01 始对象和终对象

$\LaTeX$ Definitions are here.

泛性质

范畴由对象及其间箭头构成。本文重点分析**余积闭范畴** C。首先给出如下定义：

- 1 为**终对象**当且仅当对任意 C 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 ${}_{:\mathsf{c}}! : \mathsf{c} \xrightarrow{\mathsf{C}} 1$：

$$\begin{tikzcd}
1 & & 1\left(\mathsf{c}\, \underset{\mathsf{C}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}\right) \arrow[r, "{}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}"] & \mathsf{c} \arrow[lll, mapsto, bend right, "\left(\mathsf{c}\, \underset{\text{①}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}\right)"'] & \\
\mathsf{c} \arrow[u, dashed, "{}_{:\mathsf{c}}!"] \arrow[rr, mapsto, bend right, "\left(\mathsf{c}\, \underset{\mathsf{C}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}\right)"'] & \mathsf{C} & \mathsf{c}\left(\mathsf{c}\, \underset{\mathsf{C}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}\right) \arrow[u, dashed, "{}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id} = {}_{:\mathsf{c}}!\left(\mathsf{c}\, \underset{\mathsf{C}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}\right)"] \arrow[ur, "{}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}"'] & & \text{①}
\end{tikzcd}$$

- 0 为**始对象**当且仅当对任意 C 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 ${}_{:\mathsf{c}}¡ : 0 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}$：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d, dashed, "{}_{:\mathsf{c}}¡"'] & & 0\left(\mathsf{c}\, \underset{\mathsf{C}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}\right) \arrow[d, dashed, "{}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id} = {}_{:\mathsf{c}}¡\left(\mathsf{c}\, \underset{\mathsf{C}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}\right)"'] & \mathsf{c} \arrow[l, "{}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}"'] \arrow[dl, "{}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}"] \arrow[lll, mapsto, bend right, "\left(0\, \underset{\text{①}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}\right)"'] & \\
\mathsf{c} \arrow[rr, mapsto, bend right, "\left(\mathsf{c}\, \underset{\mathsf{C}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}\right)"'] & \mathsf{C} & \mathsf{c}\left(\mathsf{c}\, \underset{\mathsf{C}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}\right) & & \text{①}
\end{tikzcd}$$

> ⓘ **Note**
>
> - $$\begin{aligned} \underset{\text{①}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} : \mathsf{C} &\xrightarrow{\mathsf{Cat}} \left(\text{①} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}\right) \\ \mathsf{c} &\longmapsto \text{常值函子} \\ \mathsf{c}\, \underset{\text{①}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} : &\quad \text{①} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C} \\ &\quad 1 \longmapsto \mathsf{c} \\ &\quad f \longmapsto {}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id} \end{aligned}$$
>
>   ① 为仅含单个函子的范畴，1 为其中的对象；仅含有单个对象的范畴可以被等价地视作为 ①。

若范畴 C 中真的含有 0 和 1 分别作为始对象和终对象 则根据上述信息可知

- 形如 $1 \xrightarrow{\mathsf{C}} 1$ 的箭头只有一个，即 ${}_{:1}\mathrm{id}$；
- 形如 $0 \xrightarrow{\mathsf{C}} 0$ 的箭头只有一个，即 ${}_{:0}\mathrm{id}$；

元素与全局元素

对任意对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_1', \mathrm{etc}$，$\mathsf{c}_2, \mathsf{c}_2', \mathrm{etc}$，$\mathsf{c}_3$ 及任意的映射 i 我们进行如下的规定：

- i 为 c_2 的**元素**当且仅当 $i \overset{\mathsf{C}}{\mathrm{tar}} = \mathsf{c}_2$；
- i 为 c_1 的**全局元素**当且仅当 $i \overset{\mathsf{C}}{\mathrm{tar}} = \mathsf{c}_1$ 且 $i \overset{\mathsf{C}}{\mathrm{src}} = 1$
- i 不存在仅当 $i \overset{\mathsf{C}}{\mathrm{tar}} = 0$。

> ⓘ **Note**
>
> 其他范畴中刚才的断言未必成立。

02 范畴当中的箭头

LaTeX Definitions are here.

沿用上一节提到的自由变量。我们规定：

- $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2 =$
  所有从 c_1 射向 c_2 的箭头构成的集。

> ⓘ **Note**
>
> 上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
> 其他范畴里 $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2$ 未必构成集。

范畴 C 中特定的箭头可以进行复合运算：

- $\begin{array}{rcl} \overset{\mathsf{C}}{\circ} : (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) \overset{\mathsf{Set}}{\times} (\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_3) & \xrightarrow{\mathsf{Set}} & (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_3) \\ (\quad i_1 \qquad . \qquad i_2 \quad) & \longmapsto & i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2 \end{array}$

如果我们还知道箭头 f_1，i，f_2 分别属于
$\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1$，$\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2$，$\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2'$ 那么便可知

- $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i) \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2 = f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} (i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)$，
  即箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便可获得新的函数：

- $\begin{array}{rcl} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) : (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) & \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{Set}} & (\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \\ i & \longmapsto & (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i) \end{array}$
  称作**前复合**。下图有助于形象理解：

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{c}_1 \arrow[rrd, bend left, "i:\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2"] & & \\
& \arrow[phantom, "\mathsf{c}_2{}^{(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}"] & \mathsf{c}_2 \arrow[loop right, "{}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}"] \\
\mathsf{c}_1' \arrow[uu, "f_1"] \arrow[rru, bend right, "(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i):\mathsf{c}_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2"'] & &
\end{tikzcd}
$$

- $\begin{array}{rcl} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) : (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) & \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{Set}} & (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2') \\ i & \longmapsto & (i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1) \end{array}$
  称作**后复合**。 下图有助于形象理解：

$$
\begin{tikzcd}
& & \mathsf{c}_2 \arrow[dd, "f_2"] \\
\mathsf{c}_1 \arrow[loop left, "{}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}"] \arrow[rru, bend left, "i:\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2"] \arrow[rrd, bend right, "(i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2):\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2'"'] & \arrow[phantom, "\mathsf{c}_1{}^{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)}"] & \\
& & \mathsf{c}_2'
\end{tikzcd}
$$

根据上面的定义不难得出下述结论：

- $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$
  复合运算具有**结合律**，即后面提到的**自然性**；
- $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} i) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2))$
  前复合与复合运算的关系
- $(i \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) = ((f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i) \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$
  后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。
假如 a_1 为 c_1 的全局元素则可规定

