

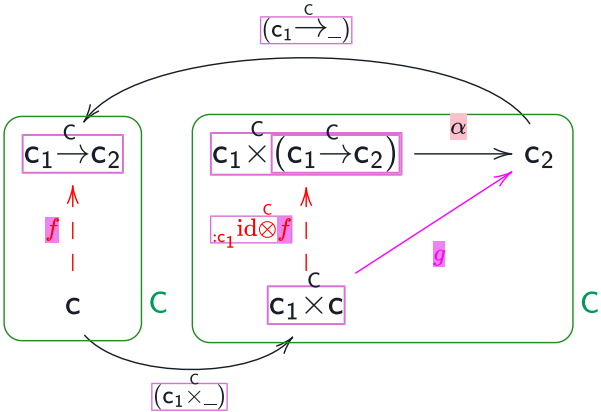
06 类型的幂

L^AT_EX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} : (\overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}} \times \overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}}) \overset{\mathcal{C}}{\longrightarrow} \overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}}$ 在范畴 \mathcal{C} 中有下述性质：

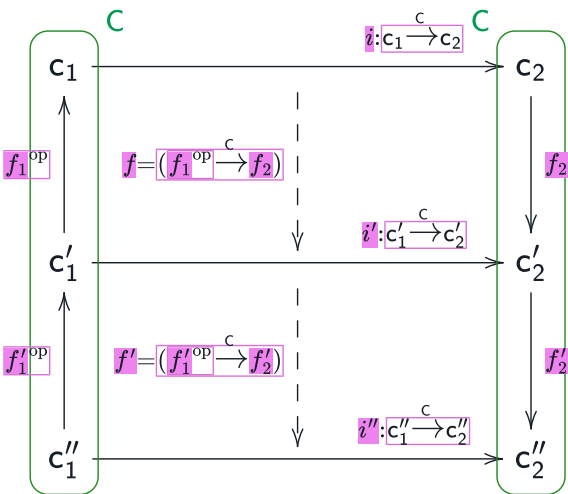
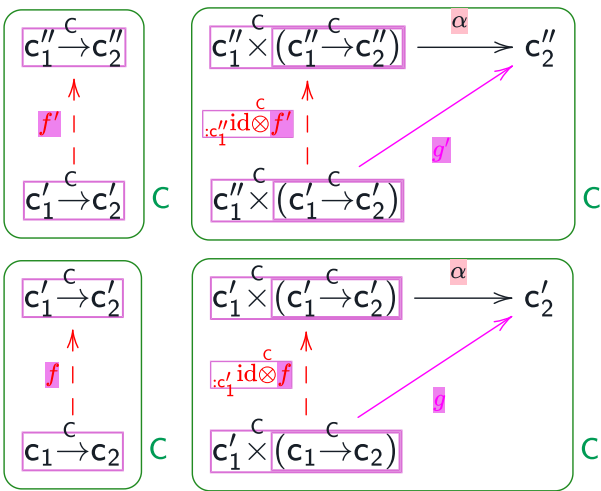
- $(\overset{\mathcal{C}}{c_1} \times \overset{\mathcal{C}}{c}) \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \overset{\mathcal{C}}{c_2} \cong \overset{\mathcal{C}}{c} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} (\overset{\mathcal{C}}{c_1} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \overset{\mathcal{C}}{c_2}) \cong \overset{\mathcal{C}}{c_1} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} (\overset{\mathcal{C}}{c} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \overset{\mathcal{C}}{c_2})$
—— c 为任意 \mathcal{C} 中对象。此即为幂的泛性质，亦表示了指数加乘法之间的运算关系。



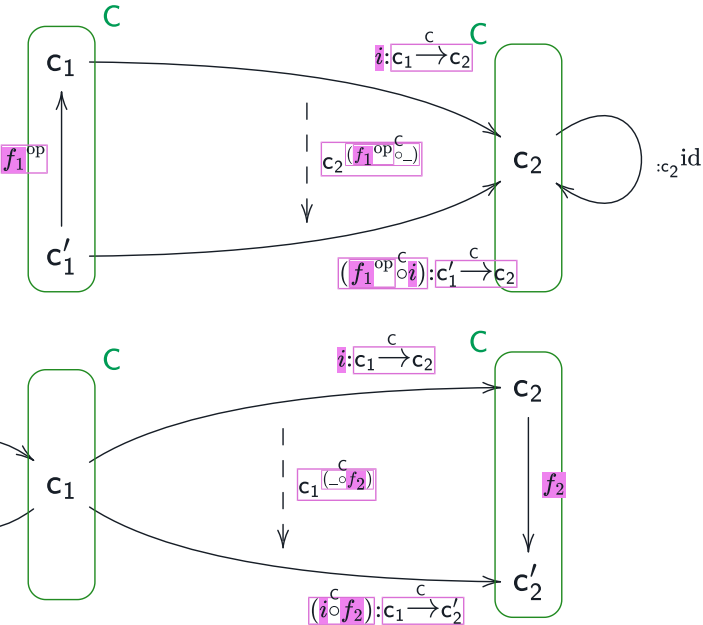
函子性

如何证明 $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} : (:\overset{\mathcal{C}}{c_1} \text{id} . :\overset{\mathcal{C}}{c_2} \text{id}) \mapsto :(\overset{\mathcal{C}}{c_1} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \overset{\mathcal{C}}{c_2}) \text{id}$
—— 即函子 $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow}$ 能保持恒等箭头；
- $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} : (\overset{\mathcal{C}}{f_1} \circ \overset{\mathcal{C}}{f'_1} . \overset{\mathcal{C}}{f_2} \circ \overset{\mathcal{C}}{f'_2}) \mapsto (\overset{\mathcal{C}}{f} \circ \overset{\mathcal{C}}{f'})$
—— 即函子 $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow}$ 保持箭头复合运算。
下图有助于形象理解证明过程：



