第 09 讲： 向量组的线性表示

目的与要求：理解向量组的“线性表示”、“等价”等概念，强化求解线性方程组的方法。

重　　　　点：向量组的线性表示（求解线性方程组）。

难　　　　点：向量组之间线性表示的矩阵形式。

一、向量及其运算

● 向量：只有一个列或一个行的矩阵.

列向量：$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

行向量：$\alpha^T = (a_1, \cdots, a_n)$.

【注】除特别声明之外，向量均指列向量。

● 单位坐标向量：$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

● 线性运算：数乘运算、加法运算

$$k\alpha, k\alpha + l\beta,$$

其中 α, β 为 n 元列向量，$k, l \in R$.

● 线性组合：设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为 n 元列向量，$k_1, \cdots, k_r \in R$，则称

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r,$$

为向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 的一个**线性组合**，称 $k_1, \cdots, k_r$ 为组合系数.

二、向量及向量组的线性表示

● 线性表示：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta$ 为 n 元列向量，若存在 $k_1, \cdots, k_r \in R$，使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r,$$

则称向量 β 可由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ **线性表示.**

例如：设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$

则由 $\alpha_1 + \alpha_3 = 2\alpha_2$ 得到，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 中任何一个向量都可有其余两个向量线性表示；

又如：对于任意n元列向量$\alpha=(a_1,\cdots,a_n)^T$，有

$$\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}=a_1\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\cdots+a_n\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix},$$

即任意n元向量都可由n元单位坐标向量线性表示；

再如：$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$不能由$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$线性表示. 即方程组

$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$无解.

例1 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\2&1&4\\2&3&0\end{bmatrix}$,$\beta=\begin{bmatrix}1\\0\\3\\1\end{bmatrix}$,证明 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,并求其表示。

【方法】构造 $Ax=\beta$,可用初等行变换化 (A,β) 为行最简形,并求出其解,既证明了 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,同时也得到其表示结果.

解:$(A,\beta)=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&-1&2&1\\0&1&-2&-1\end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\\ \begin{array}{cccc}\uparrow&\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ \beta_1&\beta_2&\beta_3&\gamma\end{array}\end{array}$$

由此得到 $r(A)=r(A,b)=2$，即 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，若记最后的行最简形为 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma)$，则

$$\gamma=2\beta_1-\beta_2+0\beta_3,$$

容易验证： $\beta=2\alpha_1-\alpha_2+0\alpha_3$.【验】

【**注**】上述通过 $\gamma = 2\beta_1 - \beta_2 + 0\beta_3$，得到

$$\beta = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 0\alpha_3,$$

其正确性表述如下：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta) \xrightarrow{r} (\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma),$$

表明方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 与

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = \gamma$$

同解，所以，其表示系数是一样的.

● **一组向量由另一组向量线性表示：**

设 A 组：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$，记 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$，$B$ 组：$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$，记 $B=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$，若 B 组的每一个向量都可由 A 组的向量线性表示，则称 **B 组可由 A 组线性表示.**

即存在 $k_{11}, k_{21}, \cdots, k_{r1}$ 使得

$$\beta_1 = k_{11}\alpha_1 + k_{21}\alpha_2 + \cdots + k_{r1}\alpha_r,$$

存在 $k_{12}, k_{22}, \cdots, k_{r2}$ 使得

$$\beta_2 = k_{12}\alpha_1 + k_{22}\alpha_2 + \cdots + k_{r2}\alpha_r,$$

$$\cdots\cdots$$

存在 $k_{1s}, k_{2s}, \cdots, k_{rs}$ 使得

$$\beta_s = k_{1s}\alpha_1 + k_{2s}\alpha_2 + \cdots + k_{rs}\alpha_r,$$

改写为矩阵形式：

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{r1} & k_{r2} & \cdots & k_{rs} \end{bmatrix}.$$

即存在 $K = (k_{ij})_{r\times s}$，使得

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)K.$$

◎ **向量组 B 可由向量组 A 组线性表示**

$\Longleftrightarrow$ **矩阵方程 $AX = B$ 有解**

$\Longleftrightarrow r(A) = r(A, B).$

例 2 设 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$，且 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)K$，则矩阵 $K=$ ________.

解：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$，

即矩阵 $K=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$.

例 3 设 P,Q 为 3 阶方阵，且 $P^TAP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，

$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，

则 $Q^TAQ=$ ______.

