

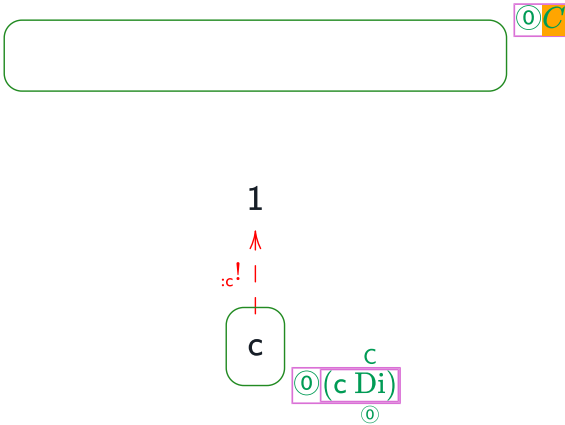
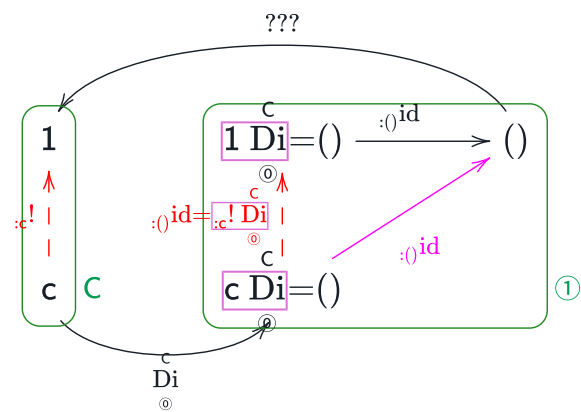
01 始对象和终对象

L^AT_EX Definitions are here.

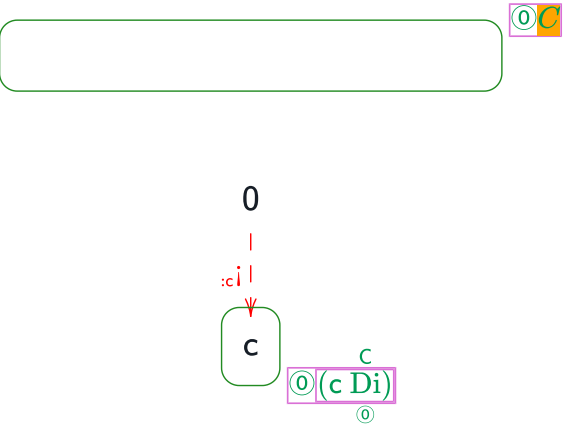
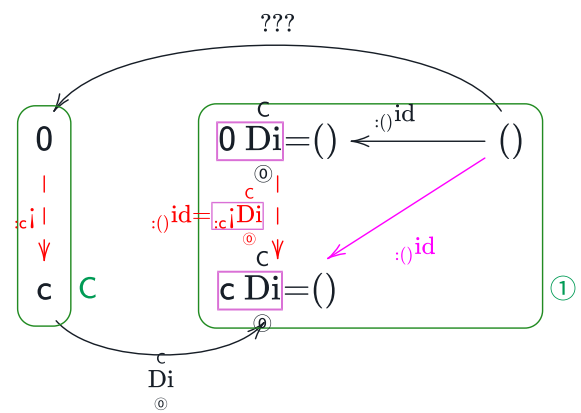
泛性质

范畴由对象及其间箭头构成。本文重点分析余积闭范畴 \mathcal{C} 。首先给出如下定义：

- 1 为**终对象**当且仅当对任意 \mathcal{C} 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 $!_c : c \rightarrow 1$ ：



- 0 为**始对象**当且仅当对任意 \mathcal{C} 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 $!_c : 0 \rightarrow c$ ：



Note

- $Di : \mathcal{C} \rightarrow (\mathbb{0} \rightarrow \mathcal{C})$
 $\mathbb{0} \hookrightarrow \mathcal{C}$ 常值函子
 $c Di : (\mathbb{0} \rightarrow \mathcal{C})$
 $\mathbb{0}$ 为不含对象的范畴。

若范畴 \mathcal{C} 中真的含有 0 和 1 分别作为始对象和终对象 则根据上述信息可知

- 形如 $1 \xrightarrow{c} 1$ 的箭头只有一个，即 $!_1 id$ ；
- 形如 $0 \xrightarrow{c} 0$ 的箭头只有一个，即 $!_0 id$ ；

元素与全局元素

对任意对象 $c_1, c'_1, \text{etc}, c_2, c'_2, \text{etc}, c_3$ 及任意的映射 j 我们进行如下的规定：

- j 为 c_2 的**元素**当且仅当 $j \text{ tar} = c_2$ ；
- i 为 c_1 的**全局元素**当且仅当 $j \text{ tar} = c_1$ 且 $j \text{ src} = 1$
- i 不存在仅当 $j \text{ tar} = 0$ 。

Note

其他范畴中刚才的断言未必成立。

02-03 范畴当中的箭头

\LaTeX Definitions are here.

沿用上一节提到的自由变量。我们规定：

- $\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow \mathbf{c}_2} =$
所有从 \mathbf{c}_1 射向 \mathbf{c}_2 的箭头构成的集。

Note

上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
其他范畴里 $\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow \mathbf{c}_2}$ 未必构成集。

范畴 \mathcal{C} 中特定的箭头可以进行复合运算：

- $\overset{\mathcal{C}}{\circ} : (\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow \mathbf{c}_2}) \times (\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_2 \rightarrow \mathbf{c}_3}) \xrightarrow{\text{Set}} (\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow \mathbf{c}_3})$
 $(\overset{\mathcal{C}}{j_1} \cdot \overset{\mathcal{C}}{j_2}) \mapsto (\overset{\mathcal{C}}{j_1 \circ j_2})$

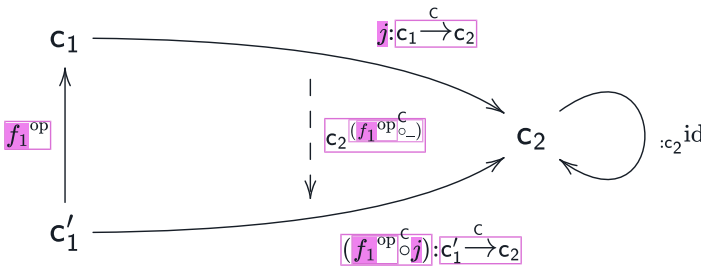
如果我们还知道箭头 f_1, j, f_2 分别属于
 $\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow \mathbf{c}'_1}, \overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow \mathbf{c}_2}, \overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_2 \rightarrow \mathbf{c}'_2}$ 那么便可知

- $(f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} j) \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2 = f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} (j \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2),$
即箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便可获得新的函数：

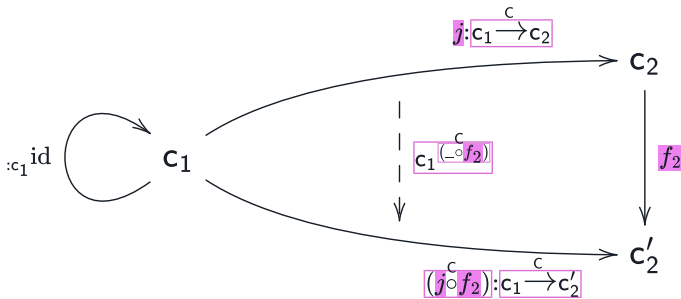
- $(f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} _): (\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow _}) \xrightarrow{\text{Cat} \rightarrow \text{Set}} (\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}'_1 \rightarrow _})$
 $j \mapsto (\overset{\mathcal{C}}{f_1^{\text{op}} \circ j})$

称作**前复合**。下图有助于形象理解：



- $(_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2): (\overset{\mathcal{C}}{_ \rightarrow \mathbf{c}_2}) \xrightarrow{\text{Cat} \rightarrow \text{Set}} (\overset{\mathcal{C}}{_ \rightarrow \mathbf{c}'_2})$
 $j \mapsto (\overset{\mathcal{C}}{j \circ f_2})$

称作**后复合**。下图有助于形象理解：



根据上面的定义不难得出下述结论：

- $(f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) \overset{\text{???}}{\circ} (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) = (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) \overset{\text{???}}{\circ} (f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)$
复合运算具有**结合律**，即后面提到的**自然性**；
- $(_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} j) \overset{\text{Cat} \rightarrow \text{Set}}{\circ} (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) = (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} (j \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2))$
前复合与复合运算的关系
- $(j \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) \overset{\text{Cat} \rightarrow \text{Set}}{\circ} (f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) = ((f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} j) \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)$
后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。

假如 a_1 为 \mathbf{c}_1 的全局元素则可规定

- $\mathbf{c}_1 j = \mathbf{c}_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} j$

恒等箭头

范畴 \mathbf{C} 内的每个对象都有恒等映射：

- $\text{id}_{c_1} : c_1 \rightarrow c_1$
 $c_1 \mapsto c_1$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- $\text{id}_{c_1} \circ j = j$
 $= j \circ \text{id}_{c_2}$

