01 始对象和终对象

LaTeX Definitions are here.

泛性质

范畴由对象及其间箭头构成。本文重点
分析**余积闭范畴** C 。首先给出如下定义：

- 1 为**终对象**当且仅当对任意 C 中对象
  c 都有且仅有唯一的箭头 ${}_{:c}! : \boxed{c \overset{C}{\to} 1}$:

$$\begin{tikzcd}
1 & & \overset{C}{\underset{C}{1\boxed{(c\,\mathrm{Di})}}} \arrow[r, "{}_{:c}\mathrm{id}"] & c \arrow[lll, bend right, "\overset{C}{\underset{\text{①}}{\boxed{(c\,\mathrm{Di})}}}"'] \\
c \arrow[u, dashed, "{}_{:c}!"] \arrow[rr, bend right, "\overset{C}{\underset{C}{\boxed{(c\,\mathrm{Di})}}}"'] & C & \overset{C}{\underset{C}{c\boxed{(c\,\mathrm{Di})}}} \arrow[u, dashed, "{}_{:c}\mathrm{id}=\boxed{{}_{:c}!\overset{C}{\underset{C}{(c\,\mathrm{Di})}}}"] \arrow[ur, "{}_{:c}\mathrm{id}"'] & \text{①}
\end{tikzcd}$$

- 0 为**始对象**当且仅当对任意 C 中对象
  c 都有且仅有唯一的箭头 ${}_{:c}¡ : \boxed{0 \overset{C}{\to} c}$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d, dashed, "{}_{:c}¡"'] & & \overset{C}{\underset{C}{0\boxed{(c\,\mathrm{Di})}}} \arrow[d, dashed, "{}_{:c}\mathrm{id}=\boxed{{}_{:c}¡\overset{C}{\underset{C}{(c\,\mathrm{Di})}}}"'] & c \arrow[l, "{}_{:c}\mathrm{id}"'] \arrow[lll, bend right, "\overset{C}{\underset{\text{①}}{\boxed{(0\,\mathrm{Di})}}}"'] \arrow[dl, "{}_{:c}\mathrm{id}"] \\
c \arrow[rr, bend right, "\overset{C}{\underset{C}{\boxed{(c\,\mathrm{Di})}}}"'] & C & \overset{C}{\underset{C}{c\boxed{(c\,\mathrm{Di})}}} & \text{①}
\end{tikzcd}$$

> **Note**
>
> - $\underset{\text{①}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} : \boxed{C \xrightarrow{\mathrm{Cat}} \boxed{(\text{①} \xrightarrow{\mathrm{Cat}} C)}}$
>
> $c \longmapsto$ 常值函子
>
> $\underset{\text{①}}{\overset{C}{\boxed{c\,\mathrm{Di}}}} : \boxed{(\text{①} \xrightarrow{\mathrm{Cat}} C)}$
>
> $1 \longmapsto c$
>
> $\boxed{f} \longmapsto {}_{:c}\mathrm{id}$
>
>   ① 为仅含单个函子的范畴，1 为其中的对象；
>   仅含有单个对象的范畴可被等价地视作为 ①。

若范畴 C 中真的含有 0 和 1 分别作为
始对象和终对象 则根据上述信息可知

- 形如 $\boxed{1 \overset{C}{\to} 1}$ 的箭头
  只有一个，即 ${}_{:1}\mathrm{id}$；
- 形如 $\boxed{0 \overset{C}{\to} 0}$ 的箭头
  只有一个，即 ${}_{:0}\mathrm{id}$；

元素与全局元素

对任意对象 c_1, c_1', etc , c_2, c_2', etc , c_3
及任意的映射 $\boxed{j}$ 我们进行如下的规定：

- $\boxed{j}$ 为 c_2 的**元素**当且仅当
  $\boxed{\overset{C}{\boxed{j}}\,\mathrm{tar}} = c_2$;
- i 为 c_1 的**全局元素**当且仅当
  $\boxed{\overset{C}{\boxed{j}}\,\mathrm{tar}} = c_1$ 且 $\boxed{\overset{C}{\boxed{j}}\,\mathrm{src}} = 1$
- i 不存在仅当
  $\boxed{\overset{C}{\boxed{j}}\,\mathrm{tar}} = 0$ 。

> **Note**
>
> 其他范畴中刚才的断言未必成立。

02-03 范畴当中的箭头

LaTeX Definitions are here.

沿用上一节提到的自由变量。我们规定：

- $c_1 \xrightarrow{C} c_2 =$
  所有从 c_1 射向 c_2 的箭头构成的集。

> **Note**
>
> 上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
> 其他范畴里 $c_1 \xrightarrow{C} c_2$ 未必构成集。

范畴 C 中特定的箭头可以进行复合运算：

- $$\begin{aligned} \overset{C}{\circ} : (c_1 \xrightarrow{C} c_2) \overset{Set}{\times} (c_2 \xrightarrow{C} c_3) &\xrightarrow{Set} (c_1 \xrightarrow{C} c_3) \\ (\quad j_1 \quad . \quad j_2 \quad) &\longmapsto (j_1 \overset{C}{\circ} j_2) \end{aligned}$$

如果我们还知道箭头 f_1，j，f_2 分别属于
$c_1 \xrightarrow{C} c_1'$，$c_1 \xrightarrow{C} c_2$，$c_2 \xrightarrow{C} c_2'$ 那么便可知

- $({f_1}^{op} \overset{C}{\circ} j) \overset{C}{\circ} f_2 = {f_1}^{op} \overset{C}{\circ} (j \overset{C}{\circ} f_2)$，
  即箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便可获得新的函数：

- $$\begin{aligned} ({f_1}^{op} \overset{C}{\circ} \_) : (c_1 \xrightarrow{C} \_) &\xrightarrow{\overset{Cat}{C \longrightarrow Set}} (c_1' \xrightarrow{C} \_) \\ j &\longmapsto ({f_1}^{op} \overset{C}{\circ} j) \end{aligned}$$
  称作**前复合**。下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[rrd, bend left, "j : c_1 \xrightarrow{C} c_2", ""{name=U, below}] & & \\
& & c_2 \arrow[loop right, "{}_{:c_2}\mathrm{id}"] \\
c_1' \arrow[uu, "{f_1}^{op}"] \arrow[rru, bend right, "({f_1}^{op} \overset{C}{\circ} j) : c_1' \xrightarrow{C} c_2"', ""{name=D, above}] & &
\arrow[from=U, to=D, dashed, "c_2^{({f_1}^{op} \overset{C}{\circ} \_)}"]
\end{tikzcd}$$

- $$\begin{aligned} (\_ \overset{C}{\circ} f_2) : (\_ \xrightarrow{C} c_2) &\xrightarrow{\overset{Cat}{C \longrightarrow Set}} (\_ \xrightarrow{C} c_2') \\ j &\longmapsto (j \overset{C}{\circ} f_2) \end{aligned}$$
  称作**后复合**。 下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd}
& & c_2 \arrow[dd, "f_2"] \\
c_1 \arrow[loop left, "{}_{:c_1}\mathrm{id}"] \arrow[rru, bend left, "j : c_1 \xrightarrow{C} c_2", ""{name=U, below}] \arrow[rrd, bend right, "(j \overset{C}{\circ} f_2) : c_1 \xrightarrow{C} c_2'"', ""{name=D, above}] & & \\
& & c_2'
\arrow[from=U, to=D, dashed, "c_1^{(\_ \overset{C}{\circ} f_2)}"]
\end{tikzcd}$$

根据上面的定义不难得出下述结论：

- $({f_1}^{op} \overset{C}{\circ} \_) \overset{???}{\circ} (\_ \overset{C}{\circ} f_2) = (\_ \overset{C}{\circ} f_2) \overset{???}{\circ} ({f_1}^{op} \overset{C}{\circ} \_)$
  复合运算具有**结合律**，即后面提到的**自然性**；
- $(\_ \overset{C}{\circ} j) \overset{\overset{Cat}{C^{op} \longrightarrow Set}}{\circ} (\_ \overset{C}{\circ} f_2) = (\_ \overset{C}{\circ} (j \overset{C}{\circ} f_2))$
  前复合与复合运算的关系
- $(j \overset{C}{\circ} \_) \overset{\overset{Cat}{C \longrightarrow Set}}{\circ} ({f_1}^{op} \overset{C}{\circ} \_) = (({f_1}^{op} \overset{C}{\circ} j) \overset{C}{\circ} \_)$
  后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。
假如 a_1 为 c_1 的全局元素则可规定

- $c_1 j = c_1 \overset{C}{\circ} j$

恒等箭头

范畴 C 内的每个对象都有恒等映射：

- ${}_{:c_1}\mathrm{id} : c_1 \overset{C}{\to} c_1$
  $c_1 \mapsto c_1$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- ${}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{C}{\circ} j = j$
  $= j \overset{C}{\circ} {}_{:c_2}\mathrm{id}$

此外还可以得知

- $({}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{C}{\circ} \_) : (c_1 \overset{C}{\to} \_) \xrightarrow{C \overset{\mathrm{Cat}}{\longrightarrow} \mathrm{Set}} (c_1 \overset{C}{\to} \_)$
  为恒等自然变换，可记成是 ${}_{:(c_1 \overset{C}{\longrightarrow} \_)}^{\ \mathrm{Cat}}\mathrm{id}$；
- $(\_ \overset{C}{\circ} {}_{:c_2}\mathrm{id}) : (\_ \overset{C}{\to} c_2) \xrightarrow{C^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Set}} (\_ \overset{C}{\to} c_2)$
  为恒等自然变换，可记成是 ${}_{:(\_ \overset{C}{\longrightarrow} c_2)}\mathrm{id}$。

单满态以及同构

接下来给出单 / 满态和同构的定义。

- j 为**单态**当且仅当对任意 c_1'
  若有 $f_1, f_1' : c_1 \overset{C}{\to} c_1'$ 满足 $f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{C}{\circ} j = f_1'{}^{\mathrm{op}} \overset{C}{\circ} j$
  则有 $f_1{}^{\mathrm{op}} = f_1'{}^{\mathrm{op}}$。详情见下图：

$$\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[rrd, bend left, "j : c_1 \overset{C}{\longrightarrow} c_2"] & {} \arrow[dd, dashed, "c_2{}^{(f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{C}{\circ} \_)}"] & \\
 & & c_2 \arrow[loop right, "{}_{:c_2}\mathrm{id}"] \\
c_1' \arrow[uu, shift left, "f_1{}^{\mathrm{op}}"] \arrow[uu, shift right, "f_1'{}^{\mathrm{op}}"'] \arrow[rru, bend right, "(f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{C}{\circ} j) : c_1' \overset{C}{\longrightarrow} c_2"'] & {} &
\end{tikzcd}$$

