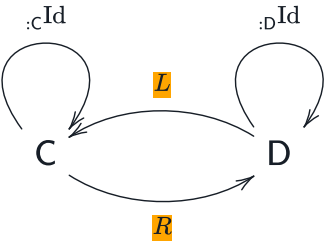


10 伴随函子

若有函子 $L : \mathbf{D} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{C}$
 以及函子 $R : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{D}$, 即



那么规定

伴随函子的第一种定义

- $L \dashv R$ 当且仅当
 对任意 \mathbf{C} 中对象 c
 及任意 \mathbf{D} 中对象 d
 都有 $(d \xrightarrow{\mathbf{D}} cR) \cong_{\text{Set}} ((dL \xrightarrow{\mathbf{C}} c))$ 。

假如确实有 $L \dashv R$, 那么不难得知

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_2 ，见下：

$$\begin{aligned}\phi_2 &: \left(_ \xrightarrow{D} _ \mathbf{R} \right) \xrightarrow{(D \times C) \rightarrow \text{Set}} \left(_ \mathbf{L} \xrightarrow{C} _ \right) \\ (_ \cdot \mathbf{c})^{\phi_2} &: \left(_ \xrightarrow{D} \mathbf{cR} \right) \xrightarrow{D \rightarrow \text{Set}} \left(_ \mathbf{L} \xrightarrow{C} \mathbf{c} \right) \\ (\mathbf{d} \cdot _)^{\phi_2} &: \left(\mathbf{d} \xrightarrow{D} _ \mathbf{R} \right) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} \left(\mathbf{dL} \xrightarrow{C} _ \right)\end{aligned}$$

套用反变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{\left(_ \xrightarrow{D} \mathbf{cR} \right) \xrightarrow{D^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}} \left(_ \mathbf{L} \xrightarrow{C} \mathbf{c} \right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\left(\mathbf{cRL} \xrightarrow{C} \mathbf{c} \right)}_{\text{一堆元素}}$$

由反变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(_ \cdot \mathbf{c})^{\phi_2}$ 右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 $:\mathbf{cR} \text{id}(\mathbf{cR} \cdot \mathbf{c})^{\phi_2} = \mathbf{c}^\varepsilon$ 。如此

- $\varepsilon : \mathbf{R} \circ \mathbf{L} \xrightarrow{\text{Cat}} _ \text{Id}$ 构成自然变换。

考虑任意 $f^{\text{op}} : \mathbf{c}' \xrightarrow{C} \mathbf{c}$ ：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{cR} \xrightarrow{D} \mathbf{cR} & \xrightarrow{(\mathbf{cR} \cdot \mathbf{c})^{\phi_2}} & \mathbf{cRL} \xrightarrow{C} \mathbf{c} \\ \downarrow f^{\text{op}} \mathbf{R} \xrightarrow{D} \mathbf{cR} & & \downarrow f^{\text{op}} \mathbf{RL} \xrightarrow{C} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}' \mathbf{R} \xrightarrow{D} \mathbf{cR} & \xrightarrow{(\mathbf{c}' \mathbf{R} \cdot \mathbf{c})^{\phi_2}} & \mathbf{c}' \mathbf{RL} \xrightarrow{C} \mathbf{c} \\ \uparrow \mathbf{c}' \mathbf{R} \xrightarrow{D} f^{\text{op}} \mathbf{R} & & \uparrow \mathbf{c}' \mathbf{RL} \xrightarrow{C} f^{\text{op}} \\ \mathbf{c}' \mathbf{R} \xrightarrow{D} \mathbf{c}' \mathbf{R} & \xrightarrow{(\mathbf{c}' \mathbf{R} \cdot \mathbf{c}')^{\phi_2}} & \mathbf{c}' \mathbf{RL} \xrightarrow{C} \mathbf{c}' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} :\mathbf{cR} \text{id} & \xrightarrow{(\mathbf{cR} \cdot \mathbf{c})^{\phi_2}} & :\mathbf{cR} \text{id}(\mathbf{cR} \cdot \mathbf{c})^{\phi_2} = \mathbf{c}^\varepsilon \\ \downarrow f^{\text{op}} \mathbf{R} \xrightarrow{D} \mathbf{cR} & & \downarrow f^{\text{op}} \mathbf{RL} \xrightarrow{C} \mathbf{c} = \mathbf{c} \circ (f^{\text{op}} \mathbf{RL} \xrightarrow{C} _) \\ f^{\text{op}} \mathbf{R} & \xrightarrow{(\mathbf{c}' \mathbf{R} \cdot \mathbf{c})^{\phi_2}} & f^{\text{op}} \mathbf{RL} \circ \mathbf{c}^\varepsilon = \mathbf{c}'^\varepsilon \circ f^{\text{op}} \\ \uparrow \mathbf{c}' \mathbf{R} \xrightarrow{D} f^{\text{op}} \mathbf{R} & & \uparrow \mathbf{c}' \mathbf{RL} \xrightarrow{C} f^{\text{op}} = (\mathbf{c}' \mathbf{RL}) \circ (_ \xrightarrow{D} f^{\text{op}}) \\ :\mathbf{c}' \text{id} & \xrightarrow{(\mathbf{c}' \mathbf{R} \cdot \mathbf{c}')^{\phi_2}} & :\mathbf{c}' \text{id}(\mathbf{c}' \mathbf{R} \cdot \mathbf{c}')^{\phi_2} = \mathbf{c}'^\varepsilon \end{array}$$

