章节 01 - 03 基本概念

$\LaTeX$ Definitions are here.

始对象与终对象

范畴由对象及其间箭头构成。本文重点分析**余积闭范畴** C 。首先给出如下定义：

- 0 为**始对象**当且仅当对任意 C 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 $_{:c}\text{¡} : 0 \xrightarrow{\mathsf{C}} c$;
- 1 为**终对象**当且仅当对任意 C 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 $_{:c}! : c \xrightarrow{\mathsf{C}} 1$;

> ⓘ **Note**
>
> 其他范畴中始终对象不一定存在。

范畴 C 中我们假设其含 0 和 1 分别作为始对象和终对象, 那么根据上述信息可知

- 形如 $0 \xrightarrow{\mathsf{C}} 0$ 的箭头只有一个，即 $_{:0}\mathrm{id}$;
- 形如 $1 \xrightarrow{\mathsf{C}} 1$ 的箭头只有一个，即 $_{:1}\mathrm{id}$;

始终对象与范畴中其他对象的关系如图：

$$
\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[loop above, "{_{:1}\mathrm{id}}"] & & \\
\cdots & c_1 \arrow[ur, "!"] & c_2 \arrow[u, "!"] & c_3 \arrow[ul, "!"'] & \cdots \\
 & & 0 \arrow[ul, "\text{¡}"] \arrow[u, "\text{¡}"] \arrow[ur, "\text{¡}"'] \arrow[loop below, "{_{:0}\mathrm{id}}"] & &
\end{tikzcd}
$$

元素与全局元素

对任意对象 $a, a_1, a_2, \mathrm{etc}$, $b, b_1, b_2, \mathrm{etc}$ 以及任意映射 i , 我们进行如下的规定：

- i 为 b 的**元素**当且仅当 $i\ \mathrm{tar} = b$;
- i 为 a 的**全局元素**当且仅当 $i\ \mathrm{tar} = a$ 且 $i\ \mathrm{src} = 1$
- i 不存在仅当 $i\ \mathrm{tar} = 0$ 。

> ⓘ **Note**
>
> 其他范畴中刚才的断言未必成立。

箭头构成的集合

这里再给一个定义：

- $\mathsf{a} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b} =$
  所有从 a 射向 b 的箭头构成的集 。

> ⓘ **Note**
>
> 上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
> 在其他范畴里 $\mathsf{a} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}$ 未必构成集 。

箭头的复合运算

范畴 C 中特定的箭头可以进行复合运算：
对任意 C 中对象 c_1 , c_2 , c_3 我们都会有

$$\begin{aligned} \overset{\mathsf{C}}{\circ} &: (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) \times (\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_3) \xrightarrow{\mathsf{Set}} (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_3) \\ \overset{\mathsf{C}}{\circ} &: (\quad i_1 \quad . \quad i_2 \quad) \longmapsto i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2 \end{aligned}$$

若我们还知道箭头 f_1 , i_1 , g_1 分别属于
$\mathsf{a}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{a}_1$, $\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1$, $\mathsf{b}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_2$ 那么便有

- $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1) \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1 = f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} (i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1)$
  说明箭头复合运算具有**结合律** 。

另外固定住一侧实参便获可得新的函数：

- $$\begin{aligned} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) &: (\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \xrightarrow{\mathsf{C} \to \mathsf{Set}} (\mathsf{a}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \\ (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) &: \quad i_1 \quad \longmapsto \quad f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1 \end{aligned}$$
  称作**前复合** 。下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd} \mathsf{a}_1 \arrow[rr, bend left, "i_1 : \mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1"] \arrow[dr, phantom, "\mathsf{b}_1^{(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}"] & & \mathsf{b}_1 \arrow[loop right, ":_{\mathsf{b}_1} \mathrm{id}"] \\ \mathsf{a}_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[rru, bend right, "(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1) : \mathsf{a}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_3"'] & & \end{tikzcd}$$

- $$\begin{aligned} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) &: (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1) \xrightarrow{\mathsf{C} \to \mathsf{Set}} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_2) \\ (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) &: \quad i_1 \quad \longmapsto \quad i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1 \end{aligned}$$
  称作**后复合**；下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{b}_1 \arrow[dd, "g_1"] \\ \mathsf{a}_1 \arrow[loop left, ":_{\mathsf{a}_1} \mathrm{id}"] \arrow[ur, bend left, "i_1 : \mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1"] \arrow[dr, bend right, "(i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) : \mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_2"'] \arrow[r, phantom, "\mathsf{a}_1^{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1)}"] & {} \\ & \mathsf{b}_2 \end{tikzcd}$$

根据上面的定义便不难得出下述结论

- $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C} \to \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) \overset{\mathsf{C} \to \mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$
  复合运算具有**结合律**，即后面会提到的**自然性**；
- $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1) \overset{\mathsf{C} \to \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1))$
  前复合与复合运算的关系
- $(i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C} \to \mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) = ((f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1) \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$
  后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合 。
假如 a_1 为 a_1 的全局元素则可规定

- $a_1 i_1 = a_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1$

恒等箭头

范畴 C 内的每个对象都有恒等映射：

- ${}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} : \mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{a}_1$
  ${}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} : a_1 \mapsto a_1$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- ${}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1 = i_1$
  $= i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}$

此外还可以得知

- $({}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) : (\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \xrightarrow{\mathsf{C} \to \mathsf{Set}} (\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)$
  为恒等自然变换，可以记作是 ${}_{:(\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)}\mathrm{id}$；
- $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}) : (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1) \xrightarrow{\mathsf{C} \to \mathsf{Set}} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1)$
  为恒等自然变换，可以记作是 ${}_{:(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1)}\mathrm{id}$；

单满态以及同构

接下来给出单 / 满态和同构的定义 。

- i_1 为**单态**当且仅当对任意 a_2 若有 $f_1, f_1' : \mathsf{a}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{a}_1$
  满足 $f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1 = f_1' \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1$ 则有 $f_1 = f_1'$ 。详情见下图：

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{a}_1 \arrow[rrd, bend left, "i_1 : \mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{b}_1"] & \top \arrow[dd, dashed, "\mathsf{b}_1^{(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} _)}"] & \\
& & \mathsf{b}_1 \arrow[loop right, "{}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}"] \\
\mathsf{a}_2 \arrow[uu, shift right, "f_1"] \arrow[uu, shift left, "f_1'"'] \arrow[rru, bend right, "(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1) : \mathsf{a}_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{b}_3"'] & {} &
\end{tikzcd}$$

- i_1 为**满态**当且仅当对任意 b_2 若有 $g_1, g_1' : \mathsf{b}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_2$
  满足 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1 = i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1'$ 则有 $g_1 = g_1'$ 。详情见下图：

$$\begin{tikzcd}
& \top \arrow[dd, dashed, "\mathsf{a}_1^{(_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1)}"] & \mathsf{b}_1 \arrow[dd, shift right, "g_1'"'] \arrow[dd, shift left, "g_1"] \\
\mathsf{a}_1 \arrow[loop left, "{}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id}"] \arrow[rru, bend left, "i_1 : \mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{b}_1"] \arrow[rrd, bend right, "(i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) : \mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{b}_2"'] & & \\
& {} & \mathsf{b}_2
\end{tikzcd}$$

- i_1 为**同构**当且仅当存在 $i_1' : \mathsf{b}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{a}_1$
  使 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1' = {}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id}$ 且 $i_1' \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1 = {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}$ 。

若还提供 $j_1 : \mathsf{b}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1$ 则不难得知

- 若 i_1 , j_1 为单态
  则 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} j_1$ 为单态；
- 若 i_1 , j_1 为满态
  则 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} j_1$ 为满态；
- 若 i_1 , j_1 为同构
  则 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} j_1$ 为同构；
- 若 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} j_1$ 为同构
  且 i_1 , j_1 其中一个为同构
  则 i_1 , j_1 两者皆构成同构 。

