

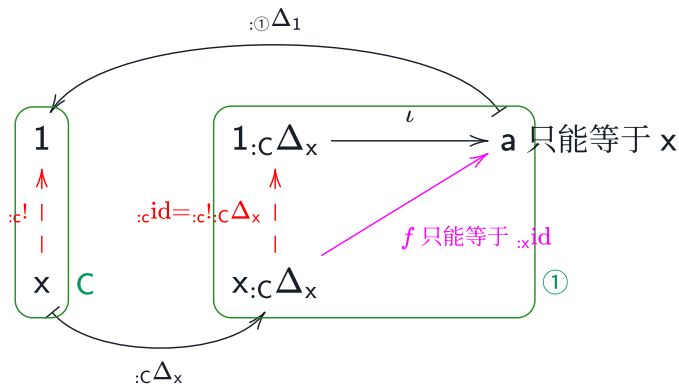
章节 01 - 03 基本概念

L^AT_EX Definitions are here.

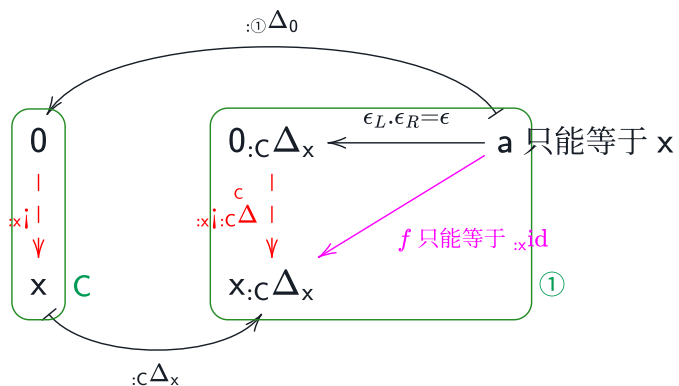
始终对象的泛性质

范畴由对象及其间箭头构成。本文重点分析余积闭范畴 \mathcal{C} 。首先给出如下定义：

- 1 为**终对象**当且仅当对任意 C 中对象 x 都有且仅有唯一的箭头 $!_x: x \rightarrow 1$:



- 0 为**始对象**当且仅当对任意 C 中对象 x 都有且仅有唯一的箭头 $_{:x}^C: 0 \rightarrow x$:



Note

$:\mathbf{C} \Delta_x : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \textcircled{1}$ 为常值函子满足
 $:\mathbf{C} \Delta_x : c \mapsto x$ 。另外还有一点：
 其他范畴中始终对象不一定存在。

如果范畴 \mathcal{C} 中真的含有 0 和 1 分别作为始对象和终对象, 那么根据上述信息可知

- 形如 $1 \xrightarrow{c} 1$ 的箭头只有一个, 即 $_{11}\text{id}$;
- 形如 $0 \xrightarrow{c} 0$ 的箭头只有一个, 即 $_{00}\text{id}$;

元素与全局元素

对任意对象 a, a_1, a_2, etc , b, b_1, b_2, etc
以及任意映射 i , 我们进行如下的规定:

- i 为 b 的**元素**当且仅当
 $i \text{ tar} = b$;
- i 为 a 的**全局元素**当且仅当
 $i \text{ tar} = a$ 且 $i \text{ src} = 1$
- i 不存在仅当
 $i \text{ tar} = 0$ 。

Note

其他范畴中刚才的断言未必成立。

箭头构成的集合

这里再给一个定义：

- $\mathbf{a} \overset{\mathbf{C}}{\rightarrow} \mathbf{b} =$
所有从 \mathbf{a} 射向 \mathbf{b} 的箭头构成的集。

Note

上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
在其他范畴里 $\mathbf{a} \overset{\mathbf{C}}{\rightarrow} \mathbf{b}$ 未必构成集。

箭头的复合运算

范畴 \mathbf{C} 中特定的箭头可以进行复合运算：

对任意 \mathbf{C} 中对象 $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ 我们都会有
 $\overset{\mathbf{C}}{\circ} : (\mathbf{c}_1 \overset{\mathbf{C}}{\rightarrow} \mathbf{c}_2) \times (\mathbf{c}_2 \overset{\mathbf{C}}{\rightarrow} \mathbf{c}_3) \overset{\text{Set}}{\longrightarrow} (\mathbf{c}_1 \overset{\mathbf{C}}{\rightarrow} \mathbf{c}_3)$
 $\overset{\mathbf{C}}{\circ} : (\quad i_1 \quad \quad \quad i_2 \quad) \longmapsto i_1 \overset{\mathbf{C}}{\circ} i_2$

