

02-03 范畴当中的箭头

\LaTeX Definitions are here.

沿用上一节提到的自由变量。我们规定：

- $\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow \mathbf{c}_2} =$
所有从 \mathbf{c}_1 射向 \mathbf{c}_2 的箭头构成的集。

Note

上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
其他范畴里 $\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow \mathbf{c}_2}$ 未必构成集。

范畴 \mathcal{C} 中特定的箭头可以进行复合运算：

- $\overset{\mathcal{C}}{\circ} : (\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow \mathbf{c}_2}) \times (\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_2 \rightarrow \mathbf{c}_3}) \xrightarrow{\text{Set}} (\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow \mathbf{c}_3})$
 $(\overset{\mathcal{C}}{j_1} \cdot \overset{\mathcal{C}}{j_2}) \mapsto (\overset{\mathcal{C}}{j_1 \circ j_2})$

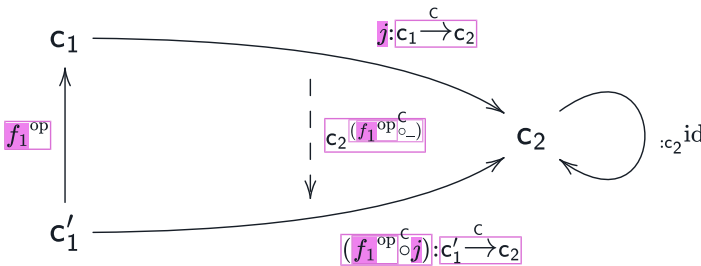
如果我们还知道箭头 f_1, j, f_2 分别属于
 $\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow \mathbf{c}'_1}, \overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow \mathbf{c}_2}, \overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_2 \rightarrow \mathbf{c}'_2}$ 那么便可知

- $(f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} j) \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2 = f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} (j \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2),$
即箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便可获得新的函数：

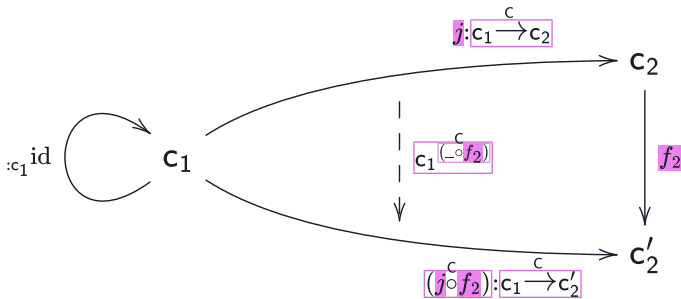
- $(f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) : (\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow _}) \xrightarrow{\overset{\text{Cat}}{\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}}} (\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}'_1 \rightarrow _})$
 $j \mapsto (\overset{\mathcal{C}}{f_1^{\text{op}} \circ j})$

称作**前复合**。下图有助于形象理解：



- $(_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) : (_ \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow \mathbf{c}_2}) \xrightarrow{\overset{\text{Cat}}{\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}}} (_ \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow \mathbf{c}'_2})$
 $j \mapsto (\overset{\mathcal{C}}{j \circ f_2})$

称作**后复合**。下图有助于形象理解：



根据上面的定义不难得出下述结论：

- $(f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) \overset{???}{\circ} (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) = (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) \overset{???}{\circ} (f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)$
复合运算具有**结合律**，即后面提到的**自然性**；
- $(_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} j) \overset{\overset{\text{Cat}}{\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}}}{\circ} (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) = (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} (j \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2))$
前复合与复合运算的关系
- $(\overset{\mathcal{C}}{j \circ _}) \overset{\overset{\text{Cat}}{\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}}}{\circ} (f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) = ((f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} j) \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)$
后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。

假如 a_1 为 \mathbf{c}_1 的全局元素则可规定

- $\mathbf{c}_1 j = \mathbf{c}_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} j$

恒等箭头

范畴 \mathbf{C} 内的每个对象都有恒等映射：

- $\text{id}_{c_1} : c_1 \rightarrow c_1$
 $c_1 \mapsto c_1$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- $\text{id}_{c_1} \circ j = j$
 $= j \circ \text{id}_{c_2}$

