02 范畴当中的箭头

LATEX Definitions are here.

沿用上一节提到的自由变量。我们规定：

- $c_1 \overset{C}{\to} c_2 =$
  所有从 c_1 射向 c_2 的箭头构成的集。

> ⓘ **Note**
>
> 上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
> 其他范畴里 $c_1 \overset{C}{\to} c_2$ 未必构成集。

范畴 C 中特定的箭头可以进行复合运算：

- $\begin{array}{cccccc} \overset{C}{\circ} : & (c_1 \overset{C}{\to} c_2) & \overset{Set}{\times} & (c_2 \overset{C}{\to} c_3) & \overset{Set}{\longrightarrow} & (c_1 \overset{C}{\to} c_3) \\ & (\quad i_1 & . & i_2 \quad) & \longmapsto & (i_1 \overset{C}{\circ} i_2) \end{array}$

如果我们还知道箭头 f_1，i，f_2 分别属于
$c_1' \overset{C}{\to} c_1$，$c_1 \overset{C}{\to} c_2$，$c_2 \overset{C}{\to} c_2'$ 那么便可知

- $(f_1 \overset{C}{\circ} i) \overset{C}{\circ} f_2 = f_1 \overset{C}{\circ} (i \overset{C}{\circ} f_2)$，
  即箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便可获得新的函数：

- $\begin{array}{cccc} (f_1 \overset{C}{\circ} \_) : & (c_1 \overset{C}{\to} \_) & \xrightarrow{C \overset{C}{\to} Set} & (c_1' \overset{C}{\to} \_) \\ & i & \longmapsto & (f_1 \overset{C}{\circ} i) \end{array}$
  称作**前复合**。下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[rr, bend left, "i : c_1 \overset{C}{\longrightarrow} c_2"] \arrow[drr, phantom, "\Downarrow\, c_2^{(f_1 \overset{C}{\circ} _)}"] & & c_2 \arrow[loop right, "{}_{:c_2}\mathrm{id}"] \\
c_1' \arrow[u, "f_1"] \arrow[urr, bend right, "(f_1 \overset{C}{\circ} i) : c_1' \overset{C}{\longrightarrow} c_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

- $\begin{array}{cccc} (\_ \overset{C}{\circ} f_2) : & (\_ \overset{C}{\to} c_2) & \xrightarrow{C \overset{C}{\to} Set} & (\_ \overset{C}{\to} c_2') \\ & i & \longmapsto & (i \overset{C}{\circ} f_1) \end{array}$
  称作**后复合**。 下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd}
 & & c_2 \arrow[d, "f_2"] \\
c_1 \arrow[loop left, "{}_{:c_1}\mathrm{id}"] \arrow[urr, bend left, "i : c_1 \overset{C}{\longrightarrow} c_2"] \arrow[drr, bend right, "(i \overset{C}{\circ} f_2) : c_1 \overset{C}{\longrightarrow} c_2'"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\, c_1^{(_ \overset{C}{\circ} f_2)}"] & & c_2'
\end{tikzcd}$$

根据上面的定义不难得出下述结论：

- $(f_1 \overset{C}{\circ} \_) \overset{C \overset{Cat}{\longrightarrow} Set}{\circ} (\_ \overset{C}{\circ} f_2) = (\_ \overset{C}{\circ} f_2) \overset{C \overset{Cat}{\longrightarrow} Set}{\circ} (f_1 \overset{C}{\circ} \_)$
  复合运算具有**结合律**，即后面提到的**自然性**；
- $(\_ \overset{C}{\circ} i) \overset{C \overset{Cat}{\longrightarrow} Set}{\circ} (\_ \overset{C}{\circ} f_2) = (\_ \overset{C}{\circ} (i \overset{C}{\circ} f_2))$
  前复合与复合运算的关系
- $(i \overset{C}{\circ} \_) \overset{C \overset{Cat}{\longrightarrow} Set}{\circ} (f_1 \overset{C}{\circ} \_) = ((f_1 \overset{C}{\circ} i) \overset{C}{\circ} \_)$
  后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。
假如 a_1 为 c_1 的全局元素则可规定

