

## 米田引理

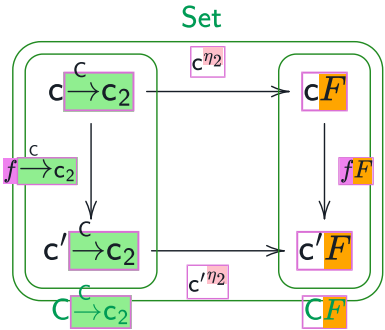
假如知道  $F : \mathbb{C} \xrightarrow{\mathbb{C}} \mathbf{Set}$  则

反变米田引理的陈述如下：

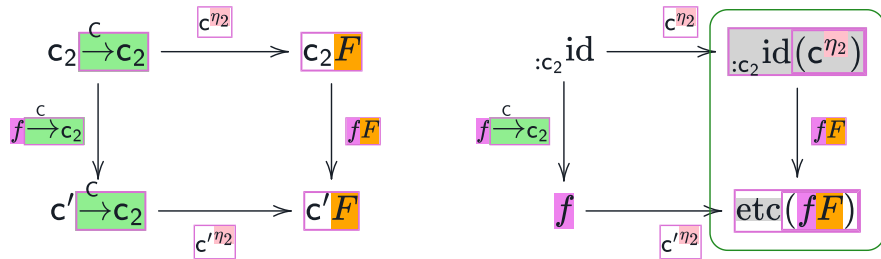
- $$\underbrace{\left( \left( \left( \_ \xrightarrow{\mathbb{C}} \mathbf{c}_2 \right) \xrightarrow{\mathbb{C} \xrightarrow{\mathbb{C}} \mathbf{Set}} F \right) \right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\left( \mathbf{c}_2 F \right)}_{\text{一堆元素}}$$

反变米田引理的证明如下：

1.  $\Leftarrow$  : 考虑任意  $(\mathbf{c}_2 F)$  中的  $\text{etc}$  : 根据  $\text{etc}$  及其所对应的上方右侧的交换图我们可为每个对象  $c'$  定义其所对应的  $c'^{\eta_2}$  , 于是便可构建一个完整的  $\eta_2$  。易知  $\eta_2$  是一个自然变换。



2.  $\Rightarrow$  : 考虑任意等式左侧的  $\eta_1$  : 若上述交换图成立则可对任意  $\eta_1$  指派  $\text{etc} = \text{id}(c^{\eta_1})$  为  $\mathbf{c}_2 F$  中与之对应的元素；



为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！

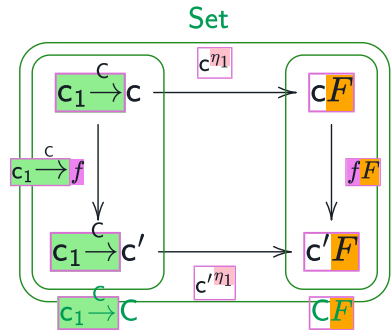
$c_2$  唯一地确定了  $\eta_2$  , 反之  $\eta_2$  页唯一确定了  $c_2$  。

协变米田引理的陈述如下：

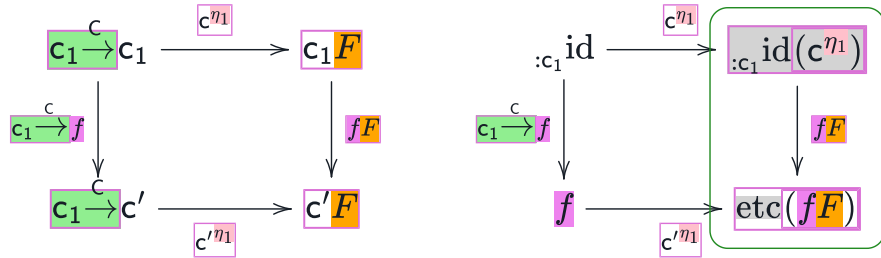
- $$\underbrace{\left( \left( \left( \mathbf{c}_1 \rightarrow \_ \right) \xrightarrow{\mathbb{C} \xrightarrow{\mathbb{C}} \mathbf{Set}} F \right) \right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\left( \mathbf{c}_1 F \right)}_{\text{一堆元素}}$$

协变米田引理的证明如下：

1.  $\Leftarrow$  : 考虑任意  $(\mathbf{c}_1 F)$  中的  $\text{etc}$  : 根据  $\text{etc}$  及其所对应的上方右侧的交换图我们可为每个对象  $c'$  定义其所对应的  $c'^{\eta_1}$  , 于是便可构建一个完整的  $\eta_1$  。易知  $\eta_1$  是一个自然变换。



