高等数学（2）综合练习 2 参考答案

一、填空题(18%).

1. 积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 【　　】

A. ∞　　B. 0　　C. 1　　D. 2

【解析】$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2(1 - \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x}) = 2$，应选 D.

2. 设 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的连续奇函数，则 $\int_{-1}^{1} x^2[f(\sin x)+1]dx =$_____.

【解析】$\int_{-1}^{1} x^2[f(\sin x)+1]dx = \int_{-1}^{1} x^2 f(\sin x)dx + \int_{-1}^{1} dx = 0+2$，应填答案 2.

3. 已知 x^2 是 $f(x)$ 的一个原函数,则 $\int xf(1-x^2)dx =$ 【　　】

（A） $-2(1-x^2)^2+C$　(B) $2(1-x^2)^2+C$　（C） $-\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$　(D) $\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$

【解析】$\int xf(1-x^2)dx = \frac{1}{2}\int f(1-x^2)dx^2 = -\frac{1}{2}\int f(1-x^2)d(1-x^2) = -\frac{(1-x^2)^2}{2}+C$，应选 **C.**

4. $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx=$________________.

【解析】$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx=\int \arctan x d(\arctan x) = \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$

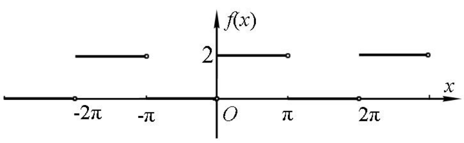
5. 函数 $y=\ln x$ 在 $x=2$ 处的二次逼近公式____________________________.

【解析】$y(2)=\ln 2$，$y'(2)=\frac{1}{2}$，$y''(2)=-\frac{1}{x^2}\Big|_{x=2} = -\frac{1}{4}$，

$$y=\ln x \approx y(2)+y'(2)(x-2)+\frac{y''(2)}{2!}(x-2)^2 = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8}.$$

6. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，且它在 $[0,2\pi]$ 的定义为 $f(x)=\begin{cases}2, & 0\le x<\pi \\ 0, & \pi \le x < 2\pi\end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=2\pi$ 收敛于________.

【解析】$s(2\pi) = \frac{f(2\pi^-)+f(2\pi)}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$，应填答案 1 .



二、解答下列各题（42%）

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \tan x \cdot \sin x^2 dx}{1-\cos x^2}$.

【解】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \tan x \cdot \sin x^2 dx}{1-\cos x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \tan x \cdot \sin x^2 dx}{x^4/2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x \cdot \sin x^2}{2x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$.

2. 计算积分 $\int \frac{1}{x^2-7x+12}dx$.

【解】$\int \frac{1}{x^2-7x+12}dx = \int (\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-3})dx = \int \frac{1}{x-4}dx - \int \frac{1}{x-3}dx = \ln\left|\frac{x-4}{x-3}\right|+C$

3. 计算定积分$\int_4^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$.

x	4	9
t	2	3

【解】令$\sqrt{x}=t$,则$x=t^2,dx=2tdt$,

从而$\int_4^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx=\int_2^3 \frac{2t}{1+t}dt=[2-2\ln(1+t)|_2^3]=2-2\ln\frac{4}{3}$.

4. 设$f(x)=\begin{cases} xe^{x^2}, & x\ge 0 \\ x\cos x, & x<0 \end{cases}$,求$\int_{-1}^3 f(x)dx$.

【解】$\int_{-1}^3 f(x)dx=\int_{-1}^0 x\cos xdx+\int_0^3 xe^{x^2}dx=[x\sin x+\cos x]\Big|_{-1}^0+[\frac{1}{2}e^{x^2}]\Big|_0^3=\frac{1}{2}(e^9+1)-(\sin 1+\cos 1)$

5. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}$的敛散性,若收敛,是绝对收敛还是条件收敛?

【解】因为 $u_n=\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}$,所以 $|u_n|=\frac{1}{n\cdot 2^n}$, 由比值审敛法知道,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{x\to\infty}\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{2}<1.$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ 收敛. 即级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}$绝对收敛.

6. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$ 的收敛域.

【解】记$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$,由$k=1$得,收敛半径$R=\frac{1}{\rho}=1$,

收敛区间为$(-1,1)$;

又因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\Bigg|_{x=1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$收敛,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\Bigg|_{x=-1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,

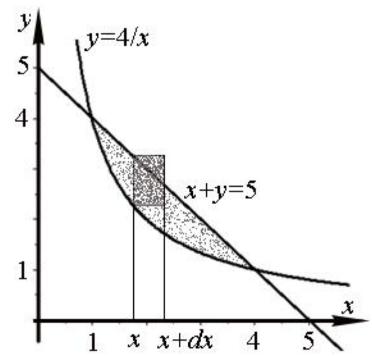
所以, 原级数的收敛域为$(-1,1]$

三、解答下列各题(28%)

1. 计算不定积分$\int(\frac{1+\ln x}{x}+\frac{2x}{1+x^2})dx$.

【解】$\int(\frac{1+\ln x}{x}+\frac{2x}{1+x^2})dx=\ln x+\frac{1}{2}\ln^2 x+\ln(1+x^2)+C$.

2. 求由双曲线 $y=\frac{4}{x}$ 与直线 $x+y=5$所围成的平面图形的面积,并求将其绕x轴旋转一周所得立体的体积.



【解】双曲线 $y=\frac{4}{x}$ 与直线 $x+y=5$的交点为$(1,4),(4,1)$.

(1) 面积元素$dA=(5-x-\frac{4}{x})dx, 1\le x\le 4$

面积: $A=\int_1^4(5-x-\frac{4}{x})dx=\frac{15}{2}-4\ln 4$;

(2)体积元素$dV=\pi\left[(5-x)^2-\frac{16}{x^2}\right]dx,\quad 1\le x\le 4$

体积: $V=\pi\int_1^4\left[(5-x)^2-\frac{16}{x^2}\right]dx=\pi\left[-\frac{(5-x)^3}{3}+\frac{16}{x}\right]_1^4=9\pi$.

3. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$的和函数$s(x)$,并计算和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(-3)^n}$.

【解】 $$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^x t^{n-1}dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^{n-1}dt$$

$$=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\ln(1+x)\quad,\quad -1<x\le 1$$

【或 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+\cdots,s(0)=0,$

$$s'(x)=1-x+\cdots+(-1)^{n+1}x^{n-1}+\cdots=\frac{1}{1+x},\quad x\in(-1,1)$$

$$s(x)=s(x)-s(0)=\int_0^x s'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(1+x),x\in(-1,1].$$ 】

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(-3)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n}=-s(\frac{1}{3})=-\ln(1+\frac{1}{3})=-\ln\frac{4}{3}=\ln 3-2\ln 2.$

4. （1）将 $f(x)=\arctan x$ 展开为 x 的幂级数，（2）求 $s=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots$ 的值.

【解】（1） $$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots,|x|<1$$

$$f(x)=\arctan x=\int_0^x f'(t)dt+f(0)=\int_0^x(1-t^2+t^4-\cdots+(-1)^n t^{2n}+\cdots)dt$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,|x|\le 1$$

（2） $s=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots=f(1)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$

四、解答下列各题（12%）

1.设函数 $f(x)$ 的一个原函数是 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$,求 $\int xf'(x)dx.$

【解】 $\int xf'(x)dx=\int xdf(x)=xf(x)-\int f(x)dx=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$

2. 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$， $x\in[a,b]$,证明 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$

【证】令 $G(x)=\int_a^x f(x)dx-[F(x)-F(a)]$，则 $G'(x)=f(x)-f(x)\equiv 0,x\in[a,b]$，

从而，在 $[a,b]$ 上， $G(x)=\int_a^x f(x)dx-[F(x)-F(a)]\equiv$ 常数 $=G(a)=0$，即 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$