

## 02 范畴当中的箭头

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Definitions are here.

沿用上一节提到的自由变量。我们规定：

- $\mathbf{c}_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_2 =$   
所有从  $\mathbf{c}_1$  射向  $\mathbf{c}_2$  的箭头构成的集。

**Note**

上述断言仅对于**局部小范畴**成立，  
其他范畴里  $\mathbf{c}_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_2$  未必构成集。

范畴  $\mathbf{C}$  中特定的箭头可以进行复合运算：

- $\circ^{\mathbf{C}} : (\mathbf{c}_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_2) \times (\mathbf{c}_2 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_3) \xrightarrow{\text{Set}} (\mathbf{c}_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_3)$   
 $(i_1 \quad . \quad i_2) \longmapsto i_1 \circ^{\mathbf{C}} i_2$

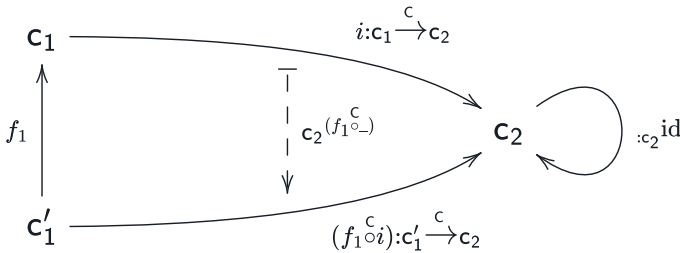
如果我们还知道箭头  $f_1, i, f_2$  分别属于  
 $\mathbf{c}'_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_2 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}'_2$  那么便可知

- $(f_1 \circ^{\mathbf{C}} i) \circ^{\mathbf{C}} f_2 = f_1 \circ^{\mathbf{C}} (i \circ^{\mathbf{C}} f_2),$   
即箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便可获得新的函数：

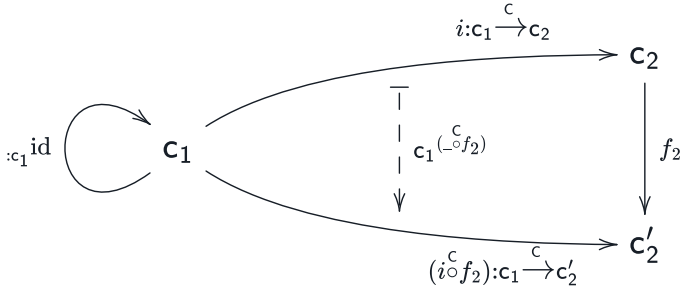
- $(f_1 \circ^{\mathbf{C}} \_): (\mathbf{c}_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} \_) \xrightarrow{\mathbf{C} \rightarrow \text{Set}} (\mathbf{c}'_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} \_)$   
 $i \longmapsto (f_1 \circ^{\mathbf{C}} i)$

称作**前复合**。下图有助于形象理解：



- $(\_ \circ^{\mathbf{C}} f_2): (\_ \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_2) \xrightarrow{\mathbf{C} \rightarrow \text{Set}} (\_ \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}'_2)$   
 $i \longmapsto (i \circ^{\mathbf{C}} f_2)$

称作**后复合**。下图有助于形象理解：



根据上面的定义不难得出下述结论：

- $(f_1 \circ^{\mathbf{C}} \_) \circ^{\text{Cat}} (\_ \circ^{\mathbf{C}} f_2) = (\_ \circ^{\mathbf{C}} f_2) \circ^{\text{Cat}} (f_1 \circ^{\mathbf{C}} \_)$   
复合运算具有**结合律**，即后面提到的**自然性**；
- $(\_ \circ^{\mathbf{C}} i) \circ^{\text{Cat}} (\_ \circ^{\mathbf{C}} f_2) = (\_ \circ^{\mathbf{C}} (i \circ^{\mathbf{C}} f_2))$   
前复合与复合运算的关系
- $(i \circ^{\mathbf{C}} \_) \circ^{\text{Cat}} (f_1 \circ^{\mathbf{C}} \_) = ((f_1 \circ^{\mathbf{C}} i) \circ^{\mathbf{C}} \_)$   
后复合与复合运算的关系

