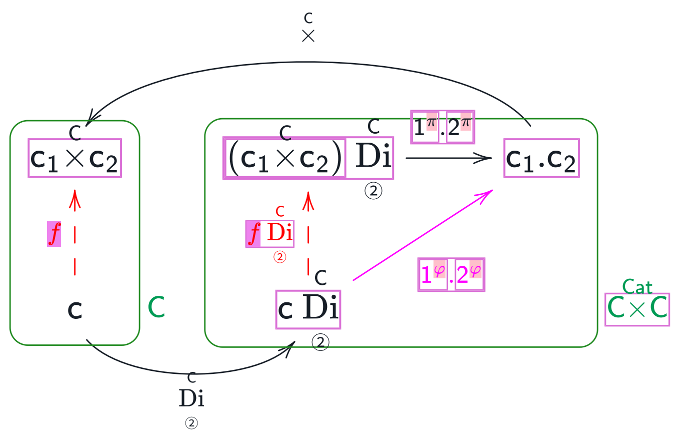
04-05 类型的和与积

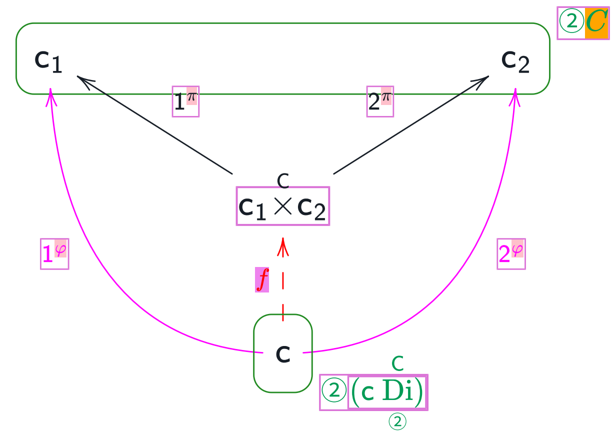
LATEX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{C}{\times} : (C \times C) \xrightarrow{Cat} C$ 在范畴 C 中有如下性质：

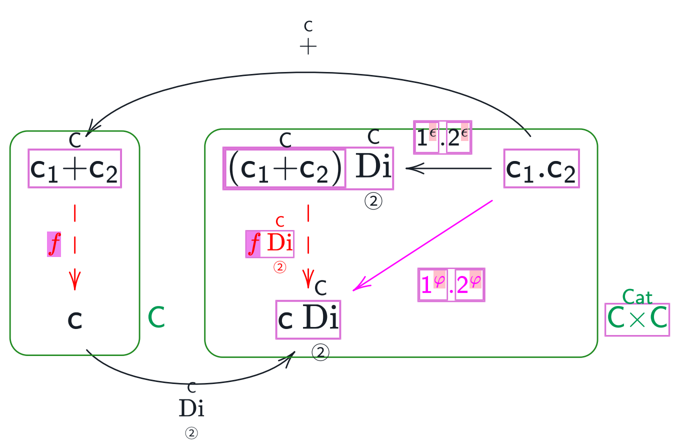
- $(c \xrightarrow{C} c_1) \overset{Set}{\times} (c \xrightarrow{C} c_2) \overset{Set}{\cong} c \xrightarrow{C} (c_1 \overset{C}{\times} c_2)$
  —— c 为任意 C 中对象。此即为积的
  泛性质，亦为**指数对乘法的分配律** 。

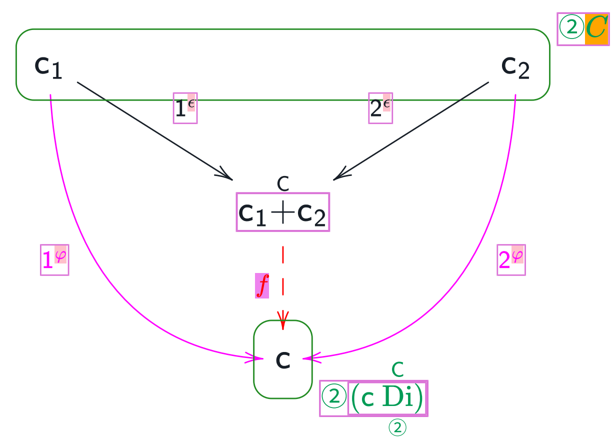




默认函子 $\overset{C}{+} : (C \times C) \xrightarrow{Cat} C$ 在范畴 C 中有如下性质：

- $(c_1 \xrightarrow{C} c) \overset{Set}{\times} (c_2 \xrightarrow{C} c) \overset{Set}{\cong} (c_1 \overset{C}{+} c_2) \xrightarrow{C} c$
  —— c 为任意 C 中对象。此即为和的
  泛性质，亦为**指数对加法的分配律** 。