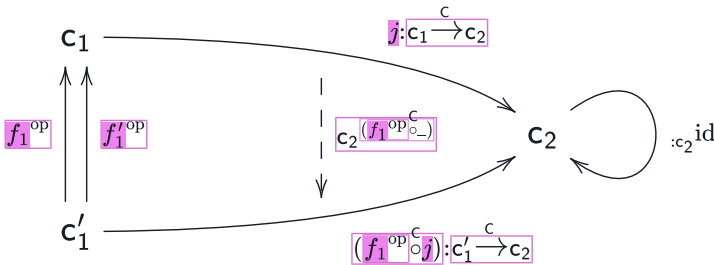
此外还可以得知

- $(\text{id}_{c_1} \circ -) : (c_1 \rightarrow -) \xrightarrow{\text{Cat}} (c_1 \rightarrow -)$
为恒等自然变换，可记成是 $(\text{id}_{c_1} \circ -)$ ；
- $(- \circ \text{id}_{c_2}) : (- \rightarrow c_2) \xrightarrow{\text{Cat}} (- \rightarrow c_2)$
为恒等自然变换，可记成是 $(- \circ \text{id}_{c_2})$ 。

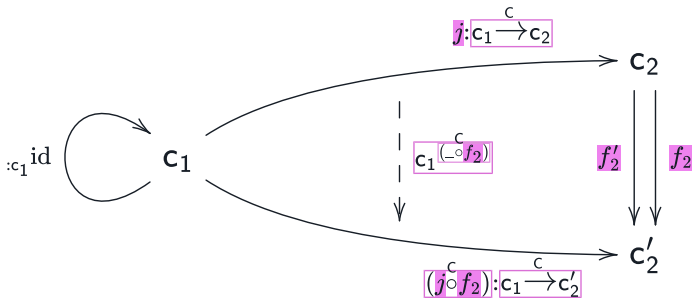
单满态以及同构

接下来给出单 / 满态和同构的定义。

- j 为**单态**当且仅当对任意 c'_1
若有 $f_1, f'_1 : c_1 \rightarrow c'_1$ 满足 $f_1 \circ j = f'_1 \circ j$
则有 $f_1 = f'_1$ 。详情见下图：



- j 为**满态**当且仅当对任意 c'_2
若有 $f_2, f'_2 : c_2 \rightarrow c'_2$ 满足 $j \circ f_2 = j \circ f'_2$
则有 $f_2 = f'_2$ 。详情见下图：



- i 为**同构**当且仅当存在 $j' : c_2 \rightarrow c_1$
使得 $j \circ j' = \text{id}_{c_1}$ 且 $j' \circ j = \text{id}_{c_2}$ 。
此时 c_1, c_2 间的关系可记作 $c_1 \cong c_2$ 。

若还知道 $j = j_1$ 且 $j_2 : c_2 \rightarrow c_3$ 则有

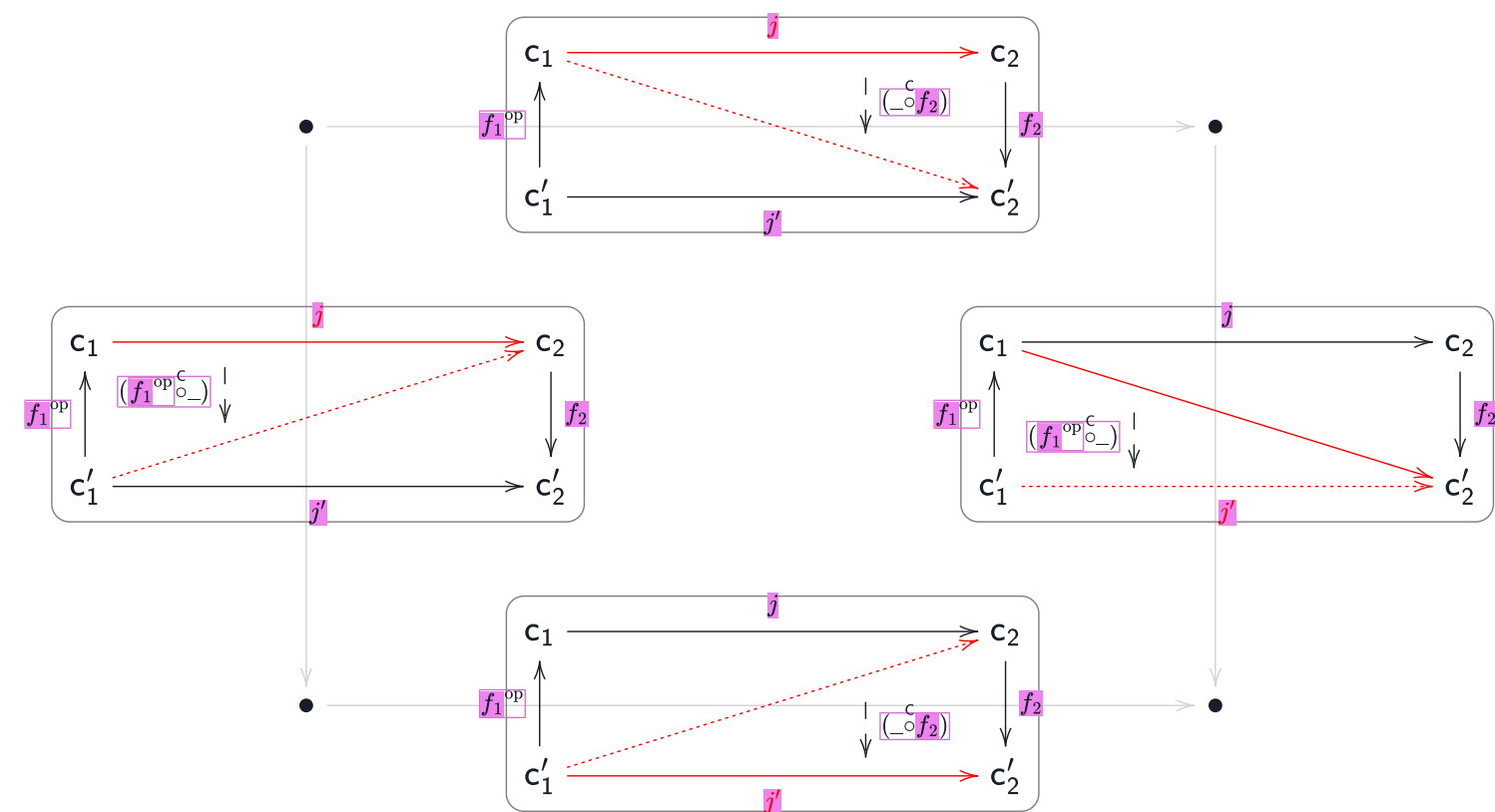
- 若 j_1, j_2 为单态 / 满态 / 同构
则 $j_1 \circ j_2$ 为单态 / 满态 / 同构；
- 若 $j_1 \circ j_2$ 为同构
且 j_1, j_2 中有一个为同构
则 j_1, j_2 两者皆构成同构。

不仅如此我们还可以得出下述结论：

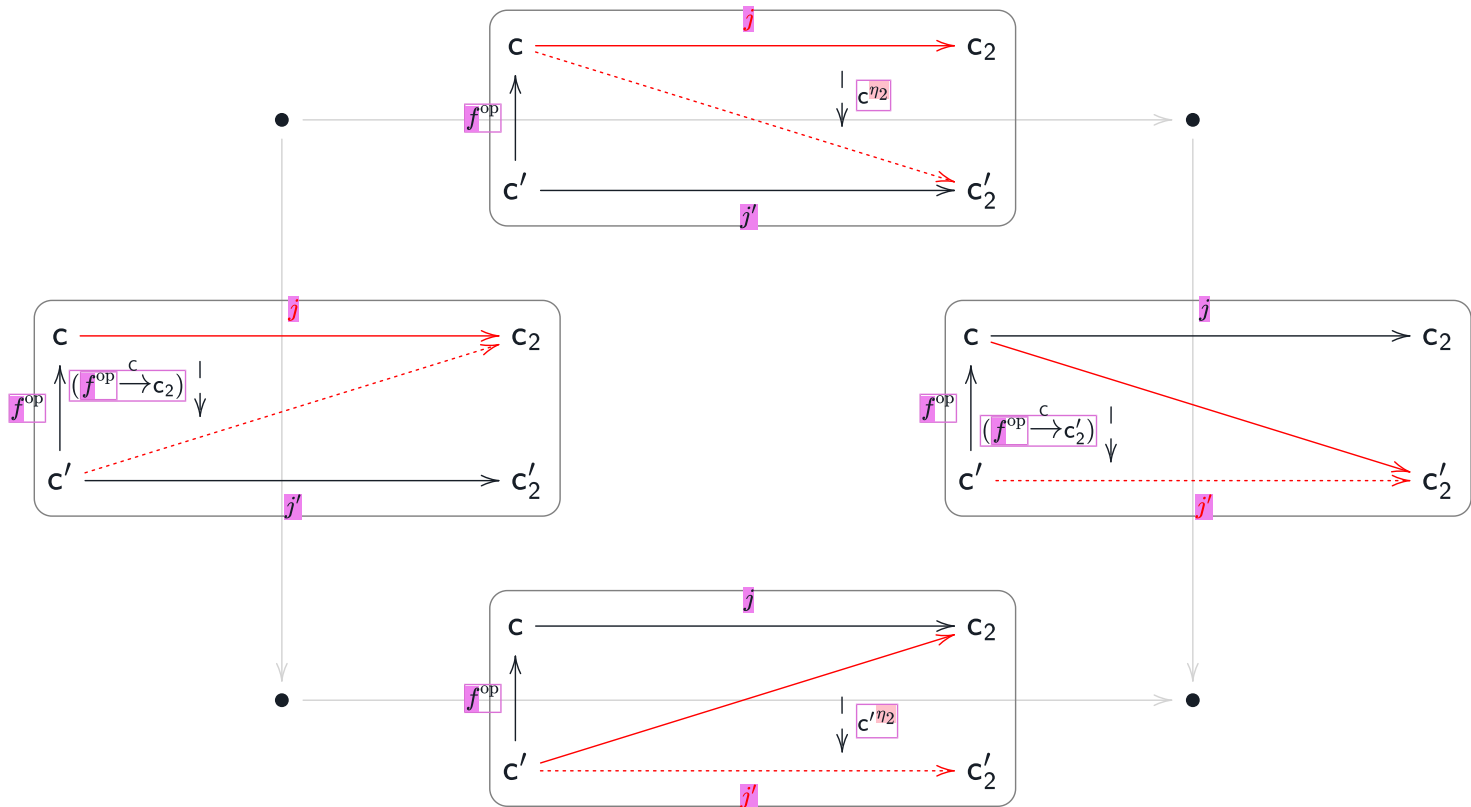
- c_1 为单态，
由 id_{c_1} 的唯一性可知；
- $\text{id}_0 = \text{id}_1$ 为同构，
因为 $0 \rightarrow 0 = \{\text{id}_0\}$
并且 $1 \rightarrow 1 = \{\text{id}_1\}$

