

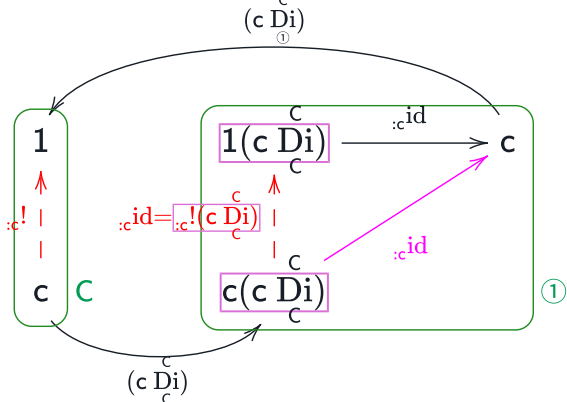
01 始对象和终对象

L^AT_EX Definitions are here.

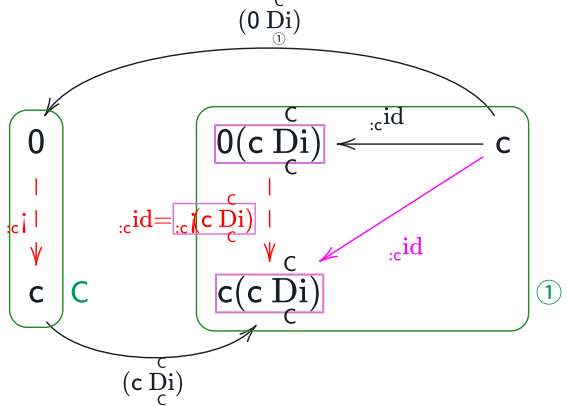
泛性质

范畴由对象及其间箭头构成。本文重点分析余积闭范畴 \mathcal{C} 。首先给出如下定义：

- 1 为**终对象**当且仅当对任意 \mathcal{C} 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 $!_c : c \xrightarrow{\mathcal{C}} 1$:



- 0 为**始对象**当且仅当对任意 \mathcal{C} 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 $!_c : 0 \xrightarrow{\mathcal{C}} c$:



Note

- $\text{Di} : \mathcal{C} \xrightarrow{\text{Cat}} (\textcircled{1} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathcal{C})$
 $c \mapsto \text{常值函子}$
 $\text{c Di} : (\textcircled{1} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathcal{C})$
 $1 \mapsto c$
 $f \mapsto !_c \text{id}$
① 为仅含单个函子的范畴, 1 为其中的对象; 仅含有单个对象的范畴可以被等价地视作为 ①。

若范畴 \mathcal{C} 中真的含有 0 和 1 分别作为始对象和终对象 则根据上述信息可知

- 形如 $1 \xrightarrow{\mathcal{C}} 1$ 的箭头只有一个, 即 $!_1 \text{id}$;
- 形如 $0 \xrightarrow{\mathcal{C}} 0$ 的箭头只有一个, 即 $!_0 \text{id}$;

元素与全局元素

对任意对象 $c_1, c'_1, \text{etc}, c_2, c'_2, \text{etc}, c_3$ 及任意的映射 i 我们进行如下的规定：

- i 为 c_2 的**元素**当且仅当 $i \text{ tar} = c_2$;
- i 为 c_1 的**全局元素**当且仅当 $i \text{ tar} = c_1$ 且 $i \text{ src} = 1$
- i 不存在仅当 $i \text{ tar} = 0$ 。

Note

其他范畴中刚才的断言未必成立。

02-03 范畴当中的箭头

L^AT_EX Definitions are here.

沿用上一节提到的自由变量。我们规定：

- $\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow \mathbf{c}_2} =$
所有从 \mathbf{c}_1 射向 \mathbf{c}_2 的箭头构成的集。

Note

上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
其他范畴里 $\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow \mathbf{c}_2}$ 未必构成集。

范畴 \mathcal{C} 中特定的箭头可以进行复合运算：

- $\overset{\mathcal{C}}{\circ} : (\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow \mathbf{c}_2}) \times (\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_2 \rightarrow \mathbf{c}_3}) \xrightarrow{\text{Set}} (\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow \mathbf{c}_3})$
 $(\overset{\mathcal{C}}{i_1} . \overset{\mathcal{C}}{i_2}) \mapsto (\overset{\mathcal{C}}{i_1 \circ i_2})$

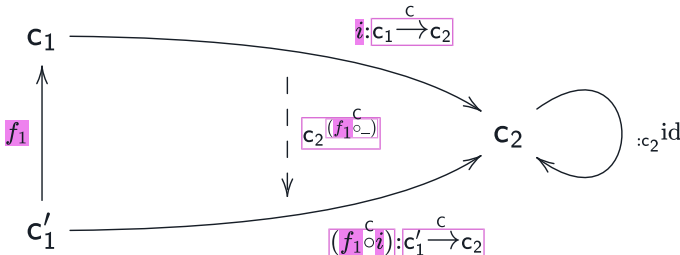
如果我们还知道箭头 f_1, i, f_2 分别属于 $\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}'_1 \rightarrow \mathbf{c}_1}, \overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow \mathbf{c}_2}, \overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_2 \rightarrow \mathbf{c}'_2}$ 那么便可知

- $(\overset{\mathcal{C}}{f_1 \circ i}) \overset{\mathcal{C}}{\circ} \overset{\mathcal{C}}{f_2} = \overset{\mathcal{C}}{f_1} \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\overset{\mathcal{C}}{i \circ f_2})$ ，
即箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便可获得新的函数：

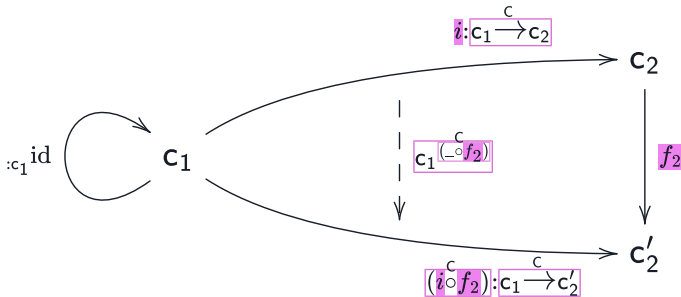
- $(\overset{\mathcal{C}}{f_1} \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) : (\overset{\mathcal{C}}{_ \rightarrow _}) \xrightarrow{\overset{\text{Cat}}{\mathcal{C} \Rightarrow \text{Set}}} (\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}'_1 \rightarrow _})$
 $\overset{\mathcal{C}}{i} \mapsto (\overset{\mathcal{C}}{f_1 \circ i})$

称作**前复合**。下图有助于形象理解：



- $(\overset{\mathcal{C}}{_} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \overset{\mathcal{C}}{f_2}) : (\overset{\mathcal{C}}{_ \rightarrow \mathbf{c}_2}) \xrightarrow{\overset{\text{Cat}}{\mathcal{C} \Rightarrow \text{Set}}} (\overset{\mathcal{C}}{_ \rightarrow \mathbf{c}'_2})$
 $\overset{\mathcal{C}}{i} \mapsto (\overset{\mathcal{C}}{i \circ f_1})$

称作**后复合**。 下图有助于形象理解：



根据上面的定义不难得出下述结论：

- $(\overset{\mathcal{C}}{f_1} \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) \overset{\overset{\text{Cat}}{\mathcal{C} \Rightarrow \text{Set}}}{\circ} (\overset{\mathcal{C}}{_} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \overset{\mathcal{C}}{f_2}) = (\overset{\mathcal{C}}{_} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \overset{\mathcal{C}}{f_2}) \overset{\overset{\text{Cat}}{\mathcal{C} \Rightarrow \text{Set}}}{\circ} (\overset{\mathcal{C}}{f_1} \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)$
复合运算具有**结合律**，即后面提到的**自然性**；
- $(\overset{\mathcal{C}}{_} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \overset{\mathcal{C}}{i}) \overset{\overset{\text{Cat}}{\mathcal{C} \Rightarrow \text{Set}}}{\circ} (\overset{\mathcal{C}}{_} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \overset{\mathcal{C}}{f_2}) = (\overset{\mathcal{C}}{_} \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\overset{\mathcal{C}}{i \circ f_2}))$
前复合与复合运算的关系
- $(\overset{\mathcal{C}}{i} \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) \overset{\overset{\text{Cat}}{\mathcal{C} \Rightarrow \text{Set}}}{\circ} (\overset{\mathcal{C}}{f_1} \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) = ((\overset{\mathcal{C}}{f_1} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \overset{\mathcal{C}}{i}) \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)$
后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。

假如 a_1 为 \mathbf{c}_1 的全局元素则可规定

- $\mathbf{c}_1 i = \overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \circ i}$

恒等箭头

范畴 \mathcal{C} 内的每个对象都有恒等映射：

- $\text{id}_{c_1} : c_1 \rightarrow c_1$
 $c_1 \mapsto c_1$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- $\text{id}_{c_1} \circ i = i$
 $= i \circ \text{id}_{c_2}$

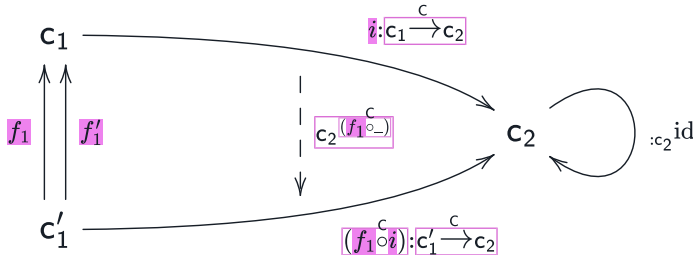
此外还可以得知

- $(\text{id}_{c_1} \circ -) : (c_1 \rightarrow -) \xrightarrow{\text{Cat}} (c_1 \rightarrow -)$
为恒等自然变换，可记成是 $(\text{id}_{c_1} \circ -)$ ；
- $(- \circ \text{id}_{c_2}) : (- \rightarrow c_2) \xrightarrow{\text{Cat}} (- \rightarrow c_2)$
为恒等自然变换，可记成是 $(- \circ \text{id}_{c_2})$ 。