- j 为**满态**当且仅当对任意 c_2'
  若有 $f_2, f_2' : c_2 \overset{C}{\to} c_2'$ 满足 $j \overset{C}{\circ} f_2 = j \overset{C}{\circ} f_2'$
  则有 $f_2 = f_2'$。详情见下图：

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[dd, dashed, "c_1{}^{(\_ \overset{C}{\circ} f_2)}"] & c_2 \arrow[dd, shift right, "f_2'"'] \arrow[dd, shift left, "f_2"] \\
c_1 \arrow[loop left, "{}_{:c_1}\mathrm{id}"] \arrow[rru, bend left, "j : c_1 \overset{C}{\longrightarrow} c_2"] \arrow[rrd, bend right, "(j \overset{C}{\circ} f_2) : c_1 \overset{C}{\longrightarrow} c_2'"'] & & \\
 & {} & c_2'
\end{tikzcd}$$

- i 为**同构**当且仅当存在 $j' : c_2 \overset{C}{\to} c_1$
  使得 $j \overset{C}{\circ} j' = {}_{:c_1}\mathrm{id}$ 且 $j' \overset{C}{\circ} j = {}_{:c_2}\mathrm{id}$。
  此时 c_1, c_2 间的关系可记作 $c_1 \cong c_2$。

若还知道 $j = j_1$ 且 $j_2 : c_2 \overset{C}{\to} c_3$ 则有

- 若 j_1，j_2 为单态 / 满态 / 同构
  则 $j_1 \overset{C}{\circ} j_2$ 为单态 / 满态 / 同构；
- 若 $j_1 \overset{C}{\circ} j_2$ 为同构
  且 j_1，j_2 中有一个为同构
  则 j_1，j_2 两者皆构成同构。

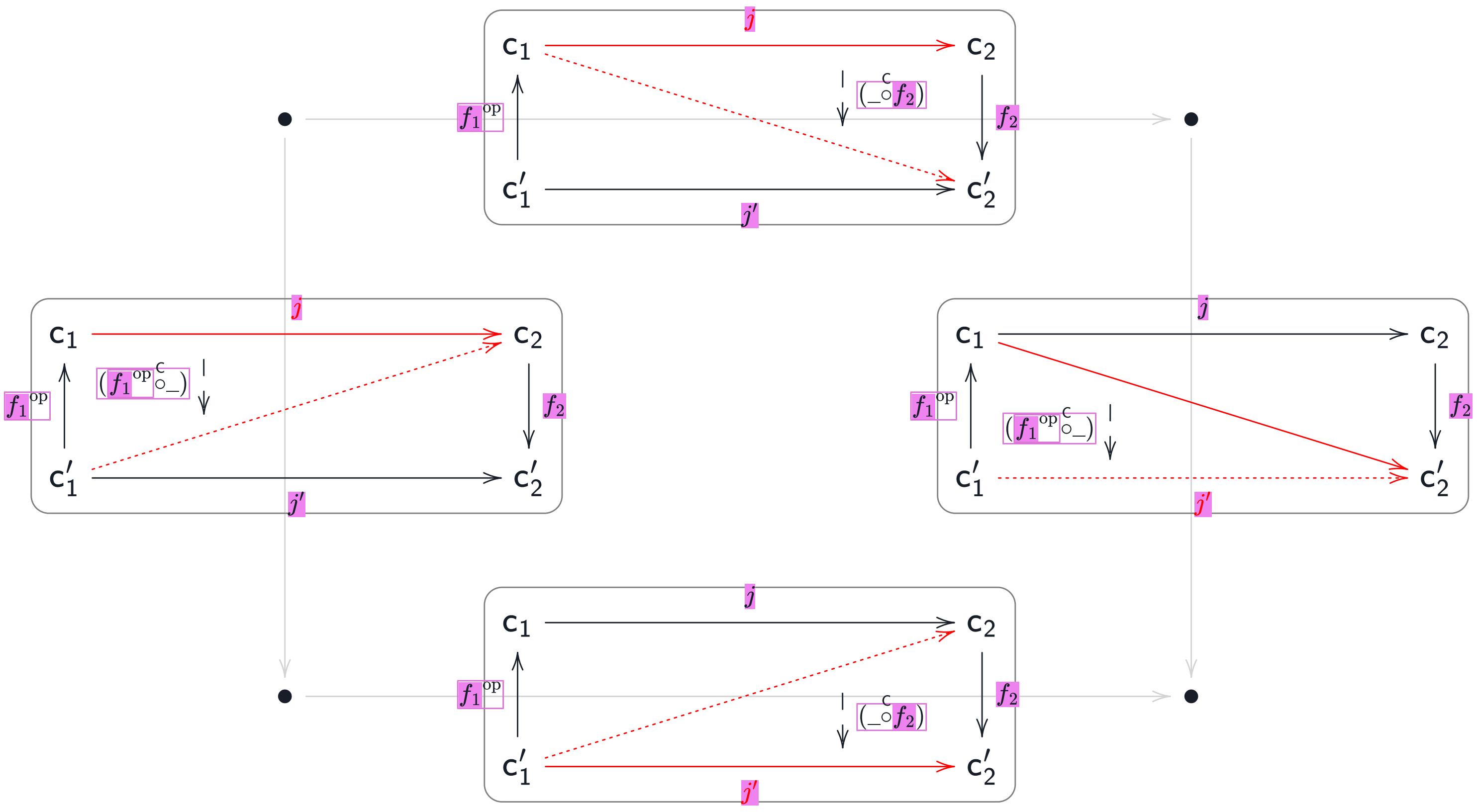
不仅如此我们还可以得出下述结论：

- c_1 为单态，
  由 ${}_{:c_1}!$ 的唯一性可知；
- ${}_{:0}! = {}_{:1}¡$ 为同构，
  因为 $0 \overset{C}{\to} 0 = \{{}_{:0}\mathrm{id}\}$
  并且 $1 \overset{C}{\to} 1 = \{{}_{:1}\mathrm{id}\}$

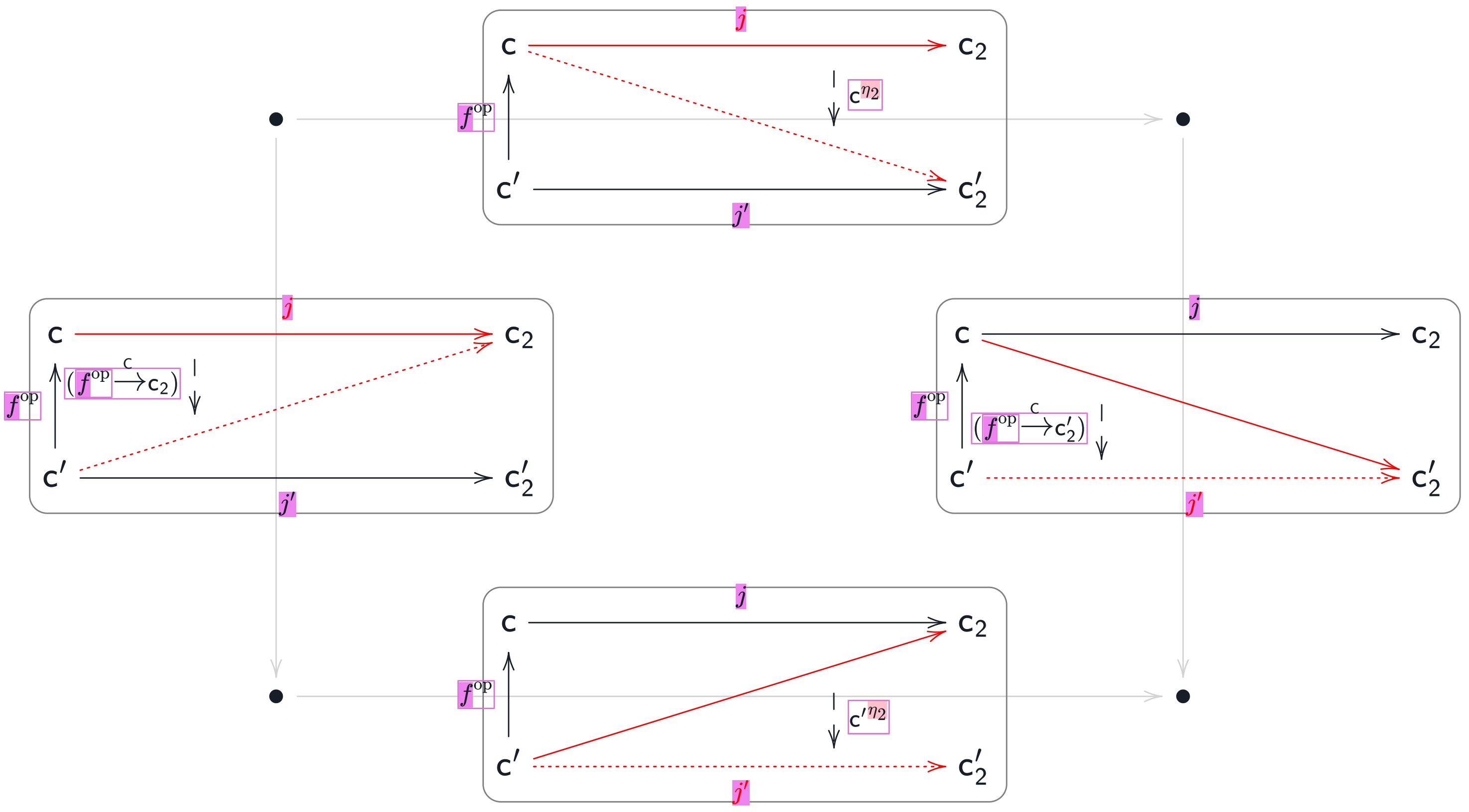
同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释 。

