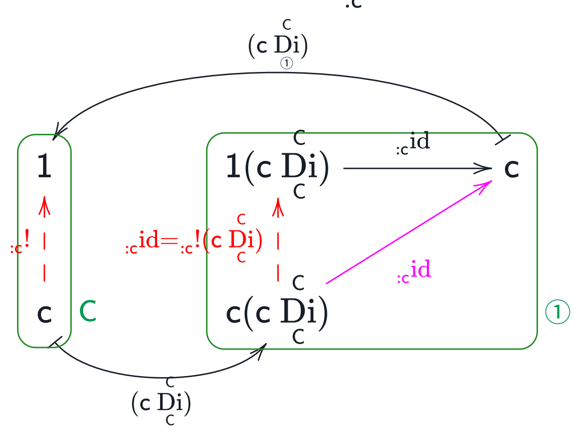
01 始对象和终对象

LaTeX Definitions are here.

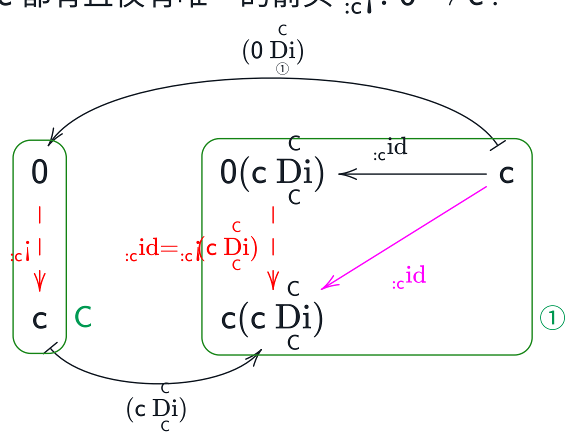
泛性质

范畴由对象及其间箭头构成。本文重点分析**余积闭范畴** C。首先给出如下定义：

- 1 为**终对象**当且仅当对任意 C 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 $_{:c}! : c \xrightarrow{C} 1$：



- 0 为**始对象**当且仅当对任意 C 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 $_{:c}¡ : 0 \xrightarrow{C} c$：



> **Note**
>
> - $$\underset{①}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} : C \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (① \xrightarrow{\mathsf{Cat}} C)$$
> $$c \longmapsto \text{常值函子}$$
> $$c\ \underset{①}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} : ① \xrightarrow{\mathsf{Cat}} C$$
> $$1 \longmapsto c$$
> $$f \longmapsto {}_{:c}\mathrm{id}$$
>   ① 为仅含单个函子的范畴，1 为其中的对象；仅含有单个对象的范畴可以被等价地视作为 ①。

若范畴 C 中真的含有 0 和 1 分别作为始对象和终对象 则根据上述信息可知

- 形如 $1 \xrightarrow{C} 1$ 的箭头只有一个，即 $_{:1}\mathrm{id}$；
- 形如 $0 \xrightarrow{C} 0$ 的箭头只有一个，即 $_{:0}\mathrm{id}$；

元素与全局元素

对任意对象 c_1, c_1', etc，c_2, c_2', etc，c_3 及任意的映射 i 我们进行如下的规定：

- i 为 c_2 的**元素**当且仅当 $i\ \overset{C}{\mathrm{tar}} = c_2$；
- i 为 c_1 的**全局元素**当且仅当 $i\ \overset{C}{\mathrm{tar}} = c_1$ 且 $i\ \overset{C}{\mathrm{src}} = 1$
- i 不存在仅当 $i\ \overset{C}{\mathrm{tar}} = 0$。

> **Note**
>
> 其他范畴中刚才的断言未必成立。

02 范畴里面的箭头

LaTeX Definitions are here.

我们进行下述规定：

- $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2 =$
  所有从 c_1 射向 c_2 的箭头构成的集。

> **Note**
>
> 上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
> 其他范畴里 $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2$ 未必构成集。

范畴 C 中特定的箭头可以进行复合运算：

- $$\begin{array}{cccccc} \overset{\mathsf{C}}{\circ} : & (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) & \overset{\mathsf{Set}}{\times} & (\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_3) & \overset{\mathsf{Set}}{\longrightarrow} & (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_3) \\ & (\quad i_1 & . & i_2 \quad) & \longmapsto & i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2 \end{array}$$

如果我们还知道箭头 f_1，i，f_2 分别属于
$\mathsf{c}'_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1$，$\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2$，$\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_3$ 那么便可知

- $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i) \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2 = f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} (i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)$，
  即箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便可获得新的函数：

- $$\begin{array}{cccc} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) : & (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) & \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{Set}} & (\mathsf{c}'_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \\ & i & \longmapsto & (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i) \end{array}$$
  称作**前复合**。下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{c}_1 \arrow[drr, bend left, "i:\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2"] & {} \arrow[dd, dashed, mapsto, "\mathsf{c}_2^{(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} _)}"] & \\
& & \mathsf{c}_2 \arrow[loop right, "{}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}"] \\
\mathsf{c}'_1 \arrow[uu, "f_1"] \arrow[urr, bend right, "(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i):\mathsf{c}'_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2"'] & {} &
\end{tikzcd}$$

- $$\begin{array}{cccc} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) : & (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) & \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{Set}} & (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}'_2) \\ & i & \longmapsto & (i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1) \end{array}$$
  称作**后复合**。 下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd}
& {} \arrow[dd, dashed, mapsto, "\mathsf{c}_1^{(_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)}"] & \mathsf{c}_2 \arrow[dd, "f_2"] \\
\mathsf{c}_1 \arrow[loop left, "{}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}"] \arrow[urr, bend left, "i:\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2"] \arrow[drr, bend right, "(i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2):\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}'_2"'] & & \\
& {} & \mathsf{c}'_2
\end{tikzcd}$$

根据上面的定义不难得出下述结论：

- $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\to} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \overset{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\to} \mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$
  复合运算具有**结合律**，即后面提到的**自然性**；
- $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} i) \overset{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\to} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2))$
  前复合与复合运算的关系
- $(i \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\to} \mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) = ((f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i) \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$
  后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。
假如 a_1 为 c_1 的全局元素则可规定

- $c_1 i = c_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i$