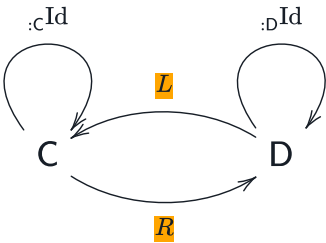


## 10 伴随函子

LaTeX Definitions are here.

若有函子  $L : \mathbf{D} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{C}$   
以及函子  $R : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{D}$  , 即



### 伴随函子的第一种定义

那么规定

- $L \dashv R$  当且仅当  
函子  $(\_ \xrightarrow{L} \_)$  和  $(\_ \xrightarrow{R} \_)$   
间存在着一个二元的**自然同构**。

假如确实有  $L \dashv R$  , 那么不难得知

- 这里蕴含着一个二元的自然同构  $\phi_2$ ，见下：

$$\begin{aligned}\phi_2 &: \left( \_ \xrightarrow{D} \_ R \right) \xrightarrow{(D \times C) \rightarrow \text{Set}} \left( \_ L \xrightarrow{C} \_ \right) \\ \left( \_ \cdot c \right) \phi_2 &: \left( \_ \xrightarrow{D} c R \right) \xrightarrow{D \rightarrow \text{Set}} \left( \_ L \xrightarrow{C} c \right) \\ \left( d \cdot \_ \right) \phi_2 &: \left( d \xrightarrow{D} \_ R \right) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} \left( d L \xrightarrow{C} \_ \right)\end{aligned}$$

套用反变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{\left( \_ \xrightarrow{D} c R \right) \xrightarrow{D^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}} \left( \_ L \xrightarrow{C} c \right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\left( c R L \xrightarrow{C} c \right)}_{\text{一堆元素}}$$

由反变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构  $(\_ \cdot c) \phi_2$  右侧集合中都有一个箭头与之对应，即  $:c R \text{id}(c R \cdot c) \phi_2 = c^\varepsilon$ 。如此

- $\varepsilon : R \circ L \xrightarrow{\text{Cat}} :c \text{Id}$  构成自然变换。

考虑任意  $f^{\text{op}} : c' \xrightarrow{C} c$ ：

$$\begin{array}{ccc} c R \xrightarrow{D} c R & \xrightarrow{(c R \cdot c) \phi_2} & c R L \xrightarrow{C} c \\ \downarrow f^{\text{op}} R \xrightarrow{D} c R & & \downarrow f^{\text{op}} R L \xrightarrow{C} c \\ c' R \xrightarrow{D} c R & \xrightarrow{(c' R \cdot c) \phi_2} & c' R L \xrightarrow{C} c \\ \uparrow c' R \xrightarrow{D} f^{\text{op}} R & & \uparrow c' R L \xrightarrow{C} f^{\text{op}} \\ c' R \xrightarrow{D} c' R & \xrightarrow{(c' R \cdot c') \phi_2} & c' R L \xrightarrow{C} c' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} :c R \text{id} \vdash & \xrightarrow{(c R \cdot c) \phi_2} & :c R \text{id}(c R \cdot c) \phi_2 = c^\varepsilon \\ \downarrow f^{\text{op}} R \xrightarrow{D} c R & & \downarrow f^{\text{op}} R L \xrightarrow{C} c \\ f^{\text{op}} R \vdash & \xrightarrow{(c' R \cdot c) \phi_2} & f^{\text{op}} R L \circ c^\varepsilon = c'^\varepsilon \circ f^{\text{op}} \\ \uparrow c' R \xrightarrow{D} f^{\text{op}} R & & \uparrow c' R L \xrightarrow{C} f^{\text{op}} \\ :c' R \text{id} \vdash & \xrightarrow{(c' R \cdot c') \phi_2} & :c' R \text{id}(c' R \cdot c') \phi_2 = c'^\varepsilon \end{array}$$

上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图其实就是反变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

- 这里蕴含着一个二元的自然同构  $\phi_1$ ，见下：

$$\begin{aligned}\phi_1 &: \left( \_ L \xrightarrow{C} \_ \right) \xrightarrow{(D \times C) \rightarrow \text{Set}} \left( \_ \xrightarrow{D} \_ R \right) \\ \left( \_ \cdot c \right) \phi_1 &: \left( \_ L \xrightarrow{C} c \right) \xrightarrow{D \rightarrow \text{Set}} \left( \_ \xrightarrow{D} c R \right) \\ \left( d \cdot \_ \right) \phi_1 &: \left( d L \xrightarrow{C} \_ \right) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} \left( d \xrightarrow{D} \_ R \right)\end{aligned}$$