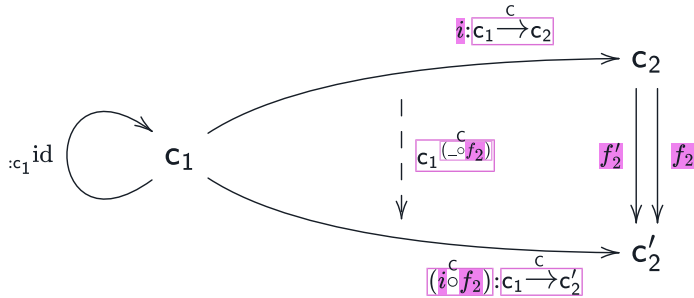
单满态以及同构

接下来给出单 / 满态和同构的定义。

- i 为**单态**当且仅当对任意 c'_1
若有 $f_1, f'_1 : c'_1 \rightarrow c_1$ 满足 $f_1 \circ i = f'_1 \circ i$
则有 $f_1 = f'_1$ 。详情见下图：



- i 为**满态**当且仅当对任意 c'_2
若有 $f_2, f'_2 : c_2 \rightarrow c'_2$ 满足 $i \circ f_2 = i \circ f'_2$
则有 $f_2 = f'_2$ 。详情见下图：



- i 为**同构**当且仅当存在 $i' : c_2 \rightarrow c_1$
使得 $i \circ i' = \text{id}_{c_1}$ 且 $i' \circ i = \text{id}_{c_2}$ 。
此时 c_1, c_2 间的关系可记作 $c_1 \cong c_2$ 。

若还知道 $i = i_1$ 且 $i_2 : c_2 \rightarrow c_3$ 则有

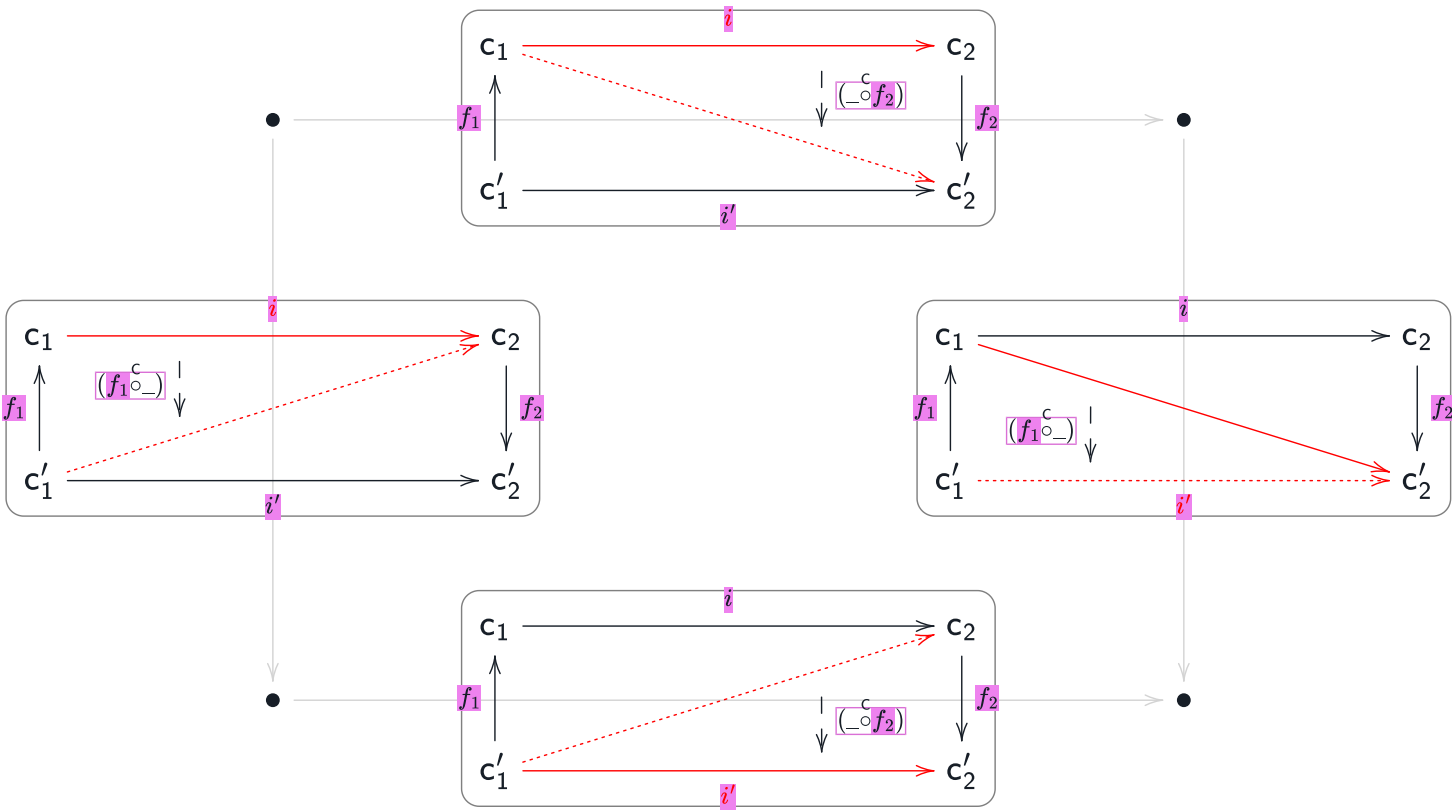
- 若 i_1, i_2 为单态 / 满态 / 同构
则 $i_1 \circ i_2$ 为单态 / 满态 / 同构；
- 若 $i_1 \circ i_2$ 为同构
且 i_1, i_2 中有一个为同构
则 i_1, i_2 两者皆构成同构。

不仅如此我们还可以得出下述结论：

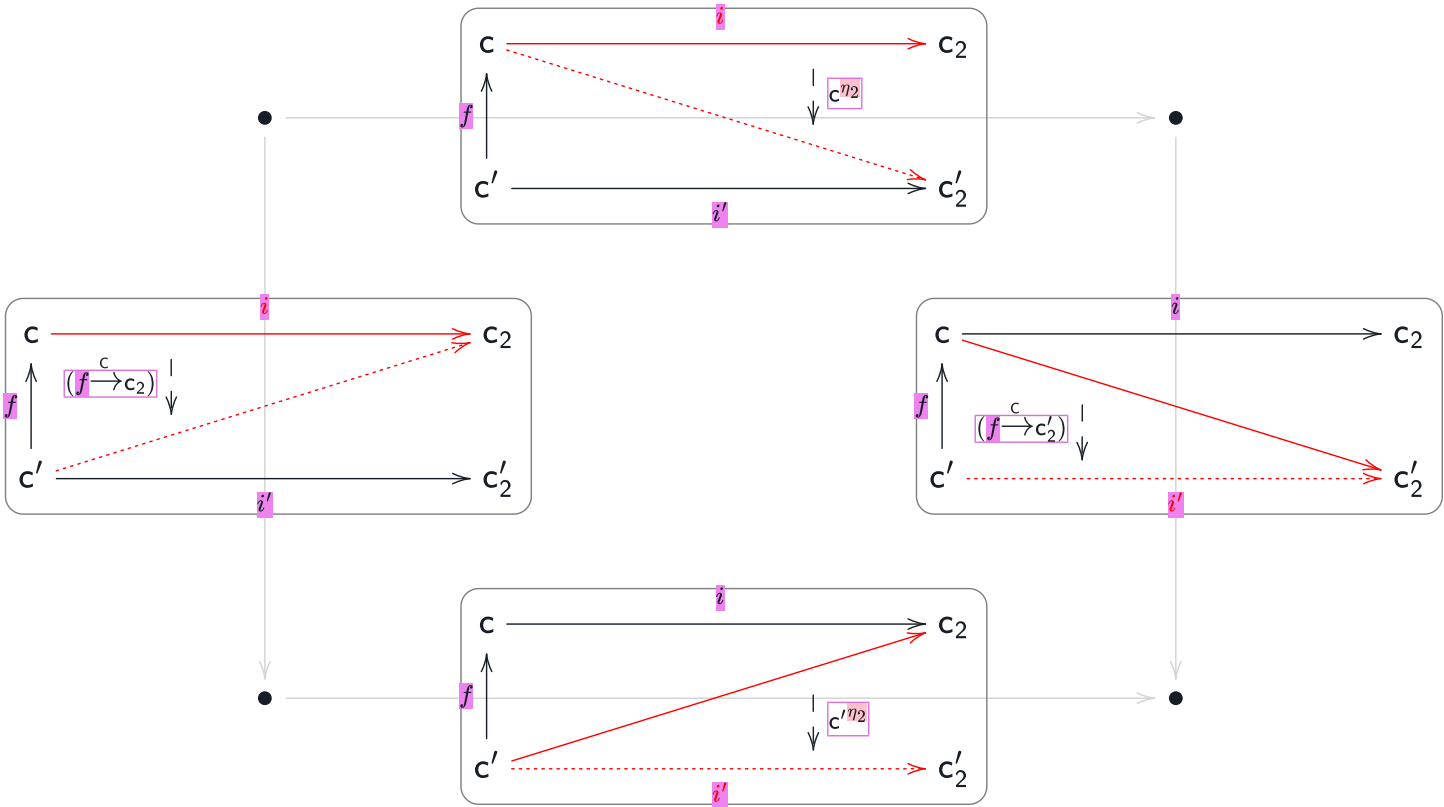
- c_1 为单态，
由 $!_{c_1}$ 的唯一性可知；
- $!_0 = !_1$ 为同构，
因为 $0 \rightarrow 0 = \{!_0 \text{id}\}$
并且 $1 \rightarrow 1 = \{!_1 \text{id}\}$

