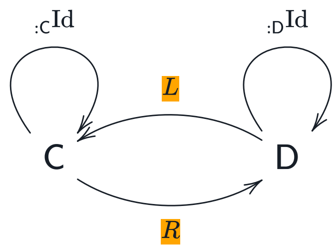
伴随函子的 unit 与 counit



伴随函子：对任意 c 和 d 有 $(d \xrightarrow{D} cR) \overset{Set}{\cong} (dL \xrightarrow{C} c)$。如此

- 不难看出这其实蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_2，见下：

$$\phi_2 : (\_ \xrightarrow{D} \_R) \xrightarrow{(D \times C) \to Set} (\_L \xrightarrow{C} \_)$$

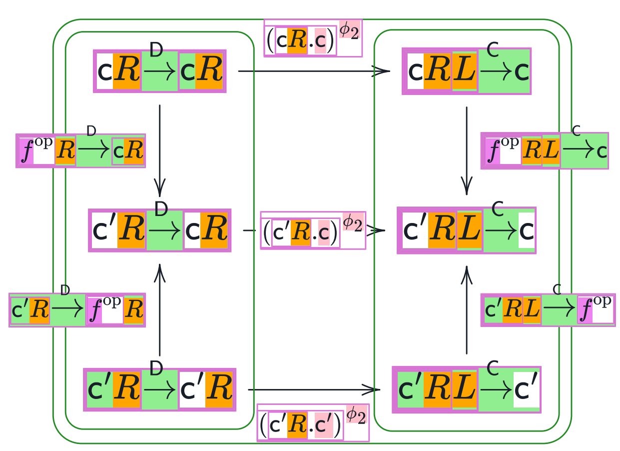
$$(\_\,.\,c)^{\phi_2} : (\_ \xrightarrow{D} cR) \xrightarrow{D \to Set} (\_L \xrightarrow{C} c)$$

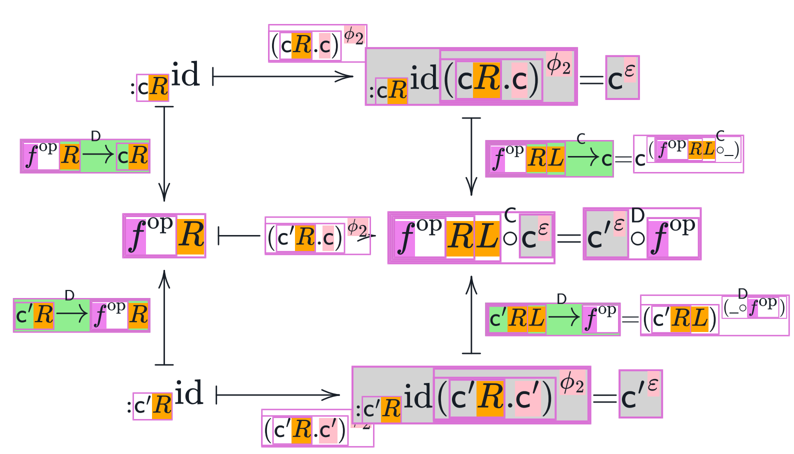
$$(d\,.\,\_)^{\phi_2} : (d \xrightarrow{D} \_R) \xrightarrow{C \to Set} (dL \xrightarrow{C} \_)$$

套用反变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{((\_ \xrightarrow{D} cR) \xrightarrow{D^{op} \to Set} (\_L \xrightarrow{C} c))}_{一堆自然变换} \overset{Set}{\cong} \underbrace{(cRL \xrightarrow{C} c)}_{一堆元素}$$

由反变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(\_\,.\,c)^{\phi_2}$
都会有一个右侧集合中的箭头与之相对应，即 $({}_{:cR}\mathrm{id}(cR\,.\,c))^{\phi_2} = c^{\varepsilon}$。
为何 ε 构成自然变换呢？下方右图第二行的第二个节点说明了一切。
这两张图这其实就是米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。





- 不难看出这其实蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_1，见下：

$$\phi_1 : (\_L \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{(D \times C) \to Set} (\_ \xrightarrow{D} \_R)$$

$$(\_\,.\,c)^{\phi_1} : (\_L \xrightarrow{C} c) \xrightarrow{D \to Set} (\_ \xrightarrow{D} cR)$$

$$(d\,.\,\_)^{\phi_1} : (dL \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{C \to Set} (d \xrightarrow{D} \_R)$$

套用协变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{((dL \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{C \to Set} (d \xrightarrow{D} \_R))}_{一堆自然变换} \overset{Set}{\cong} \underbrace{(d \xrightarrow{D} dLR)}_{一堆元素}$$

如此对每个左侧集合中的自然同构 $(d\,.\,\_)^{\phi_2}$
就会有一个右侧集合中的箭头与之相对应。
接下来证明这一群箭头将会构成自然变换。