同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释。
后面会将自然性进行进一步推广。



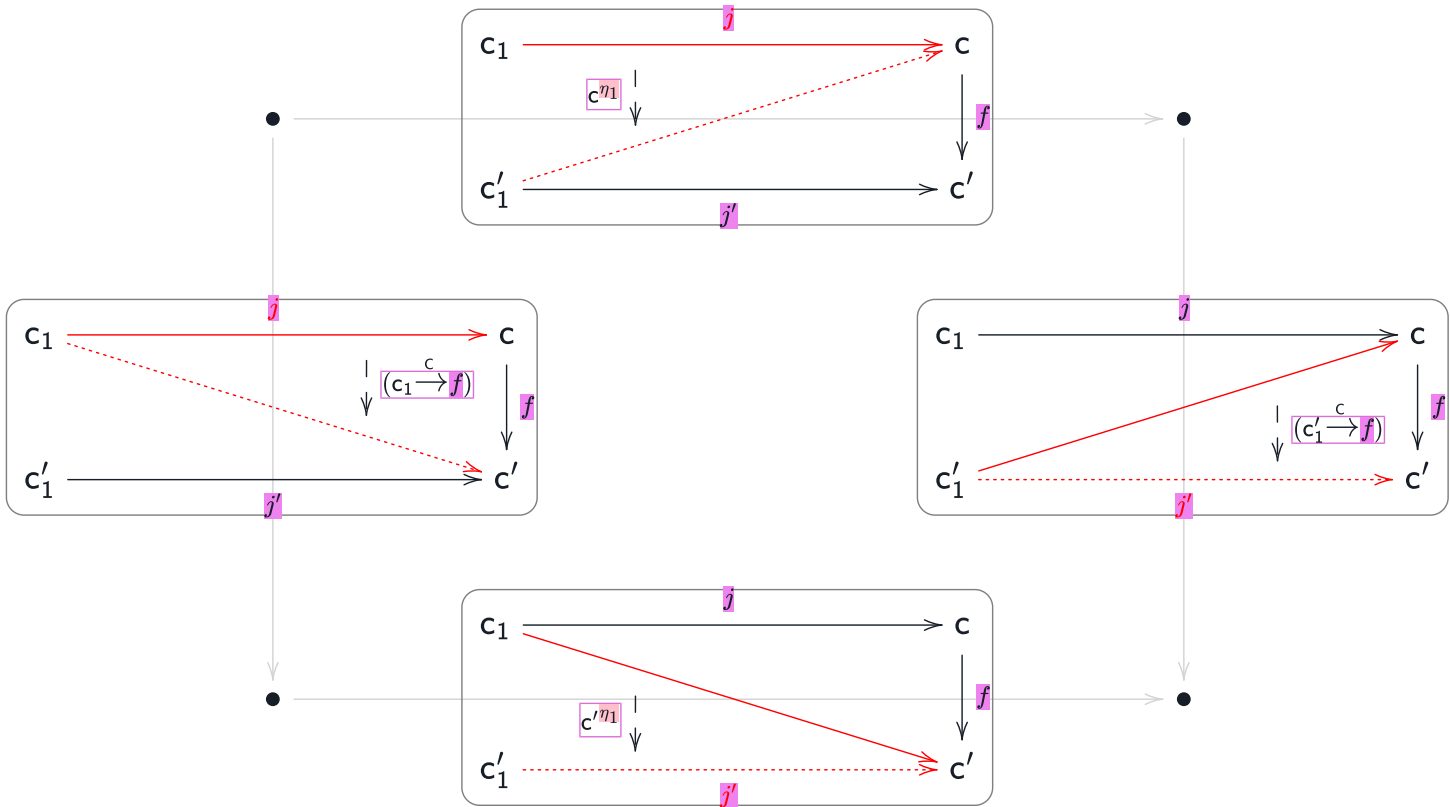
现提供自然变换 η_2 满足自然性 —— 即对任意 \mathcal{C} 中对象 c, c' 以及任意 \mathcal{C} 中映射 $f: c \rightarrow c'$ 都有 $(f^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2) \circ^{\text{Set}} c' \eta_2 = c \eta_2 \circ^{\text{Set}} (f^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} c'_2)$:



那么我们便会有下述结论：

- $c_2 \cong c'_2$ 当且仅当对任意 \mathcal{C} 中的对象 c $c \eta_2$ 都是同构。此时称 η_2 为**自然同构**。

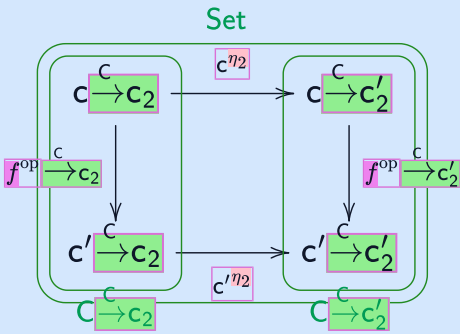
现提供自然变换 η_1 满足自然性 —— 即对任意 \mathcal{C} 中对象 c, c' 以及任意 \mathcal{C} 中映射 $f: c \rightarrow c'$ 都有 $(c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} f) \circ^{\text{Set}} c' \eta_1 = c \eta_1 \circ^{\text{Set}} (c'_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} f)$:



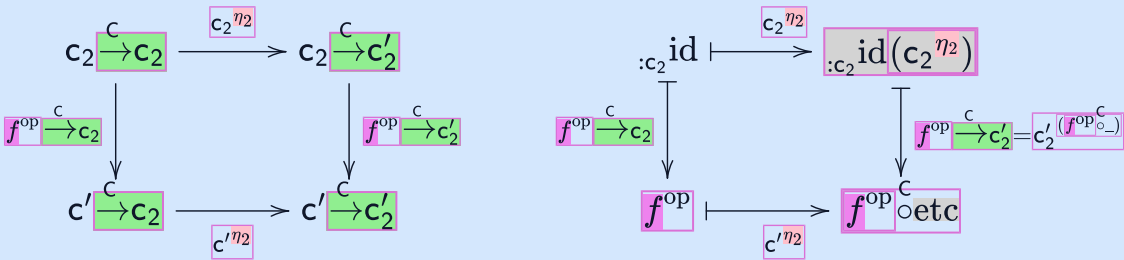
那么我们便会有下述结论：

- $c_1 \cong c'_1$ 当且仅当对任意 \mathcal{C} 中的对象 c $c \eta_1$ 都是同构。此时称 η_1 为**自然同构**。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为



⇒ 易证, ⇐ 用到了米田技巧 将 c 换成 c₂ :

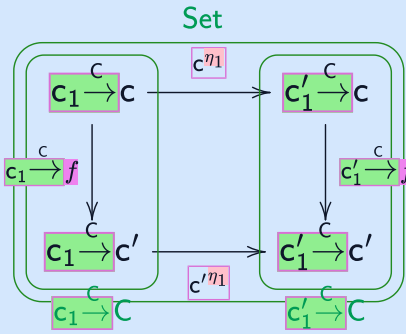


为了方便就用 etc 表示 $_{:c_2} \text{id}(c_2^{\eta_2})$ 。由上图知 $f^{\text{op}}(c'^{\eta_2}) = (f^{\text{op}} \circ_{\text{etc}}^c)$ (见右图底部和右侧箭头), 故 $c'^{\eta_2} = c' \xrightarrow{c} \text{etc}$ (注意到箭头 $f^{\text{op}} : c' \xrightarrow{c^{\text{op}}} c_2$); 而 $c'^{\eta_2} = c' \xrightarrow{c} \text{etc} = c' \xrightarrow{c} (\text{etc} \circ_{\text{etc}}^c)$ 始终是同构 故 $\text{etc} : c_2 \xrightarrow{c} c'_2$ 也是同构。

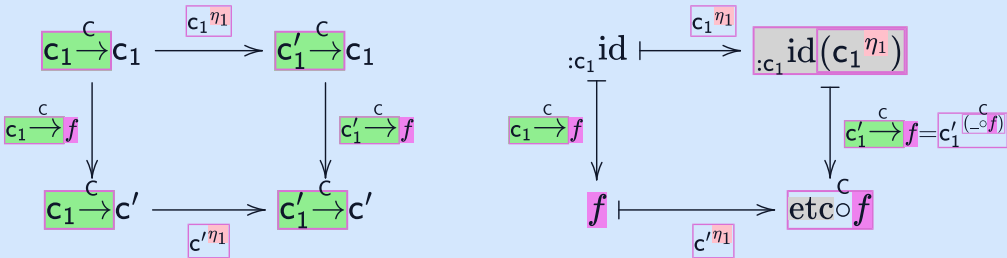
Note

高亮部分省去了部分推理过程, 具体在米田嵌入处会详细介绍。

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为



⇒ 易证, ⇐ 用到了米田技巧 将 c 换成 c₁ :