此外我们还可以得出下述结论：

- a_1 为单态，由
  ! 的唯一性可知 。
- ${}_{:0}! = {}_{:1}¡$ 为同构 —— 这是因为
  $0 \overset{\mathsf{C}}{\to} 0 = \{{}_{:0}\mathrm{id}\}$, $1 \overset{\mathsf{C}}{\to} 1 = \{{}_{:1}\mathrm{id}\}$

同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释 。
后面会将自然性进行进一步推广 。

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{a}_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, dashed] & \mathsf{b}_1 \arrow[d, "g_1"] \arrow[d, phantom, shift right=4em, "\big\downarrow (\_\overset{\mathsf{c}}{\circ} g_1)"] \\
\mathsf{a}_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "i_2"'] & \mathsf{b}_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{a}_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, phantom, shift left=4em, "(f_1\overset{\mathsf{c}}{\circ}\_) \big\downarrow"] & \mathsf{b}_1 \arrow[d, "g_1"] \\
\mathsf{a}_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "i_2"'] \arrow[ur, dashed] & \mathsf{b}_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{a}_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, shift left=4em, "(f_1\overset{\mathsf{c}}{\circ}\_) \big\downarrow"] & \mathsf{b}_1 \arrow[d, "g_1"] \\
\mathsf{a}_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, dashed, "i_2"'] & \mathsf{b}_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{a}_1 \arrow[r, "i_1"] & \mathsf{b}_1 \arrow[d, "g_1"] \arrow[d, phantom, shift right=4em, "\big\downarrow (\_\overset{\mathsf{c}}{\circ} g_1)"] \\
\mathsf{a}_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "i_2"'] \arrow[ur, dashed] & \mathsf{b}_2
\end{tikzcd}
$$

若提供自然变换 β 满足自然性 —— 即对任意
C 中对象 x_1 , x_2 及任意 C 中映射 $f_1 : x_2 \xrightarrow{C} x_1$
都会有 $(f_1 \xrightarrow{C} b_1) \overset{Set}{\circ} {x_2}^{\beta} = {x_1}^{\beta} \overset{Set}{\circ} (f_1 \xrightarrow{C} b_2)$
(即下图自西向南走向操作结果同自北向东) :

$$
\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, dotted, "\Downarrow {x_1}^{\beta}"] & b_1 \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "i_2"'] & b_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "i_1"] & b_1 \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur, dotted, "(f_1 \xrightarrow{C} b_1) \Downarrow"] \arrow[r, "i_2"'] & b_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "(f_1 \xrightarrow{C} b_2) \Downarrow"'] & b_1 \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, dotted, "i_2"'] & b_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "i_1"] & b_1 \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur, "\Downarrow {x_2}^{\beta}"'] \arrow[r, dotted, "i_2"'] & b_2
\end{tikzcd}
$$

那么我们便会有下述结论 :

- $b_1 \cong b_2$ 当且仅当对任意 C 中对象 x
  x^{β} 都是同构 。此时称 β 为**自然同构** 。

若提供自然变换 α 满足自然性 —— 即对任意
C 中对象 x_1 , x_2 及任意 C 中映射 $g_1 : x_1 \xrightarrow{C} x_2$
都会有 $(a_1 \xrightarrow{C} g_1) \overset{Set}{\circ} {x_2}^{\alpha} = {x_1}^{\alpha} \overset{Set}{\circ} (a_2 \xrightarrow{C} g_1)$
(即下图自西向南走向操作结果同自北向东) :

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "i_1"] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[ur, dotted, "{x_1}^{\alpha} \Downarrow"] \arrow[r, "i_2"'] & x_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, dotted, "\Downarrow (a_1 \xrightarrow{C} g_1)"] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[r, "i_2"'] & x_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "i_1"] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[ur, "\Downarrow (a_2 \xrightarrow{C} g_1)"'] \arrow[r, dotted, "i_2"'] & x_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "{x_2}^{\alpha} \Downarrow"'] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[r, dotted, "i_2"'] & x_2
\end{tikzcd}
$$

那么我们便会有下述结论 :

- $a_1 \cong a_2$ 当且仅当对任意 C 中对象 x
  x^{α} 都是同构 。此时称 α 为**自然同构** 。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为

Set

$$\begin{tikzcd}
x_1 \xrightarrow{C} b_1 \arrow[r, "x_1{}^\beta"] \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{C} b_1"'] & x_1 \xrightarrow{C} b_2 \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{C} b_2"] \\
x_2 \xrightarrow{C} b_1 \arrow[r, "x_2{}^\beta"'] & x_2 \xrightarrow{C} b_2
\end{tikzcd}$$

$C \xrightarrow{C} b_1$ $C \xrightarrow{C} b_2$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧（考虑特殊情况）

$$\begin{tikzcd}
b_1 \xrightarrow{C} b_1 \arrow[r, "b_1{}^\beta"] \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{C} b_1"'] & b_1 \xrightarrow{C} b_2 \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{C} b_2"] \\
x_2 \xrightarrow{C} b_1 \arrow[r, "x_2{}^\beta"'] & x_2 \xrightarrow{C} b_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
:_{b_1}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "b_1{}^\beta"] \arrow[d, mapsto, "f_1 \xrightarrow{C} b_1"'] & :_{b_1}\mathrm{id}(b_1^\beta) \arrow[d, mapsto, "f_1 \xrightarrow{C} b_2"] \\
f_1 \arrow[r, mapsto, "x_2{}^\beta"'] & f_1 \circ (\mathrm{etc})
\end{tikzcd}$$

为了方便就用 (etc) 表示 $:_{b_1}\mathrm{id}(b_1^\beta)$。 由上图可知 $f_1(x_2{}^\beta) = f_1 \overset{C}{\circ} (\mathrm{etc})$，故 $x_2{}^\beta = x_2 \xrightarrow{C} (\mathrm{etc})$；而 $x_2{}^\beta = x_2 \xrightarrow{C} (\mathrm{etc}) = x_2{}^{(\_\overset{C}{\circ}(\mathrm{etc}))}$ 是同构，从而知 $((\mathrm{etc}) \circ \_)$ 是同构，$(\mathrm{etc}) : b_1 \xrightarrow{C} b_2$ 也是。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在米田嵌入处会详细介绍。

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为

Set

$$\begin{tikzcd}
a_1 \xrightarrow{C} x_1 \arrow[r, "x_1{}^\alpha"] \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{C} g_1"'] & a_2 \xrightarrow{C} x_1 \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{C} g_1"] \\
a_1 \xrightarrow{C} x_2 \arrow[r, "x_2{}^\alpha"'] & a_2 \xrightarrow{C} x_2
\end{tikzcd}$$

$a_1 \xrightarrow{C} C$ $a_2 \xrightarrow{C} C$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧（考虑特殊情况）

$$\begin{tikzcd}
a_1 \xrightarrow{C} a_1 \arrow[r, "x_1{}^\alpha"] \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{C} g_1"'] & a_2 \xrightarrow{C} a_1 \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{C} g_1"] \\
a_1 \xrightarrow{C} x_2 \arrow[r, "x_2{}^\alpha"'] & a_2 \xrightarrow{C} x_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
:_{b_1}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "x_1{}^\alpha"] \arrow[d, mapsto, "a_1 \xrightarrow{C} g_1"'] & :_{a_1}\mathrm{id}(a_1^\alpha) \arrow[d, mapsto, "a_1 \xrightarrow{C} g_1"] \\
g_1 \arrow[r, mapsto, "x_2{}^\alpha"'] & (\mathrm{etc}) \circ g_1
\end{tikzcd}$$