- $c_1 i = c_1 \overset{C}{\circ} i$

恒等箭头

范畴 C 内的每个对象都有恒等映射：

- ${}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} : \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1$
  $c_1 \mapsto c_1$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- ${}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\circ} i = i$
  $= i \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}$

此外还可以得知

- $({}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) : (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \xrightarrow{\mathsf{C}\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{Set}} (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)$
  为恒等自然变换，可以记成是 ${}_{:(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)}\mathrm{id}$；
- $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}) : (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) \xrightarrow{\mathsf{C}\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{Set}} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2)$
  为恒等自然变换，可以记成是 ${}_{:(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2)}\mathrm{id}$。

单满态以及同构

接下来给出单 / 满态和同构的定义。

- i 为**单态**当且仅当对任意 c'_1
  若有 $f_1, f'_1 : \mathsf{c}'_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1$ 满足 $f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i = f'_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i$
  则有 $f_1 = f'_1$。详情见下图：

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{c}_1 \arrow[rrd, bend left, "i:\mathsf{c}_1\overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow}\mathsf{c}_2"] & & \\
 & \arrow[d, phantom, "\Downarrow \mathsf{c}_2^{(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}"] & \mathsf{c}_2 \arrow[loop right, "{}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}"] \\
\mathsf{c}'_1 \arrow[uu, shift left, "f_1"] \arrow[uu, shift right, "f'_1"'] \arrow[rru, bend right, "(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i):\mathsf{c}'_1\overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow}\mathsf{c}_2"'] & &
\end{tikzcd}
$$

- i 为**满态**当且仅当对任意 c'_2
  若有 $f_2, f'_2 : \mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}'_2$ 满足 $i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2 = i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f'_2$
  则有 $f_2 = f'_2$。详情见下图：

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathsf{c}_2 \arrow[dd, shift right, "f'_2"'] \arrow[dd, shift left, "f_2"] \\
\mathsf{c}_1 \arrow[loop left, "{}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}"] \arrow[rru, bend left, "i:\mathsf{c}_1\overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow}\mathsf{c}_2"] \arrow[rrd, bend right, "(i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2):\mathsf{c}_1\overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow}\mathsf{c}'_2"'] & \arrow[phantom, "\Downarrow \mathsf{c}_1^{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)}"] & \\
 & & \mathsf{c}'_2
\end{tikzcd}
$$

- i 为**同构**当且仅当存在 $i' : \mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1$
  使得 $i \overset{\mathsf{C}}{\circ} i' = {}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}$ 且 $i' \overset{\mathsf{C}}{\circ} i = {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}$。
  此时 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$ 间的关系可记作 $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\cong} \mathsf{c}_2$。

若还知道 $i = i_1$ 且 $i_2 : \mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_3$ 则有