套用协变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{\left( (d L \xrightarrow{C} \_) \right) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} \left( d \xrightarrow{D} \_ R \right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\left( d \xrightarrow{D} d L R \right)}_{\text{一堆元素}}$$

由协变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构  $(d \cdot \_) \phi_1$  右侧集合中都有一个箭头与之对应，即  $:d L \text{id}(d \cdot d L) \phi_1 = d^\eta$ 。如此。

- $\eta : :_D \text{Id} \xrightarrow{D \rightarrow D} L \circ R$  构成自然变换。

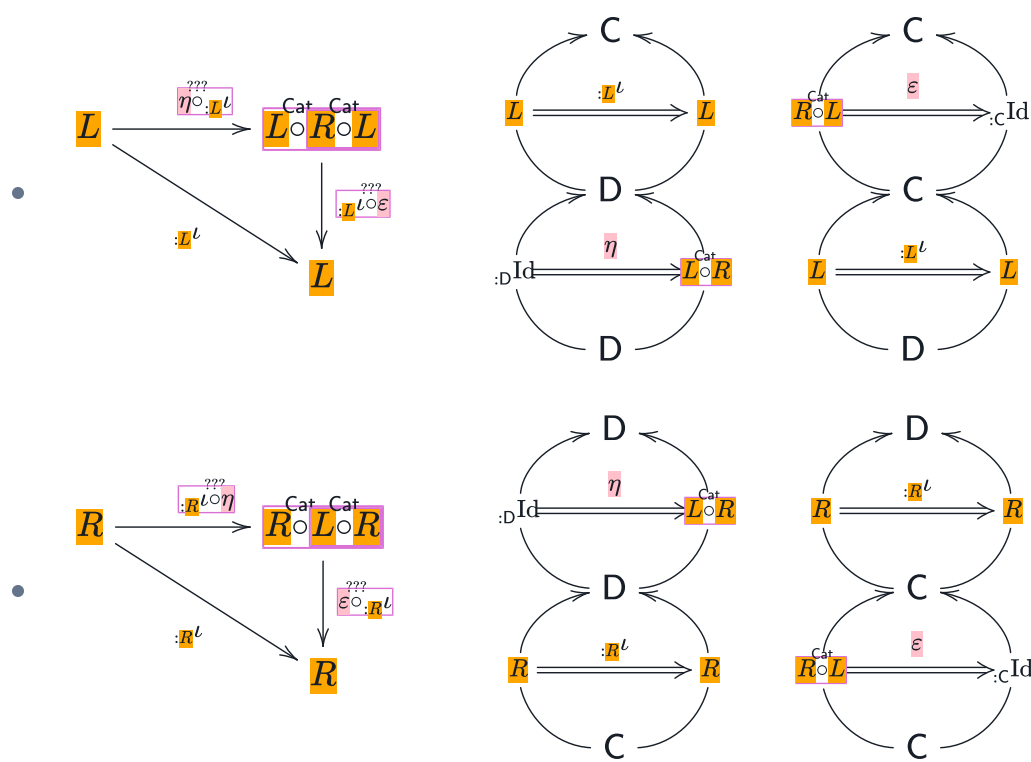
考虑任意  $g : d \xrightarrow{D} d'$ ：

$$\begin{array}{ccc} d L \xrightarrow{C} d L & \xrightarrow{(d \cdot d L) \phi_1} & d \xrightarrow{D} d L R \\ \downarrow d L \xrightarrow{C} g L & & \downarrow d \xrightarrow{D} g L R \\ d L \xrightarrow{C} d' L & \xrightarrow{(d \cdot d' L) \phi_1} & d \xrightarrow{D} d' L R \\ \uparrow g L \xrightarrow{C} d' L & & \uparrow g \xrightarrow{D} d' L R \\ d' L \xrightarrow{C} d' L & \xrightarrow{(d' \cdot d' L) \phi_1} & d' \xrightarrow{D} d' L R \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} :d L \text{id} \vdash & \xrightarrow{(d \cdot d L) \phi_1} & :d L \text{id}(d \cdot d L) \phi_1 = d^\eta \\ \downarrow d L \xrightarrow{C} g L & & \downarrow d \xrightarrow{D} g L R \\ g L \vdash & \xrightarrow{(d \cdot d' L) \phi_1} & d^\eta \circ g L R = g \circ d'^\eta \\ \uparrow g L \xrightarrow{C} d' L & & \uparrow g \xrightarrow{D} d' L R \\ :d' L \text{id} \vdash & \xrightarrow{(d' \cdot d' L) \phi_1} & :d' L \text{id}(d' \cdot d' L) \phi_1 = d'^\eta \end{array}$$