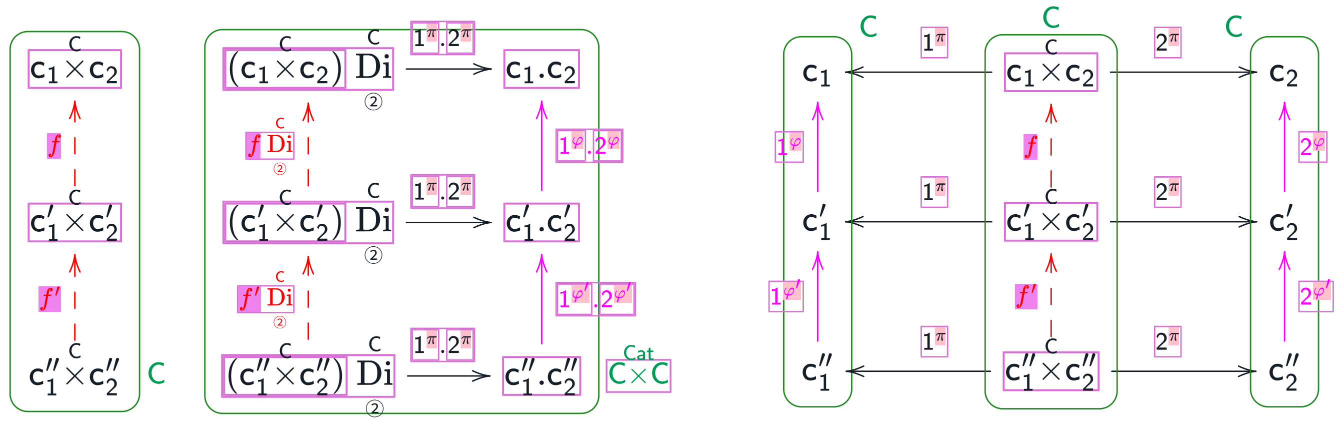


> **Note**
>
> 在上面的插图中
>
> - $\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} : C \xrightarrow{Cat} (C \times C)$ 为对角函子满足
> $c \longmapsto (c\,.\,c)$
> - $\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} : C \xrightarrow{Cat} (② \xrightarrow{Cat} C)$
> $c \longmapsto$ 常值函子
> $c\,\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} : \quad ② \xrightarrow{Cat} C$
> $1 \longmapsto c$
> $2 \longmapsto c$
> $f \longmapsto {}_{:c}\mathrm{id}$
>   即为对角函子的第二种等价的定义 。
>   ② 为仅含两个对象的范畴，在此则
>   作为一个指标范畴 。1 和 2 分别为
>   其中的对象 。
> - $C : ② \xrightarrow{Cat} C$ 为函子，满足
> $1 \longmapsto c_1$
> $2 \longmapsto c_2$
> - 不难看出上图中
> $\pi : C \xrightarrow{Cat} (c_1 \overset{C}{\times} c_2)\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}$
> $\epsilon : (c_1 \overset{C}{+} c_2)\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \xrightarrow{Cat} C$
>   都构成自然变换 。$1^\pi\,.\,2^\pi$ 和 $1^\epsilon\,.\,2^\epsilon$ 可分别视作是 π 和 ϵ 。

函子性

如何证明 $\overset{C}{\times}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{C}{\times} : (_{:c_1'}\mathrm{id} \,.\, _{:c_2'}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(c_1' \overset{C}{\times} c_2')}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{C}{\times}$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{C}{\times} : (1^{\varphi'} \overset{C}{\circ} 1^{\varphi} \,.\, 2^{\varphi'} \overset{C}{\circ} 2^{\varphi}) \longmapsto (f' \overset{C}{\circ} f)$
  —— 即函子 $\overset{C}{\times}$ 保持**箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：

