米田嵌入

根据前面的内容我们可知

・ よ: $C \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (C^{\mathsf{op}} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})$ $c_2 \longmapsto (c_2 \xrightarrow{\mathsf{Cop}} _) = (_ \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2)$ 构成一个函子,称作预层 $f_2 \longmapsto (f_2 \xrightarrow{\mathsf{Cop}} _) = (_ \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2) = (_ \circ f_2)$ 构成一个函子间映射,即自然变换

构成一个完全忠实函子,该函子称作是米田嵌入。

证明如下:

よ是函子,因为

$$\begin{array}{ll} \bullet & \underset{:c_2}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{id}}\, \gimel} = \overset{\mathsf{C}}{(-\circ :_{c_2}\mathrm{id})} = \underset{:(c_2 \, \gimel)}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{id}}} \mathrm{id} \\ \bullet & \underbrace{(f_2 \, \circ \, f_2') \, \gimel}_{} \, \gimel = \overset{\mathsf{C}}{(-\circ (f_2 \, \circ \, f_2'))} = \overset{\mathsf{C}}{(-\circ f_2)} \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} \overset{\mathsf{C}}{(-\circ f_2')} \, , \end{array}$$

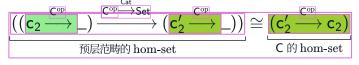
由于函子具有保持对象/映射性质的能力,

故便可知 f_2 よ 为同构当且仅当 f_2 为同构。

• よ是完全忠实的,因为

将协变米田引理中的 $c_1 / C / F$ 分别换成 $c_2 / C^{op} / (c_2' \longrightarrow L)$

即可获得下述公式:



也就是

$$((c_2 \downarrow) \xrightarrow{Cat} Set)$$
 $(c_2 \downarrow)$ \cong $(c_2 \downarrow c_2 \downarrow)$ $(c_2 \downarrow c_2 \downarrow)$ $(c_2 \downarrow c_2 \downarrow c_2 \downarrow)$ $(c_2 \downarrow c_2 \downarrow c_$

i Note

问题来了: 既然 是完全忠实的 , 那么是否意味着如果 $\frac{c_2}{c_2} : c_2 \xrightarrow{c_2} c_2'$ 是同构则上式左侧部分与之对应

的自然变换一定就是自然同构呢?

根据前面的内容我们可知

• 尤:
$$C^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (C \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})$$
 $c_1 \longmapsto (c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}})$ 构成一个函子
 $f_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}}) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ})$ 构成一个函子间映射,即自然变换

构成一个完全忠实函子,该函子称作是尤达嵌入。

证明如下:

• 尤是函子,因为

•
$$\underbrace{[c_1\mathrm{id}\mathcal{T}]}_{:c_1} = \underbrace{[-\circ : c_1\mathrm{id}]}_{:[c_1\mathcal{T}]} = \underbrace{[-\circ : f_1]}_{:[c_1\mathcal{T}]} \mathrm{id}$$
• $\underbrace{(f_1 \circ f_1')}_{:c_1\mathcal{T}} = \underbrace{(-\circ : f_1 \circ f_1')}_{:[-\circ : f_1]} = \underbrace{(-\circ : f_1)}_{:[-\circ : f_1]} \circ \underbrace{(-\circ : f_1')}_{:[-\circ : f_1']}$

• 尤是完全且忠实的,因为

将协变米田引理中的F

换成 $(c_1 \xrightarrow{c} _-)$

即可获得下述公式:

$$\frac{((\mathbf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \bot) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{C} \times \mathsf{Set}}} (\mathbf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \bot))}{- \text{ #} 自然变换} \cong \underbrace{(\mathbf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathtt{c}_1)}_{- \text{ #} 元素}$$

也就是

$$((c_1 \dot{\mathcal{I}}) \xrightarrow{Cat} (c_1' \dot{\mathcal{I}})) \cong (c_1' \dot{\mathcal{I}}))$$
 $-$ 堆自然变换
 $-$ 堆元素

(i) Note

问题来了: 既然 尤 是完全忠实的, 那么是否意味着如果 $f_1: c_1 \to c_1$ 是同构则上式左侧部分与之对应的自然变换一定就是自然同构呢?