一、填空或选择填空题（18%）

1. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ a & 2\end{bmatrix}$，$|A|=2$,则常数 $a=$ $\underline{\quad 4 \quad}$.

2. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$ 正交，则 $k=$______.

【解析】由 $\alpha_1^T\alpha_2=3+2k-1=2+2k=0$ 得，$k=-1$.

3. 设三阶方阵 A 的特征值为 $-1,0,2$，则 $\left|A^2+A+E\right|=$______.

【解析】记 A 的特征值为 λ，则 $\varphi(A)=A^2+A+E$ 的特征值为 $\varphi(\lambda)$，

又 $\varphi(-1)=(-1)^2-1+1=1$，$\varphi(0)=0^2+0+1=1$, $\varphi(2)=2^2+2+1=7$,

$|\varphi(A)|=\left|A^2+A+E\right|=1\times1\times7=7$.

4. 设 A 为三阶方阵，$A^2=O$，则下列结论一定成立的是【　】

A. $A=O$　**B.** $R(A)=2$　**C.** $A^3=O$　**D.** $|A|\neq 0$

【解析】由 $A^2=O$ 得到 $A^3=AA^2=O$,应选 C.

5. 若 n 个未知量的非齐次线性方程组 $Ax=b$ 满足 $r(A)=r<n$,则 $Ax=b$【　】

A. 有无穷多组解　**B.** 有惟一解　**C.** 无解　**D.** 无解或有无穷多组解

【解析】若 $r(A)=r<n$，则 $r(A,b)=r+1$ 或 $r(A,b)=r=r(A)$，所以方程组 $Ax=b$ 可能无解，也可能有无穷多组解，应选 D.

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+ax_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3$ 正定，则常数 a 满足【　】

A. a 为任意实数　**B.** $a\neq 0$　**C.** $a>2$　**D.** $a<2$

【解析】f 对应的实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & a\end{bmatrix}$，

各阶顺序主子式分别为 $\Delta_1=1>0$，$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1>0$，$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & a\end{vmatrix}=a-2$，

所以，当 $a>2$ 时，f 正定.

二、计算下列各题(36%)

1. 设 $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$，求 AB,BA.

【解】$AB=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -7 & -6\\ -3 & 0 & -3\\ 5 & -7 & -9\end{bmatrix}$,

$$BA=\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9 & 4\\ 3 & 8\end{bmatrix}.$$

2. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 3\\ 3 & 4 & 1 & 6\\ 1 & -2 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 2 & 8\end{vmatrix}$.

【解】$D=\begin{vmatrix}1&1&-1&3\\3&4&1&6\\1&-2&0&1\\3&4&2&8\end{vmatrix}\underline{\underline{r_2+r_1,r_4+2r_1}}\begin{vmatrix}1&1&-1&3\\4&5&0&9\\1&-2&0&1\\5&6&0&14\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}4&5&9\\1&-2&1\\5&6&14\end{vmatrix}$

$\underline{\underline{c_2+2c_1,c_3-c_1}}\ -\begin{vmatrix}4&13&5\\1&0&0\\5&16&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}13&5\\16&9\end{vmatrix}=117-80=37$.

3. 设 $A=\begin{bmatrix}2&2&0\\2&1&3\\0&1&0\end{bmatrix}$，$AX=A+X$，求 X .

【解法 1】由 $AX=A+X$ 得 $(A-E)X=A$,即 $X=(A-E)^{-1}A$,

$$(A-E,A)=\begin{bmatrix}1&2&0&2&2&0\\2&0&3&2&1&3\\0&1&-1&0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_1}\begin{bmatrix}1&2&0&2&2&0\\0&-4&3&-2&-3&3\\0&1&-1&0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+3r_3}\begin{bmatrix}1&2&0&2&2&0\\0&-1&0&-2&0&3\\0&1&-1&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&2&0&2&2&0\\0&-1&0&-2&0&3\\0&0&-1&-2&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&-2&2&6\\0&-1&0&-2&0&3\\0&0&-1&-2&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&0&0&-2&2&6\\0&1&0&2&0&-3\\0&0&1&2&-1&-3\end{bmatrix}$$

$$X=(A-E)^{-1}A=\begin{bmatrix}-2&2&6\\2&0&-3\\2&-1&-3\end{bmatrix}.$$

【解法 2】由 $AX=A+X$ 得 $(A-E)X=A$,即 $X=(A-E)^{-1}A$,

$$A-E=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&0&3\\0&1&-1\end{bmatrix},\quad |A-E|=\begin{vmatrix}1&2&0\\2&0&3\\0&1&-1\end{vmatrix}=1,\ (A-E)^{-1}=\frac{(A-E)^*}{|A|}=(A-E)^*=\begin{bmatrix}-3&2&6\\2&-1&-3\\2&-1&-4\end{bmatrix},$$

$$X=(A-E)^{-1}A=\begin{bmatrix}-3&2&6\\2&-1&-3\\2&-1&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&0\\2&1&3\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&2&6\\2&0&-3\\2&-1&-3\end{bmatrix}.$$

【注】①解法 2 求逆阵 $(A-E)^{-1}$ 的方法容易出错，注意验证其正确性.

