02-03 范畴当中的箭头

LaTeX Definitions are here.

沿用上一节提到的自由变量。我们规定：

- $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2 =$
  所有从 c_1 射向 c_2 的箭头构成的集。

> ⓘ **Note**
>
> 上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
> 其他范畴里 $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2$ 未必构成集。

范畴 C 中特定的箭头可以进行复合运算：

- $$\begin{aligned} \overset{\mathsf{C}}{\circ} : (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) \overset{\mathsf{Set}}{\times} (\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_3) &\overset{\mathsf{Set}}{\longrightarrow} (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_3) \\ (\quad i_1 \quad . \quad i_2 \quad) &\longmapsto (i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2) \end{aligned}$$

如果我们还知道箭头 f_1，i，f_2 分别属于
$\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}'_1$，$\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2$，$\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}'_2$ 那么便可知

- $({f_1}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} i) \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2 = {f_1}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} (i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)$，
  即箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便可获得新的函数：

- $$\begin{aligned} ({f_1}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) : (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) &\xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (\mathsf{c}'_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \\ i &\longmapsto ({f_1}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} i) \end{aligned}$$
  称作**前复合**。下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd} \mathsf{c}_1 \arrow[rr, bend left, "i : \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2"] \arrow[dd, phantom, ""] & & \mathsf{c}_2 \arrow[loop right, ":_{\mathsf{c}_2}\mathrm{id}"] \\ & \arrow[phantom, "\mathsf{c}_2^{({f_1}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}"] & \\ \mathsf{c}'_1 \arrow[uu, "{f_1}^{\mathrm{op}}"] \arrow[uurr, bend right, "({f_1}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} i) : \mathsf{c}'_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2"'] & & \end{tikzcd}$$

- $$\begin{aligned} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) : (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) &\xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}'_2) \\ i &\longmapsto (i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \end{aligned}$$
  称作**后复合**。 下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd} & & \mathsf{c}_2 \arrow[dd, "f_2"] \\ \mathsf{c}_1 \arrow[loop left, ":_{\mathsf{c}_1}\mathrm{id}"] \arrow[urr, bend left, "i : \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2"] \arrow[drr, bend right, "(i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) : \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}'_2"'] & \arrow[phantom, "\mathsf{c}_1^{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)}"] & \\ & & \mathsf{c}'_2 \end{tikzcd}$$

根据上面的定义不难得出下述结论：

- $({f_1}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{???}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \overset{???}{\circ} ({f_1}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$
  复合运算具有**结合律**，即后面提到的**自然性**；
- $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} i) \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2))$
  前复合与复合运算的关系
- $(i \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}}{\circ} ({f_1}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) = (({f_1}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} i) \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$
  后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。
假如 a_1 为 c_1 的全局元素则可规定

- $c_1 i = c_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i$

恒等箭头

范畴 C 内的每个对象都有恒等映射：

- $${}_{:c_1}\mathrm{id} : c_1 \overset{C}{\to} c_1$$
  $$c_1 \mapsto c_1$$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- $${}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{C}{\circ} i = i$$
  $$= i \overset{C}{\circ} {}_{:c_2}\mathrm{id}$$

此外还可以得知

- $({}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{C}{\circ} \_) : (c_1 \overset{C}{\to} \_) \xrightarrow{C \xrightarrow{\mathrm{Cat}} \mathrm{Set}} (c_1 \overset{C}{\to} \_)$
  为恒等自然变换，可记成是 ${}^{\mathrm{Cat}}_{:(c_1 \xrightarrow{C} \_)}\mathrm{id}$；
- $(\_ \overset{C}{\circ} {}_{:c_2}\mathrm{id}) : (\_ \overset{C}{\to} c_2) \xrightarrow{C^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Set}} (\_ \overset{C}{\to} c_2)$
  为恒等自然变换，可记成是 ${}_{:(\_ \xrightarrow{C} c_2)}\mathrm{id}$。