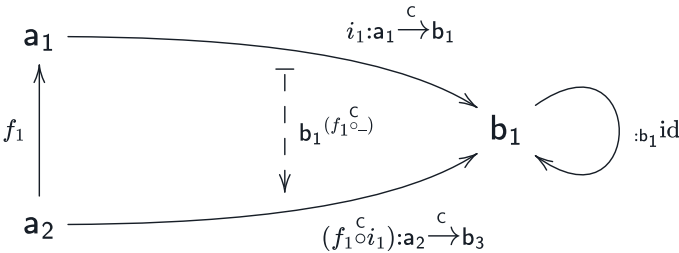
若我们还知道箭头 f_1, i_1, g_1 分别属于
 $\mathbf{a}_2 \overset{\mathbf{C}}{\rightarrow} \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \overset{\mathbf{C}}{\rightarrow} \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \overset{\mathbf{C}}{\rightarrow} \mathbf{b}_2$ 那么便有

- $(f_1 \overset{\mathbf{C}}{\circ} i_1) \overset{\mathbf{C}}{\circ} g_1 = f_1 \overset{\mathbf{C}}{\circ} (i_1 \overset{\mathbf{C}}{\circ} g_1)$
说明箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便获可得新的函数：

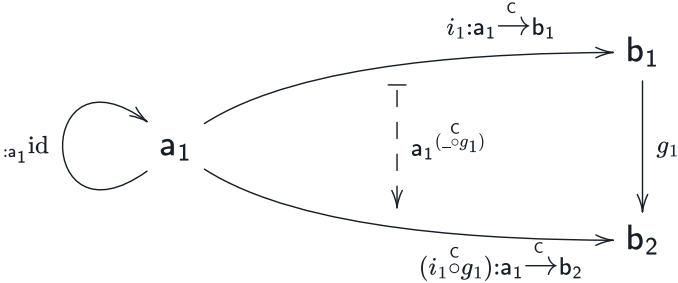
- $(f_1 \overset{\mathbf{C}}{\circ} _): (\mathbf{a}_1 \overset{\mathbf{C}}{\rightarrow} _) \overset{\mathbf{C} \rightarrow \text{Set}}{\longrightarrow} (\mathbf{a}_2 \overset{\mathbf{C}}{\rightarrow} _)$
 $(f_1 \overset{\mathbf{C}}{\circ} _): \quad i_1 \quad \longmapsto \quad f_1 \overset{\mathbf{C}}{\circ} i_1$

称作**前复合**。下图有助于形象理解：



- $(_ \overset{\mathbf{C}}{\circ} g_1): (_ \overset{\mathbf{C}}{\rightarrow} \mathbf{b}_1) \overset{\mathbf{C} \rightarrow \text{Set}}{\longrightarrow} (_ \overset{\mathbf{C}}{\rightarrow} \mathbf{b}_2)$
 $(_ \overset{\mathbf{C}}{\circ} g_1): \quad i_1 \quad \longmapsto \quad i_1 \overset{\mathbf{C}}{\circ} g_1$

称作**后复合**；下图有助于形象理解：



根据上面的定义便不难得出下述结论

- $(f_1 \overset{\mathbf{C}}{\circ} _) \overset{\mathbf{C} \rightarrow \text{Set}}{\circ} (_ \overset{\mathbf{C}}{\circ} g_1) = (_ \overset{\mathbf{C}}{\circ} g_1) \overset{\mathbf{C} \rightarrow \text{Set}}{\circ} (f_1 \overset{\mathbf{C}}{\circ} _)$
复合运算具有**结合律**，即后面会提到的**自然性**；
- $(_ \overset{\mathbf{C}}{\circ} i_1) \overset{\mathbf{C} \rightarrow \text{Set}}{\circ} (_ \overset{\mathbf{C}}{\circ} g_1) = (_ \overset{\mathbf{C}}{\circ} (i_1 \overset{\mathbf{C}}{\circ} g_1))$
前复合与复合运算的关系
- $(i_1 \overset{\mathbf{C}}{\circ} _) \overset{\mathbf{C} \rightarrow \text{Set}}{\circ} (f_1 \overset{\mathbf{C}}{\circ} _) = ((f_1 \overset{\mathbf{C}}{\circ} i_1) \overset{\mathbf{C}}{\circ} _)$
后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。

