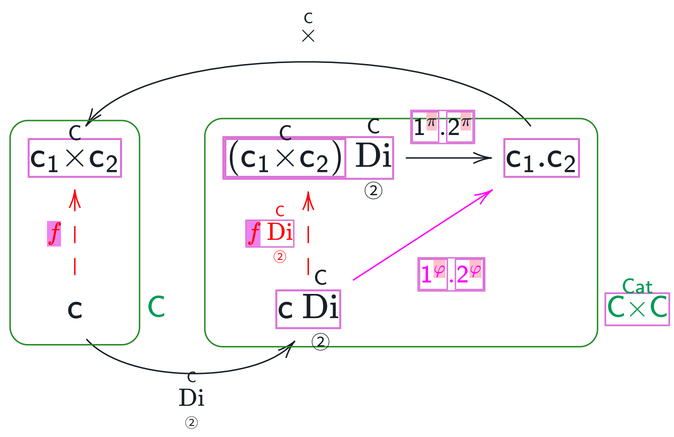
04-05 类型的和与积

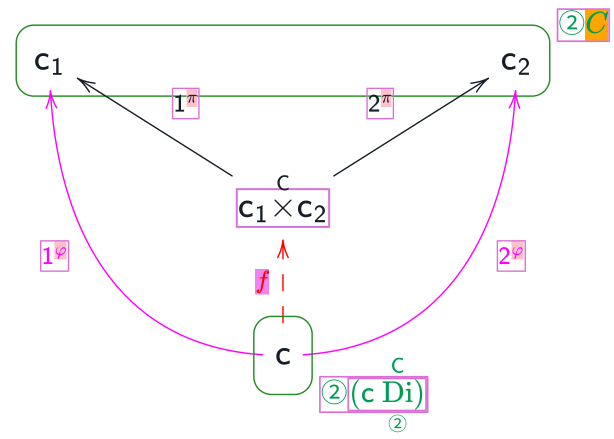
LaTeX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{C}{\times} : (C \times C) \overset{Cat}{\longrightarrow} C$ 在范畴 C 中有如下性质：

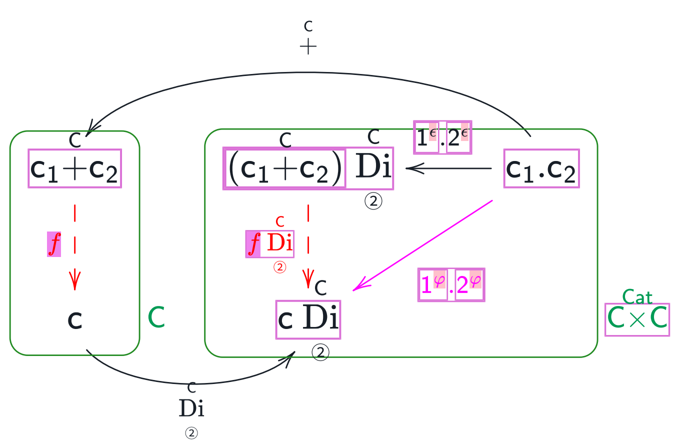
- $(c \overset{C}{\to} c_1) \overset{Set}{\times} (c \overset{C}{\to} c_2) \overset{Set}{\cong} c \overset{C}{\to} (c_1 \overset{C}{\times} c_2)$ —— c 为任意 C 中对象。此即为积的 **泛性质**，亦为**指数对乘法的分配律** 。

