

## 米田引理

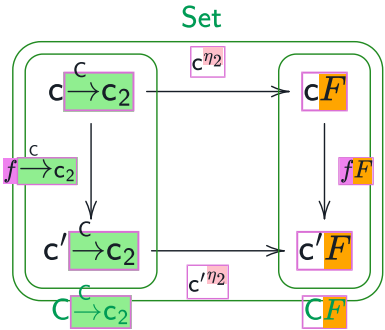
假如知道  $F : \mathbb{C} \xrightarrow{\mathbb{C}} \mathbf{Set}$  则

反变米田引理的陈述如下：

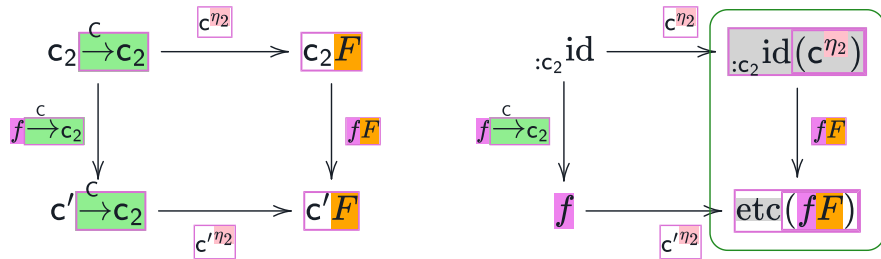
- $$\underbrace{\left( \left( (- \xrightarrow{\mathbb{C}} c_2) \xrightarrow{\mathbb{C} \xrightarrow{\mathbb{C}} \mathbf{Set}} F \right) \right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\left( c_2 F \right)}_{\text{一堆元素}}$$

反变米田引理的证明如下：

1.  $\Leftarrow$  : 考虑任意  $(c_2 F)$  中的  $\text{etc}$  : 根据  $\text{etc}$  及其所对应的上方右侧的交换图我们可为每个对象  $c'$  定义其所对应的  $c'^{\eta_2}$  , 于是便可构建一个完整的  $\eta_2$  。易知  $\eta_2$  是一个自然变换。



2.  $\Rightarrow$  : 考虑任意等式左侧的  $\eta_1$  : 若上述交换图成立则可对任意  $\eta_1$  指派  $\text{etc} = \text{id}(c^{\eta_1})$  为  $c_2 F$  中与之对应的元素；



为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！

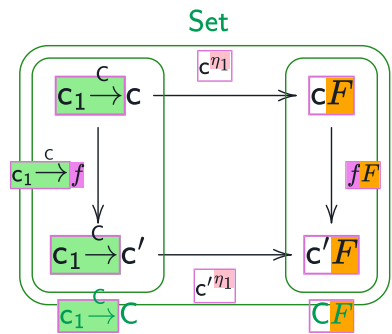
$c_2$  唯一地确定了  $\eta_2$  , 反之  $\eta_2$  也唯一确定了  $c_2$  。

协变米田引理的陈述如下：

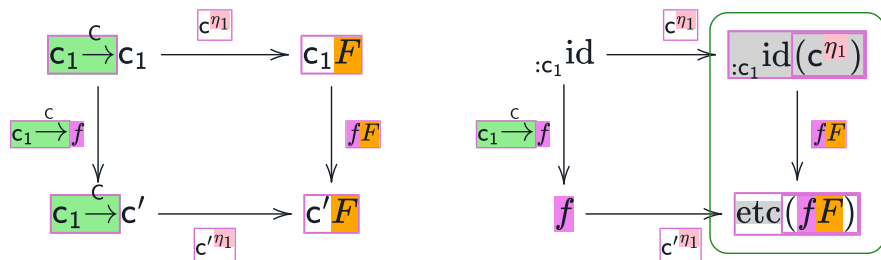
- $$\underbrace{\left( \left( c_1 \rightarrow (-) \right) \xrightarrow{\mathbb{C} \xrightarrow{\mathbb{C}} \mathbf{Set}} F \right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\left( c_1 F \right)}_{\text{一堆元素}}$$

协变米田引理的证明如下：

1.  $\Leftarrow$  : 考虑任意  $(c_1 F)$  中的  $\text{etc}$  : 根据  $\text{etc}$  及其所对应的上方右侧的交换图我们可为每个对象  $c'$  定义其所对应的  $c'^{\eta_1}$  , 于是便可构建一个完整的  $\eta_1$  。易知  $\eta_1$  是一个自然变换。



