08-09 函子与自然变换

LaTeX Definitions are here.

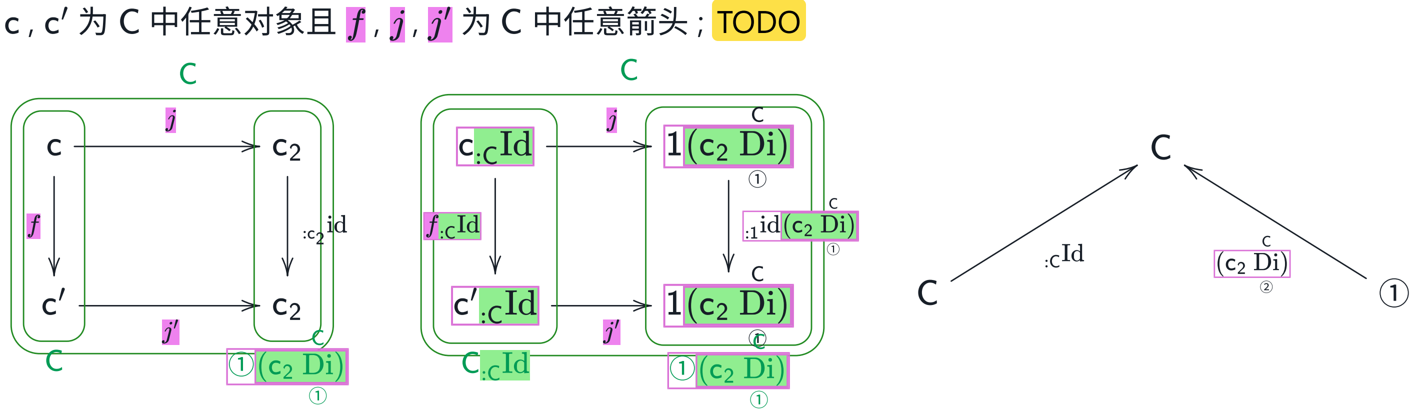
一些特殊的范畴

现在规定几种特殊的范畴。

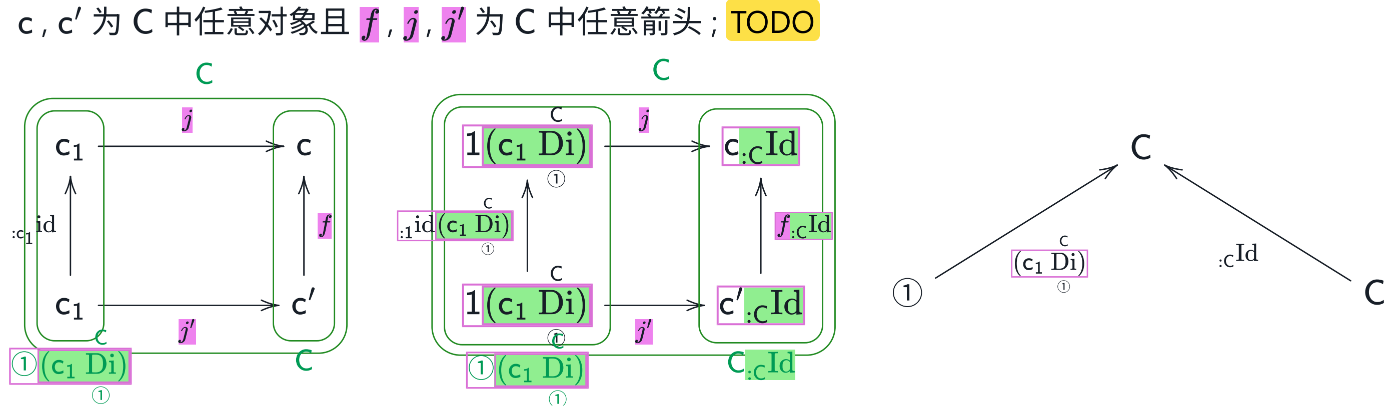
- **离散范畴**：只有对象不含箭头（恒等箭头除外）的范畴。
- Set：**所有集合构成的范畴**，为局部小范畴，满足
  - Set 中对象为任意集合；
  - Set 中箭头为集合间映射。
- Cat：**所有范畴构成的范畴**，满足
  - Cat 中任何对象都构成一个范畴；
  - Cat 中任何箭头都构成一个函子。

