章节 01 - 03 基本概念

LATEX Definitions are here.

始对象与终对象

范畴由对象及其间箭头构成。本文重点分析**余积闭范畴** \mathcal{C} 。首先给出如下定义:

- 0 为**始对象**当且仅当对任意 \mathcal{C} 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 $:c_i$: 0 $\stackrel{c}{\rightarrow}$ c;
- 1 为**终对象**当且仅当对任意 \mathcal{C} 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 :c!: c $\overset{c}{\rightarrow}$ 1;

i Note

其他范畴中始终对象不一定存在。

范畴 C 中我们假设其含 0 和 1 分别作为始对象和终对象,那么由上述信息可知

- 形如 $0 \xrightarrow{c} 0$ 的箭头 只有一个, 即 :0id;
- 形如 $1 \stackrel{c}{\rightarrow} 1$ 的箭头只有一个,即: $_{:1}id$;

元素与全局元素

对任意对象 a, a_1 , a_2 , etc , b, b_1 , b_2 , etc 以及任意映射 ϕ , 我们进行如下的规定 :

- ϕ 为 b 的元素当且仅当 ϕ : a $\overset{c}{\rightarrow}$ b;
- ϕ 为 a 的**全局元素**当且仅当 $\phi: \mathbf{1} \overset{\mathcal{C}}{\to}$ a ;
- ϕ 不存在可通过 $\phi: \mathbf{b} \overset{\mathcal{C}}{ o} \mathbf{0}$ 得出 。

(i) Note

其他范畴中刚才的断言未必成立。

箭头构成的集合

这里再给一个定义:

- $\bullet \quad \mathsf{a} \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b} =$ 所有从 a 射向 b 的箭头构成的集。

上述断言仅对于**局部小范畴**成立 , 在其他范畴里 a $\stackrel{\mathcal{C}}{ o}$ b 未必构成集 。

箭头的复合运算

范畴
$$\mathcal{C}$$
 中特定的箭头可以进行复合运算:
$$\overset{\mathcal{C}}{\circ} : (\mathsf{a}_2 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \mathsf{a}_1) \times (\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \mathsf{b}_1) \overset{\mathcal{S}et}{\longrightarrow} (\mathsf{a}_2 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \mathsf{b}_1)$$

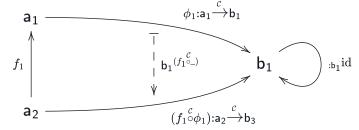
$$\overset{\mathcal{C}}{\circ} : (f_1 \qquad . \qquad \phi_1 \quad) \longmapsto \ f_1 \circ \phi_1$$

若我们还知道箭头 f_1 , ϕ_1 , g_1 分别属于 $\mathbf{a}_2\overset{\mathcal{C}}{ o}$ \mathbf{a}_1 , $\mathbf{a}_1\overset{\mathcal{C}}{ o}$ \mathbf{b}_1 , $\mathbf{b}_1\overset{\mathcal{C}}{ o}$ \mathbf{b}_2 那么便有

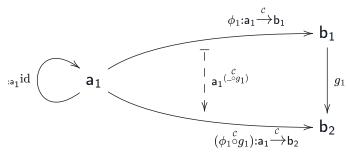
 $\bullet \quad (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1) \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1 = f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1)$ 说明箭头复合运算具有结合律。

另外固定住一侧实参便获可得新的函数:

 $\begin{array}{ccc} \bullet & (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) : (\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} _) \xrightarrow{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et} (\mathsf{a}_2 \overset{\mathcal{C}}{\underset{\mathcal{C}}{\rightarrow}} _) \\ & (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) : & \phi_1 & \longmapsto & f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1 \end{array}$ 称作前复合。下图有助于形象理解:



称作后复合;下图有助于形象理解:



根据上面的定义便不难得出下述结论

- $\bullet \quad (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)^{\mathcal{C} \to \mathcal{S}et} (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) = (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1)^{\mathcal{C} \to \mathcal{S}et} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)$ 复合运算具有结合律,即后面会提到的自然性;
- $\bullet \quad \left(\begin{smallmatrix} \mathcal{C} \\ \circ \\ \phi_1 \end{smallmatrix} \right)^{\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}et} \left(\begin{smallmatrix} \mathcal{C} \\ \circ \\ \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} \mathcal{C} \\ \circ \\ \end{smallmatrix} \left(\phi_1 \stackrel{\mathcal{C}}{\circ} g_1 \right) \right)$ 前复合与复合运算的关系
- $\bullet \quad (\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)^{\mathcal{C} \to \mathcal{S}et} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) = ((f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1) \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)$

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。 假如 a_1 为 a_1 的全局元素则可规定

$$\bullet \quad a_1\phi_1=a_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1$$

恒等箭头

范畴 \mathcal{C} 内的每个对象都有恒等映射:

•
$$a_1 id : a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} a_1$$

 $a_1 id : a_1 \mapsto a_1$

如此我们便可以得出下述重要等式:

•
$$_{\mathsf{:a_1}}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1 = \phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ}_{\mathsf{:b_1}}\mathrm{id} = \phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ}_{\mathsf{:b_1}}\mathrm{id}$$

