章节 01 - 03 基本概念

LaTeX Definitions are here.

始对象与终对象

范畴由对象及其间箭头构成。本文重点分析**余积闭范畴** $\mathcal{C}$。首先给出如下定义：

- 0 为**始对象**当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 $_{:c}¡ : 0 \xrightarrow{\mathcal{C}} c$；
- 1 为**终对象**当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 $_{:c}! : c \xrightarrow{\mathcal{C}} 1$；

> ⓘ **Note**
>
> 其他范畴中始终对象不一定存在。

范畴 $\mathcal{C}$ 中我们假设其含 0 和 1 分别作为始对象和终对象，那么由上述信息可知

- 形如 $0 \xrightarrow{\mathcal{C}} 0$ 的箭头只有一个，即 $_{:0}\mathrm{id}$；
- 形如 $1 \xrightarrow{\mathcal{C}} 1$ 的箭头只有一个，即 $_{:1}\mathrm{id}$；

元素与全局元素

对任意对象 $a, a_1, a_2, \mathrm{etc}$，$b, b_1, b_2, \mathrm{etc}$ 以及任意映射 ϕ，我们进行如下的规定：

- ϕ 为 b 的**元素**当且仅当 $\phi : a \xrightarrow{\mathcal{C}} b$；
- ϕ 为 a 的**全局元素**当且仅当 $\phi : 1 \xrightarrow{\mathcal{C}} a$；
- ϕ 不存在可通过 $\phi : b \xrightarrow{\mathcal{C}} 0$ 得出。

> ⓘ **Note**
>
> 其他范畴中刚才的断言未必成立。

箭头构成的集合

这里再给一个定义：

- $\mathsf{a} \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b} =$
  所有从 a 射向 b 的箭头构成的集 。

> ⓘ **Note**
>
> 上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
> 在其他范畴里 $\mathsf{a} \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}$ 未必构成集 。

箭头的复合运算

范畴 $\mathcal{C}$ 中特定的箭头可以进行复合运算：

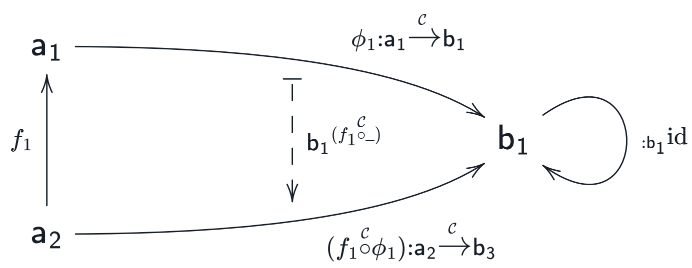
$$\begin{aligned} \overset{\mathcal{C}}{\circ} &: (\mathsf{a}_2 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{a}_1) \times (\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_1) \xrightarrow{\mathcal{S}et} (\mathsf{a}_2 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_1) \\ \overset{\mathcal{C}}{\circ} &: (\quad f_1 \quad . \quad \phi_1 \quad) \longmapsto \quad f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1 \end{aligned}$$

若我们还知道箭头 f_1，ϕ_1，g_1 分别属于
$\mathsf{a}_2 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{a}_1$，$\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_1$，$\mathsf{b}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_2$ 那么便有

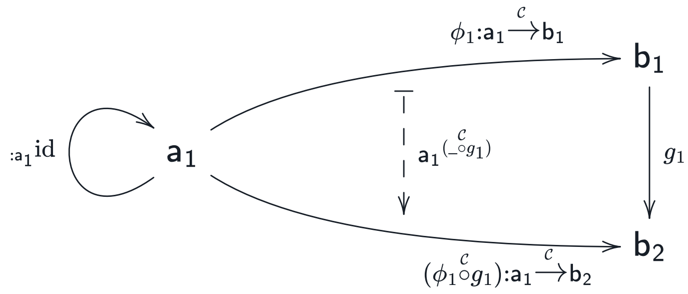
- $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1) \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1 = f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1)$
  说明箭头复合运算具有**结合律** 。

另外固定住一侧实参便获可得新的函数：

- $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) : (\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \_) \xrightarrow{\mathcal{C}\to\mathcal{S}et} (\mathsf{a}_2 \overset{\mathcal{C}}{\to} \_)$
  $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) : \quad \phi_1 \quad \longmapsto \quad f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1$
  称作**前复合** 。下图有助于形象理解：



- $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) : (\_ \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_1) \xrightarrow{\mathcal{C}\to\mathcal{S}et} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_2)$
  $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) : \quad \phi_1 \quad \longmapsto \quad \phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1$
  称作**后复合**；下图有助于形象理解：



根据上面的定义便不难得出下述结论

- $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) \overset{\mathcal{C}\to\mathcal{S}et}{\circ} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) = (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) \overset{\mathcal{C}\to\mathcal{S}et}{\circ} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)$
  复合运算具有**结合律**，即后面会提到的**自然性**；
- $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1) \overset{\mathcal{C}\to\mathcal{S}et}{\circ} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) = (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1))$
  前复合与复合运算的关系
- $(\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) \overset{\mathcal{C}\to\mathcal{S}et}{\circ} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) = ((f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1) \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)$
  后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合 。
假如 a_1 为 a_1 的全局元素则可规定

- $a_1 \phi_1 = a_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1$

恒等箭头

范畴 $\mathcal{C}$ 内的每个对象都有恒等映射：

- ${}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} : \mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{a}_1$
  ${}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} : a_1 \mapsto a_1$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- $$\begin{aligned} {}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1 &= \phi_1 \\ &= \phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id} \end{aligned}$$

此外还可以得知

- $({}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) : (\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \_) \xrightarrow{\mathcal{C} \to \mathcal{S}et} (\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \_)$
  为恒等自然变换，可以记作是 ${}_{:(\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \_)}\mathrm{id}$；
- $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}) : (\_ \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_1) \xrightarrow{\mathcal{C} \to \mathcal{S}et} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_1)$
  为恒等自然变换，可以记作是 ${}_{:(\_ \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_1)}\mathrm{id}$；

单态

在范畴论里我们也可以定义单态：

- ϕ_1 为**单态**当且仅当对任意 a_2 若有 $f_1, f_1' : \mathsf{a}_2 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{a}_1$
  满足 $f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1 = f_1' \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1$ 则有 $f_1 = f_1'$。详情见下图：

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{a}_1 \arrow[rr, bend left, "\phi_1 : \mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\longrightarrow} \mathsf{b}_1"] \arrow[d, phantom, ""] & & \mathsf{b}_1 \arrow[loop right, "{}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}"] \\
\mathsf{a}_2 \arrow[u, shift left, "f_1"] \arrow[u, shift right, "f_1'"'] \arrow[rr, bend right, "(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1) : \mathsf{a}_2 \overset{\mathcal{C}}{\longrightarrow} \mathsf{b}_3"'] & &
\end{tikzcd}$$
$$\mathsf{b}_1^{(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)}$$

