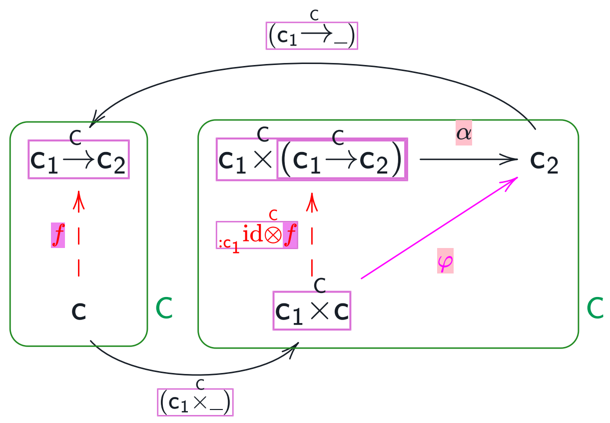
06 类型的幂

LaTeX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{\mathsf{C}}{\to}$: $(\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C}) \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$ 在范畴 C 中有下述性质：

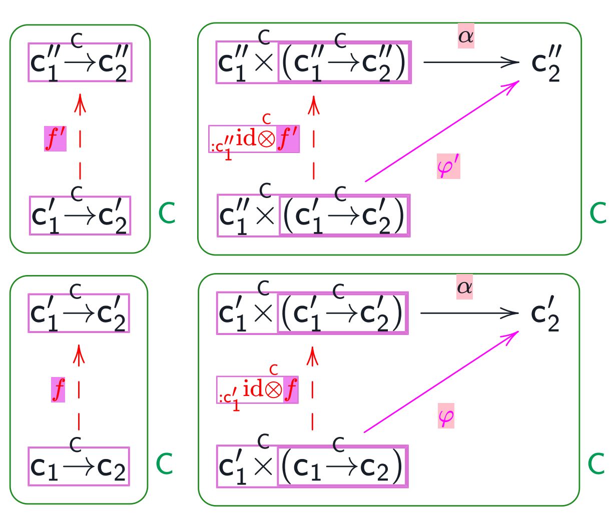
- $(c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} c) \overset{\mathsf{C}}{\to} c_2 \overset{\mathsf{Set}}{\cong} c \overset{\mathsf{C}}{\to} (c_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} c_2) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} c_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} (c \overset{\mathsf{C}}{\to} c_2)$
  —— c 为任意 C 中对象。此即为幂的泛性质，亦表示了**指数加乘法之间的运算关系**。

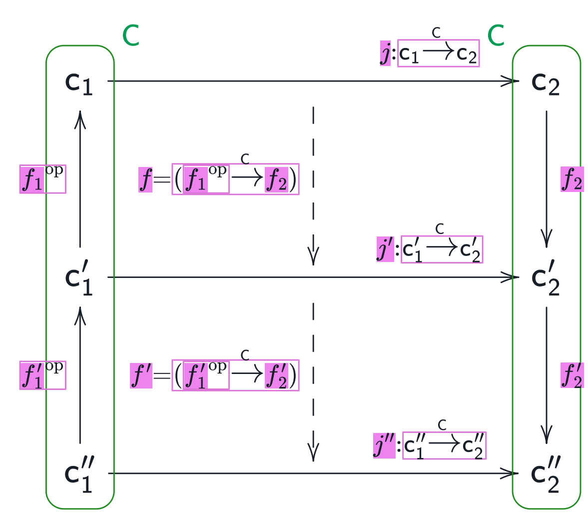


函子性

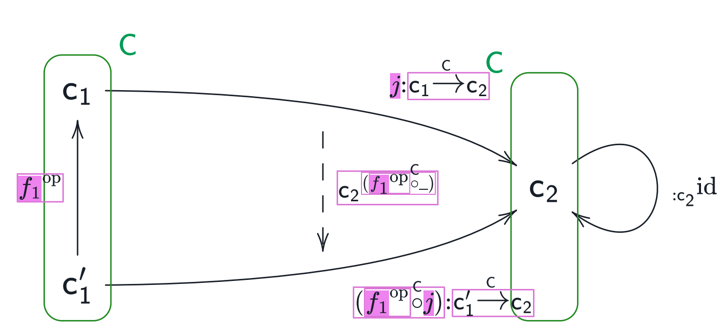
如何证明 $\overset{\mathsf{C}}{\to}$ 构成函子呢？请看

