

一、填空或选择填空题(18%)

1. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, 则 $|A| =$ _____.
2. 矩阵 A 满足 $A^2 + A - 4E = 0$, 其中 E 为单位阵, 则 $(A - E)^{-1} =$ _____.
3. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $-1, 1, 2$, 则 $|2A + E| =$ _____.
4. 矩阵 A 的秩与 A^T 的秩的关系是【 】
A. $r(A) = r(A^T)$ B. $r(A) < r(A^T)$ C. $r(A) > r(A^T)$ D. 以上都不对
5. 对任意 n 阶方阵 A, B , 则下列结论正确的是【 】
A. $AB = BA$ B. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
C. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ D. 以上都不对
6. 设二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 正定, 则 t 的取值范围是_____.

二、计算下列各题(36%)

1. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, 求 AB^T .
2. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.
3. 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 且 $AX = A + 2X$, 求 X .

三、解答下列各题(36%)

1. 判定方程组 $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 5 \\ 4x_1 + 2x_2 + 14x_3 = 6 \end{cases}$ 是否有解? 若有解, 求其通解.
2. 设向量组 $A: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$, 判定向量组 A 的线性相关性, 求向量组 A 的一个最大无关组, 并将 A 中最大无关组之外的向量用最大无关组线性表示.
3. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 求正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q$ 为对角阵.

四、解答下列各题(10%)

1. 已知向量组 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 证明对任意常数 μ_1, μ_2, μ_3 向量组 $\alpha_1 + \mu_1\beta, \alpha_2 + \mu_2\beta, \alpha_3 + \mu_3\beta$ 也线性无关.
2. 设方阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\Lambda = \begin{bmatrix} 5 & & \\ & y & \\ & & -4 \end{bmatrix}$ 相似, 求 x, y 的值.