解：$Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xlongequal{\text{记作}}PR$，则

$$Q^TAQ=R^T(P^TAP)R=R^T\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}R$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

三、向量组的等价关系

● 两个向量组等价：它们可以互相线性表示。

定理 设有两个向量组：

A 组：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$，记 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$，

B 组：$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$，记 $B=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$，

(1) B 组可由 A 组线性表示 $\Longleftrightarrow$

存在 K 使得 $AK=B$ 即 $AX=B$ 有解

$\Longleftrightarrow r(A)=r(A,B)$；

（2）若 B 组可由 A 组线性表示，则

$$r(A)=r(A,B)\geqslant r(B);$$

（3）A 组与 B 组等价 $\Longleftrightarrow$

$AX=B$ 与 $BY=A$ 同时有解

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}r(A)=r(A,B)\\r(B)=r(B,A)\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow r(A)=r(B)=r(A,B).$$

【注】$r(A,B)=r(B,A)$，因为 $(A,B)\xrightarrow{c}(B,A)$.

例 4 设向量组 A：$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$,

B：$\beta_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}2\\1\\6\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}$. 证明 A 组与 B 组等价.

解：记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则

$$(A,B)=\begin{bmatrix}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\2&3&2&3&6&4\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\0&1&0&1&2&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\0&0&1&-1&1&-1\end{bmatrix},$$

$r(A)=3=r(A,B)$，即 B 组可由 A 组线性表示；

又 $B=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&1\\3&6&4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&2\\0&-3&-3\\0&0&-2\end{bmatrix}$,

$$r(B)=3=r(A,B)=r(B,A),$$

即 A 组也可由 B 组线性表示，从而 A 组与 B 组等价.

【注】证明 A 组等价于 B 组，只需证明

$$r(A)=r(B)=r(A,B),$$

本例的解答过程是为了强调两向量组等价概念.

【练习】设 A：$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$，

B：$\beta_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}2\\1\\6\end{bmatrix}$，将 β_1,β_2 组用 A 组线性表示.

【解】$(A,B)=\begin{bmatrix}1&1&1&1&2\\0&1&-1&2&1\\2&3&2&3&6\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&1&2\\0&1&-1&2&1\\0&1&0&1&2\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&1&1&1&2\\0&1&-1&2&1\\0&0&1&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&0&0&1&-1\\0&1&0&1&2\\0&0&1&-1&1\end{bmatrix}$，

容易验证 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_2=-\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$.

【注】实质上是解矩阵方程 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)X=(\beta_1,\beta_2)$，得

$X=\begin{bmatrix}1&-1\\1&2\\-1&1\end{bmatrix}$，$X$ 的两个列分别表示 β_1,β_2 的表示系数.

第 10 讲： 向量组的线性相关性

目的与要求： 理解向量组的线性相关性概念、理论，初步掌握研究向量组线性相关性的推理方法。

重　　点： 线性相关性定义与定理的应用。

难　　点： 向量组的线性相关性理论分析。

【注】本节推理较多，是本课程比较难的一节！

一、有关理论复习

1. 矩阵的秩

① 定义：$r(A) = A$ 的最高阶非零子式的阶数.

约定 $r(O) = 0$.

② 若 $A \neq 0$，则 $r(A) \geqslant 1$；

③ $r(A_{m\times n}) \leqslant \min(m,n)$；$r(A) = r(A^T)$；

④ 可逆方阵的秩 = 它的阶数；

⑤ 初等变换不改变矩阵的秩；

$\Rightarrow$ 若 P, Q 可逆，则 $r(PAQ) = r(A)$；

⑥ $r(A,B) \geqslant r(A)$，$r(A,B) \geqslant r(B)$.

2. 方程组的解与矩阵的秩

① $A_{m\times n}x=0$ 有非零解(有无穷多组解)

$\Longleftrightarrow r(A)<n$, 【有自由未知量】

其中 n 为未知量的个数.

【逆否】 $A_{m\times n}x=0$ 只有零解 $\Longleftrightarrow r(A)=n$.

② $Ax=\beta$ 无解 $\Longleftrightarrow r(A)<r(A,\beta)$, 【有矛盾方程】

$Ax=\beta$ 有解 $\Longleftrightarrow r(A)=r(A,\beta)$,

$Ax=\beta$ 有惟一解 $\Longleftrightarrow r(A)=r(A,\beta)=n$,

$Ax=\beta$ 有无穷多组解 $\Longleftrightarrow r(A)=r(A,\beta)<n$,

【有自由未知量】

其中 n 为未知量的个数.

③ $AX=B$ 有解 $\Longleftrightarrow r(A)=r(A,B)$.

3. 向量组线性表示与矩阵的秩

① β 可由 A 组线性表示 $\Longleftrightarrow Ax=\beta$ 有解

$\Longleftrightarrow r(A)=r(A,\beta)$;

② B 组可由 A 组线性表示

$\Longleftrightarrow \exists K$, 使得 $B=AK$

$\Longleftrightarrow AX=B$ 有解 $\Longleftrightarrow r(A)=r(A,B)$

③ B 组可由 A 组线性表示 $\Rightarrow r(B)\leqslant r(A)$;

④ A 组与 B 组等价

$\Longleftrightarrow r(A)=r(B)=r(A,B)$.

