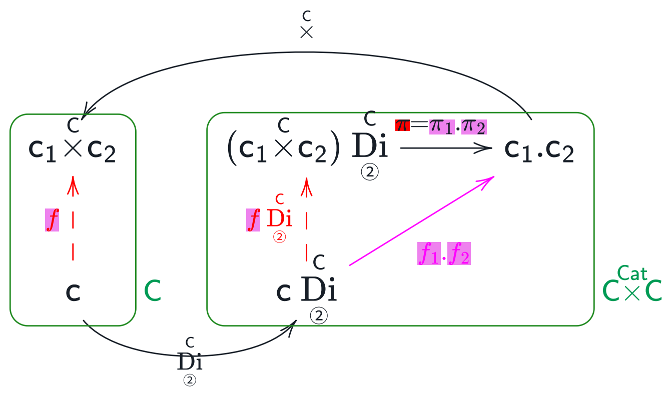
04-05 类型的和与积

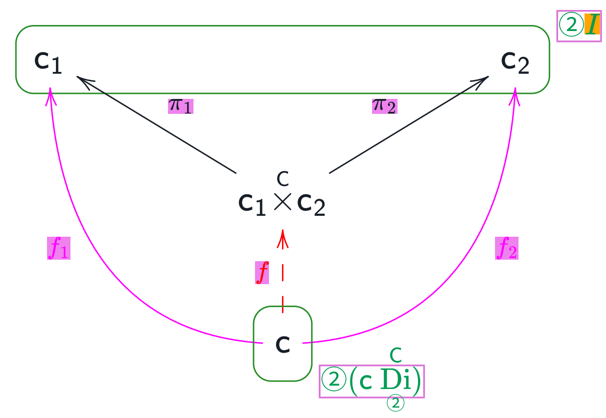
LaTeX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times} : (\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C}) \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}$ 在范畴 C 中有如下性质：

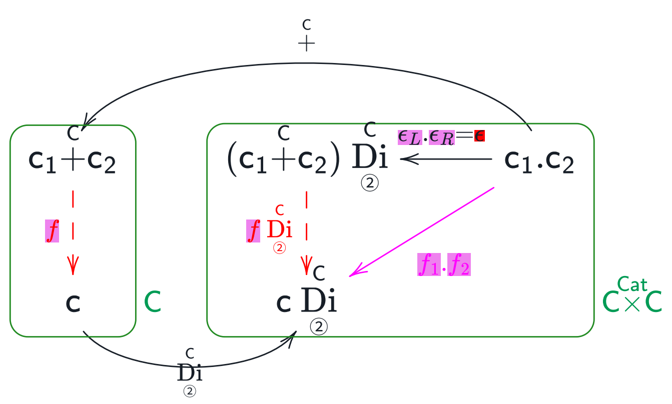
- $(\mathsf{c} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1) \overset{\mathsf{Set}}{\times} (\mathsf{c} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \mathsf{c} \overset{\mathsf{C}}{\to} (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2)$
  —— c 为任意 C 中对象。此即为积的
  泛性质，亦为**指数对乘法的分配律**。

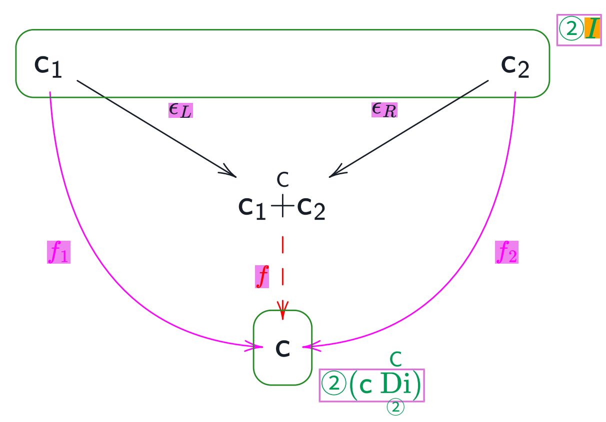




默认函子 $\overset{\mathsf{C}}{+} : (\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C}) \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}$ 在范畴 C 中有如下性质：