为了方便就用 (etc) 表示 $:_{a_1}\mathrm{id}(a_1^\alpha)$。 由上图可知 $g_1(x_2{}^\alpha) = (\mathrm{etc}) \overset{C}{\circ} g_1$，故 $x_2{}^\alpha = (\mathrm{etc}) \xrightarrow{C} x_2$；而 $x_2{}^\alpha = (\mathrm{etc}) \xrightarrow{C} x_2 = x_2{}^{((\mathrm{etc})\overset{C}{\circ}\_)}$ 是同构，从而知 $(\_ \overset{C}{\circ} (\mathrm{etc}))$ 是同构，$(\mathrm{etc}) : a_1 \xrightarrow{C} a_2$ 也是。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在米田嵌入处会详细介绍。

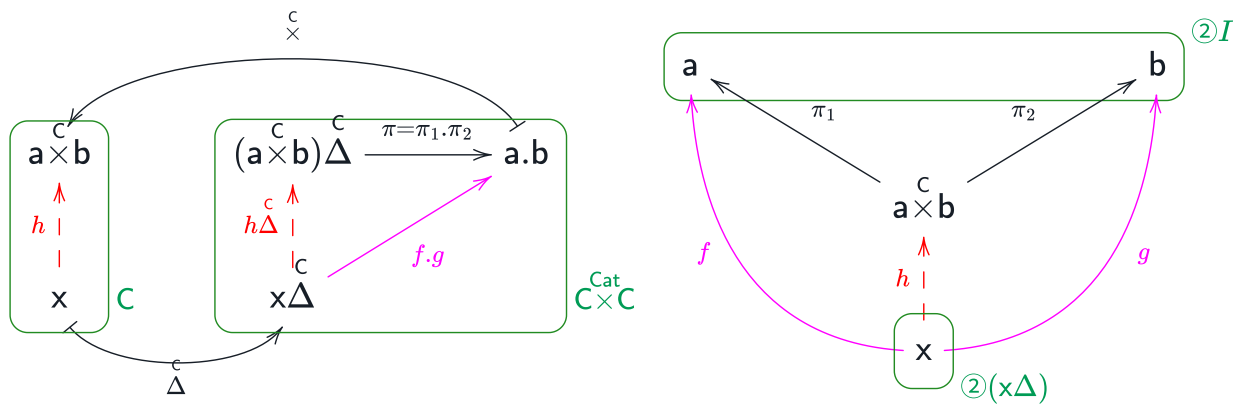
章节 04 - 05 类型的积与和

LaTeX Definitions are here.

泛性质

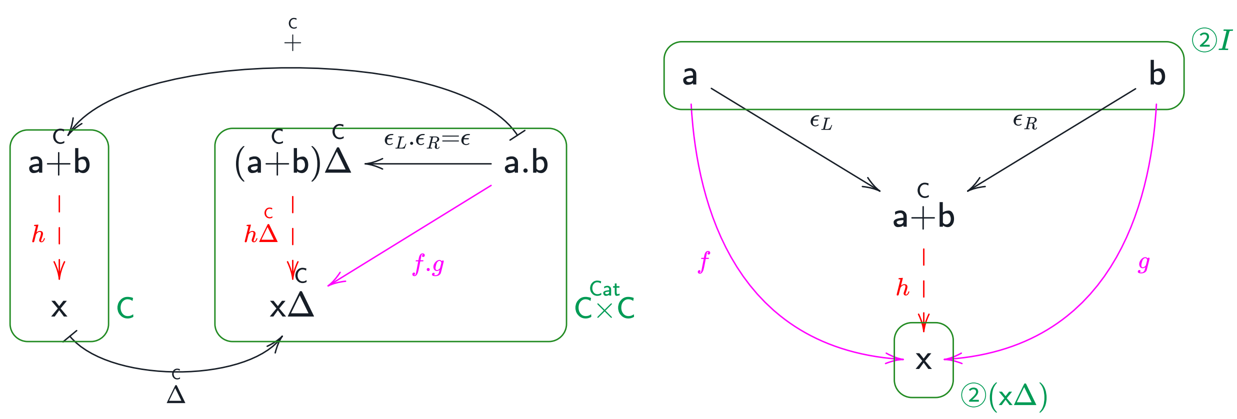
默认函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times} : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$ 在范畴 C 中有下述性质：

- $(\mathsf{x} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{a}) \overset{\mathsf{Set}}{\times} (\mathsf{x} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}) \cong (\mathsf{x} \overset{\mathsf{C}}{\to} (\mathsf{a} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{b}))$，x 为任意 C 中对象 。
  —— **泛性质**，指数对乘法的分配律 。下图便于形象理解：



默认函子 $\overset{\mathsf{C}}{+} : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$ 在范畴 C 中有下述性质：

- $(\mathsf{a} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{x}) \overset{\mathsf{Set}}{\times} (\mathsf{b} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{x}) \cong ((\mathsf{a} \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{b}) \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{x})$，x 为任意 C 中对象 。
  —— **泛性质**，指数对加法的分配律 。下图便于形象理解：



> **Note**
>
> 在上面的插图中：
>
> - $\overset{\mathsf{C}}{\Delta} : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C}$ 为对角函子，满足
> $\overset{\mathsf{C}}{\Delta} : \mathsf{c} \longmapsto \mathsf{c} \,.\, \mathsf{c}$
> - $I : ② \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$ 为函子，满足
> $I : 1 \longmapsto \mathsf{a}$
> $\quad 2 \longmapsto \mathsf{b}$
>   ② 为只有两个对象的范畴，
>   1 和 2 分别为其中的对象 。
>   这里 ② 充当一个指标范畴 。

函子性

如何证明 $\overset{C}{\times}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{C}{\times} : ({}_{:a_2}\mathrm{id} \,.\, {}_{:b_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:a_2 \overset{C}{\times} b_2}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{C}{\times}$ **保持恒等箭头**；
- $\overset{C}{\times} : (f_2 \overset{C}{\circ} f_1 \,.\, g_2 \overset{C}{\circ} g_1) \mapsto h_2 \overset{C}{\circ} h_1$
  —— 即函子 $\overset{C}{\times}$ **保持箭头复合运算** 。
  下图有助于形象理解证明的过程：

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \overset{C}{\times} b_1 \\
a_2 \overset{C}{\times} b_2 \arrow[u, dashed, "h_1"] \\
a_3 \overset{C}{\times} b_3 \arrow[u, dashed, "h_2"]
\end{tikzcd}
\;C
\qquad
\begin{tikzcd}
(a_1 \overset{C}{\times} b_1)\overset{C}{\Delta} \arrow[r, "\pi"] & a_1.b_1 \\
(a_2 \overset{C}{\times} b_2)\overset{C}{\Delta} \arrow[r, "\pi"] \arrow[u, dashed, "h_1\overset{C}{\Delta}"] & a_2.b_2 \arrow[u, "f_1.g_1"'] \\
(a_3 \overset{C}{\times} b_3)\overset{C}{\Delta} \arrow[r, "\pi"] \arrow[u, dashed, "h_2\overset{C}{\Delta}"] & a_3.b_3 \arrow[u, "f_2.g_2"']
\end{tikzcd}
\;C\overset{Cat}{\times}C
\qquad
\begin{tikzcd}
\overset{C}{a_1} & a_1 \overset{C}{\times} b_1 \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & \overset{C}{b_1} \\
a_2 \arrow[u, "f_1"] & a_2 \overset{C}{\times} b_2 \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[u, dashed, "h_1"] & b_2 \arrow[u, "g_1"'] \\
a_3 \arrow[u, "f_2"] & a_3 \overset{C}{\times} b_3 \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[u, dashed, "h_2"] & b_3 \arrow[u, "g_2"']
\end{tikzcd}
$$

另外规定 $\overset{C}{\times}$ 在实参分别为箭头和对象时的输出：

- $\overset{C}{\times} : (f_1 \,.\, b_1) \longmapsto f_1 \overset{C}{\times} {}_{:b_1}\mathrm{id}$
  $\overset{C}{\times} : (a_1 \,.\, g_1) \longmapsto {}_{:a_1}\mathrm{id} \overset{C}{\times} g_1$