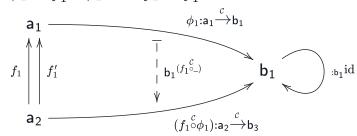
此外还可以得知

- $(a_1 id \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) : (a_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} _) \xrightarrow{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et} (a_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} _)$ 为恒等自然变换,可以记作是 $(a_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} _)id$;
- $\begin{pmatrix} c \\ \circ :_{b_1} id \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} c \\ & b_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c \to \mathcal{S}et} \begin{pmatrix} c \\ & b_1 \end{pmatrix}$ 为恒等自然变换,可以记作是 $\begin{pmatrix} c \\ - & b_1 \end{pmatrix}$ id;

单态

在范畴论里我们也可以定义单态:

• ϕ_1 为**单态**当且仅当对任意 a_2 若有 $f_1, f_1': \mathsf{a}_2 \overset{c}{\to} \mathsf{a}_1$ 满足 $f_1 \overset{c}{\circ} \phi_1 = f_1' \overset{c}{\circ} \phi_1$ 则有 $f_1 = f_1'$ 。详情见下图:



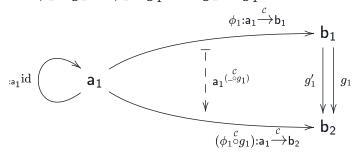
结合终对象的性质我们不难得知

• a_1 为单态 —— 由 ! 的唯一性可得知 。

满态

在范畴论里我们也可以定义满态;

• ϕ_1 为**满态**当且仅当对任意 b_2 若有 $g_1,g_1':\mathsf{b}_1\overset{c}{\to}\mathsf{b}_2$ 满足 $\phi_1\overset{c}{\circ}g_1=\phi_1\overset{c}{\circ}g_1'$ 则有 $g_1=g_1'$ 。详情见下图:



同构

在范畴论里我们也可以定义同构:

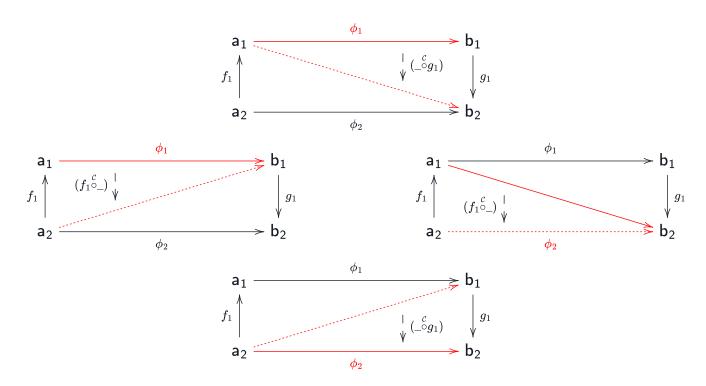
• ϕ_1 为**同构**当且仅当存在 $\psi_1: \mathsf{b}_1 \overset{\mathcal{C}}{
ightarrow} \mathsf{a}_1$ 使 $\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \psi_1 = {}_{\mathsf{:a}_1}\mathrm{id}$ 且 $\psi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1 = {}_{\mathsf{:b}_1}\mathrm{id}$ 。

结合始终对象的性质便不难得知

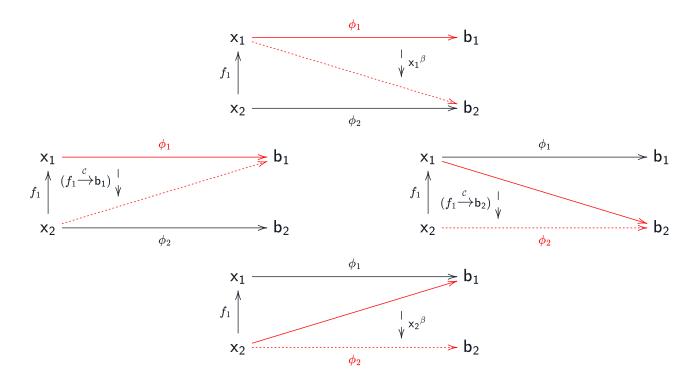
•
$$:_0! = :_1$$
 为同构 —— 这是因为 $0 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} 0 = \{:_0\mathrm{id}\}$, $1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} 1 = \{:_1\mathrm{id}\}$

同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释 。 后面会将自然性进行进一步推广 。



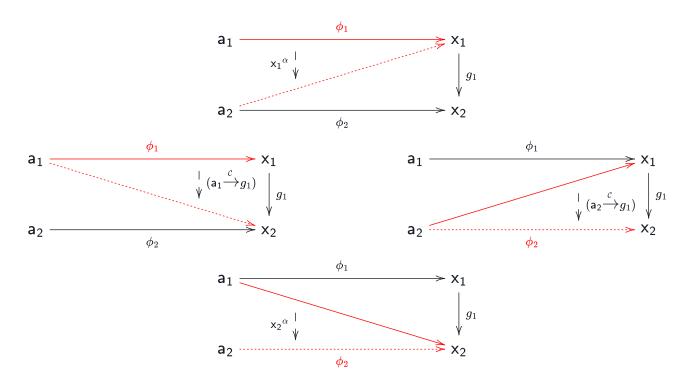
若提供自然变换 β 满足自然性 —— 即对任意 \mathcal{C} 中对象 \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 及任意 \mathcal{C} 中映射 $f_1: \mathbf{x}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{x}_1$ 都会有 $(f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1) \overset{Set}{\circ} \mathbf{x}_2 \overset{\beta}{=} \mathbf{x}_1 \overset{\beta}{\circ} \overset{Set}{\circ} (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_2)$ (即下图自西向南走向操作结果同自北向东):