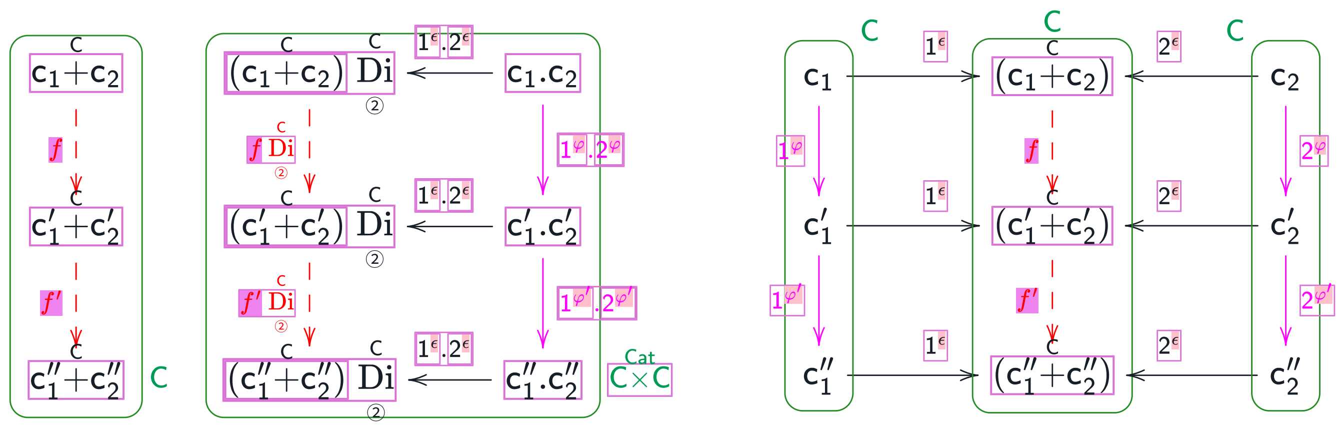


另外我们规定 $\overset{C}{\times}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{C}{\times} : (1^{\varphi} \,.\, c_2) \longmapsto (1^{\varphi} \overset{C}{\times} {}_{:c_2}\mathrm{id})$
  $\overset{C}{\times} : (c_1 \,.\, 2^{\varphi}) \longmapsto ({}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{C}{\times} 2^{\varphi})$

如何证明 $\overset{C}{+}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{C}{+} : (_{:c_1}\mathrm{id} \,.\, _{:c_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(c_1 \overset{C}{+} c_2)}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{C}{+}$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{C}{+} : (1^{\varphi} \overset{C}{\circ} 1^{\varphi'} \,.\, 2^{\varphi} \overset{C}{\circ} 2^{\varphi'}) \longmapsto (f \overset{C}{\circ} f')$
  —— 即函子 $\overset{C}{\times}$ 保持**箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：



另外我们规定 $\overset{C}{+}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{C}{+} : (1^{\varphi} \,.\, c_2) \longmapsto (1^{\varphi} \overset{C}{+} {}_{:c_2}\mathrm{id})$
  $\overset{C}{+} : (c_1 \,.\, 2^{\varphi}) \longmapsto ({}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{C}{+} 2^{\varphi})$

运算性质

对于函子 $\overset{C}{\times}$ 我们不难得知

- $c_1 \overset{C}{\times} 1 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{\times} 1 \overset{C}{\cong} c_1$

  —— 乘法具有**幺元** 1 。

  下图有助于理解证明目标，即 $1^{\varphi} . _{:c}!$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{\times} 1)\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "1^{\pi}.2^{\pi}"] & c_1.1 \\
c\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "1^{\varphi}._{:c}!"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_1\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "_{:c_1}\mathrm{id}._{:c_1}!"] & c_1.1 \\
c\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f'\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "1^{\varphi}._{:c}!"']
\end{tikzcd}$$

- $c_1 \overset{C}{\times} c_2 \overset{C}{\cong} c_2 \overset{C}{\times} c_1$

  —— 乘法具有**交换律** 。

  下图有助于理解证明目标，即 $1^{\varphi} . 2^{\varphi}$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{\times} c_2)\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "1^{\pi}.2^{\pi}"] & c_1.c_2 \\
c\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "1^{\varphi}.2^{\varphi}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_2 \overset{C}{\times} c_1)\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "1^{\pi}.2^{\pi}"] & c_2.c_1 \\
c\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f'\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "2^{\varphi}.1^{\varphi}"']
\end{tikzcd}$$

- $(c_1 \overset{C}{\times} c_2) \overset{C}{\times} c_3 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{\times} (c_2 \overset{C}{\times} c_3)$

  —— 乘法具有**结合律** 。

  下图有助于理解证明目标，即 $(1^{\varphi} . 2^{\varphi}) . 3^{\varphi}$ 唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
((c_1 \overset{C}{\times} c_2) \overset{C}{\times} c_3)\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi"] & (c_1 \overset{C}{\times} c_2).c_3 \arrow[r, "\pi._{:c_3}\mathrm{id}"] & (c_1.c_2).c_3 \\
c_3\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, dotted, "\varphi.3^{\varphi}"] \arrow[urr, "(1^{\varphi}.2^{\varphi}).3^{\varphi}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{\times} (c_2 \overset{C}{\times} c_3))\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi"] & c_1.(c_2 \overset{C}{\times} c_3) \arrow[r, "_{:c_1}\mathrm{id}.\pi"] & c_1.(c_2.c_3) \\
c_3\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f'\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, dotted, "1^{\varphi}.\varphi"] \arrow[urr, "1^{\varphi}.(2^{\varphi}.3^{\varphi})"']
\end{tikzcd}$$