结合终对象的性质我们不难得知

- a_1 为单态 —— 由
  ! 的唯一性可得知 。

满态

在范畴论里我们也可以定义满态；

- ϕ_1 为**满态**当且仅当对任意 b_2 若有 $g_1, g_1' : \mathsf{b}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_2$
  满足 $\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1 = \phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1'$ 则有 $g_1 = g_1'$。详情见下图：

$$\begin{tikzcd}
& & \mathsf{b}_1 \arrow[d, shift right, "g_1'"'] \arrow[d, shift left, "g_1"] \\
\mathsf{a}_1 \arrow[loop left, "{}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id}"] \arrow[urr, bend left, "\phi_1 : \mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\longrightarrow} \mathsf{b}_1"] \arrow[drr, bend right, "(\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) : \mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\longrightarrow} \mathsf{b}_2"'] \arrow[rr, phantom, "\mathsf{a}_1^{(_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1)}"] & & \\
& & \mathsf{b}_2
\end{tikzcd}$$

同构

在范畴论里我们也可以定义同构：

- ϕ_1 为**同构**当且仅当存在 $\psi_1 : \mathsf{b}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{a}_1$
  使 $\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \psi_1 = {}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id}$ 且 $\psi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1 = {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}$。

结合始终对象的性质便不难得知

- ${}_{:0}! = {}_{:1}¡$ 为同构 —— 这是因为
  $0 \overset{\mathcal{C}}{\to} 0 = \{{}_{:0}\mathrm{id}\}$，$1 \overset{\mathcal{C}}{\to} 1 = \{{}_{:1}\mathrm{id}\}$

同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释 。
后面会将自然性进行进一步推广 。

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[dr, dotted, "\downarrow (\_\overset{c}{\circ} g_1)"] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "\phi_2"'] & b_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "\phi_1"] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur, dotted, "(f_1 \overset{c}{\circ} \_) \downarrow"] \arrow[r, "\phi_2"'] & b_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[dr, "(f_1 \overset{c}{\circ} \_) \downarrow"'] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, dotted, "\phi_2"'] & b_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "\phi_1"] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur, dotted, "\downarrow (\_\overset{c}{\circ} g_1)"'] \arrow[r, "\phi_2"'] & b_2
\end{tikzcd}
$$

若提供自然变换 β 满足自然性 —— 即对任意
$\mathcal{C}$ 中对象 x_1 , x_2 及任意 $\mathcal{C}$ 中映射 $f_1 : x_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} x_1$
都会有 $(f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1) \overset{Set}{\circ} {x_2}^{\beta} = {x_1}^{\beta} \overset{Set}{\circ} (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2)$
(即下图自西向南走向操作结果同自北向东) :

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[dr, dashed, "{x_1}^{\beta}"] & b_1 \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "\phi_2"'] & b_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "\phi_1"] & b_1 \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur, dashed, "(f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1)"] \arrow[r, "\phi_2"'] & b_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[dr, "(f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2)"'] & b_1 \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, dashed, "\phi_2"'] & b_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "\phi_1"] & b_1 \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur, "{x_2}^{\beta}"'] \arrow[r, dashed, "\phi_2"'] & b_2
\end{tikzcd}$$

那么我们便会有下述结论 :

- $b_1 \cong b_2$ 当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中对象 x
  x^{β} 都是同构 。此时称 β 为**自然同构** 。

若提供自然变换 α 满足自然性 —— 即对任意
$\mathcal{C}$ 中对象 x_1 , x_2 及任意 $\mathcal{C}$ 中映射 $g_1 : x_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} x_2$
都会有 $(a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) \overset{Set}{\circ} {x_2}^{\alpha} = {x_1}^{\alpha} \overset{Set}{\circ} (a_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1)$
(即下图自西向南走向操作结果同自北向东) :

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "\phi_1"] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[ur, dashed, "{x_1}^{\alpha}"] \arrow[r, "\phi_2"'] & x_2
\end{tikzcd}$$

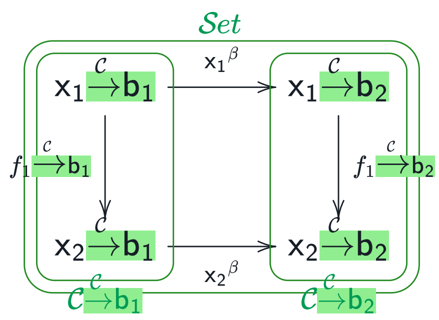
$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[dr, dashed, "(a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1)"] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[r, "\phi_2"'] & x_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "\phi_1"] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[ur, "(a_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1)"'] \arrow[r, dashed, "\phi_2"'] & x_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[dr, "{x_2}^{\alpha}"'] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[r, dashed, "\phi_2"'] & x_2
\end{tikzcd}$$

那么我们便会有下述结论 :

- $a_1 \cong a_2$ 当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中对象 x
  x^{α} 都是同构 。此时称 α 为**自然同构** 。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为



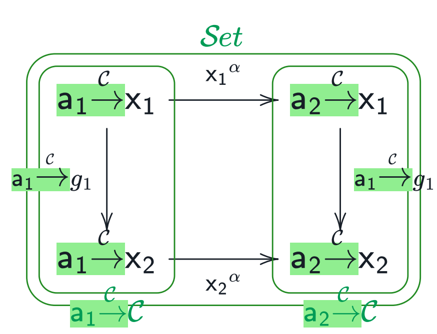
$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧（考虑特殊情况）

$$\begin{tikzcd}
b_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1 \arrow[r, "b_1^{\beta}"] \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1"'] & b_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2 \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2"] \\
x_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1 \arrow[r, "x_2^{\beta}"'] & x_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
:_{b_1}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "b_1^{\beta}"] \arrow[d, mapsto, "f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1"'] & :_{b_1}\mathrm{id}(b_1^{\beta}) \arrow[d, mapsto, "f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2"] \\
f_1 \arrow[r, mapsto, "x_2^{\beta}"'] & f_1 \circ (\mathrm{etc})
\end{tikzcd}$$

为了方便就用 (etc) 表示 $:_{b_1}\mathrm{id}(b_1^{\beta})$。 由上图可知 $f_1(x_2^{\beta}) = f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\mathrm{etc})$，故 $x_2^{\beta} = x_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} (\mathrm{etc})$；而 $x_2^{\beta} = x_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} (\mathrm{etc}) = x_2^{(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\mathrm{etc}))}$ 是同构，从而知 $((\mathrm{etc}) \circ \_)$ 是同构，$(\mathrm{etc}) : b_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2$ 也是。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在米田嵌入处会详细介绍。

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为



$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧（考虑特殊情况）

$$\begin{tikzcd}
a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} a_1 \arrow[r, "x_1^{\alpha}"] \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1"'] & a_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} a_1 \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1"] \\
a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} x_2 \arrow[r, "x_2^{\alpha}"'] & a_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} x_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
:_{b_1}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "x_1^{\alpha}"] \arrow[d, mapsto, "a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1"'] & :_{a_1}\mathrm{id}(a_1^{\alpha}) \arrow[d, mapsto, "a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1"] \\
g_1 \arrow[r, mapsto, "x_2^{\alpha}"'] & (\mathrm{etc}) \circ g_1
\end{tikzcd}$$

