08-09 函子和自然变换

LaTeX Definitions are here.

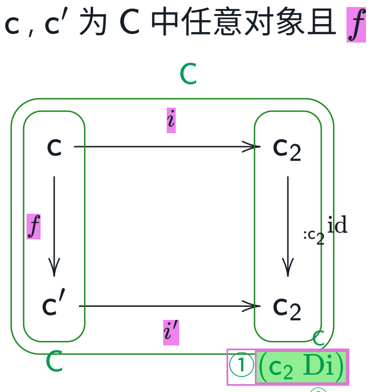
一些特殊的范畴

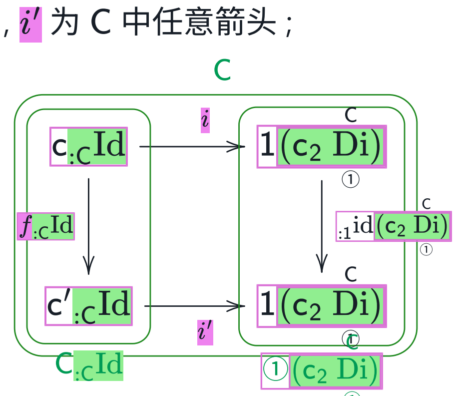
现在规定几种特殊的范畴。

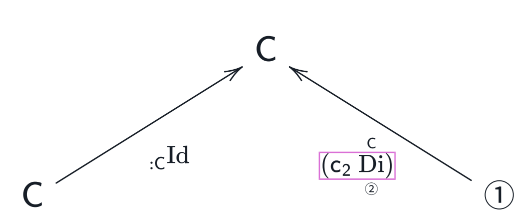
- **离散范畴**：只有对象不含箭头（恒等箭头除外）的范畴。
- Set：**所有集合构成的范畴**，为局部小范畴，满足
  - Set 中对象为任意集合；
  - Set 中箭头为集合间映射。
- Cat：**所有范畴构成的范畴**，满足
  - Cat 中任何对象都构成一个范畴；
  - Cat 中任何箭头都构成一个函子。

若 C，D 为 Cat 中对象，则：

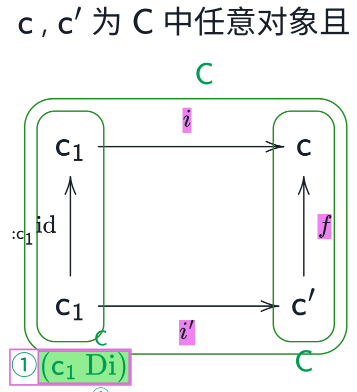
- C^{op}：**反范畴**，满足
  - C^{op} 中对象皆形如 c，
    c 为任意 C 中的对象；
  - C^{op} 中箭头皆形如 $i^{op} : c_2 \xrightarrow{C^{op}} c_1$，
    $i : c_1 \xrightarrow{C} c_2$ 可为任意 C 中的箭头。
- $C \overset{Cat}{\times} D$：**积范畴**，满足
  - $C \overset{Cat}{\times} D$ 中对象皆形如 $c\,.\,d$，
    c，d 分别为任意 C，D 中的对象；
  - $C \overset{Cat}{\times} D$ 中箭头皆形如 $i\,.\,j$，
    i，j 分别为任意 C，D 中的箭头。
- $C \xrightarrow{Cat} D$：**所有 C 到 D 的函子的范畴**，满足
  - $C \xrightarrow{Cat} D$ 中任何对象
    都是 C 到 D 的函子；
  - $C \xrightarrow{Cat} D$ 中任何箭头
    都是函子间自然变换。
- C/c：**俯范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
  - C/c_2 中对象皆形如 $\cancel{c\,.\,1}\,.\,i$，其中 c 和
    $i : c \xrightarrow{C} c_2$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
  - c_2/C 中箭头皆形如 $f\,\cancel{\,._{:c_2}\mathrm{id}}$ 且满足下述交换图，其中
    c，c′ 为 C 中任意对象且 f，i，i' 为 C 中任意箭头；