后面会将自然性进行进一步推广 。



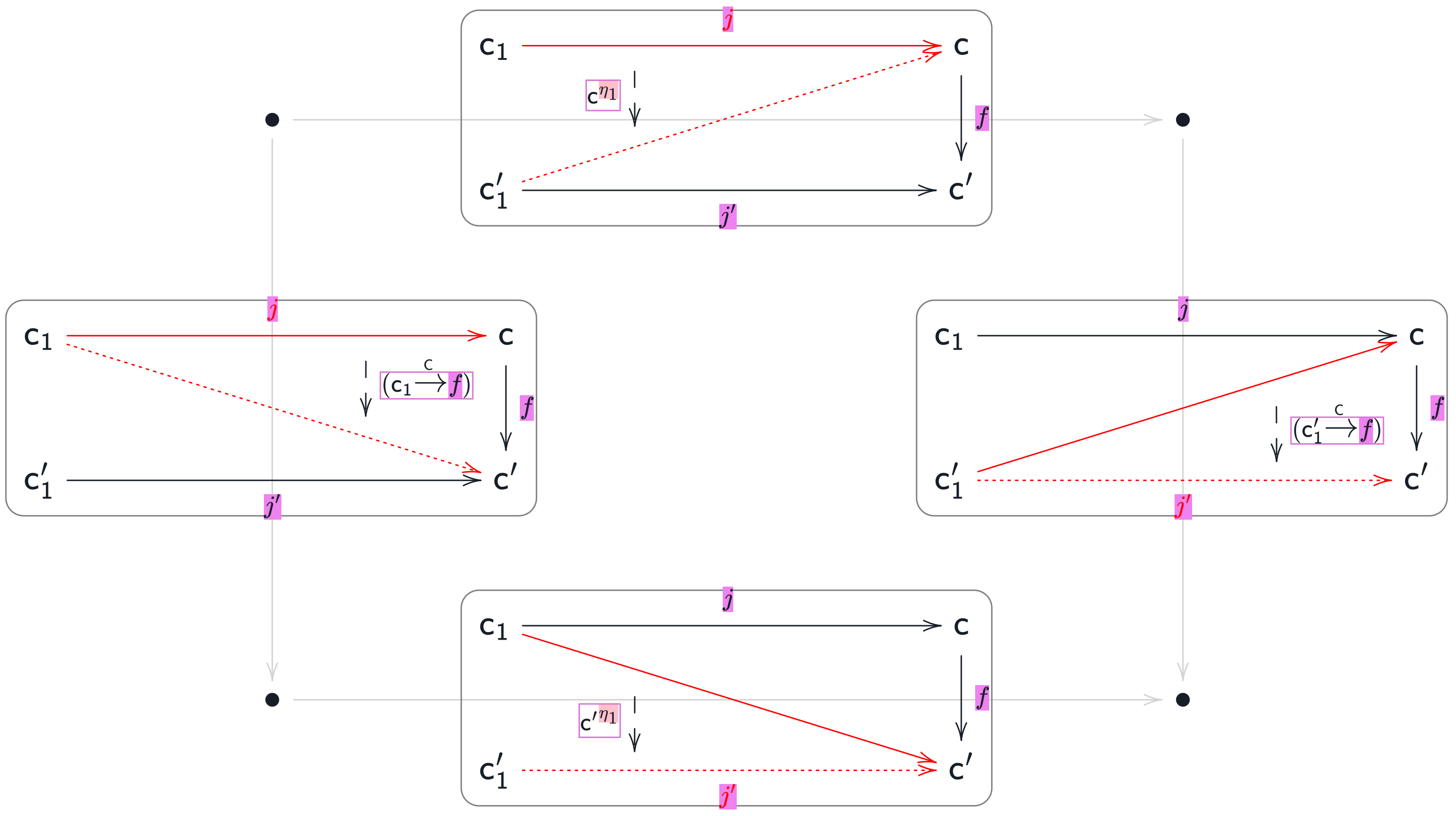
现提供自然变换 η_2 满足自然性 —— 即对
任意 C 中对象 c, c' 以及
任意 C 中映射 $f : \mathsf{c} \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}'$
都有 $(f^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2) \overset{\mathsf{Set}}{\circ} \mathsf{c}'^{\eta_2} = \mathsf{c}^{\eta_2} \overset{\mathsf{Set}}{\circ} (f^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2')$:



那么我们便会有下述结论：

- $\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\cong} \mathsf{c}_2'$ 当且仅当对任意 C 中的对象 c c^{η_2} 都是同构。此时称 η_2 为**自然同构**。

现提供自然变换 η_1 满足自然性 —— 即对
任意 C 中对象 c, c' 以及
任意 C 中映射 $f : \mathsf{c} \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}'$
都有 $(\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} f) \overset{\mathsf{Set}}{\circ} \mathsf{c}'^{\eta_1} = \mathsf{c}^{\eta_1} \overset{\mathsf{Set}}{\circ} (\mathsf{c}_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} f)$:



那么我们便会有下述结论：

- $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\cong} \mathsf{c}_1'$ 当且仅当对任意 C 中的对象 c c^{η_1} 都是同构。此时称 η_1 为**自然同构**。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{Set} & \\
c\overset{C}{\to}c_2 \arrow[rr, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f^{op}\overset{C}{\to}c_2"'] & & c\overset{C}{\to}c_2' \arrow[d, "f^{op}\overset{C}{\to}c_2'"] \\
c'\overset{C}{\to}c_2 \arrow[rr, "c'^{\eta_2}"'] & & c'\overset{C}{\to}c_2' \\
C\overset{C}{\to}c_2 & & C\overset{C}{\to}c_2'
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧 将 c 换成 c_2 ：

$$\begin{tikzcd}
c_2\overset{C}{\to}c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f^{op}\overset{C}{\to}c_2"'] & c_2\overset{C}{\to}c_2' \arrow[d, "f^{op}\overset{C}{\to}c_2'"] \\
c'\overset{C}{\to}c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c'\overset{C}{\to}c_2'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:c_2}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f^{op}\overset{C}{\to}c_2"'] & {}_{:c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2}) \arrow[d, "f^{op}\overset{C}{\to}c_2'=c_2'^{(f^{op}\overset{C}{\circ}\_)}"] \\
f^{op} \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & f^{op}\overset{C}{\circ}\mathrm{etc}
\end{tikzcd}$$

为了方便就用 etc 表示 ${}_{:c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2})$ 。由上图
知 $f^{op}(c'^{\eta_2}) = (f^{op}\overset{C}{\circ}\mathrm{etc})$（见右图底部和右侧箭头），
故 $c'^{\eta_2} = c'\overset{C}{\to}\mathrm{etc}$（注意到箭头 f^{op} : $c'\overset{C}{\to}c$）;
而 $c'^{\eta_2} = c'\overset{C}{\to}\mathrm{etc} = c'^{(\_\overset{C}{\circ}\mathrm{etc})}$ 始终是同构
故 etc : $c_2\overset{C}{\to}c_2'$ 也是同构 。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在**米田嵌入**处会详细介绍 。

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{Set} & \\
c_1\overset{C}{\to}c \arrow[rr, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1\overset{C}{\to}f"'] & & c_1'\overset{C}{\to}c \arrow[d, "c_1'\overset{C}{\to}f"] \\
c_1\overset{C}{\to}c' \arrow[rr, "c'^{\eta_1}"'] & & c_1'\overset{C}{\to}c' \\
c_1\overset{C}{\to}C & & c_1'\overset{C}{\to}C
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧 将 c 换成 c_1 ：

$$\begin{tikzcd}
c_1\overset{C}{\to}c_1 \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1\overset{C}{\to}f"'] & c_1'\overset{C}{\to}c_1 \arrow[d, "c_1'\overset{C}{\to}f"] \\
c_1\overset{C}{\to}c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c_1'\overset{C}{\to}c'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:c_1}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1\overset{C}{\to}f"'] & {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1}) \arrow[d, "c_1'\overset{C}{\to}f=c_1'^{(\_\overset{C}{\circ}f)}"] \\
f \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & \mathrm{etc}\overset{C}{\circ}f
\end{tikzcd}$$

为了方便就用 etc 表示 ${}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 。由上图
知 $f(c'^{\eta_1}) = (\mathrm{etc}\overset{C}{\circ}f)$（见右图底部和右侧箭头），
故 $c'^{\eta_1} = \mathrm{etc}\overset{C}{\to}c'$（注意到箭头 f : $c\overset{C}{\to}c'$）;
而 $c'^{\eta_1} = \mathrm{etc}\overset{C}{\to}c' = c'^{(\mathrm{etc}\overset{C}{\circ}\_)}$ 始终是同构
故 etc : $c_1\overset{C}{\to}c_1'$ 也是同构 。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在**米田嵌入**处会详细介绍 。

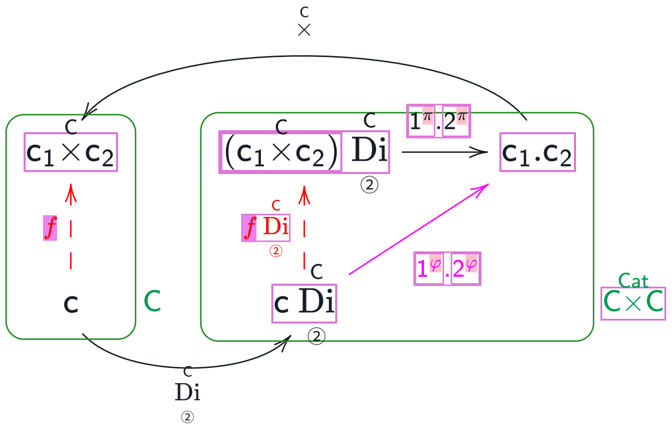
04-05 类型的和与积

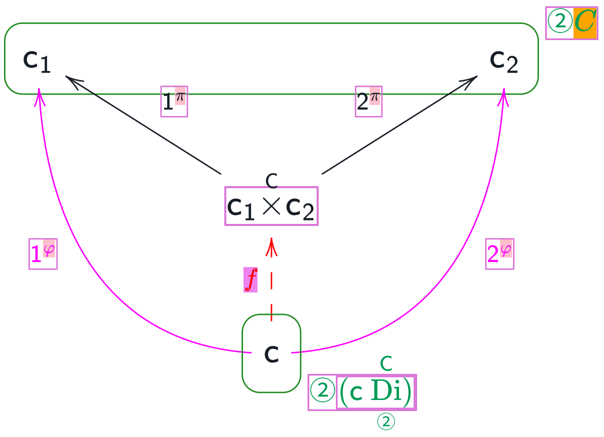
LaTeX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$: $\boxed{(\mathsf{C}\overset{\mathsf{Cat}}{\times}\mathsf{C})\overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow}\mathsf{C}}$ 在范畴 C 中有如下性质：

