

02 范畴当中的箭头

L^AT_EX Definitions are here.

沿用上一节提到的自由变量。我们规定：

- $\mathbf{c}_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_2 =$
所有从 \mathbf{c}_1 射向 \mathbf{c}_2 的箭头构成的集。

Note

上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
其他范畴里 $\mathbf{c}_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_2$ 未必构成集。

范畴 \mathbf{C} 中特定的箭头可以进行复合运算：

- $\circ^{\mathbf{C}} : (\mathbf{c}_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_2) \times (\mathbf{c}_2 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_3) \xrightarrow{\text{Set}} (\mathbf{c}_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_3)$
 $(i_1 \quad . \quad i_2) \longmapsto i_1 \circ^{\mathbf{C}} i_2$

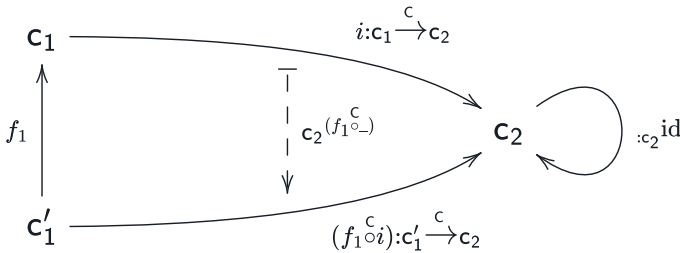
如果我们还知道箭头 f_1, i, f_2 分别属于
 $\mathbf{c}'_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_2 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}'_2$ 那么便可知

- $(f_1 \circ^{\mathbf{C}} i) \circ^{\mathbf{C}} f_2 = f_1 \circ^{\mathbf{C}} (i \circ^{\mathbf{C}} f_2),$
即箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便可获得新的函数：

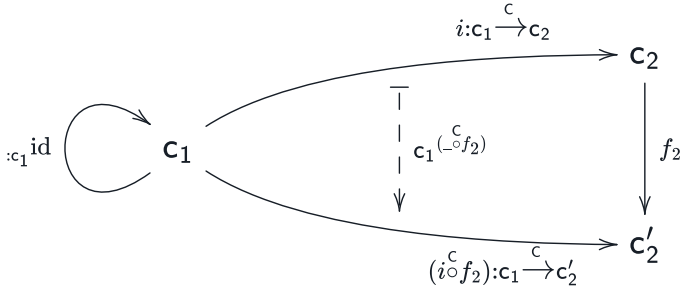
- $(f_1 \circ^{\mathbf{C}} _): (\mathbf{c}_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} _) \xrightarrow{\mathbf{C} \rightarrow \text{Set}} (\mathbf{c}'_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} _)$
 $i \longmapsto (f_1 \circ^{\mathbf{C}} i)$

称作**前复合**。下图有助于形象理解：



- $(_ \circ^{\mathbf{C}} f_2): (_ \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_2) \xrightarrow{\mathbf{C} \rightarrow \text{Set}} (_ \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}'_2)$
 $i \longmapsto (i \circ^{\mathbf{C}} f_2)$

称作**后复合**。下图有助于形象理解：



根据上面的定义不难得出下述结论：

- $(f_1 \circ^{\mathbf{C}} _) \circ^{\text{Cat}} (_ \circ^{\mathbf{C}} f_2) = (_ \circ^{\mathbf{C}} f_2) \circ^{\text{Cat}} (f_1 \circ^{\mathbf{C}} _)$
复合运算具有**结合律**，即后面提到的**自然性**；
- $(_ \circ^{\mathbf{C}} i) \circ^{\text{Cat}} (_ \circ^{\mathbf{C}} f_2) = (_ \circ^{\mathbf{C}} (i \circ^{\mathbf{C}} f_2))$
前复合与复合运算的关系
- $(i \circ^{\mathbf{C}} _) \circ^{\text{Cat}} (f_1 \circ^{\mathbf{C}} _) = ((f_1 \circ^{\mathbf{C}} i) \circ^{\mathbf{C}} _)$
后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。