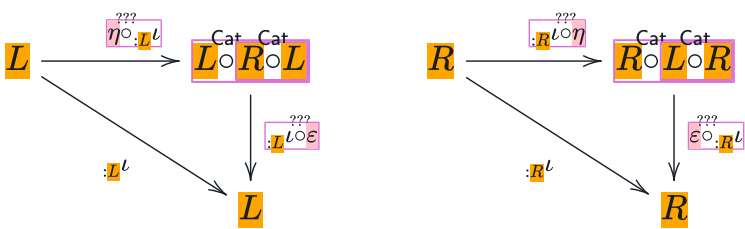
上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图其实就是协变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

对于前面的  $\varepsilon$  和  $\eta$  我们有下述交换图成立：



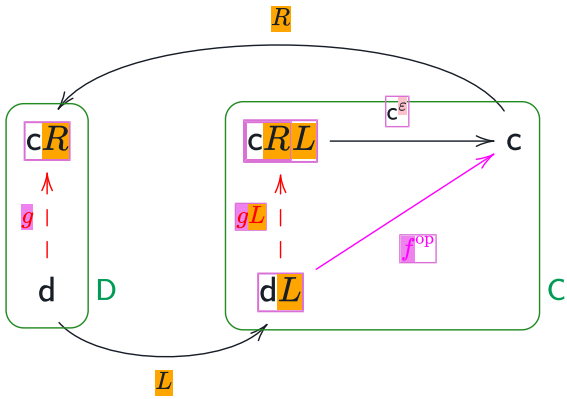
## 伴随函子的第二种定义

假设我们不知道  $L$  和  $R$  构成一对伴随函子并且有自然变换  $\varepsilon : R \circ L \xrightarrow{\text{Cat}} \text{Id}_C$  和  $\eta : \text{Id}_D \xrightarrow{\text{Cat}} L \circ R$  能同时满足上页开头的两幅交换图，即

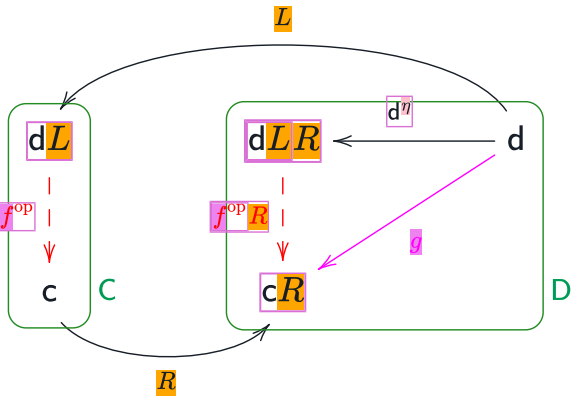


那么

- 对任意  $C$  中对象  $c$   
及任意  $D$  中对象  $d$   
及任意  $f^{\text{op}} : dL \xrightarrow{C} c$  始终存在  
唯一的  $g : d \xrightarrow{D} cR$  使下图交换。  
如此有  $(dL \xrightarrow{C} c) \cong (d \xrightarrow{D} cR)$ 。



- 对任意  $C$  中对象  $c$   
及任意  $D$  中对象  $d$   
及任意  $g : d \xrightarrow{D} cR$  始终都会存在  
唯一的  $f^{\text{op}} : dL \xrightarrow{C} c$  使下图交换。  
如此有  $(dL \xrightarrow{C} c) \cong (d \xrightarrow{D} cR)$ 。