如何证明 $\overset{C}{+}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{C}{+} : ({}_{:a_1}\mathrm{id} \,.\, {}_{:b_1}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:a_1 \overset{C}{+} b_1}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{C}{+}$ **保持恒等箭头**；
- $\overset{C}{+} : (f_1 \overset{C}{\circ} f_2 \,.\, g_1 \overset{C}{\circ} g_2) \mapsto h_1 \overset{C}{\circ} h_2$
  —— 即函子 $\overset{C}{+}$ **保持箭头复合运算** 。
  下图有助于形象理解证明的过程：

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \overset{C}{+} b_1 \arrow[d, dashed, "h_1"] \\
a_2 \overset{C}{+} b_2 \arrow[d, dashed, "h_2"] \\
a_3 \overset{C}{+} b_3
\end{tikzcd}
\;C
\qquad
\begin{tikzcd}
(a_1 \overset{C}{+} b_1)\overset{C}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h_1\overset{C}{\Delta}"] & a_1.b_1 \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[d, "f_1.g_1"] \\
(a_2 \overset{C}{+} b_2)\overset{C}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h_2\overset{C}{\Delta}"] & a_2.b_2 \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[d, "f_2.g_2"] \\
(a_3 \overset{C}{+} b_3)\overset{C}{\Delta} & a_3.b_3 \arrow[l, "\epsilon"']
\end{tikzcd}
\;C\overset{Cat}{\times}C
\qquad
\begin{tikzcd}
\overset{C}{a_1} \arrow[r, "\epsilon_R"] \arrow[d, "f_1"'] & a_1 \overset{C}{+} b_1 \arrow[d, dashed, "h_1"] & \overset{C}{b_1} \arrow[l, "\epsilon_R"'] \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[r, "\epsilon_L"] \arrow[d, "f_2"'] & a_2 \overset{C}{+} b_2 \arrow[d, dashed, "h_2"] & b_2 \arrow[l, "\epsilon_R"'] \arrow[d, "g_2"] \\
a_3 \arrow[r, "\epsilon_L"] & a_3 \overset{C}{+} b_3 & b_3 \arrow[l, "\epsilon_R"']
\end{tikzcd}
$$

同理规定 $\overset{C}{+}$ 在实参分别为箭头和对象时的输出：

- $\overset{C}{\times} : (f_1 \,.\, b_1) \longmapsto f_1 \overset{C}{+} {}_{:b_1}\mathrm{id}$
  $\overset{C}{\times} : (a_1 \,.\, g_1) \longmapsto {}_{:a_1}\mathrm{id} \overset{C}{+} g_1$

运算性质

对于函子 $\overset{C}{\times}$ 我们不难得知

- $a \overset{C}{\times} 1 \cong 1 \overset{C}{\times} a \cong a$ —— 乘法有**幺元** 1 。
  下图便于理解证明 : (f, g) 决定 h , h' 。

$$
\begin{tikzcd}
(a\overset{C}{\times}1)\overset{C}{\Delta} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & a.1 \\
x\overset{C}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h\overset{C}{\Delta}"] \arrow[ur, "f.g=f.{}_{:x}!"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a\overset{C}{\Delta} \arrow[r, "{}_{:a}\mathrm{id}.{}_{:a}!"] & a.1 \\
x\overset{C}{\Delta} \arrow[u, dashed, "f\overset{C}{\Delta}=h'\overset{C}{\Delta}"] \arrow[ur, "f.g=f.{}_{:x}!"'] &
\end{tikzcd}
$$

- $a \overset{C}{\times} b \cong b \overset{C}{\times} a$ —— 乘法运算有**交换律** 。
  下图便于理解证明 : (f, g) 决定 h , h' 。

$$
\begin{tikzcd}
(a\overset{C}{\times}b)\overset{C}{\Delta} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & a.b \\
x\overset{C}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h\overset{C}{\Delta}"] \arrow[ur, "f.g"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(b\overset{C}{\times}a)\overset{C}{\Delta} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & b.a \\
x\overset{C}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h'\overset{C}{\Delta}"] \arrow[ur, "g.f"'] &
\end{tikzcd}
$$

- $(a \times b) \times c \cong a \times (b \times c)$ —— 乘法运算具有**结合律** 。
  下图有助于形象理解证明 : (f_{ax}, f_{bx}, f_{cx}) 决定 h , h' 。

$$
\begin{tikzcd}
((a\overset{C}{\times}b)\overset{C}{\times}c)\overset{C}{\Delta} \arrow[r, "\pi"] & (a\overset{C}{\times}b).c \arrow[r, "\pi.{}_{:c}\mathrm{id}"] & (a.b).c \\
x\overset{C}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h\overset{C}{\Delta}"] \arrow[ur, dotted, "j.f_{cx}"] \arrow[urr, "(f_a.f_b).f_{cx}"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(a\overset{C}{\times}(b\overset{C}{\times}c))\overset{C}{\Delta} \arrow[r, "\pi"] & a.(b\overset{C}{\times}c) \arrow[r, "{}_{:a}\mathrm{id}.\pi"] & a.(b.c) \\
x\overset{C}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h'\overset{C}{\Delta}"] \arrow[ur, dotted, "f_{ax}.j'"] \arrow[urr, "f_a.(f_b.f_c)"'] & &
\end{tikzcd}
$$

对于函子 $\overset{C}{+}$ 我们不难得知

- $a \overset{C}{+} 0 \cong 0 \overset{C}{+} a \cong a$ —— 加法有**幺元** 0 。
  下图有助于理解 : (f, g) 决定 h , h' 。

$$
\begin{tikzcd}
(a\overset{C}{+}0)\overset{C}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h\overset{C}{\Delta}"'] & a.0 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f.g=f.{}_{:\backslash \mathrm{ob}x}\text{¡}"] \\
x\overset{C}{\Delta} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a\overset{C}{\Delta} \arrow[d, dashed, "f=h'\overset{C}{\Delta}"'] & a.0 \arrow[l, "{}_{:a}\mathrm{id}.{}_{:a}\text{¡}"'] \arrow[dl, "f.g=f.{}_{:x}\text{¡}"] \\
x\overset{C}{\Delta} &
\end{tikzcd}
$$

- $a \overset{C}{+} b \cong b \overset{C}{+} a$ —— 加法运算有**交换律** 。
  下图有助于理解 : (f, g) 决定 h , h' 。

$$
\begin{tikzcd}
(a\overset{C}{+}b)\overset{C}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h\overset{C}{\Delta}"'] & a.b \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f.g"] \\
x\overset{C}{\Delta} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(b\overset{C}{+}a)\overset{C}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h'\overset{C}{\Delta}"'] & b.a \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "g.f"] \\
x\overset{C}{\Delta} &
\end{tikzcd}
$$

- $(a + b) + c \cong a + (b + c)$ —— 加法运算具有**结合律** 。
  下图有助于形象理解证明 : (f_{ax}, f_{bx}, f_{cx}) 决定 h , h' 。

$$
\begin{tikzcd}
((a\overset{C}{+}b)\overset{C}{+}c)\overset{C}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h\overset{C}{\Delta}"'] & (a\overset{C}{+}b).c \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "j.f_c"] & (a.b).c \arrow[l, "\epsilon.{}_{:c}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "(f_a.f_b).f_c"] \\
x\overset{C}{\Delta} & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(a\overset{C}{+}(b\overset{C}{+}c))\overset{C}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h'\overset{C}{\Delta}"'] & a.(b\overset{C}{+}c) \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "f_a.j'."] & a.(b.c) \arrow[l, "{}_{:a}\mathrm{id}.\epsilon"'] \arrow[dll, "f_a.(f_b.f_c)"] \\
x\overset{C}{\Delta} & &
\end{tikzcd}
$$

