02 范畴当中的箭头

LaTeX Definitions are here.

沿用上一节提到的自由变量。我们规定:

- $c_1 \overset{C}{\to} c_2 =$
  所有从 c_1 射向 c_2 的箭头构成的集。

> **Note**
>
> 上述断言仅对于**局部小范畴**成立,
> 其他范畴里 $c_1 \overset{C}{\to} c_2$ 未必构成集。

范畴 C 中特定的箭头可以进行复合运算:

- $\begin{array}{l} \overset{C}{\circ} : (c_1 \overset{C}{\to} c_2) \overset{Set}{\times} (c_2 \overset{C}{\to} c_3) \overset{Set}{\longrightarrow} (c_1 \overset{C}{\to} c_3) \\ \quad (\quad i_1 \quad . \quad i_2 \quad) \longmapsto i_1 \overset{C}{\circ} i_2 \end{array}$

如果我们还知道箭头 f_1, i, f_2 分别属于
$c_1' \overset{C}{\to} c_1$, $c_1 \overset{C}{\to} c_2$, $c_2 \overset{C}{\to} c_2'$ 那么便可知

- $(f_1 \overset{C}{\circ} i) \overset{C}{\circ} f_2 = f_1 \overset{C}{\circ} (i \overset{C}{\circ} f_2)$,
  即箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便可获得新的函数:

- $\begin{array}{l} (f_1 \overset{C}{\circ} \_) : (c_1 \overset{C}{\to} \_) \xrightarrow{C \overset{C}{\to} Set} (c_1' \overset{C}{\to} \_) \\ \qquad\qquad\qquad i \qquad \longmapsto \quad (f_1 \overset{C}{\circ} i) \end{array}$
  称作**前复合**。下图有助于形象理解:

$$
\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[rr, bend left, "i:c_1 \overset{C}{\to} c_2"] \arrow[rr, phantom, shift right=6ex, "\overline{\top}\, c_2^{(f_1 \overset{C}{\circ} \_)}"] & & c_2 \arrow[loop right, ":_{c_2}\mathrm{id}"] \\
c_1' \arrow[u, "f_1"] \arrow[urr, bend right, "(f_1 \overset{C}{\circ} i):c_1' \overset{C}{\to} c_2"'] & &
\end{tikzcd}
$$

- $\begin{array}{l} (\_ \overset{C}{\circ} f_2) : (\_ \overset{C}{\to} c_2) \xrightarrow{C \overset{C}{\to} Set} (\_ \overset{C}{\to} c_2') \\ \qquad\qquad\qquad i \qquad \longmapsto \quad (i \overset{C}{\circ} f_1) \end{array}$
  称作**后复合**。 下图有助于形象理解:

$$
\begin{tikzcd}
 & & c_2 \arrow[d, "f_2"] \\
c_1 \arrow[loop left, ":_{c_1}\mathrm{id}"] \arrow[urr, bend left, "i:c_1 \overset{C}{\to} c_2"] \arrow[rr, bend right, "(i \overset{C}{\circ} f_2):c_1 \overset{C}{\to} c_2'"'] \arrow[rr, phantom, "\overline{\top}\, c_1^{(\_ \overset{C}{\circ} f_2)}"] & & c_2'
\end{tikzcd}
$$

根据上面的定义不难得出下述结论:

- $(f_1 \overset{C}{\circ} \_) \overset{C \overset{Cat}{\longrightarrow} Set}{\circ} (\_ \overset{C}{\circ} f_2) = (\_ \overset{C}{\circ} f_2) \overset{C \overset{Cat}{\longrightarrow} Set}{\circ} (f_1 \overset{C}{\circ} \_)$
  复合运算具有**结合律**,即后面提到的**自然性**;
- $(\_ \overset{C}{\circ} i) \overset{C \overset{Cat}{\longrightarrow} Set}{\circ} (\_ \overset{C}{\circ} f_2) = (\_ \overset{C}{\circ} (i \overset{C}{\circ} f_2))$
  前复合与复合运算的关系
- $(i \overset{C}{\circ} \_) \overset{C \overset{Cat}{\longrightarrow} Set}{\circ} (f_1 \overset{C}{\circ} \_) = ((f_1 \overset{C}{\circ} i) \overset{C}{\circ} \_)$
  后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。
假如 a_1 为 c_1 的全局元素则可规定

- $c_1 i = c_1 \overset{C}{\circ} i$

恒等箭头

范畴 C 内的每个对象都有恒等映射：

- ${}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} : \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1$
  $c_1 \mapsto c_1$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- ${}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\circ} i = i$
  $= i \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}$