- $(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \overset{\mathsf{Set}}{\times} (\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2) \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$
  —— c 为任意 C 中对象。此即为和的
  泛性质，亦为**指数对加法的分配律**。



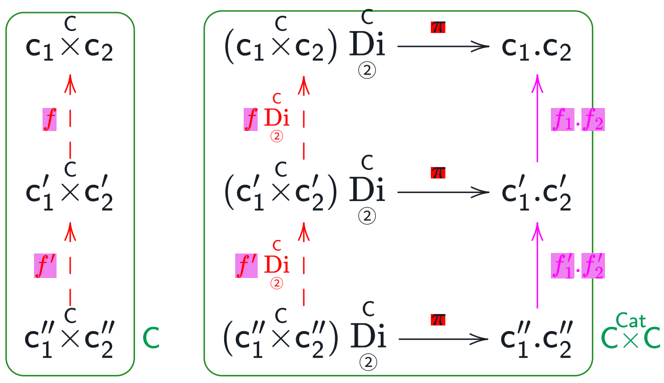


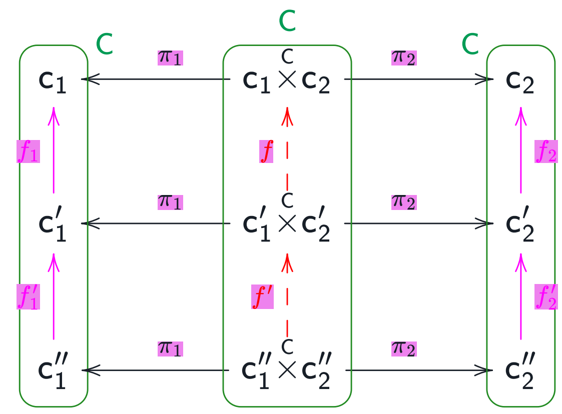
> **Note**
>
> 在上面的插图中
>
> - $\underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C})$ 为对角函子满足
> $\mathsf{c} \longmapsto (\mathsf{c} \,.\, \mathsf{c})$
> - $\underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (② \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C})$
> $\mathsf{c} \longmapsto$ 常值函子
> $\mathsf{c}\ \underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} : ② \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}$
> $1 \longmapsto \mathsf{c}$
> $2 \longmapsto \mathsf{c}$
> $f \longmapsto {}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}$
>   即为对角函子的第二种等价的定义。
>   ② 为仅含两个对象的范畴，在此则作为一个指标范畴。1 和 2 分别为其中的对象。
> - $I : ② \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}$ 为函子，满足
> $1 \longmapsto \mathsf{c}_1$
> $2 \longmapsto \mathsf{c}_2$
> - 不难看出上图中
> $\pi : I \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2)\ \underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}$
> $\epsilon : (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2)\ \underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} I$
>   都构成自然变换

函子性

如何证明 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : ({}_{:c_1'}\mathrm{id} \,.\, {}_{:c_2'}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(c_1' \overset{\mathsf{C}}{\times} c_2')}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : (f_1' \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1 \,.\, f_2' \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \longmapsto (f' \overset{\mathsf{C}}{\circ} f)$
  —— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 保持**箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：



