ZHUHAI CAMPUS,
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

一、填空题(21%)

1. 若 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & x \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=0$，则 $x=$__________.

【解析】$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & x \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & x \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & x \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-5+x=0$，解得 $x=5$. 应填 5.

2. 设 $A=(a_{ij})_{3\times5}$，$r(A)=3$，则 $Ax=0$ 的基础解系中含有____个解.

【解析】$n=5$，$Ax=0$ 的基础解系中有 $5-3=2$ 个解向量. 应填 2.

3. 矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ 的列向量组的线性相关性__________【填“线性相关”或“线性无关”或“不确定”】

【解析】A 的列向量组为 3 个 2 元向量，是线性相关的. 应填:线性相关.

4. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 正定，则常数 t 满足____________.

【解析】f 对应矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，顺序主子式 $\Delta_1=1>0$，$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix}=4-t^2>0$ 必有 $|t|<2$；又

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & -2t \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=1\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} t & -1 \\ 4 & -2t \end{vmatrix}=4-2t^2>0$$，即 $|t|<\sqrt{2}$，应填：$|t|<\sqrt{2}$.

5. 已知矩阵 $A,B,C_{s\times n}$ 满足 $AC=CB$，则 A,B 分别是【　　】阶方阵.

A. s,s　　B. n,n　　C. s,n　　D. n,s

【解析】由 $AC_{s\times n}=C_{s\times n}B$ 可得，A 为 s 阶方阵，B 为 n 阶方阵，应选 C.

6. 设 A 经过初等行变换变为 B，则【　　】

A. $r(A)<r(B)$　　B. $r(A)=r(B)$　　C. $r(A)>r(B)$　　D. 无法判定 $r(A),r(B)$ 之间的关系

【解析】初等变换不改变矩阵的秩，所以应选 B.

7. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$Ax=b$ 有解，则【　　】

A. 当 $Ax=b$ 有惟一解时，$m=n$　　B. 当 $Ax=b$ 有无穷多组解时，$r(A)<m$

C. 当 $Ax=b$ 有惟一解时，$r(A)=n$　　D. 当 $Ax=b$ 有无穷多组解时，$Ax=0$ 只有零解

【解析】已知 A 是 $m\times n$ 矩阵，$Ax=b$ 有解，所以它有惟一解 $\Longleftrightarrow r(A)=r(A,b)=n$，应选 C.

二、解答下列各题(44%)

1. 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$，求 AB^T.

【解】$$AB^T=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+6 & -2+8 \\ 6+12 & -6+16 \\ -2+6-1 & 2+8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 18 & 10 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

2. 已知 $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 7 & 5 & -2 \\ 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}$，且 $A+2X=B$，求 X.

【解】由 $A+2X=B$ 得 $X=\dfrac{1}{2}(B-A)=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 7-3 & 5+1 & -2-2 \\ 5-1 & 1-5 & 9-7 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 6 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\3&1&-1&2\end{vmatrix}$.

【解】$D=\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\3&1&-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5&-5&3&0\\-11&1&3&-1\\0&0&1&0\\5&1&-1&1\end{vmatrix}=1\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-5&-5&0\\-11&1&-1\\5&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5&-5&0\\-6&2&0\\5&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5&-5\\-6&2\end{vmatrix}=-40$.

4. 已知 3 阶方阵 A 可逆，且 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&0\\3&3&3\end{bmatrix}$，求 $(A^*)^{-1}$.

【解法 1】$(A^*)^{-1}=\dfrac{A}{|A|}=|A^{-1}|A$， $A=(A^{-1})^{-1}$，$\left|A^{-1}\right|=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&2&0\\3&3&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&2&-2\\3&3&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-2\\3&0\end{vmatrix}=6$，

$$(A^{-1},E)=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\2&2&0&0&1&0\\3&3&3&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&2&-2&-2&1&0\\0&3&0&-3&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&-1&-2&1&1&-1\\0&3&0&-3&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+3r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&-1&-2&1&1&-1\\0&0&-6&0&3&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}6&0&6&6&0&0\\0&-3&-6&3&3&-3\\0&0&-6&0&3&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}6&0&0&6&3&-2\\0&-3&0&3&0&-1\\0&0&-6&0&3&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&1&1/2&-1/3\\0&1&0&-1&0&1/3\\0&0&1&0&-1/2&1/3\end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1/2&-1/3\\-1&0&1/3\\0&-1/2&1/3\end{pmatrix},\ (A^*)^{-1}=|A^{-1}|A=6A=\begin{pmatrix}6&3&-2\\-6&0&2\\0&-3&2\end{pmatrix}.$$

【解法 2】$(A^*)^{-1}=\dfrac{A}{|A|}$，$(A^{-1})^*A^{-1}=|A^{-1}|E$，即 $(A^{-1})^*=|A^{-1}|A=\dfrac{A}{|A|}$，从而，

$$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&0\\3&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\3&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\2&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2&0\\3&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\3&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&2\\3&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\3&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&0\\2&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&3&-2\\-6&0&2\\0&-3&2\end{pmatrix}.$$

【验证】$A^{-1}(A^{-1})^*=|A^{-1}|E=6E$.