幺半范畴

像刚才这样对象运算具有**单位元**以及**结合律**的范畴称作**幺半范畴**；

若上述范畴还具有**交换律**则称作**对称幺半范畴**；

很明显我们的范畴 C 是典型的**对称幺半范畴**。

幺半群

什么是幺半群呢？有两种定义方式：

- **幺半群** M 是个范畴，其只含一个对象 m；
  其中的复合运算正好有单位元以及结合律。
- 对象 m 属于幺半范畴 C，满足下述交换图：

$$
\begin{tikzcd}
1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[r, "u \overset{\mathsf{C}}{\otimes}_{:\mathsf{m}} \mathrm{id}"] \arrow[dr, "左单位元\ u_l"'] & \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[d, "p"', "运算结果唯一"] & \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} 1 \arrow[l, "{}_{:\mathsf{m}}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\otimes} u"'] \arrow[dl, "u_r\ 右单位元"] \\
 & \mathsf{m} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m}) \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[rr, "结合律\ a"] \arrow[d, "先算左侧括号\ p \overset{\mathsf{C}}{\otimes}_{:\mathsf{m}} \mathrm{id}"'] & & \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} (\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m}) \arrow[d, "{}_{:\mathsf{m}}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\otimes} p\ 先算右侧括号"] \\
\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[r, "再算最后结果\ p"'] & \mathsf{m} & \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[l, "p\ 再算最后结果"]
\end{tikzcd}
$$

  其中

  - u ：$1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{m}$ 其实就是 m 里面的幺元
  - u_l ：$1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{m}$ 表示 u 构成左幺元
  - u_r ：$\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} 1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{m}$ 表示 u 构成右幺元
  - p ：$\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{m}$ 即为 m 中的二元运算
  - a ：$(\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m}) \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} (\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m})$ 表示 m 具有结合律

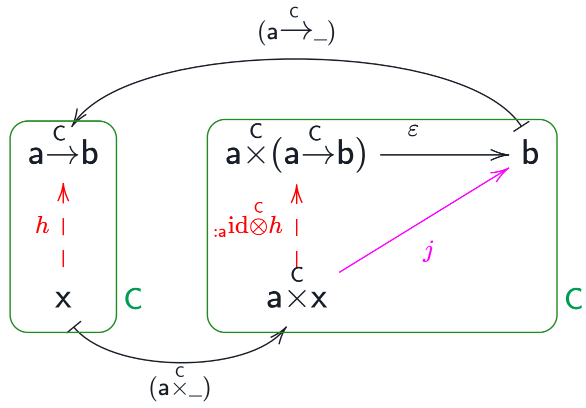
章节 06 类型的幂

LaTeX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{C}{\rightarrow} : C \overset{Cat}{\times} C \overset{Cat}{\longrightarrow} C$ 在范畴 C 中有下述性质：

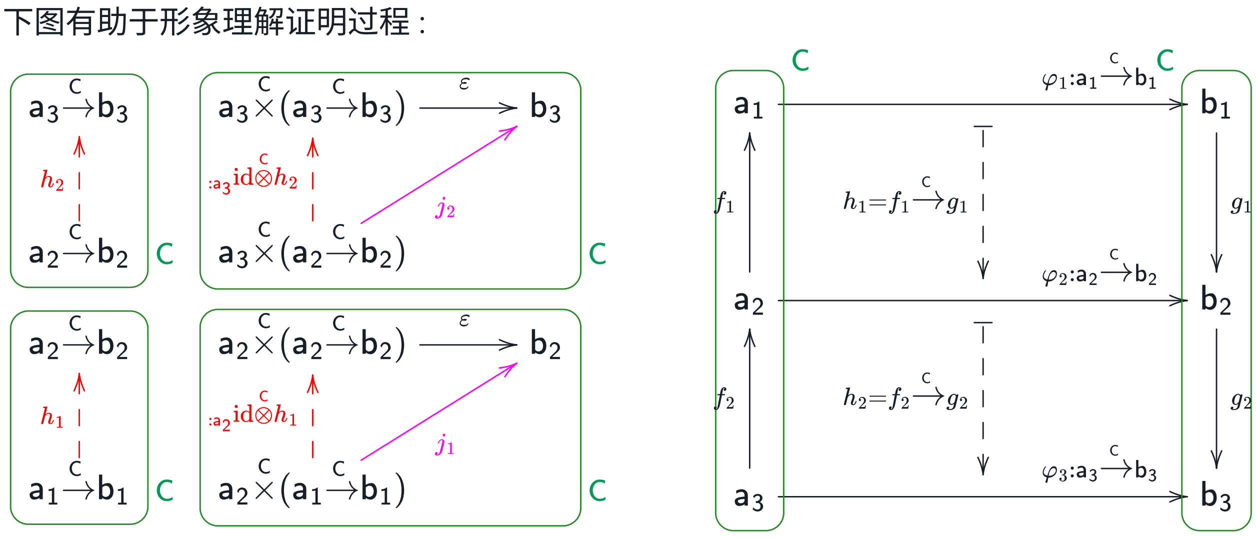
- $\underline{(a \overset{C}{\times} x) \overset{C}{\rightarrow} b} \cong \underline{x \overset{C}{\rightarrow} (a \overset{C}{\rightarrow} b)} \cong \underline{a \overset{C}{\rightarrow} (x \overset{C}{\rightarrow} b)}$，x 为任意 C 中对象
  —— **泛性质**，指数与加乘法运算间的关系 。 下图便于理解证明：



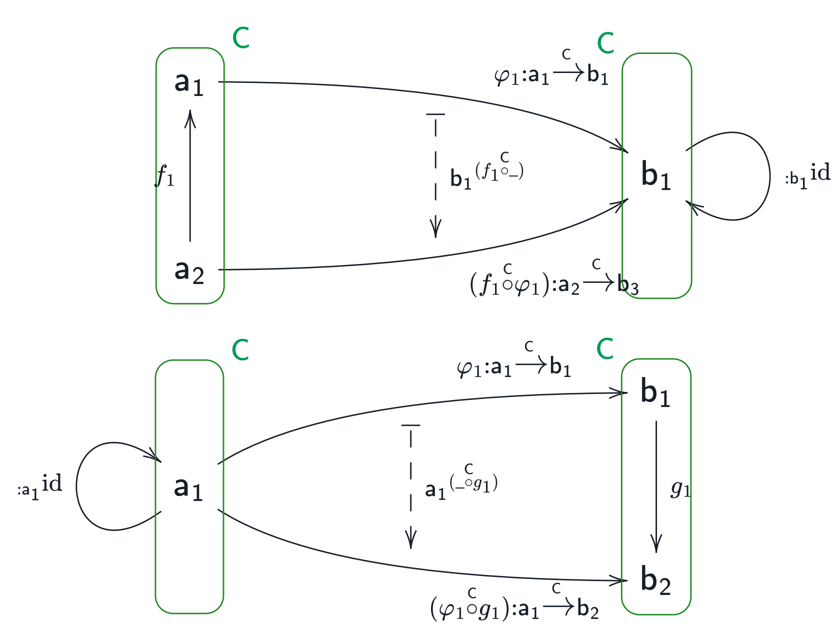
函子性

如何证明 $\overset{C}{\rightarrow}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{C}{\rightarrow} : ({}_{:a_1}\mathrm{id} \;.\; {}_{:b_1}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(a_1 \overset{C}{\rightarrow} b_1)}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{C}{\rightarrow}$ 能**保持恒等箭头**；
- $\overset{C}{\rightarrow} : (f_2 \overset{C}{\circ} f_1 \;.\; g_1 \overset{C}{\circ} g_2) \longmapsto h_1 \overset{C}{\circ} h_2$
  —— 即函子 $\overset{C}{\rightarrow}$ **保持箭头复合运算** 。
  下图有助于形象理解证明过程：



下图（自上到下分别为图 1 和图 2）后面会用到 。



范畴 C 内任意两对象 a_1 和 b_1 间的箭头构成一个集合 $\mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{b}_1$，
说明 $\xrightarrow{\mathsf{C}}$ 只能将两个对象打到一个集合。下面使 $\xrightarrow{\mathsf{C}}$ 升级为函子：
若还知道箭头 $f_1 : \mathsf{a}_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{a}_1$ 以及 $g_1 : \mathsf{b}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{b}_2$，则规定