- $c_1 i = c_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i$

恒等箭头

范畴 C 内的每个对象都有恒等映射：

- ${}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} : \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1$
  $\quad c_1 \mapsto c_1$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- ${}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\circ} i = i$
  $\quad = i \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}$

此外还可以得知

- $({}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) : (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \xrightarrow{\mathsf{C}\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{Set}} (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)$
  为恒等自然变换，可以记成是 ${}_{:(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)}\mathrm{id}$；
- $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}) : (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) \xrightarrow{\mathsf{C}\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{Set}} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2)$
  为恒等自然变换，可以记成是 ${}_{:(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2)}\mathrm{id}$。

单满态以及同构

接下来给出单 / 满态和同构的定义。

- i 为**单态**当且仅当对任意 c_1'
  若有 $f_1, f_1' : \mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1$ 满足 $f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i = f_1' \overset{\mathsf{C}}{\circ} i$
  则有 $f_1 = f_1'$。详情见下图：

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{c}_1 \arrow[drr, bend left, "{i:\mathsf{c}_1\xrightarrow{\mathsf{C}}\mathsf{c}_2}"] & {} \arrow[dd, dashed, mapsto, "{\mathsf{c}_2^{(f_1\overset{\mathsf{C}}{\circ}_)}}"] & \\
 & & \mathsf{c}_2 \arrow[loop right, "{{}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}}"] \\
\mathsf{c}_1' \arrow[uu, shift right, "f_1"'] \arrow[uu, shift left, "f_1'"] \arrow[urr, bend right, "{(f_1\overset{\mathsf{C}}{\circ}i):\mathsf{c}_1'\xrightarrow{\mathsf{C}}\mathsf{c}_2}"'] & {} &
\end{tikzcd}$$

- i 为**满态**当且仅当对任意 c_2'
  若有 $f_2, f_2' : \mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2'$ 满足 $i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2 = i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2'$
  则有 $f_2 = f_2'$。详情见下图：

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[dd, dashed, mapsto, "{\mathsf{c}_1^{(_\overset{\mathsf{C}}{\circ}f_2)}}"] & \mathsf{c}_2 \arrow[dd, shift right, "f_2'"'] \arrow[dd, shift left, "f_2"] \\
\mathsf{c}_1 \arrow[loop left, "{{}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}}"] \arrow[urr, bend left, "{i:\mathsf{c}_1\xrightarrow{\mathsf{C}}\mathsf{c}_2}"] \arrow[drr, bend right, "{(i\overset{\mathsf{C}}{\circ}f_2):\mathsf{c}_1\xrightarrow{\mathsf{C}}\mathsf{c}_2'}"'] & & \\
 & {} & \mathsf{c}_2'
\end{tikzcd}$$

- i 为**同构**当且仅当存在 $i' : \mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1$
  使得 $i \overset{\mathsf{C}}{\circ} i' = {}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}$ 且 $i' \overset{\mathsf{C}}{\circ} i = {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}$。
  此时 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$ 间的关系可记作 $\mathsf{c}_1 \cong \mathsf{c}_2$。

若还知道 $i = i_1$ 且 $i_2 : \mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_3$ 则有

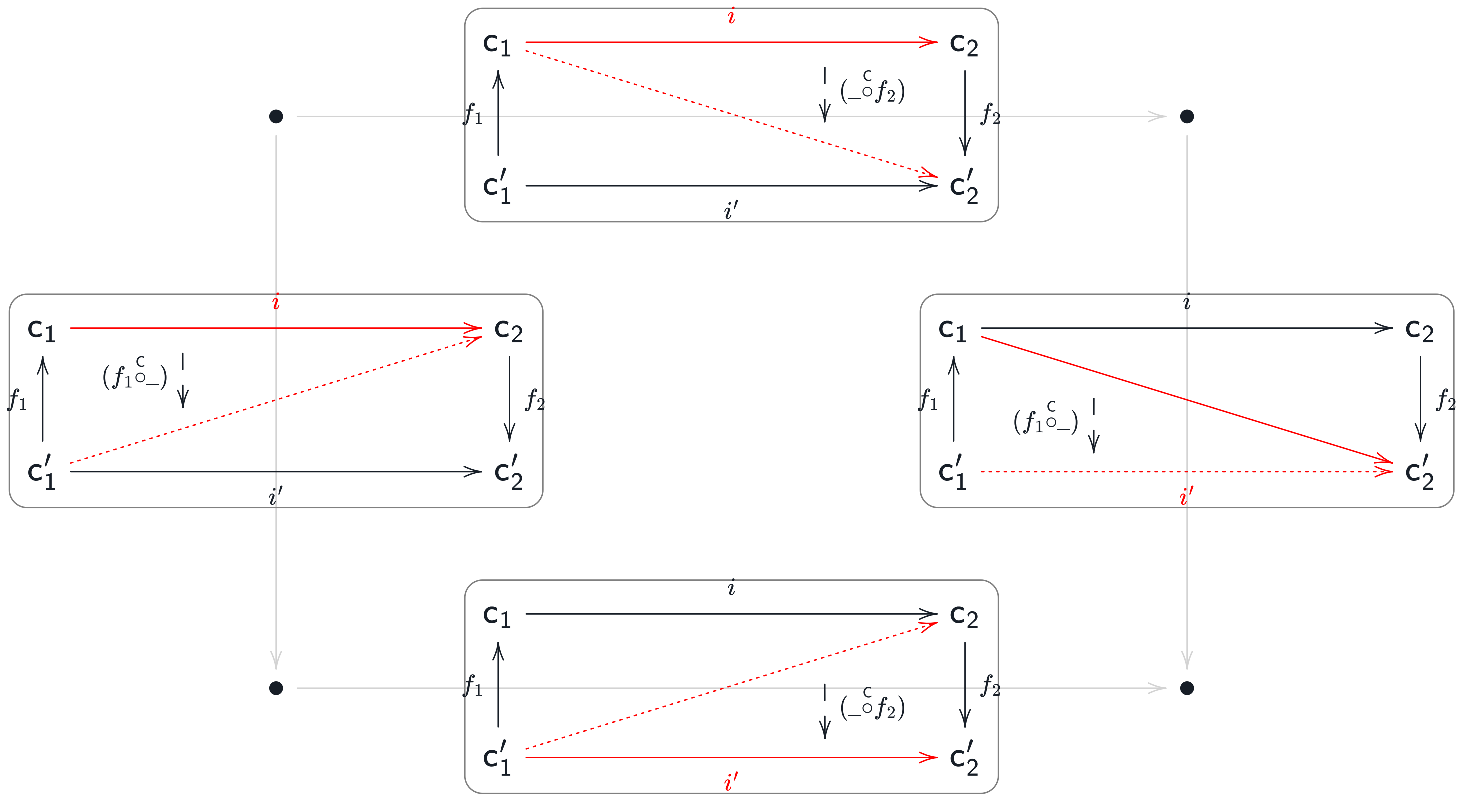
- 若 i_1，i_2 为单态
  则 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2$ 为单态；
- 若 i_1，i_2 为满态
  则 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2$ 为满态；
- 若 i_1，i_2 为同构
  则 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2$ 为同构；
- 若 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2$ 为同构
  且 i_1，i_2 中有一个为同构
  则 i_1，i_2 两者皆构成同构。