假如 a_1 为 \mathbf{c}_1 的全局元素则可规定

- $c_1 i = c_1 \circ^{\mathbf{C}} i$

恒等箭头

范畴 \mathbf{C} 内的每个对象都有恒等映射：

- $\text{id} : c_1 \xrightarrow{c} c_1$
 $c_1 \mapsto c_1$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- $\text{id} \circ i = i$
 $= i \circ \text{id}$

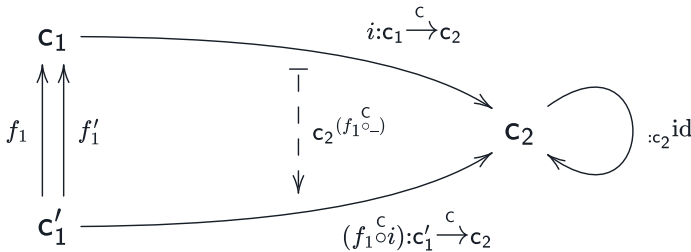
此外还可以得知

- $(\text{id} \circ _) : (c_1 \xrightarrow{c} _) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} (c_1 \xrightarrow{c} _)$
为恒等自然变换，可以记成是 $(c_1 \xrightarrow{c} _) \text{id}$ ；
- $(_ \circ \text{id}) : (_ \xrightarrow{c} c_2) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} (_ \xrightarrow{c} c_2)$
为恒等自然变换，可以记成是 $(_ \xrightarrow{c} c_2) \text{id}$ 。

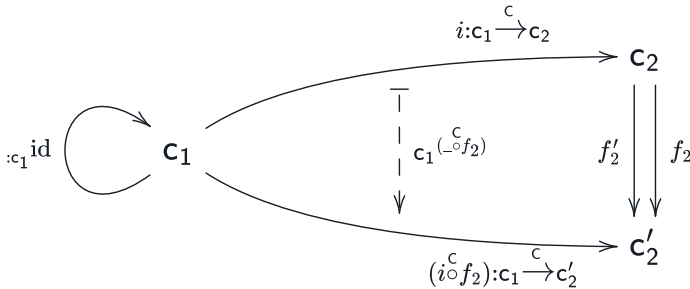
单满态以及同构

接下来给出单 / 满态和同构的定义。

- i 为**单态**当且仅当对任意 c'_1
若有 $f_1, f'_1 : c'_1 \xrightarrow{c} c_1$ 满足 $f_1 \circ i = f'_1 \circ i$
则有 $f_1 = f'_1$ 。详情见下图：



- i 为**满态**当且仅当对任意 c'_2
若有 $f_2, f'_2 : c_2 \xrightarrow{c} c'_2$ 满足 $i \circ f_2 = i \circ f'_2$
则有 $f_2 = f'_2$ 。详情见下图：



- i 为**同构**当且仅当存在 $i' : c_2 \xrightarrow{c} c_1$
使得 $i \circ i' = \text{id}$ 且 $i' \circ i = \text{id}$ 。
此时 c_1, c_2 间的关系可记作 $c_1 \cong c_2$ 。