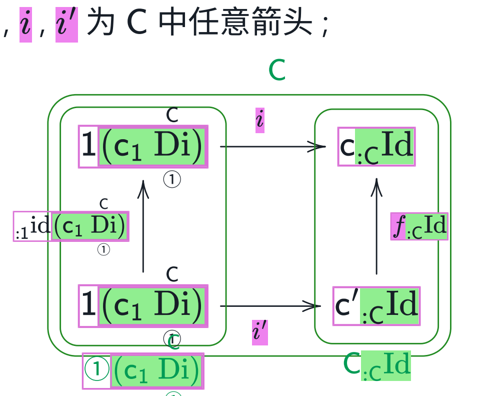


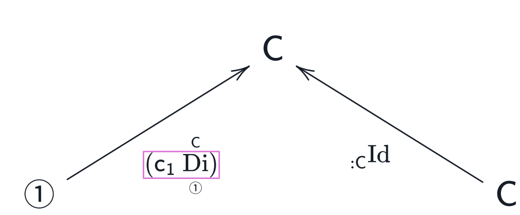




- c_1/C：**仰范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
  - c_1/C 中对象皆形如 $\cancel{1\,.\,c}\,.\,i$，其中 c 和
    $i : c_1 \xrightarrow{C} c$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
  - C/c_1 中箭头皆形如 $\cancel{_{:c_1}\mathrm{id}\,.}\,f$ 且满足下述交换图，其中
    c，c′ 为 C 中任意对象且 f，i，i' 为 C 中任意箭头；







函子

接下来我们来提供函子的正式定义：

- $F : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为**函子**当且仅当
  - 对任意 C 中对象 c，$\mathsf{c}F$ 为
    D 中对象且 ${}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}F = {}_{:\mathsf{c}F}\mathrm{id}$；
  - 对任意 C 中箭头 $i_1 : \mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 和 $i_2 : \mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_3$，
    始终都有等式 $(i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2)F = i_1F \overset{\mathsf{D}}{\circ} i_2F$ 成立。

若已确信 $F : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为函子且
还知 C 中有对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$
以及 C 中有箭头 $i : \mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 则

- 若 i 为单态 / 满态 / 同构
  则 iF 为单态 / 满态 / 同构；
- 若 iF 为同构
  则 i 为同构。

> **Note**
>
> 不难发现函子具有保持
> 对象 / 态射性质的能力。

函子的复合运算

若还知道 $G : \mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$ 为函子则

- $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$
  也构成一个函子。

恒等函子

对于函子我们也有恒等映射，即：

- ${}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id} \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} F = F$
  $= F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id}$

忠实，完全和本质满函子

若 C，D，E 皆为**局部小范畴**，则

- F 是**忠实的**当且仅当对任意 C 中的对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$，
  $\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 与 $\mathsf{c}_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}_2F$ 之间始终都存在单射；
- F 是**完全的**当且仅当对任意 C 中的对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$，
  $\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 与 $\mathsf{c}_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}_2F$ 之间始终都存在满射；
- F 是**完全忠实的**当且仅当任意 C 中对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$，
  $\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 与 $\mathsf{c}_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}_2F$ 之间始终都存在双射。

> **Note**
>
> 刚才提到的 “ 单 / 满 / 双射 ”
> 针对的都是范畴的箭头部分。

- F 是**本质满的**当且仅当对任意 D 中对象 d
  都存在 C 中对象 c 使 $\mathsf{c}F \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{d}$ 之间有双射。

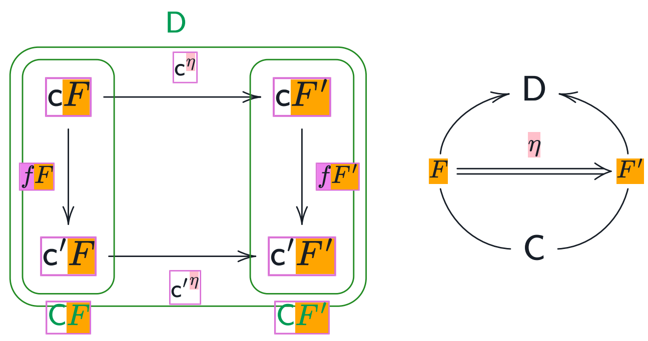
根据刚才的信息我们不难得知

- 若 F, G 为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满函子
  则 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满 函子；
- 若 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为完全忠实函子
  且知道 G 为完全忠实函子
  则可知 F 为完全忠实函子；

