LaTeX Definitions are here.

米田引理

假如知道 $F : C \xrightarrow{C} \mathrm{Set}$ 则

反变米田引理的陈述如下：

- $$\underbrace{\left((\_ \xrightarrow{C} c_2) \xrightarrow{C \xrightarrow{\mathrm{Cat}} \mathrm{Set}} F\right)}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathrm{Set}}{\cong} \underbrace{(c_2 F)}_{\text{一堆元素}}$$

反变米田引理的证明如下：

1. $\Leftarrow$: 考虑任意 $(c_2 F)$ 中的 etc : 根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图
   我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_2} , 于是便可构建一个完整的 η_2 。
   易知 η_2 是一个自然变换 。

$$\mathrm{Set}$$

$$\begin{tikzcd}
c \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & cF \arrow[d, "fF"] \\
c' \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c'F
\end{tikzcd}$$

$$C \xrightarrow{C} c_2 \qquad CF$$

2. $\Rightarrow$: 考虑任意等式左侧的 η_1 : 若上述交换图成立
   则可对任意 η_1 指派 $\mathrm{etc} = {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 为 $c_2 F$ 中与之对应的元素；

$$\begin{tikzcd}
c_2 \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & c_2 F \arrow[d, "fF"] \\
c' \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c'F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:c_2}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & {}_{:c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2}) \arrow[d, "fF"] \\
f \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & \mathrm{etc}(fF)
\end{tikzcd}$$

为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
c_2 唯一地确定了 η_2 , 反之 η_2 也唯一确定了 c_2 。

协变米田引理的陈述如下：

- $$\underbrace{\left((c_1 \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{C \xrightarrow{\mathrm{Cat}} \mathrm{Set}} F\right)}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathrm{Set}}{\cong} \underbrace{(c_1 F)}_{\text{一堆元素}}$$

协变米田引理的证明如下：

1. $\Leftarrow$: 考虑任意 $(c_1 F)$ 中的 etc : 根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图
   我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_1} , 于是便可构建一个完整的 η_1 。
   易知 η_1 是一个自然变换 。

$$\mathrm{Set}$$

$$\begin{tikzcd}
c_1 \xrightarrow{C} c \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & cF \arrow[d, "fF"] \\
c_1 \xrightarrow{C} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c'F
\end{tikzcd}$$

$$c_1 \xrightarrow{C} C \qquad CF$$

2. $\Rightarrow$: 考虑任意等式左侧的 η_1 : 若上述交换图成立
   则可对任意 η_1 指派 $\mathrm{etc} = {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 为 $c_1 F$ 中与之对应的元素；

$$\begin{tikzcd}
c_1 \xrightarrow{C} c_1 \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & c_1 F \arrow[d, "fF"] \\
c_1 \xrightarrow{C} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c'F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:c_1}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1}) \arrow[d, "fF"] \\
f \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & \mathrm{etc}(fF)
\end{tikzcd}$$

为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
c_1 唯一地确定了 η_1 , 反之 η_1 也唯一确定了 c_1 。

米田嵌入

根据前面的内容我们可知

- $\text{よ} : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})$
  $c_2 \longmapsto (c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) = (\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2)$ 构成一个函子，称作预层
  $f_2 \longmapsto (f_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) = (\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
  构成一个完全忠实函子，该函子称作是**米田嵌入**。

证明如下：

- よ 是函子，因为
  - ${}_{:c_2}\mathrm{id}\,\text{よ} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:c_2}\mathrm{id}) = {}_{:(c_2\text{よ})}\mathrm{id}$
  - $(f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')\text{よ} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')$,

  由于函子具有保持对象 / 映射性质的能力，
  故便可知 $f_2\text{よ}$ 为同构当且仅当 f_2 为同构。
- よ 是完全忠实的，因为
  将协变米田引理中的 c_1 / C / F
  分别换成 c_2 / C^{op} / $(c_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_)$
  即可获得下述公式：

  $$\underbrace{((c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (c_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_))}_{\text{预层范畴的 hom-set}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(c_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} c_2)}_{\mathsf{C}\text{ 的 hom-set}}$$

  也就是

  $$\underbrace{((c_2\text{よ}) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (c_2'\text{よ}))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(c_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} c_2)}_{\mathsf{C}\text{ 的 hom-set}} = \underbrace{(c_2(c_2'\text{よ}))}_{\text{一堆元素}}$$

> ⓘ **Note**
>
> 由于函子能够保持态射的性质，
> 对任意左侧集合中的自然同构
> 右侧集合也会有同构与之对应，反之亦然。
> 这也就证明了前面自然同构相关定理省略的部分。

根据前面的内容我们可知

- $\text{尢} : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})$
  $c_1 \longmapsto (c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$ 构成一个函子
  $f_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
  构成一个完全忠实函子，该函子称作是**尤达嵌入**。

证明如下：

- 尢 是函子，因为
  - ${}_{:c_1}\mathrm{id}\,\text{尢} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:c_1}\mathrm{id}) = {}_{:(c_1\text{尢})}\mathrm{id}$
  - $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1')\text{尢} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1')) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1')$,
- 尢 是完全且忠实的，因为
  将协变米田引理中的 F
  换成 $(c_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$
  即可获得下述公式：

  $$\underbrace{((c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (c_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} \_))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(c_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} c_1)}_{\text{一堆元素}}$$

  也就是

  $$\underbrace{((c_1\text{尢}) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (c_1'\text{尢}))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(c_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} c_1)}_{\text{一堆元素}} = \underbrace{(c_1(c_1'\text{尢}))}_{\text{一堆元素}}$$

> ⓘ **Note**
>
> 由于函子能够保持态射的性质，
> 对任意左侧集合中的自然同构
> 右侧集合也会有同构与之对应，反之亦然。
> 这也就证明了前面自然同构相关定理省略的部分。