不仅如此我们还可以得出下述结论：

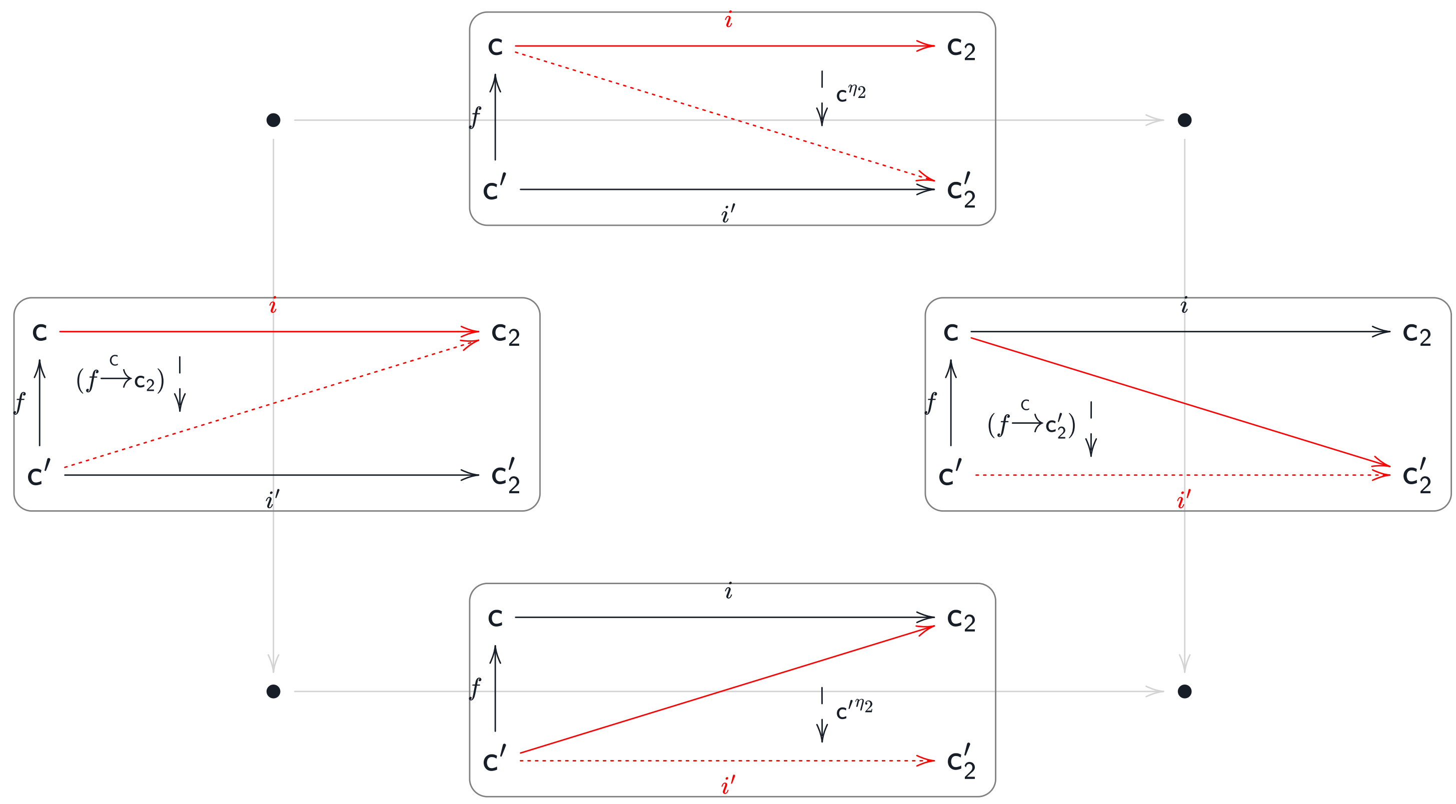
- c_1 为单态，
  由 ${}_{:\mathsf{c}_1}!$ 的唯一性可知；
- ${}_{:0}! = {}_{:1}!$ 为同构，
  因为 $0 \overset{\mathsf{C}}{\to} 0 = \{{}_{:0}\mathrm{id}\}$
  并且 $1 \overset{\mathsf{C}}{\to} 1 = \{{}_{:1}\mathrm{id}\}$