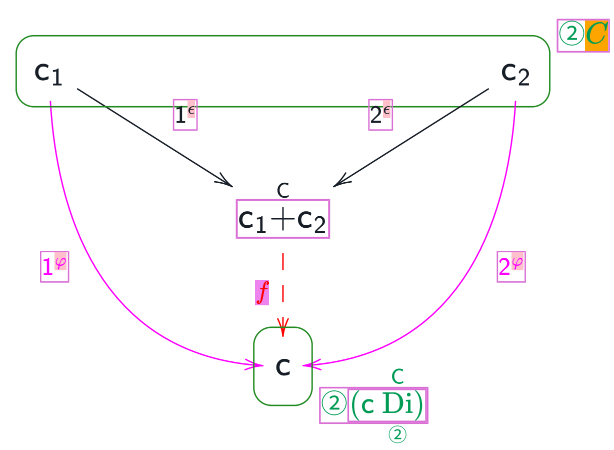




默认函子 $\overset{C}{+} : (C \times C) \overset{Cat}{\longrightarrow} C$ 在范畴 C 中有如下性质：

- $(c_1 \overset{C}{\to} c) \overset{Set}{\times} (c_2 \overset{C}{\to} c) \overset{Set}{\cong} (c_1 \overset{C}{+} c_2) \overset{C}{\to} c$ —— c 为任意 C 中对象。此即为和的 **泛性质**，亦为**指数对加法的分配律** 。



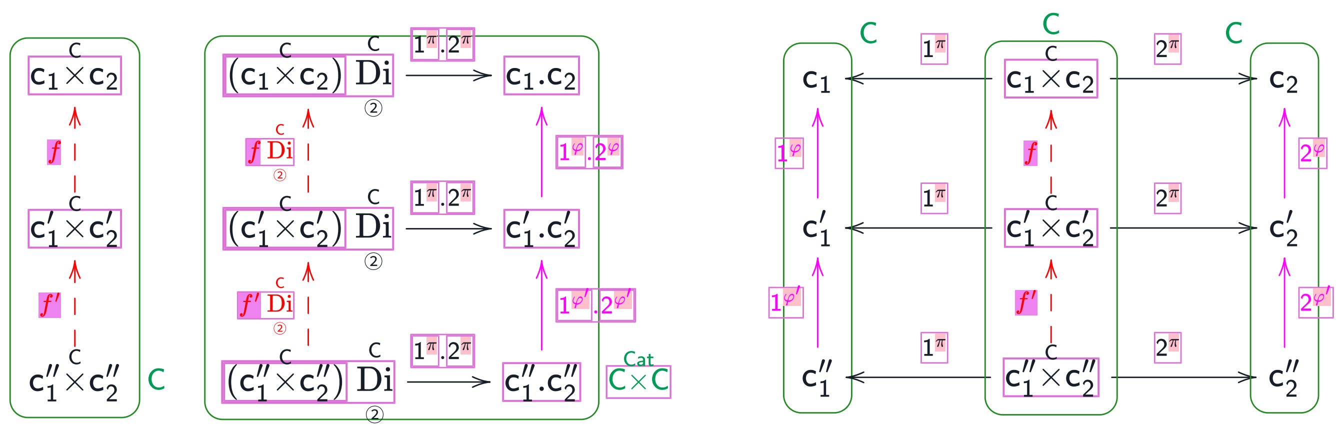


> **Note**
>
> 在上面的插图中
>
> - $\underset{\text{②}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} : C \overset{Cat}{\longrightarrow} (C \overset{Cat}{\times} C)$ 为对角函子满足
> $c \longmapsto (c\,.\,c)$
> - $\underset{\text{②}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} : C \overset{Cat}{\longrightarrow} (\text{②} \overset{Cat}{\longrightarrow} C)$
> $c \longmapsto$ 常值函子
> $c\,\underset{\text{②}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} : \text{②} \overset{Cat}{\longrightarrow} C$
> $1 \longmapsto c$
> $2 \longmapsto c$
> $f \longmapsto {}_{:c}\mathrm{id}$
>   即为对角函子的第二种等价的定义 。② 为仅含两个对象的范畴，在此则作为一个指标范畴 。1 和 2 分别为其中的对象 。
> - $\mathcal{C} : \text{②} \overset{Cat}{\longrightarrow} C$ 为函子，满足
> $1 \longmapsto c_1$
> $2 \longmapsto c_2$
> - 不难看出上图中
> $\pi : (c_1 \overset{C}{\times} c_2)\,\underset{\text{②}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \overset{Cat}{\longrightarrow} \mathcal{C}$
> $\epsilon : \mathcal{C} \overset{Cat}{\longrightarrow} (c_1 \overset{C}{+} c_2)\,\underset{\text{②}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}$
>   都构成自然变换 。$1^{\pi}\,.\,2^{\pi}$ 和 $1^{\epsilon}\,.\,2^{\epsilon}$ 可分别视作是 π 和 ϵ 。