假如 a_1 为 \mathbf{a}_1 的全局元素则可规定

- $a_1 i_1 = a_1 \overset{\mathbf{C}}{\circ} i_1$

恒等箭头

范畴 \mathbf{C} 内的每个对象都有恒等映射：

- $\text{id} : a_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} a_1$
 $\text{id} : a_1 \mapsto a_1$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- $\text{id} \circ i_1 = i_1$
 $= i_1 \circ \text{id}$

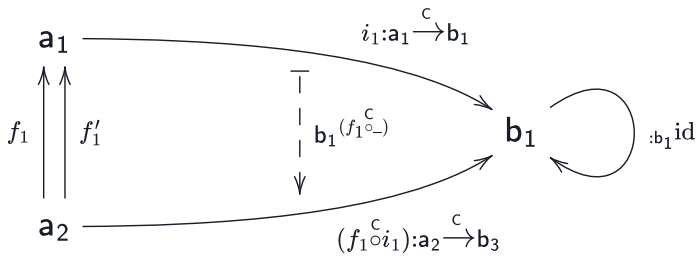
此外还可以得知

- $(\text{id} \circ _) : (a_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} _) \xrightarrow{\mathbf{C} \rightarrow \text{Set}} (a_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} _)$
为恒等自然变换，可以记作是 $(a_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} _) \text{id}$ ；
- $(_ \circ \text{id}) : (_ \xrightarrow{\mathbf{C}} b_1) \xrightarrow{\mathbf{C} \rightarrow \text{Set}} (_ \xrightarrow{\mathbf{C}} b_1)$
为恒等自然变换，可以记作是 $(_ \xrightarrow{\mathbf{C}} b_1) \text{id}$ ；

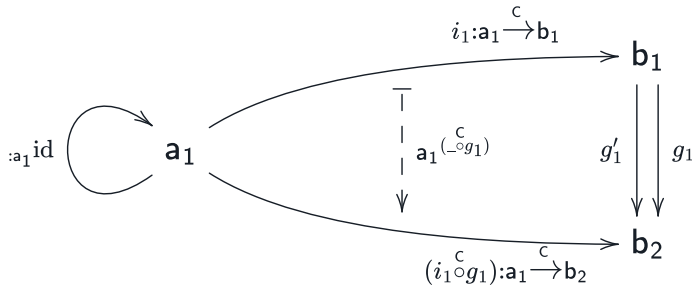
单满态以及同构

接下来给出单 / 满态和同构的定义。

- i_1 为**单态**当且仅当对任意 a_2 若有 $f_1, f'_1 : a_2 \xrightarrow{\mathbf{C}} a_1$
满足 $f_1 \circ i_1 = f'_1 \circ i_1$ 则有 $f_1 = f'_1$ 。详情见下图：



- i_1 为**满态**当且仅当对任意 b_2 若有 $g_1, g'_1 : b_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} b_2$
满足 $i_1 \circ g_1 = i_1 \circ g'_1$ 则有 $g_1 = g'_1$ 。详情见下图：



- i_1 为**同构**当且仅当存在 $i'_1 : b_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} a_1$
使 $i_1 \circ i'_1 = \text{id}$ 且 $i'_1 \circ i_1 = \text{id}$ 。
此时 a_1, b_1 间的关系可记作 $a_1 \cong b_1$