同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释 。
后面会将自然性进行进一步推广 。



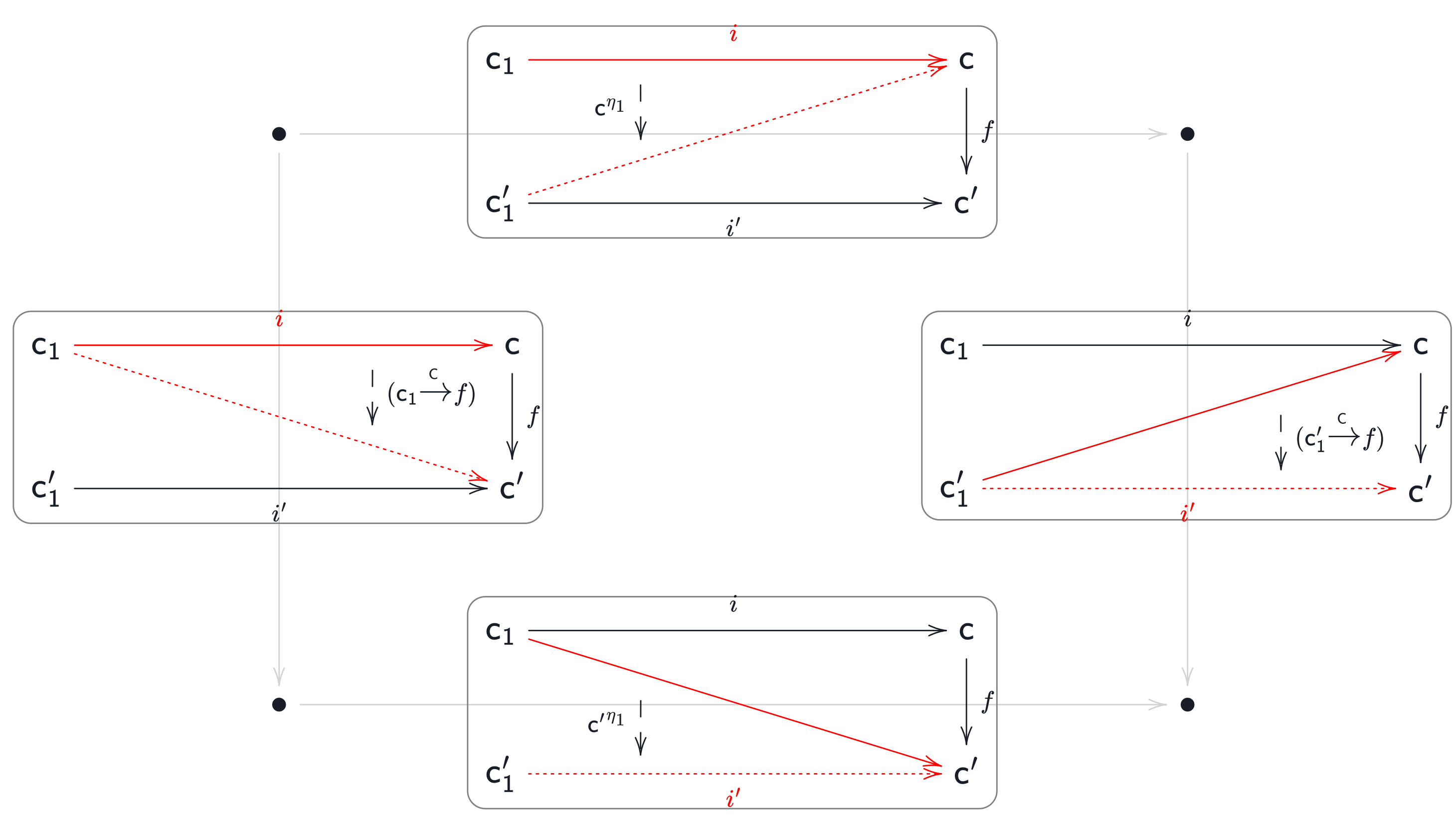
现提供自然变换 η_2 满足自然性 —— 即对
任意 C 中对象 c, c' 以及
任意 C 中映射 $f : \mathsf{c}' \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}$
都有 $(f \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2) \overset{\mathsf{Set}}{\circ} \mathsf{c}'^{\eta_2} = \mathsf{c}^{\eta_2} \overset{\mathsf{Set}}{\circ} (f \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}'_2)$:



那么我们便会有下述结论 :

- $\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\cong} \mathsf{c}'_2$ 当且仅当对任意 C 中的对象 c
  c^{η_2} 都是同构 。此时称 η_2 为**自然同构** 。

现提供自然变换 η_1 满足自然性 —— 即对
任意 C 中对象 c, c' 以及
任意 C 中映射 $f : \mathsf{c} \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}'$
都有 $(\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} f) \overset{\mathsf{Set}}{\circ} \mathsf{c}'^{\eta_1} = \mathsf{c}^{\eta_1} \overset{\mathsf{Set}}{\circ} (\mathsf{c}'_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} f)$:



那么我们便会有下述结论 :

- $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\cong} \mathsf{c}'_1$ 当且仅当对任意 C 中的对象 c
  c^{η_1} 都是同构 。此时称 η_1 为**自然同构** 。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{Set} & \\
c \xrightarrow{C} c_2 \arrow[rr, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & & c \xrightarrow{C} c_2' \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2'"] \\
c' \xrightarrow{C} c_2 \arrow[rr, "c'^{\eta_2}"'] & & c' \xrightarrow{C} c_2' \\
C \xrightarrow{C} c_2 & & C \xrightarrow{C} c_2'
\end{tikzcd}
$$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧（将 c 换成 c_2）：

$$
\begin{tikzcd}
c_2 \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & c_2 \xrightarrow{C} c_2' \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2'"] \\
c' \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c' \xrightarrow{C} c_2'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:c_2}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & {}_{:c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2}) \arrow[d, mapsto, "f \xrightarrow{C} c_2'"] \\
f \arrow[r, mapsto, "c'^{\eta_2}"'] & f \circ (\mathrm{etc})
\end{tikzcd}
$$

为了方便就用 (etc) 表示 ${}_{:c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2})$。由上图
知 $f(c'^{\eta_2}) = f \overset{C}{\circ} (\mathrm{etc})$（右图底部和右侧箭头），
故 $c'^{\eta_2} = c' \xrightarrow{C} (\mathrm{etc})$（注意到箭头 $f : c' \xrightarrow{C} c$）；
而 $c'^{\eta_2} = c' \xrightarrow{C} (\mathrm{etc}) = c'^{(\_ \overset{C}{\circ} (\mathrm{etc}))}$ 始终是同构
故 $(\mathrm{etc}) : c_2 \xrightarrow{C} c_2'$ 也是同构。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在**米田嵌入**处会详细介绍。

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{Set} & \\
c_1 \xrightarrow{C} c \arrow[rr, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & & c_1' \xrightarrow{C} c \arrow[d, "c_1' \xrightarrow{C} f"] \\
c_1 \xrightarrow{C} c' \arrow[rr, "c'^{\eta_1}"'] & & c_1' \xrightarrow{C} c' \\
c_1 \xrightarrow{C} C & & c_1' \xrightarrow{C} C
\end{tikzcd}
$$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧（将 c 换成 c_1）：

$$
\begin{tikzcd}
c_1 \xrightarrow{C} c_1 \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & c_1' \xrightarrow{C} c_1 \arrow[d, "c_1' \xrightarrow{C} f"] \\
c_1 \xrightarrow{C} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c_1' \xrightarrow{C} c'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:c_1}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1}) \arrow[d, mapsto, "c_1' \xrightarrow{C} f"] \\
f \arrow[r, mapsto, "c'^{\eta_1}"'] & (\mathrm{etc}) \circ f
\end{tikzcd}
$$