那么我们便会有下述结论:

• $b_1 \cong b_2$ 当且仅当对任意 \mathcal{C} 中对象 x x^{β} 都是同构 。此时称 β 为**自然同构** 。

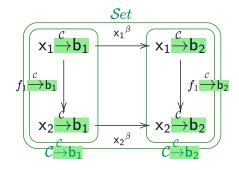
若提供自然变换 α 满足自然性 —— 即对任意 \mathcal{C} 中对象 \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 及任意 \mathcal{C} 中映射 $g_1: \mathbf{x}_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \mathbf{x}_2$ 都会有 $(\mathbf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} g_1) \overset{\mathcal{S}et}{\circ} \mathbf{x}_2 \overset{\mathcal{C}}{=} \mathbf{x}_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\mathbf{a}_2 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} g_1)$ (即下图自西向南走向操作结果同自北向东):



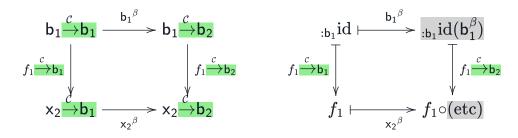
那么我们便会有下述结论:

• $\mathbf{a}_1 \cong \mathbf{a}_2$ 当且仅当对任意 $\mathcal C$ 中对象 \mathbf{x}^α 都是同构 。此时称 α 为**自然同构** 。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为



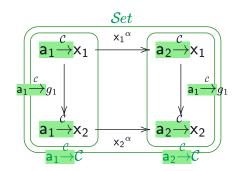
⇒ 易证, ← 用到了米田技巧(考虑特殊情况)



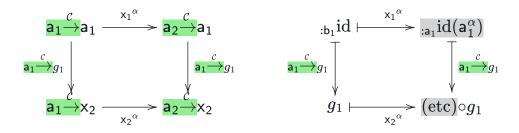
为了方便就用 (etc) 表示 $_{:b_1}id(b_1^{\beta})$ 。 由上图可知 $f_1(x_2^{\beta}) = f_1 \circ (etc)$,故 $x_2^{\beta} = x_2 \rightarrow (etc)$;而 $x_2^{\beta} = x_2 \rightarrow (etc) = x_2^{(-\circ(etc))}$ 是同构,从而知 ((etc) \circ _) 是同构,(etc) : $b_1 \stackrel{c}{\rightarrow} b_2$ 也是 。

高亮部分省去了部分推理过程, 具体在米田嵌入处会详细介绍。

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为



⇒ 易证, ← 用到了米田技巧(考虑特殊情况)



为了方便就用 (etc) 表示 $_{:a_1}\mathrm{id}(\mathsf{a}_1^\alpha)$ 。 由上图可知 $g_1(\mathsf{x}_2^\alpha) = (\mathrm{etc}) \circ g_1$,故 $\mathsf{x}_2^\alpha = (\mathrm{etc}) \to \mathsf{x}_2$; $\mathsf{m} \mathsf{x}_2^\alpha = (\mathrm{etc}) \to \mathsf{x}_2 = \mathsf{x}_2^{((\mathrm{etc}) \circ _)}$ 是同构,从而知 $(_\circ (\mathrm{etc}))$ 是同构,(etc): $\mathsf{a}_1 \to \mathsf{a}_2$ 也是 。

高亮部分省去了部分推理过程, 具体在米田嵌入处会详细介绍。

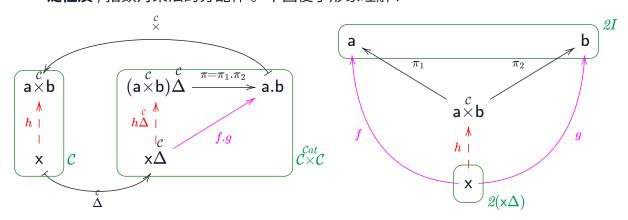
章节 04 - 05 类型的积与和

LATEX Definitions are here.

泛性质

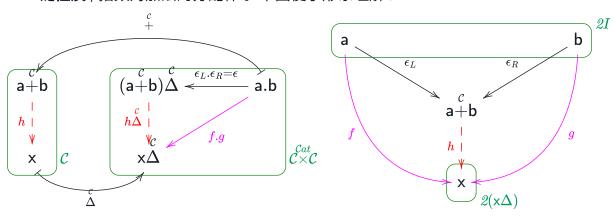
默认函子 $\overset{c}{\times}: \mathcal{C}\overset{cat}{\times} \mathcal{C}\overset{cat}{\longrightarrow} \mathcal{C}$ 在范畴 \mathcal{C} 中有下述性质:

• $(x \xrightarrow{c} a) \times^{Set} (x \xrightarrow{c} b) \cong (x \xrightarrow{c} (a \times b))$, x 为任意 C 中对象。
——**泛性质**, 指数对乘法的分配律。下图便于形象理解:



默认函子 $+: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \xrightarrow{cat} \mathcal{C} \stackrel{cat}{\longrightarrow} \mathcal{C}$ 在范畴 \mathcal{C} 中有下述性质:

• $(\mathbf{a} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{x}) \overset{\mathcal{S}et}{\times} (\mathbf{b} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{x}) \cong ((\mathbf{a} + \mathbf{b}) \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{x})$, \mathbf{x} 为任意 \mathcal{C} 中对象。 —— **泛性质**, 指数对加法的分配律。下图便于形象理解:



i Note

在上面的插图中:

- $\stackrel{\mathcal{C}}{\underset{\mathcal{C}}{\bigtriangleup}}: \mathcal{C} \stackrel{\mathit{Cat}}{\longrightarrow} \mathcal{C} \stackrel{\mathit{Cat}}{\times} \mathcal{C}$ 为对角函子,满足 $\Delta: \mathsf{c} \longmapsto \mathsf{c} \cdot \mathsf{c}$
- $I: 2 \stackrel{\mathit{Cat}}{\longrightarrow} \mathcal{C}$ 为函子,满足
 - $I: 1 \longmapsto \mathsf{a}$
 - $2 \longmapsto b$

2为只有两个对象的范畴,

1和2分别为其中的对象。

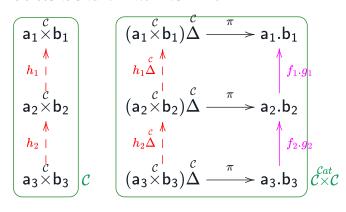
这里 2 充当一个指标范畴。

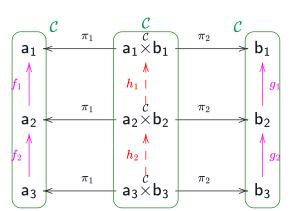
函子性

如何证明 $\overset{c}{\times}$ 构成函子呢?请看

- $\overset{c}{\times}: ({}_{:a_2}\mathrm{id} . {}_{:b_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:a_2 \overset{c}{\times} b_2}\mathrm{id}$ —— 即函子 \times 保持恒等箭头;

下图有助于形象理解证明的过程:





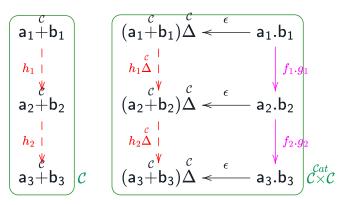
另外规定 $\overset{c}{\times}$ 在实参分别为箭头和对象时的输出:

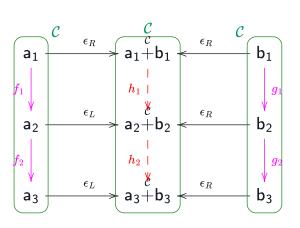
$$egin{array}{ll} ullet &\overset{\mathcal{C}}{\mathop{ imes}}: (f_1 \ . \ \mathsf{b}_1) \longmapsto f_1 \overset{\mathcal{C}}{\mathop{ imes}}_{\overset{:}{\mathcal{b}}_1} \mathrm{id} \ &\overset{\mathcal{C}}{\mathop{ imes}}: (\mathsf{a}_1 \ . \ g_1) \longmapsto {}_{:\mathsf{a}_1} \mathrm{id} imes g_1 \end{array}$$

c如何证明 + 构成函子呢?请看

- c
 +: (:a₁id . :b¿id) → :a₁+b₁id
 —即函子 + 保持恒等箭头;
- $+: (f_1 \overset{c}{\circ} f_2 \cdot g_1 \overset{c}{\circ} g_2) \mapsto h_1 \overset{c}{\circ} h_2 \ -\!\!\!\!\!-\!\!\!\!\!-$ 即函子 + 保持箭头复合运算。

下图有助于形象理解证明的过程:





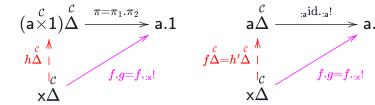
c 同理规定 + 在实参分别为箭头和对象时的输出 :

$$egin{array}{ll} ullet &\overset{c}{ imes}: (f_1 \ . \ \mathsf{b}_1) \longmapsto f_1 \overset{c}{+}_{\dot{\mathcal{C}}} \mathfrak{b}_1 \mathrm{id} \ &\overset{c}{ imes}: (\mathsf{a}_1 \ . \ g_1) \longmapsto {}_{\mathsf{:a}_1} \mathrm{id} + g_1 \end{array}$$

运算性质

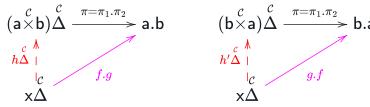
对于函子 $\overset{c}{\times}$ 我们不难得知

• $\mathbf{a} \overset{c}{\times} \mathbf{1} \cong \mathbf{1} \overset{c}{\times} \mathbf{a} \cong \mathbf{a} \longrightarrow$ 乘法有**幺元** $\mathbf{1}$ 。 下图便于理解证明 : (f,g) 决定 h , h' 。

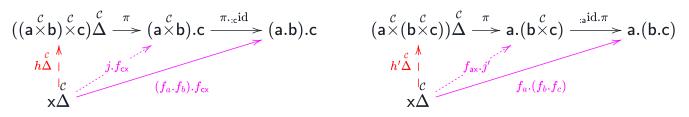


• $\mathbf{a} \overset{c}{\times} \mathbf{b} \cong \mathbf{b} \overset{c}{\times} \mathbf{a} \longrightarrow \mathfrak{m} \times \mathbb{E}$ 乘法运算有**交换律** 。

