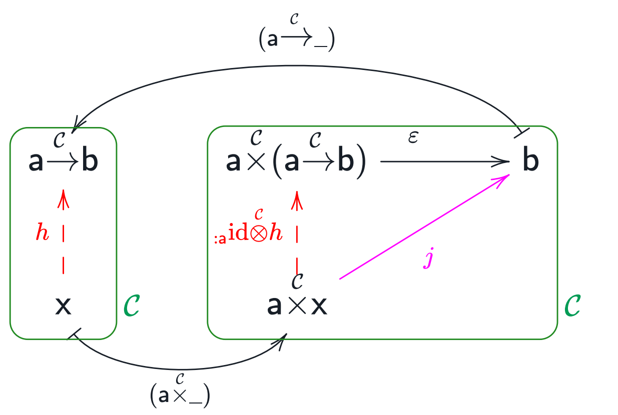
章节 06 类型的幂

LATEX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\xrightarrow{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{C}$ 在范畴 $\mathcal{C}$ 中有下述性质：

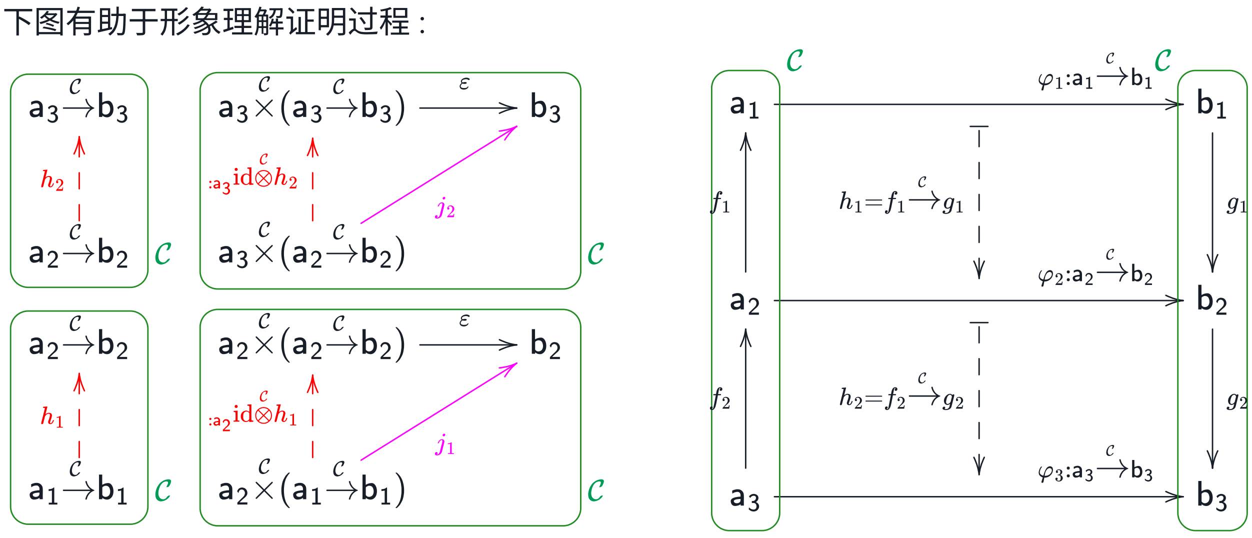
- $\underline{(a \overset{\mathcal{C}}{\times} x) \xrightarrow{\mathcal{C}} b} \cong \underline{x \xrightarrow{\mathcal{C}} (a \xrightarrow{\mathcal{C}} b)} \cong \underline{a \xrightarrow{\mathcal{C}} (x \xrightarrow{\mathcal{C}} b)}$，x 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象
  —— **泛性质**，指数与加乘法运算间的关系 。 下图便于理解证明：