### 箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。

假如  $a_1$  为  $\mathbf{c}_1$  的全局元素则可规定

- $c_1 i = c_1 \circ^{\mathbf{C}} i$

## 恒等箭头

范畴  $\mathbf{C}$  内的每个对象都有恒等映射：

- $\text{id} : c_1 \xrightarrow{c} c_1$   
 $c_1 \mapsto c_1$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- $\text{id} \circ i = i$   
 $= i \circ \text{id}$

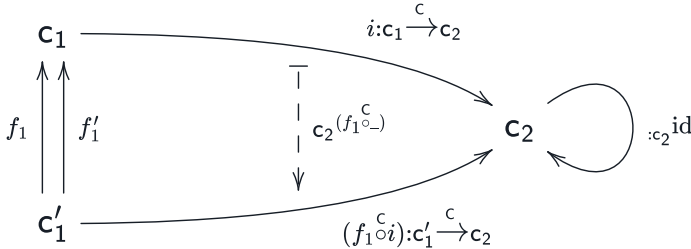
此外还可以得知

- $(\text{id} \circ \_) : (c_1 \xrightarrow{c} \_) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} (c_1 \xrightarrow{c} \_)$   
为恒等自然变换，可记作是  $(c_1 \xrightarrow{c} \_) \text{id}$ ；
- $(\_ \circ \text{id}) : (\_ \xrightarrow{c} c_2) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} (\_ \xrightarrow{c} c_2)$   
为恒等自然变换，可记作是  $(\_ \xrightarrow{c} c_2) \text{id}$ 。

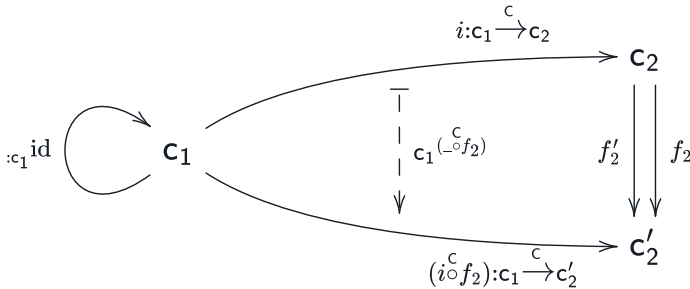
## 单满态以及同构

接下来给出单 / 满态和同构的定义。

- $i$  为**单态**当且仅当对任意  $c'_1$   
若有  $f_1, f'_1 : c'_1 \xrightarrow{c} c_1$  满足  $f_1 \circ i = f'_1 \circ i$   
则有  $f_1 = f'_1$ 。详情见下图：



- $i$  为**满态**当且仅当对任意  $c'_2$   
若有  $f_2, f'_2 : c_2 \xrightarrow{c} c'_2$  满足  $i \circ f_2 = i \circ f'_2$   
则有  $f_2 = f'_2$ 。详情见下图：



- $i$  为**同构**当且仅当存在  $i' : c_2 \xrightarrow{c} c_1$   
使得  $i \circ i' = \text{id}$  且  $i' \circ i = \text{id}$ 。  
此时  $c_1, c_2$  间的关系可记作  $c_1 \cong c_2$ 。

若还知道  $i = i_1$  且  $i_2 : c_2 \xrightarrow{c} c_3$  则有

- 若  $i_1, i_2$  为单态  
则  $i_1 \circ i_2$  为单态；
- 若  $i_1, i_2$  为满态  
则  $i_1 \circ i_2$  为满态；
- 若  $i_1, i_2$  为同构  
则  $i_1 \circ i_2$  为同构；
- 若  $i_1 \circ i_2$  为同构  
且  $i_1, i_2$  中有一个为同构  
则  $i_1, i_2$  两者皆构成同构。

不仅如此我们还可以得出下述结论：

- $c_1$  为单态，  
由  $!_{c_1}$  的唯一性可知；
- $!_0 = !_1$  为同构，  
因为  $0 \rightarrow 0 = \{!_0 \text{id}\}$   
并且  $1 \rightarrow 1 = \{!_1 \text{id}\}$