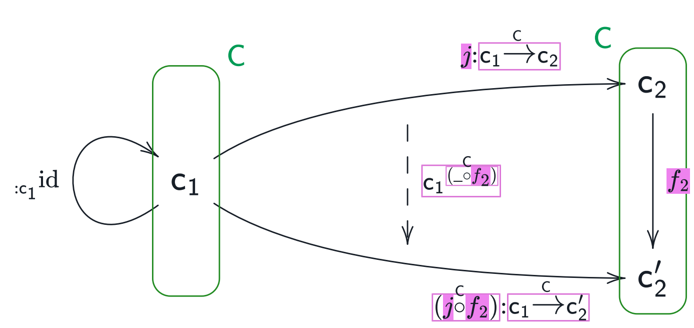
- $\overset{\mathsf{C}}{\to}$: $({}_{:c_1}\mathrm{id} \,.\, {}_{:c_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(c_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} c_2)}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{\to}$ 能**保持恒等箭头**；
- $\overset{\mathsf{C}}{\to}$: $(f_1 \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}{\circ} f_1' \,.\, f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2') \longmapsto (f \overset{\mathsf{C}}{\circ} f')$
  —— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{\to}$ **保持箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明过程：





下图（自上到下分别为图 1 和图 2）后面会用到。





范畴 C 内任意两对象 c_1 和 c_2 间的箭头构成一个集合 $c_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} c_2$，
说明 $\overset{\mathsf{C}}{\to}$ 只能将两个对象打到一个集合；下面使 $\overset{\mathsf{C}}{\to}$ 升级为函子：
若还知道箭头 $f_1{}^{\mathrm{op}} : c_1' \overset{\mathsf{C}}{\to} c_1$ 以及 $f_2 : c_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} c_2'$，则规定

- $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} c_2) : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \cancel{\mathsf{C}} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}$ 为函子且
  $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} c_2) : c \longmapsto (c \overset{\mathsf{C}}{\to} c_2)$ 且对任意 $f^{\mathrm{op}} : c' \overset{\mathsf{C}}{\to} c$ 有
  $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} c_2) : f^{\mathrm{op}} \longmapsto (f^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\to} c_2) = (f^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\to} {}_{:c_2}\mathrm{id}) = c_2{}^{(f^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}$
  图 1 有助于理解。
  $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \cancel{\mathsf{C}} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}$，
  $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) : c \longmapsto (c \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) = ({}_{:c}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) = c_2{}^{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)}$ 且对任意 $f^{\mathrm{op}} : c' \overset{\mathsf{C}}{\to} c$ 有
  $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) : f^{\mathrm{op}} \longmapsto (f^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) = (f^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{???}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \overset{???}{\circ} (f^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$
  图 2 有助于理解。

  > ⓘ **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - よ : $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} (\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Set}}{\longrightarrow} \mathsf{Set})$
  > $c_2 \longmapsto (c_2 \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}{\longrightarrow} \_) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} c_2)$ 构成一个函子
  > $f_2 \longmapsto (f_2 \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}{\longrightarrow} \_) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
  >
  >   该函子称作是**米田嵌入**。

- $(c_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) : \cancel{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}$ 为函子且
  $(c_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) : c \longmapsto (c_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} c)$，且对任意 $f : c \overset{\mathsf{C}}{\to} c'$ 有
  $(c_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) : f \longmapsto (c_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} f) = ({}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\to} f) = c_1{}^{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f)}$
  图 2 有助于理解。
  $(f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) : \cancel{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}$，
  $(f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) : c \longmapsto (f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\to} c) = (f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\to} {}_{:c}\mathrm{id}) = c^{(f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}$ 且对任意 $f : c \overset{\mathsf{C}}{\to} c'$ 有
  $(f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) : f \longmapsto (f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\to} f) = (f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{???}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f) \overset{???}{\circ} (f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$
  图 1 有助于理解。

  > ⓘ **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - 尤 : $\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} (\mathsf{C} \overset{\mathsf{Set}}{\longrightarrow} \mathsf{Set})$
  > $c_1 \longmapsto (c_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)$ 构成一个函子
  > $f_1{}^{\mathrm{op}} \longmapsto (f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) = (f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
  >
  >   该函子戏称为**尤达嵌入**。

积闭范畴

这里插个题外话：

若范畴包含终对象，所有类型的积以及指数，则可将其称作**积闭范畴**；

若范畴包含始对象，所有类型的和，则可将其称作是**余积闭范畴**；

若范畴满足上述条件，则可称作**双积闭范畴**。

很明显我们讨论的范畴 C 就是**双积闭范畴**。