对于函子 $\overset{C}{+}$ 我们不难得知

- $c_1 \overset{C}{+} 0 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{+} 1 \overset{C}{\cong} c_1$

  —— 加法具有**幺元** 0 。

  下图有助于理解证明目标，即 $1^{\varphi} . _{:c}¡$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{+} 0)\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.0 \arrow[l, "1^{\epsilon}.2^{\epsilon}"'] \arrow[dl, "1^{\varphi}._{:c}¡"] \\
c\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_1\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f'\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.0 \arrow[l, "1^{\epsilon}.2^{\epsilon}"'] \arrow[dl, "1^{\varphi}._{:c}¡"] \\
c\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}}
\end{tikzcd}$$

- $c_1 \overset{C}{+} c_2 \overset{C}{\cong} c_2 \overset{C}{+} c_1$

  —— 加法具有**交换律** 。

  下图有助于理解证明目标，即 $1^{\varphi} . 2^{\varphi}$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{+} c_2)\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.c_2 \arrow[l, "1^{\epsilon}.2^{\epsilon}"'] \arrow[dl, "1^{\varphi}.2^{\varphi}"] \\
c\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_2 \overset{C}{+} c_1)\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f'\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}}"'] & c_2.c_1 \arrow[l, "1^{\epsilon}.2^{\epsilon}"'] \arrow[dl, "2^{\varphi}.1^{\varphi}"] \\
c\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}}
\end{tikzcd}$$

- $(c_1 \overset{C}{+} c_2) \overset{C}{+} c_3 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{+} (c_2 \overset{C}{+} c_3)$

  —— 加法具有**结合律** 。

  下图有助于理解证明目标，即 $(1^{\varphi} . 2^{\varphi}) . 3^{\varphi}$ 唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
((c_1 \overset{C}{+} c_2) \overset{C}{+} c_3)\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}}"'] & (c_1 \overset{C}{+} c_2).c_3 \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "\varphi.3^{\varphi}"] & (c_1.c_2).c_3 \arrow[l, "\epsilon._{:c_3}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "(1^{\varphi}.2^{\varphi}).3^{\varphi}"] \\
c\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{+} (c_2 \overset{C}{+} c_3))\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f'\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.(c_2 \overset{C}{+} c_3) \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "1^{\varphi}.\varphi"] & c_1.(c_2.c_3) \arrow[l, "\epsilon._{:c_3}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "1^{\varphi}.(2^{\varphi}.3^{\varphi})"] \\
c\,\overset{C}{\underset{\text{②}}{\mathrm{Di}}}
\end{tikzcd}$$

幺半范畴

像刚才这样对象运算具有**单位元**以及**结合律**的范畴称作**幺半范畴**；

若上述范畴还具有**交换律**则称作**对称幺半范畴**；

很明显我们的范畴 C 是典型的**对称幺半范畴** 。

幺半群

什么是幺半群呢？有两种定义方式：

- **幺半群** M 是个范畴，其只含一个对象 m；
  其中的复合运算正好有单位元以及结合律 。
- 对象 m 属于幺半范畴 C，满足下述交换图：

$$
\begin{tikzcd}
1\overset{C}{\times}m \arrow[r, "u\overset{C}{\otimes}{}_{:m}\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\text{左单位元 } u_l"'] & m\overset{C}{\times}m \arrow[d, "p"', "\text{运算结果唯一}"] & m\overset{C}{\times}1 \arrow[l, "{}_{:m}\mathrm{id}\overset{C}{\otimes}u"'] \arrow[dl, "u_r \text{ 右单位元}"] \\
& m &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(m\times m)\overset{C}{\times}m \arrow[rr, "\text{结合律 } a"] \arrow[d, "\text{先算左侧括号 } p\overset{C}{\otimes}{}_{:m}\mathrm{id}"'] & & m\overset{C}{\times}(m\overset{C}{\times}m) \arrow[d, "{}_{:m}\mathrm{id}\overset{C}{\otimes}p \text{ 先算右侧括号}"] \\
m\overset{C}{\times}m \arrow[r, "\text{再算最终结果 } p"'] & m & m\overset{C}{\times}m \arrow[l, "p \text{ 果结终最算再}"]
\end{tikzcd}
$$

  其中

  - u ：$1 \overset{C}{\to} m$ 其实就是 m 里面的幺元
  - u_l：$(1 \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\to} m$ 表示 u 构成左幺元
  - u_r：$(m \overset{C}{\times} 1) \overset{C}{\to} m$ 表示 u 构成右幺元
  - p ：$(m \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\to} m$ 即为 m 中的二元运算
  - a ：$(m \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\times} m \overset{C}{\to} m \overset{C}{\times} (m \overset{C}{\times} m)$ 表示 m 具有结合律