此外还可以得知

- $({}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) : (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \xrightarrow{\mathsf{C}\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{Set}} (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)$
  为恒等自然变换，可以记成是 ${}_{:(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)}\mathrm{id}$；
- $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}) : (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) \xrightarrow{\mathsf{C}\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{Set}} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2)$
  为恒等自然变换，可以记成是 ${}_{:(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2)}\mathrm{id}$。

单满态以及同构

接下来给出单 / 满态和同构的定义。

- i 为**单态**当且仅当对任意 c_1'
  若有 $f_1, f_1' : \mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1$ 满足 $f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i = f_1' \overset{\mathsf{C}}{\circ} i$
  则有 $f_1 = f_1'$。详情见下图：

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{c}_1 \arrow[rr, bend left, "i:\mathsf{c}_1\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{c}_2"] \arrow[d, phantom, ""] & \top \arrow[d, dashed, "\mathsf{c}_2^{(f_1\overset{\mathsf{C}}{\circ}_)}"] & \mathsf{c}_2 \arrow[loop right, "{}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}"] \\
\mathsf{c}_1' \arrow[u, shift left, "f_1'"'] \arrow[u, shift right, "f_1"] \arrow[urr, bend right, "(f_1\overset{\mathsf{C}}{\circ}i):\mathsf{c}_1'\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{c}_2"'] & {} &
\end{tikzcd}$$

- i 为**满态**当且仅当对任意 c_2'
  若有 $f_2, f_2' : \mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2'$ 满足 $i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2 = i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2'$
  则有 $f_2 = f_2'$。详情见下图：

$$\begin{tikzcd}
 & \top \arrow[d, dashed, "\mathsf{c}_1^{(_\overset{\mathsf{C}}{\circ}f_2)}"] & \mathsf{c}_2 \arrow[d, shift right, "f_2'"'] \arrow[d, shift left, "f_2"] \\
\mathsf{c}_1 \arrow[loop left, "{}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}"] \arrow[urr, bend left, "i:\mathsf{c}_1\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{c}_2"] \arrow[rr, bend right, "(i\overset{\mathsf{C}}{\circ}f_2):\mathsf{c}_1\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{c}_2'"'] & {} & \mathsf{c}_2'
\end{tikzcd}$$

- i 为**同构**当且仅当存在 $i' : \mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1$
  使得 $i \overset{\mathsf{C}}{\circ} i' = {}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}$ 且 $i' \overset{\mathsf{C}}{\circ} i = {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}$。
  此时 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$ 间的关系可记作 $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\cong} \mathsf{c}_2$。

若还知道 $i = i_1$ 且 $i_2 : \mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_3$ 则有