单满态以及同构

接下来给出单 / 满态和同构的定义。

- i 为**单态**当且仅当对任意 c_1'
  若有 $f_1, f_1' : c_1 \overset{C}{\to} c_1'$ 满足 $f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{C}{\circ} i = f_1'{}^{\mathrm{op}} \overset{C}{\circ} i$
  则有 $f_1{}^{\mathrm{op}} = f_1'{}^{\mathrm{op}}$。详情见下图：

$$\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[rr, bend left, "i : c_1 \xrightarrow{C} c_2"] \arrow[d, phantom, ""] & & c_2 \arrow[loop right, "{}_{:c_2}\mathrm{id}"] \\
c_1' \arrow[u, shift left, "f_1{}^{\mathrm{op}}"] \arrow[u, shift right, "f_1'{}^{\mathrm{op}}"'] \arrow[urr, bend right, "(f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{C}{\circ} i) : c_1' \xrightarrow{C} c_2"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow c_2^{(f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{C}{\circ} _)}"] & &
\end{tikzcd}$$

- i 为**满态**当且仅当对任意 c_2'
  若有 $f_2, f_2' : c_2 \overset{C}{\to} c_2'$ 满足 $i \overset{C}{\circ} f_2 = i \overset{C}{\circ} f_2'$
  则有 $f_2 = f_2'$。详情见下图：

$$\begin{tikzcd}
& & c_2 \arrow[d, shift right, "f_2'"'] \arrow[d, shift left, "f_2"] \\
c_1 \arrow[loop left, "{}_{:c_1}\mathrm{id}"] \arrow[urr, bend left, "i : c_1 \xrightarrow{C} c_2"] \arrow[drr, bend right, "(i \overset{C}{\circ} f_2) : c_1 \xrightarrow{C} c_2'"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow c_1^{(_ \overset{C}{\circ} f_2)}"] & & \\
& & c_2'
\end{tikzcd}$$

- i 为**同构**当且仅当存在 $i' : c_2 \overset{C}{\to} c_1$
  使得 $i \overset{C}{\circ} i' = {}_{:c_1}\mathrm{id}$ 且 $i' \overset{C}{\circ} i = {}_{:c_2}\mathrm{id}$。
  此时 c_1, c_2 间的关系可记作 $c_1 \cong c_2$。