2.  $\Rightarrow$  : 考虑任意等式左侧的  $\eta_1$  : 若上述交换图成立则可对任意  $\eta_1$  指派  $\text{etc} = \text{id}(c^{\eta_1})$  为  $\mathbf{c}_1 F$  中与之对应的元素；



为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！

$c_1$  唯一地确定了  $\eta_1$  , 反之  $\eta_1$  页唯一确定了  $c_1$  。



# 米田嵌入

根据前面的内容我们可知

- よ :  $C \xrightarrow{Cat} (C^{op} \xrightarrow{Set} Set)$   
 $c_2 \mapsto (c_2 \xrightarrow{C^{op}} \_ ) = (\_ \xrightarrow{C} c_2)$  构成一个函子，称作预层  
 $f_2 \mapsto (f_2 \xrightarrow{C^{op}} \_ ) = (\_ \xrightarrow{C} f_2) = (\_ \circ f_2)$  构成一个函子间映射，即自然变换  
构成一个完全忠实函子，该函子称作是**米田嵌入**。

证明如下：

- よ 是函子，因为
  - $_{:c_2} id \downarrow = (\_ \circ \_ :_{c_2} id) = \_ :_{(c_2 \downarrow)} id$
  - $(f_2 \circ f'_2) \downarrow = (\_ \circ (f_2 \circ f'_2)) = (\_ \circ f_2) \xrightarrow{Cat} \_ \circ (\_ \circ f'_2)$ ,

由于函子具有保持对象 / 映射性质的能力，  
故便可知  $f_2 \downarrow$  为同构当且仅当  $f_2$  为同构。

- よ 是完全忠实的，因为  
将协变米田引理中的  $c_1 / C / F$   
分别换成  $c_2 / C^{op} / (c'_2 \xrightarrow{C^{op}} \_ )$   
即可获得下述公式：

$((c_2 \xrightarrow{C^{op}} \_ ) \xrightarrow{C^{op} \rightarrow Set} (c'_2 \xrightarrow{C^{op}} \_ ))$

预层范畴的 hom-set

$\cong (c'_2 \xrightarrow{C^{op}} c_2)$

C 的 hom-set

也就是

$((c_2 \downarrow) \xrightarrow{Cat} (c'_2 \downarrow))$

一堆自然变换

$\cong (c_2 (c'_2 \downarrow))$

一堆元素

Note

问题来了：既然 よ 是完全忠实的，那么是否意味着  
如果  $f_2 : c_2 \xrightarrow{C} c'_2$  是同构则上式左侧部分与之对应的  
的自然变换一定就是自然同构呢？

根据前面的内容我们可知

- 尤 :  $C^{op} \xrightarrow{Cat} (C \xrightarrow{Set} Set)$   
 $c_1 \mapsto (c_1 \xrightarrow{C} \_ )$  构成一个函子  
 $f_1 \mapsto (f_1 \xrightarrow{C} \_ ) = (f_1 \circ \_ )$  构成一个函子间映射，即自然变换  
构成一个完全忠实函子，该函子称作是**尤达嵌入**。

证明如下：

- 尤 是函子，因为
  - $_{:c_1} id \Uparrow = (\_ \circ \_ :_{c_1} id) = \_ :_{(c_1 \Uparrow)} id$
  - $(f_1 \circ f'_1) \Uparrow = (\_ \circ (f_1 \circ f'_1)) = (\_ \circ f_1) \xrightarrow{Cat} \_ \circ (\_ \circ f'_1)$ ,

- 尤 是完全且忠实的，因为  
将协变米田引理中的  $F$   
换成  $(c'_1 \xrightarrow{C} \_ )$   
即可获得下述公式：

$((c_1 \xrightarrow{C} \_ ) \xrightarrow{C \rightarrow Set} (c'_1 \xrightarrow{C} \_ ))$

一堆自然变换

$\cong (c'_1 \xrightarrow{C} c_1)$

一堆元素

也就是

$((c_1 \Uparrow) \xrightarrow{Cat} (c'_1 \Uparrow))$

一堆自然变换

$\cong (c_1 (c'_1 \Uparrow))$

一堆元素

Note

问题来了：既然 尤 是完全忠实的，那么是否意味着  
如果  $f_1 : c'_1 \xrightarrow{C} c_1$  是同构则上式左侧部分与之对应的  
的自然变换一定就是自然同构呢？