函子性

如何证明 $\overset{C}{\times}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{C}{\times} : ({}_{:c_1'}\mathrm{id} \,.\, {}_{:c_2'}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(c_1' \overset{C}{\times} c_2')}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{C}{\times}$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{C}{\times} : (1^{\varphi'} \overset{C}{\circ} 1^{\varphi} \,.\, 2^{\varphi'} \overset{C}{\circ} 2^{\varphi}) \longmapsto (f' \overset{C}{\circ} f)$
  —— 即函子 $\overset{C}{\times}$ 保持**箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：

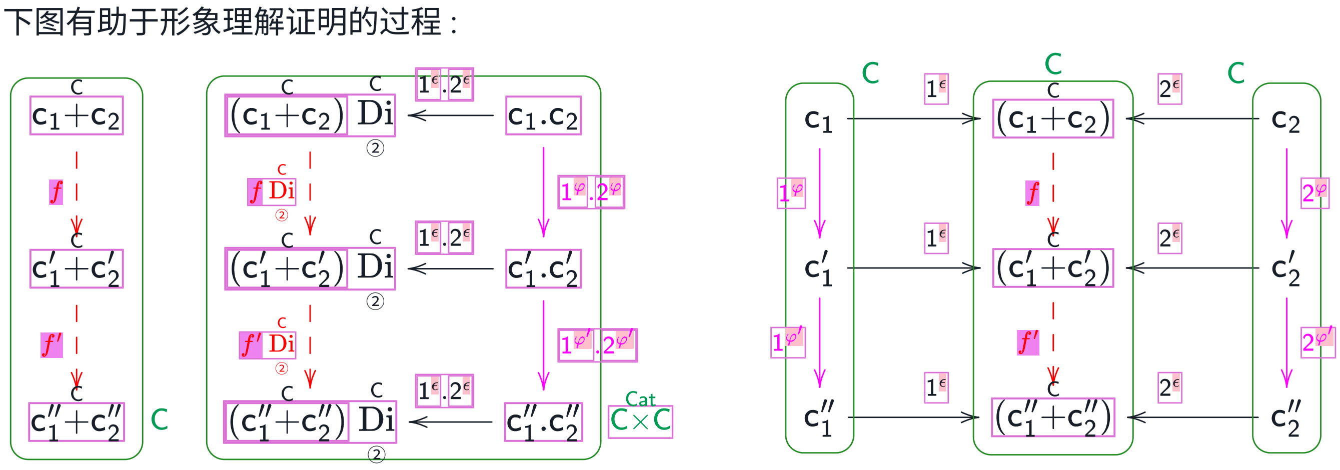


另外我们规定 $\overset{C}{\times}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{C}{\times} : (1^{\varphi} \,.\, c_2) \longmapsto (1^{\varphi} \overset{C}{\times} {}_{:c_2}\mathrm{id})$
  $\overset{C}{\times} : (c_1 \,.\, 2^{\varphi}) \longmapsto ({}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{C}{\times} 2^{\varphi})$