上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图其实就是反变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_1 ，见下：

$$\begin{aligned}\phi_1 &: \left(_ \mathbf{L} \xrightarrow{C} _ \right) \xrightarrow{(D \times C) \rightarrow \text{Set}} \left(_ \xrightarrow{D} _ \mathbf{R} \right) \\ (_ \cdot \mathbf{c})^{\phi_1} &: \left(_ \mathbf{L} \xrightarrow{C} \mathbf{c} \right) \xrightarrow{D \rightarrow \text{Set}} \left(_ \xrightarrow{D} \mathbf{cR} \right) \\ (\mathbf{d} \cdot _)^{\phi_1} &: \left(\mathbf{dL} \xrightarrow{C} _ \right) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} \left(\mathbf{d} \xrightarrow{D} _ \mathbf{R} \right)\end{aligned}$$

套用协变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{\left((\mathbf{dL} \xrightarrow{C} _) \right) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} \left(\mathbf{d} \xrightarrow{D} _ \mathbf{R} \right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\left(\mathbf{d} \xrightarrow{D} \mathbf{dLR} \right)}_{\text{一堆元素}}$$

由协变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(\mathbf{d} \cdot _)^{\phi_1}$ 右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 $:\mathbf{dL} \text{id}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{dL})^{\phi_1} = \mathbf{d}^\eta$ 。如此。

- $\eta : _ \text{Id} \xrightarrow{D \rightarrow D} \mathbf{L} \circ \mathbf{R}$ 构成自然变换。