- $(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{b}_1) : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \cancel{\overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}$ 为函子且
  $(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{b}_1) : \mathsf{a}_1 \longmapsto (\mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{b}_1)$，并且有
  $(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{b}_1) : f_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{b}_1) = (f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}) = \mathsf{b}_1{}^{(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}$

  图 1 有助于理解。

  $(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} g_1) : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \cancel{\overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}$，
  $(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} g_1) : \mathsf{a}_1 \longmapsto (\mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} g_1) = ({}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \xrightarrow{\mathsf{C}} g_1) = \mathsf{a}_1{}^{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1)}$
  $(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} g_1) : f_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} g_1) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)^{\overset{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}}{\circ}} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1)^{\overset{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}}{\circ}} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$

  图 2 有助于理解。

  > **ⓘ Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - $$\begin{aligned} よ : \mathsf{C} &\xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}) \\ \mathsf{b}_1 &\longmapsto (\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{b}_1) && \text{构成一个函子,称作预层} \\ g_1 &\longmapsto (\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} g_1) = (\_ \circ g_1) && \text{构成一个函子间映射,即自然变换} \end{aligned}$$
  >
  >   该函子称作是**米田嵌入**。

- $(\mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) : \cancel{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\times}} \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}$ 为函子且
  $(\mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) : \mathsf{b}_1 \longmapsto (\mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{b}_1)$，并且有
  $(\mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) : g_1 \longmapsto (\mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} g_1) = ({}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \xrightarrow{\mathsf{C}} g_1) = \mathsf{a}_1{}^{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1)}$

  图 2 有助于理解。

  $(f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) : \cancel{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\times}} \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}$，
  $(f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) : \mathsf{b}_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{b}_1) = (f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}) = \mathsf{b}_1{}^{(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}$
  $(f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) : g_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} g_1) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)^{\overset{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}}{\circ}} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1)^{\overset{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}}{\circ}} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$

  图 1 有助于理解。

  > **ⓘ Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - $$\begin{aligned} 尤 : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} &\xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}) \\ \mathsf{a}_1 &\longmapsto (\mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) && \text{构成一个函子} \\ f_1 &\longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) = (f_1 \circ \_) && \text{构成一个函子间映射,即自然变换} \end{aligned}$$
  >
  >   该函子戏称为**尤达嵌入**。

积闭范畴

这里插个题外话：

若范畴包含终对象，所有类型的积以及指数，则可将其称作**积闭范畴**；

若范畴包含始对象，所有类型的和，则可将其称作是**余积闭范畴**；

若范畴满足上述条件，则可称作**双积闭范畴**。

很明显我们讨论的范畴 C 就是**双积闭范畴**。

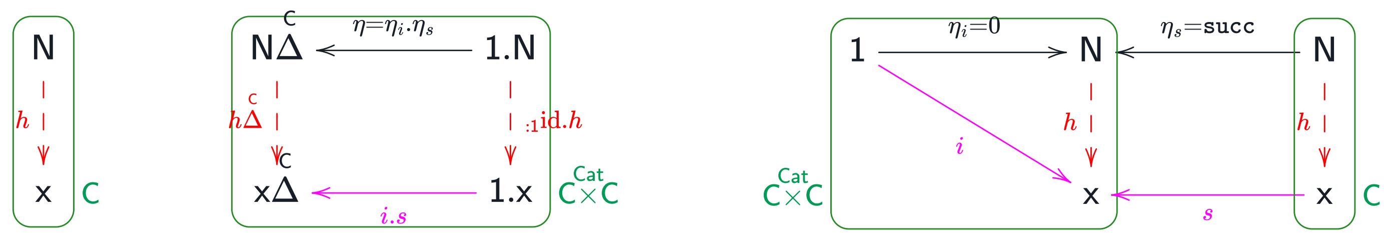
章节 07 递归类型

LaTeX Definitions are here.

泛性质

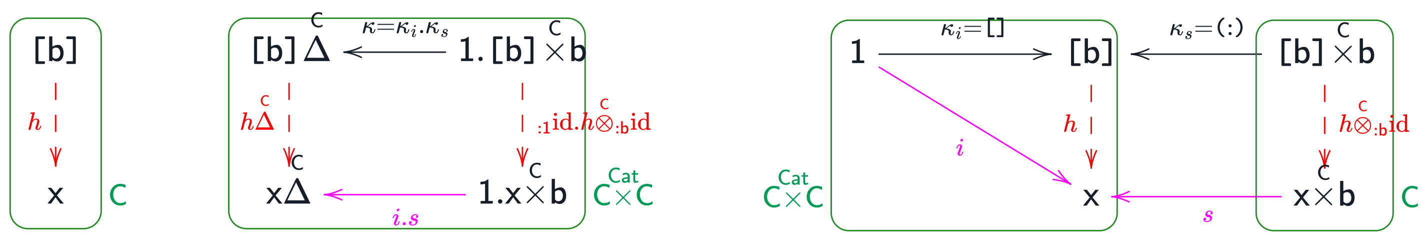
默认对象 N 在范畴 C 中有下述性质：

- $(1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{x}) \overset{\mathsf{Cat}}{\times} (\mathsf{x} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{x}) \cong (\mathsf{N} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{x})$，$\mathsf{x}$ 为任意 C 中对象
  —— **泛性质**。`rec` 即对应的同构（上式从左至右）。



默认函子 $[\_] : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$ 在范畴 C 中有下述性质：

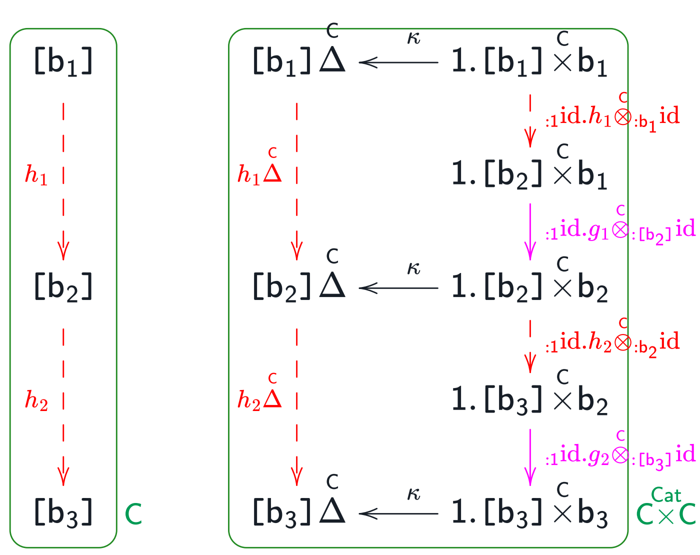
- $(1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{x}) \overset{\mathsf{Cat}}{\times} ((\mathsf{x} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{b}) \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{x}) \cong ([\mathsf{b}] \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{x})$，$\mathsf{x}$ 为任意 C 中对象
  —— **泛性质**。`foldr` 即对应的同构（上述等式从左至右）。



函子性

如何证明 $[\_]$ 构成函子呢？请看

- $[\_] : {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id} \longmapsto {}_{:[\mathsf{b}_1]}\mathrm{id}$
  —— **$[\_]$ 保持恒等箭头**；
- $[\_] : (g_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_2) \longmapsto (h_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} h_2)$
  —— **$[\_]$ 保持箭头复合运算**。
  下图便于形象理解证明过程。



章节 08 - 09 函子与自然变换

LaTeX Definitions are here.

