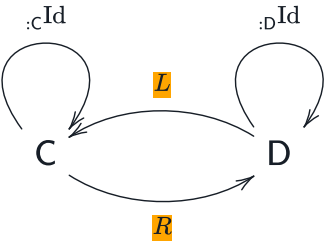


## 10 伴随函子

若有函子  $L : \mathbf{D} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{C}$   
 以及函子  $R : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{D}$ , 即



那么规定

### 伴随函子的第一种定义

- $L \dashv R$  当且仅当  
 对任意  $\mathbf{C}$  中对象  $c$   
 及任意  $\mathbf{D}$  中对象  $d$   
 都有  $(d \xrightarrow{\mathbf{D}} cR) \cong_{\text{Set}} ((dL \xrightarrow{\mathbf{C}} c))$ 。

假如确实有  $L \dashv R$ , 那么不难得知

- 这里蕴含着一个二元的自然同构  $\phi_2$ ，见下：

$$\begin{aligned}\phi_2 &: \left( \_ \xrightarrow{D} \_ R \right) \xrightarrow{(D \times C) \rightarrow \text{Set}} \left( \_ L \xrightarrow{C} \_ \right) \\ (\_ \cdot c) \phi_2 &: \left( \_ \xrightarrow{D} c R \right) \xrightarrow{D \rightarrow \text{Set}} \left( \_ L \xrightarrow{C} c \right) \\ (d \cdot \_) \phi_2 &: \left( d \xrightarrow{D} \_ R \right) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} \left( d L \xrightarrow{C} \_ \right)\end{aligned}$$

套用反变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{\left( \_ \xrightarrow{D} c R \right) \xrightarrow{D^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}} \left( \_ L \xrightarrow{C} c \right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\left( c R L \xrightarrow{C} c \right)}_{\text{一堆元素}}$$

由反变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构  $(\_ \cdot c) \phi_2$  右侧集合中都有一个箭头与之对应，即  $:_c R \text{id}(c R \cdot c) \phi_2 = c^\varepsilon$ 。如此

- $\varepsilon : R \circ L \xrightarrow{\text{Cat}} :_c \text{Id}$  构成自然变换。

考虑任意  $f^{\text{op}} : c' \xrightarrow{C} c$ ：

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} c R \xrightarrow{D} c R \xrightarrow{(c R \cdot c) \phi_2} c R L \xrightarrow{C} c \\ \downarrow f^{\text{op}} R \xrightarrow{D} c R \quad \downarrow f^{\text{op}} R L \xrightarrow{C} c \\ c' R \xrightarrow{D} c R \xrightarrow{(c' R \cdot c) \phi_2} c' R L \xrightarrow{C} c \\ \uparrow c' R \xrightarrow{D} f^{\text{op}} R \quad \uparrow c' R L \xrightarrow{C} f^{\text{op}} \\ c' R \xrightarrow{D} c' R \xrightarrow{(c' R \cdot c') \phi_2} c' R L \xrightarrow{C} c' \end{array} & \begin{array}{c} :_c R \text{id} \vdash \xrightarrow{(c R \cdot c) \phi_2} :_c R \text{id}(c R \cdot c) \phi_2 = c^\varepsilon \\ \downarrow f^{\text{op}} R \xrightarrow{D} c R \quad \downarrow f^{\text{op}} R L \xrightarrow{C} c \\ f^{\text{op}} R \vdash (c' R \cdot c) \phi_2 \quad f^{\text{op}} R L \circ c^\varepsilon = c'^\varepsilon \circ f^{\text{op}} \\ \uparrow c' R \xrightarrow{D} f^{\text{op}} R \quad \uparrow c' R L \xrightarrow{C} f^{\text{op}} \\ :_{c'} R \text{id} \vdash \xrightarrow{(c' R \cdot c') \phi_2} :_{c'} R \text{id}(c' R \cdot c') \phi_2 = c'^\varepsilon \end{array} \end{array}$$

上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图其实就是反变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

- 这里蕴含着一个二元的自然同构  $\phi_1$ ，见下：

$$\begin{aligned}\phi_1 &: \left( \_ L \xrightarrow{C} \_ \right) \xrightarrow{(D \times C) \rightarrow \text{Set}} \left( \_ \xrightarrow{D} \_ R \right) \\ (\_ \cdot c) \phi_1 &: \left( \_ L \xrightarrow{C} c \right) \xrightarrow{D \rightarrow \text{Set}} \left( \_ \xrightarrow{D} c R \right) \\ (d \cdot \_) \phi_1 &: \left( d L \xrightarrow{C} \_ \right) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} \left( d \xrightarrow{D} \_ R \right)\end{aligned}$$

套用协变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{\left( (d L \xrightarrow{C} \_) \right) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} \left( d \xrightarrow{D} \_ R \right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\left( d \xrightarrow{D} d L R \right)}_{\text{一堆元素}}$$