若 C，D 为 Cat 中对象，则：

- $\boxed{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$：**反范畴**，满足
  - $\boxed{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$ 中对象皆形如 c，
    c 为任意 C 中的对象；
  - $\boxed{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$ 中箭头皆形如 $\boxed{j^{\mathrm{op}}}$: $\boxed{c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} c_1}$，
    j : $\boxed{c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2}$ 可为任意 C 中的箭头。
- $\boxed{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{D}}$：**积范畴**，满足
  - $\boxed{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{D}}$ 中对象皆形如 $\boxed{c \,.\, d}$，
    c，d 分别为任意 C，D 中的对象；
  - $\boxed{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{D}}$ 中箭头皆形如 $j \,.\, k$，
    j，k 分别为任意 C，D 中的箭头。
- $\boxed{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}}$：**所有 C 到 D 的函子的范畴**，满足
  - $\boxed{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}}$ 中任何对象
    都是 C 到 D 的函子；
  - $\boxed{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}}$ 中任何箭头
    都是函子间自然变换。
- C/c：**俯范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
  - C/c_2 中对象皆形如 $\boxed{\cancel{c \,.\, 1} \,.\, j}$，其中 c 和
    j : $\boxed{c \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2}$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
  - c_2/C 中箭头皆形如 $f \,\cancel{.\, {}_{:c_2}\mathrm{id}}$ 且满足下述交换图，其中
    c，c′ 为 C 中任意对象且 f，j，j' 为 C 中任意箭头；TODO



- c_1/C：**仰范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
  - c_1/C 中对象皆形如 $\boxed{\cancel{1 \,.\, c} \,.\, j}$，其中 c 和
    j : $\boxed{c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c}$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
  - C/c_1 中箭头皆形如 $\cancel{{}_{:c_1}\mathrm{id} \,.}\, f$ 且满足下述交换图，其中
    c，c′ 为 C 中任意对象且 f，j，j' 为 C 中任意箭头；TODO



函子

接下来我们来提供函子的正式定义：

- $F : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{D}$ 为**函子**当且仅当
    - 对任意 C 中对象 c，$\mathsf{c}F$ 为 D 中对象且 $_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}F = {}_{:\mathsf{c}F}\mathrm{id}$；
    - 对任意 C 中箭头 $j_1 : \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2$ 和 $j_2 : \mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_3$，始终都有等式 $(j_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} j_2)F = j_1F \overset{\mathsf{D}}{\circ} j_2F$ 成立。

若已确信 $F : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{D}$ 为函子且
还知 C 中有对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$
以及 C 中有箭头 $j : \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2$ 则

- 若 j 为单态 / 满态 / 同构
  则 jF 为单态 / 满态 / 同构；
- 若 jF 为同构
  则 j 为同构。

> ⓘ **Note**
>
> 不难发现函子具有保持
> 对象 / 态射性质的能力。

函子的复合运算

若还知道 $G : \mathsf{D} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{E}$ 为函子则

- $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{E}$
  也构成一个函子。

恒等函子

对于函子我们也有恒等映射，即：

- $$\begin{aligned} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id} \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} F &= F \\ &= F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id} \end{aligned}$$

忠实，完全和本质满函子

若 C，D，E 皆为**局部小范畴**，则

- F 是**忠实的**当且仅当对任意 C 中的对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$，
  $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2$ 与 $\mathsf{c}_1F \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}_2F$ 之间始终都存在单射；
- F 是**完全的**当且仅当对任意 C 中的对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$，
  $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2$ 与 $\mathsf{c}_1F \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}_2F$ 之间始终都存在满射；
- F 是**完全忠实的**当且仅当任意 C 中对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$，
  $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2$ 与 $\mathsf{c}_1F \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}_2F$ 之间始终都存在双射。

> ⓘ **Note**
>
> 刚才提到的“单 / 满 / 双射”
> 针对的都是范畴的箭头部分。

- F 是**本质满的**当且仅当对任意 D 中对象 d
  都存在 C 中对象 c 使 $\mathsf{c}F \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{d}$ 之间有双射。