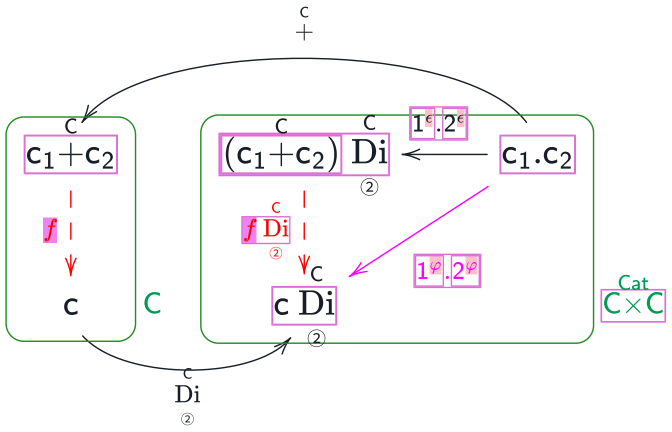
- $\boxed{\boxed{(c\overset{\mathsf{C}}{\to}c_1)}\overset{\mathsf{Set}}{\times}\boxed{(c\overset{\mathsf{C}}{\to}c_2)}\overset{\mathsf{Set}}{\cong}c\overset{\mathsf{C}}{\to}\boxed{(c_1\overset{\mathsf{C}}{\times}c_2)}}$
  —— c 为任意 C 中对象。此即为积的 **泛性质**，亦为**指数对乘法的分配律** 。

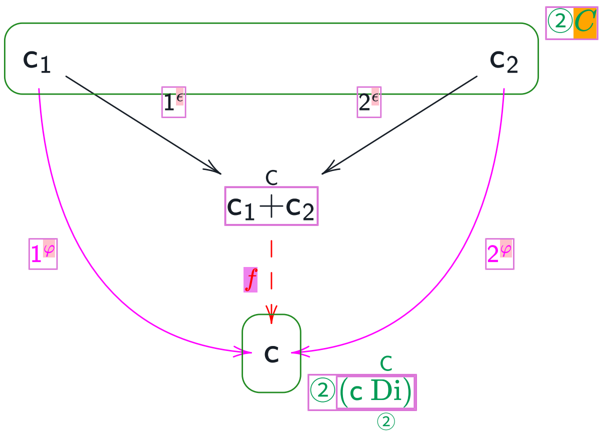




默认函子 $\overset{\mathsf{C}}{+}$: $\boxed{(\mathsf{C}\overset{\mathsf{Cat}}{\times}\mathsf{C})\overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow}\mathsf{C}}$ 在范畴 C 中有如下性质：

- $\boxed{\boxed{(c_1\overset{\mathsf{C}}{\to}c)}\overset{\mathsf{Set}}{\times}\boxed{(c_2\overset{\mathsf{C}}{\to}c)}\overset{\mathsf{Set}}{\cong}\boxed{(c_1\overset{\mathsf{C}}{+}c_2)}\overset{\mathsf{C}}{\to}c}$
  —— c 为任意 C 中对象。此即为和的 **泛性质**，亦为**指数对加法的分配律** 。





ⓘ **Note**

在上面的插图中

- $\overset{\mathsf{C}}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} : \mathsf{C}\overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow}\boxed{(\mathsf{C}\overset{\mathsf{Cat}}{\times}\mathsf{C})}$ 为对角函子满足
  $c\longmapsto\boxed{(c\,.\,c)}$
- $\overset{\mathsf{C}}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} : \mathsf{C}\overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow}\boxed{(②\overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow}\mathsf{C})}$
  $c\longmapsto$ 常值函子
  $\boxed{c\,\overset{\mathsf{C}}{\underset{②}{\mathrm{Di}}}}$: $\boxed{②\overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow}\mathsf{C}}$
  $1\longmapsto c$
  $2\longmapsto c$
  $\boxed{f}\longmapsto {}_{.c}\mathrm{id}$
  即为对角函子的第二种等价的定义。② 为仅含两个对象的范畴，在此则作为一个指标范畴。1 和 2 分别为其中的对象。
- $\boxed{C}$: $\boxed{②\overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow}\mathsf{C}}$ 为函子，满足
  $1\longmapsto c_1$
  $2\longmapsto c_2$
- 不难看出上图中
  $\boxed{\pi} : \boxed{\boxed{C}\overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow}\boxed{(c_1\overset{\mathsf{C}}{\times}c_2)}\,\overset{\mathsf{C}}{\underset{②}{\mathrm{Di}}}}$
  $\boxed{\epsilon} : \boxed{\boxed{(c_1\overset{\mathsf{C}}{+}c_2)}\,\overset{\mathsf{C}}{\underset{②}{\mathrm{Di}}}\overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow}\boxed{C}}$
  都构成自然变换。$\boxed{1^{\pi}\,.\,2^{\pi}}$ 和 $\boxed{1^{\epsilon}\,.\,2^{\epsilon}}$ 可分别视作是 π 和 ϵ。

函子性

如何证明 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : \boxed{({}_{:\mathsf{c}_1'}\mathrm{id}\ .\ {}_{:\mathsf{c}_2'}\mathrm{id})} \longmapsto {}_{:\boxed{(\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2')}}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\times$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : \boxed{(\boxed{1^{\varphi'} \overset{\mathsf{C}}{\circ} 1^{\varphi}}\ .\ \boxed{2^{\varphi'} \overset{\mathsf{C}}{\circ} 2^{\varphi}})} \longmapsto \boxed{(f' \overset{\mathsf{C}}{\circ} f)}$
  —— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 保持**箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2 \\
\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2' \arrow[u, dashed, "f"] \\
\mathsf{c}_1'' \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2'' \arrow[u, dashed, "f'"] & \mathsf{C}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2)\ \underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "1^{\pi}.2^{\pi}"] & \mathsf{c}_1.\mathsf{c}_2 \\
(\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2')\ \underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\ \underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[r, "1^{\pi}.2^{\pi}"] & \mathsf{c}_1'.\mathsf{c}_2' \arrow[u, "1^{\varphi}.2^{\varphi}"'] \\
(\mathsf{c}_1'' \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2'')\ \underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f'\ \underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[r, "1^{\pi}.2^{\pi}"] & \mathsf{c}_1''.\mathsf{c}_2'' \arrow[u, "1^{\varphi'}.2^{\varphi'}"'] & \overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C} \times \mathsf{C}}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} & \mathsf{C} & \mathsf{C} \\
\mathsf{c}_1 & \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2 \arrow[l, "1^{\pi}"'] \arrow[r, "2^{\pi}"] & \mathsf{c}_2 \\
\mathsf{c}_1' \arrow[u, "1^{\varphi}"] & \mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2' \arrow[u, dashed, "f"'] \arrow[l, "1^{\pi}"'] \arrow[r, "2^{\pi}"] & \mathsf{c}_2' \arrow[u, "2^{\varphi}"'] \\
\mathsf{c}_1'' \arrow[u, "1^{\varphi'}"] & \mathsf{c}_1'' \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2'' \arrow[u, dashed, "f'"'] \arrow[l, "1^{\pi}"'] \arrow[r, "2^{\pi}"] & \mathsf{c}_2'' \arrow[u, "2^{\varphi'}"']
\end{tikzcd}$$

另外我们规定 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : \boxed{(1^{\varphi}\ .\ \mathsf{c}_2)} \longmapsto \boxed{(1^{\varphi} \overset{\mathsf{C}}{\times} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id})}$
  $\overset{\mathsf{C}}{\times} : \boxed{(\mathsf{c}_1\ .\ 2^{\varphi})} \longmapsto \boxed{({}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\times} 2^{\varphi})}$

如何证明 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathsf{C}}{+} : \boxed{({}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}\ .\ {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id})} \longmapsto {}_{:\boxed{(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2)}}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $+$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{\mathsf{C}}{+} : \boxed{(\boxed{1^{\varphi} \overset{\mathsf{C}}{\circ} 1^{\varphi'}}\ .\ \boxed{2^{\varphi} \overset{\mathsf{C}}{\circ} 2^{\varphi'}})} \longmapsto \boxed{(f \overset{\mathsf{C}}{\circ} f')}$
  —— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 保持**箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2 \arrow[d, dashed, "f"'] \\
\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2' \arrow[d, dashed, "f'"'] \\
\mathsf{c}_1'' \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2'' & \mathsf{C}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2)\ \underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\ \underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"'] & \mathsf{c}_1.\mathsf{c}_2 \arrow[l, "1^{\epsilon}.2^{\epsilon}"'] \arrow[d, "1^{\varphi}.2^{\varphi}"] \\
(\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2')\ \underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f'\ \underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"'] & \mathsf{c}_1'.\mathsf{c}_2' \arrow[l, "1^{\epsilon}.2^{\epsilon}"'] \arrow[d, "1^{\varphi'}.2^{\varphi'}"] \\
(\mathsf{c}_1'' \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2'')\ \underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} & \mathsf{c}_1''.\mathsf{c}_2'' \arrow[l, "1^{\epsilon}.2^{\epsilon}"'] & \overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C} \times \mathsf{C}}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} & \mathsf{C} & \mathsf{C} \\
\mathsf{c}_1 \arrow[r, "1^{\epsilon}"] \arrow[d, "1^{\varphi}"'] & \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2 \arrow[d, dashed, "f"'] & \mathsf{c}_2 \arrow[l, "2^{\epsilon}"'] \arrow[d, "2^{\varphi}"] \\
\mathsf{c}_1' \arrow[r, "1^{\epsilon}"] \arrow[d, "1^{\varphi'}"'] & \mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2' \arrow[d, dashed, "f'"'] & \mathsf{c}_2' \arrow[l, "2^{\epsilon}"'] \arrow[d, "2^{\varphi'}"] \\
\mathsf{c}_1'' \arrow[r, "1^{\epsilon}"] & \mathsf{c}_1'' \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2'' & \mathsf{c}_2'' \arrow[l, "2^{\epsilon}"']
\end{tikzcd}$$

