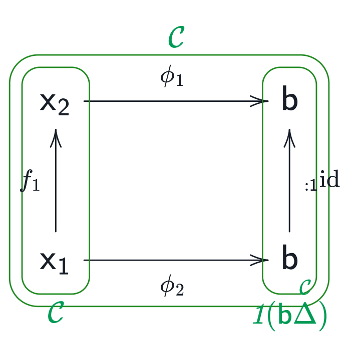
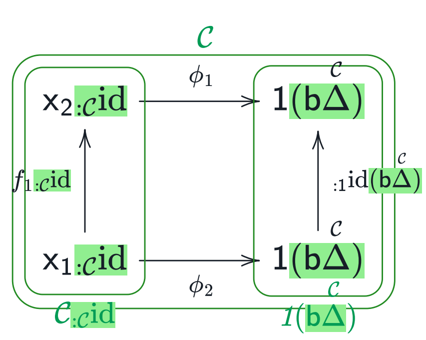
章节 08 函子

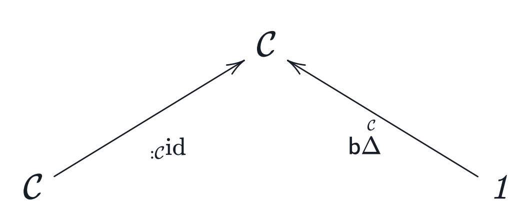
LaTeX Definitions are here.

先规定几种特殊的范畴：

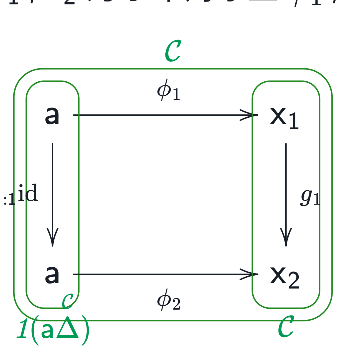
- **离散范畴**：只有对象不含箭头（恒等箭头除外）的范畴。
- $\mathscr{Set}$：**集合范畴**，为局部小范畴，满足
  - $\mathscr{Set}$ 中对象可以是任意集合
  - $\mathscr{Set}$ 中箭头便是集合间映射。
- $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$：**反范畴**，满足
  - $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中对象皆形如 c，
    c 为任意 $\mathcal{C}$ 中的对象；
  - $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中箭头皆形如 $\phi^{\mathrm{op}} : \mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}_1$，
    $\phi : \mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_2$ 可为任意 $\mathcal{C}$ 中的箭头。
- $\mathcal{C} \overset{\mathcal{Cat}}{\times} \mathcal{D}$：**积范畴**，满足
  - $\mathcal{C} \overset{\mathcal{Cat}}{\times} \mathcal{D}$ 中对象皆形如 c . d，
    c，d 为任意 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$ 中的对象；
  - $\mathcal{C} \overset{\mathcal{Cat}}{\times} \mathcal{D}$ 中箭头皆形如 $\phi \,.\, \psi$，
    ϕ，ψ 为任意 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$ 中的箭头。
- $\mathcal{C}/\mathsf{b}$：**俯范畴**，满足
  - $\mathcal{C}/\mathsf{b}$ 中对象皆形如 $\cancel{\mathsf{x} \,.\, 1} \,.\, \phi$，其中
    x 和 $\phi : \mathsf{x} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{b}$ 分别为 $\mathcal{C}$ 中任意的对象和箭头；
  - $\mathcal{C}/\mathsf{b}$ 中箭头皆形如 $f_1 \cancel{\,.\, {}_{:\mathcal{C}}\mathrm{id}}$ 且满足下述交换图，其中
    x_1，x_2 为 $\mathcal{C}$ 中对象且 ϕ_1，ϕ_2，f_1，${}_{:1}\mathrm{id}$ 皆为 $\mathcal{C}$ 中箭头；