为了方便就用 (etc) 表示 $:_{a_1}\mathrm{id}(a_1^{\alpha})$。 由上图可知 $g_1(x_2^{\alpha}) = (\mathrm{etc}) \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1$，故 $x_2^{\alpha} = (\mathrm{etc}) \xrightarrow{\mathcal{C}} x_2$；而 $x_2^{\alpha} = (\mathrm{etc}) \xrightarrow{\mathcal{C}} x_2 = x_2^{((\mathrm{etc}) \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)}$ 是同构，从而知 $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\mathrm{etc}))$ 是同构，$(\mathrm{etc}) : a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} a_2$ 也是。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在米田嵌入处会详细介绍。

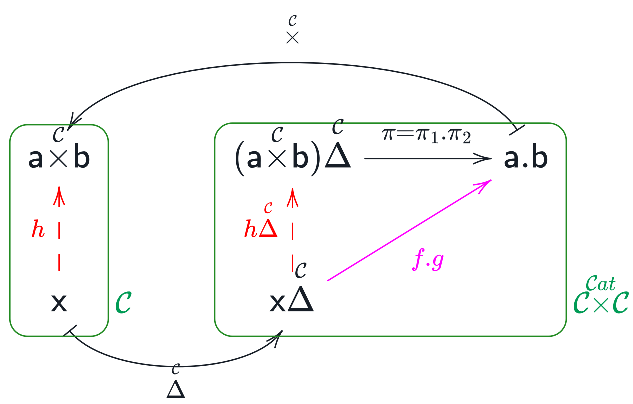
章节 04 - 05 类型的积与和

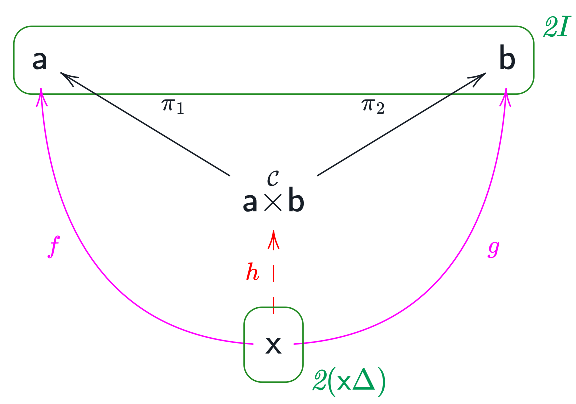
LaTeX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{\mathcal{C}}{\times} : \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow} \mathcal{C}$ 在范畴 $\mathcal{C}$ 中有下述性质：

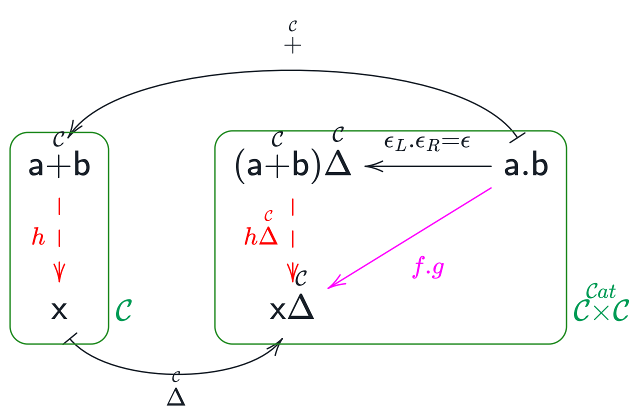
- $(\mathsf{x} \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{a}) \overset{\mathcal{S}et}{\times} (\mathsf{x} \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}) \cong (\mathsf{x} \overset{\mathcal{C}}{\to} (\mathsf{a} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{b}))$，x 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象。
  —— **泛性质**，指数对乘法的分配律。下图便于形象理解：

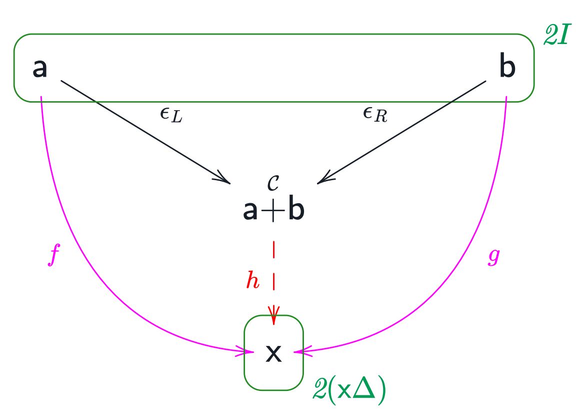




默认函子 $\overset{\mathcal{C}}{+} : \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow} \mathcal{C}$ 在范畴 $\mathcal{C}$ 中有下述性质：

- $(\mathsf{a} \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{x}) \overset{\mathcal{S}et}{\times} (\mathsf{b} \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{x}) \cong ((\mathsf{a} \overset{\mathcal{C}}{+} \mathsf{b}) \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{x})$，x 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象。
  —— **泛性质**，指数对加法的分配律。下图便于形象理解：



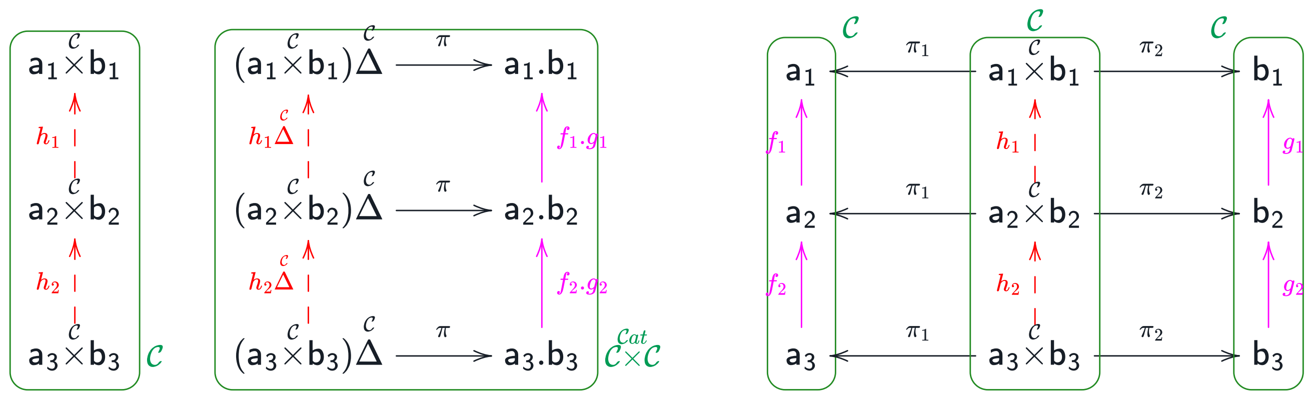


> ⓘ **Note**
>
> 在上面的插图中：
>
> - $\overset{\mathcal{C}}{\Delta} : \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow} \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{C}$ 为对角函子，满足
> $\overset{\mathcal{C}}{\Delta} : \mathsf{c} \longmapsto \mathsf{c} \,.\, \mathsf{c}$
> - $I : \mathcal{2} \overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow} \mathcal{C}$ 为函子，满足
> $I : 1 \longmapsto \mathsf{a}$
> $\quad 2 \longmapsto \mathsf{b}$
> $\mathcal{2}$ 为只有两个对象的范畴，
>   1 和 2 分别为其中的对象。
>   这里 $\mathcal{2}$ 充当一个指标范畴。

