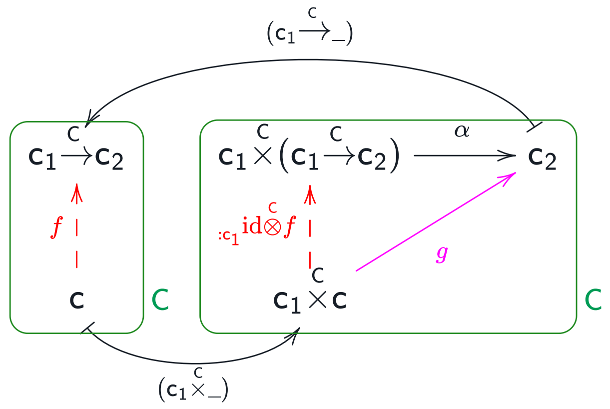
06 类型的幂

LaTeX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\xrightarrow{\mathsf{C}} : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}$ 在范畴 C 中有下述性质：

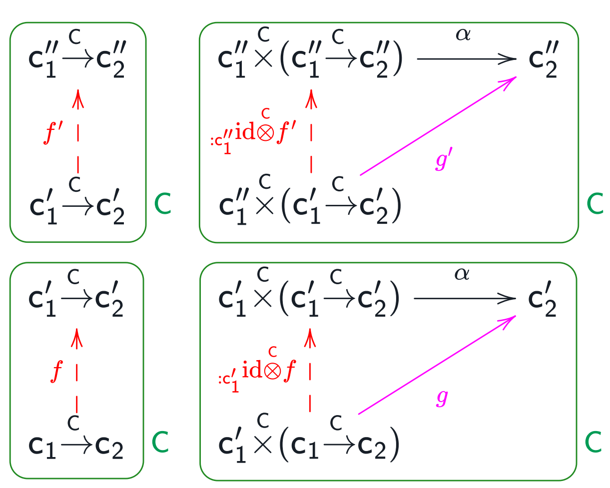
- $(c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} c) \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2 \overset{\mathsf{Set}}{\cong} c \xrightarrow{\mathsf{C}} (c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} (c \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2)$
  —— c 为任意 C 中对象。此即为幂的泛性质，亦表示了**指数加乘法之间的运算关系**。

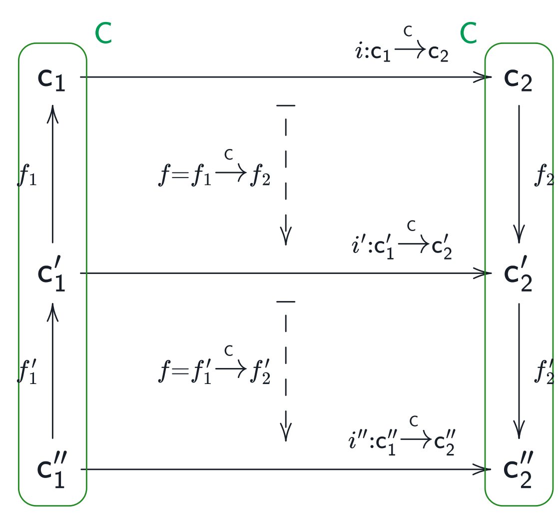


函子性

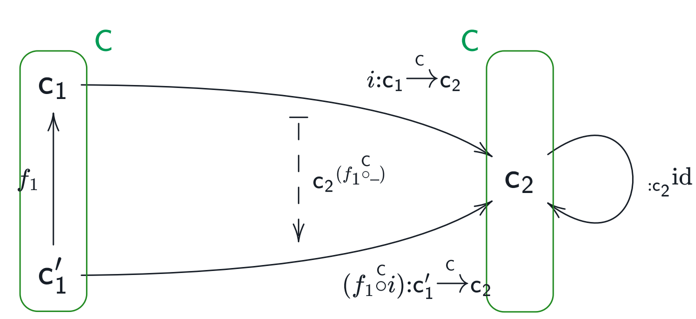
如何证明 $\xrightarrow{\mathsf{C}}$ 构成函子呢？请看

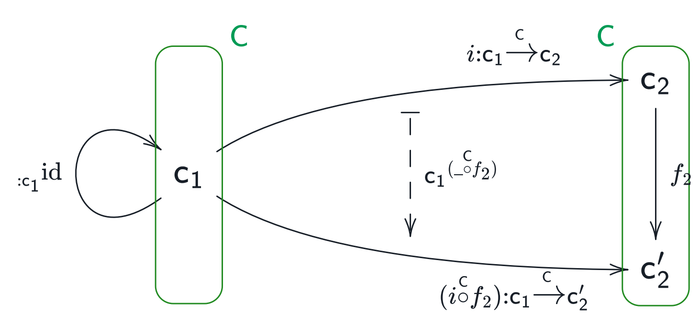
- $\xrightarrow{\mathsf{C}} : ({}_{:c_1}\mathrm{id} \underset{\mathsf{C}}{.} {}_{:c_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2)}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\xrightarrow{\mathsf{C}}$ 能**保持恒等箭头**；
- $\xrightarrow{\mathsf{C}} : (f_1' \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1 \underset{\mathsf{C}}{.} f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2') \longmapsto f \overset{\mathsf{C}}{\circ} f'$
  —— 即函子 $\xrightarrow{\mathsf{C}}$ **保持箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明过程：





下图（自上到下分别为图 1 和图 2）后面会用到。





范畴 C 内任意两对象 c_1 和 c_2 间的箭头构成一个集合 $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2$，
说明 $\overset{\mathsf{C}}{\to}$ 只能将两个对象打到一个集合；下面使 $\overset{\mathsf{C}}{\to}$ 升级为函子：
若还知道箭头 $f_1 : \mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1$ 以及 $f_2 : \mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2'$，则规定

- $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\cancel{\times \mathsf{C}}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}$ 为函子且
  $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) : \mathsf{c}_1 \longmapsto (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2)$，并且有
  $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) : f_1 \longmapsto (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}) = \mathsf{c}_2{}^{(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}$

  图 1 有助于理解。

  $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\cancel{\times \mathsf{C}}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}$，
  $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) : \mathsf{c}_1 \longmapsto (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) = ({}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) = \mathsf{c}_2{}^{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)}$
  $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) : f_1 \longmapsto (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$

  图 2 有助于理解。

  > **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - $よ : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})$
  > $\mathsf{c}_2 \longmapsto (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2)$ 构成一个函子
  > $f_2 \longmapsto (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
  >   该函子称作是**米田嵌入**。

- $(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) : \cancel{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times} \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}$ 为函子且
  $(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) : \mathsf{c}_2 \longmapsto (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2)$，并且有
  $(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) : f_2 \longmapsto (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) = ({}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) = \mathsf{c}_1{}^{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)}$

  图 2 有助于理解。

  $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) : \cancel{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times} \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}$，
  $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) : \mathsf{c}_2 \longmapsto (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}) = \mathsf{c}_2{}^{(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}$
  $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) : f_2 \longmapsto (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$

  图 1 有助于理解。

  > **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - $尢 : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})$
  > $\mathsf{c}_1 \longmapsto (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)$ 构成一个函子
  > $f_1 \longmapsto (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
  >   该函子戏称为**尤达嵌入**。

积闭范畴

这里插个题外话：

若范畴包含终对象，所有类型的积以及指数，则可将其称作**积闭范畴**；

若范畴包含始对象，所有类型的和，则可将其称作是**余积闭范畴**；

若范畴满足上述条件，则可称作**双积闭范畴**。

很明显我们讨论的范畴 C 就是**双积闭范畴**。