若还知道 $i = i_1$ 且 $i_2 : c_2 \overset{C}{\to} c_3$ 则有

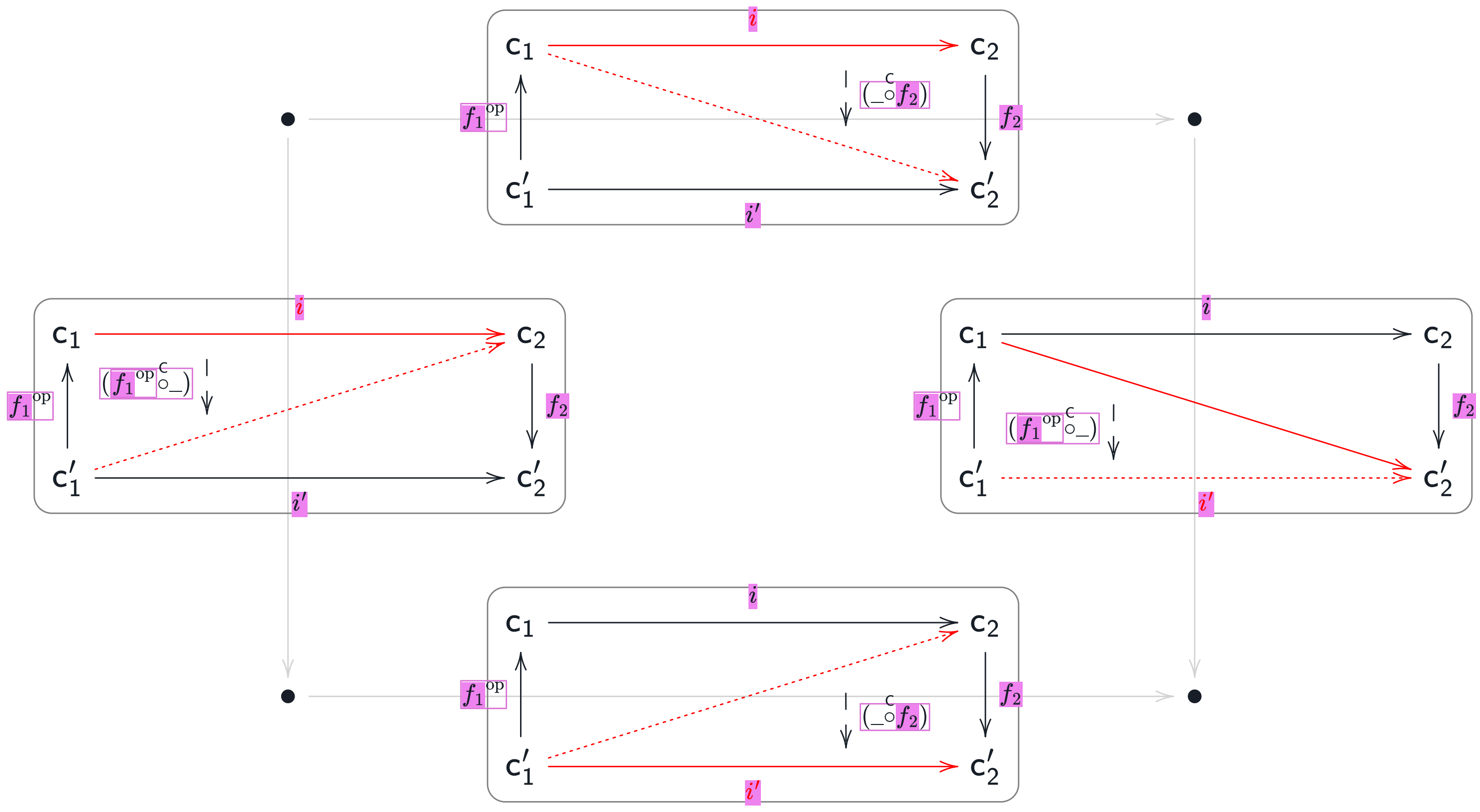
- 若 i_1，i_2 为单态 / 满态 / 同构
  则 $i_1 \overset{C}{\circ} i_2$ 为单态 / 满态 / 同构；
- 若 $i_1 \overset{C}{\circ} i_2$ 为同构
  且 i_1，i_2 中有一个为同构
  则 i_1，i_2 两者皆构成同构。