自然变换

如果还知道 F' : $\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为函子，那么

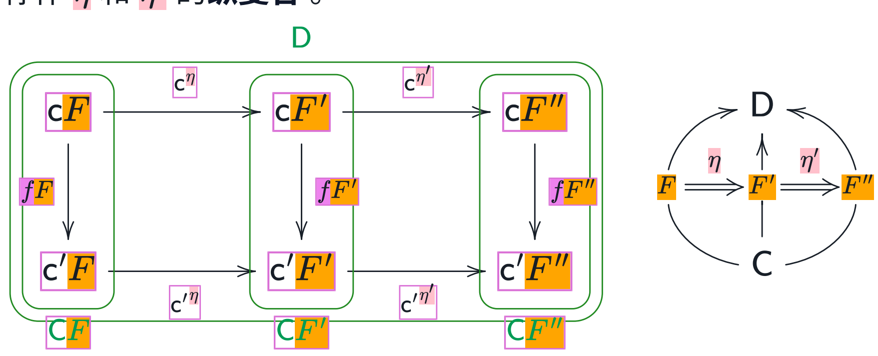
- $\eta : F \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{D}} F'$ 为自然变换当且仅当对任意 C 中对象 c，c′ 始终都会有下述交换图成立：



自然变换的复合

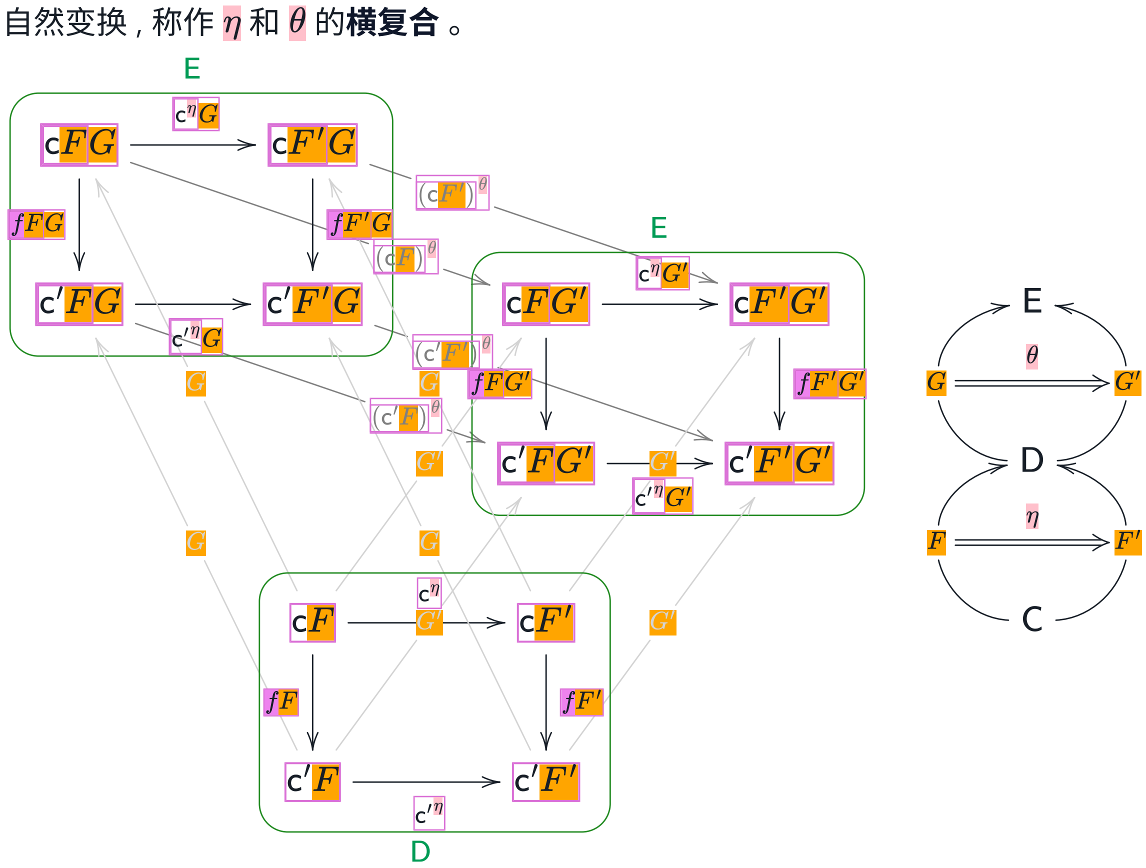
若已知 $\eta : F \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{D}} F'$ 构成自然变换且
还知道 $\eta' : F' \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{D}} F''$ 为自然变换则