为了方便就用 etc 表示 $_{:c_1} \text{id}(c_1^{\eta_1})$ 。由上图知 $f(c'^{\eta_1}) = (\text{etc} \circ_{\text{etc}}^c f)$ (见右图底部和右侧箭头), 故 $c'^{\eta_1} = \text{etc} \xrightarrow{c} c'$ (注意到箭头 $f : c_1 \xrightarrow{c} c'$); 而 $c'^{\eta_1} = \text{etc} \xrightarrow{c} c' = c' \xrightarrow{c} (\text{etc} \circ_{\text{etc}}^c)$ 始终是同构 故 $\text{etc} : c_1 \xrightarrow{c} c'_1$ 也是同构。

Note

高亮部分省去了部分推理过程, 具体在米田嵌入处会详细介绍。

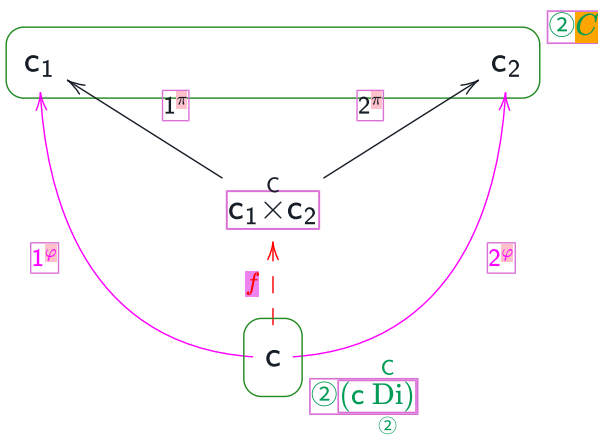
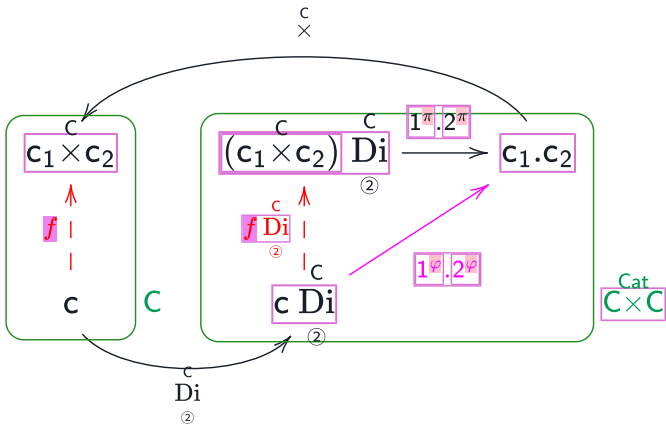
04-05 类型的和与积

L^AT_EX Definitions are here.

泛性质

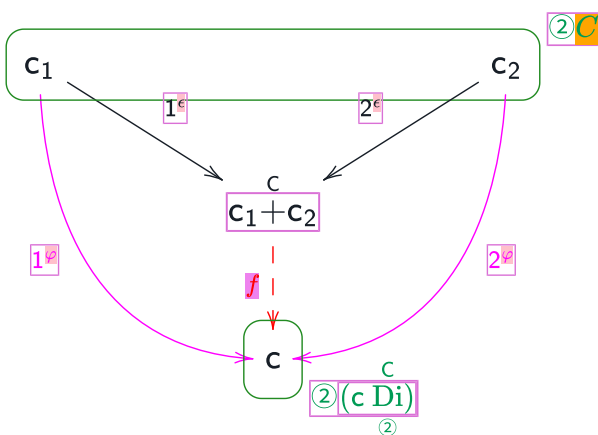
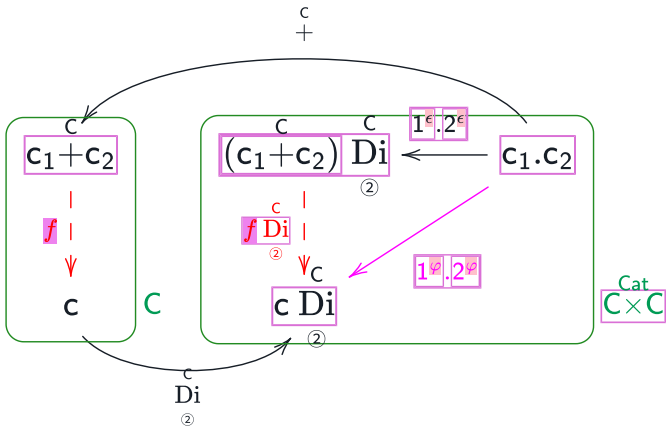
默认函子 $\overset{C}{\times} : (\overset{Cat}{C} \times \overset{Cat}{C}) \overset{Cat}{\longrightarrow} \overset{Cat}{C}$ 在范畴 C 中有如下性质：

- $(\overset{C}{c} \rightarrow \overset{C}{c_1}) \overset{Set}{\times} (\overset{C}{c} \rightarrow \overset{C}{c_2}) \overset{Set}{\cong} \overset{C}{c} \rightarrow (\overset{C}{c_1} \times \overset{C}{c_2})$
—— c 为任意 C 中对象。此即为积的泛性质，亦为指数对乘法的分配律。



默认函子 $\overset{C}{+} : (\overset{Cat}{C} \times \overset{Cat}{C}) \overset{Cat}{\longrightarrow} \overset{Cat}{C}$ 在范畴 C 中有如下性质：

- $(\overset{C}{c_1} \rightarrow \overset{C}{c}) \overset{Set}{\times} (\overset{C}{c_2} \rightarrow \overset{C}{c}) \overset{Set}{\cong} (\overset{C}{c_1} + \overset{C}{c_2}) \rightarrow \overset{C}{c}$
—— c 为任意 C 中对象。此即为和的泛性质，亦为指数对加法的分配律。



Note

在上面的插图中

- $\overset{C}{Di} : \overset{Cat}{C} \overset{Cat}{\longrightarrow} (\overset{Cat}{C} \times \overset{Cat}{C})$ 为对角函子满足
 $\overset{2}{c} \mapsto (\overset{C}{c}, \overset{C}{c})$
- $\overset{C}{Di} : \overset{Cat}{C} \overset{Cat}{\longrightarrow} (\overset{2}{2} \rightarrow \overset{Cat}{C})$
 $\overset{2}{c} \mapsto$ 常值函子
 $\overset{C}{c Di} : \overset{2}{2} \overset{Cat}{\longrightarrow} \overset{Cat}{C}$
 $\overset{2}{1} \mapsto \overset{C}{c}$
 $\overset{2}{2} \mapsto \overset{C}{c}$
 $\overset{2}{f} \mapsto \overset{C}{c} id$

即为对角函子的第二种等价的定义。

$\overset{2}{2}$ 为仅含两个对象的范畴，在此则作为一个指标范畴。 $\overset{2}{1}$ 和 $\overset{2}{2}$ 分别为其中的对象。

- $\overset{Cat}{C} : \overset{2}{2} \overset{Cat}{\longrightarrow} \overset{Cat}{C}$ 为函子，满足
 $\overset{2}{1} \mapsto \overset{C}{c_1}$
 $\overset{2}{2} \mapsto \overset{C}{c_2}$

- 不难看出上图中

$$\overset{C}{\pi} : (\overset{C}{c_1} \times \overset{C}{c_2}) \overset{Cat}{Di} \overset{Cat}{\longrightarrow} \overset{Cat}{C}$$

$$\overset{C}{\epsilon} : \overset{Cat}{C} \overset{Cat}{\longrightarrow} (\overset{2}{2} \rightarrow \overset{Cat}{C}) \overset{Cat}{Di}$$

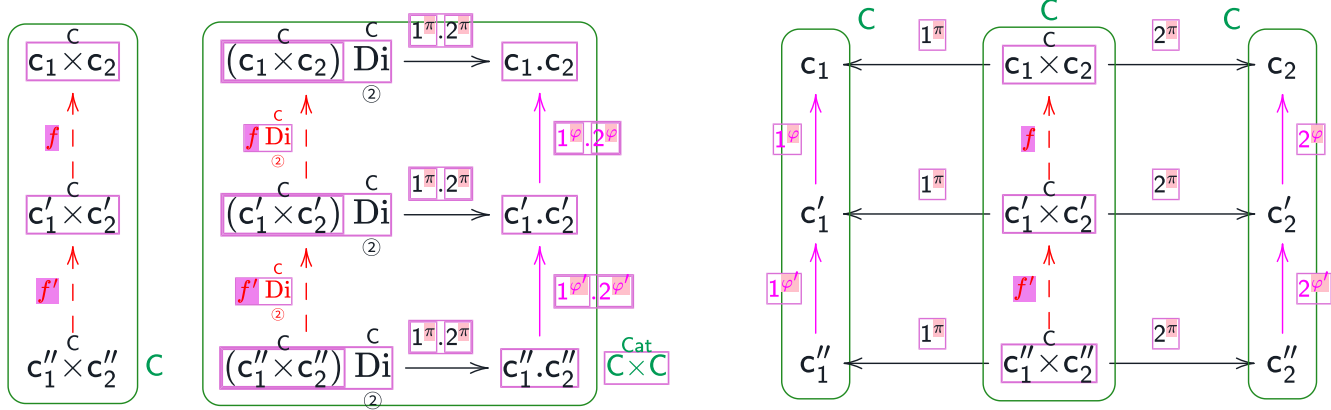
都构成自然变换。 $\overset{2}{1} \overset{2}{\pi} \cdot \overset{2}{2} \overset{2}{\pi}$ 和 $\overset{2}{1} \overset{2}{\epsilon} \cdot \overset{2}{2} \overset{2}{\epsilon}$ 可分别视作为 $\overset{2}{\pi}$ 和 $\overset{2}{\epsilon}$ 。