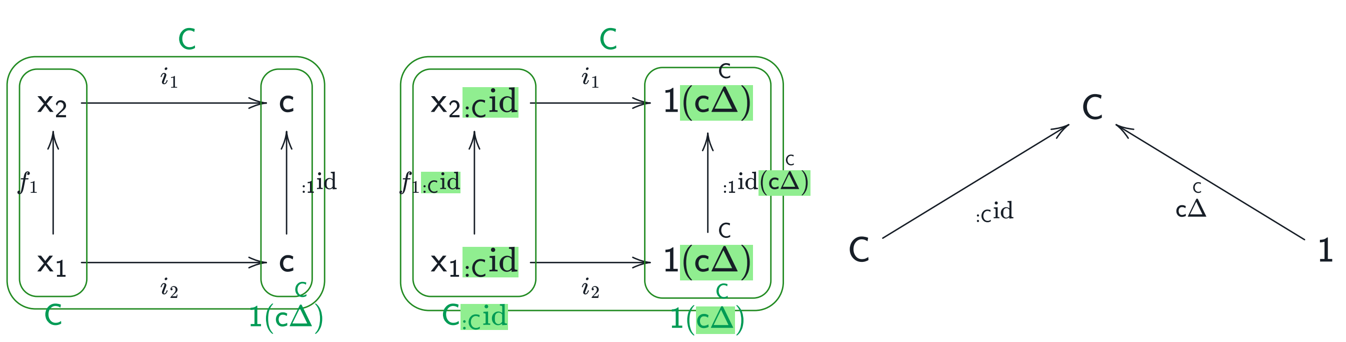
一些特殊的范畴

现在规定几种特殊的范畴。

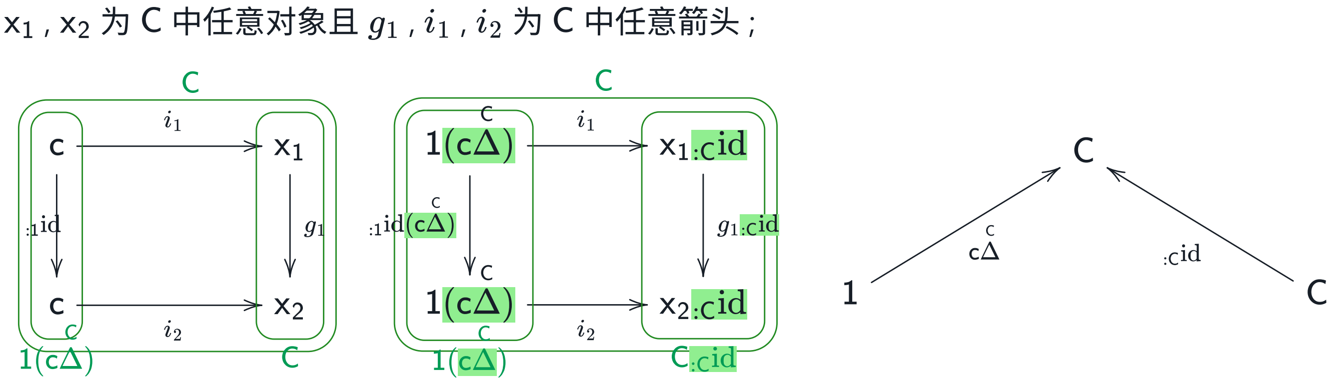
- **离散范畴**：只有对象不含箭头（恒等箭头除外）的范畴。
- Set：**所有集合构成的范畴**，为局部小范畴，满足
  - Set 中对象为任意集合；
  - Set 中箭头为集合间映射。
- Cat：**所有范畴构成的范畴**，满足
  - Cat 中任何对象都构成一个范畴；
  - Cat 中任何箭头都构成一个函子。

若 C，D 为 Cat 中对象，则：

- C^{op}：**反范畴**，满足
  - C^{op} 中对象皆形如 c，
c 为任意 C 中的对象；
  - C^{op} 中箭头皆形如 $i^{\mathrm{op}} : \mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}_1$，
$i : \mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 可为任意 C 中的箭头。
- $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{D}$：**积范畴**，满足
  - $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{D}$ 中对象皆形如 c . d，
c，d 分别为任意 C，D 中的对象；
  - $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{D}$ 中箭头皆形如 i . j，
i，j 分别为任意 C，D 中的箭头。
- $\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$：**所有 C 到 D 的函子的范畴**，满足
  - $\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 中任何对象
都是 C 到 D 的函子；
  - $\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 中任何箭头
都是函子间自然变换。
- C/c：**俯范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
  - C/c 中对象皆形如 $\cancel{\mathsf{x} . 1} . i$，其中 x 和
$i : \mathsf{x} \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
  - c/C 中箭头皆形如 $f_1 \cancel{. {}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}}$ 且满足下述交换图，其中
x_1，x_2 为 C 中任意对象且 f_1，i_1，i_2 为 C 中任意箭头；



- c/C：**仰范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
  - c/C 中对象皆形如 $\cancel{1 . \mathsf{x}} . i$，其中 x 和
$i : \mathsf{c} \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{x}$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
  - C/c 中箭头皆形如 $\cancel{{}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id} .}\ g_1$ 且满足下述交换图，其中
x_1，x_2 为 C 中任意对象且 g_1，i_1，i_2 为 C 中任意箭头；



函子

接下来我们来提供函子的正式定义：

- P_1 : C $\xrightarrow{\text{Cat}}$ D 为**函子**当且仅当
  - 对任意 C 中对象 c，cP_1 为
    D 中对象且 $_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}P_1 = {}_{:\mathsf{c}P_1}\mathrm{id}$；
  - 对任意 C 中箭头 i_1 : c$_1$ $\xrightarrow{\text{C}}$ c$_2$ 和 i_2 : c$_2$ $\xrightarrow{\text{C}}$ c$_3$，
    始终都有等式 $(i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2)P_1 = i_1P_1 \overset{\mathsf{D}}{\circ} i_2P_1$ 成立。

函子的复合运算

若知道 P_1 : C $\xrightarrow{\text{Cat}}$ D 构成函子且
还知道 Q_1 : D $\xrightarrow{\text{Cat}}$ E 为函子，则

- $P_1 \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} Q_1$: C $\xrightarrow{\text{Cat}}$ E
  也构成一个函子。

恒等函子

对于函子我们也有恒等映射，即：

- $_{:\mathsf{C}}\mathrm{id} \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} P_1 = P_1$
  $= P_1 \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{id}$

忠实，完全和本质满函子

若 C，D，E 皆为**局部小范畴**，则

- P_1 是**忠实的**当且仅当对任意 C 中的对象 c$_1$，c$_2$
  (c$_1$ $\xrightarrow{\text{C}}$ c$_2$) 与 (c$_1P_1$ $\xrightarrow{\text{D}}$ c$_2P_1$) 之间始终存在单射；
- P_1 是**完全的**当且仅当对任意 C 中的对象 c$_1$，c$_2$
  (c$_1$ $\xrightarrow{\text{C}}$ c$_2$) 与 (c$_1P_1$ $\xrightarrow{\text{D}}$ c$_2P_1$) 之间始终存在满射；
- P_1 是**完全忠实的**当且仅当任意 C 中对象 c$_1$，c$_2$
  (c$_1$ $\xrightarrow{\text{C}}$ c$_2$) 与 (c$_1P_1$ $\xrightarrow{\text{D}}$ c$_2P_1$) 之间始终存在双射。

> ⓘ **Note**
>
> 刚才提到的“单 / 满 / 双射”
> 针对的都是范畴的箭头部分。

- P_1 是**本质满的**当且仅当对任意 D 中对象 d
  都存在 C 中对象 c 使 cP_1 $\xrightarrow{\text{D}}$ d 之间有双射。