【补充命题】

$$证明:r(AB) \leqslant min\{r(A), r(B)\}.$$

【分析】 要证 $r(AB) \leqslant min\{r(A), r(B)\}$,只要证明

$$r(AB) \leqslant r(A) \text{ 及 } r(AB) \leqslant r(B).$$

【证明】 记 $AB = C$,则 B 可视为 $AX = C$ 的解(矩阵),从而,

$r(A) = r(A,C) \geqslant r(C) = r(AB)$;

另一方面,$B^TA^T = C^T$,即 $B^TY = C^T$ 有解,故

$$r(B^T) = r(B^T,C^T) \geqslant r(C^T),$$

即 $r(B) = r(B^T) \geqslant r(C^T) = r(C) = r(AB)$,

综上所述,$r(AB) \leqslant min\{r(A), r(B)\}$.

【例】 设 α,β 为 n 元非零列向量,则 $r(\alpha\beta^T) = 1$.

【证】 $\because \alpha\beta^T \neq 0$,$\therefore r(\alpha\beta^T) \geqslant 1$;又 $r(\alpha\beta^T) \leqslant min\{r(\alpha),r(\beta)\}$

$= r(\alpha) = r(\beta) = 1$,故 $r(\alpha\beta^T) = 1$.

二、基本概念

定义 1 如果向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r(r\geqslant 2)$ 中至少有一个向量能由其余向量线性表示，则称 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ **线性相关**，否则称 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ **线性无关**.

◆ 约定：若向量 $\alpha\neq 0$，则称 α 线性无关.

如：$\alpha=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$可以互相线性表示，即 α,β 线性相关.

又如：$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}$，满足

$$\alpha_3=2\alpha_2-\alpha_1,$$

即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关。

再如：三维单位坐标向量 e_1,e_2,e_3 线性无关.

定义 2 若存在不全为零的数 $k_1,\cdots,k_r$ 使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=0,$$

则称 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ **线性相关**，否则称 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ **线性无关**.

◎ 定义 1 与定义 2 等价.

【**证***】当 $r=1$ 时，由定义1的约定可知，它与定义2等价。以下设 $r\geqslant 2$：

"1⇒2"：若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，由定义1，不妨设 α_1 可由 $\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，即存在数 $k_2,\cdots,k_r$，使得

$$\alpha_1=k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r,$$

即

$$1\alpha_1-k_2\alpha_2-\cdots-k_r\alpha_r=0,$$

根据定义2，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关；

"2⇒1"：若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，由定义2，存在不全为零的数 $k_1,\cdots,k_r$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0,$$

不妨设 $k_1\neq 0$，则 $\alpha_1=-\dfrac{k_2}{k_1}\alpha_2-\cdots-\dfrac{k_r}{k_1}\alpha_r$，根据定义1，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性相关. #

二、理论分析及应用

◎ $\alpha_1,\cdots,\alpha_r(r\geq 2)$ 线性相关 $\Longleftrightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 中至少有一个可由其余向量线性表示.

◎ $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性相关

$\Longleftrightarrow$ 方程组 $x_1\alpha_1+\cdots+x_r\alpha_r=0$ 有非零解

$\Longleftrightarrow r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)<r$.

◎ $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关 $\Longleftrightarrow r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=r$

$\Longleftrightarrow$ 方程组 $x_1\alpha_1+\cdots+x_r\alpha_r=0$ 只有零解.

【例 3】$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}6\\7\\8\end{bmatrix}$，判定 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性相关性.

【解】方法：用矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$的秩判定 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性相关性.

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1&2&6\\2&3&7\\3&4&8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&6\\0&-1&-5\\0&-2&-10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&6\\0&1&5\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

【注】$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中任意两个向量都线性无关.

◎ n 个 n 元列向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关

$$\Longleftrightarrow |A| = |\alpha_1,\cdots,\alpha_n| \neq 0 \Longleftrightarrow A \text{ 可逆}.$$

如：3个3元列向量 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\4\\5\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\0\\6\end{bmatrix}$ 线性无关.

显然 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&4&0\\3&5&6\end{vmatrix}=24\neq 0$.

◎ $n+1$ 个 n 元向量必线性相关.

【$\because r(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n+1})\leqslant n<n+1$】

例如：3 个 2 元列向量 $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$ 线性相关，因为 $r\left(\begin{bmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{bmatrix}\right)=2<3$.

◎ 含零向量的向量组必线性相关.

【∵ 零向量总能由其他向量线性表示】

◎ 两个向量线性相关 $\Longleftrightarrow$ 它们的分量对应成比例（即一个向量是另一个向量的若干倍）.