为了方便就用 (etc) 表示 ${}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$。由上图
知 $f(c'^{\eta_1}) = (\mathrm{etc}) \overset{C}{\circ} f$（右图底部和右侧箭头），
故 $c'^{\eta_1} = (\mathrm{etc}) \xrightarrow{C} c'$（注意到箭头 $f : c \xrightarrow{C} c'$）；
而 $c'^{\eta_1} = (\mathrm{etc}) \xrightarrow{C} c' = c'^{((\mathrm{etc}) \overset{C}{\circ} \_)}$ 始终是同构
故 $(\mathrm{etc}) : c_1 \xrightarrow{C} c_1'$ 也是同构。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在**米田嵌入**处会详细介绍。

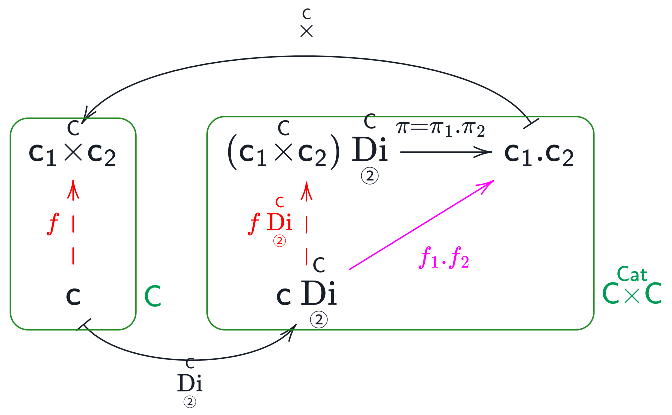
04-05 类型的和与积

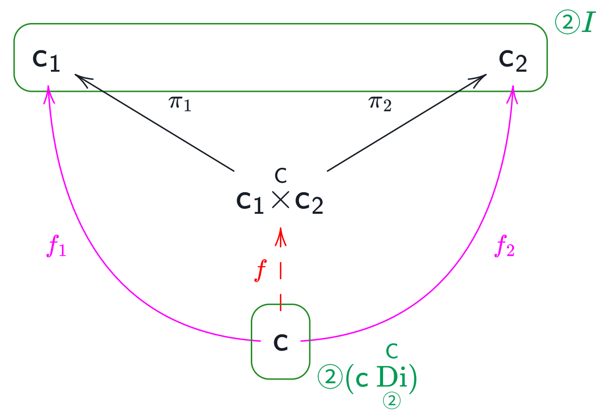
LaTeX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times}:\mathsf{C}\overset{\mathsf{Cat}}{\times}\mathsf{C}\overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow}\mathsf{C}$ 在范畴 C 中有如下性质：

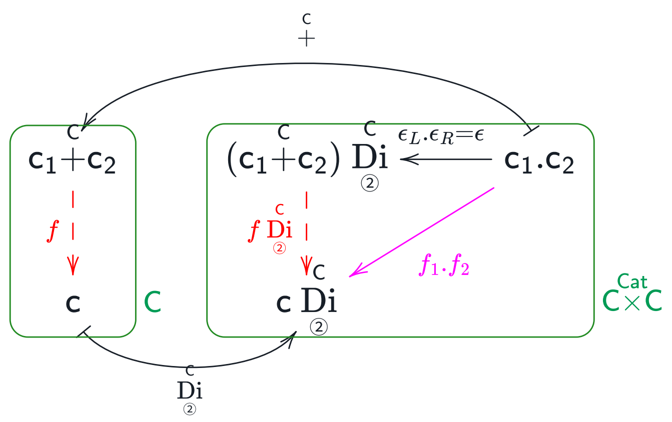
- $(\mathsf{c}\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{c}_1)\overset{\mathsf{Set}}{\times}(\mathsf{c}\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{c}_2)\overset{\mathsf{Set}}{\cong}\mathsf{c}\overset{\mathsf{C}}{\to}(\mathsf{c}_1\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{c}_2)$
—— c 为任意 C 中对象。此即为积的
泛性质，亦为**指数对乘法的分配律**。

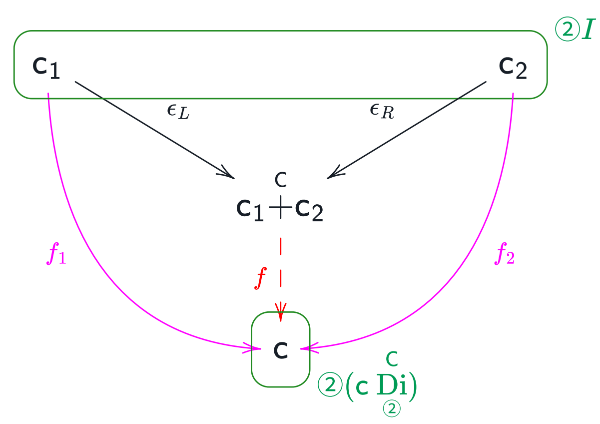




默认函子 $\overset{\mathsf{C}}{+}:\mathsf{C}\overset{\mathsf{Cat}}{\times}\mathsf{C}\overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow}\mathsf{C}$ 在范畴 C 中有如下性质：

- $(\mathsf{c}_1\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{c})\overset{\mathsf{Set}}{\times}(\mathsf{c}_2\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{c})\overset{\mathsf{Set}}{\cong}(\mathsf{c}_1\overset{\mathsf{C}}{+}\mathsf{c}_2)\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{c}$
—— c 为任意 C 中对象。此即为和的
泛性质，亦为**指数对加法的分配律**。