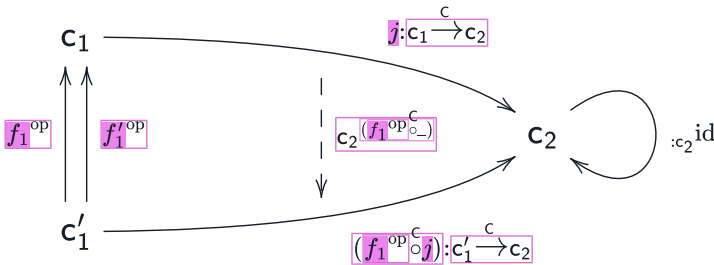
此外还可以得知

- $(\text{id}_{c_1} \circ -) : (c_1 \rightarrow -) \xrightarrow{\text{Cat}} (c_1 \rightarrow -)$
为恒等自然变换，可记成是 $(\text{id}_{c_1} \circ -)$ ；
- $(- \circ \text{id}_{c_2}) : (- \rightarrow c_2) \xrightarrow{\text{Cat}} (- \rightarrow c_2)$
为恒等自然变换，可记成是 $(- \circ \text{id}_{c_2})$ 。

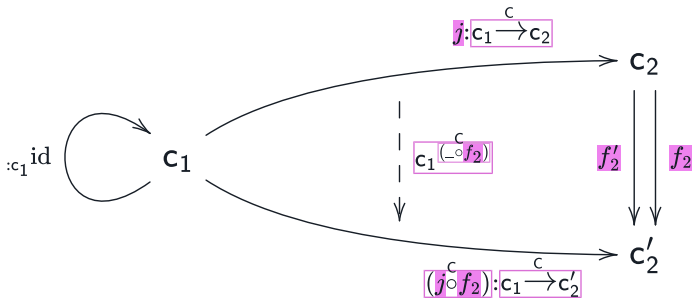
单满态以及同构

接下来给出单 / 满态和同构的定义。

- j 为**单态**当且仅当对任意 c'_1
若有 $f_1, f'_1 : c_1 \rightarrow c'_1$ 满足 $f_1 \circ j = f'_1 \circ j$
则有 $f_1 = f'_1$ 。详情见下图：



- j 为**满态**当且仅当对任意 c'_2
若有 $f_2, f'_2 : c_2 \rightarrow c'_2$ 满足 $j \circ f_2 = j \circ f'_2$
则有 $f_2 = f'_2$ 。详情见下图：



- i 为**同构**当且仅当存在 $j' : c_2 \rightarrow c_1$
使得 $j \circ j' = \text{id}_{c_1}$ 且 $j' \circ j = \text{id}_{c_2}$ 。
此时 c_1, c_2 间的关系可记作 $c_1 \cong c_2$ 。