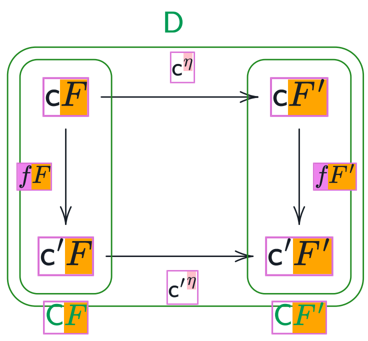
根据刚才的信息我们不难得知

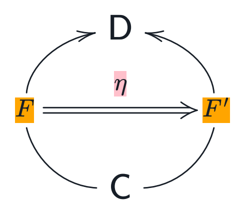
- 若 F, G 为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满函子
  则 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满 函子；
- 若 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为完全忠实函子
  且知道 G 为完全忠实函子
  则可知 F 为完全忠实函子；

自然变换

如果还知道 F' : $\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为函子，那么

- $\eta : F \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\Longrightarrow\mathsf{D}}} F'$ 为自然变换当且仅当对任意 C 中对象 c，c′ 始终都会有下述交换图成立：

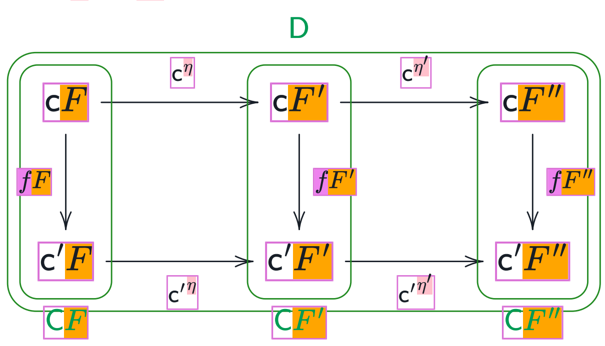


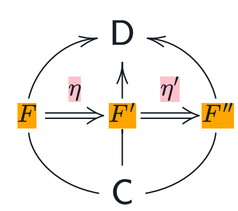


自然变换的复合

若已知 $\eta : F \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\Longrightarrow\mathsf{D}}} F'$ 构成自然变换且
还知道 $\eta' : F' \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\Longrightarrow\mathsf{D}}} F''$ 为自然变换则

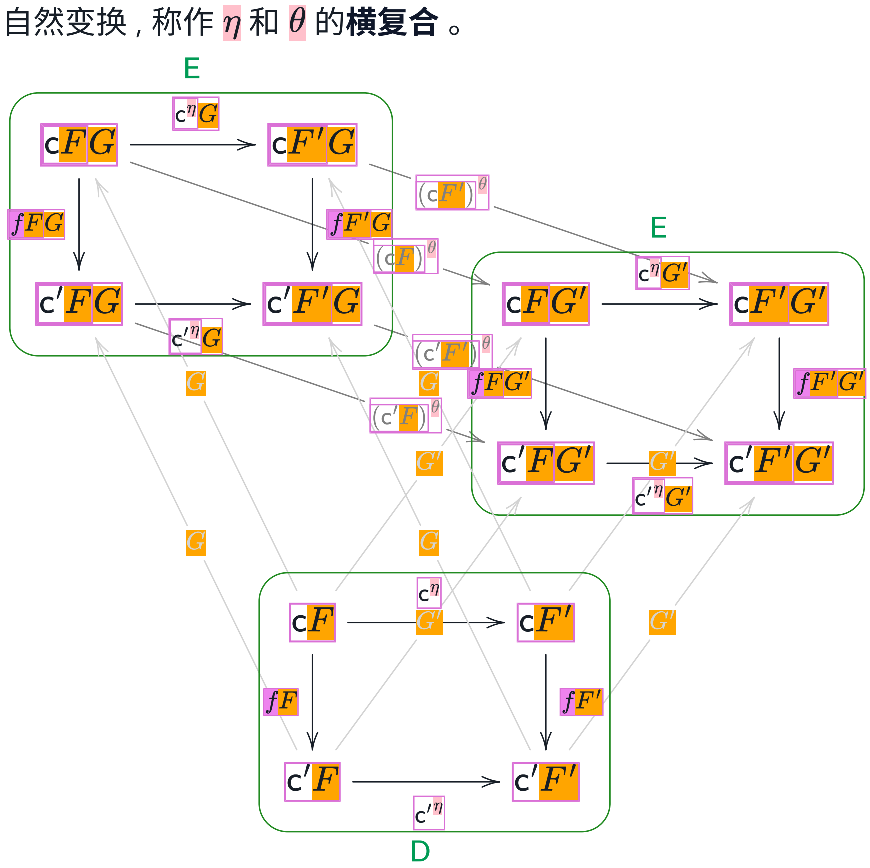
- $\eta \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\Longrightarrow\mathsf{D}}}{\circ} \eta' : F \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\Longrightarrow\mathsf{D}}} F''$ 为自然变换，
称作 η 和 η' 的**纵复合**。

