10 伴随函子

LaTeX Definitions are here.

若有函子 $L : \mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}$
以及函子 $R : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$, 即

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[loop above, "\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}"] \arrow[rr, bend right, "R"'] & & \mathsf{D} \arrow[loop above, "\mathrm{Id}_{\mathsf{D}}"] \arrow[ll, bend right, "L"']
\end{tikzcd}
$$

伴随函子的第一种定义

那么规定

- $L \dashv R$ 当且仅当
  函子 $(\_L \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$ 和 $(\_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \_R)$
  间存在着一个二元的**自然同构** 。

假如确实有 $L \dashv R$, 那么不难得知

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_2 , 见下 :

$$\phi_2 : (\_ \xrightarrow{D} \_R) \xrightarrow{(D\times C)\xrightarrow{C}Set} (\_L \xrightarrow{C} \_)$$
$$(\_\,.\,c)^{\phi_2} : (\_ \xrightarrow{D} cR) \xrightarrow{D\xrightarrow{C}Set} (\_L \xrightarrow{C} c)$$
$$(d\,.\,\_)^{\phi_2} : (d \xrightarrow{D} \_R) \xrightarrow{C\xrightarrow{C}Set} (dL \xrightarrow{C} \_)$$

套用反变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{\big((\_ \xrightarrow{D} cR) \xrightarrow{D^{op}\overset{Cat}{\longrightarrow}Set} (\_L \xrightarrow{C} c)\big)}_{一堆自然变换} \overset{Set}{\cong} \underbrace{(cRL \xrightarrow{C} c)}_{一堆元素}$$

由反变米田引理的证明可知 : 对每个左侧集合中的自然同构 $(\_\,.\,c)^{\phi_2}$
右侧集合中都有一个箭头与之对应 , 即 $:_{cR}\mathrm{id}(cR\,.\,c)^{\phi_2} = c^{\varepsilon}$ 。如此

- $\varepsilon : R \overset{Cat}{\circ} L \xrightarrow{C\longrightarrow C} {:_C}\mathrm{Id}$ 构成自然变换 。

> 考虑任意 $f^{op} : c' \xrightarrow{C} c$:
>
> $$\begin{tikzcd}
cR \xrightarrow{D} cR \arrow[r, "(cR.c)^{\phi_2}"] \arrow[d, "f^{op}R \xrightarrow{D} cR"'] & cRL \xrightarrow{C} c \arrow[d, "f^{op}RL \xrightarrow{C} c"] \\
c'R \xrightarrow{D} cR \arrow[r, dashed, "(c'R.c)^{\phi_2}"] & c'RL \xrightarrow{C} c \\
c'R \xrightarrow{D} c'R \arrow[r, "(c'R.c')^{\phi_2}"'] \arrow[u, "c'R \xrightarrow{D} f^{op}R"] & c'RL \xrightarrow{C} c' \arrow[u, "c'RL \xrightarrow{C} f^{op}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{:_{cR}\mathrm{id}} \arrow[r, mapsto, "(cR.c)^{\phi_2}"] \arrow[d, mapsto, "f^{op}R \xrightarrow{D} cR"'] & {:_{cR}\mathrm{id}(cR.c)^{\phi_2} = c^{\varepsilon}} \arrow[d, mapsto, "f^{op}RL \xrightarrow{C} c = c^{(f^{op}RL \overset{C}{\circ} _)}"] \\
f^{op}R \arrow[r, mapsto, dashed, "(c'R.c)^{\phi_2}"] & f^{op}RL \overset{C}{\circ} c^{\varepsilon} = c'^{\varepsilon} \overset{C}{\circ} f^{op} \\
{:_{c'R}\mathrm{id}} \arrow[r, mapsto, "(c'R.c')^{\phi_2}"'] \arrow[u, mapsto, "c'R \xrightarrow{D} f^{op}R"] & {:_{c'R}\mathrm{id}(c'R.c')^{\phi_2} = c'^{\varepsilon}} \arrow[u, "c'RL \xrightarrow{C} f^{op} = (c'RL)^{(_ \overset{C}{\circ} f^{op})}"']
\end{tikzcd}$$
>
> 上方右图的第二行的第二个节点说明了一切 。这两张图
> 其实就是反变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果 。