同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释。
后面会将自然性进行进一步推广。



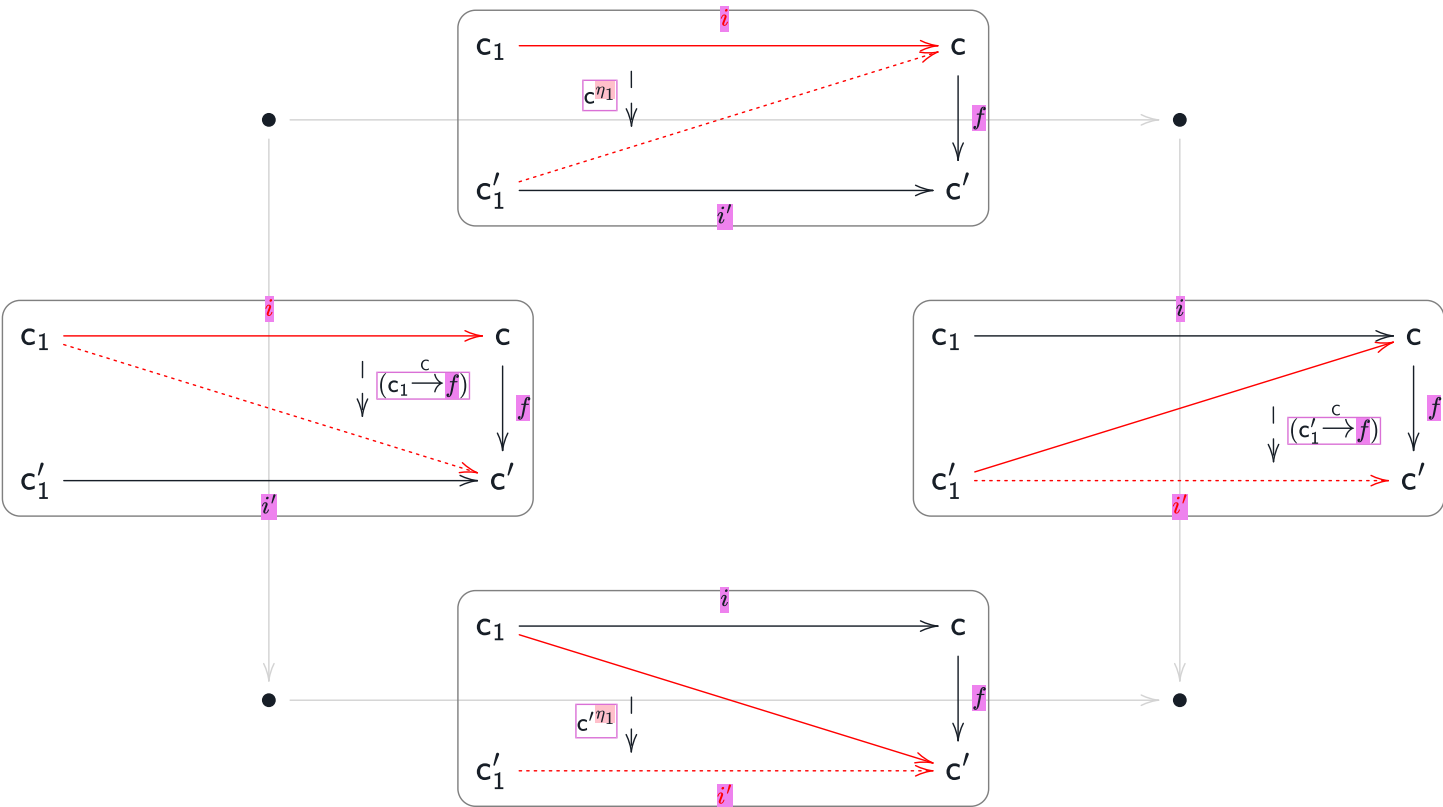
现提供自然变换 η_2 满足自然性 —— 即对任意 \mathcal{C} 中对象 c, c' 以及任意 \mathcal{C} 中映射 $f: (c' \xrightarrow{c} c)$ 都有 $((f \xrightarrow{c} c_2) \circ^{\text{Set}} c' \eta_2 = c \eta_2 \circ (f \xrightarrow{c} c'_2))$:



那么我们便会有下述结论：

- $c_2 \cong^c c'_2$ 当且仅当对任意 \mathcal{C} 中的对象 c $c \eta_2$ 都是同构。此时称 η_2 为**自然同构**。

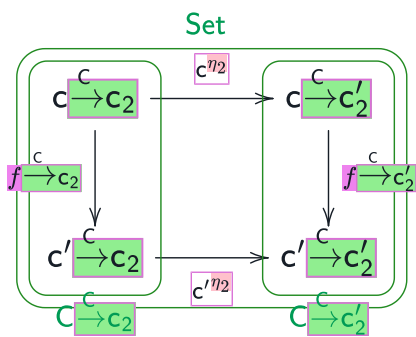
现提供自然变换 η_1 满足自然性 —— 即对任意 \mathcal{C} 中对象 c, c' 以及任意 \mathcal{C} 中映射 $f: c \xrightarrow{c} c'$ 都有 $(c_1 \xrightarrow{c} f) \circ^{\text{Set}} c' \eta_1 = c \eta_1 \circ (c'_1 \xrightarrow{c} f)$:



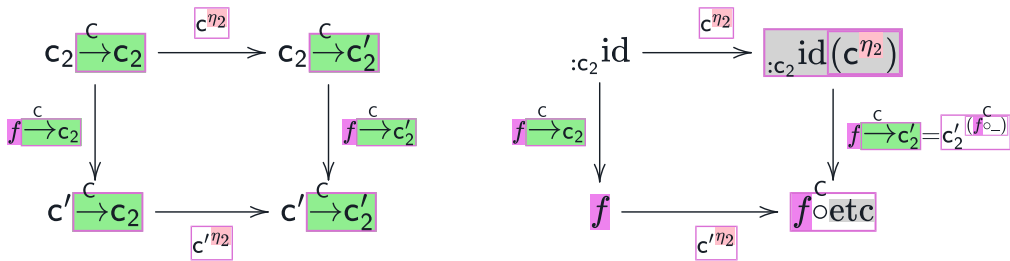
那么我们便会有下述结论：

- $c_1 \cong^c c'_1$ 当且仅当对任意 \mathcal{C} 中的对象 c $c \eta_1$ 都是同构。此时称 η_1 为**自然同构**。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为



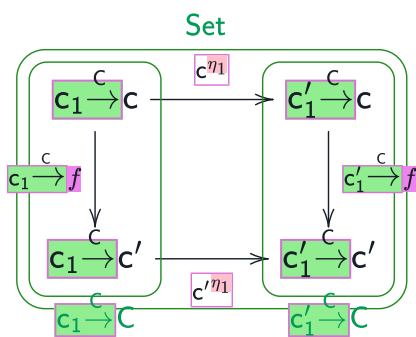
⇒ 易证, ⇐ 用到了米田技巧 将 c 换成 c₂ :



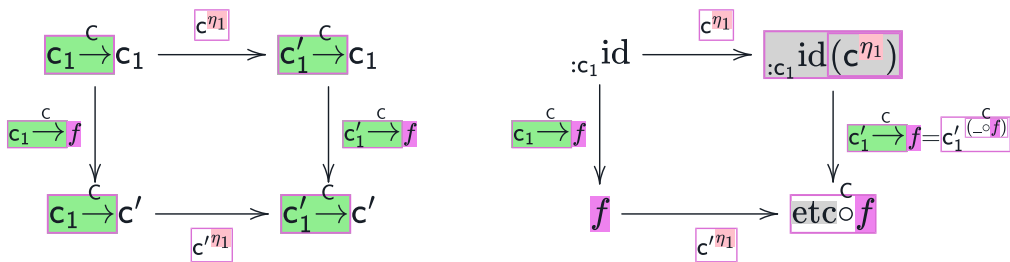
为了方便就用 **etc** 表示 $_{:c_2} \text{id}(c^{\eta_2})$ 。由上图知 $f(c'^{\eta_2}) = (f^c \circ \text{etc})$ 右图底部和右侧箭头, 故 $c'^{\eta_2} = c' \xrightarrow{c} \text{etc}$ 注意到箭头 $f: c' \xrightarrow{c} c$; 而 $c'^{\eta_2} = c' \xrightarrow{c} \text{etc} = c'(\xrightarrow{c} \text{etc})$ 始终是同构 故 **etc: c₂ → c'₂** 也是同构。

高亮部分省去了部分推理过程, 具体在米田嵌入处会详细介绍。

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为



⇒ 易证, ⇐ 用到了米田技巧 将 c 换成 c₁ :



为了方便就用 **etc** 表示 $_{:c_1} \text{id}(c^{\eta_1})$ 。由上图知 $f(c'^{\eta_1}) = (\text{etc}^c \circ f)$ 右图底部和右侧箭头, 故 $c'^{\eta_1} = \text{etc}^c \xrightarrow{c} c'$ 注意到箭头 $f: c \xrightarrow{c} c'$; 而 $c'^{\eta_1} = \text{etc}^c \xrightarrow{c} c' = c'(\text{etc}^c \circ \xrightarrow{c})$ 始终是同构 故 **etc: c₁ → c'₁** 也是同构。

高亮部分省去了部分推理过程, 具体在米田嵌入处会详细介绍。

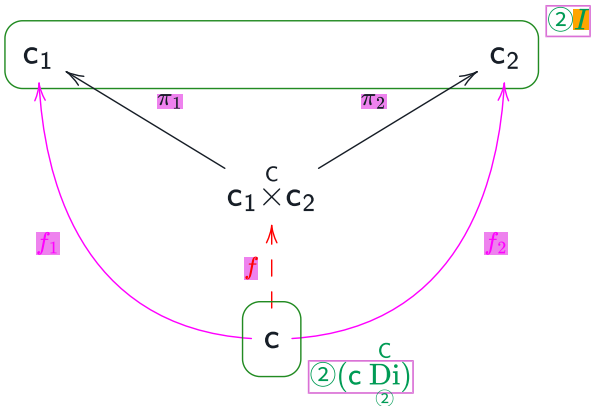
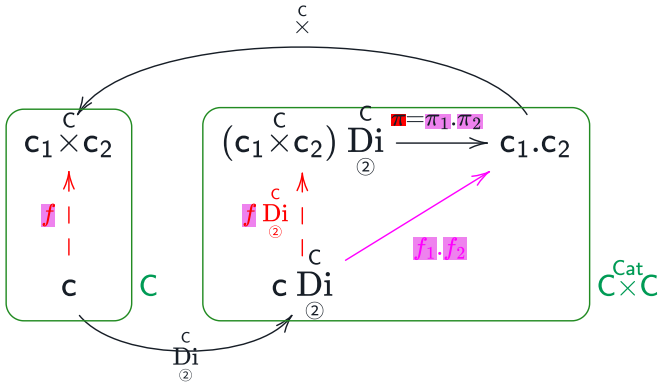
04-05 类型的和与积

L^AT_EX Definitions are here.