不仅如此我们还可以得出下述结论：

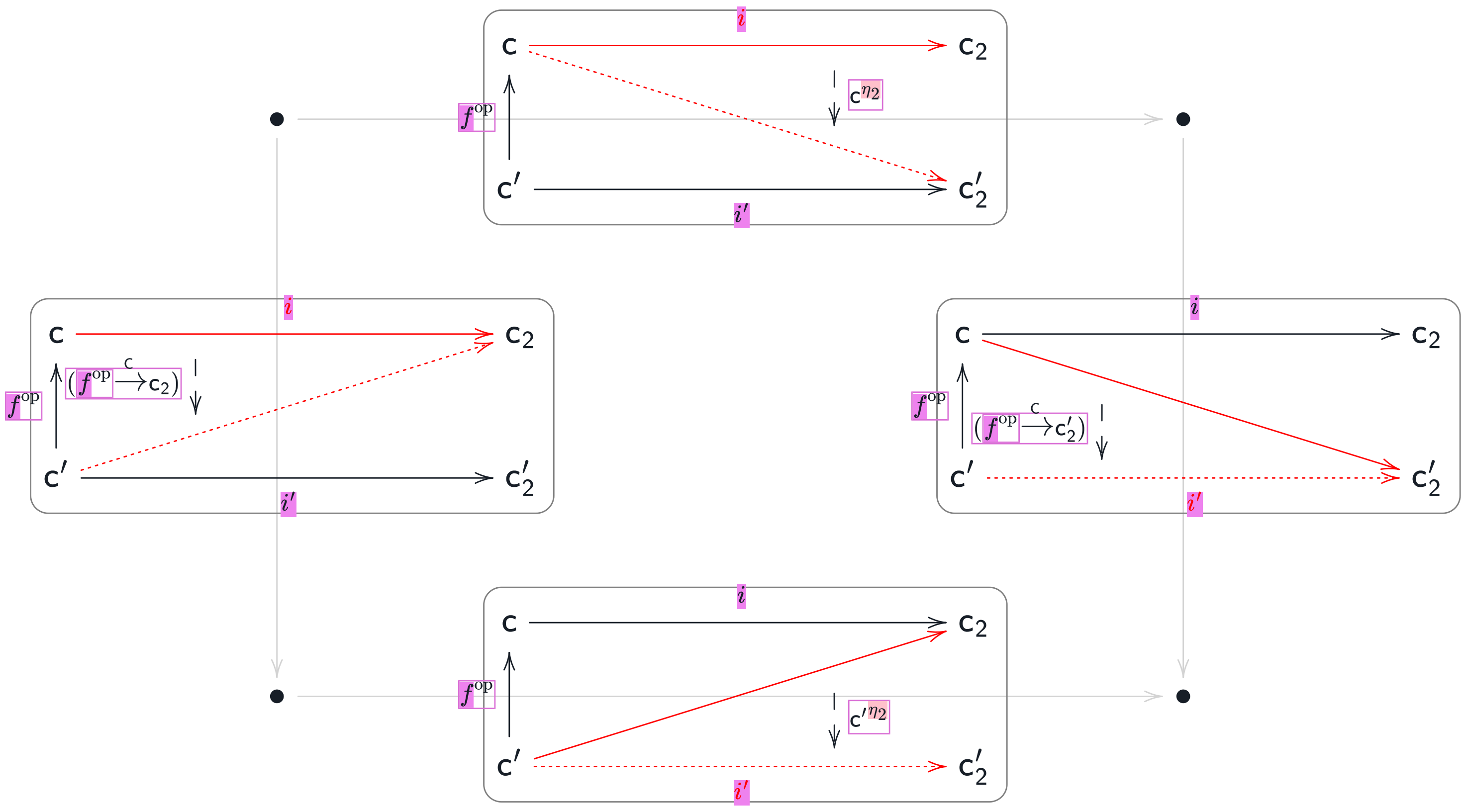
- c_1 为单态，
  由 ${}_{:c_1}!$ 的唯一性可知；
- ${}_{:0}! = {}_{:1}\text{¡}$ 为同构，
  因为 $0 \overset{C}{\to} 0 = \{{}_{:0}\mathrm{id}\}$
  并且 $1 \overset{C}{\to} 1 = \{{}_{:1}\mathrm{id}\}$

