$，所以，应选 B.

【注】容易证明 $0<x<\pi/2$ 时，$\ln(1+x)<x<\tan x$.

3．积分 $\int_0^{+\infty}x^3e^{-x^2}\mathrm{d}x=$________.

【解析】令 $x^2=t$，$\int_0^{+\infty}x^3e^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}t^{\frac{3}{2}}e^{-t}\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}te^{-t}dt=\frac{1}{2}$，应填 $\frac{1}{2}$.

【注意 $\int_0^{+\infty}u^ne^{-u}du=n!,n=0,1,2,\cdots$】

4．设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则有【 B 】

A.　$a_n^2<a_n$，$n=1,2,\cdots$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛　　C. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 可能发散

【解析】B 成立。因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，所以，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$，当 n 充分大时，$0\le a_n<1$，从而 $0\le a_n^2\le a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛。对于 A，C：例如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，但 $a_1=a_1^2$，不满足 $a_1>a_1^2$，$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ 不满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$；对于 D，有 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛可得 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 收敛.

5. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}a_n=$__________.

【解析】由 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)$ 收敛得，$\lim_{n\to\infty}(a_n-3)=0$，所以，$\lim_{n\to\infty}a_n=3$.

6．设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ x+1, & 0<x\le\pi\end{cases}$ 为一个周期上的表达式，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 在 $x=3\pi$ 处收敛于 $\underline{\ \frac{\pi}{2}\ }$.

【解析】$s(3\pi)=s(\pi)=\frac{1}{2}[f(\pi^-)+f(\pi^+)]=\frac{\pi+1+(-1)}{2}=\frac{\pi}{2}$.

二、计算下列各题（42%）

1. 计算不定积分 $\int 2x\cos(1+x^2)\mathrm{d}x$.

【解】$\int 2x\cos(1+x^2)\mathrm{d}x=\int\cos(1+x^2)d(1+x^2)=\sin(1+x^2)+C.$

2. 计算不定积分 $\int x\ln x\mathrm{d}x$.

【解】$\int x\ln x\mathrm{d}x=\int\ln x\mathrm{d}\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\int\dfrac{x^2}{2}d\ln x=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\int\dfrac{x}{2}dx=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}+\mathrm{C}$.

3. 设 $\varphi(x)=\int_{-1}^{x^2}\dfrac{t^3+1}{t^2+1}dt$，求 $\varphi'(x)$ 及 $\varphi(1)$.

【解】$\varphi'(x)=(x^2)'\dfrac{(x^2)^3+1}{(x^2)^2+1}=2x\dfrac{x^6+1}{x^4+1}$；

$$\varphi(1)=\int_{-1}^{1}\frac{t^3+1}{t^2+1}dt=\int_{-1}^{1}(\frac{t^3}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1})dt=\int_{-1}^{1}\frac{1}{t^2+1}dt=2\int_{0}^{1}\frac{1}{t^2+1}dt=2\arctan t\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

4. 判定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}+3}{3n^2+2n+1}$ 的敛散性.

【解】由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{\sqrt{n}+3}{3n^2+2n+1}}{\dfrac{\sqrt{n}}{3n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+3}{3n^3+2n+1}\dfrac{3n^2}{\sqrt{n}}=1$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{3n^2}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，

所以原级数收敛.

5. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.

【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{n}}+\cdots+\dfrac{1}{1+\dfrac{n}{n}}\right)=\int_0^1\dfrac{dx}{1+x}=\ln 2$.

6. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n x^n}{n}$ 的收敛域.

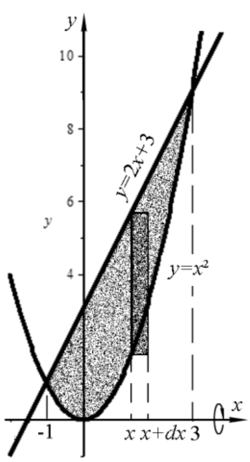
【解】记 $a_n=\dfrac{3^n}{n}$，则 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{3^{n+1}n}{(n+1)\cdot 3^n}\right|=3$，$R=\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{1}{3}$,收敛区间 $-\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{3}$，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n x^n}{n}\Big|_{x=-\frac{1}{3}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n x^n}{n}\Big|_{x=\frac{1}{3}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，所以收敛域为 $[\dfrac{-1}{3},\dfrac{1}{3})$；

三、解答下列各题（28%）

1. 设平面区域 D 由 $y=x^2$ 与 $y=2x+3$ 所围成.