> **Note**
>
> 在上面的插图中
>
> - $\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}:\mathsf{C}\overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow}\mathsf{C}\overset{\mathsf{Cat}}{\times}\mathsf{C}$ 为对角函子满足
> $\mathsf{c}\longmapsto\mathsf{c}\,.\,\mathsf{c}$
> - $\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}:\mathsf{C}\overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow}(\textcircled{2}\overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow}\mathsf{C})$
> $\mathsf{c}\longmapsto$ 常值函子
> $\mathsf{c}\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}:\quad\textcircled{2}\overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow}\mathsf{C}$
> $1\longmapsto\mathsf{c}$
> $2\longmapsto\mathsf{c}$
> $f\longmapsto{}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}$
>   即为对角函子的第二种等价的定义。
>   ② 为仅含两个对象的范畴，在此则
>   作为一个指标范畴。1 和 2 分别为
>   其中的对象。
> - $I:\textcircled{2}\overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow}\mathsf{C}$ 为函子，满足
> $1\longmapsto\mathsf{c}_1$
> $2\longmapsto\mathsf{c}_2$
> - 不难看出上图中
> $\pi:I\overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow}((\mathsf{c}_1\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{c}_2)\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}})$
> $\epsilon:((\mathsf{c}_1\overset{\mathsf{C}}{+}\mathsf{c}_2)\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}})\overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow}I$
>   都构成自然变换

函子性

如何证明 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : ({}_{:\mathsf{c}_1'}\mathrm{id} \underset{\mathsf{C}}{.} {}_{:\mathsf{c}_2'}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2'}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\times$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : (f_1' \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1 \underset{\mathsf{C}}{.} f_2' \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \longmapsto f' \overset{\mathsf{C}}{\circ} f$
  —— 即函子 $\times$ 保持**箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2 \\
\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2' \arrow[u, dashed, "f"] \\
\mathsf{c}_1'' \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2'' \arrow[u, dashed, "f'"] & \mathsf{C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2)\ \overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}_{②} \arrow[r, "\pi"] & \mathsf{c}_1 . \mathsf{c}_2 \\
(\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2')\ \overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}_{②} \arrow[u, dashed, "f\ \overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}_{②}"] \arrow[r, "\pi"] & \mathsf{c}_1' . \mathsf{c}_2' \arrow[u, "f_1 . f_2"'] \\
(\mathsf{c}_1'' \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2'')\ \overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}_{②} \arrow[u, dashed, "f'\ \overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}_{②}"] \arrow[r, "\pi"] & \mathsf{c}_1'' . \mathsf{c}_2'' \arrow[u, "f_1' . f_2'"'] & \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{C} & \mathsf{C} & \mathsf{C} \\
\mathsf{c}_1 & \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2 \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & \mathsf{c}_2 \\
\mathsf{c}_1' \arrow[u, "f_1"] & \mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2' \arrow[u, dashed, "f"] \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & \mathsf{c}_2' \arrow[u, "f_2"'] \\
\mathsf{c}_1'' \arrow[u, "f_1'"] & \mathsf{c}_1'' \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2'' \arrow[u, dashed, "f'"] \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & \mathsf{c}_2'' \arrow[u, "f_2'"']
\end{tikzcd}$$

另外我们规定 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : f_1 \underset{\mathsf{C}}{.} \mathsf{c}_2 \longmapsto f_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}$
  $\overset{\mathsf{C}}{\times} : \mathsf{c}_1 \underset{\mathsf{C}}{.} f_2 \longmapsto {}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\times} f_2$

如何证明 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathsf{C}}{+} : ({}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} \underset{\mathsf{C}}{.} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $+$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{\mathsf{C}}{+} : (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1' \underset{\mathsf{C}}{.} f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2') \longmapsto f \overset{\mathsf{C}}{\circ} f'$
  —— 即函子 $\times$ 保持**箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2 \arrow[d, dashed, "f"] \\
\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2' \arrow[d, dashed, "f'"] \\
\mathsf{c}_1'' \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2'' & \mathsf{C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2)\ \overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}_{②} \arrow[d, dashed, "f\ \overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}_{②}"'] & \mathsf{c}_1 . \mathsf{c}_2 \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[d, "f_1 . f_2"] \\
(\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2')\ \overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}_{②} \arrow[d, dashed, "f'\ \overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}_{②}"'] & \mathsf{c}_1' . \mathsf{c}_2' \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[d, "f_1' . f_2'"] \\
(\mathsf{c}_1'' \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2'')\ \overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}_{②} & \mathsf{c}_1'' . \mathsf{c}_2'' \arrow[l, "\epsilon"'] & \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{C} & \mathsf{C} & \mathsf{C} \\
\mathsf{c}_1 \arrow[r, "\epsilon_R"] \arrow[d, "f_1"'] & \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2 \arrow[d, dashed, "f"] & \mathsf{c}_2 \arrow[l, "\epsilon_R"'] \arrow[d, "f_2"] \\
\mathsf{c}_1' \arrow[r, "\epsilon_L"] \arrow[d, "f_1'"'] & \mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2' \arrow[d, dashed, "f'"] & \mathsf{c}_2' \arrow[l, "\epsilon_R"'] \arrow[d, "f_2'"] \\
\mathsf{c}_1'' \arrow[r, "\epsilon_R"] & \mathsf{c}_1'' \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2'' & \mathsf{c}_2'' \arrow[l, "\epsilon_R"']
\end{tikzcd}$$

另外我们规定 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{\mathsf{C}}{+} : f_1 \underset{\mathsf{C}}{.} \mathsf{c}_2 \longmapsto f_1 \overset{\mathsf{C}}{+} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}$
  $\overset{\mathsf{C}}{+} : \mathsf{c}_1 \underset{\mathsf{C}}{.} f_2 \longmapsto {}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{+} f_2$

运算性质

对于函子 $\overset{C}{\times}$ 我们不难得知

- $c_1 \overset{C}{\times} 1 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{\times} 1 \overset{C}{\cong} c_1$
  —— 乘法具有**幺元 1** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \cdot {}_{:c}!$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$
\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{\times} 1) \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & c_1.1 \\
c \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_1 \cdot {}_{:c}!"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_1 \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "{}_{:c_1}\mathrm{id}\cdot{}_{:c_1}!"] & c_1.1 \\
c \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f' \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_1 \cdot {}_{:c}!"'] &
\end{tikzcd}
$$

- $c_1 \overset{C}{\times} c_2 \overset{C}{\cong} c_2 \overset{C}{\times} c_1$
  —— 乘法具有**交换律** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \cdot f_2$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$
\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{\times} c_2) \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & c_1.c_2 \\
c \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_1.f_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_2 \overset{C}{\times} c_1) \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & c_2.c_1 \\
c \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f' \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_2.f_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

