02 范畴当中的箭头

LaTeX Definitions are here.

沿用上一节提到的自由变量。我们规定：

- $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2 =$
  所有从 c_1 射向 c_2 的箭头构成的集。

> **Note**
>
> 上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
> 其他范畴里 $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2$ 未必构成集。

范畴 C 中特定的箭头可以进行复合运算：

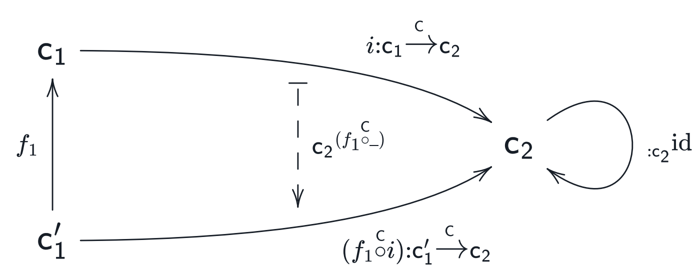
- $$\begin{array}{l} \overset{\mathsf{C}}{\circ} : (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) \overset{\mathsf{Set}}{\times} (\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_3) \xrightarrow{\mathsf{Set}} (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_3) \\ \quad (\quad i_1 \quad . \quad i_2 \quad) \longmapsto i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2 \end{array}$$

如果我们还知道箭头 f_1，i，f_2 分别属于
$\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1$，$\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2$，$\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_3$ 那么便可知

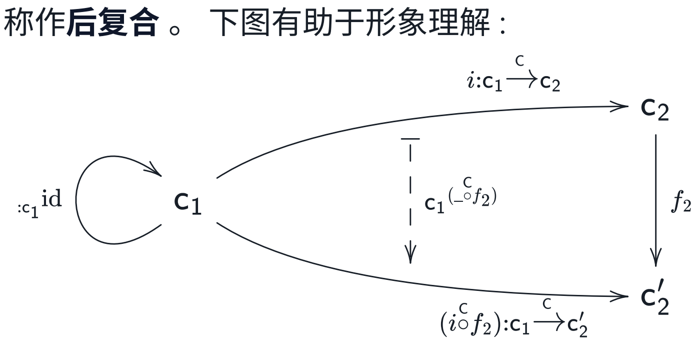
- $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i) \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2 = f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} (i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)$，
  即箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便可获得新的函数：

- $$\begin{array}{l} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) : (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{Set}} (\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \\ \qquad\qquad\qquad i \qquad \longmapsto \quad (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i) \end{array}$$
  称作**前复合**。下图有助于形象理解：



- $$\begin{array}{l} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) : (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{Set}} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2') \\ \qquad\qquad\qquad i \qquad \longmapsto \quad (i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1) \end{array}$$
  称作**后复合**。 下图有助于形象理解：



根据上面的定义不难得出下述结论：

- $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\to} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \overset{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\to} \mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$
  复合运算具有**结合律**，即后面提到的**自然性**；
- $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} i) \overset{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\to} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2))$
  前复合与复合运算的关系
- $(i \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\to} \mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) = ((f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i) \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$
  后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。
假如 a_1 为 c_1 的全局元素则可规定

- $c_1 i = c_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i$

恒等箭头

范畴 C 内的每个对象都有恒等映射：

- $\begin{aligned} {}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} : \mathsf{c}_1 &\overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1 \\ c_1 &\mapsto c_1 \end{aligned}$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- $\begin{aligned} {}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\circ} i &= i \\ &= i \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id} \end{aligned}$

此外还可以得知

- $({}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) : (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \xrightarrow{\mathsf{C}\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{Set}} (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)$
  为恒等自然变换，可记作是 ${}_{:(\mathsf{c}_1\overset{\mathsf{C}}{\to}\_)}\mathrm{id}$；
- $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}) : (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) \xrightarrow{\mathsf{C}\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{Set}} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2)$
  为恒等自然变换，可记作是 ${}_{:(\_\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{c}_2)}\mathrm{id}$。

单满态以及同构

接下来给出单 / 满态和同构的定义。

- i 为**单态**当且仅当对任意 c_1'
  若有 $f_1, f_1' : \mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1$ 满足 $f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i = f_1' \overset{\mathsf{C}}{\circ} i$
  则有 $f_1 = f_1'$。详情见下图：

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{c}_1 \arrow[rrd, bend left, "i:\mathsf{c}_1\overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow}\mathsf{c}_2"] & {} \arrow[dd, dashed, |->, "\mathsf{c}_2^{(f_1\overset{\mathsf{C}}{\circ}\_)}"] & \\
& & \mathsf{c}_2 \arrow[loop right, "{}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}"] \\
\mathsf{c}_1' \arrow[uu, shift right, "f_1"] \arrow[uu, shift left, "f_1'"'] \arrow[rru, bend right, "(f_1\overset{\mathsf{C}}{\circ}i):\mathsf{c}_1'\overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow}\mathsf{c}_2"'] & {} &
\end{tikzcd}
$$

- i 为**满态**当且仅当对任意 c_2'
  若有 $f_2, f_2' : \mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2'$ 满足 $i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2 = i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2'$
  则有 $f_2 = f_2'$。详情见下图：

$$
\begin{tikzcd}
& {} \arrow[dd, dashed, |->, "\mathsf{c}_1^{(\_\overset{\mathsf{C}}{\circ}f_2)}"] & \mathsf{c}_2 \arrow[dd, shift right, "f_2'"'] \arrow[dd, shift left, "f_2"] \\
\mathsf{c}_1 \arrow[loop left, "{}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}"] \arrow[rru, bend left, "i:\mathsf{c}_1\overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow}\mathsf{c}_2"] \arrow[rrd, bend right, "(i\overset{\mathsf{C}}{\circ}f_2):\mathsf{c}_1\overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow}\mathsf{c}_2'"'] & & \\
& {} & \mathsf{c}_2'
\end{tikzcd}
$$