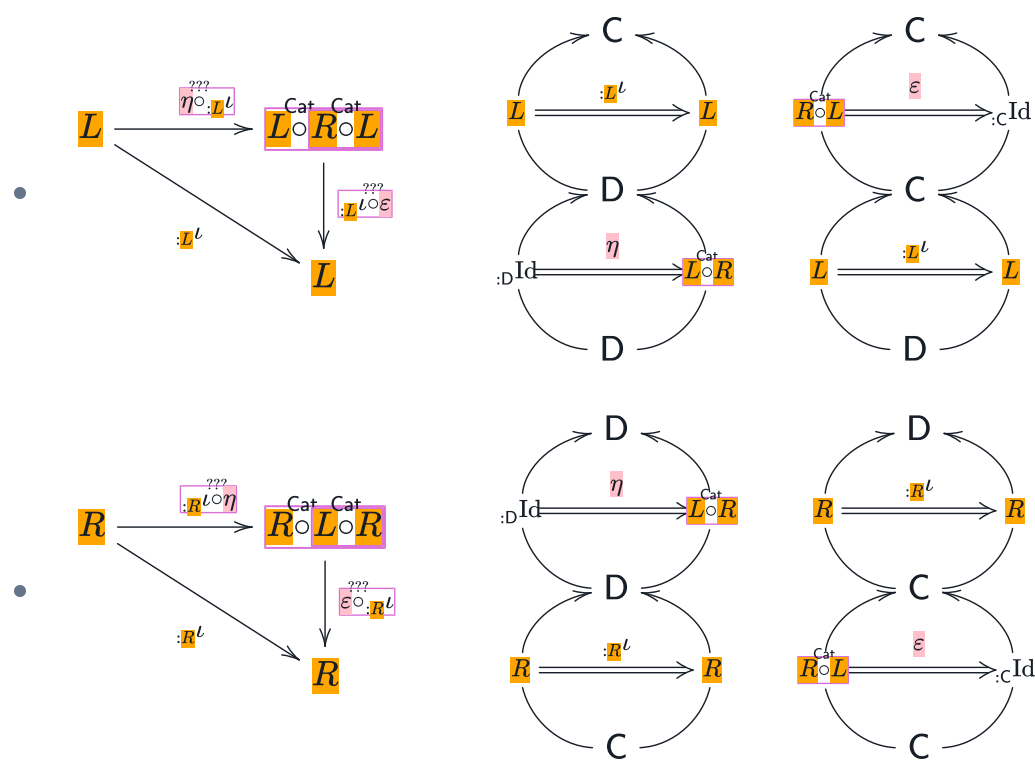
考虑任意 $g : \mathbf{d} \xrightarrow{D} \mathbf{d}'$ ：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{dL} \xrightarrow{C} \mathbf{dL} & \xrightarrow{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{dL})^{\phi_1}} & \mathbf{d} \xrightarrow{D} \mathbf{dLR} \\ \downarrow \mathbf{dL} \xrightarrow{C} g \mathbf{L} & & \downarrow \mathbf{d} \xrightarrow{D} g \mathbf{LR} \\ \mathbf{dL} \xrightarrow{C} \mathbf{d}' \mathbf{L} & \xrightarrow{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}' \mathbf{L})^{\phi_1}} & \mathbf{d} \xrightarrow{D} \mathbf{d}' \mathbf{LR} \\ \uparrow g \mathbf{L} \xrightarrow{C} \mathbf{d}' \mathbf{L} & & \uparrow g \mathbf{L} \xrightarrow{C} \mathbf{d}' \mathbf{L} \\ \mathbf{d}' \mathbf{L} \xrightarrow{C} \mathbf{d}' \mathbf{L} & \xrightarrow{(\mathbf{d}' \cdot \mathbf{d}' \mathbf{L})^{\phi_1}} & \mathbf{d}' \xrightarrow{D} \mathbf{d}' \mathbf{LR} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} :\mathbf{dL} \text{id} & \xrightarrow{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{dL})^{\phi_1}} & :\mathbf{dL} \text{id}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{dL})^{\phi_1} = \mathbf{d}^\eta \\ \downarrow \mathbf{dL} \xrightarrow{C} g \mathbf{L} & & \downarrow \mathbf{d} \xrightarrow{D} g \mathbf{LR} = \mathbf{d} \circ (_ \xrightarrow{D} g \mathbf{LR}) \\ g \mathbf{L} & \xrightarrow{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}' \mathbf{L})^{\phi_1}} & \mathbf{d}^\eta \circ g \mathbf{LR} = g \circ \mathbf{d}'^\eta \\ \uparrow g \mathbf{L} \xrightarrow{C} \mathbf{d}' \mathbf{L} & & \uparrow g \mathbf{L} \xrightarrow{C} \mathbf{d}' \mathbf{L} = \mathbf{d}' \mathbf{LR} \circ (_ \xrightarrow{D} g) \\ :\mathbf{d}' \text{id} & \xrightarrow{(\mathbf{d}' \cdot \mathbf{d}' \mathbf{L})^{\phi_1}} & :\mathbf{d}' \text{id}(\mathbf{d}' \cdot \mathbf{d}' \mathbf{L})^{\phi_1} = \mathbf{d}'^\eta \end{array}$$

上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图其实就是协变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