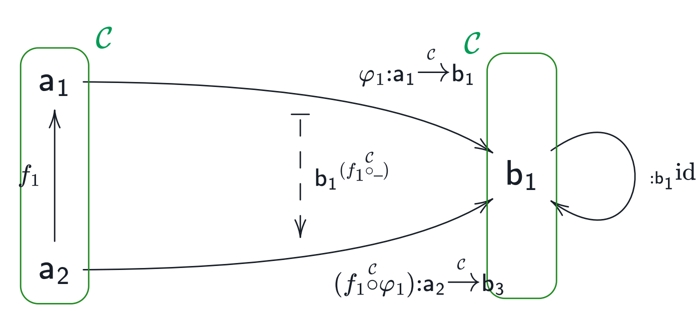
函子性

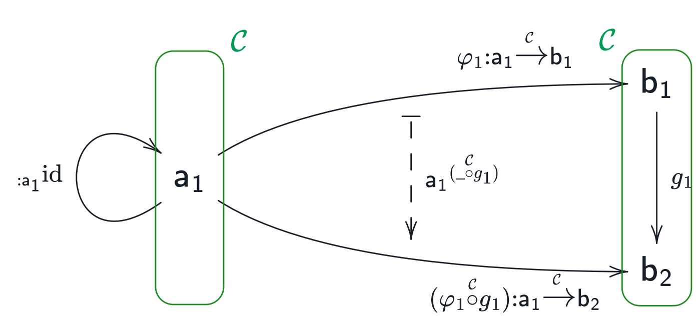
如何证明 $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ 构成函子呢？请看

- $\xrightarrow{\mathcal{C}} : ({}_{:a_1}\mathrm{id} \,.\, {}_{:b_1}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1)}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ 能**保持恒等箭头**；
- $\xrightarrow{\mathcal{C}} : (f_2 \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_1 \,.\, g_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_2) \longmapsto h_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} h_2$
  —— 即函子 $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ **保持箭头复合运算** 。
  下图有助于形象理解证明过程：



下图（自上到下分别为图 1 和图 2）后面会用到 。





范畴 $\mathcal{C}$ 内任意两对象 a_1 和 b_1 间的箭头构成一个集合 $\mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{b}_1$，
说明 $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ 只能将两个对象打到一个集合。下面使 $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ 升级为函子：
若还知道箭头 $f_1 : \mathsf{a}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{a}_1$ 以及 $g_1 : \mathsf{b}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{b}_2$，则规定

- $(\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{b}_1) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathcal{C}at}{\cancel{\times \mathcal{C}}} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{S}et$ 为函子且
  $(\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{b}_1) : \mathsf{a}_1 \longmapsto (\mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{b}_1)$，并且有
  $(\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{b}_1) : f_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{b}_1) = (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}) = \mathsf{b}_1{}^{(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)}$

  图 1 有助于理解。

  $(\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathcal{C}at}{\cancel{\times \mathcal{C}}} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{S}et$ 为函子且
  $(\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) : \mathsf{a}_1 \longmapsto (\mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) = ({}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) = \mathsf{a}_1{}^{(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1)}$
  $(\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) : f_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) = (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) \overset{\mathcal{C} \to \mathcal{S}et}{\circ} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) = (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) \overset{\mathcal{C} \to \mathcal{S}et}{\circ} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)$

  图 2 有助于理解。

  > **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - $$\begin{aligned} よ : \mathcal{C} &\xrightarrow{\mathcal{C}at} (\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{S}et) \\ \mathsf{b}_1 &\longmapsto (\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{b}_1) && \text{构成一个函子,称作预层} \\ g_1 &\longmapsto (\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) = (\_ \circ g_1) && \text{构成一个函子间映射,即自然变换} \end{aligned}$$
  >
  >   该函子称作是**米田嵌入**。

- $(\mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) : \cancel{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{S}et$ 为函子且
  $(\mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) : \mathsf{b}_1 \longmapsto (\mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{b}_1)$，并且有
  $(\mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) : g_1 \longmapsto (\mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) = ({}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) = \mathsf{a}_1{}^{(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1)}$

  图 2 有助于理解。

  $(f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) : \cancel{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{S}et$ 为函子且
  $(f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) : \mathsf{b}_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{b}_1) = (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}) = \mathsf{b}_1{}^{(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)}$
  $(f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) : g_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) = (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) \overset{\mathcal{C} \to \mathcal{S}et}{\circ} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) = (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) \overset{\mathcal{C} \to \mathcal{S}et}{\circ} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)$

  图 1 有助于理解。

  > **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - $$\begin{aligned} 尤 : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} &\xrightarrow{\mathcal{C}at} (\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{S}et) \\ \mathsf{a}_1 &\longmapsto (\mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) && \text{构成一个函子} \\ f_1 &\longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) = (f_1 \circ \_) && \text{构成一个函子间映射,即自然变换} \end{aligned}$$
  >
  >   该函子戏称为**尤达嵌入**。

积闭范畴

这里插个题外话：

若范畴包含终对象，所有类型的积以及指数，则可将其称作**积闭范畴**；

若范畴包含始对象，所有类型的和，则可将其称作是**余积闭范畴**；

若范畴满足上述条件，则可称作**双积闭范畴**。

很明显我们讨论的范畴 $\mathcal{C}$ 就是**双积闭范畴**。