米田嵌入

根据前面的内容我们可知

- $\text{よ} : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})$

  $c_2 \longmapsto (c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) = (\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2)$　　构成一个函子，称作预层

  $f_2 \longmapsto (f_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) = (\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)$　　构成一个函子间映射，即自然变换

  构成一个完全忠实函子，该函子称作是**米田嵌入**。

证明如下：

- よ 是函子，因为
  - ${}_{:c_2}\mathrm{id}\text{よ} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:c_2}\mathrm{id}) = {}_{:(c_2\text{よ})}\mathrm{id}$
  - $(f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')\text{よ} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')$,

  由于函子具有保持对象 / 映射性质的能力，
  故便可知 $f_2\text{よ}$ 为同构当且仅当 f_2 为同构。
- よ 是完全忠实的，因为
  将协变米田引理中的 c_1 / C / F
  分别换成 c_2 / C^{op} / $(c_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_)$
  即可获得下述公式：

  $$\underbrace{((c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (c_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_))}_{\text{预层范畴的 hom-set}} \cong \underbrace{(c_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} c_2)}_{\mathsf{C}\text{ 的 hom-set}}$$

  也就是

  $$\underbrace{((c_2\text{よ}) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (c_2'\text{よ}))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{C}}{\cong} \underbrace{(c_2(c_2'\text{よ}))}_{\text{一堆元素}}$$

> ⓘ **Note**
>
> 问题来了：既然 よ 是完全忠实的，那么是否意味着
> 如果 $f_2 : c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2'$ 是同构则上式左侧部分与之对应
> 的自然变换一定就是自然同构呢？

根据前面的内容我们可知

- $\text{尤} : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})$

  $c_1 \longmapsto (c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$　　构成一个函子

  $f_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$　　构成一个函子间映射，即自然变换

  构成一个完全忠实函子，该函子称作是**尤达嵌入**。

证明如下：

- 尤 是函子，因为
  - ${}_{:c_1}\mathrm{id}\text{尤} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:c_1}\mathrm{id}) = {}_{:(c_1\text{尤})}\mathrm{id}$
  - $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1')\text{尤} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1')) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1')$,
- 尤 是完全且忠实的，因为
  将协变米田引理中的 F
  换成 $(c_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$
  即可获得下述公式：

  $$\underbrace{((c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (c_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} \_))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(c_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} c_1)}_{\text{一堆元素}}$$

  也就是

  $$\underbrace{((c_1\text{尤}) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (c_1'\text{尤}))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(c_1(c_1'\text{尤}))}_{\text{一堆元素}}$$

> ⓘ **Note**
>
> 问题来了：既然 尤 是完全忠实的，那么是否意味着
> 如果 $f_1 : c_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} c_1$ 是同构则上式左侧部分与之对应
> 的自然变换一定就是自然同构呢？