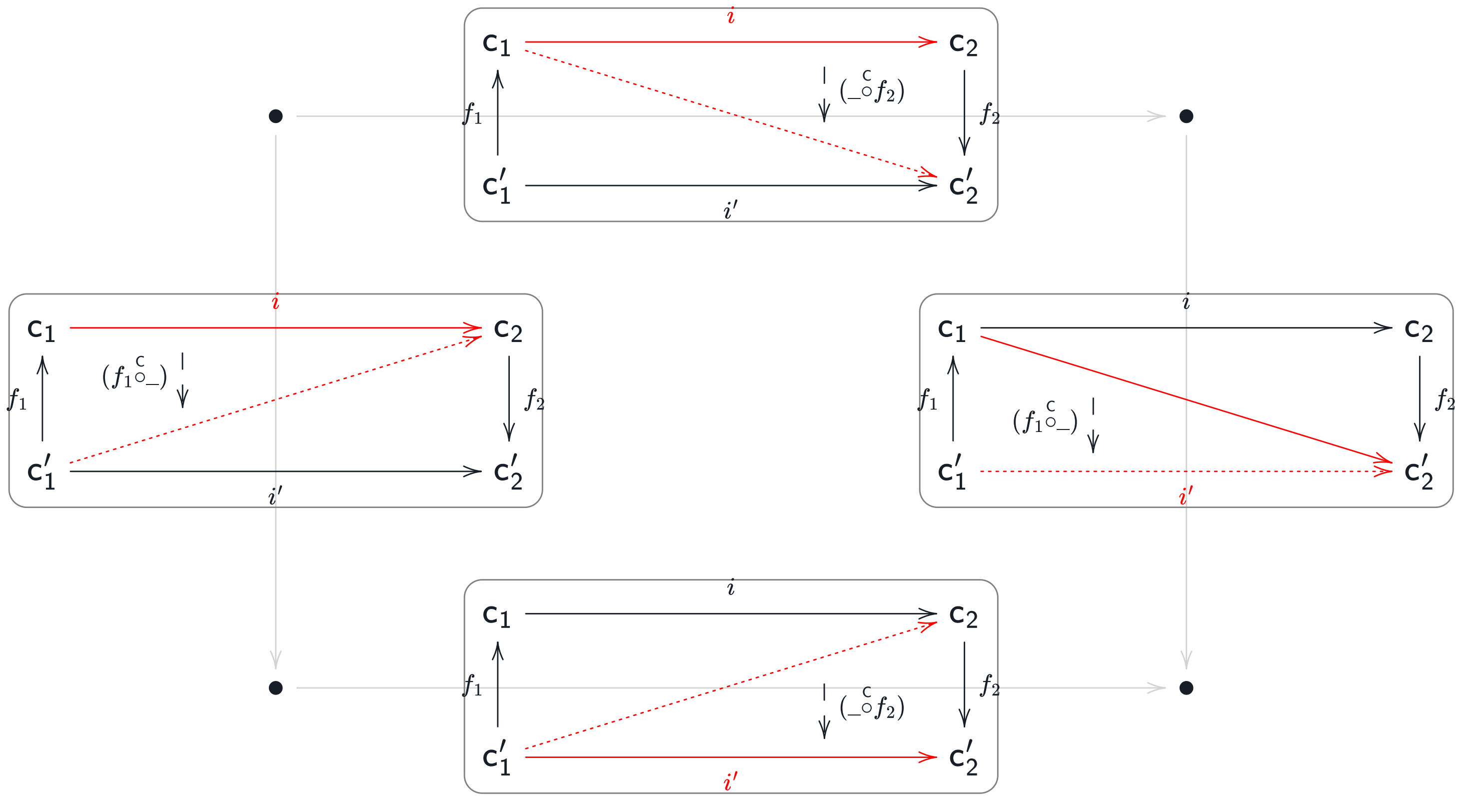
- 若 i_1，i_2 为单态
  则 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2$ 为单态；
- 若 i_1，i_2 为满态
  则 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2$ 为满态；
- 若 i_1，i_2 为同构
  则 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2$ 为同构；
- 若 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2$ 为同构
  且 i_1，i_2 中有一个为同构
  则 i_1，i_2 两者皆构成同构。

不仅如此我们还可以得出下述结论：

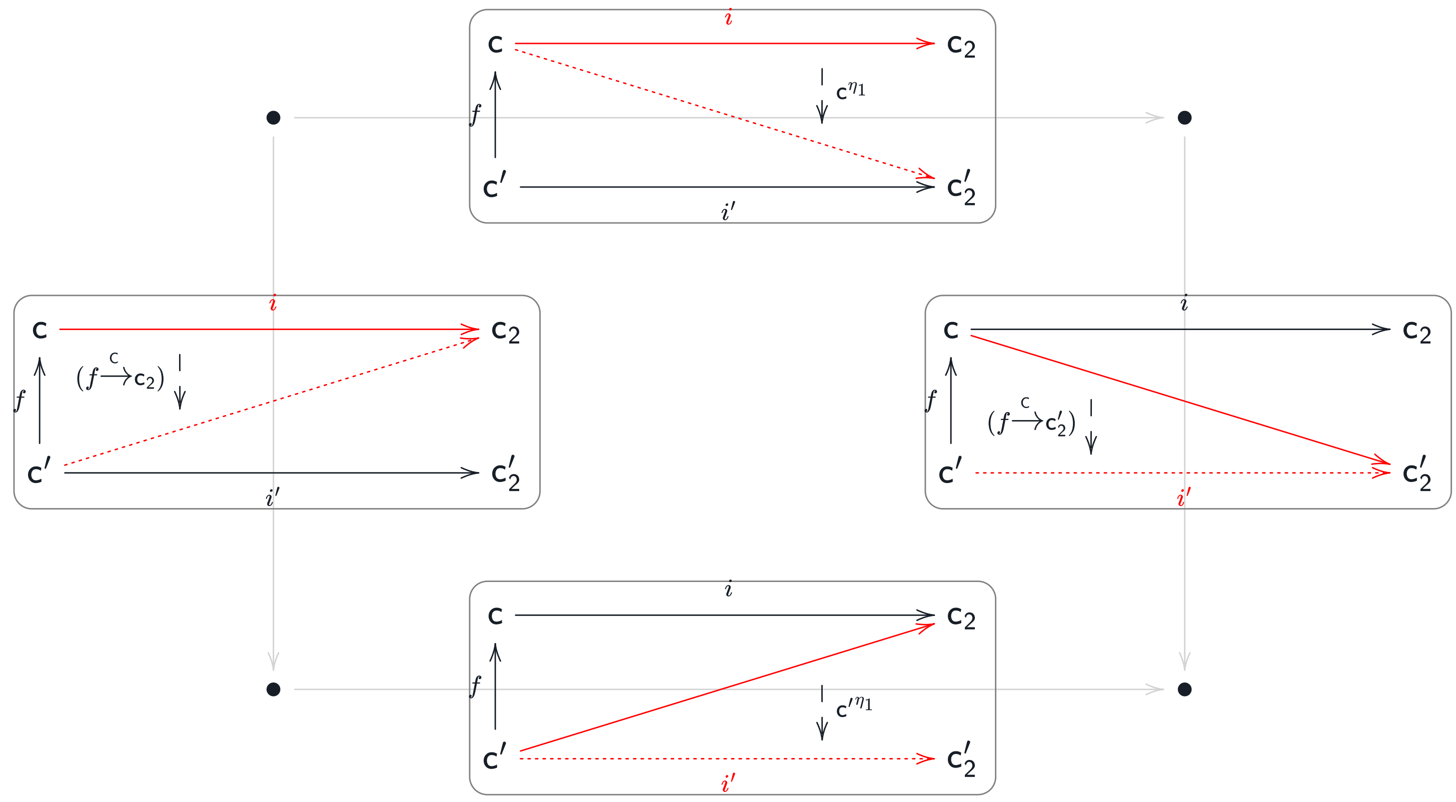
- c_1 为单态，
  由 ${}_{:\mathsf{c}_1}!$ 的唯一性可知；
- ${}_{:\mathsf{0}}! = {}_{:\mathsf{1}}¡$ 为同构，
  因为 $\mathsf{0} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{0} = \{{}_{:\mathsf{0}}\mathrm{id}\}$
  并且 $\mathsf{1} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{1} = \{{}_{:\mathsf{1}}\mathrm{id}\}$