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_1 , 见下 :

$$\phi_1 : (\_L \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{(D\times C)\xrightarrow{C}Set} (\_ \xrightarrow{D} \_R)$$
$$(\_\,.\,c)^{\phi_1} : (\_L \xrightarrow{C} c) \xrightarrow{D\xrightarrow{C}Set} (\_ \xrightarrow{D} cR)$$
$$(d\,.\,\_)^{\phi_1} : (dL \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{C\xrightarrow{C}Set} (d \xrightarrow{D} \_R)$$

套用协变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{\big((dL \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{C\overset{Cat}{\longrightarrow}Set} (d \xrightarrow{D} \_R)\big)}_{一堆自然变换} \overset{Set}{\cong} \underbrace{(d \xrightarrow{D} dLR)}_{一堆元素}$$

由协变米田引理的证明可知 : 对每个左侧集合中的自然同构 $(d\,.\,\_)^{\phi_1}$
右侧集合中都有一个箭头与之对应 , 即 $:_{dL}\mathrm{id}(d\,.\,dL)^{\phi_1} = d^{\eta}$ 。如此 。

- $\eta : {:_D}\mathrm{Id} \xrightarrow{D\overset{Cat}{\longrightarrow}D} L \overset{Cat}{\circ} R$ 构成自然变换 。

> 考虑任意 $g : d \xrightarrow{D} d'$:
>
> $$\begin{tikzcd}
dL \xrightarrow{C} dL \arrow[r, "(d.dL)^{\phi_1}"] \arrow[d, "dL \xrightarrow{C} gL"'] & d \xrightarrow{D} dLR \arrow[d, "d \xrightarrow{D} gLR"] \\
dL \xrightarrow{C} d'L \arrow[r, dashed, "(d.d'L)^{\phi_1}"] & d \xrightarrow{D} d'LR \\
d'L \xrightarrow{C} d'L \arrow[r, "(d'.d'L)^{\phi_1}"'] \arrow[u, "gL \xrightarrow{C} d'L"] & d' \xrightarrow{D} d'LR \arrow[u, "g \xrightarrow{D} d'LR"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{:_{dL}\mathrm{id}} \arrow[r, mapsto, "(d.dL)^{\phi_1}"] \arrow[d, mapsto, "dL \xrightarrow{C} gL"'] & {:_{dL}\mathrm{id}(d.dL)^{\phi_1} = d^{\eta}} \arrow[d, mapsto, "d \xrightarrow{D} gLR = d^{(_ \overset{D}{\circ} gLR)}"] \\
gL \arrow[r, mapsto, dashed, "(d.d'L)^{\phi_1}"] & d^{\eta} \overset{D}{\circ} gLR = g \overset{D}{\circ} d'^{\eta} \\
{:_{d'L}\mathrm{id}} \arrow[r, mapsto, "(d'.d'L)^{\phi_1}"'] \arrow[u, mapsto, "gL \xrightarrow{C} d'L"] & {:_{d'L}\mathrm{id}(d'.d'L)^{\phi_1} = d'^{\eta}} \arrow[u, "g \xrightarrow{D} d'LR = (d'LR)^{(g \overset{D}{\circ} _)}"']
\end{tikzcd}$$
>
> 上方右图的第二行的第二个节点说明了一切 。这两张图
> 其实就是协变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果 。