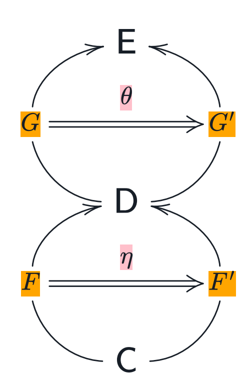




如果还知道 G' : $\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$ 也是个函子
及自然变换 $\theta : G \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{D}\Longrightarrow\mathsf{E}}} G'$ 那么便有

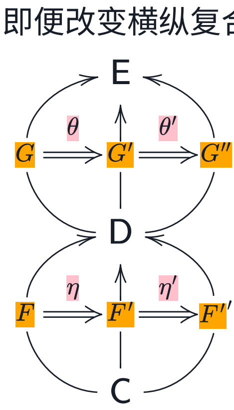
- $\eta \overset{???}{\circ} \theta : F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\Longrightarrow\mathsf{E}}} F' \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G'$ 为
自然变换，称作 η 和 θ 的**横复合**。





若 $\theta' : G \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{D}\Longrightarrow\mathsf{E}}} G'$ 为自然变换则

- $(\eta \circ \theta) \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\Longrightarrow\mathsf{E}}}{\circ} (\eta' \circ \theta') = (\eta \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\Longrightarrow\mathsf{D}}}{\circ} \eta') \overset{???}{\circ} (\theta \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{D}\Longrightarrow\mathsf{E}}}{\circ} \theta')$，
即便改变横纵复合先后顺序也不影响最终结果。



恒等自然变换

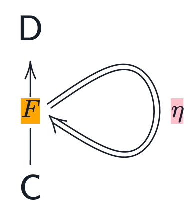
同样对于自然变换也有恒等映射。

- ${}_{:F}\iota : F \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}}} F$ 为恒等自然变换当且仅当
  对范畴 C 中任意对象 c 都有下述交换图成立：

D

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{c}F \arrow[r, "\mathsf{c}^{\eta} =_{:(\mathsf{c}F)} \mathrm{id}"] \arrow[d, "fF"'] & \mathsf{c}F \arrow[d, "fF"] \\
\mathsf{c}'F \arrow[r, "\mathsf{c}'^{\eta} =_{:(\mathsf{c}'F)} \mathrm{id}"'] & \mathsf{c}'F
\end{tikzcd}$$

$\mathsf{C}F$ $\mathsf{C}F$



自然同构

自然同构与你想象中的同构不太像。

- $\eta : F \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}}} F'$ 为**自然同构**当且仅当
  c^{η} 总是同构，这里 c 为任意 C 中对象。

  此时 F，F' 的关系可用 $F \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}}}{\cong} F'$ 表示

范畴等价的定义

我们用自然同构来定义范畴的等价。

- $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\cong} \mathsf{D}$ 当且仅当
  存在函子 $F : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 及 $F' : \mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}$
  使 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} F' \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{C}}}{\cong} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{id}$ 并且有 $F' \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} F \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{D}}}{\cong} {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{id}$。