若还提供 $j_1 : b_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} c_1$ 则不难得知

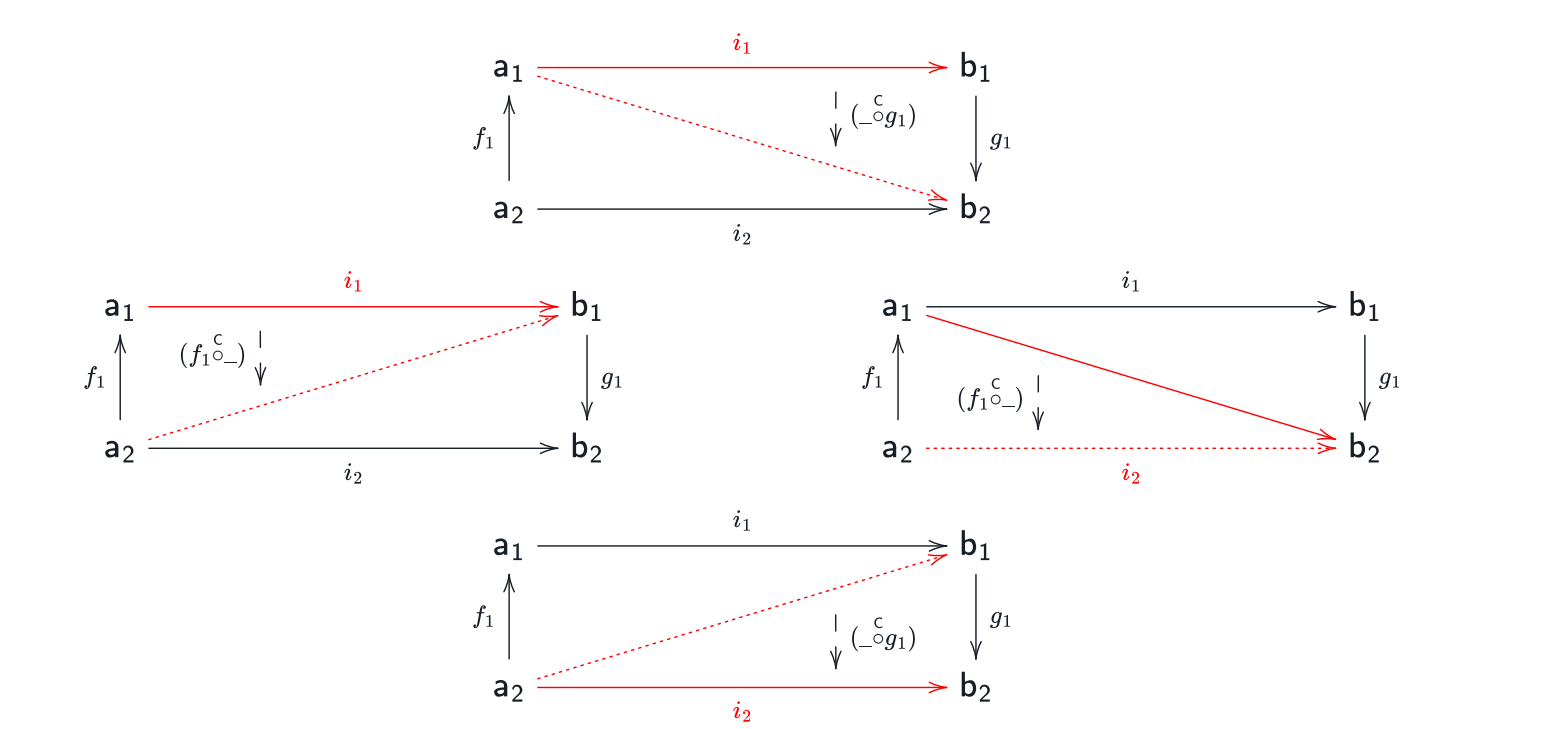
- 若 i_1, j_1 为单态
则 $i_1 \circ j_1$ 为单态；
- 若 i_1, j_1 为满态
则 $i_1 \circ j_1$ 为满态；
- 若 i_1, j_1 为同构
则 $i_1 \circ j_1$ 为同构；
- 若 $i_1 \circ j_1$ 为同构
且 i_1, j_1 其中一个为同构
则 i_1, j_1 两者皆构成同构。