对于前面的 ε 和 η 我们有下述交换图成立：

- $$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\overset{???}{\eta\circ{:}L^\iota}"] \arrow[dr, ":L^\iota"'] & L\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}R\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}L \arrow[d, "\overset{???}{{:}L^\iota\circ\varepsilon}"] \\ & L \end{tikzcd}$$ $$\begin{tikzcd}[row sep=huge] \mathsf{C} \\ \mathsf{D} \arrow[u, bend left=60, "L"] \arrow[u, bend right=60, "L"'] \arrow[u, phantom, "\overset{:L^\iota}{\Rightarrow}"] \\ \mathsf{D} \arrow[u, bend left=60, ":_{\mathsf D}\mathrm{Id}"] \arrow[u, bend right=60, "L\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}R"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\eta}{\Rightarrow}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=huge] \mathsf{C} \\ \mathsf{C} \arrow[u, bend left=60, "R\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}L"] \arrow[u, bend right=60, ":_{\mathsf C}\mathrm{Id}"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Rightarrow}"] \\ \mathsf{D} \arrow[u, bend left=60, "L"] \arrow[u, bend right=60, "L"'] \arrow[u, phantom, "\overset{:L^\iota}{\Rightarrow}"] \end{tikzcd}$$
- $$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\overset{???}{{:}R^\iota\circ\eta}"] \arrow[dr, ":R^\iota"'] & R\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}L\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}R \arrow[d, "\overset{???}{\varepsilon\circ{:}R^\iota}"] \\ & R \end{tikzcd}$$ $$\begin{tikzcd}[row sep=huge] \mathsf{D} \\ \mathsf{D} \arrow[u, bend left=60, ":_{\mathsf D}\mathrm{Id}"] \arrow[u, bend right=60, "L\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}R"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\eta}{\Rightarrow}"] \\ \mathsf{C} \arrow[u, bend left=60, "R"] \arrow[u, bend right=60, "R"'] \arrow[u, phantom, "\overset{:R^\iota}{\Rightarrow}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=huge] \mathsf{D} \\ \mathsf{C} \arrow[u, bend left=60, "R"] \arrow[u, bend right=60, "R"'] \arrow[u, phantom, "\overset{:R^\iota}{\Rightarrow}"] \\ \mathsf{C} \arrow[u, bend left=60, "R\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}L"] \arrow[u, bend right=60, ":_{\mathsf C}\mathrm{Id}"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Rightarrow}"] \end{tikzcd}$$

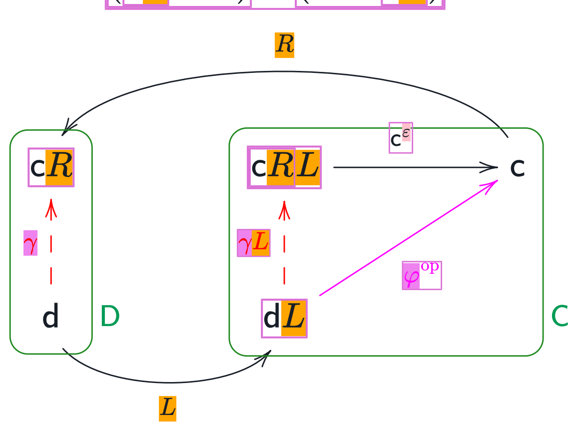
伴随函子的第二种定义

假设我们不知道 L 和 R 构成一对伴随函子并且有自然变换 $\varepsilon : R\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}L \xrightarrow{\mathsf{C}\to\mathsf{C}} {:_{\mathsf C}}\mathrm{Id}$ 和 $\eta : {:_{\mathsf D}}\mathrm{Id} \xrightarrow{\mathsf{D}\to\mathsf{D}} L\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}R$ 能同时满足上页开头的两幅交换图，即

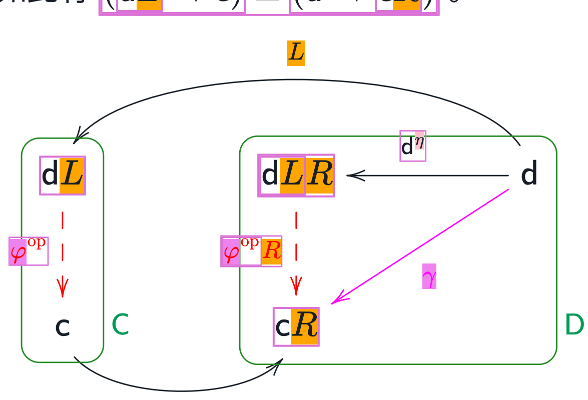
$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\overset{???}{\eta\circ{:}L^\iota}"] \arrow[dr, ":L^\iota"'] & L\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}R\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}L \arrow[d, "\overset{???}{{:}L^\iota\circ\varepsilon}"] \\ & L \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "\overset{???}{{:}R^\iota\circ\eta}"] \arrow[dr, ":R^\iota"'] & R\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}L\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}R \arrow[d, "\overset{???}{\varepsilon\circ{:}R^\iota}"] \\ & R \end{tikzcd}$$

那么

- 对任意 C 中对象 c
  及任意 D 中对象 d
  及任意 $\varphi^{\mathrm{op}} : \mathrm{d}L \overset{\mathsf C}{\to} \mathrm{c}$ 始终存在
  唯一的 $\gamma : \mathrm{d} \overset{\mathsf D}{\to} \mathrm{c}R$ 使下图交换。
  如此有 $(\mathrm{d}L \overset{\mathsf C}{\to} \mathrm{c}) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathrm{d} \overset{\mathsf D}{\to} \mathrm{c}R)$。