如何证明 $\overset{C}{+}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{C}{+} : ({}_{:c_1}\mathrm{id} \,.\, {}_{:c_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(c_1 \overset{C}{+} c_2)}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{C}{+}$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{C}{+} : (1^{\varphi} \overset{C}{\circ} 1^{\varphi'} \,.\, 2^{\varphi} \overset{C}{\circ} 2^{\varphi'}) \longmapsto (f \overset{C}{\circ} f')$
  —— 即函子 $\overset{C}{\times}$ 保持**箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：



另外我们规定 $\overset{C}{+}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{C}{+} : (1^{\varphi} \,.\, c_2) \longmapsto (1^{\varphi} \overset{C}{+} {}_{:c_2}\mathrm{id})$
  $\overset{C}{+} : (c_1 \,.\, 2^{\varphi}) \longmapsto ({}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{C}{+} 2^{\varphi})$

运算性质

对于函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 我们不难得知

- $c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} 1 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} 1 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c_1$

  —— 乘法具有**幺元** 1 。

  下图有助于理解证明目标，即 $1^{\varphi} . {}_{:c}!$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd} (c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} 1)\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "1^{\pi}.2^{\pi}"] & c_1.1 \\ c\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "1^{\varphi}.{}_{:c}!"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c_1\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "{}_{:c_1}\mathrm{id}.{}_{:c_1}!"] & c_1.1 \\ c\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f'\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "1^{\varphi}.{}_{:c}!"'] & \end{tikzcd}$$

- $c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} c_2 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c_2 \overset{\mathsf{C}}{\times} c_1$

  —— 乘法具有**交换律** 。

  下图有助于理解证明目标，即 $1^{\varphi} . 2^{\varphi}$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd} (c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} c_2)\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "1^{\pi}.2^{\pi}"] & c_1.c_2 \\ c\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "1^{\varphi}.2^{\varphi}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (c_2 \overset{\mathsf{C}}{\times} c_1)\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "1^{\pi}.2^{\pi}"] & c_2.c_1 \\ c\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f'\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "2^{\varphi}.1^{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

- $(c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} c_2) \overset{\mathsf{C}}{\times} c_3 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} (c_2 \overset{\mathsf{C}}{\times} c_3)$

  —— 乘法具有**结合律** 。

  下图有助于理解证明目标，即 $(1^{\varphi} . 2^{\varphi}) . 3^{\varphi}$ 唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd} ((c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} c_2) \overset{\mathsf{C}}{\times} c_3)\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi"] & (c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} c_2).c_3 \arrow[r, "\pi.{}_{:c_3}\mathrm{id}"] & (c_1.c_2).c_3 \\ c_3\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, dotted, "\varphi.3^{\varphi}"] \arrow[urr, "(1^{\varphi}.2^{\varphi}).3^{\varphi}"'] & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} (c_2 \overset{\mathsf{C}}{\times} c_3))\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi"] & c_1.(c_2 \overset{\mathsf{C}}{\times} c_3) \arrow[r, "{}_{:c_1}\mathrm{id}.\pi"] & c_1.(c_2.c_3) \\ c_3\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f'\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, dotted, "1^{\varphi}.\varphi"] \arrow[urr, "1^{\varphi}.(2^{\varphi}.3^{\varphi})"'] & & \end{tikzcd}$$

对于函子 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ 我们不难得知

- $c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} 0 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} 1 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c_1$

  —— 加法具有**幺元** 0 。

  下图有助于理解证明目标，即 $1^{\varphi} . {}_{:c}\text{¡}$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd} (c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} 0)\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.0 \arrow[l, "1^{\epsilon}.2^{\epsilon}"'] \arrow[dl, "1^{\varphi}.{}_{:c}\text{¡}"] \\ c\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c_1\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f'\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.0 \arrow[l, "1^{\epsilon}.2^{\epsilon}"'] \arrow[dl, "1^{\varphi}.{}_{:c}\text{¡}"] \\ c\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} & \end{tikzcd}$$

- $c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} c_2 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c_2 \overset{\mathsf{C}}{+} c_1$