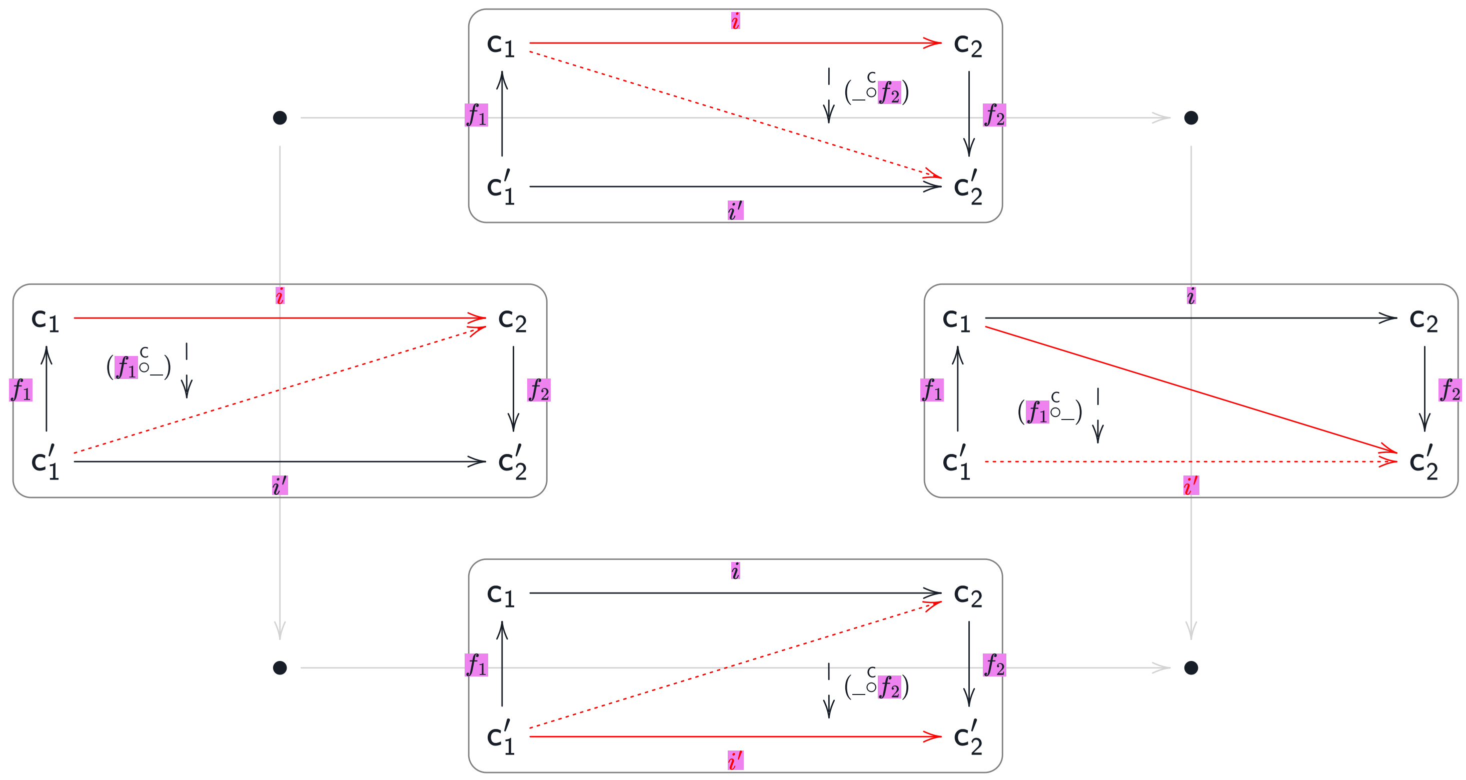
- 若 i_1, i_2 为单态
  则 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2$ 为单态；
- 若 i_1, i_2 为满态
  则 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2$ 为满态；
- 若 i_1, i_2 为同构
  则 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2$ 为同构；
- 若 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2$ 为同构
  且 i_1, i_2 中有一个为同构
  则 i_1, i_2 两者皆构成同构。