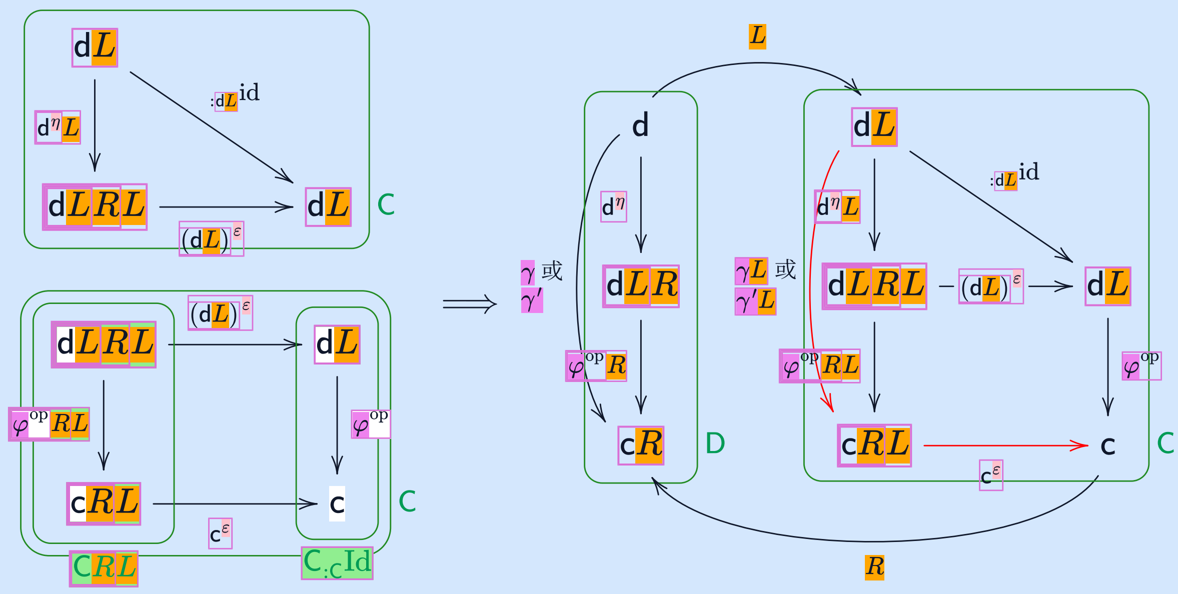


- 对任意 C 中对象 c
  及任意 D 中对象 d
  及任意 $\gamma : \mathrm{d} \overset{\mathsf D}{\to} \mathrm{c}R$ 始终都会存在
  唯一的 $\varphi^{\mathrm{op}} : \mathrm{d}L \overset{\mathsf C}{\to} \mathrm{c}$ 使下图交换。
  如此有 $(\mathrm{d}L \overset{\mathsf C}{\to} \mathrm{c}) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathrm{d} \overset{\mathsf D}{\to} \mathrm{c}R)$。