由协变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构  $(d \cdot \_) \phi_1$  右侧集合中都有一个箭头与之对应，即  $:_d L \text{id}(d \cdot d L) \phi_1 = d^\eta$ 。如此。

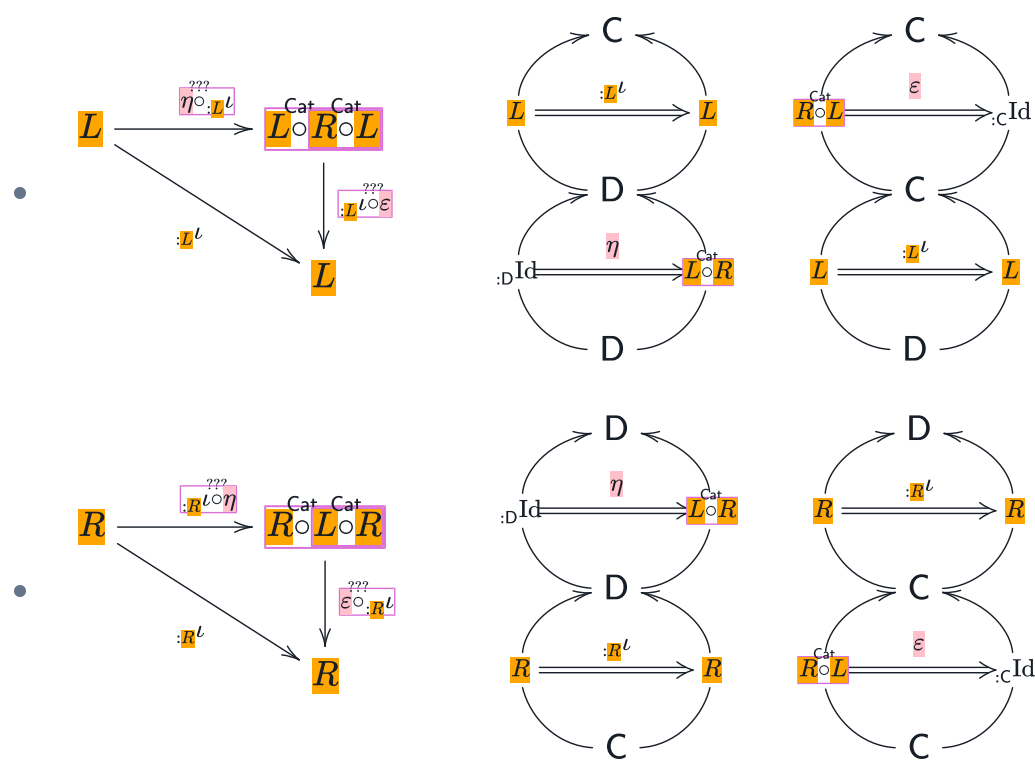
- $\eta : :_D \text{Id} \xrightarrow{D \rightarrow D} L \circ R$  构成自然变换。

考虑任意  $g : d \xrightarrow{D} d'$ ：

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} d L \xrightarrow{C} d L \xrightarrow{(d \cdot d L) \phi_1} d \xrightarrow{D} d L R \\ \downarrow d L \xrightarrow{C} g L \quad \downarrow d \xrightarrow{D} g L R \\ d L \xrightarrow{C} d' L \xrightarrow{(d \cdot d' L) \phi_1} d \xrightarrow{D} d' L R \\ \uparrow g L \xrightarrow{C} d' L \quad \uparrow g \xrightarrow{D} d' L R \\ d' L \xrightarrow{C} d' L \xrightarrow{(d' \cdot d' L) \phi_1} d' \xrightarrow{D} d' L R \end{array} & \begin{array}{c} :_d L \text{id} \vdash \xrightarrow{(d \cdot d L) \phi_1} :_d L \text{id}(d \cdot d L) \phi_1 = d^\eta \\ \downarrow d L \xrightarrow{C} g L \quad \downarrow d \xrightarrow{D} g L R \\ g L \vdash (d \cdot d' L) \phi_1 \quad d^\eta \circ g L R = g \circ d'^\eta \\ \uparrow g L \xrightarrow{C} d' L \quad \uparrow g \xrightarrow{D} d' L R \\ :_{d'} L \text{id} \vdash \xrightarrow{(d' \cdot d' L) \phi_1} :_{d'} L \text{id}(d' \cdot d' L) \phi_1 = d'^\eta \end{array} \end{array}$$

上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图其实就是协变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