三、解答下列各题(27%)

1. 设有向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\-1\\4\\9\end{pmatrix}$，判断 α_4 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？若能，则求其线性表示.

【解】$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}-2&1&3&0\\1&-3&0&-1\\0&2&2&4\\3&4&-1&9\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&-3&0&-1\\-2&1&3&0\\0&2&2&4\\3&4&-1&9\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}1&-3&0&-1\\0&-5&3&-2\\0&2&2&4\\0&13&-1&12\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_2+2r_3}\begin{pmatrix}1&-3&0&-1\\0&-1&7&6\\0&2&2&4\\0&13&-1&12\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+13r_2]{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}1&-3&0&-1\\0&-1&7&6\\0&0&16&16\\0&0&90&90\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-3&0&-1\\0&1&-7&-6\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+3r_2]{r_2+7r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, Q 且 $\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

【验证】 $2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\begin{pmatrix}-4+1+3\\2-3+0\\0+2+2\\6+4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\4\\9\end{pmatrix}=\alpha_4$.

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{bmatrix}$ 相似，求 a,b 的值及可逆阵 P 使 $P^{-1}AP=B$.

【解】 B 的特征值为 $2,2,b$ ，由 A 与 B 相似可得 $|A|=|B|,tr(A)=tr(B)$ ，即

$$\begin{cases}1+4+a=2+2+b\\|A|=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&1\\0&0&-2\\a-3&2a-3&a\end{vmatrix}=-2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&1\\a-3&2a-3\end{vmatrix}=6(a-1)=|B|=4b\end{cases},$$

亦即 $\begin{cases}a=b-1\\3a=2b+3\end{cases}$ 解得 $a=5,b=6$;

A 的特征值 $\lambda=2,2,6$ ，

当 $\lambda=2$ 时， $A-\lambda E=A-2E=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2&2&-2\\-3&-3&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ ，对应方程 $x_1+x_2-x_3=0$ ，

特征向量 $p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$;

【注】 p_1,p_2 不惟一，只要满足 $x_1+x_2-x_3=0$ 且线性无关即可.

当 $\lambda=6$ 时， $A-6E=\begin{pmatrix}-5&-1&1\\2&-2&-2\\-3&-3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}-1&-5&-3\\2&-2&-2\\-3&-3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}-1&-5&-3\\0&-12&-8\\0&12&8\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}3&15&9\\0&3&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&3&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-1/3\\0&1&2/3\\0&0&0\end{pmatrix}$ ，对应方程组 $\begin{cases}x_1-\dfrac{x_3}{3}=0\\x_2+\dfrac{2x_3}{3}=0\end{cases}$ ，特征向量 $p_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$,

令 $P=(p_1,p_2,p_3)$ ，则 P 可逆，且 $P^{-1}AP=B$.

3. 设 4 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵的秩为 3，已知 η_1,η_2,η_3 是它的 3 个解，且 $\eta_1=\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$, $\eta_2+\eta_3=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$,

求 $Ax=b$ 的通解.

【解】由题意可知， $Ax=0$ 的基础解系中有 4-3=1 个向量，又 $A(2\eta_1-\eta_2-\eta_3)=2b-b-b=0$ ，故

$Ax=0$ 的基础解系为 $2\eta_1-\eta_2-\eta_3=\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}$ ， $Ax=b$ 的通解为 $x=c\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$.

四、解答下列各题(8%)

1. 设方阵 A 满足 $A^3=0$，证明 $E-A$ 可逆，且 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2$.

【证】$(E-A)(E+A+A^2)=E+A+A^2-A-A^2-A^3=E$，所以，$E-A$ 可逆，且 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2$.

2. 根据你平时的学习，谈谈你对《线性代数》中某个概念、性质、定理或公式的理解，并举例说明.

【答】$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r=0$ 有非零解 $\Longleftrightarrow$ $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)<r$.

要判断一个向量组的线性相关性，只需要研究该向量组构成的矩阵的秩.

例如：容易求得 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ 的秩为 2，所以 A 的列向量组的线性相关.

【注】本题答案多种多样，只要符合题意即可.