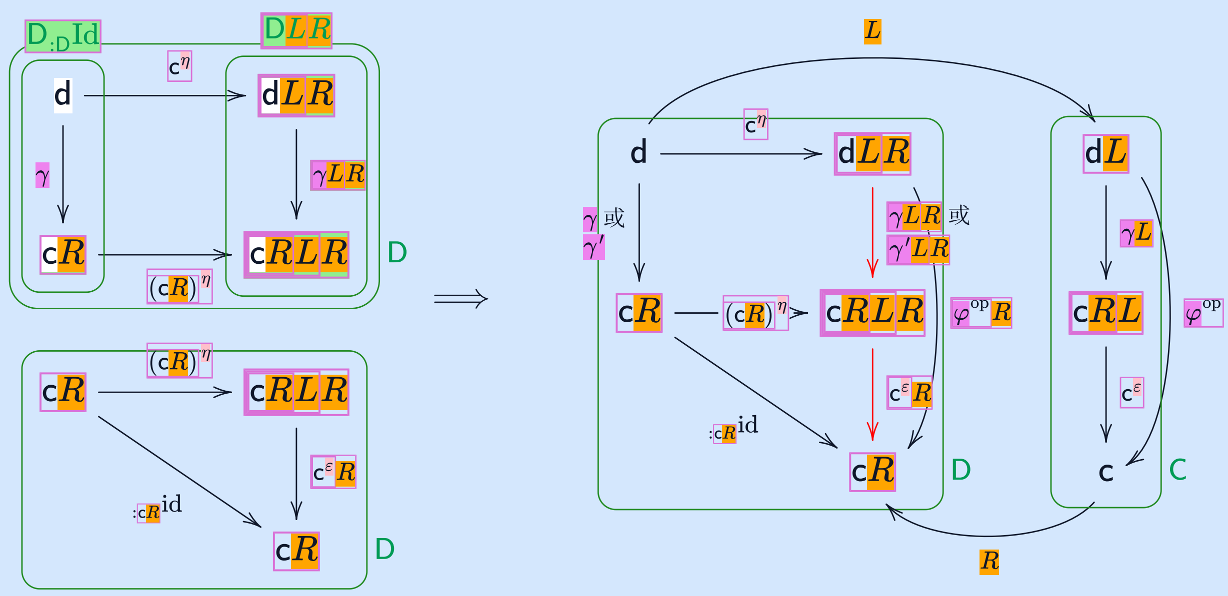


现证明上页的头两条定理。

我们将下图称作图 1：图 1 上半部分即为上页第一幅图，而图 1 下半部分可由 ε 为自然变换得出。两图拼在一起即得图 1 右侧部分。



我们将下图称作图 2：图 2 下半部分即为上页第二幅图，而图 2 上半部分可由 η 为自然变换得出。两图拼在一起即得图 2 右侧部分。



为何 γ 唯一呢？若 γ' 亦满足上图——即不论是 γ 还是 γ' 图 1 右侧部分中 L 形走向红色路径的复合结果都为 φ^{op}；故图 2 右侧部分中红色路径的复合结果也是一致的；如此根据图 2 右侧部分即可知 $\gamma = \gamma'$。

另一侧同理，这里不再赘述。

伴随函子的第三种定义

假设我们不知道 L 和 R 构成一对伴随函子并且有自然变换
$\varepsilon : R \overset{\mathrm{Cat}}{\circ} L \xrightarrow{C \to C} {}_{:C}\mathrm{Id}$ 和 $\eta : {}_{:D}\mathrm{Id} \xrightarrow{D \to D} L \overset{\mathrm{Cat}}{\circ} R$，那么我们有

- 若对任意 C 中对象 c
  及对任意 D 中对象 d
  及对任意 $\varphi^{\mathrm{op}} : dL \overset{C}{\to} c$ 始终都会
  有唯一的 $\gamma : d \overset{D}{\to} cR$ 使下图交换，

$$
\begin{tikzcd}
cR & & cRL \arrow[r, "c^{\varepsilon}"] & c \arrow[lll, bend right, "R"'] & \\
d \arrow[u, dashed, "\gamma"] \arrow[rr, bend right, "L"'] & D & dL \arrow[u, dashed, "\gamma L"] \arrow[ur, "\varphi^{\mathrm{op}}"'] & & C
\end{tikzcd}
$$

  那么

$$
\begin{aligned}
\phi_2 &: (\_ \overset{D}{\to} \_R) \xrightarrow{\overset{C}{(D\times C)} \overset{C}{\to} \mathrm{Set}} (\_L \overset{C}{\to} \_) \\
(\_ \,.\, c)^{\phi_2} &: (\_ \overset{D}{\to} cR) \xrightarrow{D \overset{C}{\to} \mathrm{Set}} (\_L \overset{C}{\to} c) \\
(d \,.\, \_)^{\phi_2} &: (d \overset{D}{\to} \_R) \xrightarrow{C \overset{C}{\to} \mathrm{Set}} (dL \overset{C}{\to} \_)
\end{aligned}
$$

  将构成自然同构。

- 若对任意 C 中对象 c
  及对任意 D 中对象 d
  及对任意 $\gamma : d \overset{D}{\to} cR$ 始终都存在
  唯一的 $\varphi^{\mathrm{op}} : dL \overset{C}{\to} c$ 使下图交换，