泛性质

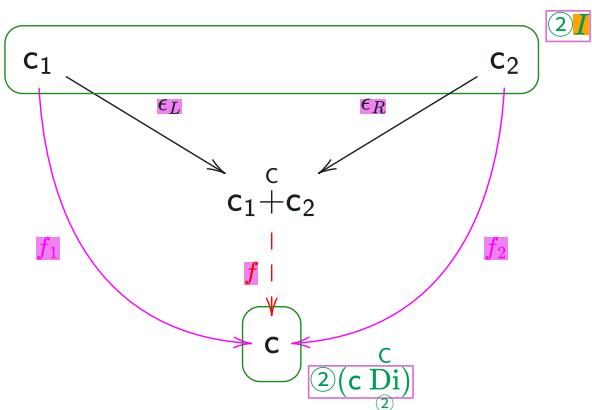
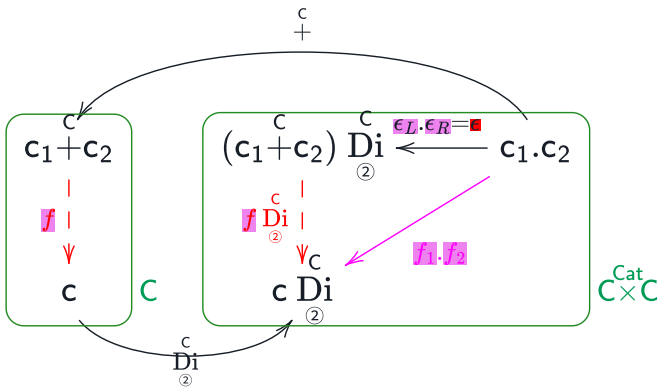
默认函子 $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (\overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}} \overset{\text{Cat}}{\times} \overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}}) \overset{\text{Cat}}{\longrightarrow} \overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}}$ 在范畴 $\overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}}$ 中有如下性质：

- $(c \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} c_1) \overset{\text{Set}}{\times} (c \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} c_2) \overset{\text{Set}}{\cong} c \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} (c_1 \overset{\mathcal{C}}{\times} c_2)$
—— c 为任意 $\overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}}$ 中对象。此即为积的泛性质，亦为指数对乘法的分配律。



默认函子 $\overset{\mathcal{C}}{+} : (\overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}} \overset{\text{Cat}}{\times} \overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}}) \overset{\text{Cat}}{\longrightarrow} \overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}}$ 在范畴 $\overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}}$ 中有如下性质：

- $(c_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} c) \overset{\text{Set}}{\times} (c_2 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} c) \overset{\text{Set}}{\cong} (c_1 + c_2) \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} c$
—— c 为任意 $\overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}}$ 中对象。此即为和的泛性质，亦为指数对加法的分配律。



Note

在上面的插图中

- $\overset{\mathcal{C}}{\text{Di}} : \overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}} \overset{\text{Cat}}{\longrightarrow} (\overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}} \overset{\text{Cat}}{\times} \overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}})$ 为对角函子满足 $c \mapsto (c, c)$
- $\overset{\mathcal{C}}{\text{Di}} : \overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}} \overset{\text{Cat}}{\longrightarrow} (\textcircled{2} \overset{\text{Cat}}{\longrightarrow} \overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}})$
 $c \mapsto$ 常值函子
- $\overset{\mathcal{C}}{c} \overset{\text{Di}} : \textcircled{2} \overset{\text{Cat}}{\longrightarrow} \overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}}$
 $1 \mapsto c$
 $2 \mapsto c$
 $f \mapsto \text{.}c.\text{id}$

即为对角函子的第二种等价的定义。
 $\textcircled{2}$ 为仅含两个对象的范畴，在此则作为一个指标范畴。1 和 2 分别为其中的对象。

- $\textcircled{I} : \textcircled{2} \overset{\text{Cat}}{\longrightarrow} \overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}}$ 为函子，满足
 $1 \mapsto c_1$
 $2 \mapsto c_2$

- 不难看出上图中

$$\textcircled{I} : \textcircled{I} \overset{\text{Cat}}{\longrightarrow} (\overset{\mathcal{C}}{c_1} \overset{\mathcal{C}}{\times} \overset{\mathcal{C}}{c_2}) \overset{\mathcal{C}}{\text{Di}}$$

$$\textcircled{I} : (\overset{\mathcal{C}}{c_1} + \overset{\mathcal{C}}{c_2}) \overset{\mathcal{C}}{\text{Di}} \overset{\text{Cat}}{\longrightarrow} \textcircled{I}$$

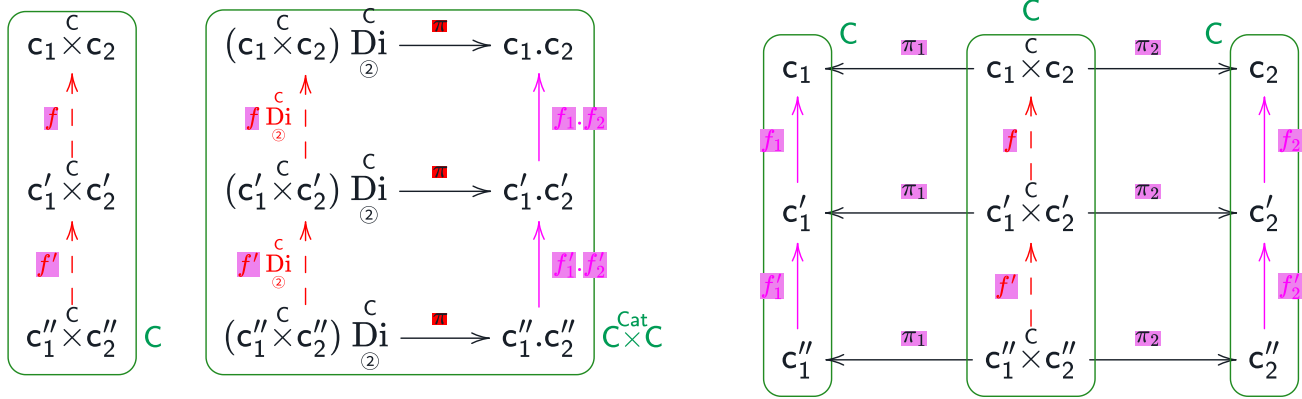
都构成自然变换

函子性

如何证明 $\times^{\mathcal{C}}$ 构成函子呢？请看

- $\times^{\mathcal{C}} : (.:_{c_1} \text{id} . :_{c_2'} \text{id}) \mapsto .:(c_1^{\mathcal{C}} \times c_2') \text{id}$
—— 即函子 \times 保持**恒等箭头**；
- $\times^{\mathcal{C}} : (f_1' \circ f_1 . f_2' \circ f_2) \mapsto (f' \circ f)$
—— 即函子 \times 保持**箭头复合运算**。

下图有助于形象理解证明的过程：



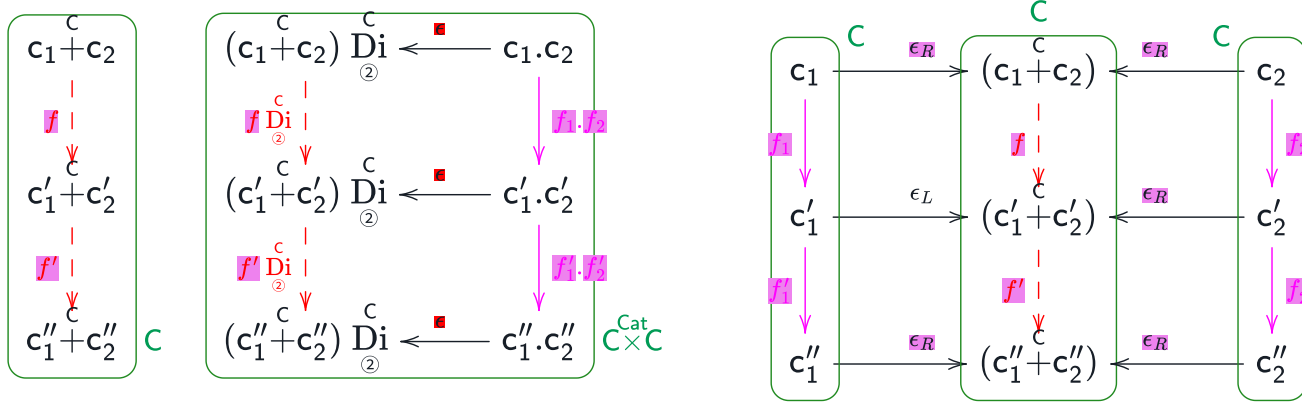
另外我们规定 $\times^{\mathcal{C}}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\times^{\mathcal{C}} : (f_1 . c_2) \mapsto (f_1 \times_{\mathcal{C}^2} \text{id})$
 $\times^{\mathcal{C}} : (c_1 . f_2) \mapsto (.:_{c_1} \text{id} \times f_2)$

如何证明 $+\mathcal{C}$ 构成函子呢？请看

- $+\mathcal{C} : (.:_{c_1} \text{id} . :_{c_2'} \text{id}) \mapsto .:(c_1^{\mathcal{C}} + c_2') \text{id}$
—— 即函子 $+$ 保持**恒等箭头**；
- $+\mathcal{C} : (f_1' \circ f_1 . f_2' \circ f_2) \mapsto (f' \circ f)$
—— 即函子 $+$ 保持**箭头复合运算**。

下图有助于形象理解证明的过程：



另外我们规定 $+\mathcal{C}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

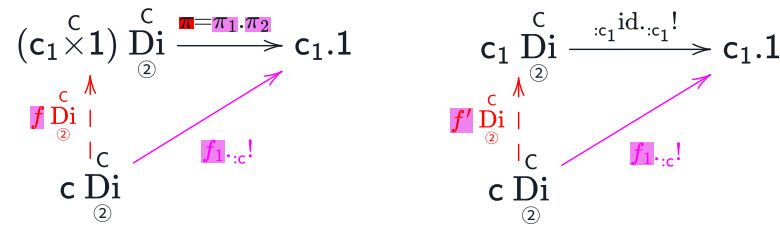
- $+\mathcal{C} : (f_1 . c_2) \mapsto (f_1 +_{\mathcal{C}^2} \text{id})$
 $+\mathcal{C} : (c_1 . f_2) \mapsto (.:_{c_1} \text{id} + f_2)$

运算性质

对于函子 $\times^{\mathbb{C}}$ 我们不难得知

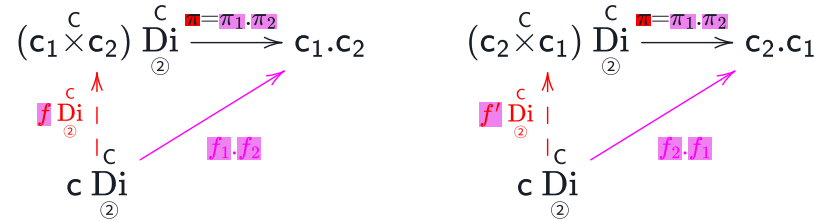
- $c_1 \times^{\mathbb{C}} 1 \cong c_1 \times^{\mathbb{C}} 1 \cong c_1$
—— 乘法具有**幺元 1**。

