一、填空题、选择题（18%）

1．设矩阵 $D=\begin{bmatrix}4 & -1 & 5\\ -3 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，则 $\left|D^T\right|=$ ___2___.

2．设 A 是 3×2 矩阵，B 是 4×2 矩阵，则下列运算有意义的是___C___.

(A) A^TB　(B) AB　(C) AB^T　(D) A^TB^T

2②．n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充分必要条件是___$R(A)<n$___.

3．设向量 $\alpha=(1,-3,6)^T$ 与 $\beta=(4,0,-2)^T$，则内积 $[\alpha,\beta]=$ ___-8___.

4．齐次方程组 $Ax=0$ 只有零解，则有___B___.

(A) A的行向量线性无关.　(B) A的列向量线性无关.

(C) A的行向量线性相关.　(D) A的列向量线性相关.

4②．A 是三阶矩阵，有特征值 $1,-1,2$ 则下列矩阵可逆的是___D___.

(A) $E-A$　(B) $E+A$　(C) $2E-A$　(D) $2E+A$

5．设 3 阶方阵 A 的征值分别为 $-1,1,2$ 且 $B=3A^2$,则 $\left|B\right|=\underline{|3A^2|=3^3\,|A|^2=27\times(-2)^2=108}$

5②．设 3 阶方阵 A 的征值分别为 $-2,1,2$ 且 $B=A^2$,则 $\left|B\right|=$ ___16___.

6．设 A,B 为 n 阶方阵，满足 $AB=O$ 则有___B___.

(A) $A=O$ 或 $B=O$　(B) $|A|=0$ 或 $|B|=0$　(C) $A+B=O$　(D) $|A|+|B|=O$

二、计算题（36%）

1. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ -1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 4\end{bmatrix}$，求 AB^T.

解：$AB^T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ -1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 0 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 4\\ 5 & 10\\ 4 & 4\end{bmatrix}$

2．计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$.

解：$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & -5 & 0 & -7\\ 0 & -2 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & 0 & -7\\ -2 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-5 & -7\\ -2 & -2\end{vmatrix}=(-2)\times(-4)=8$

3．已知 $A=\begin{bmatrix}5 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}$，且 $AX=A+3X$，求 X.

解法 1：由已知 $AX=A+3X$,得 $(A-3E)X=A$. 因为 $\left|A-3E\right|=1\neq 0$, 所以 $A-3E$ 可逆，

$(A-3E)^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 3\\ -1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & -2\end{bmatrix}$，从而，$X=(A-3E)^{-1}A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 3\\ -1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 9 & 9\\ -3 & 7 & 9\\ 3 & -6 & -5\end{bmatrix}$.

解法2：由由$AX=A+3X$,得 $(A-3E)X=A$，

$$(A-3E,A)=\begin{bmatrix}2 & 0 & 3 & 5 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 3 & 5 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 3 & -4 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & -5 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & -5 & -1\\ 0 & 0 & -1 & -3 & 6 & 5\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -2 & 9 & 9\\ 0 & 1 & 0 & -3 & 7 & 9\\ 0 & 0 & 1 & 3 & -6 & -5\end{bmatrix},$$

得到 $X=\begin{bmatrix}-2 & 9 & 9\\ -3 & 7 & 9\\ 3 & -6 & -5\end{bmatrix}$.

三、解答题（36%）

1. 判断线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=-1\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-5\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=2\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=-7\end{cases}$ 是否有解？若有解，试求其解.

解：增广矩阵 $(A\,|\,b)=\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & -5\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 2\\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & -7\end{array}\right]\xrightarrow{r}\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 2\\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -2\end{array}\right]$

$\xrightarrow{r}\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{r}\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -3\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

所以$R(A)=R(A\,|\,b)=2<5$,该方程组有无穷多解,即$\begin{cases}x_1=-3+x_3+x_4+5x_5\\ x_2=2-2x_3-2x_4-6x_5\\ x_3=x_3\\ x_4=x_4\\ x_5=x_5\end{cases}$,

令$\begin{cases}x_3=c_1\\ x_4=c_2\\ x_5=c_3\end{cases}$得通解$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\ 2\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}5\\ -6\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$

2. 设向量组 $A:\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\\ 0\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 4\\ 4\end{bmatrix}$，$\alpha_4=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 4\\ 2\end{bmatrix}$，$\alpha_5=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 6\\ 2\end{bmatrix}$

试判断向量组 A 的线性相关性，求出向量组 A 的一个最大无关组，并将其余向量用最大无关组表示.