另外我们规定 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{\mathsf{C}}{+} : \boxed{(1^{\varphi}\ .\ \mathsf{c}_2)} \longmapsto \boxed{(1^{\varphi} \overset{\mathsf{C}}{+} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id})}$
  $\overset{\mathsf{C}}{+} : \boxed{(\mathsf{c}_1\ .\ 2^{\varphi})} \longmapsto \boxed{({}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{+} 2^{\varphi})}$

运算性质

对于函子 $\overset{C}{\times}$ 我们不难得知

- $c_1 \overset{C}{\times} 1 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{\times} 1 \overset{C}{\cong} c_1$

  —— 乘法具有**幺元** 1 。

  下图有助于理解证明目标，即 $1^{\varphi} \,.\, {}_{:c}!$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
(c_1\overset{C}{\times}1)\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[rr, "1^{\pi}.2^{\pi}"] && c_1.1 \\
c\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\,\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[urr, "1^{\varphi}.{}_{:c}!"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_1\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[rr, "{}_{:c_1}\mathrm{id}.{}_{:c_1}!"] && c_1.1 \\
c\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f'\,\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[urr, "1^{\varphi}.{}_{:c}!"']
\end{tikzcd}$$

- $c_1 \overset{C}{\times} c_2 \overset{C}{\cong} c_2 \overset{C}{\times} c_1$

  —— 乘法具有**交换律** 。

  下图有助于理解证明目标，即 $1^{\varphi} \,.\, 2^{\varphi}$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
(c_1\overset{C}{\times}c_2)\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[rr, "1^{\pi}.2^{\pi}"] && c_1.c_2 \\
c\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\,\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[urr, "1^{\varphi}.2^{\varphi}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_2\overset{C}{\times}c_1)\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[rr, "1^{\pi}.2^{\pi}"] && c_2.c_1 \\
c\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f'\,\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[urr, "2^{\varphi}.1^{\varphi}"']
\end{tikzcd}$$

- $(c_1 \overset{C}{\times} c_2) \overset{C}{\times} c_3 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{\times} (c_2 \overset{C}{\times} c_3)$

  —— 乘法具有**结合律** 。

  下图有助于理解证明目标，即 $(1^{\varphi} \,.\, 2^{\varphi}) \,.\, 3^{\varphi}$ 唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
((c_1\overset{C}{\times}c_2)\overset{C}{\times}c_3)\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi"] & (c_1\overset{C}{\times}c_2).c_3 \arrow[r, "\pi.{}_{:c_3}\mathrm{id}"] & (c_1.c_2).c_3 \\
c_3\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\,\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, dotted, "\varphi.3^{\varphi}"] \arrow[urr, "(1^{\varphi}.2^{\varphi}).3^{\varphi}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_1\overset{C}{\times}(c_2\overset{C}{\times}c_3))\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi"] & c_1.(c_2\overset{C}{\times}c_3) \arrow[r, "{}_{:c_1}\mathrm{id}.\pi"] & c_1.(c_2.c_3) \\
c_3\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f'\,\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, dotted, "1^{\varphi}.\varphi"] \arrow[urr, "1^{\varphi}.(2^{\varphi}.3^{\varphi})"']
\end{tikzcd}$$

对于函子 $\overset{C}{+}$ 我们不难得知

- $c_1 \overset{C}{+} 0 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{+} 1 \overset{C}{\cong} c_1$

  —— 加法具有**幺元** 0 。

  下图有助于理解证明目标，即 $1^{\varphi} \,.\, {}_{:c}¡$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
(c_1\overset{C}{+}0)\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\,\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] && c_1.0 \arrow[ll, "1^{\epsilon}.2^{\epsilon}"'] \arrow[dll, "1^{\varphi}.{}_{:c}¡"] \\
c\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_1\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f'\,\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] && c_1.0 \arrow[ll, "1^{\epsilon}.2^{\epsilon}"'] \arrow[dll, "1^{\varphi}.{}_{:c}¡"] \\
c\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}
\end{tikzcd}$$

- $c_1 \overset{C}{+} c_2 \overset{C}{\cong} c_2 \overset{C}{+} c_1$

  —— 加法具有**交换律** 。

  下图有助于理解证明目标，即 $1^{\varphi} \,.\, 2^{\varphi}$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
(c_1\overset{C}{+}c_2)\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\,\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] && c_1.c_2 \arrow[ll, "1^{\epsilon}.2^{\epsilon}"'] \arrow[dll, "1^{\varphi}.2^{\varphi}"] \\
c\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_2\overset{C}{+}c_1)\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f'\,\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] && c_2.c_1 \arrow[ll, "1^{\epsilon}.2^{\epsilon}"'] \arrow[dll, "2^{\varphi}.1^{\varphi}"] \\
c\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}
\end{tikzcd}$$

- $(c_1 \overset{C}{+} c_2) \overset{C}{+} c_3 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{+} (c_2 \overset{C}{+} c_3)$

  —— 加法具有**结合律** 。

  下图有助于理解证明目标，即 $(1^{\varphi} \,.\, 2^{\varphi}) \,.\, 3^{\varphi}$ 唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
((c_1\overset{C}{+}c_2)\overset{C}{+}c_3)\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\,\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & (c_1\overset{C}{+}c_2).c_3 \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "\varphi.3^{\varphi}"] & (c_1.c_2).c_3 \arrow[l, "\epsilon.{}_{:c_3}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "(1^{\varphi}.2^{\varphi}).3^{\varphi}"] \\
c\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_1\overset{C}{+}(c_2\overset{C}{+}c_3))\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f'\,\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.(c_2\overset{C}{+}c_3) \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "1^{\varphi}.\varphi"] & c_1.(c_2.c_3) \arrow[l, "\epsilon.{}_{:c_3}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "1^{\varphi}.(2^{\varphi}.3^{\varphi})"] \\
c\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}
\end{tikzcd}$$

幺半范畴

像刚才这样对象运算具有**单位元**以及**结合律**的范畴称作**幺半范畴**；

若上述范畴还具有**交换律**则称作**对称幺半范畴**；

很明显我们的范畴 C 是典型的**对称幺半范畴** 。

幺半群

什么是幺半群呢？有两种定义方式：

- **幺半群** M 是个范畴，其只含一个对象 m；
  其中的复合运算正好有单位元以及结合律 。
- 对象 m 属于幺半范畴 C，满足下述交换图：

$$\begin{tikzcd}
\overset{C}{\boxed{1\times m}} \arrow[r, "\overset{C}{\boxed{u\otimes_{:m}id}}"] \arrow[dr, "\text{左单位元 } u_l"'] & \overset{C}{\boxed{m\times m}} \arrow[d, "p"', "\text{运算结果唯一}"] & \overset{C}{\boxed{m\times 1}} \arrow[l, "\overset{C}{\boxed{{}_{:m}id\otimes u}}"'] \arrow[dl, "u_r \text{ 右单位元}"] \\
& m &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\overset{C}{\boxed{(m\times m)}}\overset{C}{\times} m} \arrow[rr, "\text{结合律 } a"] \arrow[d, "\text{先算左侧括号 } \overset{C}{\boxed{p\otimes_{:m}id}}"'] & & \boxed{m\overset{C}{\times}\overset{C}{\boxed{(m\times m)}}} \arrow[d, "\overset{C}{\boxed{{}_{:m}id\otimes p}} \text{ 先算右侧括号}"] \\
\overset{C}{\boxed{m\times m}} \arrow[r, "\text{再算最终结果 } p"'] & m & \overset{C}{\boxed{m\times m}} \arrow[l, "p \text{ 果结终最算再}"]
\end{tikzcd}$$

  其中

  - u ：$\boxed{1 \overset{C}{\to} m}$ 其实就是 m 里面的幺元
  - u_l ：$\boxed{\overset{C}{\boxed{(1 \times m)}} \overset{C}{\to} m}$ 表示 u 构成左幺元
  - u_r ：$\boxed{\overset{C}{\boxed{(m \times 1)}} \overset{C}{\to} m}$ 表示 u 构成右幺元
  - p ：$\boxed{\overset{C}{\boxed{(m \times m)}} \overset{C}{\to} m}$ 即为 m 中的二元运算
  - a ：$\boxed{\boxed{\overset{C}{\boxed{(m \times m)}} \overset{C}{\times} m} \overset{C}{\to} \boxed{m \overset{C}{\times} \overset{C}{\boxed{(m \times m)}}}}$ 表示 m 具有结合律

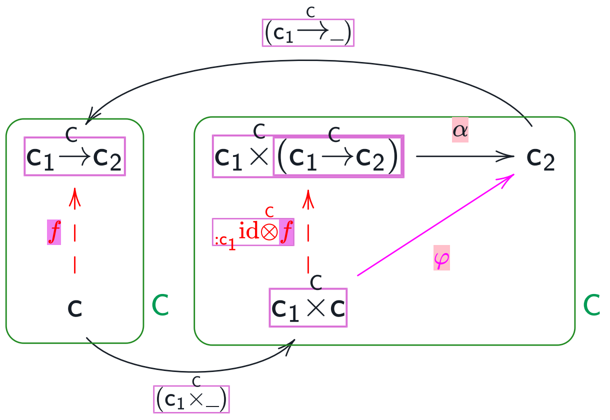
06 类型的幂

LaTeX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{C}{\to}$: $(C \overset{Cat}{\times} C) \overset{Cat}{\longrightarrow} C$ 在范畴 C 中有下述性质：

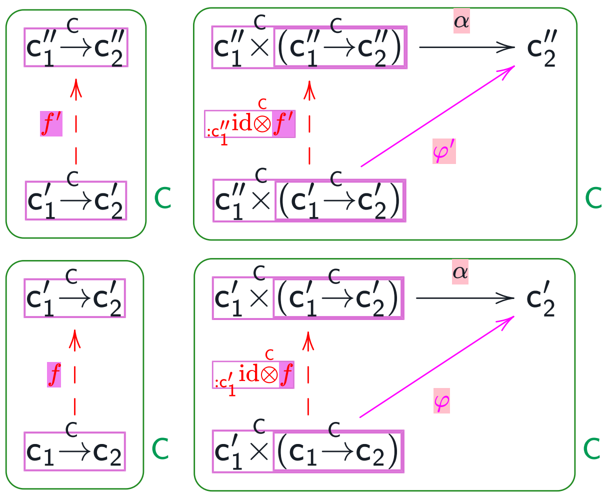
- $(c_1 \overset{C}{\times} c) \overset{C}{\to} c_2 \overset{Set}{\cong} c \overset{C}{\to} (c_1 \overset{C}{\to} c_2) \overset{Set}{\cong} c_1 \overset{C}{\to} (c \overset{C}{\to} c_2)$
  —— c 为任意 C 中对象 。此即为幂的泛性质，亦表示了**指数加乘法之间的运算关系** 。