下图有助于理解证明目标, 即 $f_1 \cdot \cdot c^!$ 能唯一决定 f 和 f' 。



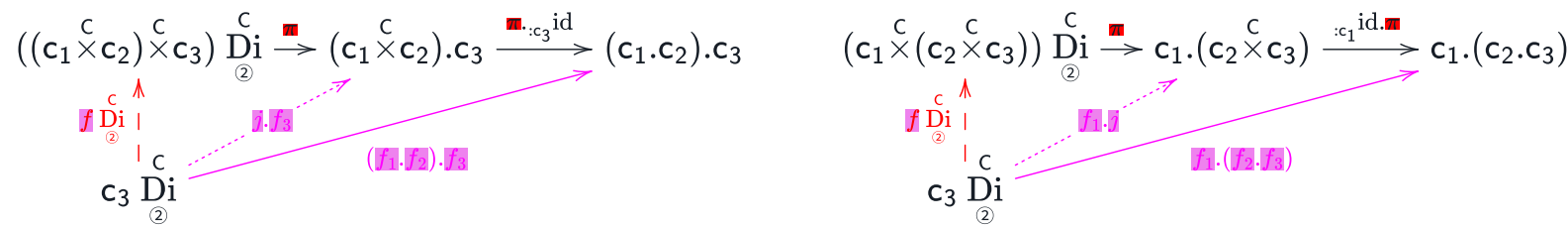
- $c_1 \times^{\mathbb{C}} c_2 \cong c_2 \times^{\mathbb{C}} c_1$
—— 乘法具有**交换律**。

下图有助于理解证明目标, 即 $f_1 \cdot f_2$ 能唯一决定 f 和 f' 。



- $(c_1 \times^{\mathbb{C}} c_2) \times^{\mathbb{C}} c_3 \cong c_1 \times^{\mathbb{C}} (c_2 \times^{\mathbb{C}} c_3)$
—— 乘法具有**结合律**。

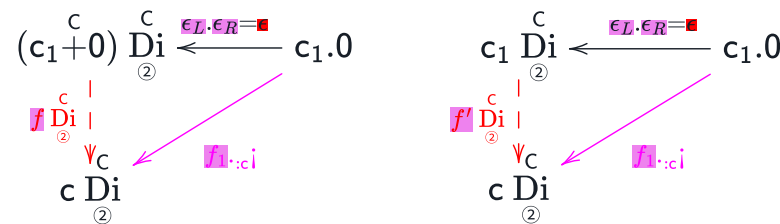
下图有助于理解证明目标, 即 $(f_1 \cdot f_2) \cdot f_3$ 唯一决定 f 和 f' 。



对于函子 $+\mathbb{C}$ 我们不难得知

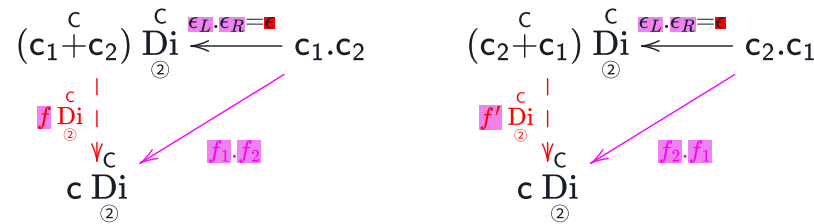
- $c_1 +^{\mathbb{C}} 0 \cong c_1 +^{\mathbb{C}} 1 \cong c_1$
—— 加法具有**幺元 0**。

下图有助于理解证明目标, 即 $f_1 \cdot \cdot c^!$ 能唯一决定 f 和 f' 。



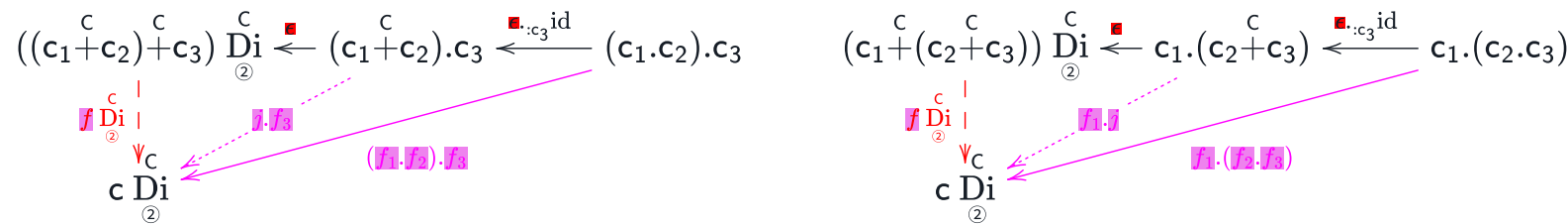
- $c_1 +^{\mathbb{C}} c_2 \cong c_2 +^{\mathbb{C}} c_1$
—— 加法具有**交换律**。

下图有助于理解证明目标, 即 $f_1 \cdot f_2$ 能唯一决定 f 和 f' 。



- $(c_1 +^{\mathbb{C}} c_2) +^{\mathbb{C}} c_3 \cong c_1 +^{\mathbb{C}} (c_2 +^{\mathbb{C}} c_3)$
—— 加法具有**结合律**。

下图有助于理解证明目标, 即 $(f_1 \cdot f_2) \cdot f_3$ 唯一决定 f 和 f' 。



么半范畴

像刚才这样对象运算具有**单位元**以及**结合律**的范畴称作**么半范畴**；

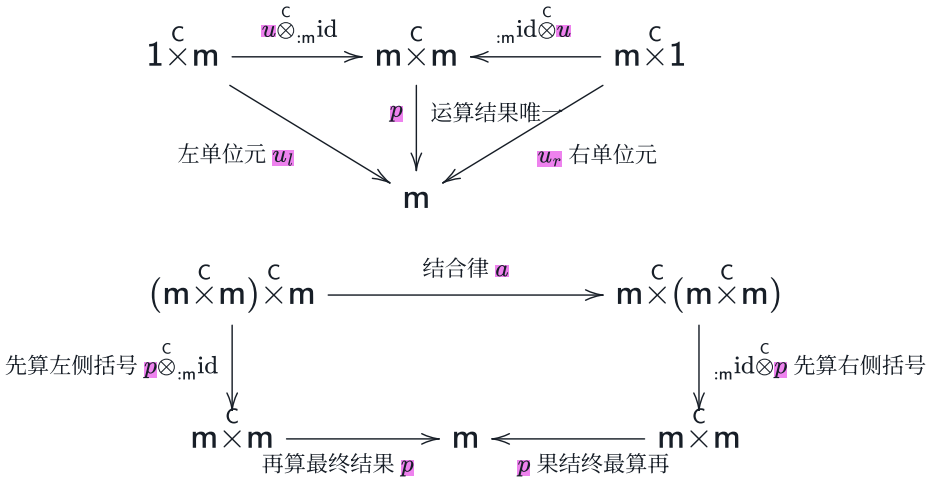
若上述范畴还具有**交换律**则称作**对称么半范畴**；

很明显我们的范畴 C 是典型的**对称么半范畴**。

么半群

什么是么半群呢？有两种定义方式：

- **么半群** M 是个范畴，其只含一个对象 m；其中的复合运算正好有单位元以及结合律。
- 对象 m 属于么半范畴 C，满足下述交换图：



其中

- $\mu : 1 \xrightarrow{C} m$ 其实就是 m 里面的么元
- $\eta_l : (1 \times^C m) \xrightarrow{C} m$ 表示 μ 构成左么元
- $\eta_r : (m \times^C 1) \xrightarrow{C} m$ 表示 μ 构成右么元
- $\mu : (m \times^C m) \xrightarrow{C} m$ 即为 m 中的二元运算
- $\alpha : (m \times^C m) \times^C m \xrightarrow{C} m \times^C (m \times^C m)$ 表示 m 具有结合律

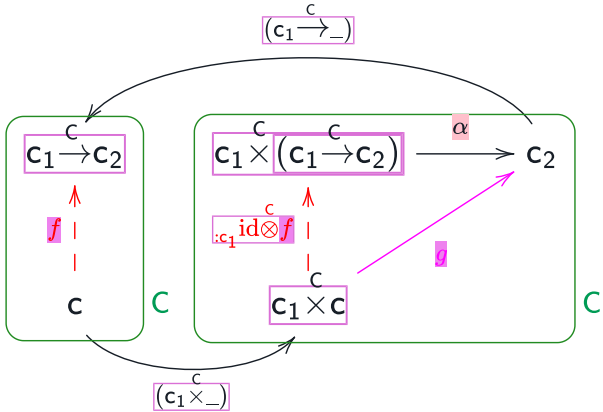
06 类型的幂

L^AT_EX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{C}{\rightarrow} : (\overset{C}{C} \times \overset{C}{C}) \overset{\text{Cat}}{\longrightarrow} \overset{C}{C}$ 在范畴 $\overset{C}{C}$ 中有下述性质：