同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释 。
后面会将自然性进行进一步推广 。



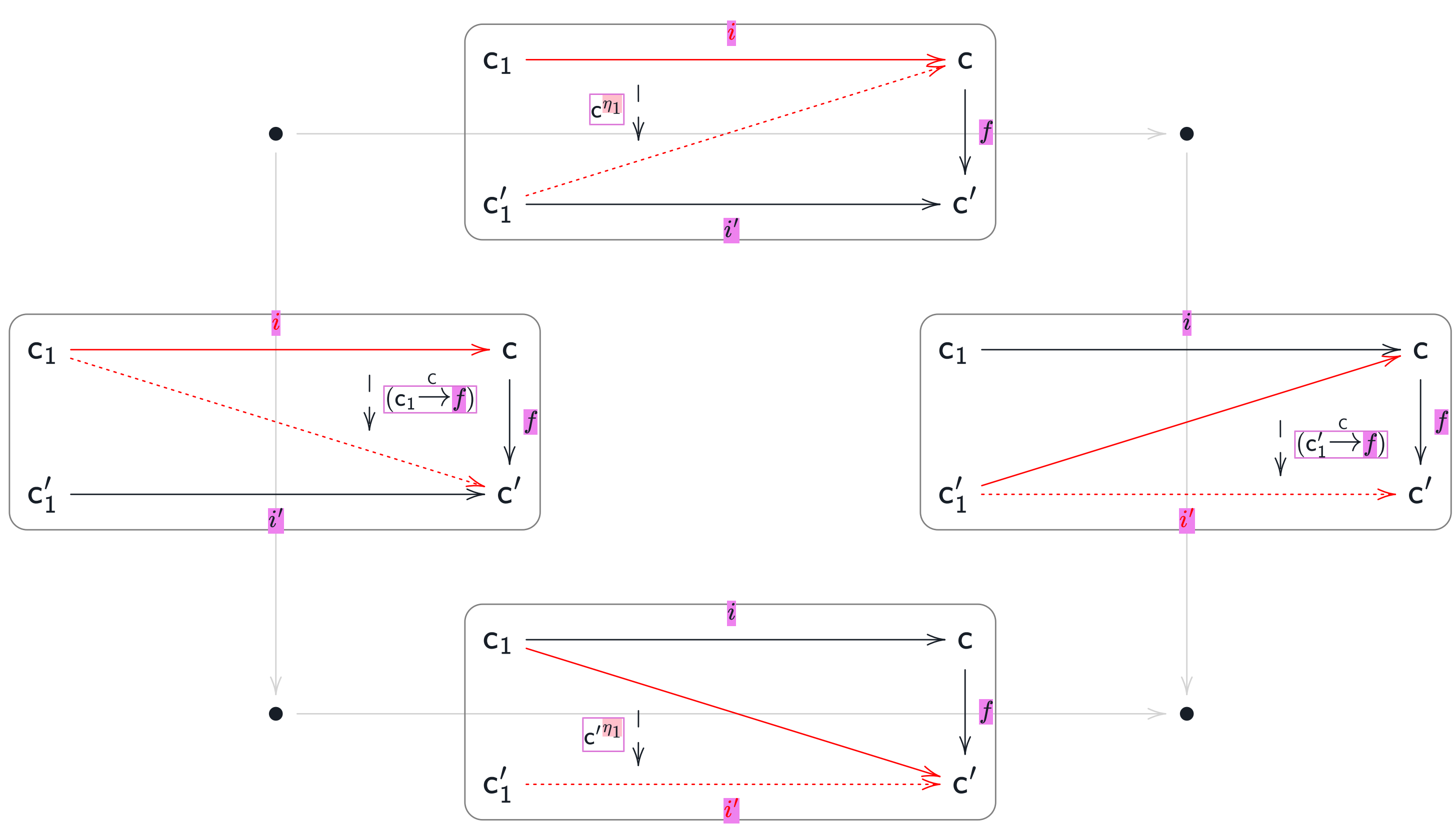
现提供自然变换 η_2 满足自然性 —— 即对
任意 C 中对象 c, c' 以及
任意 C 中映射 $f : c \overset{\mathsf{C}}{\to} c'$
都有 $(f^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\to} c_2) \overset{\mathsf{Set}}{\circ} c'^{\eta_2} = c^{\eta_2} \overset{\mathsf{Set}}{\circ} (f^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\to} c_2')$:



那么我们便会有下述结论 :

- $c_2 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c_2'$ 当且仅当对任意 C 中的对象 c
  c^{η_2} 都是同构 。此时称 η_2 为**自然同构** 。

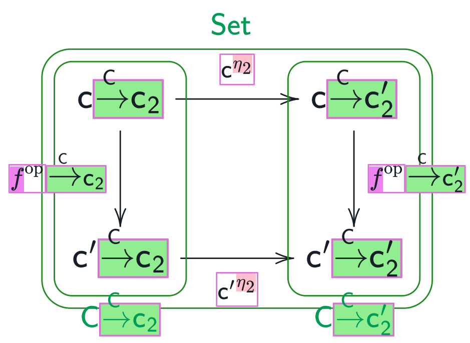
现提供自然变换 η_1 满足自然性 —— 即对
任意 C 中对象 c, c' 以及
任意 C 中映射 $f : c \overset{\mathsf{C}}{\to} c'$
都有 $(c_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} f) \overset{\mathsf{Set}}{\circ} c'^{\eta_1} = c^{\eta_1} \overset{\mathsf{Set}}{\circ} (c_1' \overset{\mathsf{C}}{\to} f)$:



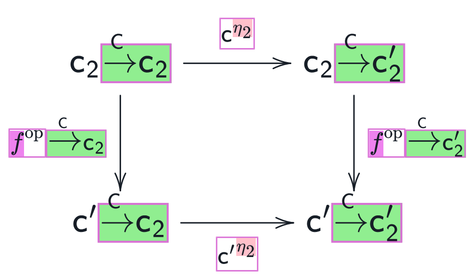
那么我们便会有下述结论 :

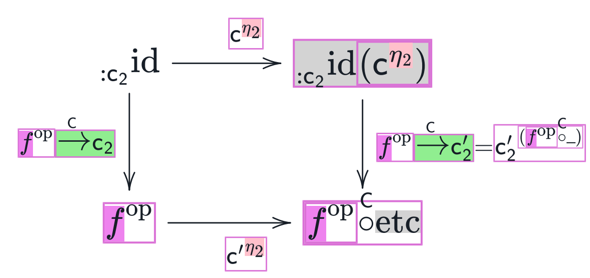
- $c_1 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c_1'$ 当且仅当对任意 C 中的对象 c
  c^{η_1} 都是同构 。此时称 η_1 为**自然同构** 。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为



$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧 将 c 换成 c_2 ：

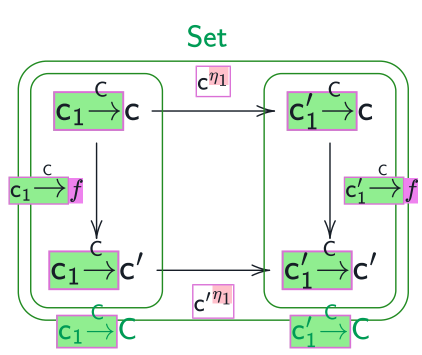




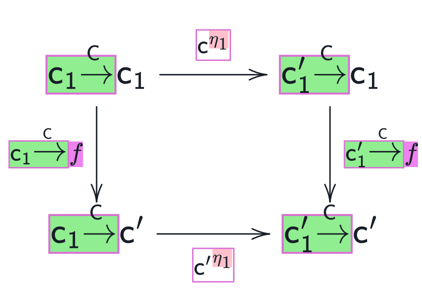
为了方便就用 etc 表示 $:_{c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2})$ 。由上图
知 $f^{\mathrm{op}}(c'^{\eta_2}) = (f^{\mathrm{op}} \overset{C}{\circ} \mathrm{etc})$（见右图底部和右侧箭头），
故 $c'^{\eta_2} = c' \xrightarrow{C} \mathrm{etc}$（注意到箭头 $f^{\mathrm{op}} : c' \xrightarrow{C} c$）；
而 $c'^{\eta_2} = c' \xrightarrow{C} \mathrm{etc} = c'^{(\_\overset{C}{\circ}\mathrm{etc})}$ 始终是同构
故 $\mathrm{etc} : c_2 \xrightarrow{C} c_2'$ 也是同构 。

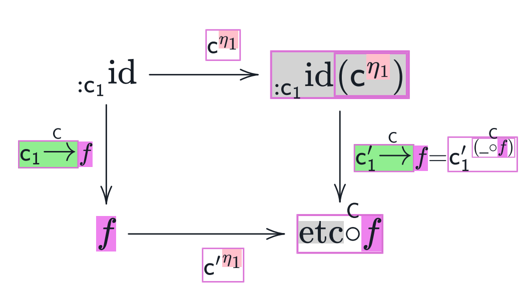
> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在**米田嵌入**处会详细介绍 。

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为



$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧 将 c 换成 c_1 ：





为了方便就用 etc 表示 $:_{c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 。由上图
知 $f(c'^{\eta_1}) = (\mathrm{etc} \overset{C}{\circ} f)$（见右图底部和右侧箭头），
故 $c'^{\eta_1} = \mathrm{etc} \xrightarrow{C} c'$（注意到箭头 $f : c \xrightarrow{C} c'$）；
而 $c'^{\eta_1} = \mathrm{etc} \xrightarrow{C} c' = c'^{(\mathrm{etc}\overset{C}{\circ}\_)}$ 始终是同构
故 $\mathrm{etc} : c_1 \xrightarrow{C} c_1'$ 也是同构 。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在**米田嵌入**处会详细介绍 。