- $\eta \overset{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{D}}{\circ} \eta' : F \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{D}} F''$ 为自然变换，
称作 η 和 η' 的**纵复合**。



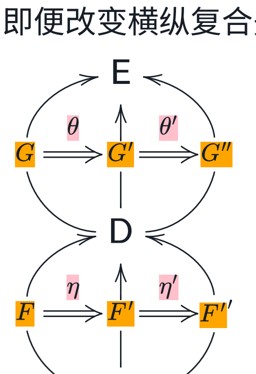
如果还知道 G' : $\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$ 也是个函子
及自然变换 $\theta : G \xrightarrow{\mathsf{D} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{E}} G'$ 那么便有

- $\eta \circ \theta : F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{E}} F' \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G'$ 为
自然变换，称作 η 和 θ 的**横复合**。



若 $\theta' : G \xrightarrow{\mathsf{D} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{E}} G'$ 为自然变换则

- $(\eta \circ \theta) \overset{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{E}}{\circ} (\eta' \circ \theta') = (\eta \overset{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{D}}{\circ} \eta') \circ (\theta \overset{\mathsf{D} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{E}}{\circ} \theta')$，
即便改变横纵复合先后顺序也不影响最终结果。



恒等自然变换

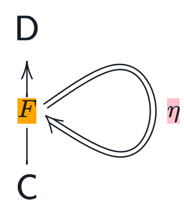
同样对于自然变换也有恒等映射 。

- ${}_{:F}\iota : F \xrightarrow[\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{D}]{\mathsf{Cat}} F$ 为恒等自然变换当且仅当
  对范畴 C 中任意对象 c 都有下述交换图成立 :

D

$$\begin{tikzcd} \mathsf{c}F \arrow[r, "\mathsf{c}\eta =_{:(\mathsf{c}F)} \mathrm{id}"] \arrow[d, "fF"'] & \mathsf{c}F \arrow[d, "fF"] \\ \mathsf{c}'F \arrow[r, "\mathsf{c}'\eta =_{:(\mathsf{c}'F)} \mathrm{id}"'] & \mathsf{c}'F \end{tikzcd}$$

$\mathsf{C}F$ $\mathsf{C}F$



自然同构

自然同构与你想象中的同构不太像 。

- $\eta : F \xrightarrow[\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{D}]{\mathsf{Cat}} F'$ 为**自然同构**当且仅当
  $\mathsf{c}\eta$ 总是同构 , 这里 c 为任意 C 中对象 。
  此时 F , F' 的关系可用 $F \overset{\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{D}}{\underset{\mathsf{Cat}}{\cong}} F'$ 表示

范畴等价的定义

我们用自然同构来定义范畴的等价 。

- $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\cong} \mathsf{D}$ 当且仅当
  存在函子 $F : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 及 $F' : \mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}$
  使 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} F' \overset{\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{C}}{\underset{\mathsf{Cat}}{\cong}} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{id}$ 并且有 $F' \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} F \overset{\mathsf{D}\longrightarrow\mathsf{D}}{\underset{\mathsf{Cat}}{\cong}} {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{id}$ 。

米田引理

假如知道 $F : C \xrightarrow{C} Set$ 则

反变米田引理的陈述如下：

- $\underbrace{((\_ \xrightarrow{C} c_2) \xrightarrow{C \xrightarrow{Cat} Set} F)}_{一堆自然变换} \overset{Set}{\cong} \underbrace{(c_2 F)}_{一堆元素}$

反变米田引理的证明如下：

1. $\Leftarrow$：考虑任意 $(c_2 F)$ 中的 etc：根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图
我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_2}，于是便可构建一个完整的 η_2。
易知 η_2 是一个自然变换。

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
& \text{Set} & \\
c \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & cF \arrow[d, "fF"] \\
c' \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c'F \\
C \xrightarrow{C} c_2 & CF
\end{tikzcd}$$

2. $\Rightarrow$：考虑任意等式左侧的 η_1：若上述交换图成立
则可对任意 η_1 指派 $\mathrm{etc} = {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 为 $c_2 F$ 中与之对应的元素；

$$\begin{tikzcd}
c_2 \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & c_2 F \arrow[d, "fF"] \\
c' \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c'F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:c_2}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & {}_{:c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2}) \arrow[d, "fF"] \\
f \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & \mathrm{etc}(fF)
\end{tikzcd}$$