函子性

如何证明 $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathcal{C}}{\times} : ({}_{:\mathsf{a}_2}\mathrm{id}\ .\ {}_{:\mathsf{b}_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:\mathsf{a}_2 \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{b}_2}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ **保持恒等箭头**；
- $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (f_2 \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_1\ .\ g_2 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) \mapsto h_2 \overset{\mathcal{C}}{\circ} h_1$
  —— 即函子 $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ **保持箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：

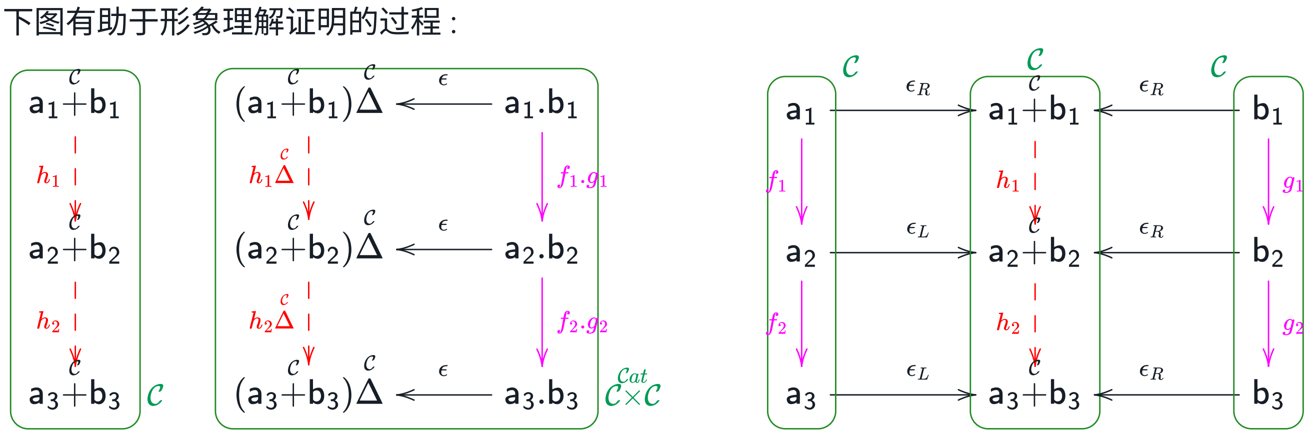


另外规定 $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ 在实参分别为箭头和对象时的输出：

- $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (f_1\ .\ \mathsf{b}_1) \longmapsto f_1 \overset{\mathcal{C}}{\times} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}$
  $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (\mathsf{a}_1\ .\ g_1) \longmapsto {}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}}{\times} g_1$

如何证明 $\overset{\mathcal{C}}{+}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathcal{C}}{+} : ({}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id}\ .\ {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{+} \mathsf{b}_1}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{\mathcal{C}}{+}$ **保持恒等箭头**；
- $\overset{\mathcal{C}}{+} : (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2\ .\ g_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_2) \mapsto h_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} h_2$
  —— 即函子 $\overset{\mathcal{C}}{+}$ **保持箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：



同理规定 $\overset{\mathcal{C}}{+}$ 在实参分别为箭头和对象时的输出：

- $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (f_1\ .\ \mathsf{b}_1) \longmapsto f_1 \overset{\mathcal{C}}{+} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}$
  $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (\mathsf{a}_1\ .\ g_1) \longmapsto {}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}}{+} g_1$

运算性质

对于函子 $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ 我们不难得知

- $a \overset{\mathcal{C}}{\times} 1 \cong 1 \overset{\mathcal{C}}{\times} a \cong a$ —— 乘法有**幺元** 1 。
  下图便于理解证明 : (f, g) 决定 h , h' 。

$$
\begin{tikzcd}
(a\overset{\mathcal{C}}{\times}1)\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & a.1 \\
x\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, "f.g=f._{:x}!"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[r, "{}_{:a}\mathrm{id}._{:a}!"] & a.1 \\
x\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "f\overset{\mathcal{C}}{\Delta}=h'\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, "f.g=f._{:x}!"']
\end{tikzcd}
$$

- $a \overset{\mathcal{C}}{\times} b \cong b \overset{\mathcal{C}}{\times} a$ —— 乘法运算有**交换律** 。
  下图便于理解证明 : (f, g) 决定 h , h' 。

$$
\begin{tikzcd}
(a\overset{\mathcal{C}}{\times}b)\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & a.b \\
x\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, "f.g"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(b\overset{\mathcal{C}}{\times}a)\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & b.a \\
x\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h'\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, "g.f"']
\end{tikzcd}
$$

- $(a \times b) \times c \cong a \times (b \times c)$ —— 乘法运算具有**结合律** 。
  下图有助于形象理解证明 : (f_{ax}, f_{bx}, f_{cx}) 决定 h , h' 。

$$
\begin{tikzcd}
((a\overset{\mathcal{C}}{\times}b)\overset{\mathcal{C}}{\times}c)\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi"] & (a\overset{\mathcal{C}}{\times}b).c \arrow[r, "\pi._{:c}\mathrm{id}"] & (a.b).c \\
x\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, dotted, "j.f_{cx}"] \arrow[urr, "(f_a.f_b).f_{cx}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(a\overset{\mathcal{C}}{\times}(b\overset{\mathcal{C}}{\times}c))\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi"] & a.(b\overset{\mathcal{C}}{\times}c) \arrow[r, "{}_{:a}\mathrm{id}.\pi"] & a.(b.c) \\
x\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h'\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, dotted, "f_{ax}.j'"] \arrow[urr, "f_a.(f_b.f_c)"']
\end{tikzcd}
$$

对于函子 $\overset{\mathcal{C}}{+}$ 我们不难得知

- $a \overset{\mathcal{C}}{+} 0 \cong 0 \overset{\mathcal{C}}{+} a \cong a$ —— 加法有**幺元** 0 。
  下图有助于理解 : (f, g) 决定 h , h' 。

$$
\begin{tikzcd}
(a\overset{\mathcal{C}}{+}0)\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"'] & a.0 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f.g=f._{:\backslash\mathrm{ob}x}\text{¡}"] \\
x\overset{\mathcal{C}}{\Delta}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "f=h'\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"'] & a.0 \arrow[l, "{}_{:a}\mathrm{id}._{:a}\text{¡}"'] \arrow[dl, "f.g=f._{:x}\text{¡}"] \\
x\overset{\mathcal{C}}{\Delta}
\end{tikzcd}
$$

