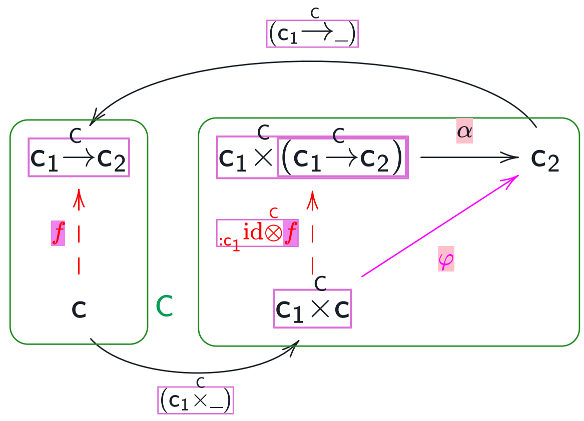
06 类型的幂

LaTeX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{\mathrm{C}}{\to}$: $(\mathrm{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathrm{Cat}}{\times} \mathrm{C}) \overset{\mathrm{Cat}}{\longrightarrow} \mathrm{C}$ 在范畴 C 中有下述性质：

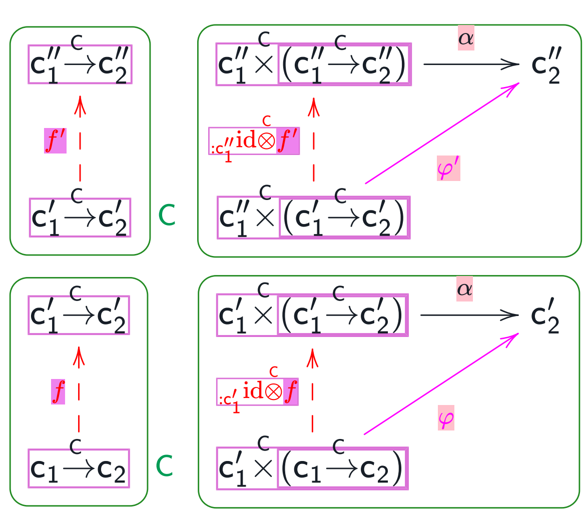
- $(c_1 \overset{\mathrm{C}}{\times} c) \overset{\mathrm{C}}{\to} c_2 \overset{\mathrm{Set}}{\cong} c \overset{\mathrm{C}}{\to} (c_1 \overset{\mathrm{C}}{\to} c_2) \overset{\mathrm{Set}}{\cong} c_1 \overset{\mathrm{C}}{\to} (c \overset{\mathrm{C}}{\to} c_2)$
  —— c 为任意 C 中对象 。此即为幂的泛性质，亦表示了**指数与乘法之间的运算关系** 。

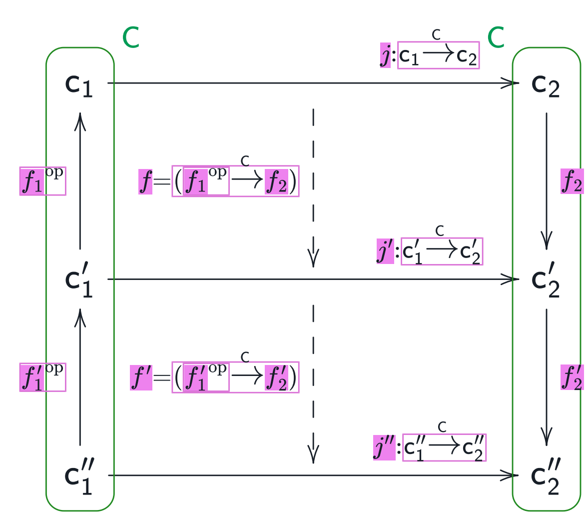


函子性

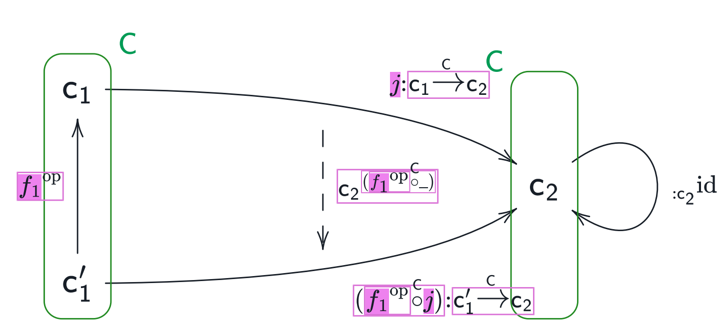
如何证明 $\overset{\mathrm{C}}{\to}$ 构成函子呢？请看

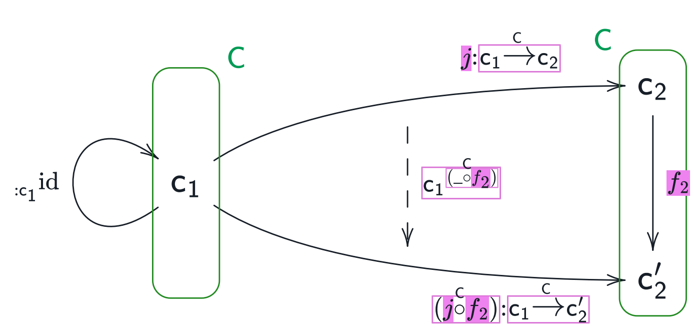
- $\overset{\mathrm{C}}{\to}$: $({}_{:c_1}\mathrm{id} \,.\, {}_{:c_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(c_1 \overset{\mathrm{C}}{\to} c_2)}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{\mathrm{C}}{\to}$ 能**保持恒等箭头**；
- $\overset{\mathrm{C}}{\to}$: $(f_1 \overset{\mathrm{C}^{\mathrm{op}}}{\circ} f_1' \,.\, f_2 \overset{\mathrm{C}}{\circ} f_2') \longmapsto (f \overset{\mathrm{C}}{\circ} f')$
  —— 即函子 $\overset{\mathrm{C}}{\to}$ **保持箭头复合运算** 。
  下图有助于形象理解证明过程：





