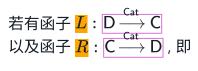
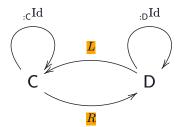
# 10 伴随函子

LATEX Definitions are here.





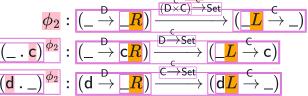
## 伴随函子的第一种定义

那么规定

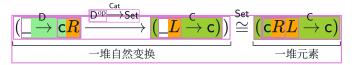
L → R 当且仅当
函子 (LL → LR)
间存在着一个二元的自然同构。

假如确实有  $L \dashv R$ , 那么不难得知

这里蕴含着一个二元的自然同构 φ<sub>2</sub> , 见下 :

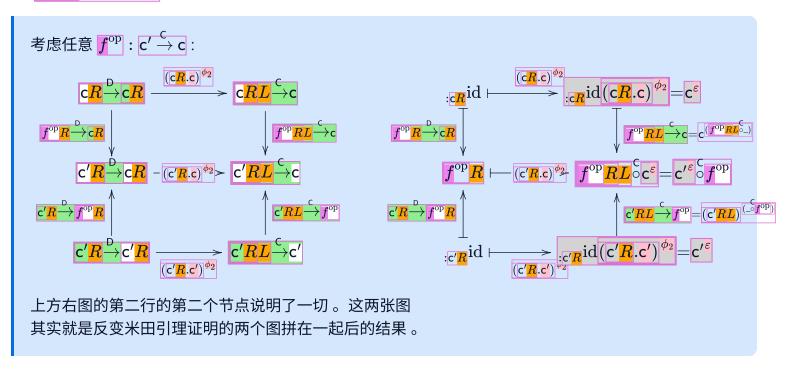


套用反变米田引理我们便可获得



由反变米田引理的证明可知:对每个左侧集合中的自然同构 $(\_.c)^{\phi_2}$ 右侧集合中都有一个箭头与之对应 , 即  $\frac{1}{|\mathbf{c_R^n}|}$  id  $\mathbf{(c_R^n \cdot c)}^{\phi_2} = \mathbf{c}^{\varepsilon}$  。如此

 $\varepsilon: \overset{\mathsf{Cat}}{\overset{\mathsf{Cat}}{\overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow} \mathsf{C}}} \overset{\mathsf{Cat}}{\underset{:C}{\longrightarrow} \mathsf{Id}}$  构成自然变换。



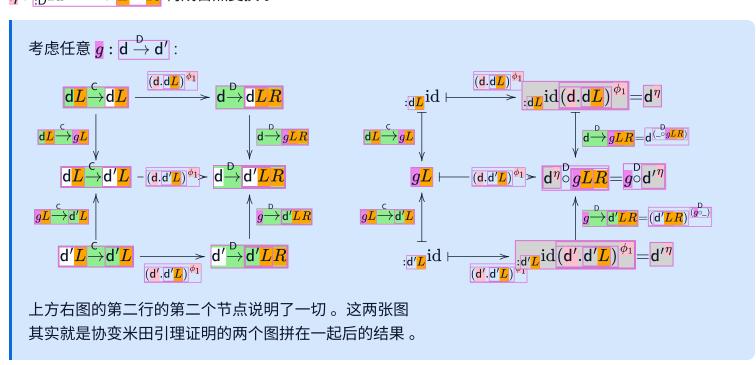


套用协变米田引理我们便可获得

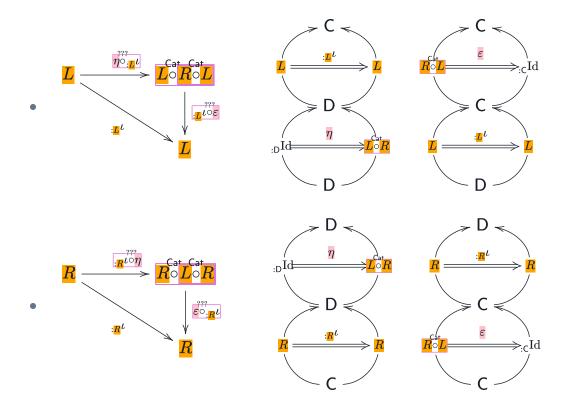
$$\underbrace{ \left( \left( \mathsf{d} \underbrace{L} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{L} \right) \overset{\mathsf{C}^{\mathsf{Cat}}}{\longrightarrow} \left( \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{L} \overset{\mathsf{R}}{\longrightarrow} \right) }^{\mathsf{Set}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{ \left( \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{L} R \right) }_{- \mathsf{4} \mathsf{L} \mathsf{R}}$$

由协变米田引理的证明可知:对每个左侧集合中的自然同构  $(\mathbf{d}_{--})^{\phi_1}$ 右侧集合中都有一个箭头与之对应,即 $_{\operatorname{id}_{\boldsymbol{L}}}\operatorname{id}(\operatorname{d}_{\cdot}\operatorname{d}_{\boldsymbol{L}})^{\phi_1}=\overline{\operatorname{d}^n}$ 。如此。

•  $\eta: \underline{\operatorname{DId}} \xrightarrow{\overline{\operatorname{D}} \to \overline{\operatorname{D}}} \overset{\operatorname{Cat}}{\operatorname{Cat}} R$  构成自然变换。

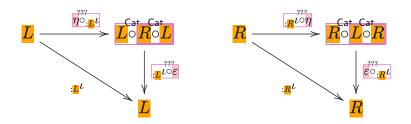


对于前面的  $\varepsilon$  和  $\eta$  我们有下述交换图成立:



### 伴随函子的第二种定义

假设我们不知道 L 和 R 构成一对伴随函子并且有自然变换  $\varepsilon: R \overset{\text{Cat}}{\circ} L \overset{\text{C} \to \text{C}}{\longrightarrow} {}_{:\text{C}} \text{Id}$  和  $\eta: {}_{:\text{D}} \text{Id} \overset{\text{D} \to \text{D}}{\longrightarrow} L \overset{\text{Cat}}{\circ} R$  能同时满足 上页开头的两幅交换图,即

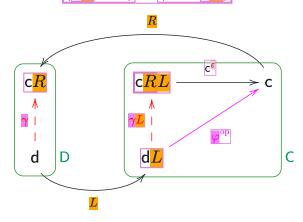


#### 那么

• 对任意 C 中对象 c

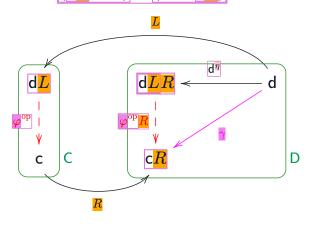
及任意 D 中对象 d

及任意  $\varphi^{\mathrm{op}}$  :  $\mathsf{d} \overset{\mathsf{c}}{ \mathsf{L}} \overset{\mathsf{c}}{ o} \mathsf{c}$  始终存在 唯一的  $\gamma: \mathbf{d} \to \mathbf{c}_{R}$  使下图交换。 如此有  $(dL \to c) \stackrel{\mathsf{Set}}{\cong} (d \to cR)$ 。



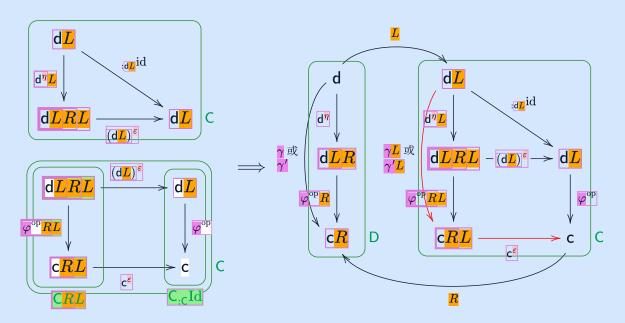
对任意 C 中对象 c

及任意 D 中对象 d 及任意  $\gamma: d \xrightarrow{p} cR$  始终都会存在 唯一的  $\varphi^{op}: dL \xrightarrow{c} c$  使下图交换。 如此有  $(dL \xrightarrow{c} c) \cong (d \xrightarrow{p} cR)$ 。

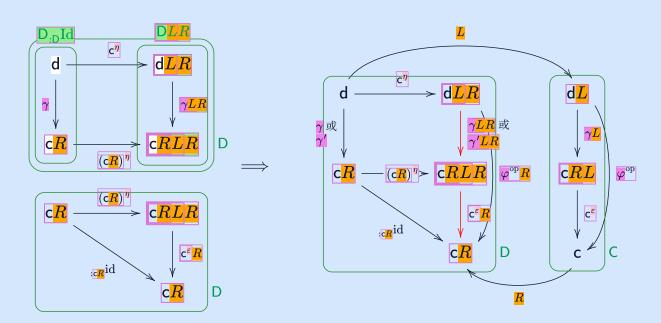


现证明上页的头两条定理。

我们将下图称作图 1 。图 1 上半部分即为上页第一幅图,而图 1 下半部分可由  $\varepsilon$  为自然变换得出。两图拼在一起即可得图 1 右侧部分。



我们将下图称作图 2 。图 2 下半部分即为上页第二幅图,而图 2 上半部分可由  $\eta$  为自然变换得出。两图拼在一起即可得图 2 右侧部分。



为何  $\gamma$  唯一呢?若  $\gamma'$  亦满足上图 —— 即不论是  $\gamma$  还是  $\gamma'$  图 1 右侧部分中 L 形走向红色路径的复合结果都为  $\varphi^{\rm op}$ ; 故图 2 右侧部分中红色路径的复合结果也是一致的; 如此根据图 2 右侧部分即可知  $\gamma = \gamma'$ 。

另一侧同理,这里不再赘述。

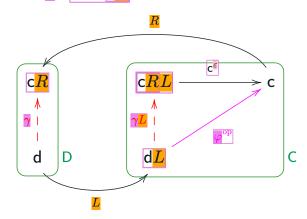
### 伴随函子的第三种定义

假设我们不知道 L 和 R 构成一对伴随函子并且有自然变换  $\varepsilon: R \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} L \overset{\mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{C}}{\longrightarrow} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id}$  和  $\eta: {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id} \overset{\mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{D}}{\longrightarrow} L \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} R$  , 那么我们有

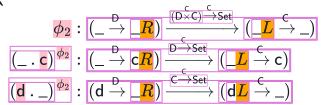
• 若对任意 C 中对象 c

及对任意 D 中对象 d

及对任意  $\varphi^{\text{op}}$ :  $d \stackrel{\mathsf{c}}{ } \to \mathsf{c}$  始终都会有唯一的  $\gamma$ :  $d \stackrel{\mathsf{p}}{ } \to \mathsf{c} R$  使下图交换,



那么

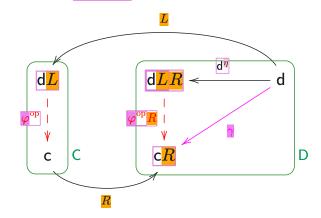


将构成自然同构。

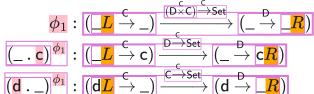
• 若对任意 C 中对象 c

及对任意 D 中对象 d

及对任意  $\gamma: d \xrightarrow{D} cR$  始终都存在 唯一的  $\varphi^{op}: dL \xrightarrow{C} c$  使下图交换,



那么



将构成自然同构。