  —— 加法具有**交换律** 。

  下图有助于理解证明目标，即 $1^{\varphi} . 2^{\varphi}$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd} (c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} c_2)\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.c_2 \arrow[l, "1^{\epsilon}.2^{\epsilon}"'] \arrow[dl, "1^{\varphi}.2^{\varphi}"] \\ c\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (c_2 \overset{\mathsf{C}}{+} c_1)\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f'\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"'] & c_2.c_1 \arrow[l, "1^{\epsilon}.2^{\epsilon}"'] \arrow[dl, "2^{\varphi}.1^{\varphi}"] \\ c\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} & \end{tikzcd}$$

- $(c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} c_2) \overset{\mathsf{C}}{+} c_3 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} (c_2 \overset{\mathsf{C}}{+} c_3)$

  —— 加法具有**结合律** 。

  下图有助于理解证明目标，即 $(1^{\varphi} . 2^{\varphi}) . 3^{\varphi}$ 唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd} ((c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} c_2) \overset{\mathsf{C}}{+} c_3)\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"'] & (c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} c_2).c_3 \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "\varphi.3^{\varphi}"] & (c_1.c_2).c_3 \arrow[l, "\epsilon.{}_{:c_3}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "(1^{\varphi}.2^{\varphi}).3^{\varphi}"] \\ c\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} (c_2 \overset{\mathsf{C}}{+} c_3))\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f'\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.(c_2 \overset{\mathsf{C}}{+} c_3) \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "1^{\varphi}.\varphi"] & c_1.(c_2.c_3) \arrow[l, "\epsilon.{}_{:c_3}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "1^{\varphi}.(2^{\varphi}.3^{\varphi})"] \\ c\,\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} & & \end{tikzcd}$$

幺半范畴

像刚才这样对象运算具有**单位元**以及**结合律**的范畴称作**幺半范畴**；

若上述范畴还具有**交换律**则称作**对称幺半范畴**；

很明显我们的范畴 C 是典型的**对称幺半范畴**。

幺半群

什么是幺半群呢？有两种定义方式：

- **幺半群** M 是个范畴，其只含一个对象 m；
  其中的复合运算正好有单位元以及结合律。
- 对象 m 属于幺半范畴 C，满足下述交换图：

$$
\begin{tikzcd}
1 \overset{C}{\times} m \arrow[r, "u \overset{C}{\otimes}_{:m} \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\text{左单位元 } u_l"'] & m \overset{C}{\times} m \arrow[d, "p" description, "\text{运算结果唯一}"] & m \overset{C}{\times} 1 \arrow[l, "{}_{:m}\mathrm{id} \overset{C}{\otimes} u"'] \arrow[dl, "u_r \text{ 右单位元}"] \\
 & m &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(m \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\times} m \arrow[rr, "\text{结合律 } a"] \arrow[d, "\text{先算左侧括号 } p \overset{C}{\otimes}_{:m} \mathrm{id}"'] & & m \overset{C}{\times} (m \overset{C}{\times} m) \arrow[d, "{}_{:m}\mathrm{id} \overset{C}{\otimes} p \text{ 先算右侧括号}"] \\
m \overset{C}{\times} m \arrow[r, "\text{再算最终结果 } p"'] & m & m \overset{C}{\times} m \arrow[l, "p \text{ 果结终最算再}"]
\end{tikzcd}
$$

  其中

  - u ：$1 \overset{C}{\to} m$ 其实就是 m 里面的幺元
  - u_l ：$(1 \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\to} m$ 表示 u 构成左幺元
  - u_r ：$(m \overset{C}{\times} 1) \overset{C}{\to} m$ 表示 u 构成右幺元
  - p ：$(m \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\to} m$ 即为 m 中的二元运算
  - a ：$(m \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\times} m \overset{C}{\to} m \overset{C}{\times} (m \overset{C}{\times} m)$ 表示 m 具有结合律