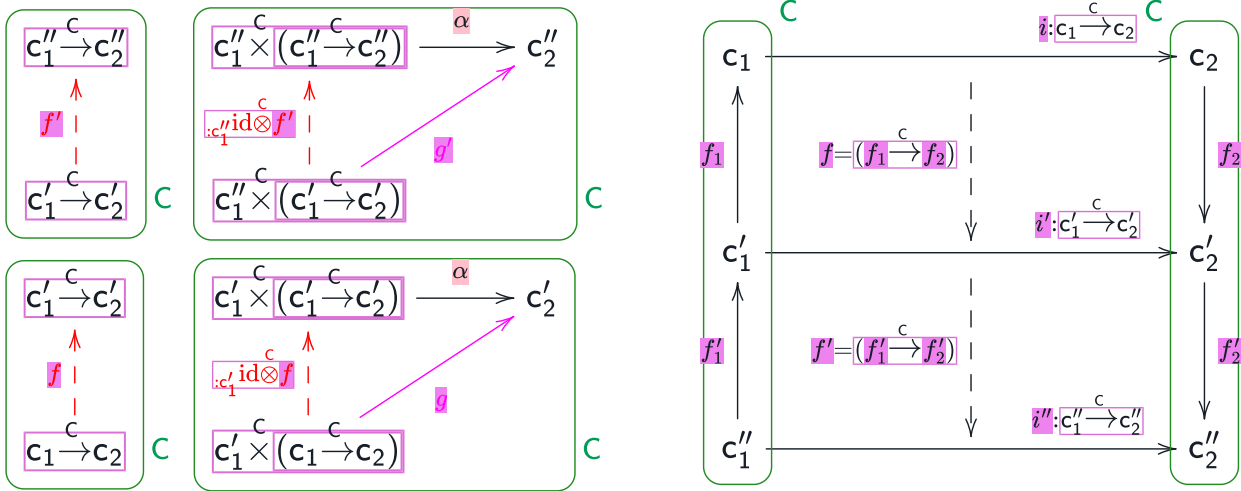
- $(\overset{C}{c_1} \times \overset{C}{c}) \overset{C}{\rightarrow} \overset{C}{c_2} \overset{\text{Set}}{\cong} \overset{C}{c} \overset{C}{\rightarrow} (\overset{C}{c_1} \overset{C}{\rightarrow} \overset{C}{c_2}) \overset{\text{Set}}{\cong} \overset{C}{c_1} \overset{C}{\rightarrow} (\overset{C}{c} \overset{C}{\rightarrow} \overset{C}{c_2})$
—— $\overset{C}{c}$ 为任意 $\overset{C}{C}$ 中对象。此即为幂的泛性质，亦表示了指数加乘法之间的运算关系。



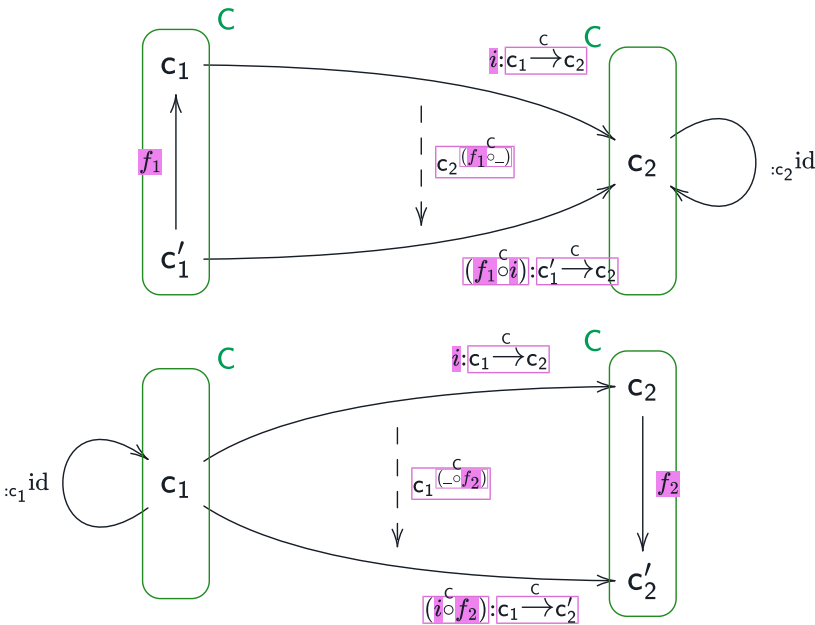
函子性

如何证明 $\overset{C}{\rightarrow}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{C}{\rightarrow} : (\overset{C}{:c_1} \text{id} \cdot \overset{C}{:c_2} \text{id}) \longmapsto \overset{C}{:(c_1 \rightarrow c_2)} \text{id}$
—— 即函子 $\overset{C}{\rightarrow}$ 能保持恒等箭头；
 - $\overset{C}{\rightarrow} : (\overset{C}{f'_1} \overset{C}{\circ} \overset{C}{f_1} \cdot \overset{C}{f_2} \overset{C}{\circ} \overset{C}{f'_2}) \longmapsto (\overset{C}{f} \overset{C}{\circ} \overset{C}{f'})$
—— 即函子 $\overset{C}{\rightarrow}$ 保持箭头复合运算。
- 下图有助于形象理解证明过程：



下图 自上到下分别为图 1 和图 2 后面会用到。



范畴 \mathcal{C} 内任意两对象 c_1 和 c_2 间的箭头构成一个集合 $c_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} c_2$,
 说明 $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow}$ 只能将两个对象打到一个集合 ; 下面使 $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow}$ 升级为函子 :
 若还知道箭头 $f_1 : c'_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} c_1$ 以及 $f_2 : c_2 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} c'_2$, 则规定

- $(_ \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} c_2) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \overset{\text{Cat}}{\longrightarrow} \text{Set}$ 为函子且
 $(_ \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} c_2) : c \longmapsto (c \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} c_2)$ 且对任意 $f : c' \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} c$ 有
 $(_ \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} c_2) : f \longmapsto (f \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} c_2) = (f \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} ;_{c_2} \text{id}) = c_2 (f \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)$

图 1 有助于理解。

$$\begin{aligned} (_ \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} f_2) &: \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \overset{\text{Cat}}{\longrightarrow} \text{Set}, \\ (_ \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} f_2) : c &\longmapsto (c \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} f_2) = (;_c \text{id} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} f_2) = c_2 (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) \text{ 且对任意 } f_{\text{ai}} : c' \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} c \text{ 有} \\ (_ \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} f_2) : f &\longmapsto (f \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} f_2) = (f \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) \overset{\mathcal{C}}{\circ}_{\text{Set}} (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) = (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) \overset{\mathcal{C}}{\circ}_{\text{Set}} (f \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) \end{aligned}$$

图 2 有助于理解。

Note

不难看出

- よ : $\mathcal{C} \overset{\text{Cat}}{\longrightarrow} (\mathcal{C}^{\text{op}} \overset{\text{Set}}{\longrightarrow} \text{Set})$
 $c_2 \longmapsto (c_2 \overset{\mathcal{C}^{\text{op}}}{\longrightarrow} _)$ 构成一个函子
 $f_2 \longmapsto (f_2 \overset{\mathcal{C}^{\text{op}}}{\longrightarrow} _) = (_ \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} f_2) = (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2)$ 构成一个函子间映射 , 即自然变换

该函子称作是**米田嵌入**。

- $(c_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} _) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \overset{\text{Cat}}{\longrightarrow} \text{Set}$ 为函子且
 $(c_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} _) : c \longmapsto (c_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} c)$, 且对任意 $f : c \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} c'$ 有
 $(c_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} _) : f \longmapsto (c_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} f) = (;_{c_1} \text{id} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} f) = c_1 (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f)$

图 2 有助于理解。

$$\begin{aligned} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} _) &: \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \overset{\text{Cat}}{\longrightarrow} \text{Set}, \\ (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} _) : c &\longmapsto (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} c) = (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} ;_c \text{id}) = c (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) \text{ 且对任意 } f_{\text{ai}} : c \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} c' \text{ 有} \\ (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} _) : f &\longmapsto (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} f) = (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) \overset{\mathcal{C}}{\circ}_{\text{Set}} (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f) = (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f) \overset{\mathcal{C}}{\circ}_{\text{Set}} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) \end{aligned}$$

图 1 有助于理解。

Note

不难看出

- 尤 : $\mathcal{C}^{\text{op}} \overset{\text{Cat}}{\longrightarrow} (\mathcal{C} \overset{\text{Set}}{\longrightarrow} \text{Set})$
 $c_1 \longmapsto (c_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} _)$ 构成一个函子
 $f_1 \longmapsto (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} _) = (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)$ 构成一个函子间映射 , 即自然变换

该函子戏称为**尤达嵌入**。

积闭范畴

这里插个题外话：

若范畴包含终对象 , 所有类型的积以及指数 , 则可将其称作**积闭范畴**；

若范畴包含始对象 , 所有类型的和 , 则可将其称作是**余积闭范畴**；

若范畴满足上述条件 , 则可称作**双积闭范畴**。

很明显我们讨论的范畴 \mathcal{C} 就是**双积闭范畴**。

07 递归类型

LaTeX Definitions are here.

08-09 函子和自然变换

L^AT_EX Definitions are here.

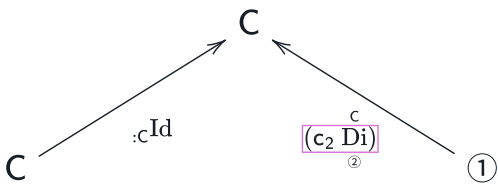
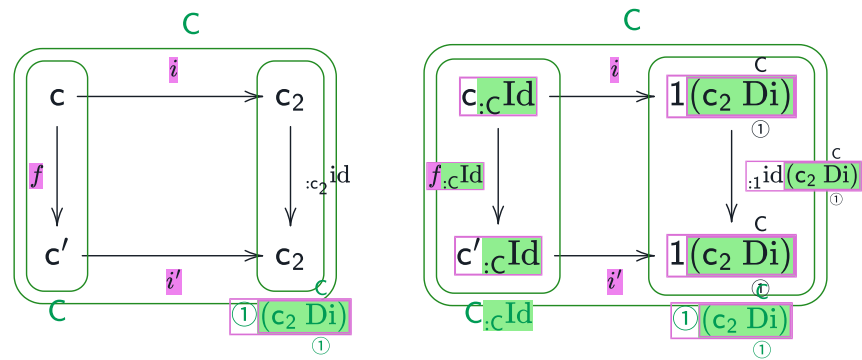
一些特殊的范畴

现在规定几种特殊的范畴。

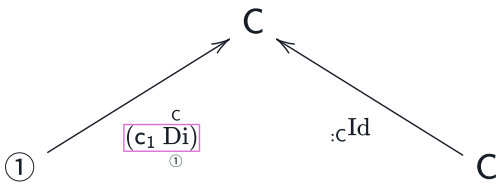
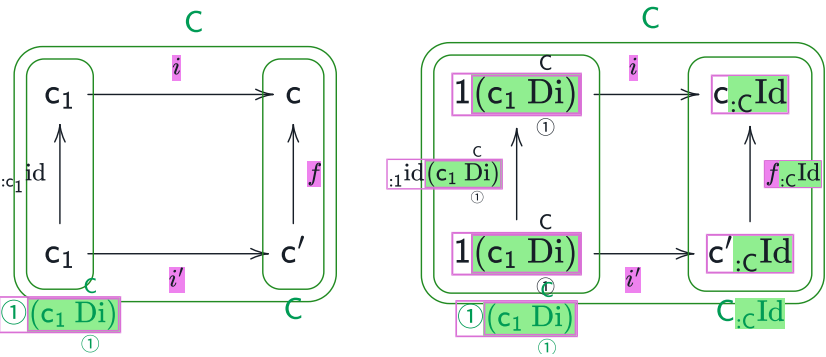
- 离散范畴：只有对象不含箭头（恒等箭头除外）的范畴。
- Set：所有集合构成的范畴，为局部小范畴，满足
 - Set 中对象为任意集合；
 - Set 中箭头为集合间映射。
- Cat：所有范畴构成的范畴，满足
 - Cat 中任何对象都构成一个范畴；
 - Cat 中任何箭头都构成一个函子。