函子性

如何证明 $\overset{C}{\times}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{C}{\times} : (\overset{C}{:c_1} \text{id} . \overset{C}{:c_2'} \text{id}) \mapsto \overset{C}{:(c_1^C \times c_2') \text{id}}$
—— 即函子 $\overset{C}{\times}$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{C}{\times} : (\overset{C}{1^{\varphi'}} \overset{C}{\circ} \overset{C}{1^{\varphi}} . \overset{C}{2^{\varphi'}} \overset{C}{\circ} \overset{C}{2^{\varphi}}) \mapsto (\overset{C}{f'} \overset{C}{\circ} \overset{C}{f})$
—— 即函子 $\overset{C}{\times}$ 保持**箭头复合运算**。

下图有助于形象理解证明的过程：



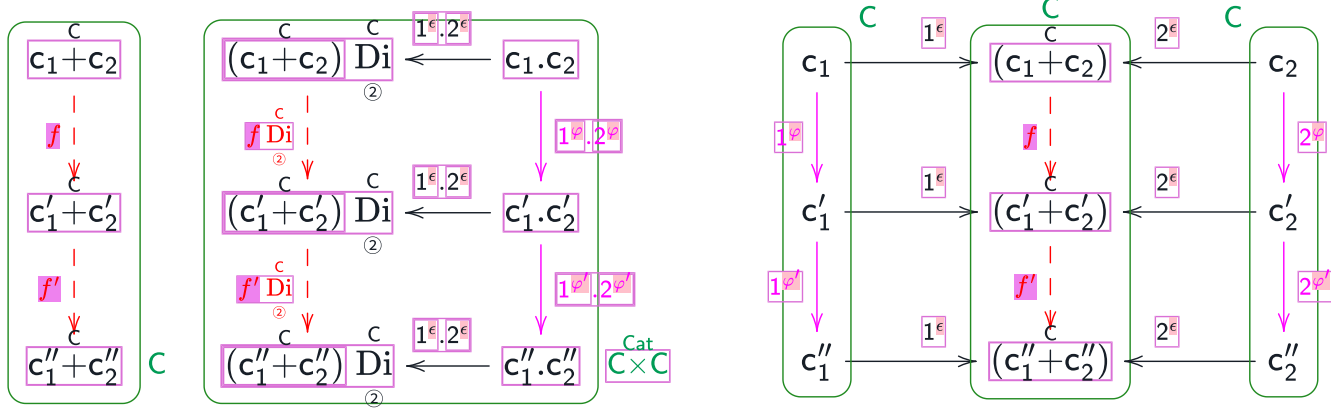
另外我们规定 $\overset{C}{\times}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{C}{\times} : (\overset{C}{1^{\varphi}} . c_2) \mapsto (\overset{C}{1^{\varphi}} \overset{C}{\times} \overset{C}{:c_2} \text{id})$
- $\overset{C}{\times} : (c_1 . \overset{C}{2^{\varphi}}) \mapsto (\overset{C}{:c_1} \text{id} \overset{C}{\times} \overset{C}{2^{\varphi}})$

如何证明 $\overset{C}{+}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{C}{+} : (\overset{C}{:c_1} \text{id} . \overset{C}{:c_2'} \text{id}) \mapsto \overset{C}{:(c_1 + c_2') \text{id}}$
—— 即函子 $\overset{C}{+}$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{C}{+} : (\overset{C}{1^{\varphi}} \overset{C}{\circ} \overset{C}{1^{\varphi'}} . \overset{C}{2^{\varphi}} \overset{C}{\circ} \overset{C}{2^{\varphi'}}) \mapsto (\overset{C}{f} \overset{C}{\circ} \overset{C}{f'})$
—— 即函子 $\overset{C}{+}$ 保持**箭头复合运算**。

下图有助于形象理解证明的过程：



另外我们规定 $\overset{C}{+}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

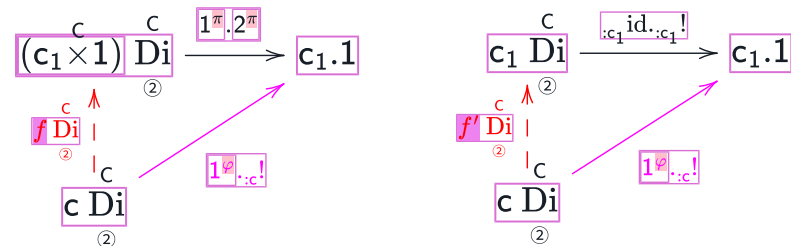
- $\overset{C}{+} : (\overset{C}{1^{\varphi}} . c_2) \mapsto (\overset{C}{1^{\varphi}} \overset{C}{+} \overset{C}{:c_2} \text{id})$
- $\overset{C}{+} : (c_1 . \overset{C}{2^{\varphi}}) \mapsto (\overset{C}{:c_1} \text{id} \overset{C}{+} \overset{C}{2^{\varphi}})$

运算性质

对于函子 \times 我们不难得知

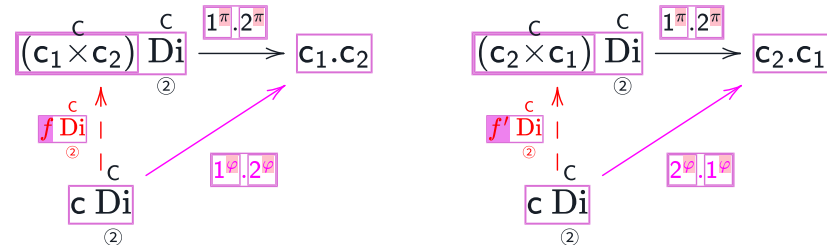
- $c_1 \times 1 \cong c_1 \times 1 \cong c_1$
—— 乘法具有**幺元 1**。

下图有助于理解证明目标，即 $1^\varphi \cdot \cdot c!$ 能唯一决定 f 和 f' 。



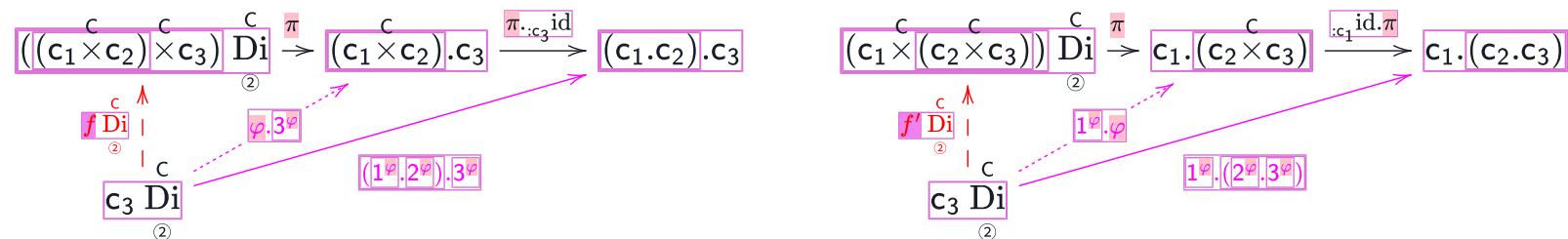
- $c_1 \times c_2 \cong c_2 \times c_1$
—— 乘法具有**交换律**。

下图有助于理解证明目标，即 $1^\varphi \cdot 2^\varphi$ 能唯一决定 f 和 f' 。



- $(c_1 \times c_2) \times c_3 \cong c_1 \times (c_2 \times c_3)$
—— 乘法具有**结合律**。

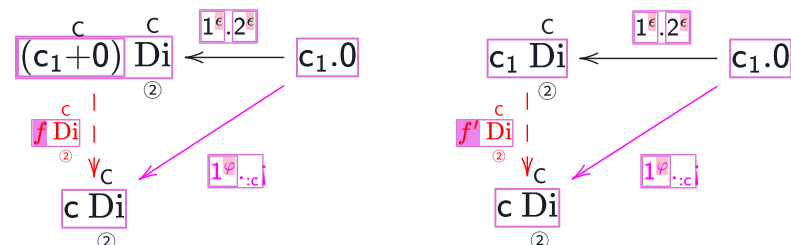
下图有助于理解证明目标，即 $(1^\varphi \cdot 2^\varphi) \cdot 3^\varphi$ 唯一决定 f 和 f' 。



对于函子 $+$ 我们不难得知

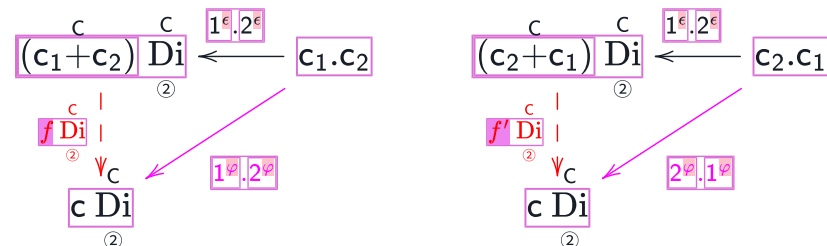
- $c_1 + 0 \cong c_1 + 1 \cong c_1$
—— 加法具有**幺元 0**。