- $a \overset{\mathcal{C}}{+} b \cong b \overset{\mathcal{C}}{+} a$ —— 加法运算有**交换律** 。
  下图有助于理解 : (f, g) 决定 h , h' 。

$$
\begin{tikzcd}
(a\overset{\mathcal{C}}{+}b)\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"'] & a.b \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f.g"] \\
x\overset{\mathcal{C}}{\Delta}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(b\overset{\mathcal{C}}{+}a)\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h'\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"'] & b.a \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "g.f"] \\
x\overset{\mathcal{C}}{\Delta}
\end{tikzcd}
$$

- $(a + b) + c \cong a + (b + c)$ —— 加法运算具有**结合律** 。
  下图有助于形象理解证明 : (f_{ax}, f_{bx}, f_{cx}) 决定 h , h' 。

$$
\begin{tikzcd}
((a\overset{\mathcal{C}}{+}b)\overset{\mathcal{C}}{+}c)\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"'] & (a\overset{\mathcal{C}}{+}b).c \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "j.f_c"] & (a.b).c \arrow[l, "\epsilon._{:c}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "(f_a.f_b).f_c"] \\
x\overset{\mathcal{C}}{\Delta}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(a\overset{\mathcal{C}}{+}(b\overset{\mathcal{C}}{+}c))\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h'\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"'] & a.(b\overset{\mathcal{C}}{+}c) \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "f_a.j'."] & a.(b.c) \arrow[l, "{}_{:a}\mathrm{id}.\epsilon"'] \arrow[dll, "f_a.(f_b.f_c)"] \\
x\overset{\mathcal{C}}{\Delta}
\end{tikzcd}
$$

幺半范畴

像刚才这样对象运算具有**单位元**以及**结合律**的范畴称作**幺半范畴**；

若上述范畴还具有**交换律**则称作**对称幺半范畴**；

很明显我们的范畴 $\mathcal{C}$ 是典型的**对称幺半范畴** 。

幺半群

什么是幺半群呢？有两种定义方式：

- **幺半群** $\mathcal{M}$ 是个范畴，其只含一个对象 m；
  其中的复合运算正好有单位元以及结合律 。
- 对象 m 属于幺半范畴 $\mathcal{C}$，满足下述交换图：

$$
\begin{tikzcd}
1 \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[r, "u \overset{\mathcal{C}}{\otimes}_{:\mathsf{m}} \mathrm{id}"] \arrow[dr, "左单位元\ u_l"'] & \mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[d, "p"', "运算结果唯一"] & \mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} 1 \arrow[l, "{}_{:\mathsf{m}}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}}{\otimes} u"'] \arrow[dl, "u_r\ 右单位元"] \\
 & \mathsf{m} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(\mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m}) \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[rr, "结合律\ a"] \arrow[d, "先算左侧括号\ p \overset{\mathcal{C}}{\otimes}_{:\mathsf{m}} \mathrm{id}"'] & & \mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} (\mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m}) \arrow[d, "{}_{:\mathsf{m}}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}}{\otimes} p\ 先算右侧括号"] \\
\mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[r, "再算最后结果\ p"'] & \mathsf{m} & \mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[l, "p\ 再算最后结果"]
\end{tikzcd}
$$

  其中

  - u ：$1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{m}$ 其实就是 m 里面的幺元
  - u_l：$1 \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{m}$ 表示 u 构成左幺元
  - u_r：$\mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} 1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{m}$ 表示 u 构成右幺元
  - p ：$\mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{m}$ 即为 m 中的二元运算
  - a ：$(\mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m}) \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} (\mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m})$ 表示 m 具有结合律

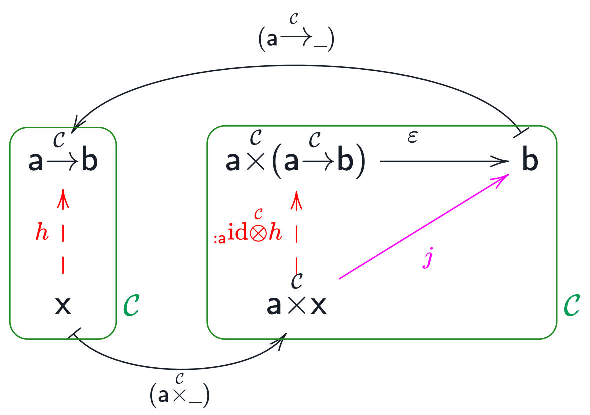
章节 06 类型的幂

$\LaTeX$ Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\xrightarrow{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{C}$ 在范畴 $\mathcal{C}$ 中有下述性质：

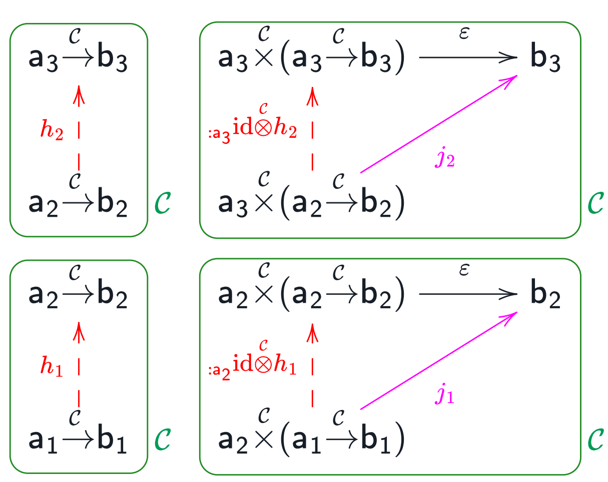
- $\underline{(a \overset{\mathcal{C}}{\times} x) \xrightarrow{\mathcal{C}} b} \cong \underline{x \xrightarrow{\mathcal{C}} (a \xrightarrow{\mathcal{C}} b)} \cong \underline{a \xrightarrow{\mathcal{C}} (x \xrightarrow{\mathcal{C}} b)}$，x 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象
  —— **泛性质**，指数与加乘法运算间的关系 。 下图便于理解证明：

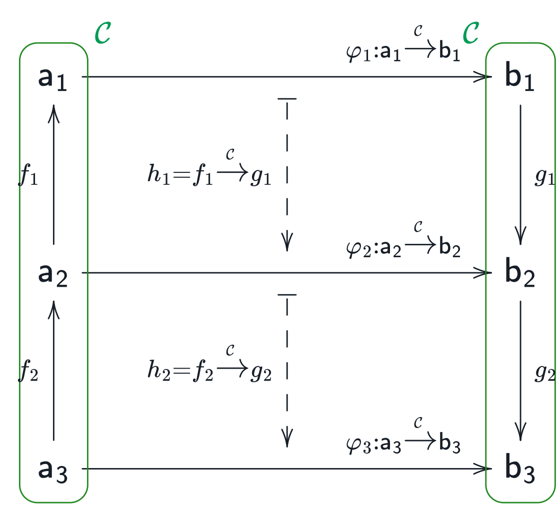


函子性

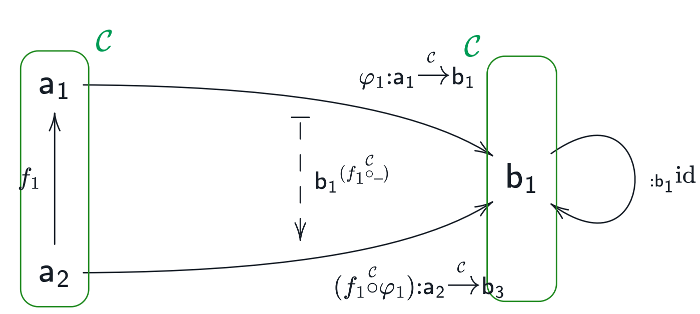
如何证明 $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ 构成函子呢？请看