此外我们还可以得出下述结论：

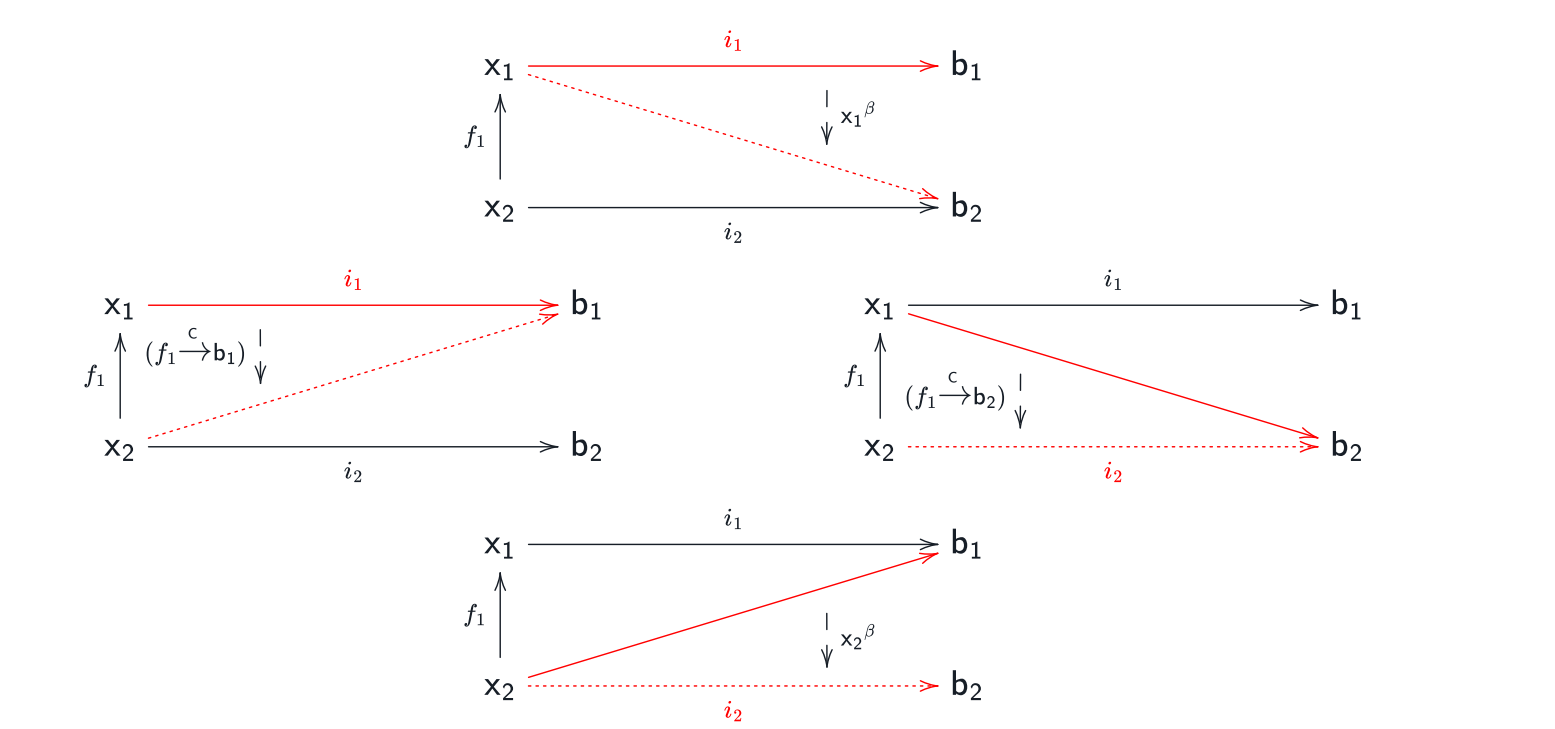
- 0 为单态，由
! 的唯一性可知。
- $0! = 1!$ 为同构 —— 这是因为
 $0 \xrightarrow{\mathbf{C}} 0 = \{0!\}, 1 \xrightarrow{\mathbf{C}} 1 = \{1!\}$