若还知道 $i = i_1$ 且 $i_2 : c_2 \xrightarrow{c} c_3$ 则有

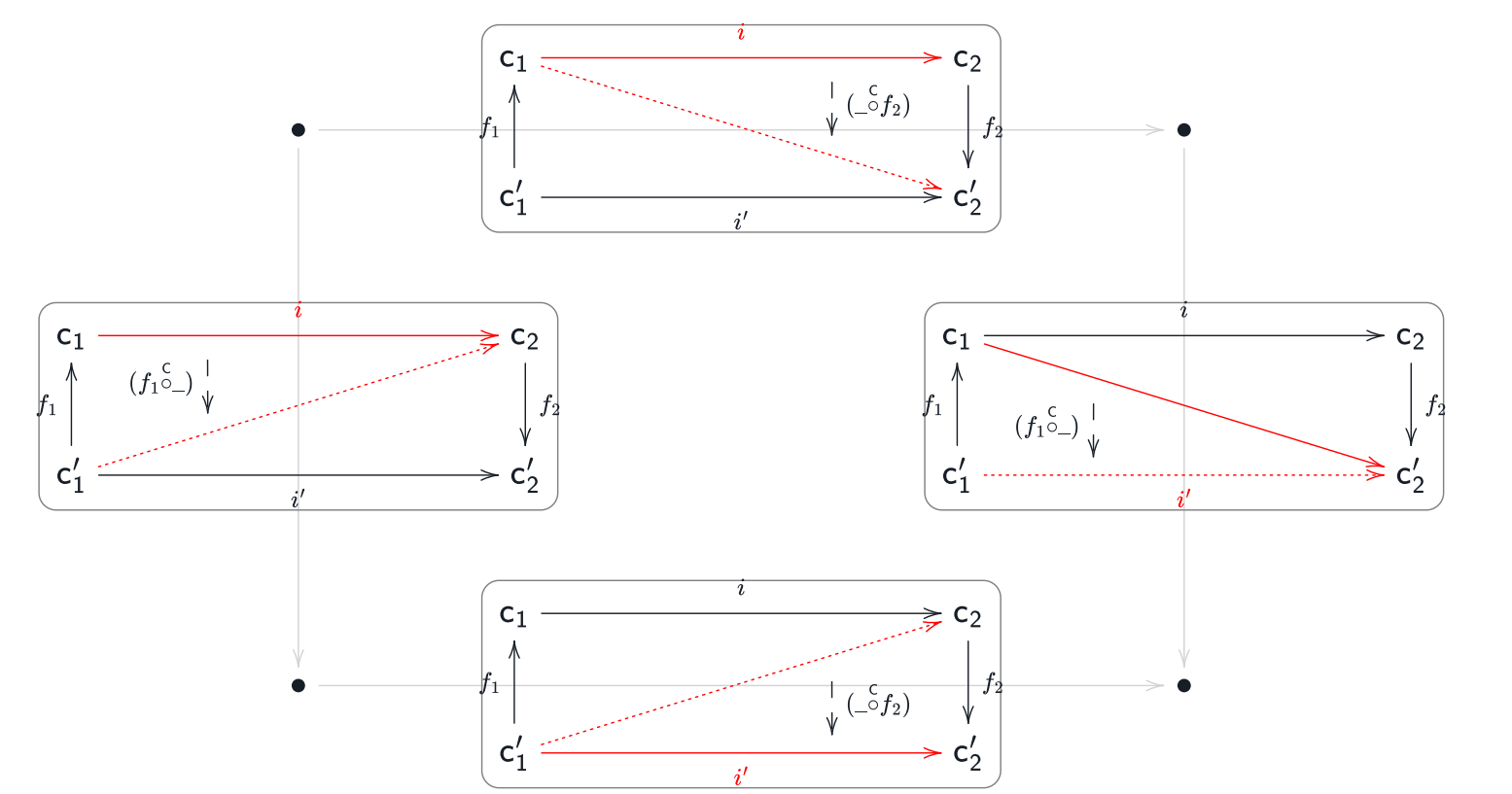
- 若 i_1, i_2 为单态
则 $i_1 \circ i_2$ 为单态；
- 若 i_1, i_2 为满态
则 $i_1 \circ i_2$ 为满态；
- 若 i_1, i_2 为同构
则 $i_1 \circ i_2$ 为同构；
- 若 $i_1 \circ i_2$ 为同构
且 i_1, i_2 中有一个为同构
则 i_1, i_2 两者皆构成同构。