下图便于理解证明: (f,g) 决定 h, h'。

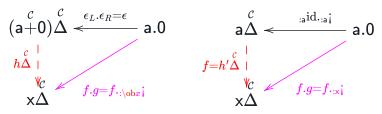


• $(a \times b) \times c \cong a \times (b \times c)$ — 乘法运算具有**结合律**。 下图有助于形象理解证明 : (f_{ax}, f_{bx}, f_{cx}) 决定 h , h' 。



c对于函子+我们不难得知

• $\mathbf{a} \overset{c}{+} \mathbf{0} \cong \mathbf{0} \overset{c}{+} \mathbf{a} \cong \mathbf{a} \longrightarrow \mathbf{m}$ 法有**幺元** $\mathbf{0}$ 。 下图有助于理解:(f,g) 决定 h, h'。



• $\mathbf{a} \stackrel{c}{+} \mathbf{b} \cong \mathbf{b} \stackrel{c}{+} \mathbf{a} \longrightarrow \mathbf{m}$ 法运算有**交换律**。 下图有助于理解: (f,g) 决定 h, h'。

• $(a + b) + c \cong a + (b + c)$ — 加法运算具有**结合律**。 下图有助于形象理解证明: (f_{ax}, f_{bx}, f_{cx}) 决定 $\frac{h}{h}$, $\frac{h'}{h}$ 。

$$((a+b)+c)\overset{c}{\Delta}\overset{c}{\leftarrow}(a+b).c\overset{c}{\leftarrow}(a+b).c \overset{\epsilon \cdot \cdot \cdot c \text{id}}{\leftarrow}(a.b).c \qquad (a+(b+c))\overset{c}{\Delta}\overset{\epsilon}{\leftarrow}a.(b+c)\overset{c}{\leftarrow}a.(b+c)$$

$$\overset{c}{\leftarrow}\overset{l}{\rightarrow}\overset{l}{\rightarrow}\overset{l}{\rightarrow}\overset{l}{\rightarrow}\overset{l}{\rightarrow}\overset{l}{\rightarrow}\overset{l}{\rightarrow}\overset{l}{\rightarrow}\overset{c}{\rightarrow}\overset{l$$

幺半范畴

像刚才这样对象运算具有单位元以及结合律的范畴称作幺半范畴;

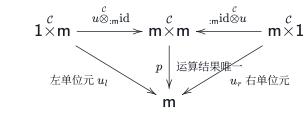
若上述范畴还具有交换律则称作对称幺半范畴;

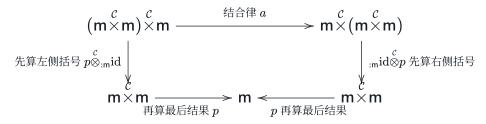
很明显我们的范畴 C 是典型的**对称幺半范畴** 。

幺半群

什么是幺半群呢?有两种定义方式:

- **幺半群** *M* 是个范畴,其只含一个对象 m; 其中的复合运算正好有单位元以及结合律。
- 对象 m 属于幺半范畴 \mathcal{C} , 满足下述交换图:





其中

- $u: 1 \stackrel{\mathcal{C}}{ o} m$ 其实就是 m 里面的幺元
- $u_l: 1 \overset{c}{ imes} \mathsf{m} \overset{c}{ o} \mathsf{m}$ 表示 u 构成左幺元
- $u_r: \mathsf{m} \overset{c}{\times} \mathbf{1} \overset{c}{\to} \mathsf{m}$ 表示 u 构成右幺元
- $p: \mathsf{m} \overset{c}{\times} \mathsf{m} \overset{c}{\to} \mathsf{m}$ 即为 m 中的二元运算
- $a: (\mathbf{m} \overset{c}{\times} \mathbf{m}) \overset{c}{\times} \mathbf{m} \overset{c}{\to} \mathbf{m} \overset{c}{\times} (\mathbf{m} \overset{c}{\times} \mathbf{m})$ 表示 \mathbf{m} 具有结合律

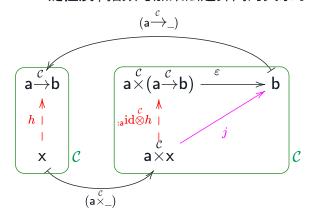
章节 06 类型的幂

LATEX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{c}{\rightarrow}: \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow} \mathcal{C}$ 在范畴 \mathcal{C} 中有下述性质:

• $(\mathbf{a} \overset{c}{\times} \mathbf{x}) \xrightarrow{c} \mathbf{b} \cong \mathbf{x} \xrightarrow{c} (\mathbf{a} \xrightarrow{c} \mathbf{b}) \cong \mathbf{a} \xrightarrow{c} (\mathbf{x} \xrightarrow{c} \mathbf{b})$, \mathbf{x} 为任意 \mathcal{C} 中对象 —— **泛性质**, 指数与加乘法运算间的关系。 下图便干理解证明:

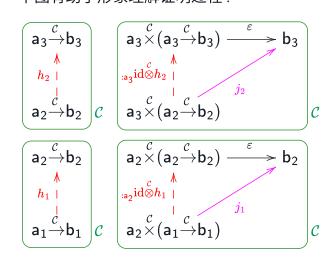


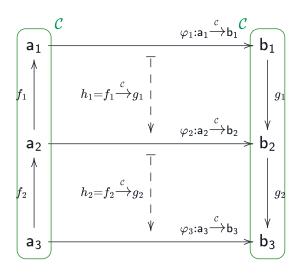
函子性

如何证明 $\stackrel{c}{\rightarrow}$ 构成函子呢 ? 请看

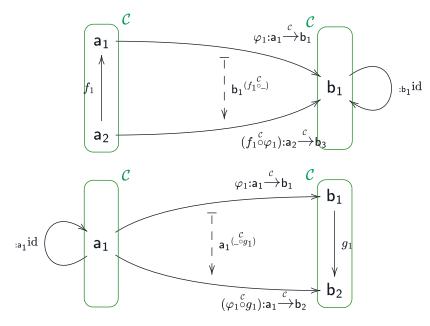
- $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow}:({}_{:a_1}\mathrm{id}.{}_{:b_1}\mathrm{id})\longmapsto{}_{:(a_1}\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow}{}_{b_1})\mathrm{id}$ ——即函子 $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow}$ 能**保持恒等箭头**;
- $\overset{c}{\rightarrow}: (f_2 \overset{c}{\circ} f_1 \overset{c}{\cdot} g_1 \overset{c}{\circ} g_2) \longmapsto h_1 \overset{c}{\circ} h_2$ —— 即函子 $\overset{c}{\rightarrow}$ **保持箭头复合运算**。

 下图有助于形象理解证明过程:





下图 (自上到下分别为图 1 和图 2)后面会用到。



范畴 \mathcal{C} 内任意两对象 \mathbf{a}_1 和 \mathbf{b}_1 间的箭头构成一个集合 $\mathbf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathbf{b}_1$,说明 $\overset{\mathcal{C}}{\to}$ 只能将两个对象打到一个集合。下面使 $\overset{\mathcal{C}}{\to}$ 升级为函子:若还知道箭头 $f_1: \mathbf{a}_2 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathbf{a}_1$ 以及 $g_1: \mathbf{b}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathbf{b}_2$,则规定

•
$$(-\stackrel{c}{\underset{c}{\rightarrow}}\mathsf{b}_1):\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow}\mathcal{C}\overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow}\mathcal{S}et$$
 为函子且 $(-\stackrel{c}{\underset{c}{\rightarrow}}\mathsf{b}_1):\mathsf{a}_1\longmapsto (\mathsf{a}_1\stackrel{c}{\underset{c}{\rightarrow}}\mathsf{b}_1)$, 并且有 $(-\stackrel{c}{\underset{c}{\rightarrow}}\mathsf{b}_1):f_1\longmapsto (f_1\stackrel{c}{\underset{c}{\rightarrow}}\mathsf{b}_1)=(f_1\stackrel{c}{\underset{:\mathsf{b}_1}{\rightarrow}}\mathsf{id})=\mathsf{b}_1^{(f_1\stackrel{c}{\underset{c}{\rightarrow}})}$

图 1 有助于理解。

图 2 有助于理解。

不难看出

• よ:
$$\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} (\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{S}et)$$

• よ: $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}} (\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{S}et)$

• ね成一个函子,称作预层

 $g_1 \longmapsto (_ \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) = (_ \circ g_1)$ 构成一个函子间映射,即自然变换

•
$$(\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\underset{\mathcal{C}}{\longrightarrow}}): \overset{\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathcal{C}_{at}}{\nearrow}}{\underset{\mathcal{C}}{\nearrow}} \overset{\mathcal{C}_{at}}{\underset{\mathcal{C}}{\longrightarrow}} \overset{\mathcal{C}_{at}}{\nearrow} \overset{\mathcal{C}$$

图 2 有助于理解。

$$egin{aligned} (f_1 \stackrel{\mathcal{C}}{\underset{\mathcal{C}}{
ightarrow}}): & \mathcal{C} \stackrel{\mathcal{C}at}{
ightarrow} \mathcal{S}et \ , \ (f_1 \stackrel{\mathcal{C}}{\underset{\mathcal{C}}{
ightarrow}}): \mathsf{b}_1 \longmapsto (f_1 \stackrel{\mathcal{C}}{\underset{\mathcal{C}}{
ightarrow}} \mathsf{b}_1) = (f_1 \stackrel{\mathcal{C}}{\underset{\mathcal{C}}{
ightarrow}} :_{\mathsf{b}_1} \mathrm{id}) = \mathsf{b}_1 \stackrel{\mathcal{C}}{\overset{\mathcal{C}}{
ightarrow}} \ (f_1 \stackrel{\mathcal{C}}{\hookrightarrow} _): g_1 \longmapsto (f_1 \stackrel{\mathcal{C}}{\hookrightarrow} g_1) = (f_1 \stackrel{\mathcal{C}}{\circ} _) \stackrel{\mathcal{C}}{\circ} (f_1 \stackrel{\mathcal{C}}{\circ} _) \\ & \circ (f_1 \stackrel{\mathcal{C}}{\hookrightarrow} _): g_1 \longmapsto (f_1 \stackrel{\mathcal{C}}{\hookrightarrow} g_1) = (f_1 \stackrel{\mathcal{C}}{\circ} _) \stackrel{\mathcal{C}}{\circ} (f_1 \stackrel{\mathcal{C}}{\circ} _) \end{aligned}$$