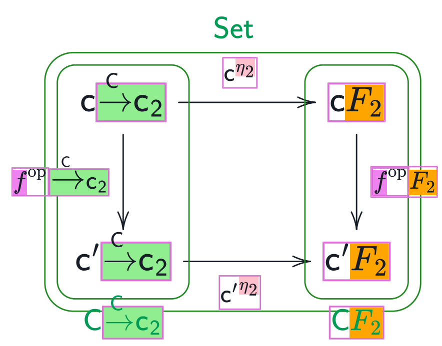
反协变米田引理

若知 $F_2 : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}$ 则
反变米田引理的陈述如下：

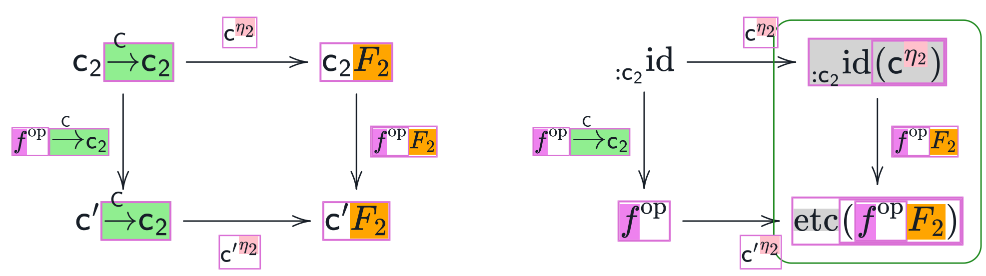
- $\underbrace{((\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2) \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} F_2)}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(c_2 F_2)}_{\text{一堆元素}}$

反变米田引理的证明如下：

1. $\Leftarrow$: 考虑任意 $(c_2 F_2)$ 中的 etc : 根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图
   我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_2} , 于是便可构建一个完整的 η_2 。
   易知 η_2 是一个自然变换 。



2. $\Rightarrow$: 考虑任意等式左侧的 η_1 : 若上述交换图成立
   则可对任意 η_1 指派 $\mathrm{etc} = {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 为 $c_2 F_2$ 中与之对应的元素；



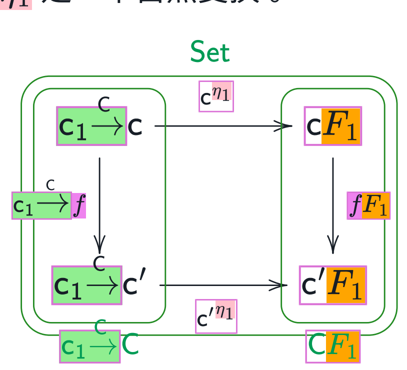
为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
c_2 唯一地确定了 η_2 , 反之 η_2 也唯一确定了 c_2 。

若还知 $F_1 : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}$ 则
协变米田引理的陈述如下：

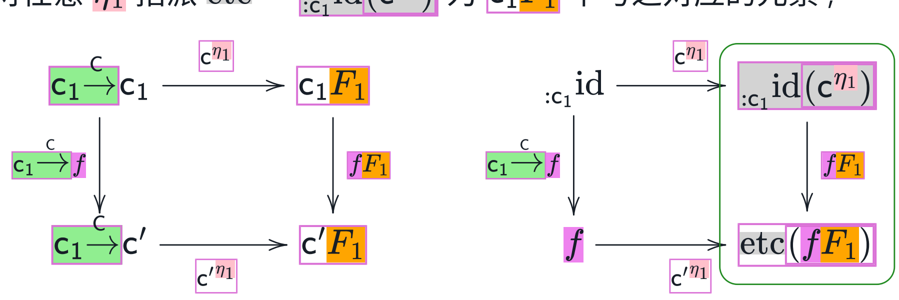
- $\underbrace{((c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} F_1)}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(c_1 F_1)}_{\text{一堆元素}}$

协变米田引理的证明如下：

1. $\Leftarrow$: 考虑任意 $(c_1 F_1)$ 中的 etc : 根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图
   我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_1} , 于是便可构建一个完整的 η_1 。
   易知 η_1 是一个自然变换 。



2. $\Rightarrow$: 考虑任意等式左侧的 η_1 : 若上述交换图成立
   则可对任意 η_1 指派 $\mathrm{etc} = {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 为 $c_1 F_1$ 中与之对应的元素；