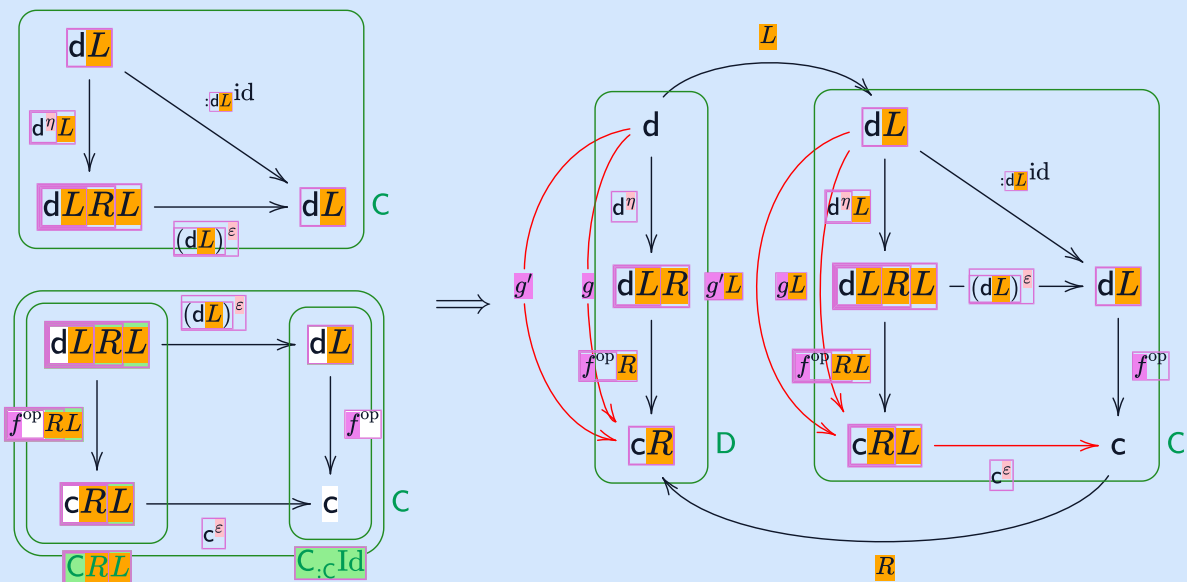
现证明上页的头两条定理。

我们将下图称作图 1。

图 1 上半部分即为上页第一幅图，而

图 1 下半部分可由  $\varepsilon$  为自然变换得出。

两图拼在一起即得图 1 右侧部分。

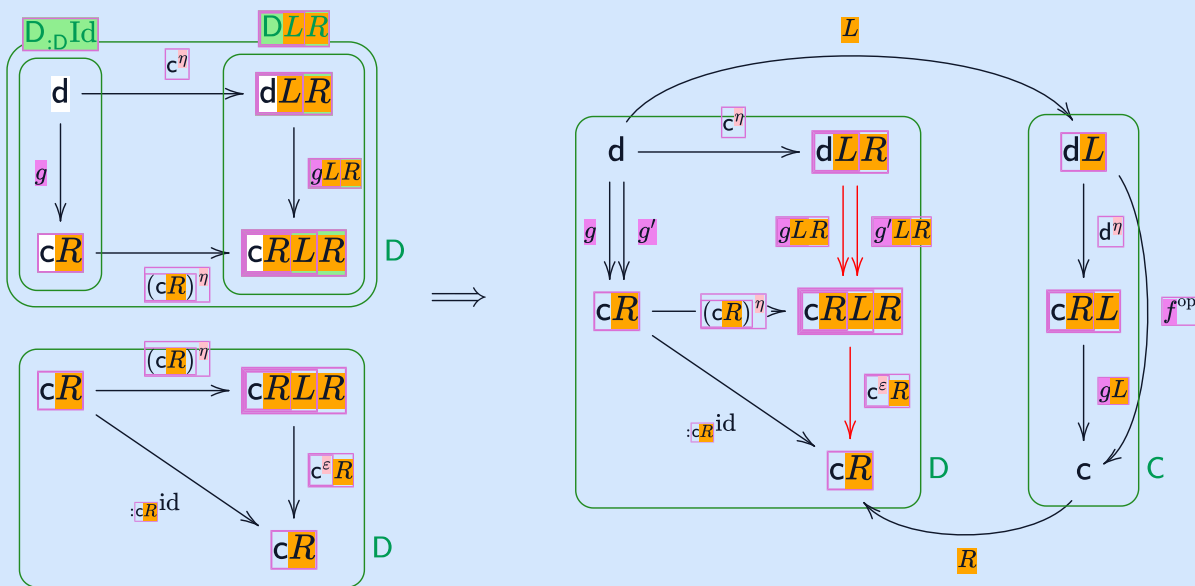


我们将下图称作图 2。

图 2 下半部分即为上页第二幅图，而

图 2 上半部分可由  $\eta$  为自然变换得出。

两图拼在一起即得图 2 右侧部分，即



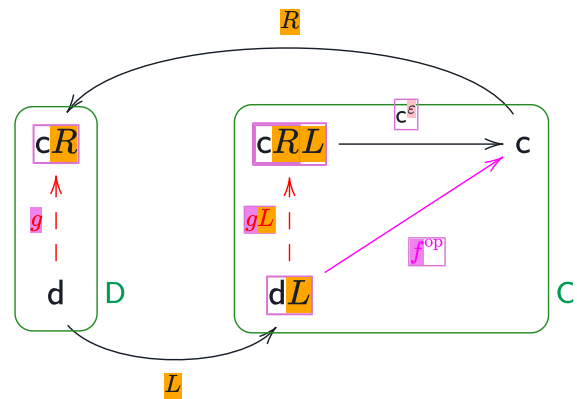
为何  $g$  唯一呢？若  $g'$  亦满足上图——即图 1 右侧部分中两条 L 形走向的红色路径的复合结果是一致的，都为  $f^{\text{op}}$ ；则图 2 右侧部分中的两条红色路径的复合结果也是一致的；如此根据下方右图即可得知  $g = g'$ 。

另一侧同理，这里不再赘述。

# 伴随函子的第三种定义

假设我们不知道  $L$  和  $R$  构成一对伴随函子并且有自然变换  $\varepsilon : R \circ L \xrightarrow{\text{Cat}} \text{Id}_C$  和  $\eta : \text{Id}_D \xrightarrow{\text{Cat}} L \circ R$ , 那么我们有

- 若对任意  $C$  中对象  $c$   
及对任意  $D$  中对象  $d$   
及对任意  $f^{\text{op}} : dL \rightarrow c$  始终都会  
有唯一的  $g : d \rightarrow cR$  使下图交换 ,

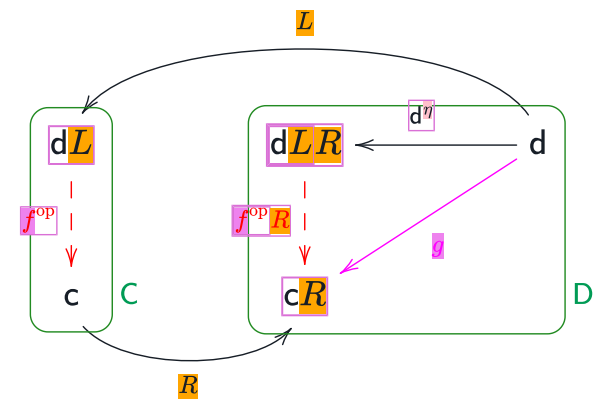


那么