- $(c_1 \overset{C}{\times} c_2) \overset{C}{\times} c_3 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{\times} (c_2 \overset{C}{\times} c_3)$
  —— 乘法具有**结合律** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$ 唯一决定 f 和 f' 。

$$
\begin{tikzcd}
((c_1 \overset{C}{\times} c_2) \overset{C}{\times} c_3 \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}) \arrow[r, "\pi"] & (c_1 \overset{C}{\times} c_2).c_3 \arrow[r, "\pi\cdot{}_{:c_3}\mathrm{id}"] & (c_1.c_2).c_3 \\
c_3 \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, dashed, "j.f_3"] \arrow[urr, "(f_1.f_2).f_3"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{\times} (c_2 \overset{C}{\times} c_3)) \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi"] & c_1.(c_2 \overset{C}{\times} c_3) \arrow[r, "{}_{:c_1}\mathrm{id}.\pi"] & c_1.(c_2.c_3) \\
c_3 \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, dashed, "f_1.j"] \arrow[urr, "f_1.(f_2.f_3)"'] & &
\end{tikzcd}
$$

对于函子 $\overset{C}{+}$ 我们不难得知

- $c_1 \overset{C}{+} 0 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{+} 1 \overset{C}{\cong} c_1$
  —— 加法具有**幺元 0** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \cdot {}_{:c}¡$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$
\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{+} 0) \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.0 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f_1 \cdot {}_{:c}¡"] \\
c \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_1 \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f' \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.0 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f_1 \cdot {}_{:c}¡"] \\
c \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}
$$

- $c_1 \overset{C}{+} c_2 \overset{C}{\cong} c_2 \overset{C}{+} c_1$
  —— 加法具有**交换律** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \cdot f_2$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$
\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{+} c_2) \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.c_2 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f_1.f_2"] \\
c \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_2 \overset{C}{+} c_1) \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f' \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & c_2.c_1 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f_2.f_1"] \\
c \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}
$$

- $(c_1 \overset{C}{+} c_2) \overset{C}{+} c_3 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{+} (c_2 \overset{C}{+} c_3)$
  —— 加法具有**结合律** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$ 唯一决定 f 和 f' 。

$$
\begin{tikzcd}
((c_1 \overset{C}{+} c_2) \overset{C}{+} c_3) \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & (c_1 \overset{C}{+} c_2).c_3 \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dashed, "j.f_3"] & (c_1.c_2).c_3 \arrow[l, "\epsilon\cdot{}_{:c_3}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "(f_1.f_2).f_3"] \\
c \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{+} (c_2 \overset{C}{+} c_3)) \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.(c_2 \overset{C}{+} c_3) \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dashed, "f_1.j"] & c_1.(c_2.c_3) \arrow[l, "\epsilon\cdot{}_{:c_3}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "f_1.(f_2.f_3)"] \\
c \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} & &
\end{tikzcd}
$$

幺半范畴

像刚才这样对象运算具有**单位元**以及**结合律**的范畴称作**幺半范畴**；

若上述范畴还具有**交换律**则称作**对称幺半范畴**；

很明显我们的范畴 C 是典型的**对称幺半范畴** 。

幺半群

什么是幺半群呢？有两种定义方式：

- **幺半群** M 是个范畴，其只含一个对象 m；
  其中的复合运算正好有单位元以及结合律 。
- 对象 m 属于幺半范畴 C，满足下述交换图：

$$\begin{tikzcd}
1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[r, "u \overset{\mathsf{C}}{\otimes}_{:\mathsf{m}} \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\text{左单位元 } u_l"'] & \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[d, "p"', "\text{运算结果唯一}"] & \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} 1 \arrow[l, "{}_{:\mathsf{m}}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\otimes} u"'] \arrow[dl, "u_r \text{ 右单位元}"] \\
& \mathsf{m} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m}) \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[rr, "\text{结合律 } a"] \arrow[d, "\text{先算左侧括号 } p \overset{\mathsf{C}}{\otimes}_{:\mathsf{m}} \mathrm{id}"'] & & \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} (\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m}) \arrow[d, "{}_{:\mathsf{m}}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\otimes} p \text{ 先算右侧括号}"] \\
\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[r, "\text{再算最终结果 } p"'] & \mathsf{m} & \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[l, "p \text{ 果结终最算再}"]
\end{tikzcd}$$

  其中

  - u ：$1 \overset{\mathsf{C}}{\to}$ m 其实就是 m 里面的幺元
  - u_l：$1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{m}$ 表示 u 构成左幺元
  - u_r：$\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} 1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{m}$ 表示 u 构成右幺元
  - p ：$\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{m}$ 即为 m 中的二元运算
  - a ：$(\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m}) \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} (\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m})$ 表示 m 具有结合律

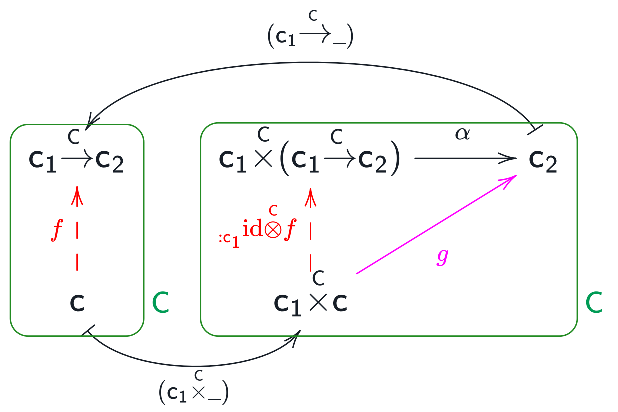
06 类型的幂

LaTeX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{\mathsf{C}}{\to} : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$ 在范畴 C 中有下述性质：