为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
c_1 唯一地确定了 η_1 , 反之 η_1 也唯一确定了 c_1 。

可表和余可表函子的泛性质

接下来定义一个重要的概念：

- F_2 为**可表函子**当且仅当
  存在 C^{op} 中对象 c_2 使得
  $(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2) = c_2よ \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\cong} F_2$ 成立，
  即 $c_2よ$ 与 F_2 间存在自然同构。
  此时称 F_2 可由对象 c_2 **表出**。

同理我们也有如下对偶概念：

- F_1 为**余可表函子**当且仅当
  存在 C 中对象 c_1 使得
  $(c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) = c_1尤 \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\cong} F_1$ 成立。
  即 $c_1尤$ 与 F_1 间存在自然同构。
  此时称 F_1 可由对象 c_1 **余可表出**。

米田和尢达嵌入

根据前面的内容我们可知

- $\text{よ} : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})$

  $\mathsf{c}_2 \longmapsto (\mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) = (\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2)$ 构成一个函子，称作预层

  $f_2 \longmapsto (f_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) = (\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)$ 构成一个函子间映射，即自然变换

  构成一个完全忠实函子，该函子称作是**米田嵌入**。

证明如下：

- よ 是函子，因为
  - $_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}\text{よ} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}) = {}_{:(\mathsf{c}_2\text{よ})}\mathrm{id}$
  - $(f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')\text{よ} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2') = f_2\text{よ} \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} f_2'\text{よ}$，

  由于函子具有保持对象 / 映射性质的能力，
  故便可知 $f_2\text{よ}$ 为同构当且仅当 f_2 为同构。

- よ 是完全忠实的，因为
  将反变米田引理中的 F_2
  换成 $(\mathsf{c}_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_)$
  即可获得下述公式：

  $$\underbrace{\left((\mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (\mathsf{c}_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_)\right)}_{\text{预层范畴的 hom-set}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}_2)}_{\mathsf{C}\text{ 的 hom-set}}$$

  也就是

  $$\underbrace{\left((\mathsf{c}_2\text{よ}) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (\mathsf{c}_2'\text{よ})\right)}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}_2)}_{\mathsf{C}\text{ 的 hom-set}} = \underbrace{(\mathsf{c}_2(\mathsf{c}_2'\text{よ}))}_{\text{一堆元素}}$$

> ⓘ **Note**
>
> 由于函子能够保持态射的性质，
> 对任意左侧集合中的自然同构
> 右侧集合也会有同构与之对应，反之亦然。
> 这也就证明了前面自然同构相关定理省略的部分。

根据前面的内容我们可知

- $\text{尢} : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})$

  $\mathsf{c}_1 \longmapsto (\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$ 构成一个函子

  $f_1{}^{\mathrm{op}} \longmapsto (f_1{}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) = (f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$ 构成一个函子间映射，即自然变换

  构成一个完全忠实函子，该函子称作是**尢达嵌入**。

证明如下：

- 尢 是函子，因为
  - $_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}\text{尢} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}) = {}_{:(\mathsf{c}_1\text{尢})}\mathrm{id}$
  - $(f_1 \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}{\circ} f_1')\text{尢} = ((f_1 \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}{\circ} f_1') \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) = (f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (f_1'{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$，

- 尢 是完全且忠实的，因为
  将协变米田引理中的 F_1
  换成 $(\mathsf{c}_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$
  即可获得下述公式：

  $$\underbrace{\left((\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (\mathsf{c}_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)\right)}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_1)}_{\text{一堆元素}}$$

  也就是

  $$\underbrace{\left((\mathsf{c}_1\text{尢}) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (\mathsf{c}_1'\text{尢})\right)}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_1)}_{\text{一堆元素}} = \underbrace{(\mathsf{c}_1(\mathsf{c}_1'\text{尢}))}_{\text{一堆元素}}$$

> ⓘ **Note**
>
> 由于函子能够保持态射的性质，
> 对任意左侧集合中的自然同构
> 右侧集合也会有同构与之对应，反之亦然。
> 这也就证明了前面自然同构相关定理省略的部分。