若还知道 $j = j_1$ 且 $j_2 : c_2 \rightarrow c_3$ 则有

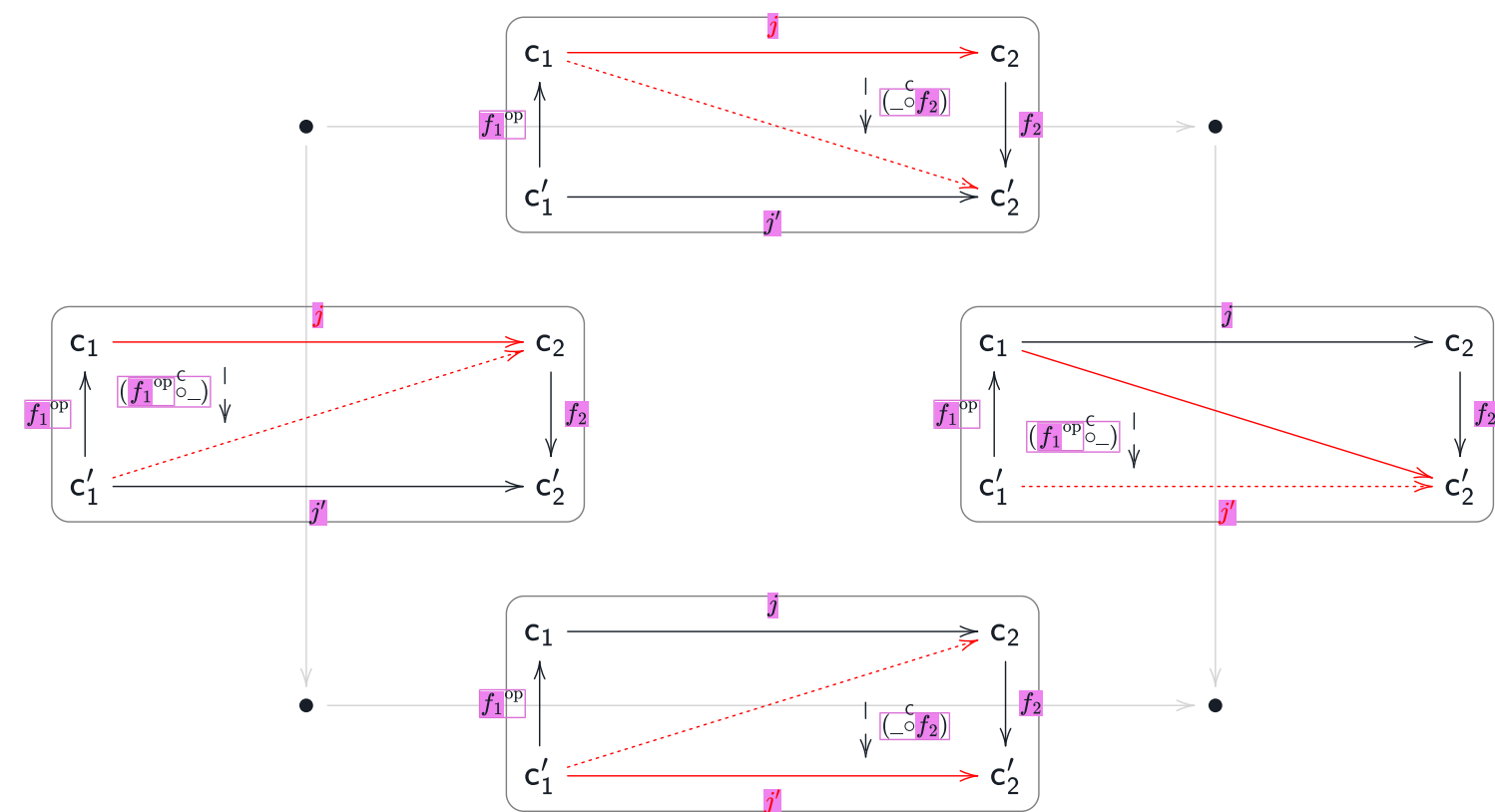
- 若 j_1, j_2 为单态 / 满态 / 同构
则 $j_1 \circ j_2$ 为单态 / 满态 / 同构；
- 若 $j_1 \circ j_2$ 为同构
且 j_1, j_2 中有一个为同构
则 j_1, j_2 两者皆构成同构。