下图有助于理解证明目标，即 $1^\varphi \cdot \cdot c$ 能唯一决定 f 和 f' 。



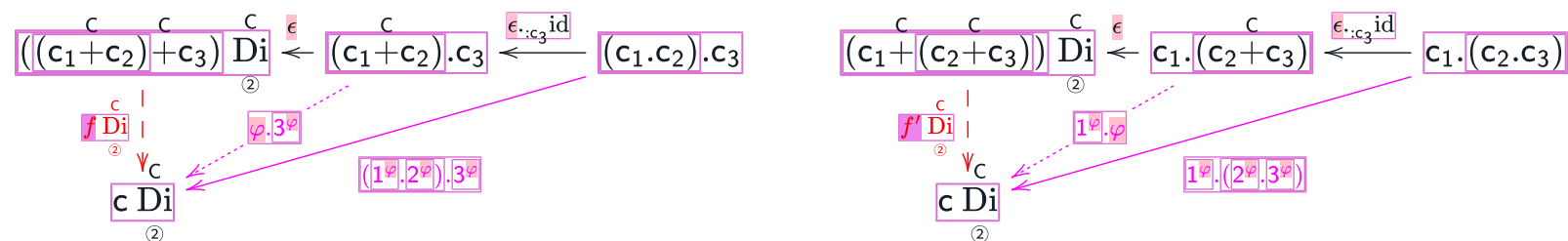
- $c_1 + c_2 \cong c_2 + c_1$
—— 加法具有**交换律**。

下图有助于理解证明目标，即 $1^\varphi \cdot 2^\varphi$ 能唯一决定 f 和 f' 。



- $(c_1 + c_2) + c_3 \cong c_1 + (c_2 + c_3)$
—— 加法具有**结合律**。

下图有助于理解证明目标，即 $(1^\varphi \cdot 2^\varphi) \cdot 3^\varphi$ 唯一决定 f 和 f' 。



么半范畴

像刚才这样对象运算具有**单位元**以及**结合律**的范畴称作**么半范畴**；

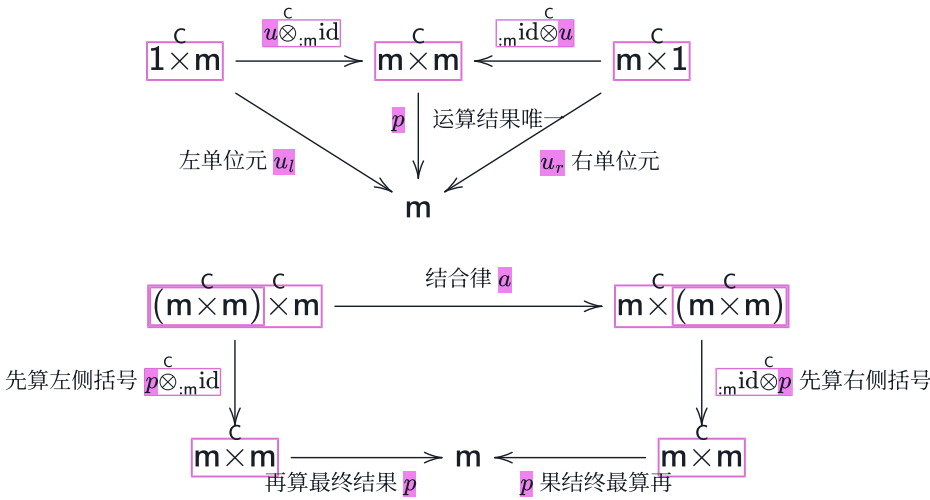
若上述范畴还具有**交换律**则称作**对称么半范畴**；

很明显我们的范畴 C 是典型的**对称么半范畴**。

么半群

什么是么半群呢？有两种定义方式：

- **么半群** M 是个范畴，其只含一个对象 m；其中的复合运算正好有单位元以及结合律。
- 对象 m 属于么半范畴 C，满足下述交换图：



其中

- $u : 1 \rightarrow m$ 其实就是 m 里面的么元
- $u_l : (1 \times m) \rightarrow m$ 表示 u 构成左么元
- $u_r : (m \times 1) \rightarrow m$ 表示 u 构成右么元
- $p : (m \times m) \rightarrow m$ 即为 m 中的二元运算
- $a : (m \times m) \times m \rightarrow m \times (m \times m)$ 表示 m 具有结合律

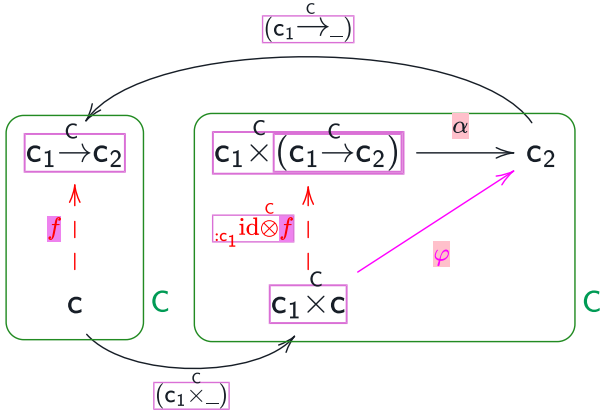
06 类型的幂

L^AT_EX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} : ((\overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}}^{\text{op}} \times \overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}}) \overset{\text{Cat}}{\longrightarrow} \overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}})$ 在范畴 \mathcal{C} 中有下述性质：

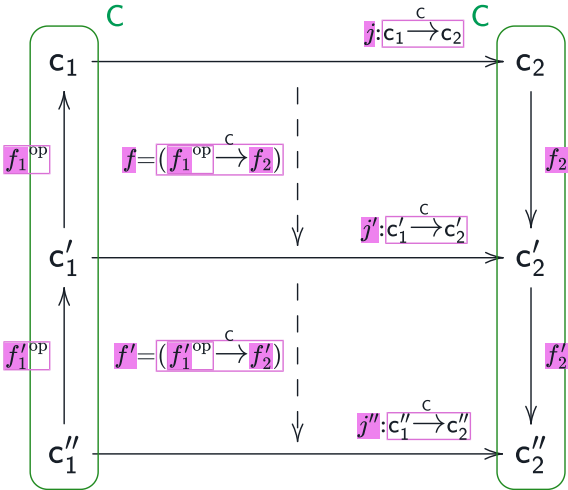
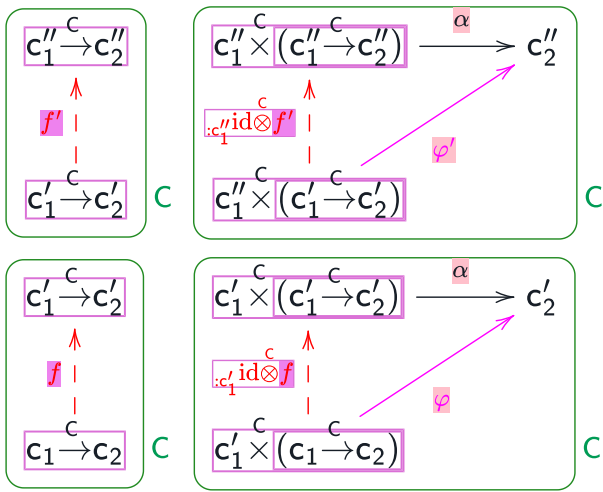
- $(\overset{\mathcal{C}}{c_1} \times \overset{\mathcal{C}}{c}) \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \overset{\mathcal{C}}{c_2} \cong \overset{\text{Set}}{c} \rightarrow (\overset{\mathcal{C}}{c_1} \rightarrow \overset{\mathcal{C}}{c_2}) \cong \overset{\text{Set}}{c_1} \rightarrow (\overset{\mathcal{C}}{c} \rightarrow \overset{\mathcal{C}}{c_2})$
—— c 为任意 \mathcal{C} 中对象。此即为幂的泛性质，亦表示了指数与乘法之间的运算关系。



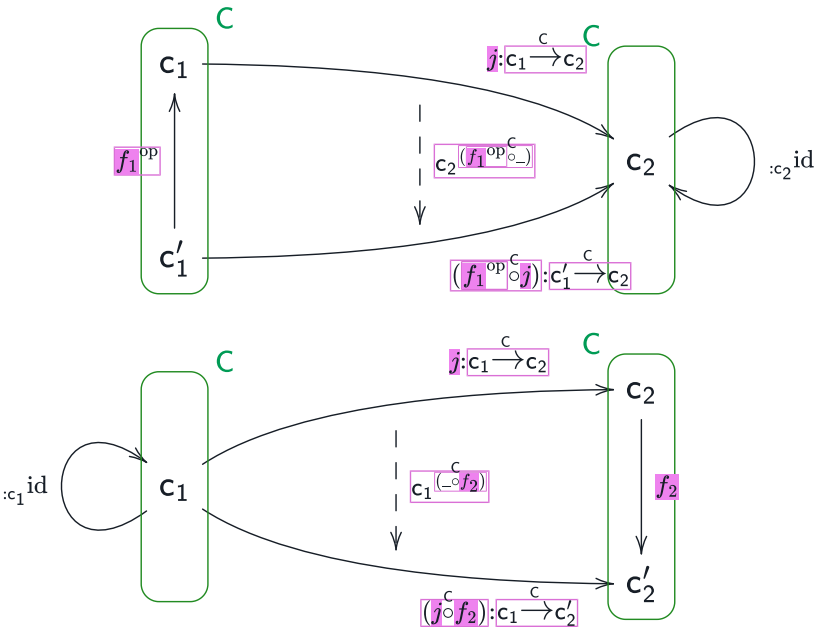
函子性

如何证明 $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} : (:\overset{\mathcal{C}}{c_1} \text{id} . : \overset{\mathcal{C}}{c_2} \text{id}) \mapsto :(\overset{\mathcal{C}}{c_1} \rightarrow \overset{\mathcal{C}}{c_2}) \text{id}$
—— 即函子 \rightarrow 能保持恒等箭头；
 - $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} : ((f_1 \circ f'_1) . f_2 \circ f'_2) \mapsto (f \circ f')$
—— 即函子 \rightarrow 保持箭头复合运算。
- 下图有助于形象理解证明过程：