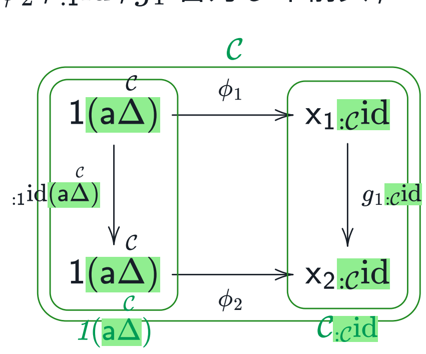


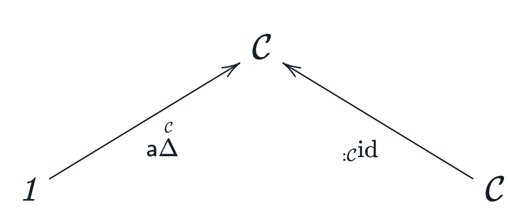




- $\mathsf{a}/\mathcal{C}$：**仰范畴**，满足
  - $\mathsf{a}/\mathcal{C}$ 中对象皆形如 $\cancel{1 \,.\, \mathsf{x}} \,.\, \phi$，其中
    x 和 $\phi : \mathsf{c} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{x}$ 分别为 $\mathcal{C}$ 中任意的对象和箭头；
  - $\mathsf{a}/\mathcal{C}$ 中箭头皆形如 $\cancel{{}_{:\mathcal{C}}\mathrm{id}} \,.\, g_1$ 且满足下述交换图，其中
    x_1，x_2 为 $\mathcal{C}$ 中对象且 ϕ_1，ϕ_2，${}_{:1}\mathrm{id}$，g_1 皆为 $\mathcal{C}$ 中箭头；







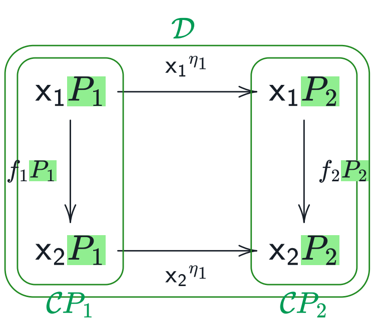
考虑范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$, 现提供函子定义 :

- $P : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$ 为范畴当且仅当
  - 对任意 $\mathcal{C}$ 中对象 c , $\mathsf{c}P$ 为
    $\mathcal{D}$ 中对象且 ${}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}P = {}_{:\mathsf{c}P}\mathrm{id}$;
  - 对任意 $\mathcal{C}$ 中箭头 $\phi_1 : \mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_2$ 和 $\phi_2 : \mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_3$,
    始终都有等式 $(\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_2)P = \phi_1 P \overset{\mathcal{D}}{\circ} \phi_2 P$ 成立。

假如 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ 皆为**局部小范畴** , 并且
刚才的 P 确实构成一个函子， 则

- P 是**忠实的**当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 c_1 , c_2
  $(\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_2)$ 与 $(\mathsf{c}_1 P \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathsf{c}_2 P)$ 之间始终存在单射 ;
- P 是**完全的**当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 c_1 , c_2
  $(\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_2)$ 与 $(\mathsf{c}_1 P \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathsf{c}_2 P)$ 之间始终存在满射 ;
- P 是**完全忠实的**当且仅当
  $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ 与 $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ 间存在自然同构 , 即
  $(\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_)$ 与 $(\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{D}} \_)$ 间存在自然同构

若还知道 $P_1, P_2 : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$ 为函子 , 则



- 函子 $P_1 : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$,
  函子 $P_2 : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$,
  函子的复合 : $P_1 \circ P_2$
- 自然变换 $\eta_1 : P_1 \xrightarrow{\mathcal{C}at} Q_1$,
  自然变换 $\eta_2 : P_1 \xrightarrow{\mathcal{C}at} Q_1$,
  自然变换 $\theta_1 : Q_1 \xrightarrow{\mathcal{C}at} R_1$
  自然变换的纵复合 : $\eta_1 \circ_{\mathrm{v}} \eta_2$,
  自然变换的横复合 : $\eta_1 \circ_{\mathrm{h}} \theta_1$,