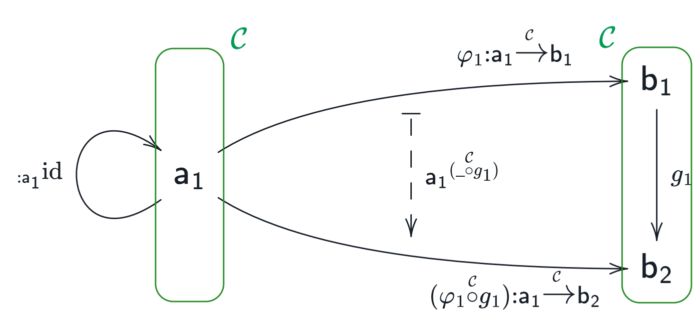
- $\xrightarrow{\mathcal{C}} : ({}_{:a_1}\mathrm{id} \,.\, {}_{:b_1}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1)}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ 能**保持恒等箭头**；
- $\xrightarrow{\mathcal{C}} : (f_2 \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_1 \,.\, g_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_2) \longmapsto h_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} h_2$
  —— 即函子 $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ **保持箭头复合运算** 。
  下图有助于形象理解证明过程：





下图（自上到下分别为图 1 和图 2）后面会用到 。





范畴 $\mathcal{C}$ 内任意两对象 a_1 和 b_1 间的箭头构成一个集合 $a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1$，
说明 $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ 只能将两个对象打到一个集合。下面使 $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ 升级为函子：
若还知道箭头 $f_1 : a_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} a_1$ 以及 $g_1 : b_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2$，则规定

- $(\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathcal{C}at}{\cancel{\times \mathcal{C}}} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{S}et$ 为函子且
  $(\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1) : a_1 \longmapsto (a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1)$，并且有
  $(\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1) : f_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1) = (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} {}_{:b_1}\mathrm{id}) = {b_1}^{(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)}$

  图 1 有助于理解。

  $(\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathcal{C}at}{\cancel{\times \mathcal{C}}} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{S}et$，
  $(\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) : a_1 \longmapsto (a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) = ({}_{:a_1}\mathrm{id} \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) = {a_1}^{(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1)}$
  $(\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) : f_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) = (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) \overset{\mathcal{C}\to\mathcal{S}et}{\circ} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) = (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) \overset{\mathcal{C}\to\mathcal{S}et}{\circ} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)$

  图 2 有助于理解。

  > **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - $よ : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} (\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{S}et)$
  > $b_1 \longmapsto (\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1)$　　构成一个函子,称作预层
  > $g_1 \longmapsto (\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) = (\_ \circ g_1)$　　构成一个函子间映射,即自然变换
  >
  >   该函子称作是**米田嵌入**。

- $(a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) : \overset{\mathcal{C}at}{\cancel{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{S}et$ 为函子且
  $(a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) : b_1 \longmapsto (a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1)$，并且有
  $(a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) : g_1 \longmapsto (a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) = ({}_{:a_1}\mathrm{id} \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) = {a_1}^{(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1)}$

  图 2 有助于理解。

  $(f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) : \overset{\mathcal{C}at}{\cancel{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{S}et$，
  $(f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) : b_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1) = (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} {}_{:b_1}\mathrm{id}) = {b_1}^{(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)}$
  $(f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) : g_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) = (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) \overset{\mathcal{C}\to\mathcal{S}et}{\circ} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) = (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) \overset{\mathcal{C}\to\mathcal{S}et}{\circ} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)$

  图 1 有助于理解。

  > **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - $尤 : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}at} (\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{S}et)$
  > $a_1 \longmapsto (a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_)$　　构成一个函子
  > $f_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) = (f_1 \circ \_)$　　构成一个函子间映射,即自然变换
  >
  >   该函子戏称为**尤达嵌入**。

积闭范畴

这里插个题外话：

若范畴包含终对象，所有类型的积以及指数，则可将其称作**积闭范畴**；

若范畴包含始对象，所有类型的和，则可将其称作是**余积闭范畴**；

若范畴满足上述条件，则可称作**双积闭范畴**。

很明显我们讨论的范畴 $\mathcal{C}$ 就是**双积闭范畴**。

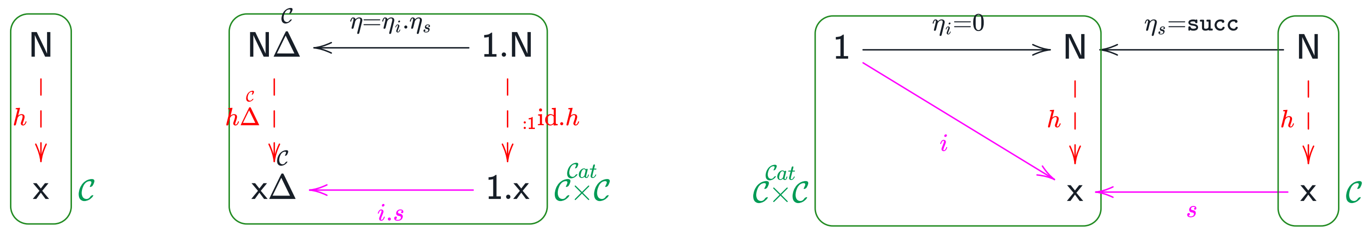
章节 07 递归类型

LaTeX Definitions are here.