不仅如此我们还可以得出下述结论：

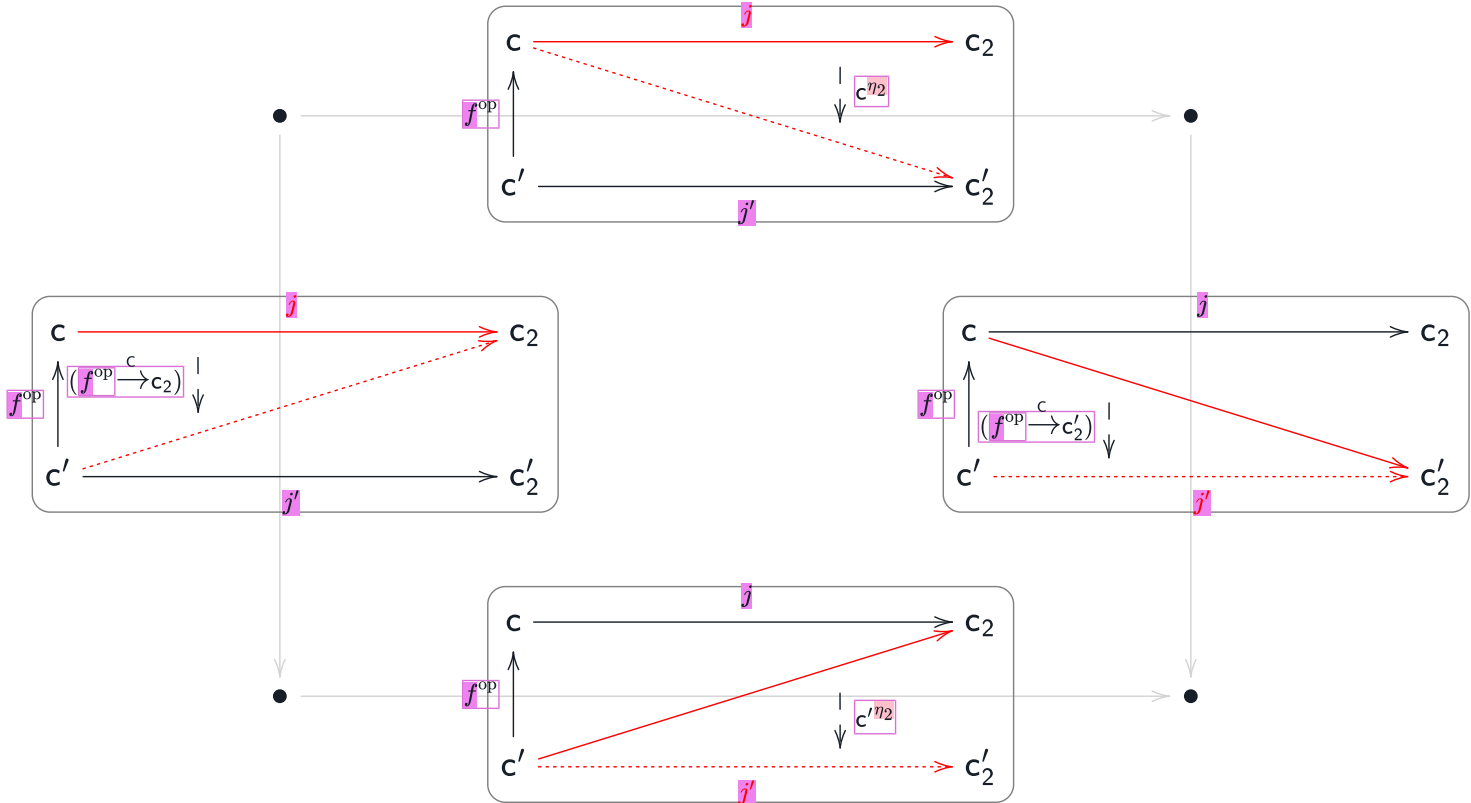
- c_1 为单态，
由 id_{c_1} 的唯一性可知；
- $\text{id}_0 = \text{id}_1$ 为同构，
因为 $0 \rightarrow 0 = \{\text{id}_0\}$
并且 $1 \rightarrow 1 = \{\text{id}_1\}$