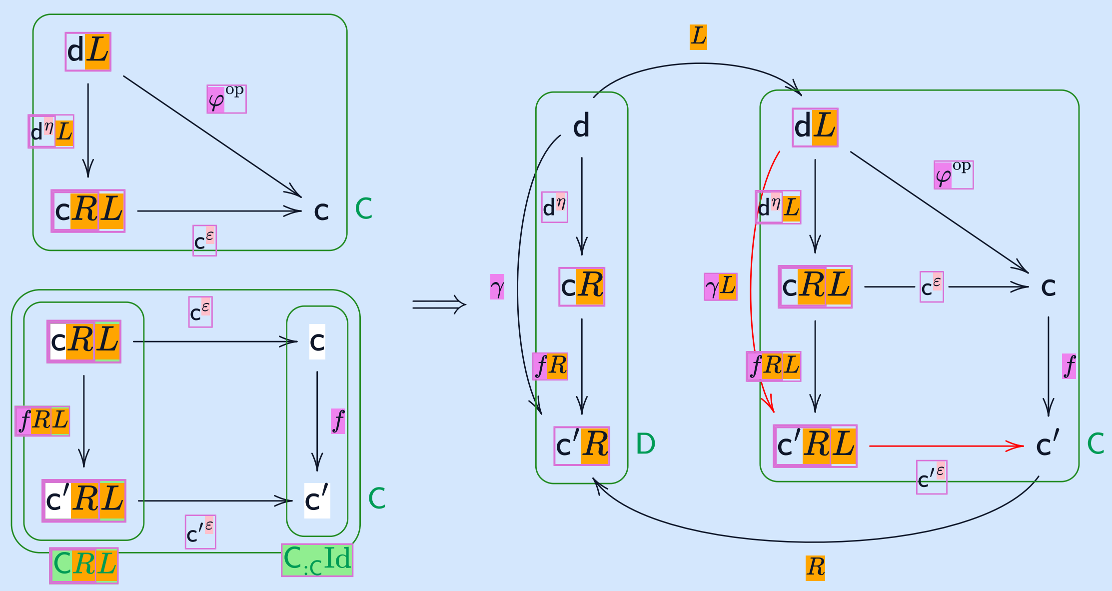
$$
\begin{tikzcd}
dL \arrow[d, dashed, "\varphi^{\mathrm{op}}"'] & & dLR & d \arrow[l, "d^{\eta}"'] \arrow[lll, bend right, "L"'] \arrow[dl, "\gamma"] & \\
c \arrow[rr, bend right, "R"'] & C & cR \arrow[from=u, dashed, "\varphi^{\mathrm{op}} R"'] & & D
\end{tikzcd}
$$

  那么

$$
\begin{aligned}
\phi_1 &: (\_L \overset{C}{\to} \_) \xrightarrow{\overset{C}{(D\times C)} \overset{C}{\to} \mathrm{Set}} (\_ \overset{D}{\to} \_R) \\
(\_ \,.\, c)^{\phi_1} &: (\_L \overset{C}{\to} c) \xrightarrow{D \overset{C}{\to} \mathrm{Set}} (\_ \overset{D}{\to} cR) \\
(d \,.\, \_)^{\phi_1} &: (dL \overset{C}{\to} \_) \xrightarrow{C \overset{C}{\to} \mathrm{Set}} (d \overset{D}{\to} \_R)
\end{aligned}
$$

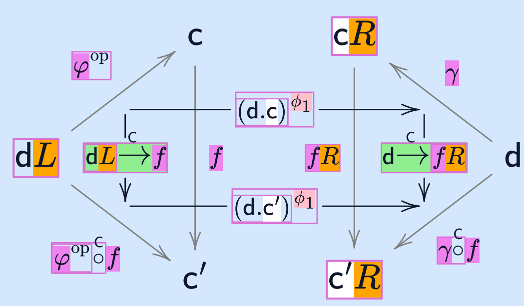
  将构成自然同构。

现证上页第一条定理 。



如此便证明了下方左侧的相继式，而这相当于下方右图 。

$$\frac{\mathsf{d}L \xrightarrow{\varphi^{\mathrm{op}}} \mathsf{c} \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}'}{\mathsf{d} \xrightarrow[\gamma]{} \mathsf{c}R \xrightarrow[f^{\mathrm{op}}R]{} \mathsf{c}'R}$$



$$\frac{\mathsf{d}L \xrightarrow{gL} \mathsf{d}'L \xrightarrow{f'^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}}{\mathsf{d} \xrightarrow[g]{} \mathsf{d}' \xrightarrow[g']{} \mathsf{c}R}$$

也就意味着有