图 1 有助于理解。

不难看出

• 尤:
$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}_{at}} (\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}_{at}} \mathcal{S}et)$$
 $\mathbf{a}_1 \longmapsto (\mathbf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} _)$ 构成一个函子
 $f_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} _) = (f_1 \circ _)$ 构成一个函子间映射,即自然变换
该函子戏称为**尤达嵌入**。

积闭范畴

这里插个题外话:

若范畴包含终对象,所有类型的积以及指数,则可将其称作积闭范畴;

若范畴包含始对象 , 所有类型的和 , 则可将其称作是**余积闭范畴** ;

若范畴满足上述条件,则可称作双积闭范畴。

很明显我们讨论的范畴 C 就是**双积闭范畴**。

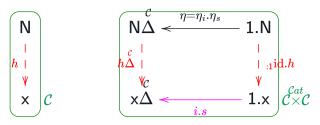
章节 07 递归类型

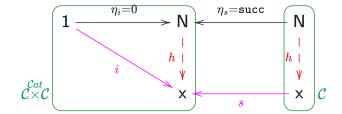
LATEX Definitions are here.

泛性质

默认对象 N 在范畴 \mathcal{C} 中有下述性质:

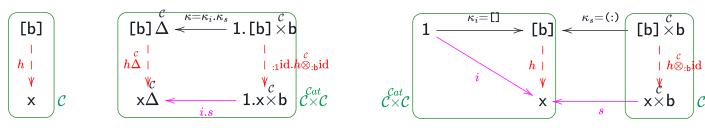
• $(\mathbf{1} \xrightarrow{c} \mathbf{x}) \overset{cat}{\times} (\mathbf{x} \xrightarrow{c} \mathbf{x}) \cong (\mathbf{N} \xrightarrow{c} \mathbf{x})$, \mathbf{x} 为任意 \mathcal{C} 中对象 —— **泛性质**。 rec 即对应的同构 (上式从左至右) 。





默认函子 [_]: $\mathcal{C} \xrightarrow{cat} \mathcal{C}$ 在范畴 \mathcal{C} 中有下述性质:

• $(1 \xrightarrow{c} x) \times^{cat} ((x \times^{c} b) \xrightarrow{c} x) \cong ([b] \xrightarrow{c} x), x$ 为任意 C 中对象 — **泛性质**。 foldr 即对应的同构(上述等式从左至右)。



函子性

如何证明[_]构成函子呢?请看

- [_]: :b₁id → :[b₁]id
 [_] 保持恒等箭头;
- [$_$]: $(g_1 \overset{c}{\circ} g_2) \longmapsto (h_1 \overset{c}{\circ} h_2)$ [$_$] 保持箭头复合运算。

下图便于形象理解证明过程。

章节 08 - 09 函子与自然变换

LATEX Definitions are here.

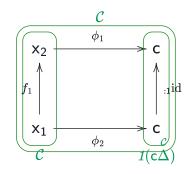
一些特殊的范畴

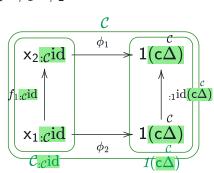
现在规定几种特殊的范畴。

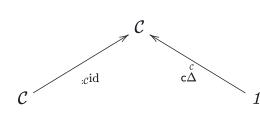
- 离散范畴: 只有对象不含箭头(恒等箭头除外)的范畴。
- Set: **所有集合构成的范畴**, 为局部小范畴, 满足
 - Set 中对象为任意集合;
 - Set 中箭头为集合间映射。
- Cat: 所有范畴构成的范畴, 满足
 - Cat 中任何对象都构成一个范畴;
 - Cat 中任何箭头都构成一个函子。

若 \mathcal{C} , \mathcal{D} 为 $\mathcal{C}at$ 中对象,则:

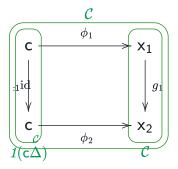
- C^{op}: 反范畴,满足
 - C^{op} 中对象皆形如 c,
 c 为任意 C 中的对象;
 - $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中箭头皆形如 $\phi^{\mathrm{op}}: \mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}_1$, $\phi: \mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_2$ 可为任意 \mathcal{C} 中的箭头 。
- で^{cat} ン: **积范畴**, 満足
- $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$: **所有** \mathcal{C} **到** \mathcal{D} **的函子的范畴** , 满足
 - $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$ 中任何对象 都是 \mathcal{C} 到 \mathcal{D} 的函子;
 - $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$ 中任何箭头都是函子间自然变换。
- C/c: **俯范畴**, 这里 c 为任意 C 中对象;满足
 - \mathcal{C}/c 中对象皆形如 \cancel{x} $\cancel{1}$. ϕ , 其中 x 和 ϕ : x $\overset{c}{\rightarrow}$ c 分别为 \mathcal{C} 中任意的对象和箭头 ;

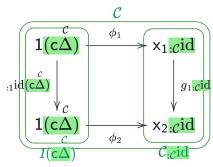


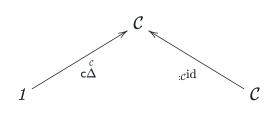




- c/\mathcal{C} : **仰范畴**, 这里 c 为任意 \mathcal{C} 中对象;满足
 - c/C 中对象皆形如 $1 \times . \phi$, 其中 x 和 ϕ : $c \xrightarrow{c} x$ 分别为 C 中对象和箭头;
 - \mathcal{C}/c 中箭头皆形如 \mathcal{L} 点d. g_1 且满足下述交换图 , 其中 x_1 , x_2 为 \mathcal{C} 中任意对象且 g_1 , ϕ_1 , ϕ_2 为 \mathcal{C} 中任意箭头 ;