不仅如此我们还可以得出下述结论：

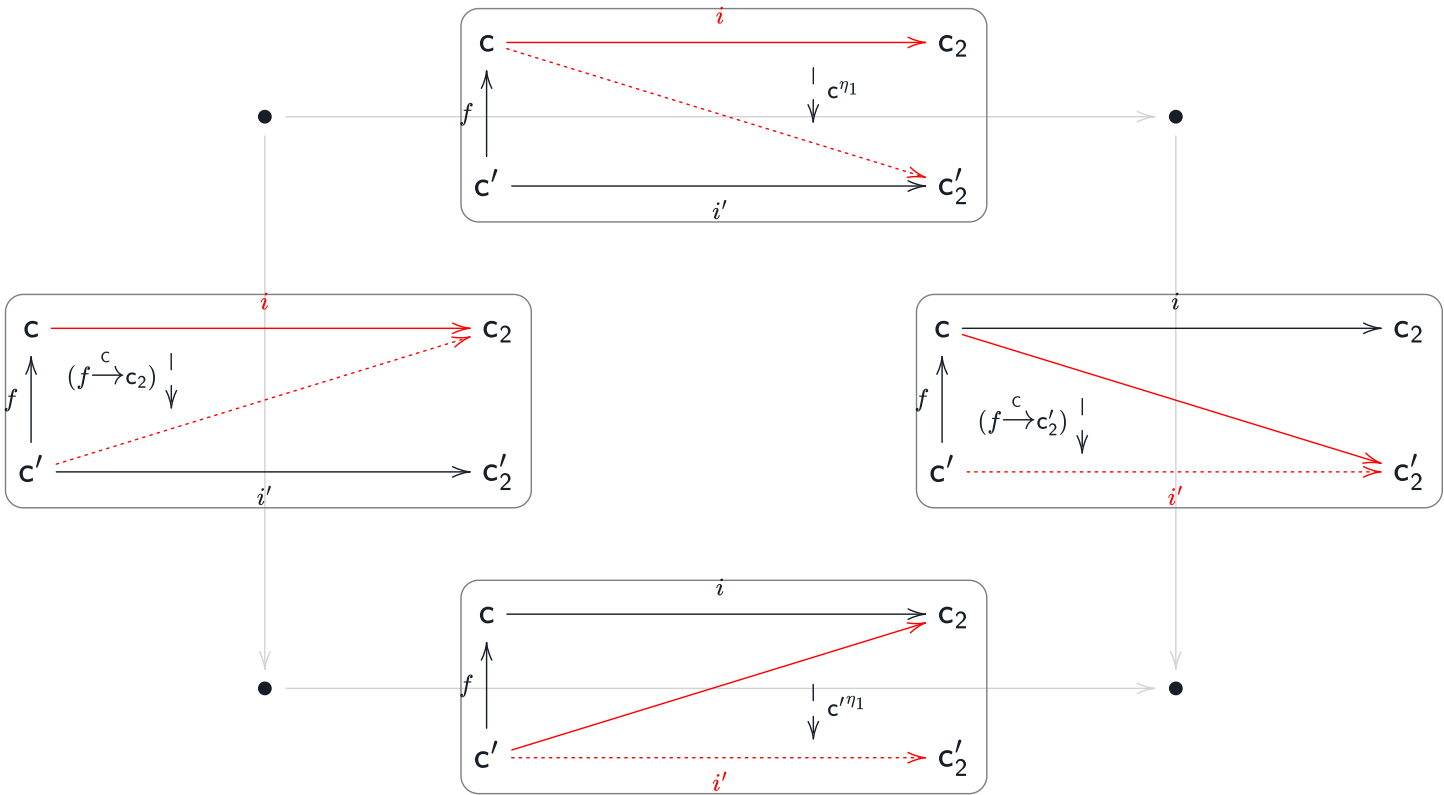
- c_1 为单态，
由 $c_1!$ 的唯一性可知；
- $c_0! = c_1!$ 为同构，
因为 $0 \rightarrow 0 = \{c_0 \text{id}\}$
并且 $1 \rightarrow 1 = \{c_1 \text{id}\}$