不仅如此我们还可以得出下述结论：

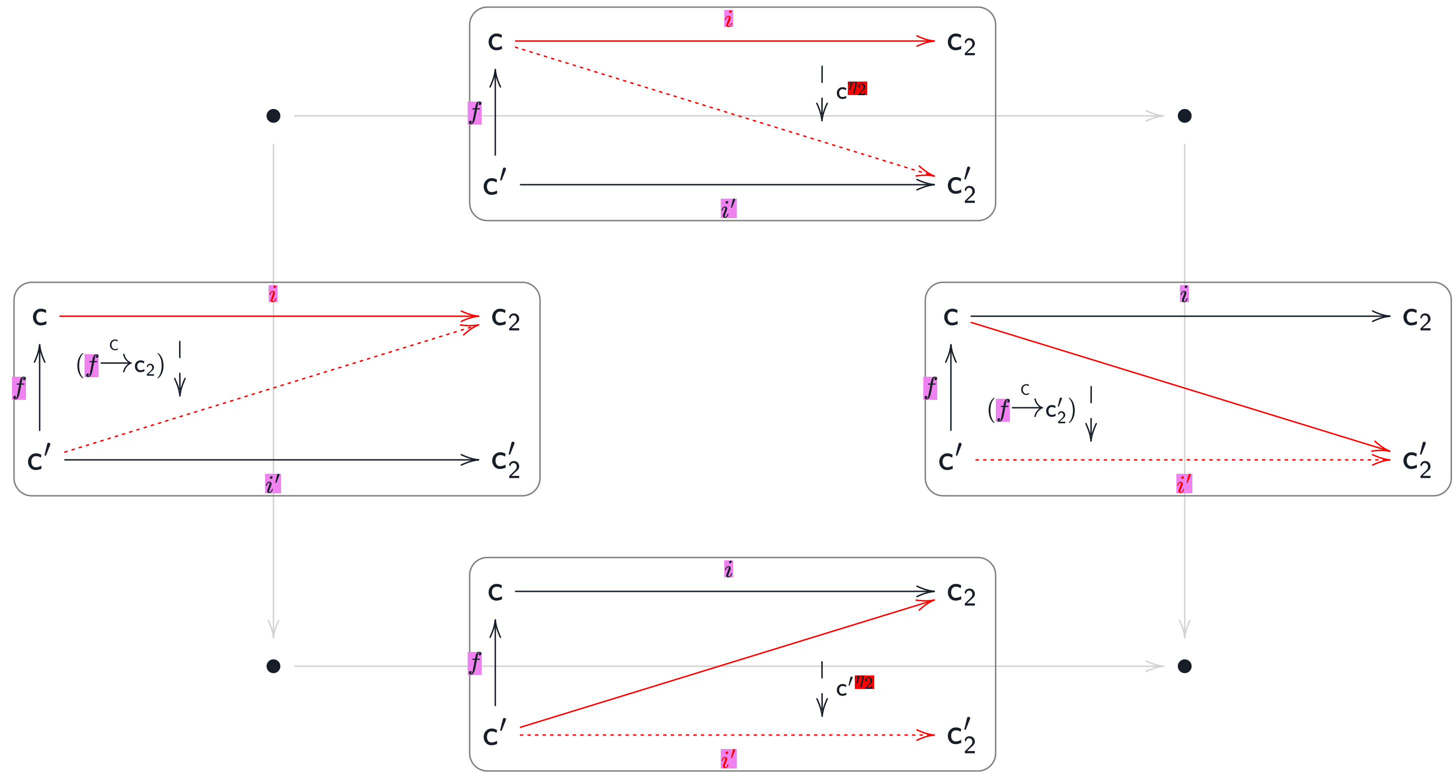
- c_1 为单态，
  由 ${}_{:\mathsf{c}_1}!$ 的唯一性可知；
- ${}_{:0}! = {}_{:1}\text{¡}$ 为同构，
  因为 $0 \overset{\mathsf{C}}{\to} 0 = \{{}_{:0}\mathrm{id}\}$
  并且 $1 \overset{\mathsf{C}}{\to} 1 = \{{}_{:1}\mathrm{id}\}$