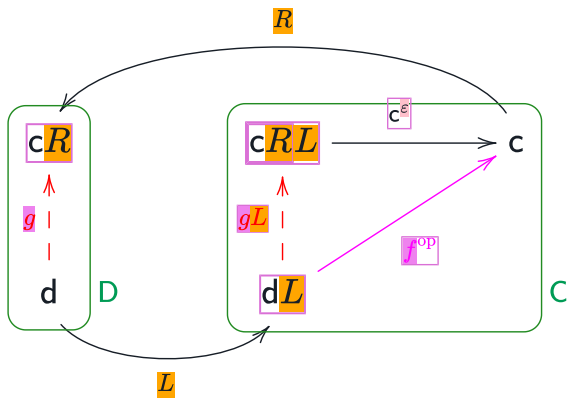
对于前面的  $\varepsilon$  和  $\eta$  我们有下述交换图成立：



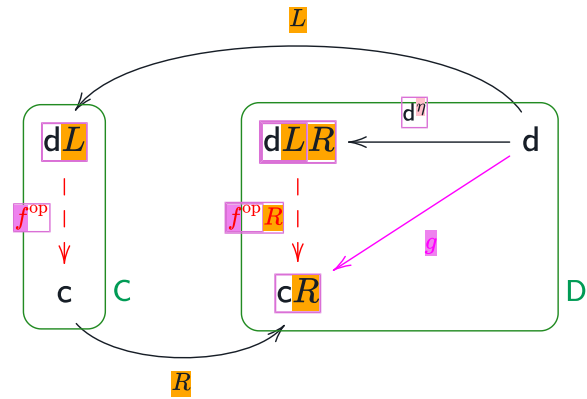
## 伴随函子的第二种定义

假设我们不知道  $L$  和  $R$  构成一对伴随函子并且有自然变换  $\varepsilon : R \circ L \xrightarrow{\text{Cat } C \rightarrow C} \text{Id}$  和  $\eta : \text{Id} \xrightarrow{\text{D} \rightarrow D} L \circ R$  能同时满足上页开头的两幅交换图，那么

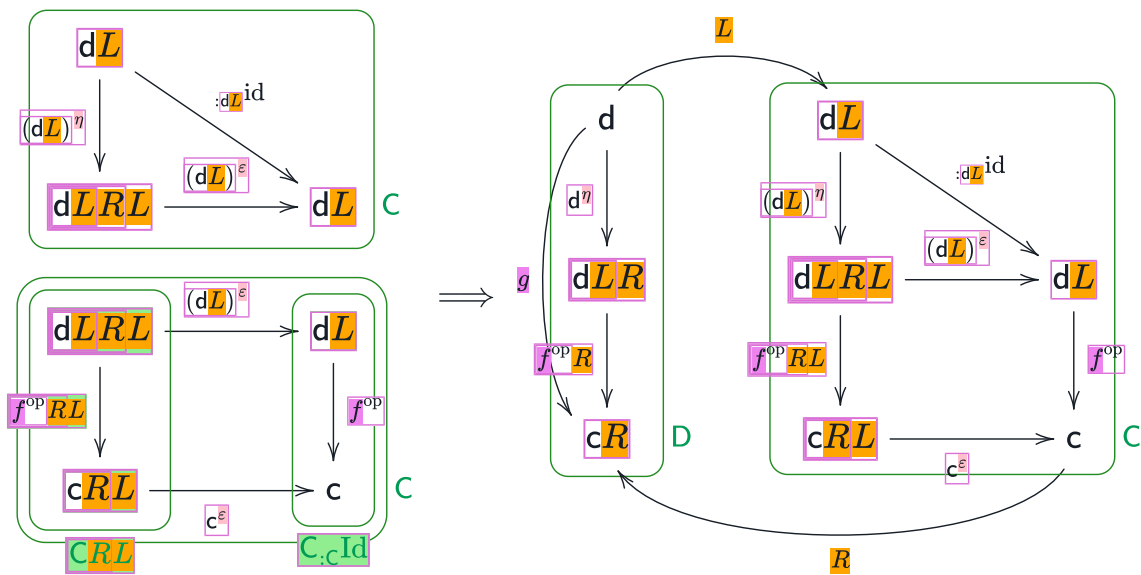
- 对任意  $C$  中对象  $c$   
及任意  $D$  中对象  $d$   
及任意  $f^{\text{op}} : dL \xrightarrow{C} c$  始终存在  
唯一的  $g : d \xrightarrow{D} cR$  使下图交换。



- 对任意  $C$  中对象  $c$   
及任意  $D$  中对象  $d$   
及任意  $g : d \xrightarrow{D} cR$  始终都会存在  
唯一的  $f^{\text{op}} : dL \xrightarrow{C} c$  使下图交换。



下方左图上半部分即为上页第一幅图，而  
 下方左图下半部分可由  $\varepsilon$  为自然变换得出；  
 将两个图拼在一起即可获得下方右图：



那为何  $g$  是唯一的呢？假如有  $g'$  亦满足上图，则