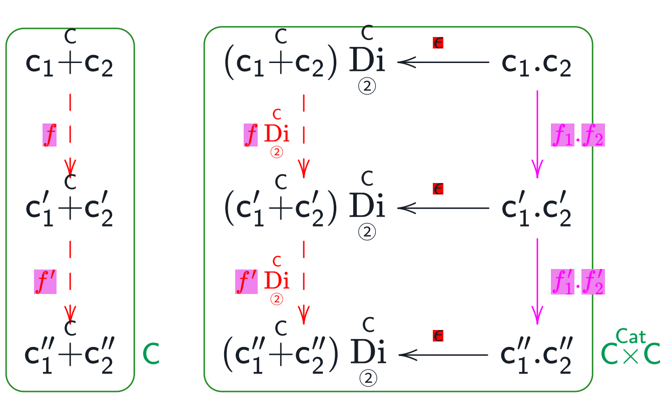


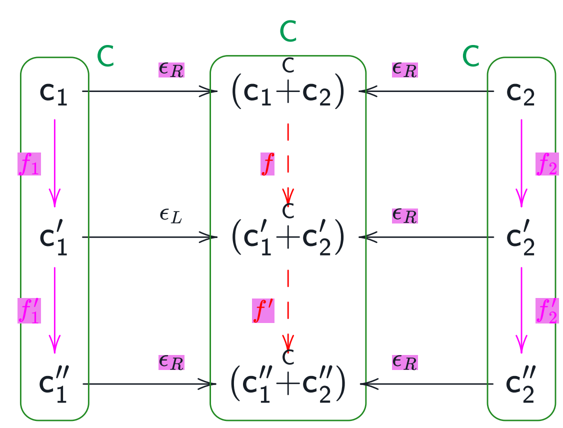
另外我们规定 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : (f_1 \,.\, c_2) \longmapsto (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} {}_{:c_2}\mathrm{id})$
  $\overset{\mathsf{C}}{\times} : (c_1 \,.\, f_2) \longmapsto ({}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\times} f_2)$

如何证明 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathsf{C}}{+} : ({}_{:c_1}\mathrm{id} \,.\, {}_{:c_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} c_2)}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{\mathsf{C}}{+} : (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1' \,.\, f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2') \longmapsto (f \overset{\mathsf{C}}{\circ} f')$
  —— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 保持**箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：





另外我们规定 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{\mathsf{C}}{+} : (f_1 \,.\, c_2) \longmapsto (f_1 \overset{\mathsf{C}}{+} {}_{:c_2}\mathrm{id})$
  $\overset{\mathsf{C}}{+} : (c_1 \,.\, f_2) \longmapsto ({}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{+} f_2)$

运算性质

对于函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 我们不难得知

- $c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} 1 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} 1 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c_1$
  —— 乘法具有**幺元 1**。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \,.\, {:_c}!$ 能唯一决定 f 和 f'。

$$\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} 1)\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & c_1.1 \\
c\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_1.{:_c}!"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_1\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "{:_{c_1}}\mathrm{id}.{:_{c_1}}!"] & c_1.1 \\
c\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f'\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_1.{:_c}!"'] &
\end{tikzcd}$$

- $c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} c_2 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c_2 \overset{\mathsf{C}}{\times} c_1$
  —— 乘法具有**交换律**。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \,.\, f_2$ 能唯一决定 f 和 f'。

$$\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} c_2)\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & c_1.c_2 \\
c\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_1.f_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_2 \overset{\mathsf{C}}{\times} c_1)\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & c_2.c_1 \\
c\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f'\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_2.f_1"'] &
\end{tikzcd}$$

- $(c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} c_2) \overset{\mathsf{C}}{\times} c_3 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} (c_2 \overset{\mathsf{C}}{\times} c_3)$
  —— 乘法具有**结合律**。
  下图有助于理解证明目标，即 $(f_1 \,.\, f_2) \,.\, f_3$ 唯一决定 f 和 f'。

$$\begin{tikzcd}
((c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} c_2) \overset{\mathsf{C}}{\times} c_3)\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi"] & (c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} c_2).c_3 \arrow[r, "\pi.{:_{c_3}}\mathrm{id}"] & (c_1.c_2).c_3 \\
c_3\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, dotted, "\jmath.f_3"] \arrow[urr, "(f_1.f_2).f_3"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} (c_2 \overset{\mathsf{C}}{\times} c_3))\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi"] & c_1.(c_2 \overset{\mathsf{C}}{\times} c_3) \arrow[r, "{:_{c_1}}\mathrm{id}.\pi"] & c_1.(c_2.c_3) \\
c_3\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, dotted, "f_1.\jmath"] \arrow[urr, "f_1.(f_2.f_3)"'] & &
\end{tikzcd}$$