（1）求 D 的面积；（2）将 D 绕 x 轴旋转一周，求旋转体的体积.

【解】(1)区域 D 如右图所示.



面积元素：$dA=(2x+3-x^2)dx,-1\le x\le 3$，

面积：$A=\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)dx=\left[x^2+3x-\dfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3}=(9-1)+12-\dfrac{27-(-1)^3}{3}=\dfrac{32}{3}$；

(2) 体积元素：$dV=\pi[(2x+3)^2-(x^2)^2]dx=\pi[(2x+3)^2-x^4]dx,-1\le x\le 3$

$$V=\pi\int_{-1}^{3}[4x^2+12x+9-x^4]dx=\pi\left[\frac{4}{3}x^3+6x^2+9x-\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{3}$$

$$=\pi[\frac{4(27+1)}{3}+6(9-1)+36-\frac{243+1}{5}]=\pi[\frac{112}{3}+84-\frac{244}{5}]=\frac{1088}{15}\pi.$$

2. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n}$的和函数.

解：（1）记$s(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$，$-1\le t<1$，则$s'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}=\frac{1}{1-t},|t|<1$，

$$s(t)=s(t)-s(0)=\int_0^t s'(u)du=\int_0^t\frac{1}{1-u}du=-\ln(1-t),-1\le t<1，$$

令$t=3x$得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n}=-\ln(1-3x),-\frac{1}{3}\le x<\frac{1}{3}$.

2. 设$f(x)=\frac{1}{(x+2)(x+3)}$展开为$x+1$的幂级数.

解：$f(x)=\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{1+(x+1)}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x+1}{2}}$,

利用$\frac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n,|t|<1$可得,

$$\frac{1}{1+(x+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n,-2<x<0，\quad \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x+1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x+1)^n,-3<x<1,$$

$$f(x)=\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[1-\frac{1}{2^{n+1}}](x+1)^n，\quad -2<x<0.$$

4. 用一个质量为 4kg 的吊桶从 30m 深的水井中取水，初始时刻桶内有 40kg 水，并以 2m/s 的速度上升，桶内的水以 0.2kg/s 的速度流出，问将水吊至井口需要做多少功（忽略吊绳的质量）？

解：水桶底部距水面x处，桶与桶中的水总质量为：

$$m=44-t\times0.2=44-\frac{x}{2}\times0.2=44-0.1x\,(kg),$$

功元素：$dw=(44-0.1x)gdx,\ 0\le x\le 30$，

$$w=g\int_0^{30}(44-0.1x)dx=g(1320-\frac{0.1}{2}\times30^2)=1275g\approx12495(J)$$

★如果假定每米绳的质量为$0.1kg$，则功为多少？【提示：$dw=[44-0.1x+(30-x)\times0.1]gdx$】

四、解答下列各题（12%）

1. 设$f(x)$连续，且$f(x)=x+2x^2\int_0^1 f(x)dx$，求$f(x)$.

解：由$f(x)$连续可知，可记$a=\int_0^1 f(x)dx$，则$f(x)=x+2ax^2$，两边积分可得，

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xdx+2\int_0^1 ax^2dx$，即$a=\frac{1}{2}+\frac{2a}{3}$，解得$a=\frac{3}{2}$，$f(x)=x-1$.

2. 举例说明元素法的定积分中应用(至少说出三种应用).

【答】如第三题 1 中面积元素：$dA=(2x+3-x^2)dx,-1\le x\le3$，面积为$A=\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)dx$；

体积元素：$dV=\pi[(2x+3)^2-x^4]dx,-1\le x\le3$，体积$V=\pi\int_{-1}^{3}[4x^2+12x+9-x^4]dx$；

又如：第三题 4 中功元素$dw=(44-0.1x)gdx,\ 0\le x\le30$，功$w=g\int_0^{30}(44-0.1x)dx$.