泛性质

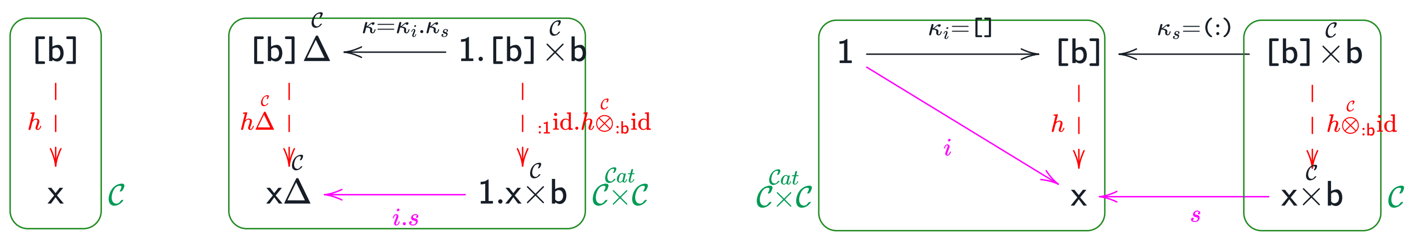
默认对象 N 在范畴 $\mathcal{C}$ 中有下述性质：

- $(1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{x}) \overset{\mathcal{C}at}{\times} (\mathsf{x} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{x}) \cong (\mathsf{N} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{x})$，x 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象
  —— **泛性质**。`rec` 即对应的同构（上式从左至右）。



默认函子 [_] : $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{C}$ 在范畴 $\mathcal{C}$ 中有下述性质：

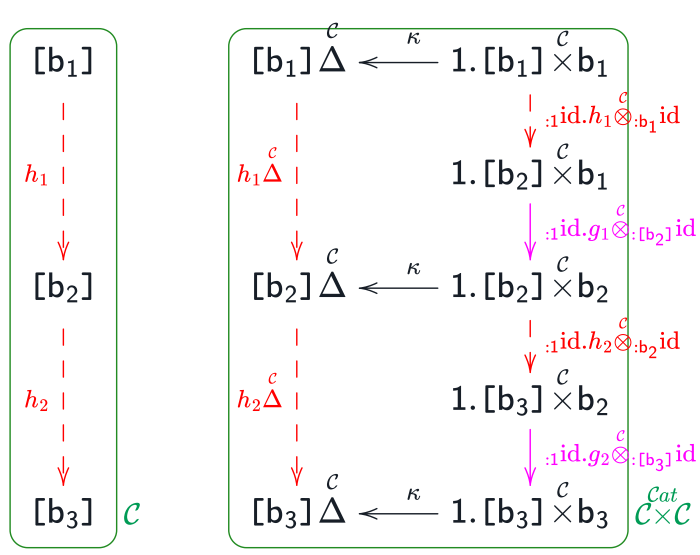
- $(1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{x}) \overset{\mathcal{C}at}{\times} ((\mathsf{x} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{b}) \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{x}) \cong ([\mathsf{b}] \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{x})$，x 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象
  —— **泛性质**。`foldr` 即对应的同构（上述等式从左至右）。



函子性

如何证明 [_] 构成函子呢？请看

- [_] : $_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id} \longmapsto {}_{:[\mathsf{b}_1]}\mathrm{id}$
  —— **[_] 保持恒等箭头**；
- [_] : $(g_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_2) \longmapsto (h_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} h_2)$
  —— **[_] 保持箭头复合运算**。
  下图便于形象理解证明过程。



章节 08 - 09 函子与自然变换

LaTeX Definitions are here.

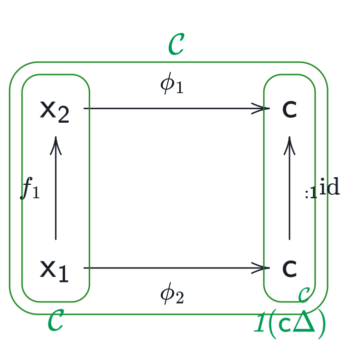
一些特殊的范畴

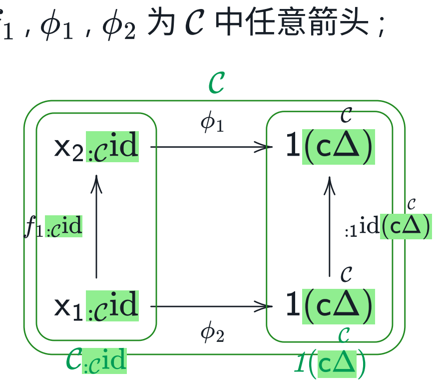
现在规定几种特殊的范畴。

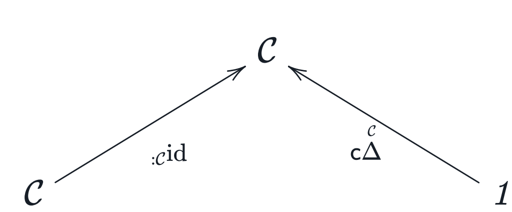
- **离散范畴**:只有对象不含箭头(恒等箭头除外)的范畴。
- $\mathcal{S}et$: **所有集合构成的范畴**,为局部小范畴,满足
  - $\mathcal{S}et$ 中对象为任意集合;
  - $\mathcal{S}et$ 中箭头为集合间映射。
- $\mathcal{C}at$: **所有范畴构成的范畴**,满足
  - $\mathcal{C}at$ 中任何对象都构成一个范畴;
  - $\mathcal{C}at$ 中任何箭头都构成一个函子。

若 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{C}at$ 中对象,则:

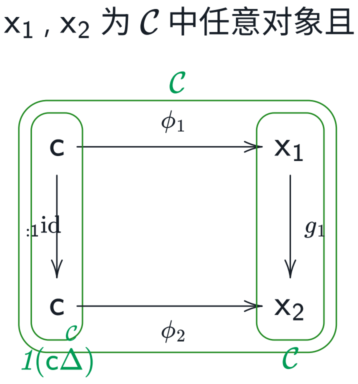
- $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$: **反范畴**,满足
  - $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中对象皆形如 c ,
c 为任意 $\mathcal{C}$ 中的对象;
  - $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中箭头皆形如 $\phi^{\mathrm{op}} : \mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}_1$,
$\phi : \mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_2$ 可为任意 $\mathcal{C}$ 中的箭头。
- $\mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{D}$: **积范畴**,满足
  - $\mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{D}$ 中对象皆形如 $\mathsf{c}\,.\,\mathsf{d}$,
c , d 为任意 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ 中的对象;
  - $\mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{D}$ 中箭头皆形如 $\phi\,.\,\psi$,
ϕ , ψ 为任意 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ 中的箭头。
- $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$: **所有 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的函子的范畴**,满足
  - $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$ 中任何对象
都是 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的函子;
  - $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$ 中任何箭头
都是函子间自然变换。
- $\mathcal{C}/\mathsf{c}$: **俯范畴**,这里 c 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象;满足
  - $\mathcal{C}/\mathsf{c}$ 中对象皆形如 $\cancel{\mathsf{x}\,.\,1}\,.\,\phi$,其中 x
和 $\phi : \mathsf{x} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}$ 分别为 $\mathcal{C}$ 中任意的对象和箭头;
  - $\mathsf{c}/\mathcal{C}$ 中箭头皆形如 $f_1\ \cancel{.\ {}_{:\mathcal{C}}\mathrm{id}}$ 且满足下述交换图,其中
x_1 , x_2 为 $\mathcal{C}$ 中任意对象且 f_1 , ϕ_1 , ϕ_2 为 $\mathcal{C}$ 中任意箭头;