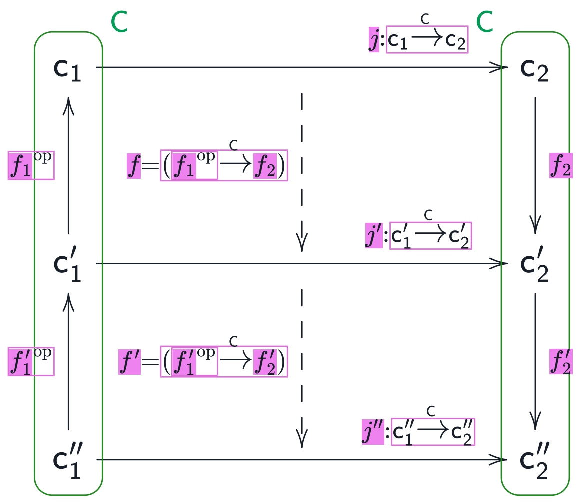


函子性

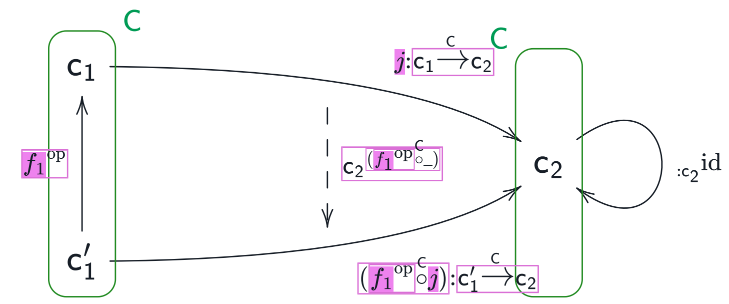
如何证明 $\overset{C}{\to}$ 构成函子呢？请看

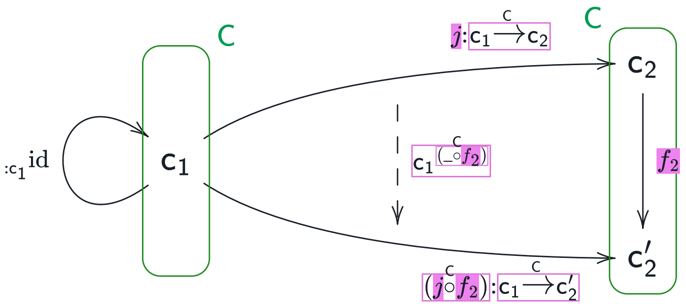
- $\overset{C}{\to} : ({}_{:c_1}\mathrm{id} \,.\, {}_{:c_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(c_1 \overset{C}{\to} c_2)}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{C}{\to}$ 能**保持恒等箭头**；
- $\overset{C}{\to} : (f_1 \overset{C^{op}}{\circ} f_1' \,.\, f_2 \overset{C}{\circ} f_2') \longmapsto (f \overset{C}{\circ} f')$
  —— 即函子 $\overset{C}{\to}$ **保持箭头复合运算** 。
  下图有助于形象理解证明过程：





下图（自上到下分别为图 1 和图 2）后面会用到 。





范畴 C 内任意两对象 c_1 和 c_2 间的箭头构成一个集合 $c_1 \overset{C}{\to} c_2$，
说明 $\overset{C}{\to}$ 只能将两个对象打到一个集合；下面使 $\overset{C}{\to}$ 升级为函子：
若还知道箭头 $f_1{}^{op} : c_1' \overset{C}{\to} c_1$ 以及 $f_2 : c_2 \overset{C}{\to} c_2'$，则规定

- $(\_ \overset{C}{\to} c_2) : C^{op} \cancel{\overset{Cat}{\times} C} \xrightarrow{Cat} Set$ 为函子且
  $(\_ \overset{C}{\to} c_2) : c \quad \longmapsto (c \quad \overset{C}{\to} c_2)$ 且对任意 $f^{op} : c' \overset{C}{\to} c$ 有
  $(\_ \overset{C}{\to} c_2) : f^{op} \longmapsto (f^{op} \overset{C}{\to} c_2) = (f^{op} \overset{C}{\to} {}_{:c_2}\mathrm{id}) = c_2{}^{(f^{op} \overset{C}{\circ} \_)}$

  图 1 有助于理解。

  $(\_ \overset{C}{\to} f_2) : C^{op} \cancel{\overset{Cat}{\times} C} \xrightarrow{Cat} Set$，
  $(\_ \overset{C}{\to} f_2) : c \quad \longmapsto (c \quad \overset{C}{\to} f_2) = ({}_{:c}\mathrm{id} \overset{C}{\to} f_2) = c_2{}^{(\_ \overset{C}{\circ} f_2)}$ 且对任意 $f^{op} : c' \overset{C}{\to} c$ 有
  $(\_ \overset{C}{\to} f_2) : f^{op} \longmapsto (f^{op} \overset{C}{\to} f_2) = (f^{op} \overset{C}{\circ} \_) \overset{???}{\circ} (\_ \overset{C}{\circ} f_2) = (\_ \overset{C}{\circ} f_2) \overset{???}{\circ} (f^{op} \overset{C}{\circ} \_)$

  图 2 有助于理解。

  > ⓘ **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - $よ : C \xrightarrow{Cat} (C^{op} \xrightarrow{Set} Set)$
  > $c_2 \longmapsto (c_2 \xrightarrow{C^{op}} \_) = (\_ \overset{C}{\to} c_2)$ 构成一个函子
  > $f_2 \longmapsto (f_2 \xrightarrow{C^{op}} \_) = (\_ \overset{C}{\to} f_2) = (\_ \overset{C}{\circ} f_2)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
  >
  >   该函子称作是**米田嵌入**。

- $(c_1 \overset{C}{\to} \_) : \cancel{C^{op} \overset{Cat}{\times}} C \xrightarrow{Cat} Set$ 为函子且
  $(c_1 \overset{C}{\to} \_) : c \longmapsto (c_1 \overset{C}{\to} c)$，且对任意 $f : c \overset{C}{\to} c'$ 有
  $(c_1 \overset{C}{\to} \_) : f \longmapsto (c_1 \overset{C}{\to} f) = ({}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{C}{\to} f) = c_1{}^{(\_ \overset{C}{\circ} f)}$

  图 2 有助于理解。

  $(f_1{}^{op} \overset{C}{\to} \_) : \cancel{C^{op} \overset{Cat}{\times}} C \xrightarrow{Cat} Set$，
  $(f_1{}^{op} \overset{C}{\to} \_) : c \longmapsto (f_1{}^{op} \overset{C}{\to} c) = (f_1{}^{op} \overset{C}{\to} {}_{:c}\mathrm{id}) = c^{(f_1{}^{op} \overset{C}{\circ} \_)}$ 且对任意 $f : c \overset{C}{\to} c'$ 有
  $(f_1{}^{op} \overset{C}{\to} \_) : f \longmapsto (f_1{}^{op} \overset{C}{\to} f) = (f_1{}^{op} \overset{C}{\circ} \_) \overset{???}{\circ} (\_ \overset{C}{\circ} f) = (\_ \overset{C}{\circ} f) \overset{???}{\circ} (f_1{}^{op} \overset{C}{\circ} \_)$

  图 1 有助于理解。

  > ⓘ **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - $尤 : C^{op} \xrightarrow{Cat} (C \xrightarrow{Set} Set)$
  > $c_1 \quad \longmapsto (c_1 \quad \overset{C}{\to} \_)$ 构成一个函子
  > $f_1{}^{op} \longmapsto (f_1{}^{op} \overset{C}{\to} \_) = (f_1{}^{op} \overset{C}{\circ} \_)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
  >
  >   该函子戏称为**尤达嵌入**。

积闭范畴

这里插个题外话：

若范畴包含终对象，所有类型的积以及指数，则可将其称作**积闭范畴**；

若范畴包含始对象，所有类型的和，则可将其称作是**余积闭范畴**；

若范畴满足上述条件，则可称作**双积闭范畴**。

很明显我们讨论的范畴 C 就是**双积闭范畴**。

07 递归类型

LaTeX Definitions are here.

08-09 函子与自然变换

LaTeX Definitions are here.

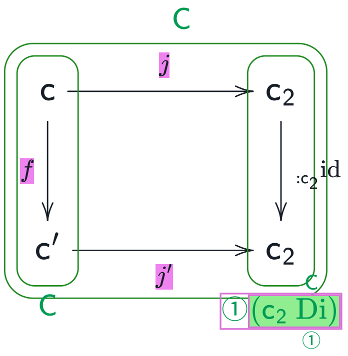
一些特殊的范畴

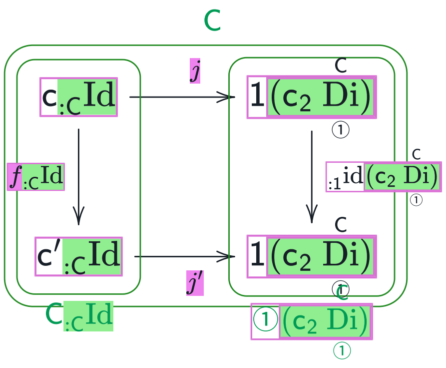
现在规定几种特殊的范畴 。

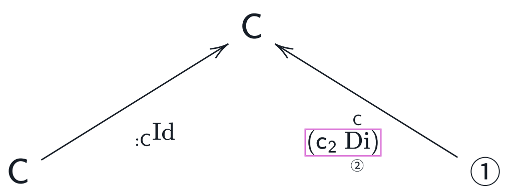
- **离散范畴** : 只有对象不含箭头 (恒等箭头除外) 的范畴 。
- Set : **所有集合构成的范畴** , 为局部小范畴 , 满足
  - Set 中对象为任意集合 ;
  - Set 中箭头为集合间映射 。
- Cat : **所有范畴构成的范畴** , 满足
  - Cat 中任何对象都构成一个范畴 ;
  - Cat 中任何箭头都构成一个函子 。