②$(A-E)^{-1}$ 用行初等变换法求解更容易，正确率高.

三、解答下列各题(36%)

1. 判断方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+3x_3-2x_4=4\\x_1-3x_2+2x_3-6x_4=1\\x_1+5x_2-x_3+10x_4=6\end{cases}$ 是否有解？若有解，求其通解.

【解】增广矩阵

$$(A,b)=\begin{bmatrix}1&-1&3&-2&4\\1&-3&2&-6&1\\1&5&-1&10&6\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&6&-4&12&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+3r_2}\begin{bmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&-7&0&-7\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-r_2]{r_3\div(-7)}\begin{bmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&2&1&4&3\\0&0&1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2-r_3}\begin{bmatrix}1&-1&0&-2&1\\0&2&0&4&2\\0&0&1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\div2}\begin{bmatrix}1&-1&0&-2&1\\0&1&0&2&1\\0&0&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&0&2\\0&1&0&2&1\\0&0&1&0&1\end{bmatrix},$$

$r(A)=r(A,b)=3<4$，该方程组有解，且有无穷多组解,

对应的方程组：$\begin{cases} x_1 & =2 \\ x_2+2x_4 & =1 \\ x_3 & =1 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1= & 2 \\ x_2= & -2x_4+1 \\ x_3= & 1 \\ x_4= & x_4 \end{cases}$，通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$c\in R$.

【验证】$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$是 $Ax=0$ 的解，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是 $Ax=b$ 的解.

2. 向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$，判断向量组 A 的线性相关性，求出 A 的一个最大无关组，并将最大无关组之外的向量用最大无关组线性表示.

【解】记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & -6 & -5 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{r}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，

由于 $r(A)=3<5$，所以，该向量组线性相关；取最大无关组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，则

$\alpha_4=-4\alpha_1+7\alpha_2-2\alpha_3$，$\alpha_5=-3\alpha_1+2\alpha_2+0\alpha_3$.

【验证】$-4\alpha_1+7\alpha_2-2\alpha_3=\begin{pmatrix} -4+7-4 \\ 8-7+2 \\ -12+14-8 \\ -4+14-10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}=\alpha_4$，$-3\alpha_1+2\alpha_2=\begin{pmatrix} -3+2 \\ 6-2 \\ -9+4 \\ -3+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}=\alpha_5$，正确.

3. 求正交变换 $x=Py$ 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2$ 化为标准形.

【解】二次型 f 对应的实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，

特征多项式 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(3-\lambda)^2$，特征根 $\lambda=1,3,3$.

当 $\lambda=1$ 时，$A-\lambda E=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，对应方程组 $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$，特征向量 $p_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$；

当 $\lambda=3$ 时，

$A-\lambda E=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，对应方程组 $\begin{cases} x_1=x_2 \\ x_3=x_3 \end{cases}$，特征向量 $p_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$p_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

令 $P=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则有 $P^{-1}AP=P^TAP=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$，

令 $x=Py$ 得 f 的标准形：$y_1^2+3y_2^2+3y_3^2$.

四、解答下列各题(10%)

1. 设 3 阶实对称方阵 A 满足 $r(A)=2,\ A\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\2&1\\0&-2\end{pmatrix}$, 求 A 的特征值及特征向量.

【解】由 $A\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\2&1\\0&-2\end{pmatrix}$ 得 $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ 及 $A\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$，所以，$\lambda=-1,2$ 是 A 的两个特征值，对应特征向量分别为 $p_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$；又由 $r(A)=2$, 得 A 的另一个特征值为 $\lambda=0$，且对应的特征向量 $p_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 满足 $p_1\perp p_3,p_2\perp p_3$ 即 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_1-x_2+2x_3=0\end{cases}$，其系数阵

$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$,对应方程组 $\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=x_3\end{cases}$,取 $p_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

故 A 的特征值 $\lambda=-1,0,2$，对应特征向量为 p_1,p_3,p_2.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $\Lambda=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似，求数 x,y.

【解】由 A 与 Λ 相似可得，$\begin{cases}2+0+x=2+y-1\\|A|=2\times y\times(-1)\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=y-1\\\begin{vmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{vmatrix}=-2=-2y\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$.