下图（自上到下分别为图 1 和图 2）后面会用到。



范畴 \mathcal{C} 内任意两对象 c_1 和 c_2 间的箭头构成一个集合 $c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2$,
 说明 $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ 只能将两个对象打到一个集合 ; 下面使 $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ 升级为函子 :
 若还知道箭头 $f_1^{\text{op}} : c_1' \xrightarrow{\mathcal{C}^{\text{op}}} c_1$ 以及 $f_2 : c_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2'$, 则规定

- $(_ \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{Set}$ 为函子且
 $(_ \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2) : c \mapsto (c \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2)$ 且对任意 $f^{\text{op}} : c' \xrightarrow{\mathcal{C}} c$ 有
 $(_ \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2) : f^{\text{op}} \mapsto (f^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2) = (f^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} \cdot_{c_2} \text{id}) = c_2(f^{\text{op}} \circ _)$

图 1 有助于理解。

$$\begin{aligned} (_ \xrightarrow{\mathcal{C}} f_2) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} &\xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{Set}, \\ (_ \xrightarrow{\mathcal{C}} f_2) : c &\mapsto (c \xrightarrow{\mathcal{C}} f_2) = (\cdot_{c} \text{id} \xrightarrow{\mathcal{C}} f_2) = c_2(_ \circ f_2) \text{ 且对任意 } f^{\text{op}} : c' \xrightarrow{\mathcal{C}^{\text{op}}} c \text{ 有} \\ (_ \xrightarrow{\mathcal{C}} f_2) : f^{\text{op}} &\mapsto (f^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} f_2) = (f^{\text{op}} \circ _ \xrightarrow{\mathcal{C}} _) \circ (_ \xrightarrow{\mathcal{C}} f_2) = (_ \circ f_2) \circ (f^{\text{op}} \circ _) \end{aligned}$$

图 2 有助于理解。

Note

不难看出

- よ : $\mathcal{C} \xrightarrow{\text{Cat}} (\mathcal{C}^{\text{op}} \xrightarrow{\text{Set}} \mathbf{Set})$
 $c_2 \mapsto (c_2 \xrightarrow{\mathcal{C}^{\text{op}}} _)$ 构成一个函子
 $f_2 \mapsto (f_2 \xrightarrow{\mathcal{C}^{\text{op}}} _) = (_ \xrightarrow{\mathcal{C}} f_2) = (_ \circ f_2)$ 构成一个函子间映射 , 即自然变换

该函子称作是**米田嵌入**。

- $(c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} _) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{Set}$ 为函子且
 $(c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} _) : c \mapsto (c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c)$, 且对任意 $f : c \xrightarrow{\mathcal{C}} c'$ 有
 $(c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} _) : f \mapsto (c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} f) = (\cdot_{c_1} \text{id} \xrightarrow{\mathcal{C}} f) = c_1(_ \circ f)$

图 2 有助于理解。

$$\begin{aligned} (f_1^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} _) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} &\xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{Set}, \\ (f_1^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} _) : c &\mapsto (f_1^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} c) = (f_1^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} \cdot_{c} \text{id}) = c(f_1^{\text{op}} \circ _) \text{ 且对任意 } f : c \xrightarrow{\mathcal{C}} c' \text{ 有} \\ (f_1^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} _) : f &\mapsto (f_1^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} f) = (f_1^{\text{op}} \circ _ \xrightarrow{\mathcal{C}} _) \circ (_ \xrightarrow{\mathcal{C}} f) = (_ \circ f) \circ (f_1^{\text{op}} \circ _) \end{aligned}$$

图 1 有助于理解。

Note

不难看出

- 尤 : $\mathcal{C}^{\text{op}} \xrightarrow{\text{Cat}} (\mathcal{C} \xrightarrow{\text{Set}} \mathbf{Set})$
 $c_1 \mapsto (c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} _)$ 构成一个函子
 $f_1^{\text{op}} \mapsto (f_1^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} _) = (f_1^{\text{op}} \circ _ \xrightarrow{\mathcal{C}} _)$ 构成一个函子间映射 , 即自然变换

该函子戏称为**尤达嵌入**。

积闭范畴

这里插个题外话 :

若范畴包含终对象 , 所有类型的积以及指数 , 则可将其称作**积闭范畴** ;

若范畴包含始对象 , 所有类型的和 , 则可将其称作是**余积闭范畴** ;

若范畴满足上述条件 , 则可称作**双积闭范畴**。

很明显我们讨论的范畴 \mathcal{C} 就是**双积闭范畴**。

07 递归类型

LaTeX Definitions are here.

08-09 函子与自然变换

LaTeX Definitions are here.

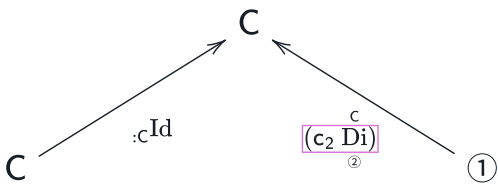
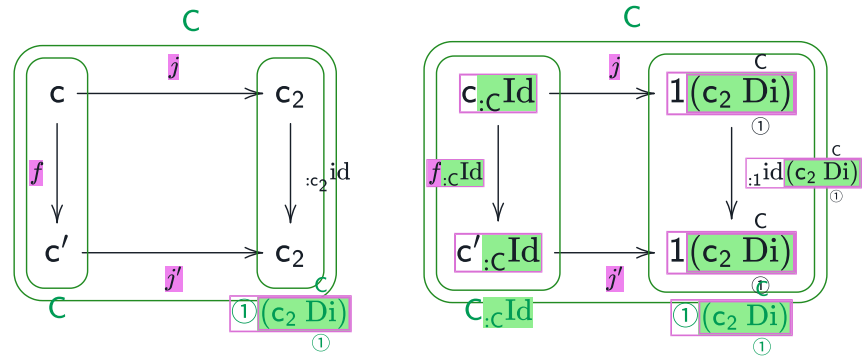
一些特殊的范畴

现在规定几种特殊的范畴。

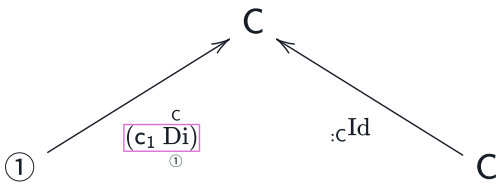
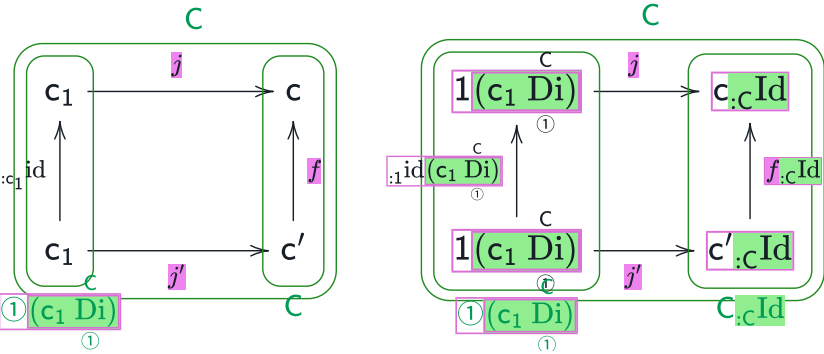
- 离散范畴：只有对象不含箭头（恒等箭头除外）的范畴。
- Set：所有集合构成的范畴，为局部小范畴，满足
 - Set 中对象为任意集合；
 - Set 中箭头为集合间映射。
- Cat：所有范畴构成的范畴，满足
 - Cat 中任何对象都构成一个范畴；
 - Cat 中任何箭头都构成一个函子。

若 C, D 为 Cat 中对象，则：

- C^{op}：反范畴，满足
 - C^{op} 中对象皆形如 c，c 为任意 C 中的对象；
 - C^{op} 中箭头皆形如 j^{op}：c₂ → c₁，j：c₁ → c₂ 可为任意 C 中的箭头。
- C^{Cat} × D^{Cat}：积范畴，满足
 - C^{Cat} × D^{Cat} 中对象皆形如 c · d，c, d 分别为任意 C, D 中的对象；
 - C^{Cat} × D^{Cat} 中箭头皆形如 j · k，j, k 分别为任意 C, D 中的箭头。
- C^{Cat} → D^{Cat}：所有 C 到 D 的函子的范畴，满足
 - C^{Cat} → D^{Cat} 中任何对象都是 C 到 D 的函子；
 - C^{Cat} → D^{Cat} 中任何箭头都是函子间自然变换。
- C/c：俯范畴，这里 c 为任意 C 中对象；满足
 - C/c₂ 中对象皆形如 ~~c · 1~~ · j，其中 c 和 j：c → c₂ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
 - c₂/C 中箭头皆形如 ~~f · id~~ · c₂ 且满足下述交换图，其中 c, c' 为 C 中任意对象且 f, j, j' 为 C 中任意箭头；**TODO**