若 C , D 为 Cat 中对象 , 则 :

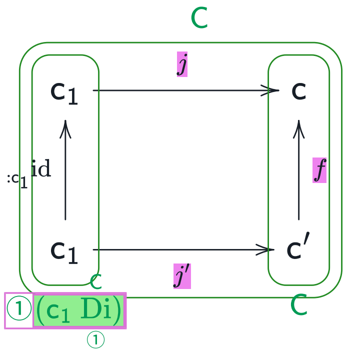
- C^{op} : **反范畴** , 满足
  - C^{op} 中对象皆形如 c ,
    c 为任意 C 中的对象 ;
  - C^{op} 中箭头皆形如 $j^{\mathrm{op}} : \mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}{\longrightarrow} \mathsf{c}_1$,
    $j : \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2$ 可为任意 C 中的箭头 。
- $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{D}$: **积范畴** , 满足
  - $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{D}$ 中对象皆形如 $\mathsf{c} \,.\, \mathsf{d}$,
    c , d 分别为任意 C , D 中的对象 ;
  - $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{D}$ 中箭头皆形如 $j \,.\, k$,
    j , k 分别为任意 C , D 中的箭头 。
- $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{D}$: **所有 C 到 D 的函子的范畴** , 满足
  - $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{D}$ 中任何对象
    都是 C 到 D 的函子 ;
  - $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{D}$ 中任何箭头
    都是函子间自然变换 。
- C/c : **俯范畴** , 这里 c 为任意 C 中对象 ; 满足
  - C/c_2 中对象皆形如 $\cancel{\mathsf{c} \,.\, 1} \,.\, j$, 其中 c 和
    $j : \mathsf{c} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2$ 分别为 C 中任意的对象和箭头 ;
  - c_2/C 中箭头皆形如 $f\,\cancel{.\ {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}}$ 且满足下述交换图 , 其中
    c , c′ 为 C 中任意对象且 f , j , j' 为 C 中任意箭头 ; TODO

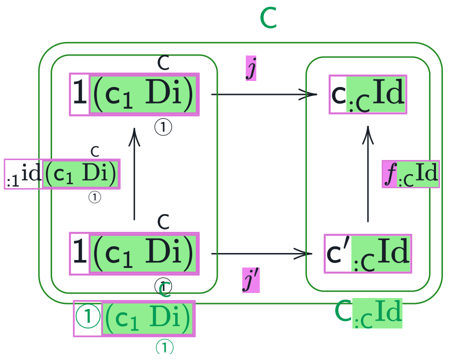


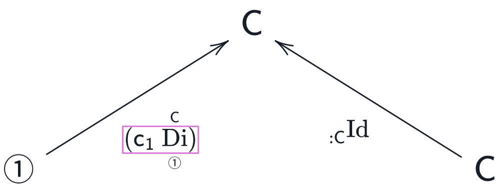




- c_1/C : **仰范畴** , 这里 c 为任意 C 中对象 ; 满足
  - c_1/C 中对象皆形如 $\cancel{1 \,.\, \mathsf{c}} \,.\, j$, 其中 c 和
    $j : \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$ 分别为 C 中任意的对象和箭头 ;
  - C/c_1 中箭头皆形如 $\cancel{{}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}\ .}\ f$ 且满足下述交换图 , 其中
    c , c′ 为 C 中任意对象且 f , j , j' 为 C 中任意箭头 ; TODO







函子

接下来我们来提供函子的正式定义：

- $F : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为**函子**当且仅当
    - 对任意 C 中对象 c，$\mathsf{c}F$ 为
      D 中对象且 ${}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}F = {}_{:\mathsf{c}F}\mathrm{id}$；
    - 对任意 C 中箭头 $j_1 : \mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 和 $j_2 : \mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_3$，
      始终都有等式 $(j_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} j_2)F = j_1F \overset{\mathsf{D}}{\circ} j_2F$ 成立。

若已确信 $F : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为函子且
还知 C 中有对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$
以及 C 中有箭头 $j : \mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 则

- 若 j 为单态 / 满态 / 同构
  则 jF 为单态 / 满态 / 同构；
- 若 jF 为同构
  则 j 为同构。

> ⓘ **Note**
>
> 不难发现函子具有保持
> 对象 / 态射性质的能力。

函子的复合运算

若还知道 $G : \mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$ 为函子则

- $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$
  也构成一个函子。

恒等函子

对于函子我们也有恒等映射，即：

- $${}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id} \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} F = F$$
  $$= F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id}$$

忠实，完全和本质满函子

若 C，D，E 皆为**局部小范畴**，则

- F **是忠实的**当且仅当对任意 C 中的对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$，
  $\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 与 $\mathsf{c}_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}_2F$ 之间始终都存在单射；
- F **是完全的**当且仅当对任意 C 中的对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$，
  $\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 与 $\mathsf{c}_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}_2F$ 之间始终都存在满射；
- F **是完全忠实的**当且仅当任意 C 中对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$，
  $\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 与 $\mathsf{c}_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}_2F$ 之间始终都存在双射。

> ⓘ **Note**
>
> 刚才提到的 " 单 / 满 / 双射 "
> 针对的都是范畴的箭头部分。

- F **是本质满的**当且仅当对任意 D 中对象 d
  都存在 C 中对象 c 使 $\mathsf{c}F \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{d}$ 之间有双射。

根据刚才的信息我们不难得知

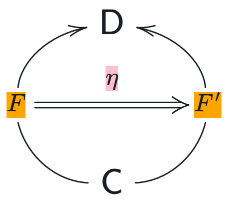
- 若 F, G 为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满函子
  则 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满 函子；
- 若 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为完全忠实函子
  且知道 G 为完全忠实函子
  则可知 F 为完全忠实函子；

自然变换

如果还知道 $F' : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为函子，那么

- $\eta : F \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\to\mathsf{D}}} F'$ 为自然变换当且仅当对任意
  C 中对象 c，c′ 始终都会有下述交换图成立：

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{D} & \\
\mathsf{c}F \arrow[rr, "\mathsf{c}^{\eta}"] \arrow[d, "fF"'] & & \mathsf{c}F' \arrow[d, "fF'"] \\
\mathsf{c}'F \arrow[rr, "\mathsf{c}'^{\eta}"'] & & \mathsf{c}'F' \\
\mathsf{C}F & & \mathsf{C}F'
\end{tikzcd}$$

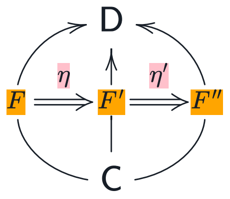


自然变换的复合

若已知 $\eta : F \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\to\mathsf{D}}} F'$ 构成自然变换且
还知道 $\eta' : F' \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\to\mathsf{D}}} F''$ 为自然变换则

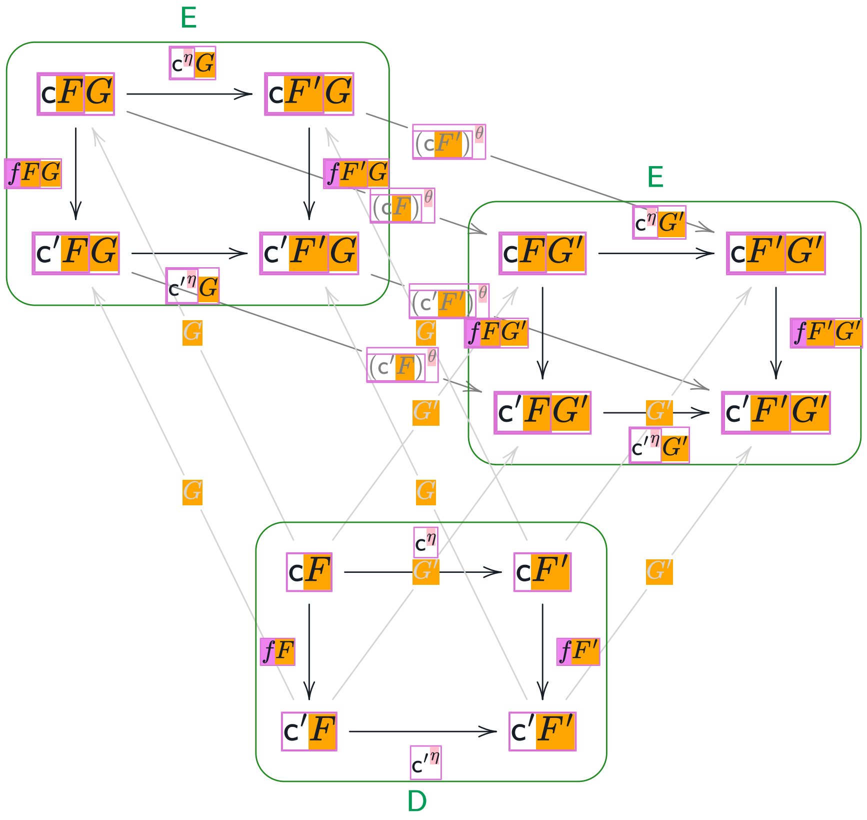
- $\eta \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\to\mathsf{D}}}{\circ} \eta' : F \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\to\mathsf{D}}} F''$ 为自然变换，
  称作 η 和 η' 的**纵复合**。

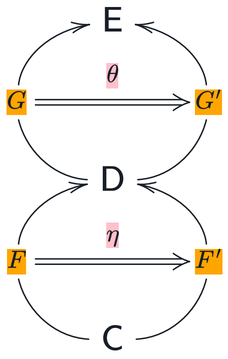
$$\begin{tikzcd}
 & & \mathsf{D} & & \\
\mathsf{c}F \arrow[rr, "\mathsf{c}^{\eta}"] \arrow[d, "fF"'] & & \mathsf{c}F' \arrow[rr, "\mathsf{c}^{\eta'}"] \arrow[d, "fF'"] & & \mathsf{c}F'' \arrow[d, "fF''"] \\
\mathsf{c}'F \arrow[rr, "\mathsf{c}'^{\eta}"'] & & \mathsf{c}'F' \arrow[rr, "\mathsf{c}'^{\eta'}"'] & & \mathsf{c}'F'' \\
\mathsf{C}F & & \mathsf{C}F' & & \mathsf{C}F''
\end{tikzcd}$$