下图（自上到下分别为图 1 和图 2）后面会用到 。





范畴 C 内任意两对象 c_1 和 c_2 间的箭头构成一个集合 $c_1 \overset{C}{\to} c_2$，
说明 $\overset{C}{\to}$ 只能将两个对象打到一个集合；下面使 $\overset{C}{\to}$ 升级为函子：
若还知道箭头 ${f_1}^{op} : c_1' \xrightarrow{C^{op}} c_1$ 以及 $f_2 : c_2 \overset{C}{\to} c_2'$，则规定

- $(\_ \overset{C}{\to} c_2) : C^{op} \overset{Cat}{\times} \cancel{C} \xrightarrow{Cat} Set$ 为函子且
  $(\_ \overset{C}{\to} c_2) : c \longmapsto (c \overset{C}{\to} c_2)$ 且对任意 $f^{op} : c' \overset{C}{\to} c$ 有
  $(\_ \overset{C}{\to} c_2) : f^{op} \longmapsto (f^{op} \overset{C}{\to} c_2) = (f^{op} \overset{C}{\to} {}_{:c_2}\mathrm{id}) = c_2^{(f^{op} \overset{C}{\circ} \_)}$
  图 1 有助于理解。
  $(\_ \overset{C}{\to} f_2) : C^{op} \overset{Cat}{\times} \cancel{C} \xrightarrow{Cat} Set$，
  $(\_ \overset{C}{\to} f_2) : c \longmapsto (c \overset{C}{\to} f_2) = ({}_{:c}\mathrm{id} \overset{C}{\to} f_2) = c_2^{(\_ \overset{C}{\circ} f_2)}$ 且对任意 $f^{op} : c' \xrightarrow{C^{op}} c$ 有
  $(\_ \overset{C}{\to} f_2) : f^{op} \longmapsto (f^{op} \overset{C}{\to} f_2) = (f^{op} \overset{C}{\circ} \_) \overset{???}{\circ} (\_ \overset{C}{\circ} f_2) = (\_ \overset{C}{\circ} f_2) \overset{???}{\circ} (f^{op} \overset{C}{\circ} \_)$
  图 2 有助于理解。

  > **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - よ : $C \xrightarrow{Cat} (C^{op} \xrightarrow{Set} Set)$
  > $c_2 \longmapsto (c_2 \xrightarrow{C^{op}} \_) = (\_ \overset{C}{\to} c_2)$ 构成一个函子
  > $f_2 \longmapsto (f_2 \xrightarrow{C^{op}} \_) = (\_ \overset{C}{\to} f_2) = (\_ \overset{C}{\circ} f_2)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
  >
  >   该函子称作是**米田嵌入**。

- $(c_1 \overset{C}{\to} \_) : \cancel{C^{op}} \overset{Cat}{\times} C \xrightarrow{Cat} Set$ 为函子且
  $(c_1 \overset{C}{\to} \_) : c \longmapsto (c_1 \overset{C}{\to} c)$，且对任意 $f : c \overset{C}{\to} c'$ 有
  $(c_1 \overset{C}{\to} \_) : f \longmapsto (c_1 \overset{C}{\to} f) = ({}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{C}{\to} f) = c_1^{(\_ \overset{C}{\circ} f)}$
  图 2 有助于理解。
  $({f_1}^{op} \overset{C}{\to} \_) : \cancel{C^{op}} \overset{Cat}{\times} C \xrightarrow{Cat} Set$，
  $({f_1}^{op} \overset{C}{\to} \_) : c \longmapsto ({f_1}^{op} \overset{C}{\to} c) = ({f_1}^{op} \overset{C}{\to} {}_{:c}\mathrm{id}) = c^{({f_1}^{op} \overset{C}{\circ} \_)}$ 且对任意 $f : c \overset{C}{\to} c'$ 有
  $({f_1}^{op} \overset{C}{\to} \_) : f \longmapsto ({f_1}^{op} \overset{C}{\to} f) = ({f_1}^{op} \overset{C}{\circ} \_) \overset{???}{\circ} (\_ \overset{C}{\circ} f) = (\_ \overset{C}{\circ} f) \overset{???}{\circ} ({f_1}^{op} \overset{C}{\circ} \_)$
  图 1 有助于理解。

  > **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - 尤 : $C^{op} \xrightarrow{Cat} (C \xrightarrow{Set} Set)$
  > $c_1 \longmapsto (c_1 \overset{C}{\to} \_)$ 构成一个函子
  > ${f_1}^{op} \longmapsto ({f_1}^{op} \overset{C}{\to} \_) = ({f_1}^{op} \overset{C}{\circ} \_)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
  >
  >   该函子戏称为**尤达嵌入**。

积闭范畴

这里插个题外话：

若范畴包含终对象，所有类型的积以及指数，则可将其称作**积闭范畴**；

若范畴包含始对象，所有类型的和，则可将其称作是**余积闭范畴**；

若范畴满足上述条件，则可称作**双积闭范畴**。

很明显我们讨论的范畴 C 就是**双积闭范畴**。