函子

接下来我们来提供函子的正式定义:

- $P: \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow} \mathcal{D}$ 为范畴当且仅当
 - 对任意 $\mathcal C$ 中对象 $\mathbf c$, $\mathbf c P$ 为 $\mathcal D$ 中对象且 ${}_{:\mathbf c P}\mathrm{id}$;
 - 对任意 $\mathcal C$ 中箭头 ϕ_1 : $\mathbf c_1 \overset{c}{ o} \mathbf c_2$ 和 ϕ_2 : $\mathbf c_2 \overset{c}{ o} \mathbf c_3$, 始终都有等式 $(\phi_1 \circ \phi_2)P = \phi_1 P \overset{\mathcal D}{\circ} \phi_2 P$ 成立。

函子的复合运算

假如刚才的 P 确实构成一个函子且 $Q:\mathcal{D}\overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow}\mathcal{E}$ 也构成函子 , 那么

• $P \overset{\mathcal{C}at}{\circ} Q : \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow} \mathcal{E}$ 也构成一个函子。

恒等函子

对于函子我们也有恒等映射,即:

$$ullet :_{\mathcal{C}} \mathrm{id} \overset{\mathcal{C}at}{\circ} P = P \ = P \overset{\mathcal{C}at}{\circ}_{:\mathcal{D}} \mathrm{id}$$

忠实和完全函子

若 C , D , E 皆为**局部小范畴** , 则

- P 是**忠实的**当且仅当对任意 \mathcal{C} 中的对象 \mathbf{c}_1 , \mathbf{c}_2 $(\mathbf{c}_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \mathbf{c}_2)$ 与 $(\mathbf{c}_1 P\overset{\mathcal{D}}{\rightarrow} \mathbf{c}_2 P)$ 之间始终存在单射 ;
- P 是**完全的**当且仅当对任意 \mathcal{C} 中的对象 \mathbf{c}_1 , \mathbf{c}_2 $(\mathbf{c}_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \mathbf{c}_2)$ 与 $(\mathbf{c}_1 P\overset{\mathcal{D}}{\rightarrow} \mathbf{c}_2 P)$ 之间始终存在满射 ;
- P 是**完全忠实的**当且仅当对任意 \mathcal{C} 中的对象 c_1 , c_2 $(c_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} c_2)$ 与 $(c_1 P\overset{\mathcal{D}}{\rightarrow} c_2 P)$ 之间始终存在双射 (即集合间同构) 。

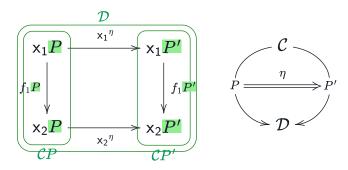
(i) Note

刚才提到的"单/满/双射" 针对的都是范畴的箭头部分。

自然变换

如果还知道 $P':\mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow} \mathcal{D}$ 为函子 , 那么

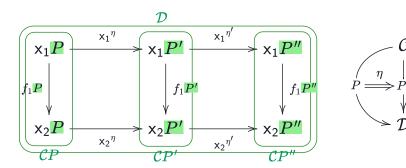
• $\eta: P \xrightarrow{c \xrightarrow{Cat} \mathcal{D}} P'$ 为自然变换当且仅当对任意 \mathcal{C} 中对象 x_1 , x_2 始终都会有下述交换图成立 :



自然变换的纵复合

若已知 $\eta: P \xrightarrow{c \xrightarrow{cat} \mathcal{D}} P'$ 构成自然变换且还知道 $\eta': P' \xrightarrow{c \xrightarrow{cat} \mathcal{D}} P''$ 为自然变换则 $\bullet \quad \eta \xrightarrow{c \xrightarrow{cat} \mathcal{D}} \eta': P \xrightarrow{c \xrightarrow{cat} \mathcal{D}} P'$ 为自然变换,

称作 η 和 η' 的**纵复合** 。



自然变换的横复合

若还知道 $Q':\mathcal{D} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{E}$ 也是个函子 及自然变换 $\theta:Q \xrightarrow{\mathcal{D} \to \mathcal{E}} Q'$,则有

• $\eta \circ \theta : P \overset{\mathcal{C}at}{\circ} Q \overset{c \overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow} \mathcal{E}}{\longrightarrow} P' \overset{\mathcal{C}at}{\circ} Q'$ 为自然变换 , 称作 η 和 θ 的**横复合** 。

• 函子 $P: \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$, 函子 $Q: \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$, 函子的复合 : $P \circ Q$

自然变换 $\eta_1:P_1 extstyle {cat}{Cat} Q_1$,自然变换 $\eta_2:P_1 extstyle {cat}{Cat} Q_1$,自然变换 $heta_1:Q_1 extstyle {} R_1$ 自然变换的纵复合: $\eta_1\circ_{\mathrm{v}}\eta_2$, 自然变换的横复合: $\eta_1 \circ_h \theta_1$,