同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释。
后面会将自然性进行进一步推广。



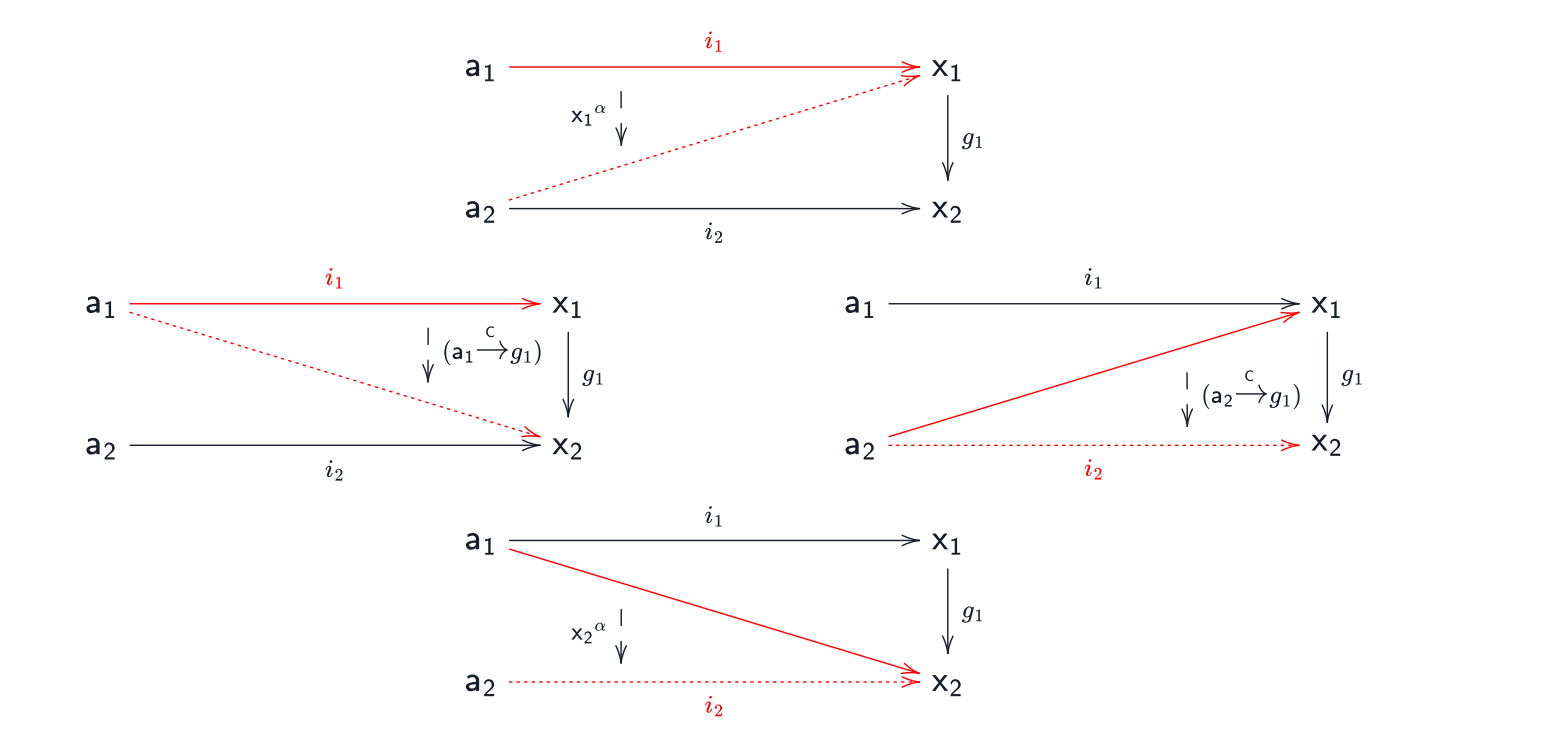
若提供自然变换 β 满足自然性 —— 即对任意 C 中对象 x_1, x_2 及任意 C 中映射 $f_1 : x_2 \xrightarrow{C} x_1$ 都会有 $(f_1 \xrightarrow{C} b_1) \circ_{\text{Set}} x_2^\beta = x_1^\beta \circ_{\text{Set}} (f_1 \xrightarrow{C} b_2)$ (即下图自西向南走向操作结果同自北向东):



那么我们便会有下述结论：

- $b_1 \cong b_2$ 当且仅当对任意 C 中对象 x x^β 都是同构。此时称 β 为**自然同构**。

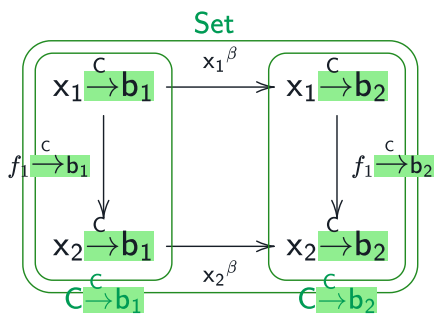
若提供自然变换 α 满足自然性 —— 即对任意 C 中对象 x_1, x_2 及任意 C 中映射 $g_1 : x_1 \xrightarrow{C} x_2$ 都会有 $(a_1 \xrightarrow{C} g_1) \circ_{\text{Set}} x_2^\alpha = x_1^\alpha \circ_{\text{Set}} (a_2 \xrightarrow{C} g_1)$ (即下图自西向南走向操作结果同自北向东):