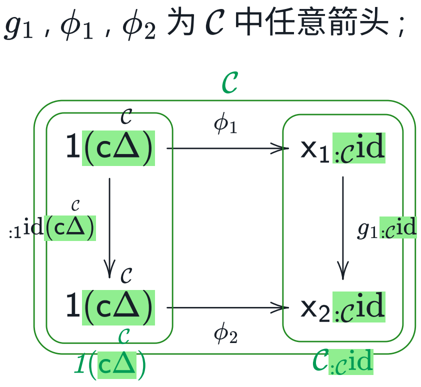


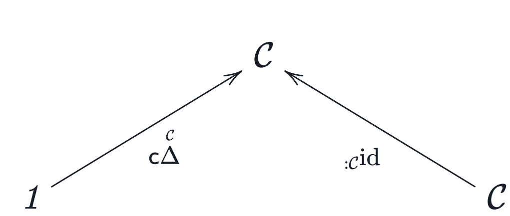




- $\mathsf{c}/\mathcal{C}$: **仰范畴**,这里 c 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象;满足
  - $\mathsf{c}/\mathcal{C}$ 中对象皆形如 $\cancel{1\,.\,\mathsf{x}}\,.\,\phi$,其中 x
和 $\phi : \mathsf{c} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{x}$ 分别为 $\mathcal{C}$ 中对象和箭头;
  - $\mathcal{C}/\mathsf{c}$ 中箭头皆形如 $\cancel{{}_{:\mathcal{C}}\mathrm{id}\,.}\ g_1$ 且满足下述交换图,其中
x_1 , x_2 为 $\mathcal{C}$ 中任意对象且 g_1 , ϕ_1 , ϕ_2 为 $\mathcal{C}$ 中任意箭头;







函子

接下来我们来提供函子的正式定义：

- $P : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$ 为范畴当且仅当
  - 对任意 $\mathcal{C}$ 中对象 c，$\mathsf{c}P$ 为 $\mathcal{D}$ 中对象且 ${}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}P = {}_{:\mathsf{c}P}\mathrm{id}$；
  - 对任意 $\mathcal{C}$ 中箭头 $\phi_1 : \mathsf{c}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{c}_2$ 和 $\phi_2 : \mathsf{c}_2 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{c}_3$，始终都有等式 $(\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_2)P = \phi_1 P \overset{\mathcal{D}}{\circ} \phi_2 P$ 成立。

函子的复合运算

假如刚才的 P 确实构成一个函子
且 $Q : \mathcal{D} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{E}$ 也构成函子，那么

- $P \overset{\mathcal{C}at}{\circ} Q : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{E}$
  也构成一个函子。

恒等函子

对于函子我们也有恒等映射，即：

- $$\begin{aligned} {}_{:\mathcal{C}}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}at}{\circ} P &= P \\ &= P \overset{\mathcal{C}at}{\circ} {}_{:\mathcal{D}}\mathrm{id} \end{aligned}$$

忠实和完全函子

若 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$，$\mathcal{E}$ 皆为**局部小范畴**，则

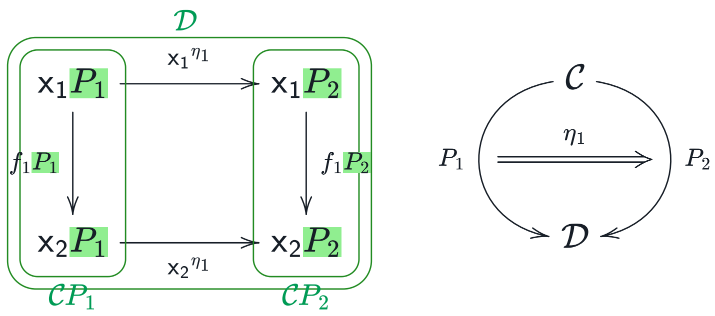
- P 是**忠实的**当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 c_1，c_2
  $(\mathsf{c}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{c}_2)$ 与 $(\mathsf{c}_1 P \overset{\mathcal{D}}{\to} \mathsf{c}_2 P)$ 之间始终存在单射；
- P 是**完全的**当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 c_1，c_2
  $(\mathsf{c}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{c}_2)$ 与 $(\mathsf{c}_1 P \overset{\mathcal{D}}{\to} \mathsf{c}_2 P)$ 之间始终存在满射；
- P 是**完全忠实的**当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 c_1，c_2
  $(\mathsf{c}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{c}_2)$ 与 $(\mathsf{c}_1 P \overset{\mathcal{D}}{\to} \mathsf{c}_2 P)$ 之间始终存在双射（即集合间同构）。

> **Note**
>
> 刚才提到的“单/满/双射”
> 针对的都是范畴的箭头部分。

自然变换

若还知道 $P_1, P_2 : \mathcal{C} \xrightarrow{Cat} \mathcal{D}$ 为函子，则

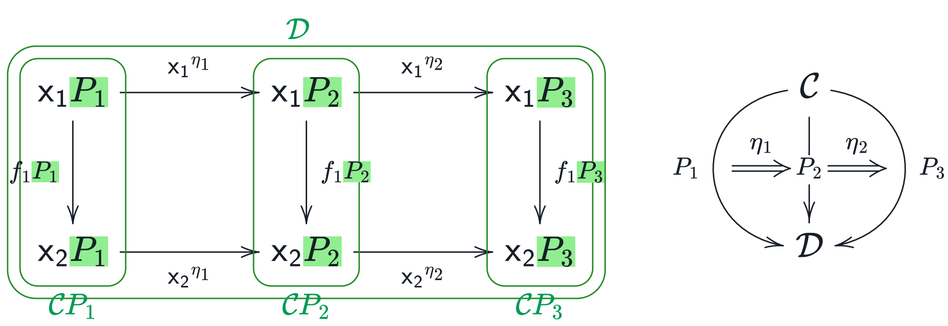
- $\eta_1 : P_1 \xrightarrow{\mathcal{C} \xrightarrow{Cat} \mathcal{D}} P_2$ 为自然变换当且仅当对任意
  $\mathcal{C}$ 中对象 x_1，x_2 始终都会有下述交换图成立：



自然变换的纵复合

倘若已知 $\eta_1 : P_1 \xrightarrow{\mathcal{C} \xrightarrow{Cat} \mathcal{D}} P_2$
另外加上 $\eta_2 : P_2 \xrightarrow{\mathcal{C} \xrightarrow{Cat} \mathcal{D}} P_3$
为自然变换，那么便会有

- $\eta_1 \circ \eta_2 : P_1 \xrightarrow{\mathcal{C} \xrightarrow{Cat} \mathcal{D}} P_2$ 亦为自然变换，
  称作 η_1 和 η_2 的**纵复合**。



自然变换的横复合

TODO

- 函子 $P_1 : \mathcal{C} \xrightarrow{Cat} \mathcal{D}$，
  函子 $P_2 : \mathcal{C} \xrightarrow{Cat} \mathcal{D}$，
  函子的复合：$P_1 \circ P_2$
- 自然变换 $\eta_1 : P_1 \xrightarrow{Cat} Q_1$，
  自然变换 $\eta_2 : P_1 \xrightarrow{Cat} Q_1$，
  自然变换 $\theta_1 : Q_1 \xrightarrow{Cat} R_1$
  自然变换的纵复合：$\eta_1 \circ_{\mathrm{v}} \eta_2$，
  自然变换的横复合：$\eta_1 \circ_{\mathrm{h}} \theta_1$，