为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
c_2 唯一地确定了 η_2，反之 η_2 也唯一确定了 c_2。

协变米田引理的陈述如下：

- $\underbrace{((c_1 \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{C \xrightarrow{Cat} Set} F)}_{一堆自然变换} \overset{Set}{\cong} \underbrace{(c_1 F)}_{一堆元素}$

协变米田引理的证明如下：

1. $\Leftarrow$：考虑任意 $(c_1 F)$ 中的 etc：根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图
我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_1}，于是便可构建一个完整的 η_1。
易知 η_1 是一个自然变换。

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
& \text{Set} & \\
c_1 \xrightarrow{C} c \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & cF \arrow[d, "fF"] \\
c_1 \xrightarrow{C} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c'F \\
c_1 \xrightarrow{C} C & CF
\end{tikzcd}$$

2. $\Rightarrow$：考虑任意等式左侧的 η_1：若上述交换图成立
则可对任意 η_1 指派 $\mathrm{etc} = {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 为 $c_1 F$ 中与之对应的元素；

$$\begin{tikzcd}
c_1 \xrightarrow{C} c_1 \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & c_1 F \arrow[d, "fF"] \\
c_1 \xrightarrow{C} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c'F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:c_1}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1}) \arrow[d, "fF"] \\
f \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & \mathrm{etc}(fF)
\end{tikzcd}$$

为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
c_1 唯一地确定了 η_1，反之 η_1 也唯一确定了 c_1。

米田嵌入

根据前面的内容我们可知

- よ : $\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})$
  $c_2 \longmapsto (c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) = (\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2)$ 构成一个函子，称作预层
  $f_2 \longmapsto (f_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) = (\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
  构成一个完全忠实函子，该函子称作是**米田嵌入**。

证明如下：

- よ 是函子，因为
  - ${}_{:c_2}\mathrm{id}\,\text{よ} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:c_2}\mathrm{id}) = {}_{:(c_2\text{よ})}\mathrm{id}$
  - $(f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')\text{よ} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')$，

  由于函子具有保持对象 / 映射性质的能力，
  故便可知 $f_2\text{よ}$ 为同构当且仅当 f_2 为同构。
- よ 是完全忠实的，因为
  将协变米田引理中的 c_1 / C / F
  分别换成 c_2 / C^{op} / $(c_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_)$
  即可获得下述公式：

$$\underbrace{((c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (c_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_))}_{\text{预层范畴的 hom-set}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(c_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} c_2)}_{\mathsf{C}\text{ 的 hom-set}}$$

  也就是

$$\underbrace{((c_2\text{よ}) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (c_2'\text{よ}))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(c_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} c_2)}_{\mathsf{C}\text{ 的 hom-set}} = \underbrace{(c_2(c_2'\text{よ}))}_{\text{一堆元素}}$$

> ⓘ **Note**
>
> 由于函子能够保持态射的性质，
> 对任意左侧集合中的自然同构
> 右侧集合也会有同构与之对应，反之亦然。
> 这也就证明了前面自然同构相关定理省略的部分。

根据前面的内容我们可知

- 尤 : $\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})$
  $c_1 \longmapsto (c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$ 构成一个函子
  $f_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
  构成一个完全忠实函子，该函子称作是**尤达嵌入**。

证明如下：

- 尤 是函子，因为
  - ${}_{:c_1}\mathrm{id}\,\text{尤} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:c_1}\mathrm{id}) = {}_{:(c_1\text{尤})}\mathrm{id}$
  - $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1')\text{尤} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1')) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1')$，
- 尤 是完全且忠实的，因为
  将协变米田引理中的 F
  换成 $(c_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$
  即可获得下述公式：

$$\underbrace{((c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (c_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} \_))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(c_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} c_1)}_{\text{一堆元素}}$$

  也就是

$$\underbrace{((c_1\text{尤}) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (c_1'\text{尤}))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(c_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} c_1)}_{\text{一堆元素}} = \underbrace{(c_1(c_1'\text{尤}))}_{\text{一堆元素}}$$

> ⓘ **Note**
>
> 由于函子能够保持态射的性质，
> 对任意左侧集合中的自然同构
> 右侧集合也会有同构与之对应，反之亦然。
> 这也就证明了前面自然同构相关定理省略的部分。