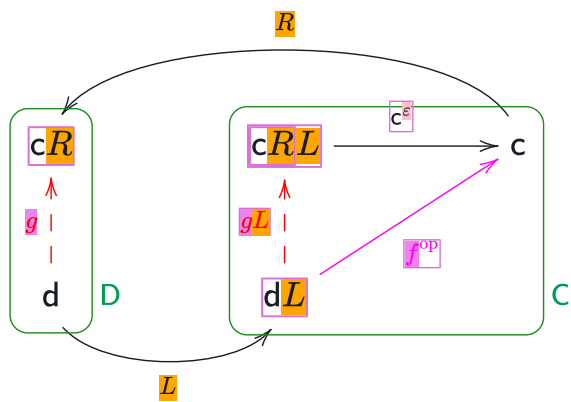
对于前面的 ε 和 η 我们有下述交换图成立：



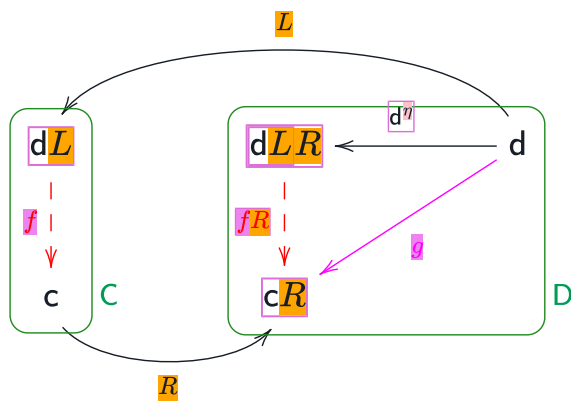
伴随函子的第二种定义

假设我们不知道 L 和 R 构成一对伴随函子并且有自然变换 $\varepsilon : R \circ L \xrightarrow{\text{Cat}} \text{Id}_C$ 和 $\eta : \text{Id}_D \xrightarrow{\text{D} \rightarrow D} L \circ R$ 能同时满足上页开头的两幅交换图，那么

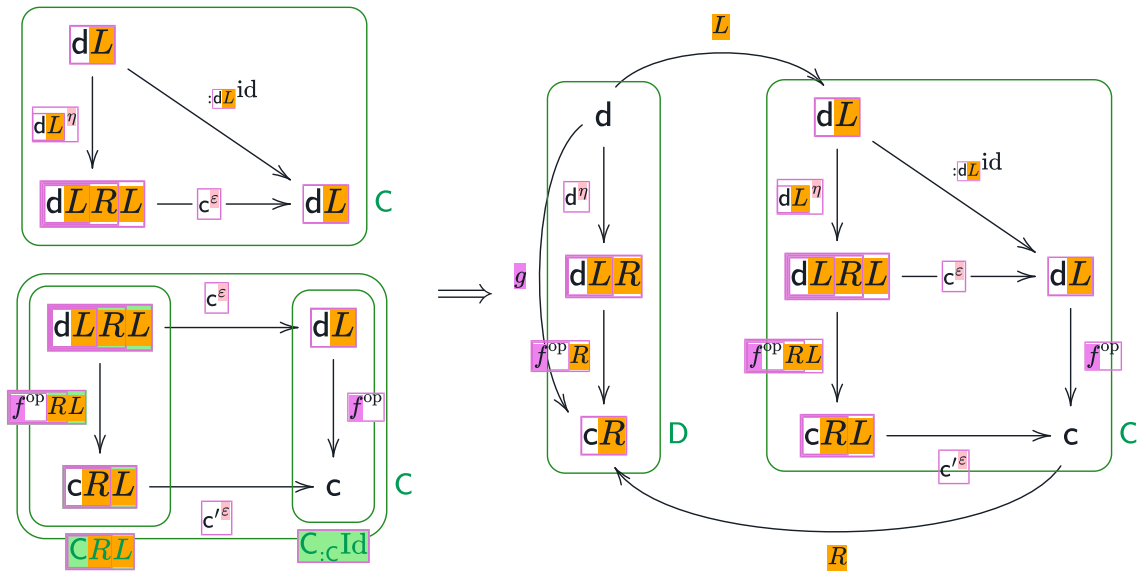
- 对任意 C 中对象 c
及任意 D 中对象 d
及任意 $f^{\text{op}} : dL \xrightarrow{C} c$ 始终存在
唯一的 $g : d \xrightarrow{D} cR$ 使下图交换。



- 对任意 C 中对象 c
及任意 D 中对象 d
及任意 $g : d \xrightarrow{D} cR$ 始终都存在
唯一的 $f : dL \xrightarrow{C} c$ 使下图交换。



下方左图上半部分即为上页第一幅图，而
 下方左图下半部分可由 ϵ 为自然变换得出；
 将两个图拼在一起即可获得下方右图：



那为何 g 是唯一的呢？假如有 g' 亦满足上图，则