【不妨设 α 可由 β 线性表示，即 $\alpha = k\beta$】

【例 4】设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，

$\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$，讨论 β_1,β_2,β_3 的线性相关性。

解法 ① 令 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$，则

$$(x_1+x_3)\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+(x_2+x_3)\alpha_3=0$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以，必有

$$\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_1+x_2=0\\x_2+x_3=0\end{cases} \text{即} \begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0 \qquad (*)$$

其系数行列式：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&2\end{vmatrix}=2\neq0,$$

$r(A)=3$，即方程组（$*$）只有零解，从而 β_1,β_2,β_3 线性无关.

【注】可以用（$*$）的系数阵 A 的秩 $r(A)=3$，即 A 可逆，$x=A^{-1}0=0$，从而（$*$）只有零解.

解法 ② 由 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$ 得

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

记上式为 $B=AK$，易得$|K|=2$(计算见解法①)，即 K 可逆，从而 $r(B)=r(A)=3$，故 β_1,β_2,β_3 线性无关.

又如：设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为任意 4 个列向量，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_4$，$\beta_4=\alpha_4+\alpha_1$，则 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关.

【证法 ①】由 $\beta_1-\beta_2+\beta_3-\beta_4=0$ 得，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关.

【证法 ②】由 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，记为 $B=AK$，容易求出 $r(K)=3$，从而 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\leqslant min\{r(A),r(K)\}\leqslant 3<4$，则 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关.

【研讨】

对于向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$，构造向量组：

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_r=\alpha_r+\alpha_1,$$

则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 的线性相关性如何？

【结论：当 $r=$ 奇数时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的线性相关性相同；当 $r=$ 偶数时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性相关】

定理1 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta$线性相关，则$\beta$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$唯一地线性表示。

【证法1】 记$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$，则由$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关及$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta$线性相关，得

$$r(A)=r\leqslant r(A,\beta)<r+1,$$

从而，$r(A)=r(A,\beta)=r$等于"$Ax=\beta$"的未知量个数，方程组$Ax=\beta$有惟一解，即β可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$惟一地线性表示.

【证法 2】(阅读) 由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关可知，存在 $k_1,\cdots,k_r,k$ 不全为零，使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r+k\beta=0,$$

若 $k=0$，则 $k_1,\cdots,k_r$ 不全为零，$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=0$，这与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关矛盾，所以，必有 $k\neq 0$，由此得 $\beta=-\frac{k_1}{k}\alpha_1-\cdots-\frac{k_r}{k}\alpha_r$ 即 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表示；

再证表示的唯一性：记 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$，设 $Ax=\beta,Ay=\beta$，只需证明必有 $x=y$.

由 $A(x-y)=Ax-Ay=\beta-\beta=0$ 及 $r(A)=r=$ 未知量个数，必有 $x-y=0$，即 $x=y$.

定理 2 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1}$ 必线性相关。

【证明】 因为 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)<r$，所以

$$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1})<r+1,$$

即 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1}$ 线性相关.

【逆否命题】 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1}$ 线性无关，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 必线性无关。

☞ **简言之:“整体无关”⇒“部分无关”;**

“部分相关”⇒“整体相关”.

【例题与练习】

1. 设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\0\\t\\0\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\-4\\5\\-2\end{bmatrix}$, 讨论 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性相关性.

解: 为计算方便,我们用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 构造矩阵 $[\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1]$:

$$[\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1]=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&-4&0\\-1&5&t\\1&-2&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&t-3\\0&0&0\end{bmatrix}$$

当 $t=3$ 时, $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关;

当 $t\neq 3$ 时, $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

2. 阅读并重证($p119,Eg.3.$)

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关,$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关. 则

(1) α_1 可由 α_2,α_3 线性表示;

(2) α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

证*:(1) **方法:用矩阵的秩证明**$(\alpha_2,\alpha_3)x=\alpha_1$ **有解**.

由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关,得 $r(\alpha_2,\alpha_3)=2\leqslant r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,

又由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关,得 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)<3$, 故

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$,所以,$\alpha_1$ 可由 α_2,α_3 线性表示;

(2) **方法:证明方程组**$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)x=\alpha_4$ **无解**.

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$, 而 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\geqslant 3$,

所以,$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\alpha_4$ 无解,即 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,$ α_3 线性表示.

3. 设β可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性表示，但β不能由$\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1}$线性表示，则$\alpha_r$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1},\beta$线性表示.

证： 令$\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_{r-1}\alpha_{r-1}+k_r\alpha_r$，

则$k_r\neq 0$(否则β可由$\alpha_1,\cdots\alpha_{r-1}$线性表示)，即

$$\alpha_r=\frac{1}{k_r}\beta-\frac{k_1}{k_r}\alpha_1-\cdots-\frac{k_{r-1}}{k_r}\alpha_{r-1},$$

从而α_r可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1},\beta$线性表示.

预告：$p121\sim 128$.