练习（题号标红的为高数2 的内容）

一、选择填空题

1. $\mathrm{d}\left(e^{\sin x}\right)=\underline{e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x}$.　　2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{2x}=\underline{e^4}$

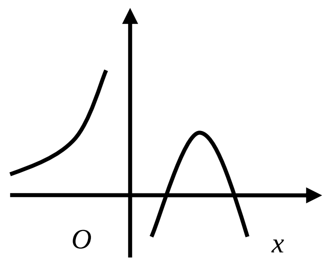
3. $\int_{-2}^{2}\left(2xe^{x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)\mathrm{d}x=\underline{2\pi}$.

4. 若常数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n+a_{n+1}\right)$是(　A　)

A.收敛　　B.发散　　C.不确定

5. 已知 $f(x)$连续，导函数 $f'(x)$图像如右图，则 $f(x)$有____C____个极值点.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



6. 设 $f(x)=\pi-x^2\ (-\pi<x\le\pi)$是周期$T=2\pi$的连续函数,则将该函数展开成傅里叶级数中$\sin x$的系数$b_1=$____0____.

二、计算题

1. 求极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$.

$$\lim_{x\to1}\frac{2x+1}{2x-3}$$
$$=-3$$

2. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-\ln(1+2x)}{\sin\left(x^2\right)}$.

$$\lim_{x\to0}\frac{2x-\ln(1+2x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2-\dfrac{2}{1+2x}}{2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{4x}{2x(1+2x)}=2$$

3. $y=x^2\arctan x-\int_0^x\dfrac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t+\ln2017$，求$y'(x)$.

$$y'(x)=2x\arctan x+\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{x^2}{1+x^2}=2x\arctan x$$

4. 求由方程$e^{xy}+5x=2$所确定的隐函数$y=y(x)$，计算$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

方程两边同对x求导：$e^{xy}\left(y+xy'\right)+5=0$ $\quad y'\left(x\right)=\dfrac{-5-ye^{xy}}{xe^{xy}}$

5. 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{5^n}$的敛散性.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5^{n+1}}\bullet\frac{5^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5^1}\bullet\frac{1}{n}=\frac{1}{5}<1$$

所以级数收敛

6. 将$\dfrac{1}{1+3x}$展开成关于x的幂级数.

$$\frac{1}{1+3x}=1-3x+9x^2+\cdots+\left(-3x\right)^n+\cdots,\left|x\right|<\frac{1}{3}$$

三、解答题

1. 计算不定积分$\int\left(\ln x\right)^{2016}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

$$=\int\left(\ln x\right)^{2016}\mathrm{d}\ln x$$

$$=\frac{\ln^{2017}x}{2017}+c$$

2. 计算定积分$\int_1^5\dfrac{2x}{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x$

$t=\sqrt{2x-1},x=\dfrac{t^2+1}{2},dx=tdt$, x:1→5 t:1→3

$$I=\int_1^3\frac{t^2+1}{t}tdt=\int_1^3\left(t^2+1\right)dt=\left(\frac{1}{3}t^3+t\right)\Bigg|_1^3=\frac{32}{3}$$

3. $f\left(x\right)=\begin{cases}\pi-x,x>0\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},-1<x\le 0\end{cases}$ 计算$\int_{-\frac{1}{2}}^{\pi}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\pi}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int_0^{\pi}\left(\pi-x\right)dx$$

$$=\arcsin x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}+\left(\pi x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi^2}{2}$$

4. 求曲线$y=\sqrt{x}$,直线$x=1,x=4$及x轴所围成图形的面积，并求此平面图形绕x轴旋转的旋转体体积V.

$$S=\int_1^4\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^4=\frac{14}{3}$$

$$V=\int_1^4\pi\left(\sqrt{x}\right)^2dx=\int_1^4\pi xdx=\frac{15}{2}\pi$$

5.一动点 P$\left(x,y\right)$沿着曲线$y=x^2+1$(长度单位为 cm)上移动，已知其横坐标对于时间的变

化率为 1cm/s. 则该动点 P$\left(x,y\right)$移动到$\left(1,2\right)$时的速度大小，并求动点 P 在这一瞬间该点到原点距离的变化率？

解：已知 $\frac{dx}{dt}=1cm/s,\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=2x\frac{dx}{dt}$

当 x=1 时，$\frac{dy}{dt}=2cm/s$，所以 $v=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2}=\sqrt{5}cm/s$

假设动点 P 到原点距离为 $s=\sqrt{x^2+y^2}$,则

$$\frac{ds}{dt}=\frac{d\sqrt{x^2+y^2}}{dt}=\frac{d\sqrt{x^2+\left(1+x^2\right)^2}}{dt}=\frac{ds}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{2x+4\left(1+x^2\right)x}{2\sqrt{x^2+\left(1+x^2\right)^2}}\frac{dx}{dt}$$

当 x=1 时，$\frac{ds}{dt}=\sqrt{5}cm^2/s$

四、解答题

1. 已知 $f\left(x\right)=x^3-\sin x\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x,\ f\left(x\right).$

令 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x=A;\ f\left(x\right)=x^3-A\sin x$

在上式两边同时积分：$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x^3-A\sin x\right)dx=\frac{\pi^4}{64}-A$,所以 $A=\frac{\pi^4}{128}$

$$f\left(x\right)=x^3-\frac{\pi^4}{128}\sin x$$

2. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数，并求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2^n}$.

$\left|x\right|<1$，且 $x\neq0$时

$$s\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n dt=\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}t^n dt=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\frac{1}{x}\ln\left(1-x\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2^n}=s\left(\frac{1}{2}\right)=-2\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)=-2\ln\frac{1}{2}=2\ln2$$

当 $x=0$时，$\mathrm{s}\left(x\right)=1$。