2.  $\Rightarrow$  : 考虑任意等式左侧的  $\eta_1$  : 若上述交换图成立则可对任意  $\eta_1$  指派  $\text{etc} = \text{id}(c^{\eta_1})$  为  $c_1 F$  中与之对应的元素；



为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！

$c_1$  唯一地确定了  $\eta_1$  , 反之  $\eta_1$  也唯一确定了  $c_1$  。



# 米田嵌入

根据前面的内容我们可知

- よ :  $C \xrightarrow{\text{Cat}} ((C^{\text{op}} \xrightarrow{\text{Set}} \text{Set}))$   
 $c_2 \mapsto (c_2 \xrightarrow{C} \_)$  构成一个函子，称作预层  
 $f_2 \mapsto (f_2 \xrightarrow{C^{\text{op}}} \_) = (\_ \xrightarrow{C} f_2) = (\_ \circ f_2)$  构成一个函子间映射，即自然变换  
构成一个完全忠实函子，该函子称作是**米田嵌入**。

证明如下：

- よ 是函子，因为
  - $_{:c_2} \text{id} \downarrow = (\_ \circ_{:c_2} \text{id}) = _{:(c_2 \downarrow)} \text{id}$
  - $(f_2 \circ f'_2) \downarrow = (\_ \circ (f_2 \circ f'_2)) = (\_ \circ f_2) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} (\_ \circ f'_2)$ ，

由于函子具有保持对象 / 映射性质的能力，  
故便可知  $f_2 \downarrow$  为同构当且仅当  $f_2$  为同构。

- よ 是完全忠实的，因为  
将协变米田引理中的  $c_1 / C / F$   
分别换成  $c_2 / C^{\text{op}} / (c'_2 \xrightarrow{C} \_)$   
即可获得下述公式：

$$\underbrace{((c_2 \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{C^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}} (c'_2 \xrightarrow{C} \_))}_{\text{预层范畴的 hom-set}} \cong \underbrace{(c'_2 \xrightarrow{C} c_2)}_{C \text{ 的 hom-set}}$$

也就是

$$\underbrace{((c_2 \downarrow) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} (c'_2 \downarrow))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(c'_2 \xrightarrow{C} c_2)}_{C \text{ 的 hom-set}} = \underbrace{(c_2 (c'_2 \downarrow))}_{\text{一堆元素}}$$

### Note

由于函子能够保持态射的性质，  
对任意左侧集合中的自然同构  
右侧集合也会有同构与之对应，反之亦然。  
这也就证明了前面自然同构相关定理省略的部分。

根据前面的内容我们可知

- 尤 :  $C^{\text{op}} \xrightarrow{\text{Cat}} (C \xrightarrow{\text{Set}} \text{Set})$   
 $c_1 \mapsto (c_1 \xrightarrow{C} \_)$  构成一个函子  
 $f_1 \mapsto (f_1 \xrightarrow{C} \_) = (f_1 \circ \_)$  构成一个函子间映射，即自然变换  
构成一个完全忠实函子，该函子称作是**尤达嵌入**。

证明如下：

- 尤 是函子，因为
  - $_{:c_1} \text{id} \Uparrow = (\_ \circ_{:c_1} \text{id}) = _{:(c_1 \Uparrow)} \text{id}$
  - $(f_1 \circ f'_1) \Uparrow = (\_ \circ (f_1 \circ f'_1)) = (\_ \circ f_1) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} (\_ \circ f'_1)$ ，

- 尤 是完全且忠实的，因为  
将协变米田引理中的  $F$   
换成  $(c'_1 \xrightarrow{C} \_)$   
即可获得下述公式：

$$\underbrace{((c_1 \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} (c'_1 \xrightarrow{C} \_))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(c'_1 \xrightarrow{C} c_1)}_{\text{一堆元素}}$$

也就是

$$\underbrace{((c_1 \Uparrow) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} (c'_1 \Uparrow))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(c'_1 \xrightarrow{C} c_1)}_{\text{一堆元素}} = \underbrace{(c_1 (c'_1 \Uparrow))}_{\text{一堆元素}}$$

### Note

由于函子能够保持态射的性质，  
对任意左侧集合中的自然同构  
右侧集合也会有同构与之对应，反之亦然。  
这也就证明了前面自然同构相关定理省略的部分。