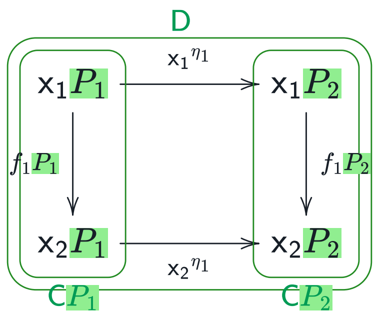
根据刚才的信息我们不难得知

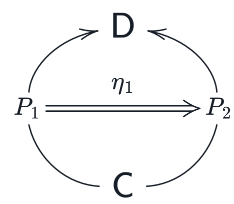
- 若 P_1，Q_1 为忠实函子
  则 $P_1 \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} Q_1$ 为忠实函子；
- 若 P_1，Q_1 为完全函子
  则 $P_1 \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} Q_1$ 为完全函子；
- 若 P_1，Q_1 为完全忠实函子
  则 $P_1 \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} Q_1$ 为完全忠实函子；
- 若 $P_1 \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} Q_1$ 为完全忠实函子
  且知道 Q_1 为完全忠实函子
  则可知 P_1 为完全忠实函子；
- 若 P_1，Q_1 为本质满函子
  则 $P_1 \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} Q_1$ 为本质满函子。

自然变换

如果还知道 $P_2 : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为函子，那么

- $\eta_1 : P_1 \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}} P_2$ 为自然变换当且仅当对任意
  C 中对象 x_1，x_2 始终都会有下述交换图成立：

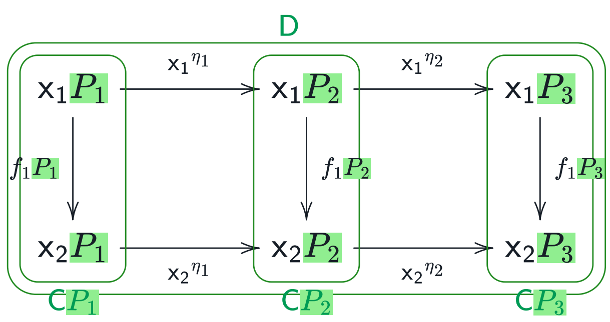


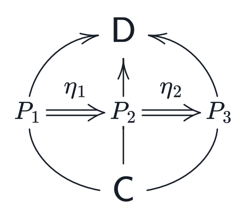


自然变换的复合

若已知 $\eta_1 : P_1 \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}} P_2$ 构成自然变换且
还知道 $\eta_2 : P_2 \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}} P_3$ 为自然变换则有

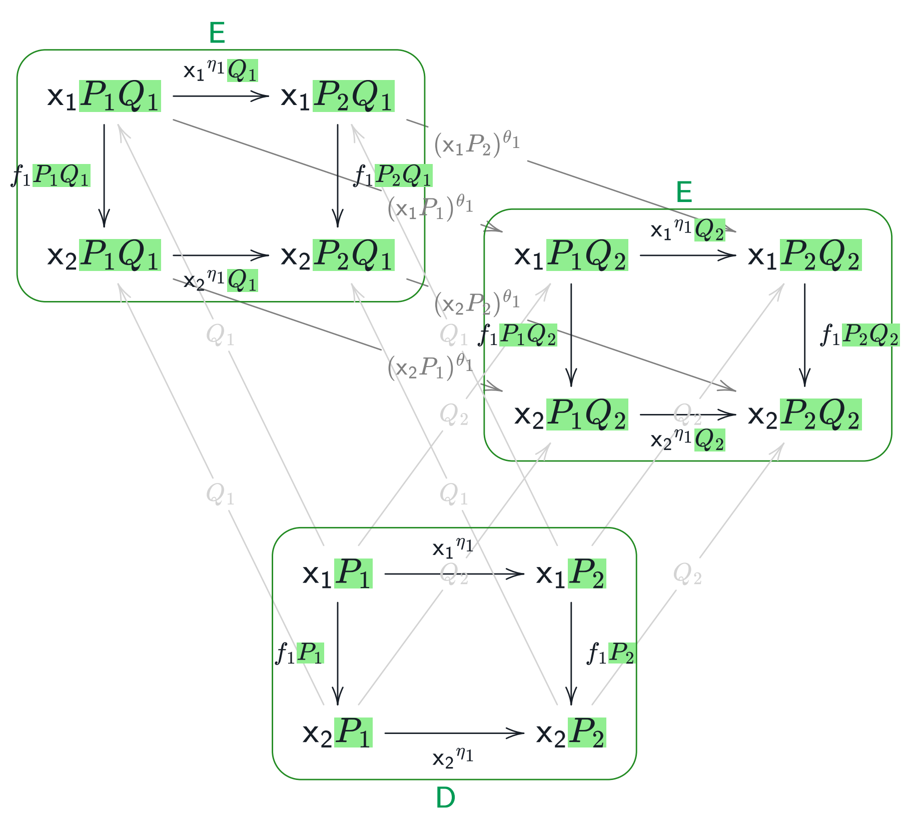
- $\eta_1 \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}}{\circ} \eta_2 : P_1 \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}} P_2$ 为自然变换，
  称作 η_1 和 η_2 的**纵复合**。

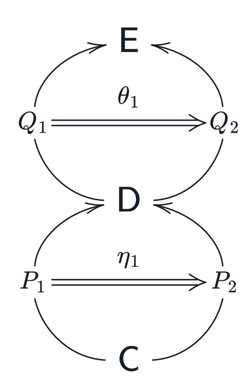




如果还知道 $Q_2 : \mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$ 也是个函子
及自然变换 $\theta_1 : Q_1 \xrightarrow{\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}} Q_2$，那么有

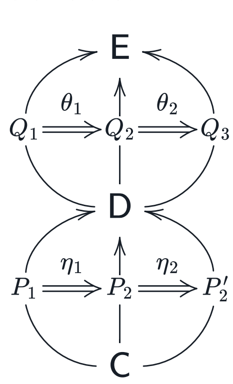
- $\eta_1 \circ \theta_1 : P_1 \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} Q_1 \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}} P_2 \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} Q_2$ 为
  自然变换，称作 η_1 和 θ_1 的**横复合**。





若 $\theta_2 : Q_2 \xrightarrow{\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}} Q_3$ 为自然变换则

- $(\eta_1 \circ \theta_1) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}}{\circ} (\eta_2 \circ \theta_2) = (\eta_1 \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}}{\circ} \eta_2) \circ (\theta_1 \overset{\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}}{\circ} \theta_2)$，
  即便改变了横纵复合的先后顺序也不会影响最终结果。



恒等自然变换

同样对于自然变换也有恒等映射。

- ${}_{:P_1}\mathrm{id} : P_1 \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{D}} P_1$ 为恒等自然变换当且仅当
  对范畴 C 中任意对象 x 有下述交换图成立：

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{x}_1 P_1 \arrow[r, "\mathsf{x}_1{}^{\eta_1} = {}_{:\mathsf{x}_1}\mathrm{id}"] \arrow[d, "f_1 P_1"'] & \mathsf{x}_1 P_2 \arrow[d, "f_1 P_2"] \\
\mathsf{x}_2 P_1 \arrow[r, "\mathsf{x}_2{}^{\eta_1} = {}_{:\mathsf{x}_2}\mathrm{id}"'] & \mathsf{x}_2 P_2
\end{tikzcd}$$

D　$\mathsf{C}P_1$　$\mathsf{C}P_2$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{D} \\
\mathsf{C} \arrow[u, "P_1"] \arrow[u, phantom, loop right, "\eta_1"]
\end{tikzcd}$$

自然同构

自然同构与你想象中的同构不太像。

- $\eta_1 : P_1 \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{D}} P_2$ 为**自然同构**当且仅当
  x^{η_1} 总是同构，这里 x 为任意 C 中对象。
  此时 P_1，P_2 的关系可用 $P_1 \overset{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{D}}{\cong} P_2$ 表示

范畴等价的定义

我们用自然同构来定义范畴的等价。

- $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\cong} \mathsf{D}$ 当且仅当
  存在函子 $P_1 : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 及 $P_1' : \mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}$
  使 $P_1 \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} P_1' \overset{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}}{\cong} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{id}$ 且 $P_1' \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} P_1 \overset{\mathsf{D} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{D}}{\cong} {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{id}$。