若 C, D 为 Cat 中对象，则：

- C^{op}：反范畴，满足
 - C^{op} 中对象皆形如 c，c 为任意 C 中的对象；
 - C^{op} 中箭头皆形如 i^{op}：c₂ → c₁，i：c₁ → c₂ 可为任意 C 中的箭头。
- C^{Cat} × D^{Cat}：积范畴，满足
 - C^{Cat} × D^{Cat} 中对象皆形如 c · d，c, d 分别为任意 C, D 中的对象；
 - C^{Cat} × D^{Cat} 中箭头皆形如 i · j，i, j 分别为任意 C, D 中的箭头。
- C^{Cat} → D^{Cat}：所有 C 到 D 的函子的范畴，满足
 - C^{Cat} → D^{Cat} 中任何对象都是 C 到 D 的函子；
 - C^{Cat} → D^{Cat} 中任何箭头都是函子间自然变换。
- C/c：俯范畴，这里 c 为任意 C 中对象；满足
 - C/c₂ 中对象皆形如 ~~c · 1 · i~~，其中 c 和 i：c₁ → c₂ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
 - c₂/C 中箭头皆形如 ~~f · _{c₂}id~~ 且满足下述交换图，其中 c, c' 为 C 中任意对象且 f, i, i' 为 C 中任意箭头；



- c₁/C：仰范畴，这里 c 为任意 C 中对象；满足
 - c₁/C 中对象皆形如 ~~1 · c · i~~，其中 c 和 i：c₁ → c 分别为 C 中任意的对象和箭头；
 - C/c₁ 中箭头皆形如 ~~_{c₁}id · f~~ 且满足下述交换图，其中 c, c' 为 C 中任意对象且 f, i, i' 为 C 中任意箭头；



函子

接下来我们来提供函子的正式定义：

- $F : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{D}$ 为**函子**当且仅当
 - 对任意 \mathbf{C} 中对象 c , cF 为 \mathbf{D} 中对象且 $_{c}\text{id}F = _{:cF}\text{id}$;
 - 对任意 \mathbf{C} 中箭头 $i_1 : c_1 \xrightarrow{c} c_2$ 和 $i_2 : c_2 \xrightarrow{c} c_3$, 始终都有等式 $(i_1 \circ i_2)F = i_1F \circ i_2F$ 成立。

若已确信 $F : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{D}$ 为函子且
还知 \mathbf{C} 中有对象 c_1, c_2
以及 \mathbf{C} 中有箭头 $i : c_1 \xrightarrow{c} c_2$ 则

- 若 i 为单态 / 满态 / 同构
则 iF 为单态 / 满态 / 同构 ;
- 若 iF 为同构
则 i 为同构。

i

Note

不难发现函子具有保持
对象 / 态射性质的能力。

函子的复合运算

若还知道 $G : \mathbf{D} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{E}$ 为函子则

- $F \circ G : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{E}$
也构成一个函子。

恒等函子

对于函子我们也有恒等映射，即：

- $_{c}\text{Id} \circ F = F$
 $= F \circ _{:D}\text{Id}$

忠实，完全和本质满函子

若 $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$ 皆为**局部小范畴**，则

- F 是**忠实的**当且仅当对任意 \mathbf{C} 中的对象 c_1, c_2 ,
 $c_1 \xrightarrow{c} c_2$ 与 $c_1F \xrightarrow{D} c_2F$ 之间始终都存在单射；
- F 是**完全的**当且仅当对任意 \mathbf{C} 中的对象 c_1, c_2 ,
 $c_1 \xrightarrow{c} c_2$ 与 $c_1F \xrightarrow{D} c_2F$ 之间始终都存在满射；
- F 是**完全忠实的**当且仅当任意 \mathbf{C} 中对象 c_1, c_2 ,
 $c_1 \xrightarrow{c} c_2$ 与 $c_1F \xrightarrow{D} c_2F$ 之间始终都存在双射。

i

Note

刚才提到的 “ 单 / 满 / 双射 ”
针对的都是范畴的箭头部分。

- F 是**本质满的**当且仅当对任意 \mathbf{D} 中对象 d
都存在 \mathbf{C} 中对象 c 使 $cF \xrightarrow{D} d$ 之间有双射。

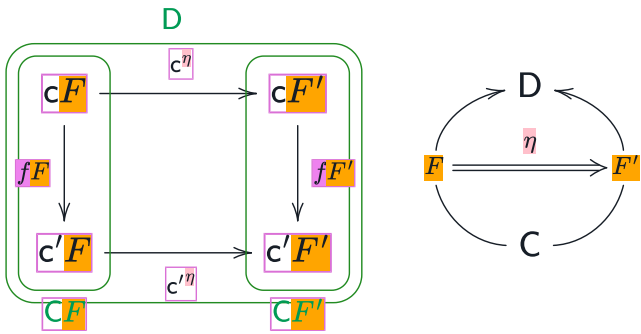
根据刚才的信息我们不难得知

- 若 F, G 为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满函子
则 $G \circ F$ 为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满 函子；
- 若 $F \circ G$ 为完全忠实函子
且知道 G 为完全忠实函子
则可知 F 为完全忠实函子；

自然变换

如果还知道 $F' : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{D}$ 为函子，那么

- $\eta : F \xrightarrow{\text{Cat}} F'$ 为自然变换当且仅当对任意 \mathbf{C} 中对象 c, c' 始终都会有下述交换图成立：

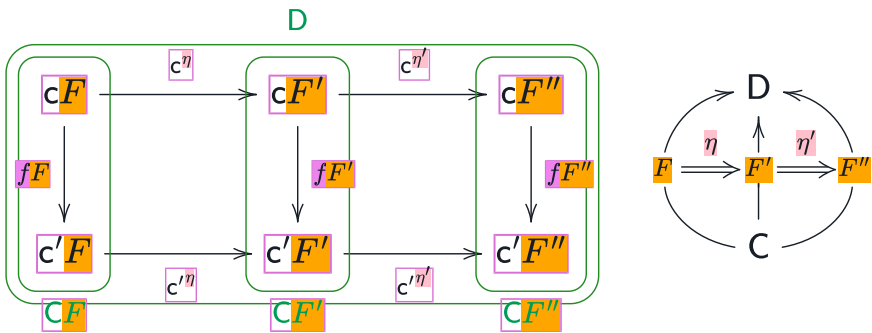


自然变换的复合

若已知 $\eta : F \xrightarrow{\text{Cat}} F'$ 构成自然变换且

还知道 $\eta' : F' \xrightarrow{\text{Cat}} F''$ 为自然变换则

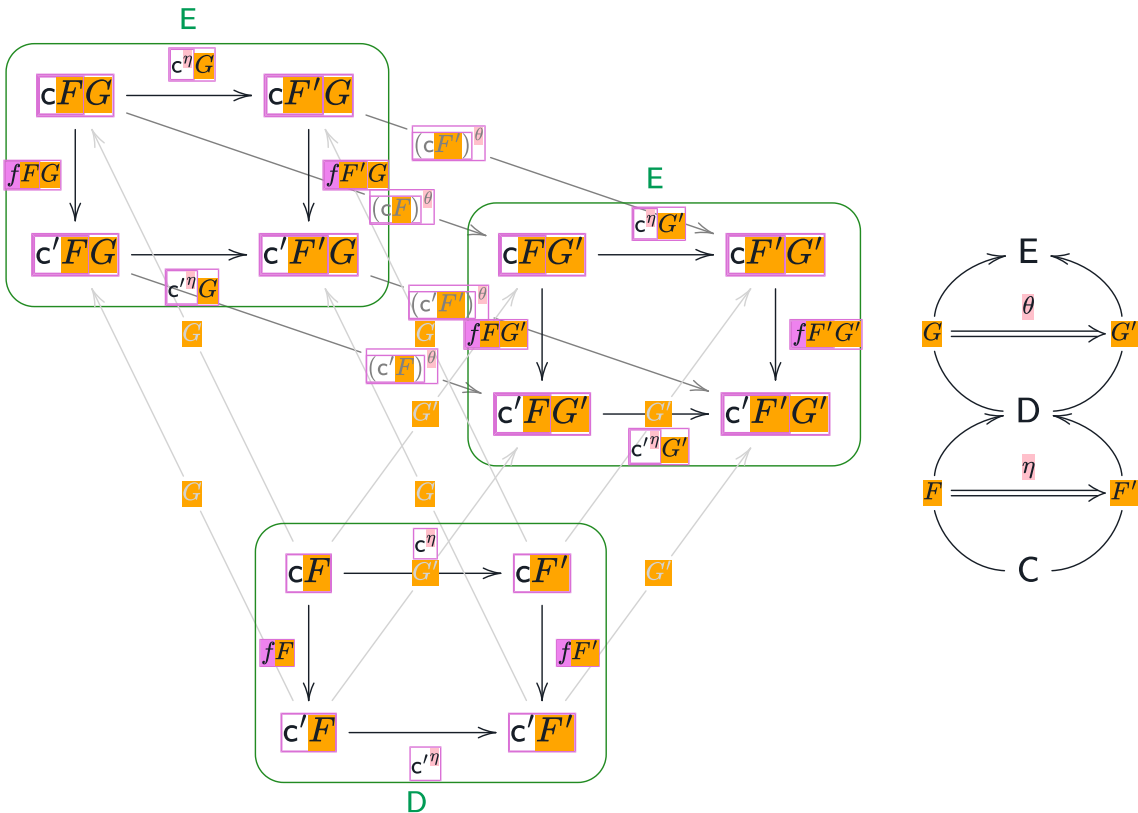
- $\eta \circ \eta' : F \xrightarrow{\text{Cat}} F''$ 为自然变换，称作 η 和 η' 的**纵复合**。



如果还知道 $G' : \mathbf{D} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{E}$ 也是个函子

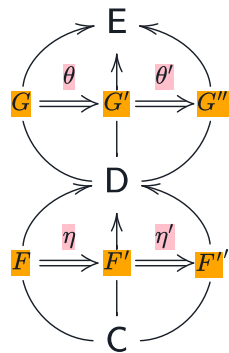
及自然变换 $\theta : G \xrightarrow{\text{Cat}} G'$ 那么便有