$$\begin{aligned} \phi_2 : ( \_ \xrightarrow{D} \_ R ) &\xrightarrow{(D \times C) \xrightarrow{C} \text{Set}} ( \_ L \xrightarrow{C} \_ ) \\ ( \_ \cdot c ) \phi_2 : ( \_ \xrightarrow{D} cR ) &\xrightarrow{D \xrightarrow{C} \text{Set}} ( \_ L \xrightarrow{C} c ) \\ ( d \cdot \_ ) \phi_2 : ( d \xrightarrow{D} \_ R ) &\xrightarrow{C \xrightarrow{C} \text{Set}} ( dL \xrightarrow{C} \_ ) \end{aligned}$$

将构成自然同构。

- 若对任意  $C$  中对象  $c$   
及对任意  $D$  中对象  $d$   
及对任意  $g : d \rightarrow cR$  始终都存在  
唯一的  $f^{\text{op}} : dL \rightarrow c$  使下图交换 ,



那么

$$\begin{aligned} \phi_1 : ( \_ L \xrightarrow{C} \_ ) &\xrightarrow{(D \times C) \xrightarrow{C} \text{Set}} ( \_ \xrightarrow{D} \_ R ) \\ ( \_ \cdot c ) \phi_1 : ( \_ L \xrightarrow{C} c ) &\xrightarrow{D \xrightarrow{C} \text{Set}} ( \_ \xrightarrow{D} cR ) \\ ( d \cdot \_ ) \phi_1 : ( dL \xrightarrow{C} \_ ) &\xrightarrow{C \xrightarrow{C} \text{Set}} ( d \xrightarrow{D} \_ R ) \end{aligned}$$

将构成自然同构。