下图（自上到下分别为图 1 和图 2）后面会用到。



范畴 \mathcal{C} 内任意两对象 c_1 和 c_2 间的箭头构成一个集合 $\mathcal{C}(c_1 \rightarrow c_2)$,
 说明 \rightarrow 只能将两个对象打到一个集合 ; 下面使 \rightarrow 升级为函子 :
 若还知道箭头 $f_1^{\text{op}} : c'_1 \rightarrow c_1$ 以及 $f_2 : c_2 \rightarrow c'_2$, 则规定

- $(_ \rightarrow c_2) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ 为函子且
 $(_ \rightarrow c_2) : c \mapsto (\mathcal{C}(c \rightarrow c_2))$ 且对任意 $f^{\text{op}} : c' \rightarrow c$ 有
 $(_ \rightarrow c_2) : f^{\text{op}} \mapsto (\mathcal{C}(f^{\text{op}} \rightarrow c_2)) = (\mathcal{C}(f^{\text{op}} \rightarrow \cdot_{c_2} \text{id})) = c_2(f^{\text{op}} \circ _)$

图 1 有助于理解。

$$\begin{aligned} (_ \rightarrow f_2) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} &\longrightarrow \mathbf{Set}, \\ (_ \rightarrow f_2) : c &\longmapsto (\mathcal{C}(c \rightarrow f_2)) = (\cdot_{c} \text{id} \xrightarrow{c} f_2) = c_2(_ \circ f_2) \text{ 且对任意 } f^{\text{op}} : c' \xrightarrow{c} c \text{ 有} \\ (_ \rightarrow f_2) : f^{\text{op}} &\longmapsto (\mathcal{C}(f^{\text{op}} \xrightarrow{c} f_2)) = ((f^{\text{op}} \circ _) \overset{???}{\circ} (_ \circ f_2)) = (_ \circ f_2) \overset{???}{\circ} (f^{\text{op}} \circ _) \end{aligned}$$

图 2 有助于理解。

Note

不难看出

- よ : $\mathcal{C} \xrightarrow{\text{Cat}} (\mathcal{C}^{\text{op}} \xrightarrow{\text{Set}} \mathbf{Set})$
 $c_2 \mapsto (\mathcal{C}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}^{\text{op}}} _)$ 构成一个函子
 $f_2 \mapsto (\mathcal{C}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}^{\text{op}}} _) = (_ \xrightarrow{c} f_2) = (_ \circ f_2)$ 构成一个函子间映射 , 即自然变换

该函子称作是**米田嵌入**。

- $(c_1 \rightarrow _) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ 为函子且
 $(c_1 \rightarrow _) : c \mapsto (\mathcal{C}(c_1 \rightarrow c))$, 且对任意 $f : c \rightarrow c'$ 有
 $(c_1 \rightarrow _) : f \mapsto (\mathcal{C}(c_1 \rightarrow f)) = (\cdot_{c_1} \text{id} \xrightarrow{c} f) = c_1(_ \circ f)$

图 2 有助于理解。

$$\begin{aligned} (f_1^{\text{op}} \xrightarrow{c} _) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} &\longrightarrow \mathbf{Set}, \\ (f_1^{\text{op}} \xrightarrow{c} _) : c &\longmapsto (\mathcal{C}(f_1^{\text{op}} \xrightarrow{c} c)) = (\mathcal{C}(f_1^{\text{op}} \xrightarrow{c} \cdot_{c} \text{id})) = c(f_1^{\text{op}} \circ _) \text{ 且对任意 } f : c \xrightarrow{c} c' \text{ 有} \\ (f_1^{\text{op}} \xrightarrow{c} _) : f &\longmapsto (\mathcal{C}(f_1^{\text{op}} \xrightarrow{c} f)) = ((f_1^{\text{op}} \circ _) \overset{???}{\circ} (_ \circ f)) = (_ \circ f) \overset{???}{\circ} (f_1^{\text{op}} \circ _) \end{aligned}$$

图 1 有助于理解。

Note

不难看出

- 尤 : $\mathcal{C}^{\text{op}} \xrightarrow{\text{Cat}} (\mathcal{C} \xrightarrow{\text{Set}} \mathbf{Set})$
 $c_1 \mapsto (\mathcal{C}_1 \xrightarrow{c} _)$ 构成一个函子
 $f_1^{\text{op}} \mapsto (\mathcal{C}_1^{\text{op}} \xrightarrow{c} _) = (f_1^{\text{op}} \circ _)$ 构成一个函子间映射 , 即自然变换

该函子戏称为**尤达嵌入**。

积闭范畴

这里插个题外话：

若范畴包含终对象 , 所有类型的积以及指数 , 则可将其称作**积闭范畴**；

若范畴包含始对象 , 所有类型的和 , 则可将其称作是**余积闭范畴**；

若范畴满足上述条件 , 则可称作**双积闭范畴**。

很明显我们讨论的范畴 \mathcal{C} 就是**双积闭范畴**。