解：

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 4 & 4 & 6\\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

（1）因为 $R(A)=3<5$，所以，向量组 A 线性相关。

(2) A 的列向量组的一个最大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$, 向量 α_3,α_5 用最大无关组表示为：

$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_5=4\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_4$.

3、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & -1\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}$,求正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ$ 为对角阵.

解：A 的特征多项式 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & -1 & 4\\ -1 & 3-\lambda & -1\\ 4 & -1 & -\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+4)(\lambda-2)(\lambda-5)$，特征值 $\lambda_1=-4,\lambda_2=2,\lambda_3=5$；

对于 $\lambda=-4$，$A-\lambda E=\begin{pmatrix}4 & -1 & 4\\ -1 & 7 & -1\\ 4 & -1 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，特征向量：$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$；

对于 $\lambda=2$，$A-2E=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 4\\ -1 & 1 & -1\\ 4 & -1 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，特征向量：$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$；

对于 $\lambda=5$，

$A-5E=\begin{pmatrix}-5 & -1 & 4\\ -1 & -2 & -1\\ 4 & -1 & -5\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，特征向量：$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$；

所求正交矩阵 $Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$.

四、证明、四、计算题（10%）

1. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\beta_1=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_3=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$. 证明: β_1，β_2，β_3 线性相关.

证法 1：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$，因为 $\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=0$, 所以，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)<3$，从而，它们线性相关.

证法 2：设有数 k_1,k_2,k_3, 使得 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，将 β_1,β_2,β_3 带入得

$(k_1+2k_3)\alpha_1+(-k_1+k_2+k_3)\alpha_2+(2k_1-k_2+3k_3)\alpha_3=0$, 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故

$\begin{cases}k_1+2k_3=0,\\ -k_1+k_2+k_3=0,\\ 2k_1-k_2+3k_3=0,\end{cases}$ 此线性方程组的系数矩阵的行列式 $\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=0$,

该方程组有非零解，所以 β_1,β_2,β_3 线性相关.

2. 设 $\xi=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，试确定参数 a,b 及特征向量 ξ 所对应的特征值. A 是否相似于对角阵？说明理由.

解：设 ξ 对应的特征值为 λ，则有 $A\xi=\lambda\xi$，即 $\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$，亦即 $\begin{cases}\lambda=2-1-2\\ \lambda=5+a-3\\ -\lambda=-1+b+2\end{cases}$

解得 $\lambda=-1,a=-3,b=0$，由此得到 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$，

$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 2\\ 5 & -3-\lambda & 3\\ -1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3+\lambda & 3\end{vmatrix}+(2+\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 5 & 3+\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1)$

$=-(\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1)=-(\lambda+1)^3$，

所以，特征值为 $\lambda=-1$（三重）.

又当 $\lambda=-1$ 时，

$A-\lambda E=A+E=\begin{pmatrix}3&-1&2\\5&-2&3\\-1&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1&0\\5&-2&3\\-1&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，只有一个特征向量，所以 A 不能对角化.

2②. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{pmatrix}$,行列式 $|A|=-1$，又 A^* 有一个特征值 λ_0，属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^T$，求 a,b,c 及 λ_0 的值.

解：根据已知有 $AA^*=|A|E=-E$，由 $A^*\alpha=\lambda_0\alpha$，用 A 左乘两端，从而有 $\lambda_0 A\alpha=-\alpha$,

即 $\lambda_0\begin{bmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}=\lambda_0\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ 即 $\begin{cases}\lambda_0(-a+1+c)=1\\\lambda_0(-5-b+3)=1\\\lambda_0(-1+c-a)=-1\end{cases}$,解得 $b=-3,a=c,\lambda_0=1$.

$$|A|=\begin{vmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&-1&a\\5&-3&3\\1-a&0&-a\end{vmatrix}\underline{\underline{r_3+r_1}}\begin{vmatrix}a&-1&a\\5&-3&3\\1&-1&0\end{vmatrix}\underline{\underline{c_2+c_1}}\begin{vmatrix}a&a-1&a\\5&2&3\\1&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}a-1&a\\2&3\end{vmatrix}$$

$=3(a-1)-2a=a-3$,

又由于 $|A|=-1$,解得 $a=c=2,b=-3$.