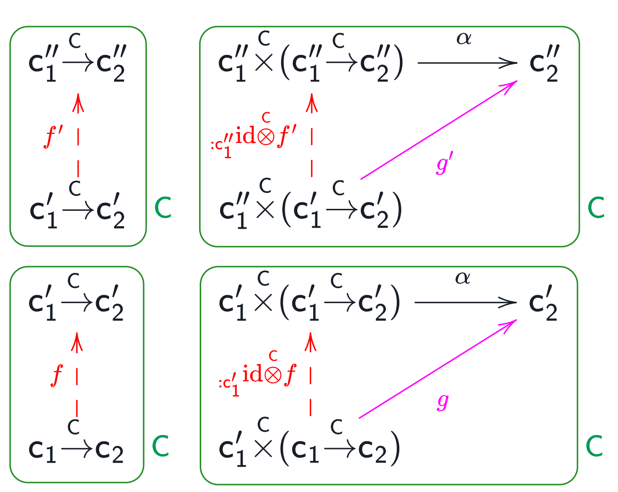
- $(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}) \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \mathsf{c} \overset{\mathsf{C}}{\to} (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} (\mathsf{c} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2)$
—— c 为任意 C 中对象。此即为幂的泛性质，亦表示了**指数加乘法之间的运算关系**。

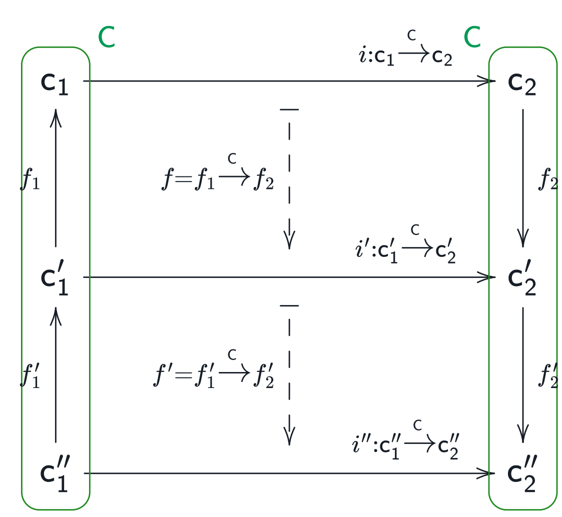


函子性

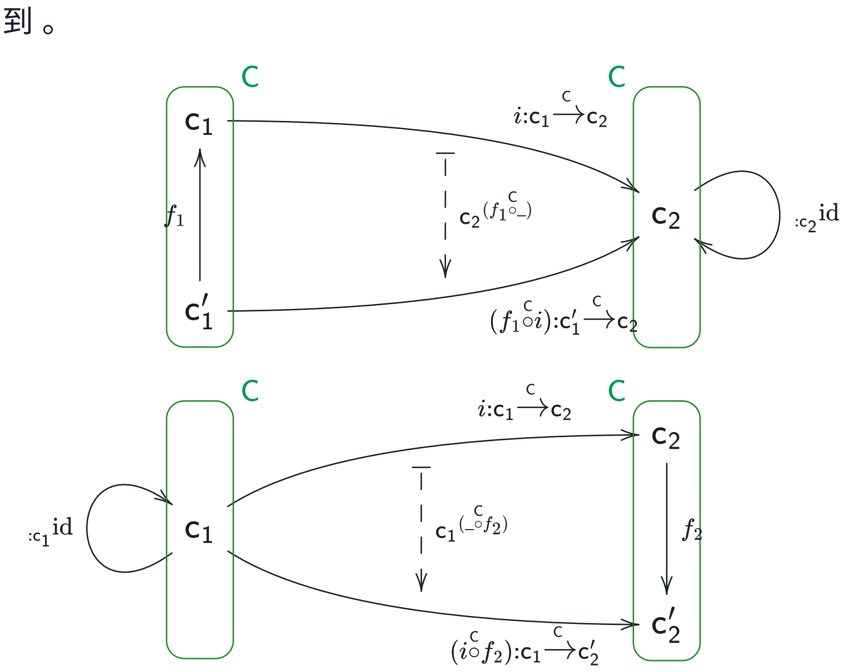
如何证明 $\overset{\mathsf{C}}{\to}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathsf{C}}{\to} : ({}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}\ .\ {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2)}\mathrm{id}$
—— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{\to}$ 能**保持恒等箭头**；
- $\overset{\mathsf{C}}{\to} : (f_1' \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1\ .\ f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2') \longmapsto f \overset{\mathsf{C}}{\circ} f'$
—— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{\to}$ **保持箭头复合运算**。
下图有助于形象理解证明过程：





下图（自上到下分别为图 1 和图 2）后面会用到。



范畴 C 内任意两对象 c_1 和 c_2 间的箭头构成一个集合 $\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$，
说明 $\xrightarrow{\mathsf{C}}$ 只能将两个对象打到一个集合；下面使 $\xrightarrow{\mathsf{C}}$ 升级为函子：
若还知道箭头 $f_1 : \mathsf{c}_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_1$ 以及 $f_2 : \mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2'$，则规定

- $(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2) : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\cancel{\times \mathsf{C}}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}$ 为函子且
  $(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2) : \mathsf{c}_1 \longmapsto (\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2)$， 并且有
  $(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2) : f_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2) = (f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}) = \mathsf{c}_2^{(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}$

  图 1 有助于理解。

  $(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2) : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\cancel{\times \mathsf{C}}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}$，
  $(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2) : \mathsf{c}_1 \longmapsto (\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2) = ({}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2) = \mathsf{c}_2^{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)}$
  $(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2) : f_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$

  图 2 有助于理解。

  > **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - $よ : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})$
  > $\mathsf{c}_2 \longmapsto (\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2)$　　构成一个函子
  > $f_2 \longmapsto (\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)$　　构成一个函子间映射，即自然变换
  >   该函子称作是**米田嵌入**。

- $(\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) : \cancel{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}$ 为函子且
  $(\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) : \mathsf{c}_2 \longmapsto (\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2)$，并且有
  $(\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) : f_2 \longmapsto (\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2) = ({}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2) = \mathsf{c}_1^{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)}$

  图 2 有助于理解。

  $(f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) : \cancel{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}$，
  $(f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) : \mathsf{c}_2 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2) = (f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}) = \mathsf{c}_2^{(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}$
  $(f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) : f_2 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$

  图 1 有助于理解。

  > **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - $尤 : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})$
  > $\mathsf{c}_1 \longmapsto (\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$　　构成一个函子
  > $f_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$　　构成一个函子间映射，即自然变换
  >   该函子戏称为**尤达嵌入**。

积闭范畴

这里插个题外话：

若范畴包含终对象，所有类型的积以及指数，则可将其称作**积闭范畴**；

若范畴包含始对象，所有类型的和，则可将其称作是**余积闭范畴**；

若范畴满足上述条件，则可称作**双积闭范畴**。

很明显我们讨论的范畴 C 就是**双积闭范畴**。