对于函子 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ 我们不难得知

- $c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} 0 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} 1 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c_1$
  —— 加法具有**幺元 0**。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \,.\, {:_c}¡$ 能唯一决定 f 和 f'。

$$\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} 0)\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.0 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f_1.{:_c}¡"] \\
c\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_1\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f'\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.0 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f_1.{:_c}¡"] \\
c\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}$$

- $c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} c_2 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c_2 \overset{\mathsf{C}}{+} c_1$
  —— 加法具有**交换律**。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \,.\, f_2$ 能唯一决定 f 和 f'。

$$\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} c_2)\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.c_2 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f_1.f_2"] \\
c\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_2 \overset{\mathsf{C}}{+} c_1)\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f'\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"'] & c_2.c_1 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f_2.f_1"] \\
c\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}$$

- $(c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} c_2) \overset{\mathsf{C}}{+} c_3 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} (c_2 \overset{\mathsf{C}}{+} c_3)$
  —— 加法具有**结合律**。
  下图有助于理解证明目标，即 $(f_1 \,.\, f_2) \,.\, f_3$ 唯一决定 f 和 f'。

$$\begin{tikzcd}
((c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} c_2) \overset{\mathsf{C}}{+} c_3)\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"'] & (c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} c_2).c_3 \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "\jmath.f_3"] & (c_1.c_2).c_3 \arrow[l, "\epsilon.{:_{c_3}}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "(f_1.f_2).f_3"] \\
c\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} (c_2 \overset{\mathsf{C}}{+} c_3))\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.(c_2 \overset{\mathsf{C}}{+} c_3) \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "f_1.\jmath"] & c_1.(c_2.c_3) \arrow[l, "\epsilon.{:_{c_3}}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "f_1.(f_2.f_3)"] \\
c\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} & &
\end{tikzcd}$$

幺半范畴

像刚才这样对象运算具有**单位元**以及**结合律**的范畴称作**幺半范畴**；

若上述范畴还具有**交换律**则称作**对称幺半范畴**；

很明显我们的范畴 C 是典型的**对称幺半范畴** 。

幺半群

什么是幺半群呢？有两种定义方式：

- **幺半群** M 是个范畴，其只含一个对象 m；
  其中的复合运算正好有单位元以及结合律 。
- 对象 m 属于幺半范畴 C，满足下述交换图：

$$\begin{tikzcd}
1 \overset{C}{\times} m \arrow[r, "u \overset{C}{\otimes} {}_{:m}\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\text{左单位元 } u_l"'] & m \overset{C}{\times} m \arrow[d, "p"', "\text{运算结果唯一}"] & m \overset{C}{\times} 1 \arrow[l, "{}_{:m}\mathrm{id} \overset{C}{\otimes} u"'] \arrow[dl, "u_r \text{ 右单位元}"] \\
& m &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(m \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\times} m \arrow[rr, "\text{结合律 } a"] \arrow[d, "\text{先算左侧括号 } p \overset{C}{\otimes} {}_{:m}\mathrm{id}"'] & & m \overset{C}{\times} (m \overset{C}{\times} m) \arrow[d, "{}_{:m}\mathrm{id} \overset{C}{\otimes} p \text{ 先算右侧括号}"] \\
m \overset{C}{\times} m \arrow[r, "\text{再算最终结果 } p"'] & m & m \overset{C}{\times} m \arrow[l, "p \text{ 果结终最算再}"]
\end{tikzcd}$$

  其中

  - u ：$1 \overset{C}{\to} m$ 其实就是 m 里面的幺元
  - u_l：$(1 \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\to} m$ 表示 u 构成左幺元
  - u_r：$(m \overset{C}{\times} 1) \overset{C}{\to} m$ 表示 u 构成右幺元
  - p ：$(m \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\to} m$ 即为 m 中的二元运算
  - a ：$(m \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\times} m \overset{C}{\to} m \overset{C}{\times} (m \overset{C}{\times} m)$ 表示 m 具有结合律