

一、填空或选择填空题 (18%)

1. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix}$, $|A| = 2$, 则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 设三阶方阵 A 的特征值为 $-1, 0, 2$, 则 $|A^2 + A + E| = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 设 A 为三阶方阵, $A^2 = O$, 则下列结论一定成立的是【 】
A. $A = O$ B. $R(A) = 2$ C. $A^3 = O$ D. $|A| \neq 0$
5. 若 n 个未知量的非齐次线性方程组 $Ax = b$ 满足 $r(A) = r < n$, 则 $Ax = b$ 【 】
A. 有无穷多组解 B. 有惟一解 C. 无解 D. 无解或有无穷多组解
6. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + ax_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3$ 正定, 则常数 a 满足【 】
A. a 为任意实数 B. $a \neq 0$ C. $a > 2$ D. $a < 2$

二、计算下列各题 (36%)

1. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, 求 AB, BA .

2. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 8 \end{vmatrix}$.

3. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $AX = A + X$, 求 X .

三、解答下列各题 (36%)

1. 判断方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 1 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 10x_4 = 6 \end{cases}$ 是否有解? 若有解, 求其通解.

2. 向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, 判断向量组 A 的线性相关性, 求出

A 的一个最大无关组, 并将最大无关组之外的向量用最大无关组线性表示.

3. 求正交变换 $x = Py$ 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$ 化为标准形.

四、解答下列各题 (10%)

1. 设 3 阶实对称方阵 A 满足 $r(A) = 2$, $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, 求 A 的特征值及特征向量.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似, 求数 x, y .