如果还知道 $G' : \mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$ 也是个函子
及自然变换 $\theta : G \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{D}\to\mathsf{E}}} G'$ 那么便有

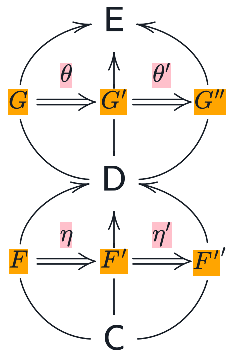
- $\eta \overset{???}{\circ} \theta : F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\to\mathsf{E}}} F' \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G'$ 为
  自然变换，称作 η 和 θ 的**横复合**。





若 $\theta' : G \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{D}\to\mathsf{E}}} G'$ 为自然变换则

- $(\eta \circ \theta) \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\to\mathsf{E}}}{\circ} (\eta' \circ \theta') = (\eta \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\to\mathsf{D}}}{\circ} \eta') \overset{???}{\circ} (\theta \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{D}\to\mathsf{E}}}{\circ} \theta')$，
  即便改变横纵复合先后顺序也不影响最终结果。

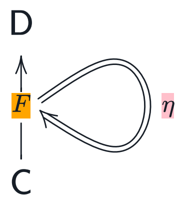


恒等自然变换

同样对于自然变换也有恒等映射 。

- ${}_{:F}\iota : F \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{D}}} F$ 为恒等自然变换当且仅当
  对范畴 C 中任意对象 c 都有下述交换图成立 :

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathsf{D} \\
\mathsf{c}F \arrow[r, "\mathsf{c}^{\eta} = {}_{:(\mathsf{c}F)}\mathrm{id}"] \arrow[d, "fF"'] & \mathsf{c}F \arrow[d, "fF"] \\
\mathsf{c}'F \arrow[r, "\mathsf{c}'^{\eta} = {}_{:(\mathsf{c}'F)}\mathrm{id}"'] & \mathsf{c}'F \\
\mathsf{C}F & \mathsf{C}F
\end{tikzcd}$$



自然同构

自然同构与你想象中的同构不太像 。

- $\eta : F \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{D}}} F'$ 为**自然同构**当且仅当
  c^{η} 总是同构 , 这里 c 为任意 C 中对象 。

  此时 F , F' 的关系可用 $F \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{D}}}{\cong} F'$ 表示

范畴等价的定义

我们用自然同构来定义范畴的等价 。

- $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\cong} \mathsf{D}$ 当且仅当
  存在函子 $F : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{D}$ 及 $F' : \mathsf{D} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$
  使 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} F' \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{C}}}{\cong} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{id}$ 并且有 $F' \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} F \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{D}\longrightarrow\mathsf{D}}}{\cong} {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{id}$ 。

反协变米田引理

若知 F_2 : $C^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}$ 则
反变米田引理的陈述如下：

- $\underbrace{((\_ \xrightarrow{C} c_2) \xrightarrow{C^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} F_2)}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(c_2 F_2)}_{\text{一堆元素}}$

反变米田引理的证明如下：

1. $\Leftarrow$: 考虑任意 $(c_2 F_2)$ 中的 etc : 根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图
   我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_2} , 于是便可构建一个完整的 η_2 。
   易知 η_2 是一个自然变换 。

Set

$$\begin{tikzcd}
c \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f^{\mathrm{op}} \xrightarrow{C} c_2"'] & c F_2 \arrow[d, "f^{\mathrm{op}} F_2"] \\
c' \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c' F_2 \\
C \xrightarrow{C} c_2 & C F_2
\end{tikzcd}$$

2. $\Rightarrow$: 考虑任意等式左侧的 η_1 : 若上述交换图成立
   则可对任意 η_1 指派 $\mathrm{etc} = {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 为 $c_2 F_2$ 中与之对应的元素；

$$\begin{tikzcd}
c_2 \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f^{\mathrm{op}} \xrightarrow{C} c_2"'] & c_2 F_2 \arrow[d, "f^{\mathrm{op}} F_2"] & & {}_{:c_2}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f^{\mathrm{op}} \xrightarrow{C} c_2"'] & {}_{:c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2}) \arrow[d, "f^{\mathrm{op}} F_2"] \\
c' \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c' F_2 & & f^{\mathrm{op}} \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & \mathrm{etc}(f^{\mathrm{op}} F_2)
\end{tikzcd}$$

为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
c_2 唯一地确定了 η_2 , 反之 η_2 也唯一确定了 c_2 。

若还知 F_1 : $C \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}$ 则
协变米田引理的陈述如下：

- $\underbrace{((c_1 \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{C \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} F_1)}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(c_1 F_1)}_{\text{一堆元素}}$

协变米田引理的证明如下：

1. $\Leftarrow$: 考虑任意 $(c_1 F_1)$ 中的 etc : 根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图
   我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_1} , 于是便可构建一个完整的 η_1 。
   易知 η_1 是一个自然变换 。

Set

$$\begin{tikzcd}
c_1 \xrightarrow{C} c \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & c F_1 \arrow[d, "f F_1"] \\
c_1 \xrightarrow{C} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c' F_1 \\
c_1 \xrightarrow{C} C & C F_1
\end{tikzcd}$$

2. $\Rightarrow$: 考虑任意等式左侧的 η_1 : 若上述交换图成立
   则可对任意 η_1 指派 $\mathrm{etc} = {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 为 $c_1 F_1$ 中与之对应的元素；

$$\begin{tikzcd}
c_1 \xrightarrow{C} c_1 \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & c_1 F_1 \arrow[d, "f F_1"] & & {}_{:c_1}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1}) \arrow[d, "f F_1"] \\
c_1 \xrightarrow{C} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c' F_1 & & f \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & \mathrm{etc}(f F_1)
\end{tikzcd}$$

为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
c_1 唯一地确定了 η_1 , 反之 η_1 也唯一确定了 c_1 。

可表和余可表函子的泛性质

接下来定义一个重要的概念：

- F_2 为**可表函子**当且仅当
  存在 C^{op} 中对象 c_2 使得
  $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) = \mathsf{c}_2\text{よ} \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\cong} F_2$ 成立，
  即 $\mathsf{c}_2\text{よ}$ 与 F_2 间存在自然同构。
  此时称 F_2 可由对象 c_2 **表出**。

同理我们也有如下对偶概念：

- F_1 为**余可表函子**当且仅当
  存在 C 中对象 c_1 使得
  $(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) = \mathsf{c}_1\text{尢} \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\cong} F_1$ 成立。
  即 $\mathsf{c}_1\text{尢}$ 与 F_1 间存在自然同构。
  此时称 F_1 可由对象 c_1 **余可表出**。

米田和尤达嵌入

根据前面的内容我们可知

- $\text{よ} : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} (\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Set}}{\longrightarrow} \mathsf{Set})$

  $\mathsf{c}_2 \longmapsto (\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}{\longrightarrow} \_) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2)$ 构成一个函子，称作预层

  $f_2 \longmapsto (f_2 \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}{\longrightarrow} \_) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)$ 构成一个函子间映射，即自然变换

  构成一个完全忠实函子，该函子称作是**米田嵌入**。

证明如下：

- よ 是函子，因为
  - ${}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}\text{よ} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}) = {}_{:(\mathsf{c}_2\text{よ})}\mathrm{id}$
  - $(f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')\text{よ} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2') = f_2\text{よ} \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}}{\circ} f_2'\text{よ}$,

  由于函子具有保持对象 / 映射性质的能力，
  故便可知 $f_2\text{よ}$ 为同构当且仅当 f_2 为同构。

- よ 是完全忠实的，因为
  将反变米田引理中的 F_2
  换成 $(\mathsf{c}_2' \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}{\longrightarrow} \_)$
  即可获得下述公式：

$$\underbrace{((\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}{\longrightarrow} \_) \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (\mathsf{c}_2' \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}{\longrightarrow} \_))}_{\text{预层范畴的 hom-set}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}_2' \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}{\longrightarrow} \mathsf{c}_2)}_{\mathsf{C}\text{ 的 hom-set}}$$

  也就是

$$\underbrace{((\mathsf{c}_2\text{よ}) \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (\mathsf{c}_2'\text{よ}))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}_2' \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}{\longrightarrow} \mathsf{c}_2)}_{\mathsf{C}\text{ 的 hom-set}} = \underbrace{(\mathsf{c}_2(\mathsf{c}_2'\text{よ}))}_{\text{一堆元素}}$$

> ⓘ **Note**
>
> 由于函子能够保持态射的性质，
> 对任意左侧集合中的自然同构
> 右侧集合也会有同构与之对应，反之亦然。
> 这也就证明了前面自然同构相关定理省略的部分。

根据前面的内容我们可知

- $\text{尤} : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} (\mathsf{C} \overset{\mathsf{Set}}{\longrightarrow} \mathsf{Set})$

  $\mathsf{c}_1 \longmapsto (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)$ 构成一个函子

  $f_1{}^{\mathrm{op}} \longmapsto (f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) = (f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$ 构成一个函子间映射，即自然变换

  构成一个完全忠实函子，该函子称作是**尤达嵌入**。

证明如下：

- 尤 是函子，因为
  - ${}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}\text{尤} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}) = {}_{:(\mathsf{c}_1\text{尤})}\mathrm{id}$
  - $(f_1 \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}{\circ} f_1')\text{尤} = ((f_1 \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}{\circ} f_1') \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) = (f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}}{\circ} (f_1'{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$,

- 尤 是完全且忠实的，因为
  将协变米田引理中的 F_1
  换成 $(\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)$
  即可获得下述公式：

$$\underbrace{((\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\to} \_))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1)}_{\text{一堆元素}}$$

  也就是

$$\underbrace{((\mathsf{c}_1\text{尤}) \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (\mathsf{c}_1'\text{尤}))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1)}_{\text{一堆元素}} = \underbrace{(\mathsf{c}_1(\mathsf{c}_1'\text{尤}))}_{\text{一堆元素}}$$

> ⓘ **Note**
>
> 由于函子能够保持态射的性质，
> 对任意左侧集合中的自然同构
> 右侧集合也会有同构与之对应，反之亦然。
> 这也就证明了前面自然同构相关定理省略的部分。