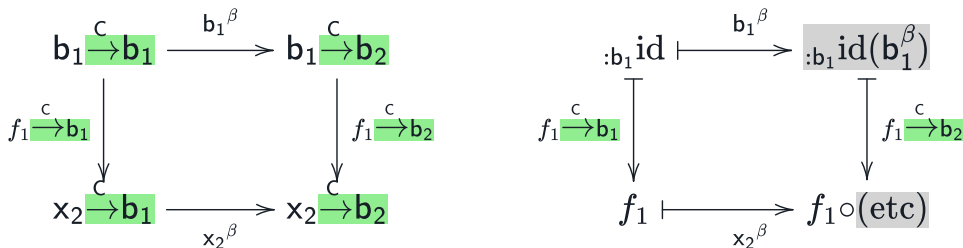
那么我们便会有下述结论：

- $a_1 \cong a_2$ 当且仅当对任意 C 中对象 x x^α 都是同构。此时称 α 为**自然同构**。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为



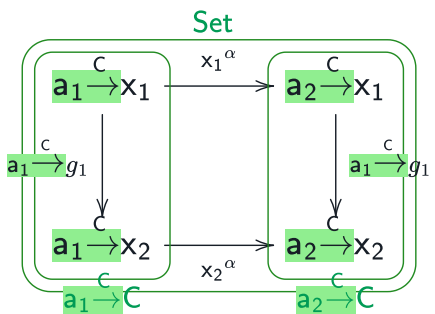
⇒ 易证, ⇐ 用到了米田技巧 (考虑特殊情况)



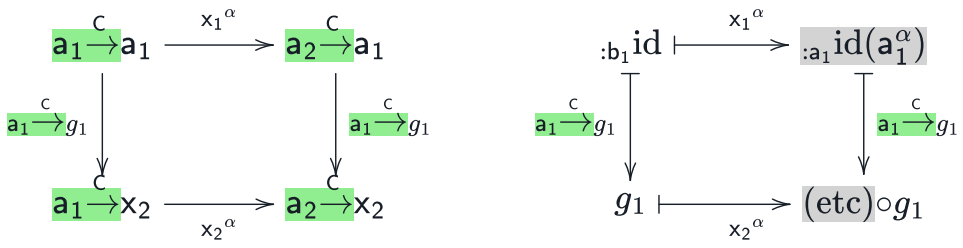
为了方便就用 (etc) 表示 $:b_1 \text{id}(b_1^\beta)$ 。由上图可知 $f_1(x_2^\beta) = f_1 \circ (etc)$, 故 $x_2^\beta = x_2 \xrightarrow{f_1} (etc)$; 而 $x_2^\beta = x_2 \xrightarrow{f_1} (etc) = x_2^{(f_1 \circ (etc))}$ 是同构, 从而知 $((etc) \circ _)$ 是同构, $(etc) : b_1 \xrightarrow{f_1} b_2$ 也是。

高亮部分省去了部分推理过程, 具体在米田嵌入处会详细介绍。

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为



⇒ 易证, ⇐ 用到了米田技巧 (考虑特殊情况)



为了方便就用 (etc) 表示 $:a_1 \text{id}(a_1^\alpha)$ 。由上图可知 $g_1(x_2^\alpha) = (etc) \circ g_1$, 故 $x_2^\alpha = (etc) \xrightarrow{g_1} x_2$; 而 $x_2^\alpha = (etc) \xrightarrow{g_1} x_2 = x_2^{((etc) \circ g_1)}$ 是同构, 从而知 $(_ \circ (etc))$ 是同构, $(etc) : a_1 \xrightarrow{g_1} a_2$ 也是。

高亮部分省去了部分推理过程, 具体在米田嵌入处会详细介绍。