同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释。
后面会将自然性进行进一步推广。



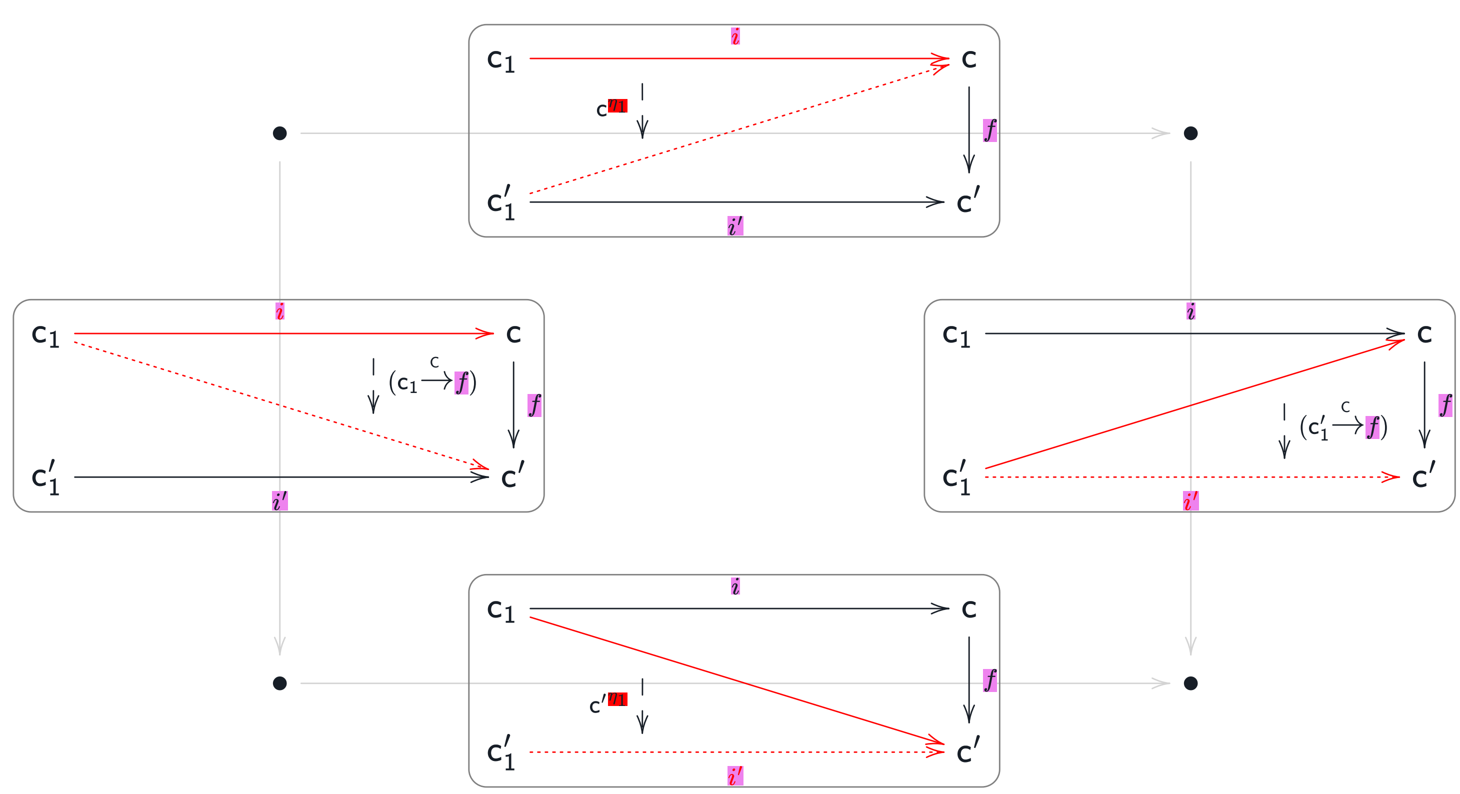
现提供自然变换 η_2 满足自然性 —— 即对
任意 C 中对象 c, c' 以及
任意 C 中映射 $f : (c' \xrightarrow{\mathsf{C}} c)$
都有 $(f \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2) \overset{\mathsf{Set}}{\circ} c'^{\eta_2} = c^{\eta_2} \overset{\mathsf{Set}}{\circ} (f \xrightarrow{\mathsf{C}} c'_2)$:



那么我们便会有下述结论：

- $c_2 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c'_2$ 当且仅当对任意 C 中的对象 c
  c^{η_2} 都是同构 。此时称 η_2 为**自然同构** 。

现提供自然变换 η_1 满足自然性 —— 即对
任意 C 中对象 c, c' 以及
任意 C 中映射 $f : c \xrightarrow{\mathsf{C}} c'$
都有 $(c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} f) \overset{\mathsf{Set}}{\circ} c'^{\eta_1} = c^{\eta_1} \overset{\mathsf{Set}}{\circ} (c'_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} f)$:



那么我们便会有下述结论：

- $c_1 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c'_1$ 当且仅当对任意 C 中的对象 c
  c^{η_1} 都是同构 。此时称 η_1 为**自然同构** 。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为

Set

$$\begin{tikzcd}
c \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & c \xrightarrow{C} c_2' \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2'"] \\
c' \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c' \xrightarrow{C} c_2'
\end{tikzcd}$$

$C \xrightarrow{C} c_2$　　$C \xrightarrow{C} c_2'$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧 将 c 换成 c_2 ：

$$\begin{tikzcd}
c_2 \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & c_2 \xrightarrow{C} c_2' \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2'"] \\
c' \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c' \xrightarrow{C} c_2'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:c_2}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & {}_{:c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2}) \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2' = c_2'^{(f \overset{C}{\circ} _)}"] \\
f \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & f \overset{C}{\circ} \mathrm{etc}
\end{tikzcd}$$

为了方便就用 etc 表示 ${}_{:c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2})$ 。由上图
知 $f(c'^{\eta_2}) = (f \overset{C}{\circ} \mathrm{etc})$ 右图底部和右侧箭头，
故 $c'^{\eta_2} = c' \xrightarrow{C} \mathrm{etc}$ 注意到箭头 $f : c' \xrightarrow{C} c$ ；
而 $c'^{\eta_2} = c' \xrightarrow{C} \mathrm{etc} = c'^{(\_ \overset{C}{\circ} \mathrm{etc})}$ 始终是同构
故 $\mathrm{etc} : c_2 \xrightarrow{C} c_2'$ 也是同构 。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在**米田嵌入**处会详细介绍 。

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为

Set

$$\begin{tikzcd}
c_1 \xrightarrow{C} c \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & c_1' \xrightarrow{C} c \arrow[d, "c_1' \xrightarrow{C} f"] \\
c_1 \xrightarrow{C} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c_1' \xrightarrow{C} c'
\end{tikzcd}$$

$c_1 \xrightarrow{C} C$　　$c_1' \xrightarrow{C} C$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧 将 c 换成 c_1 ：

$$\begin{tikzcd}
c_1 \xrightarrow{C} c_1 \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & c_1' \xrightarrow{C} c_1 \arrow[d, "c_1' \xrightarrow{C} f"] \\
c_1 \xrightarrow{C} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c_1' \xrightarrow{C} c'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:c_1}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1}) \arrow[d, "c_1' \xrightarrow{C} f = c_1'^{(_ \overset{C}{\circ} f)}"] \\
f \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & \mathrm{etc} \overset{C}{\circ} f
\end{tikzcd}$$

为了方便就用 etc 表示 ${}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 。由上图
知 $f(c'^{\eta_1}) = (\mathrm{etc} \overset{C}{\circ} f)$ 右图底部和右侧箭头，
故 $c'^{\eta_1} = \mathrm{etc} \xrightarrow{C} c'$ 注意到箭头 $f : c \xrightarrow{C} c'$；
而 $c'^{\eta_1} = \mathrm{etc} \xrightarrow{C} c' = c'^{(\mathrm{etc} \overset{C}{\circ} \_)}$ 始终是同构
故 $\mathrm{etc} : c_1 \xrightarrow{C} c_1'$ 也是同构 。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在**米田嵌入**处会详细介绍 。