同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释 。
后面会将自然性进行进一步推广 。



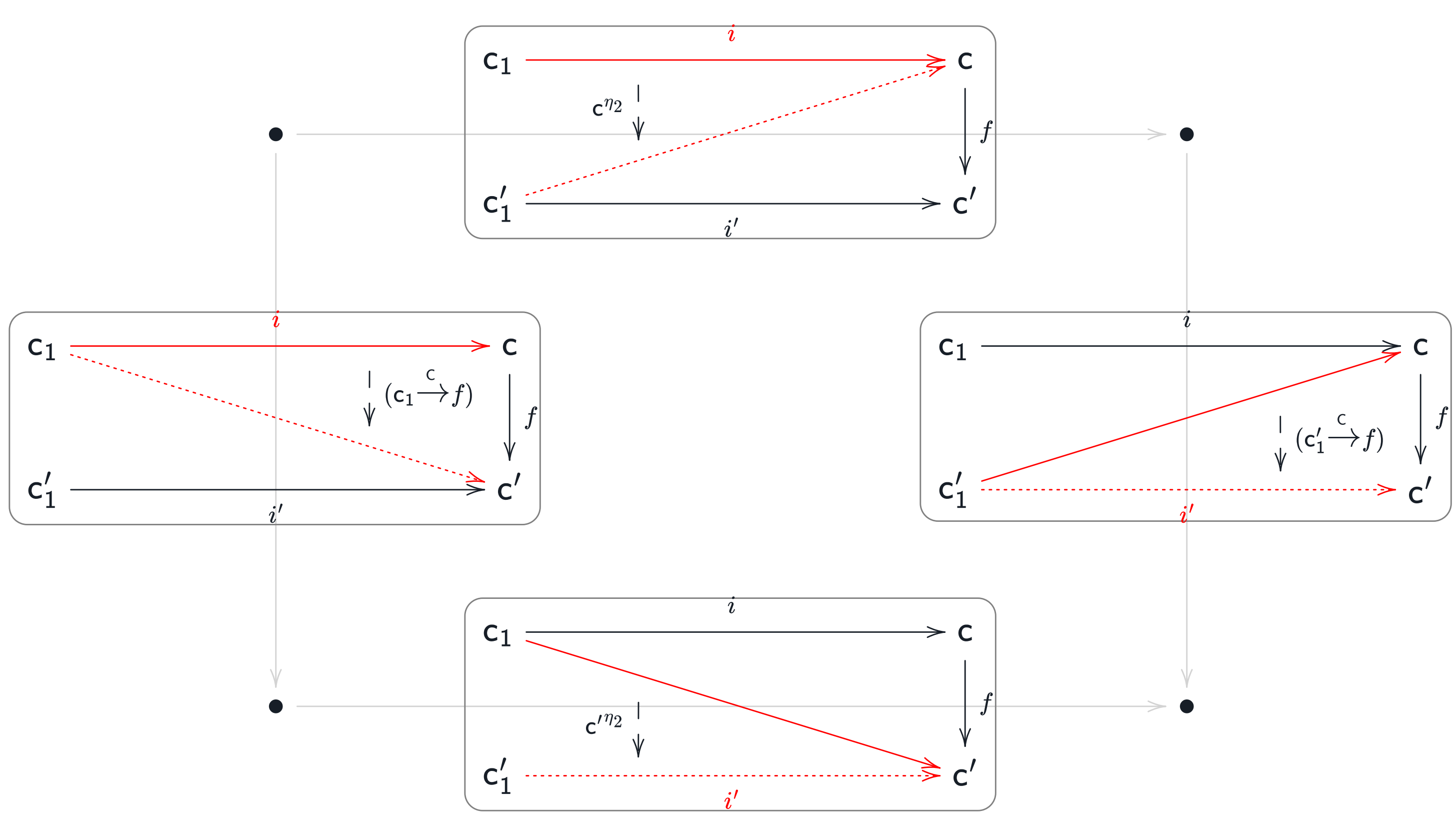
现提供自然变换 η_1 满足自然性 —— 即对
任意 C 中对象 c, c' 以及
任意 C 中映射 $f : c' \xrightarrow{C} c$
都有 $(f \xrightarrow{C} c_2) \overset{\mathsf{Set}}{\circ} c'^{\eta_1} = c^{\eta_1} \overset{\mathsf{Set}}{\circ} (f \xrightarrow{C} c_2')$:



那么我们便会有下述结论 :

- $c_2 \overset{C}{\cong} c_2'$ 当且仅当对任意 C 中的对象 c
  c^{η_1} 都是同构 。此时称 η_1 为**自然同构** 。

现提供自然变换 η_2 满足自然性 —— 即对
任意 C 中对象 c, c' 以及
任意 C 中映射 $f : c \xrightarrow{C} c'$
都有 $(c_2 \xrightarrow{C} f) \overset{\mathsf{Set}}{\circ} c'^{\eta_2} = c^{\eta_2} \overset{\mathsf{Set}}{\circ} (c_1' \xrightarrow{C} f)$:



那么我们便会有下述结论 :

- $c_1 \overset{C}{\cong} c_1'$ 当且仅当对任意 C 中的对象 c
  c^{η_2} 都是同构 。此时称 η_2 为**自然同构** 。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{Set} & \\
c \xrightarrow{C} c_2 \arrow[rr, "c^{\beta}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & & c \xrightarrow{C} c_2' \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2'"] \\
c' \xrightarrow{C} c_2 \arrow[rr, "c'^{\beta}"'] & & c' \xrightarrow{C} c_2' \\
C \xrightarrow{C} c_2 & & C \xrightarrow{C} c_2'
\end{tikzcd}
$$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧（考虑特殊情况）

$$
\begin{tikzcd}
c_2 \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c_2^{\beta}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & c_2 \xrightarrow{C} c_2' \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2'"] \\
c' \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c'^{\beta}"'] & c' \xrightarrow{C} c_2'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:c_2}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "c_2^{\beta}"] \arrow[d, mapsto, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & {}_{:c_2}\mathrm{id}(c_2^{\beta}) \arrow[d, mapsto, "f \xrightarrow{C} c_2'"] \\
f \arrow[r, mapsto, "c'^{\beta}"'] & f \circ (\mathrm{etc})
\end{tikzcd}
$$

为了方便就用 (etc) 表示 ${}_{:c_2}\mathrm{id}(c_2^{\beta})$ 。 由上图可知 $f(c'^{\beta}) = f \overset{C}{\circ} (\mathrm{etc})$，故 $c'^{\beta} = c' \xrightarrow{C} (\mathrm{etc})$；而 $c'^{\beta} = c' \xrightarrow{C} (\mathrm{etc}) = c'^{(\_ \overset{C}{\circ} (\mathrm{etc}))}$ 是同构，从而知 $((\mathrm{etc}) \overset{C}{\circ} \_)$ 是同构，$(\mathrm{etc}) : c_2 \xrightarrow{C} c_2'$ 也是 。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在米田嵌入处会详细介绍 。