- $\eta \circ \theta : F \xrightarrow{\text{Cat}} G \xrightarrow{\text{Cat}} F' \xrightarrow{\text{Cat}} G'$ 为自然变换，称作 η 和 θ 的**横复合**。



若 $\theta' : G \xrightarrow{\text{Cat}} G'$ 为自然变换则

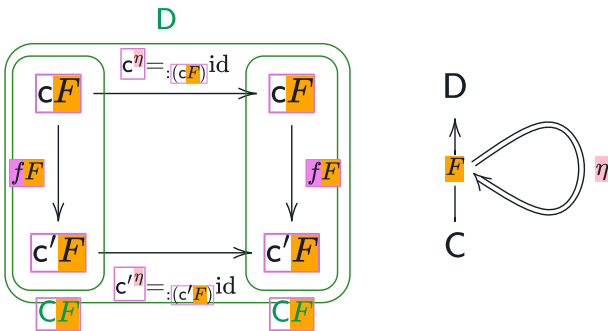
- $(\eta \circ \theta) \circ (\eta' \circ \theta') = (\eta \circ \eta') \circ (\theta \circ \theta')$ ，即便改变纵横复合先后顺序也不影响最终结果。



恒等自然变换

同样对于自然变换也有恒等映射。

- $\eta: F \rightarrow F$ 为恒等自然变换当且仅当对范畴 C 中任意对象 c 都有下述交换图成立：



自然同构

自然同构与你想象中的同构不太像。

- $\eta: F \rightarrow F'$ 为**自然同构**当且仅当 c^η 总是同构，这里 c 为任意 C 中对象。
此时 F, F' 的关系可用 $F \cong F'$ 表示

范畴等价的定义

我们用自然同构来定义范畴的等价。

- $C \cong D$ 当且仅当存在函子 $F: C \rightarrow D$ 及 $F': D \rightarrow C$ 使 $F \circ F' \cong \text{id}_D$ 并且有 $F' \circ F \cong \text{id}_C$ 。

米田引理

假如知道 $F : \mathbb{C} \xrightarrow{c} \mathbf{Set}$ 则

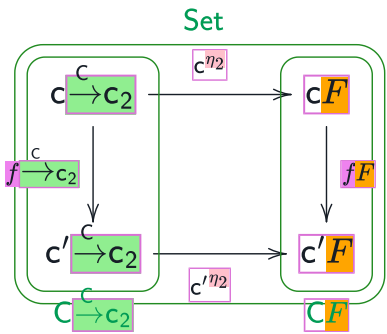
反变米田引理的陈述如下：

$$\underbrace{\left(\left((- \xrightarrow{c} c_2) \right) \xrightarrow{\mathbb{C} \xrightarrow{c} \mathbf{Set}} F \right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\left(c_2 F \right)}_{\text{一堆元素}}$$

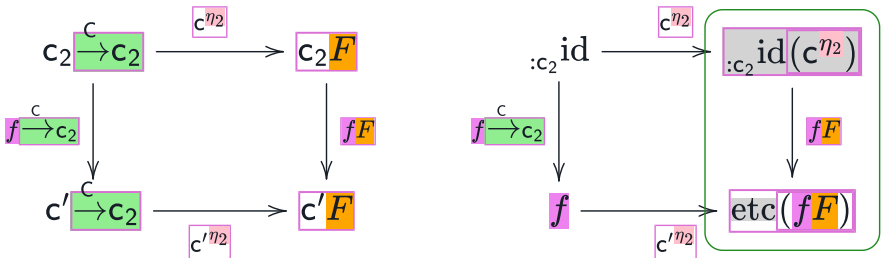
$$\underbrace{\left((- \xrightarrow{c} c_2) \right) \xrightarrow{\mathbb{C} \xrightarrow{c} \mathbf{Set}} F}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\left(c_2 F \right)}_{\text{一堆元素}}$$

反变米田引理的证明如下：

1. \Leftarrow ：考虑任意 $(c_2 F)$ 中的 etc ：根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图
我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_2} ，于是便可构建一个完整的 η_2 。
易知 η_2 是一个自然变换。



2. \Rightarrow ：考虑任意等式左侧的 η_1 ：若上述交换图成立
则可对任意 η_1 指派 $\text{etc} = \text{id}(c^{\eta_1})$ 为 $c_2 F$ 中与之对应的元素；



为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
 c_2 唯一地确定了 η_2 ，反之 η_2 也唯一确定了 c_2 。

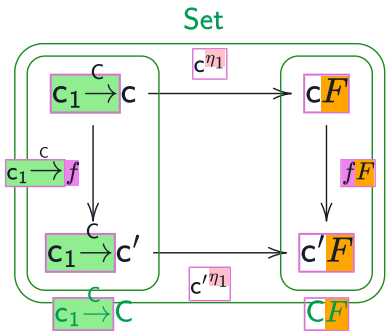
协变米田引理的陈述如下：

$$\underbrace{\left(\left(c_1 \rightarrow (-) \right) \right) \xrightarrow{\mathbb{C} \xrightarrow{c} \mathbf{Set}} F}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\left(c_1 F \right)}_{\text{一堆元素}}$$

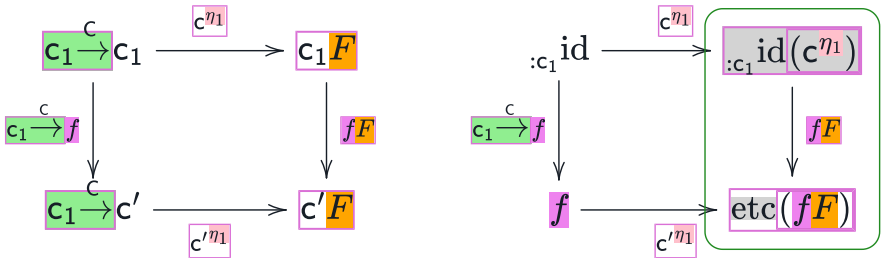
$$\underbrace{\left(c_1 \rightarrow (-) \right) \xrightarrow{\mathbb{C} \xrightarrow{c} \mathbf{Set}} F}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\left(c_1 F \right)}_{\text{一堆元素}}$$

协变米田引理的证明如下：

1. \Leftarrow ：考虑任意 $(c_1 F)$ 中的 etc ：根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图
我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_1} ，于是便可构建一个完整的 η_1 。
易知 η_1 是一个自然变换。



2. \Rightarrow ：考虑任意等式左侧的 η_1 ：若上述交换图成立
则可对任意 η_1 指派 $\text{etc} = \text{id}(c^{\eta_1})$ 为 $c_1 F$ 中与之对应的元素；



为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
 c_1 唯一地确定了 η_1 ，反之 η_1 也唯一确定了 c_1 。

米田嵌入

根据前面的内容我们可知

- よ : $C \xrightarrow{Cat} (C^{op} \xrightarrow{Set} Set)$
 $c_2 \mapsto (c_2 \xrightarrow{C^{op}} _) = (_ \xrightarrow{C} c_2)$ 构成一个函子，称作预层
 $f_2 \mapsto (f_2 \xrightarrow{C^{op}} _) = (_ \xrightarrow{C} f_2) = (_ \circ f_2)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
构成一个完全忠实函子，该函子称作是**米田嵌入**。

证明如下：

- よ 是函子，因为
 - $_{:c_2} id \downarrow = (_ \circ _ :_{c_2} id) = _ :_{(c_2 \downarrow)} id$
 - $(f_2 \circ f'_2) \downarrow = (_ \circ (f_2 \circ f'_2)) = (_ \circ f_2) \xrightarrow{Cat} Set \circ (_ \circ f'_2)$ ，

由于函子具有保持对象 / 映射性质的能力，
故便可知 $f_2 \downarrow$ 为同构当且仅当 f_2 为同构。

- よ 是完全忠实的，因为
将协变米田引理中的 $c_1 / C / F$
分别换成 $c_2 / C^{op} / (c'_2 \xrightarrow{C^{op}} _)$
即可获得下述公式：

$((c_2 \xrightarrow{C^{op}} _) \xrightarrow{C^{op} \rightarrow Set} (c'_2 \xrightarrow{C^{op}} _))$

预层范畴的 hom-set

$\cong (c'_2 \xrightarrow{C^{op}} c_2)$

C 的 hom-set

也就是

$((c_2 \downarrow) \xrightarrow{Cat} (c'_2 \downarrow))$

一堆自然变换

$\cong (c_2 (c'_2 \downarrow))$

一堆元素

Note

问题来了：既然 よ 是完全忠实的，那么是否意味着
如果 $f_2 : c_2 \xrightarrow{C} c'_2$ 是同构则上式左侧部分与之对应的
的自然变换一定就是自然同构呢？

根据前面的内容我们可知

- 尤 : $C^{op} \xrightarrow{Cat} (C \xrightarrow{Set} Set)$
 $c_1 \mapsto (c_1 \xrightarrow{C} _)$ 构成一个函子
 $f_1 \mapsto (f_1 \xrightarrow{C} _) = (f_1 \circ _)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
构成一个完全忠实函子，该函子称作是**尤达嵌入**。

证明如下：

- 尤 是函子，因为
 - $_{:c_1} id \Uparrow = (_ \circ _ :_{c_1} id) = _ :_{(c_1 \Uparrow)} id$
 - $(f_1 \circ f'_1) \Uparrow = (_ \circ (f_1 \circ f'_1)) = (_ \circ f_1) \xrightarrow{Cat} Set \circ (_ \circ f'_1)$ ，

- 尤 是完全且忠实的，因为
将协变米田引理中的 F
换成 $(c'_1 \xrightarrow{C} _)$
即可获得下述公式：

$((c_1 \xrightarrow{C} _) \xrightarrow{Cat} (c'_1 \xrightarrow{C} _))$

一堆自然变换

$\cong (c'_1 \xrightarrow{C} c_1)$

一堆元素

也就是

$((c_1 \Uparrow) \xrightarrow{Cat} (c'_1 \Uparrow))$

一堆自然变换

$\cong (c_1 (c'_1 \Uparrow))$

一堆元素

Note

问题来了：既然 尤 是完全忠实的，那么是否意味着
如果 $f_1 : c'_1 \xrightarrow{C} c_1$ 是同构则上式左侧部分与之对应的
的自然变换一定就是自然同构呢？