同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释。
后面会将自然性进行进一步推广。



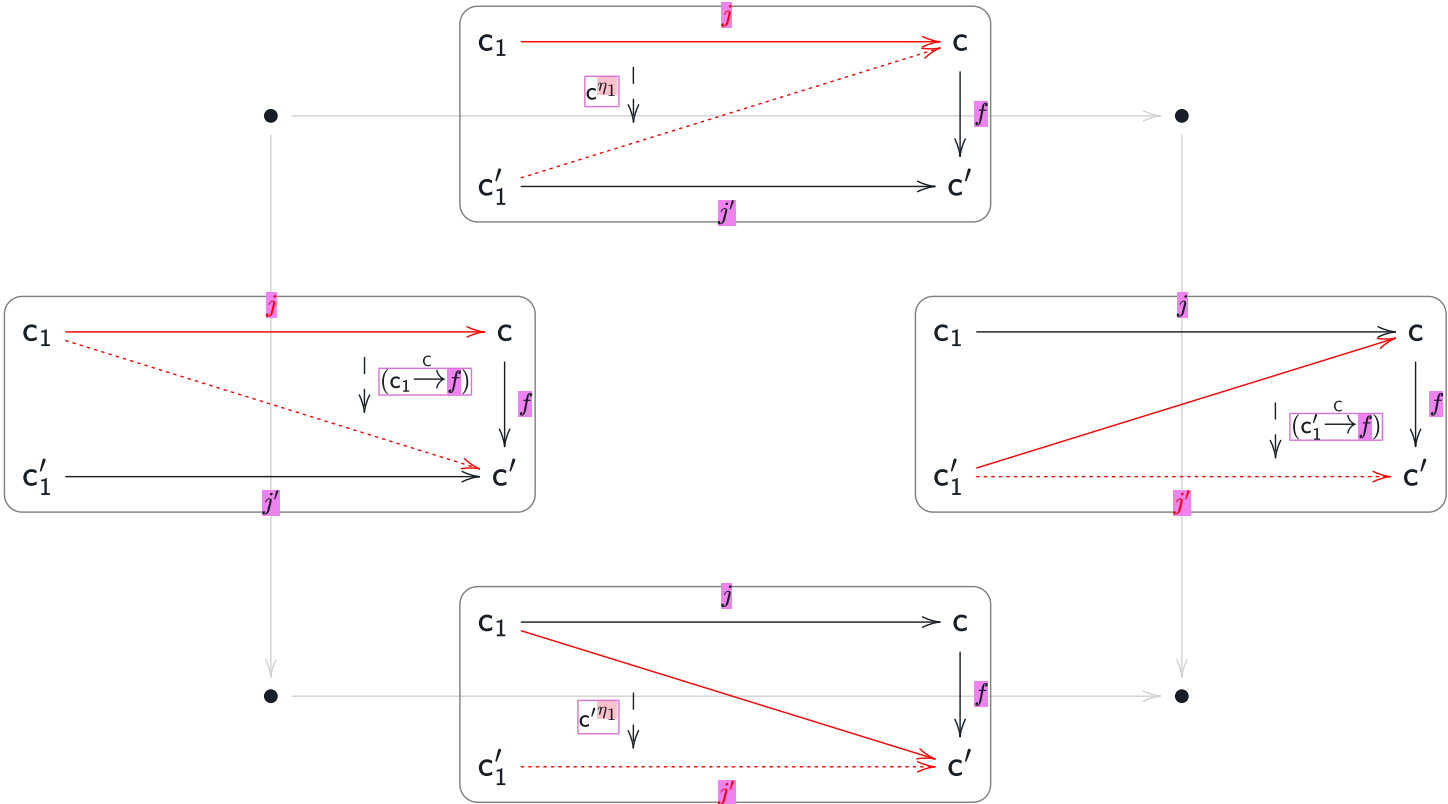
现提供自然变换 η_2 满足自然性 —— 即对任意 \mathcal{C} 中对象 c, c' 以及任意 \mathcal{C} 中映射 $f: c \rightarrow c'$ 都有 $(f^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2) \circ^{\text{Set}} c' \eta_2 = c \eta_2 \circ^{\text{Set}} (f^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} c'_2)$:



那么我们便会有下述结论：

- $c_2 \cong c'_2$ 当且仅当对任意 \mathcal{C} 中的对象 c $c \eta_2$ 都是同构。此时称 η_2 为**自然同构**。

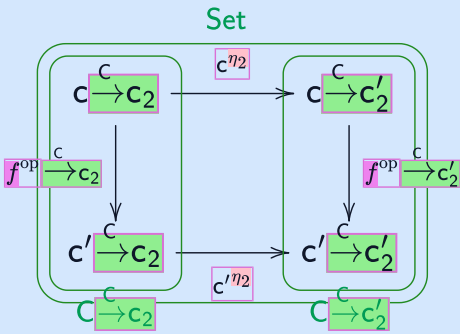
现提供自然变换 η_1 满足自然性 —— 即对任意 \mathcal{C} 中对象 c, c' 以及任意 \mathcal{C} 中映射 $f: c \rightarrow c'$ 都有 $(c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} f) \circ^{\text{Set}} c' \eta_1 = c \eta_1 \circ^{\text{Set}} (c'_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} f)$:



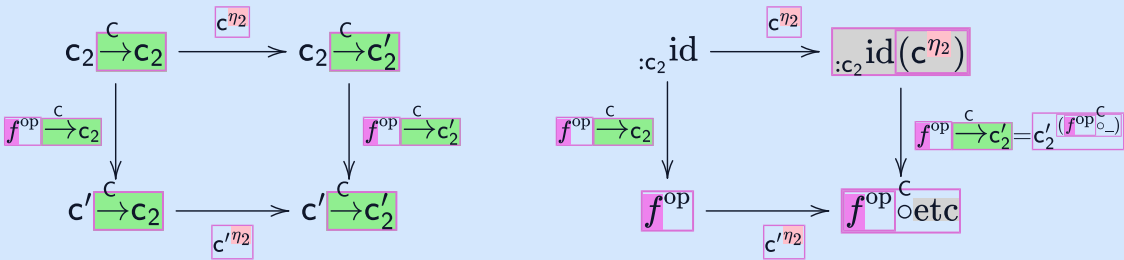
那么我们便会有下述结论：

- $c_1 \cong c'_1$ 当且仅当对任意 \mathcal{C} 中的对象 c $c \eta_1$ 都是同构。此时称 η_1 为**自然同构**。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为



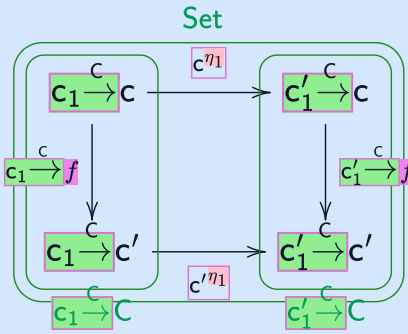
⇒ 易证, ⇐ 用到了米田技巧 将 c 换成 c₂ :



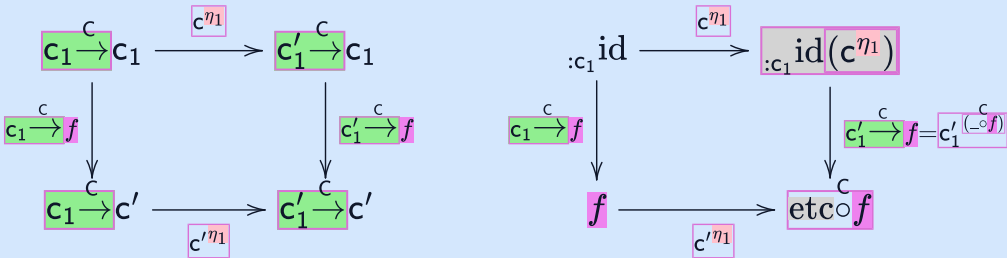
为了方便就用 etc 表示 $_{:c_2} \text{id}(c^{\eta_2})$ 。由上图
知 $f^{\text{op}}(c'^{\eta_2}) = (f^{\text{op}} \circ \text{etc})$ (见右图底部和右侧箭头),
故 $c'^{\eta_2} = c' \xrightarrow{c} \text{etc}$ (注意到箭头 $f^{\text{op}} : c' \xrightarrow{c} c$);
而 $c'^{\eta_2} = c' \xrightarrow{c} \text{etc} = c' \xrightarrow{(- \circ \text{etc})}$ 始终是同构
故 $\text{etc} : c_2 \xrightarrow{c} c'_2$ 也是同构。

Note
高亮部分省去了部分推理过程，
具体在米田嵌入处会详细介绍。

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为



⇒ 易证, ⇐ 用到了米田技巧 将 c 换成 c₁ :



为了方便就用 etc 表示 $_{:c_1} \text{id}(c^{\eta_1})$ 。由上图
知 $f(c'^{\eta_1}) = (\text{etc} \circ f)$ (见右图底部和右侧箭头),
故 $c'^{\eta_1} = \text{etc} \xrightarrow{c} c'$ (注意到箭头 $f : c \xrightarrow{c} c'$);
而 $c'^{\eta_1} = \text{etc} \xrightarrow{c} c' = c' \xrightarrow{(\text{etc} \circ -)}$ 始终是同构
故 $\text{etc} : c_1 \xrightarrow{c} c'_1$ 也是同构。

Note
高亮部分省去了部分推理过程，
具体在米田嵌入处会详细介绍。