同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释。
后面会将自然性进行进一步推广。



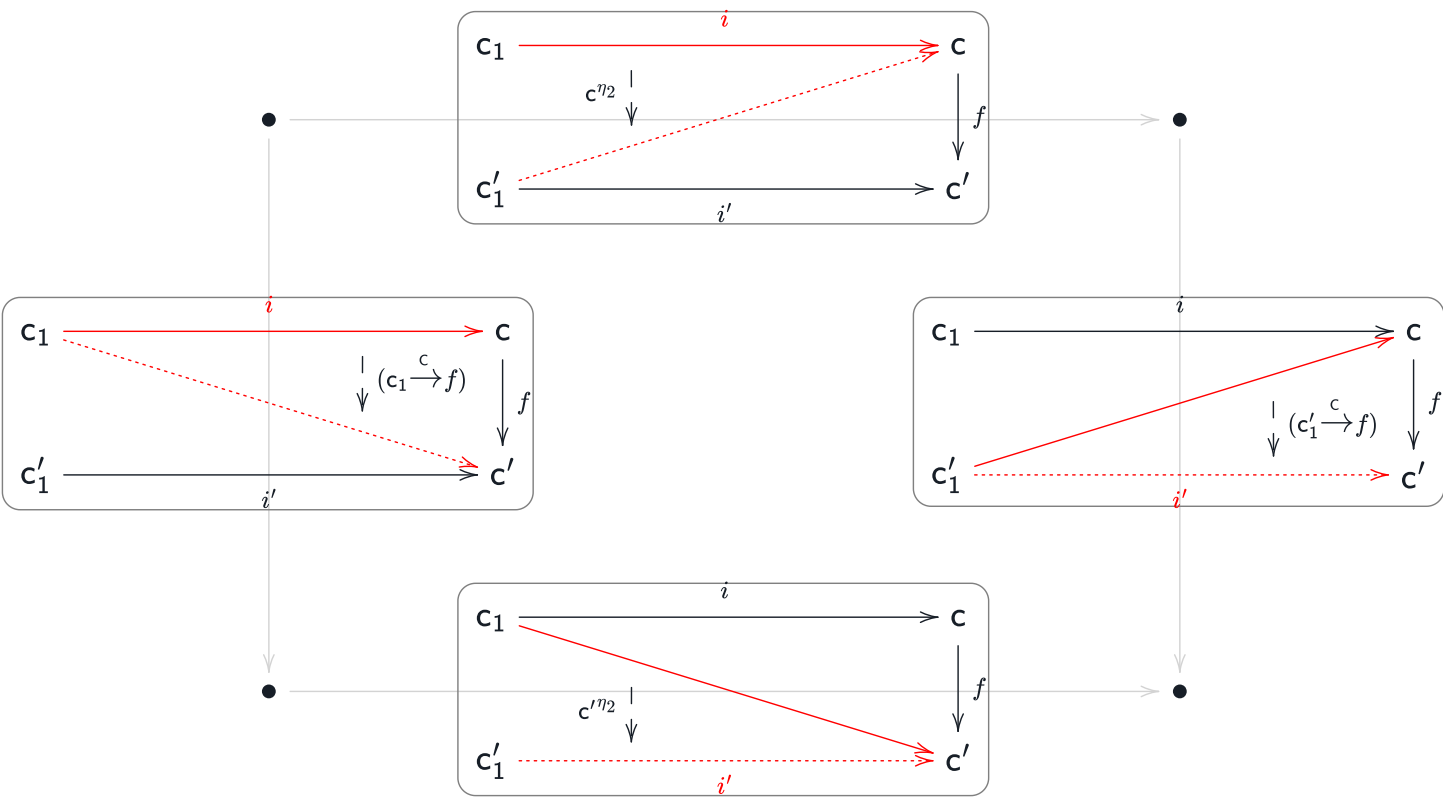
现提供自然变换 η_1 满足自然性 —— 即对任意 \mathcal{C} 中对象 c, c' 以及任意 \mathcal{C} 中映射 $f: c' \xrightarrow{\mathcal{C}} c$ 都有 $(f \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2) \circ_{\text{Set}} c'^{\eta_1} = c^{\eta_1} \circ (f \xrightarrow{\mathcal{C}} c'_2)$:



那么我们便会有下述结论：

- $c_2 \overset{\mathcal{C}}{\cong} c'_2$ 当且仅当对任意 \mathcal{C} 中的对象 c c^{η_1} 都是同构。此时称 η_1 为**自然同构**。

现提供自然变换 η_2 满足自然性 —— 即对任意 \mathcal{C} 中对象 c, c' 以及任意 \mathcal{C} 中映射 $f: c \xrightarrow{\mathcal{C}} c'$ 都有 $(c_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} f) \circ_{\text{Set}} c'^{\eta_2} = c^{\eta_2} \circ (c'_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} f)$:



那么我们便会有下述结论：

- $c_1 \overset{\mathcal{C}}{\cong} c'_1$ 当且仅当对任意 \mathcal{C} 中的对象 c c^{η_2} 都是同构。此时称 η_2 为**自然同构**。