- c₁/C：仰范畴，这里 c 为任意 C 中对象；满足
 - c₁/C 中对象皆形如 ~~1 · c~~ · j，其中 c 和 j：c₁ → c 分别为 C 中任意的对象和箭头；
 - C/c₁ 中箭头皆形如 ~~id · f~~ · c₁ 且满足下述交换图，其中 c, c' 为 C 中任意对象且 f, j, j' 为 C 中任意箭头；**TODO**



函子

接下来我们来提供函子的正式定义：

- $F : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{D}$ 为**函子**当且仅当
 - 对任意 \mathbf{C} 中对象 c , cF 为 \mathbf{D} 中对象且 $_{c}\text{id}F = _{cF}\text{id}$;
 - 对任意 \mathbf{C} 中箭头 $j_1 : c_1 \xrightarrow{c} c_2$ 和 $j_2 : c_2 \xrightarrow{c} c_3$, 始终都有等式 $(j_1 \circ j_2)F = j_1F \circ j_2F$ 成立。

若已确信 $F : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{D}$ 为函子且
还知 \mathbf{C} 中有对象 c_1, c_2
以及 \mathbf{C} 中有箭头 $j : c_1 \xrightarrow{c} c_2$ 则

- 若 j 为单态 / 满态 / 同构
则 jF 为单态 / 满态 / 同构；
- 若 jF 为同构
则 j 为同构。

i

Note

不难发现函子具有保持
对象 / 态射性质的能力。

函子的复合运算

若还知道 $G : \mathbf{D} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{E}$ 为函子则

- $F \circ G : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{E}$
也构成一个函子。

恒等函子

对于函子我们也有恒等映射，即：

- $_{c}\text{Id} \circ F = F$
 $= F \circ _{D}\text{Id}$

忠实，完全和本质满函子

若 $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$ 皆为**局部小范畴**，则

- F 是**忠实的**当且仅当对任意 \mathbf{C} 中的对象 c_1, c_2 , $c_1 \xrightarrow{c} c_2$ 与 $c_1F \xrightarrow{D} c_2F$ 之间始终都存在单射；
- F 是**完全的**当且仅当对任意 \mathbf{C} 中的对象 c_1, c_2 , $c_1 \xrightarrow{c} c_2$ 与 $c_1F \xrightarrow{D} c_2F$ 之间始终都存在满射；
- F 是**完全忠实的**当且仅当任意 \mathbf{C} 中对象 c_1, c_2 , $c_1 \xrightarrow{c} c_2$ 与 $c_1F \xrightarrow{D} c_2F$ 之间始终都存在双射。

i

Note

刚才提到的“单 / 满 / 双射”
针对的都是范畴的箭头部分。

- F 是**本质满的**当且仅当对任意 \mathbf{D} 中对象 d
都存在 \mathbf{C} 中对象 c 使 $cF \xrightarrow{D} d$ 之间有双射。

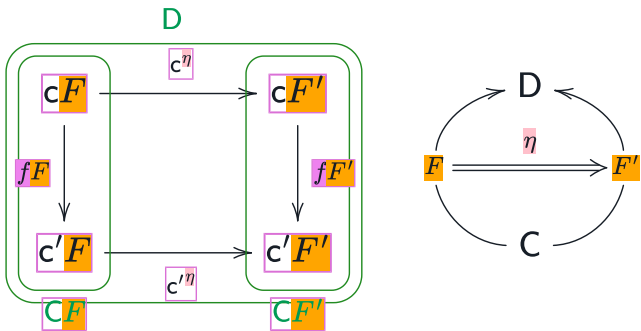
根据刚才的信息我们不难得知

- 若 F, G 为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满函子
则 $F \circ G$ 为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满 函子；
- 若 $F \circ G$ 为完全忠实函子
且知道 G 为完全忠实函子
则可知 F 为完全忠实函子；

自然变换

如果还知道 $F' : \overset{\text{Cat}}{\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{D}}$ 为函子，那么

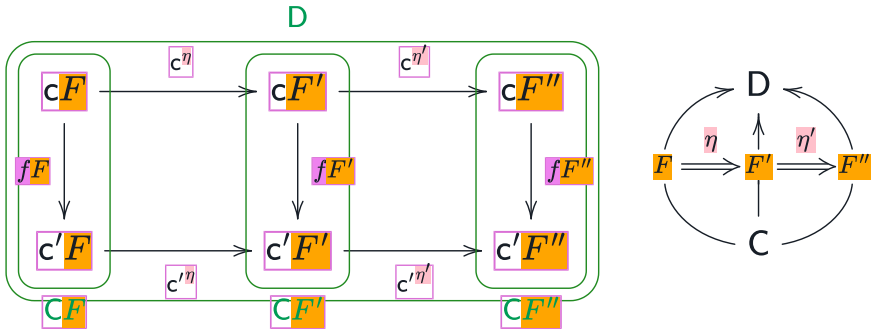
- $\eta : F \Rightarrow F'$ 为自然变换当且仅当对任意 \mathbf{C} 中对象 c, c' 始终都会有下述交换图成立：



自然变换的复合

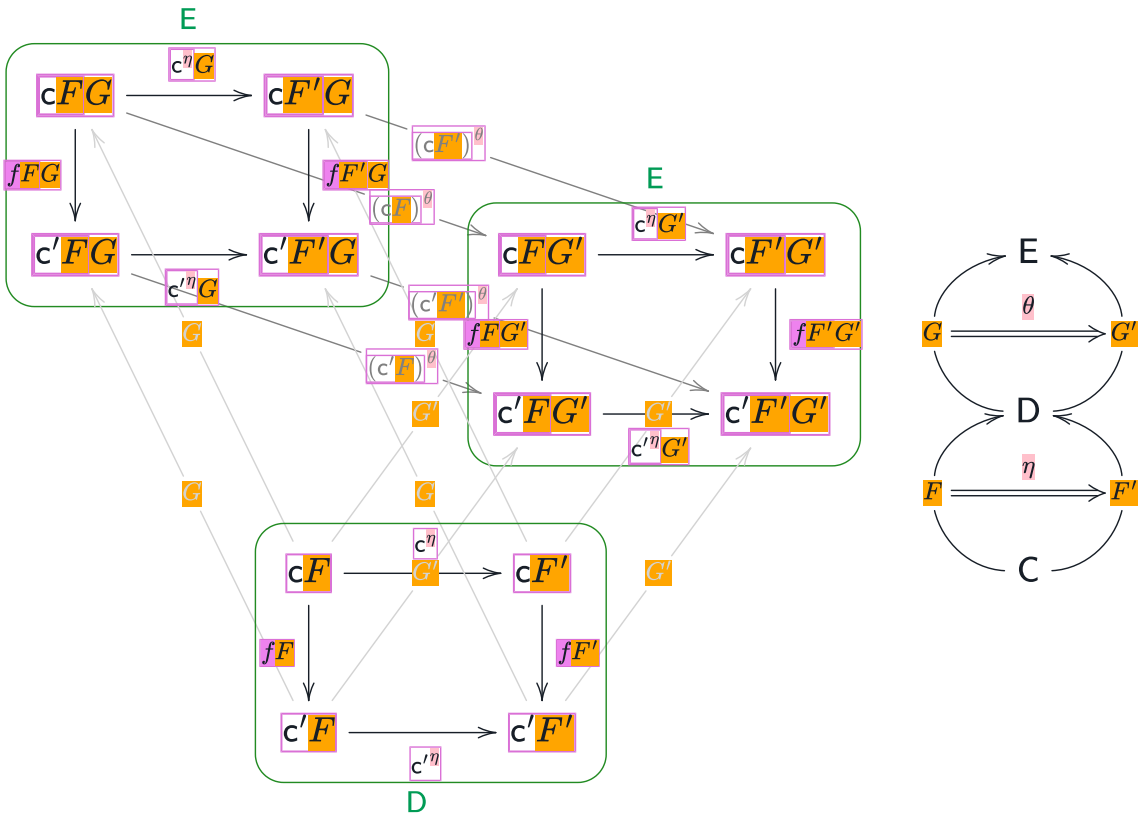
若已知 $\eta : F \Rightarrow F'$ 构成自然变换且
还知道 $\eta' : F' \Rightarrow F''$ 为自然变换则

- $\eta \circ \eta' : F \Rightarrow F''$ 为自然变换，
称作 η 和 η' 的**纵复合**。



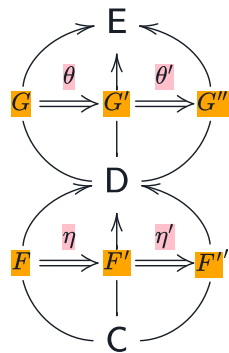
如果还知道 $G' : \overset{\text{Cat}}{\mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{E}}$ 也是个函子
及自然变换 $\theta : G \Rightarrow G'$ 那么便有

- $\eta \circ \theta : F \circ G \Rightarrow F' \circ G'$ 为
自然变换，称作 η 和 θ 的**横复合**。



若 $\theta' : G \Rightarrow G'$ 为自然变换则

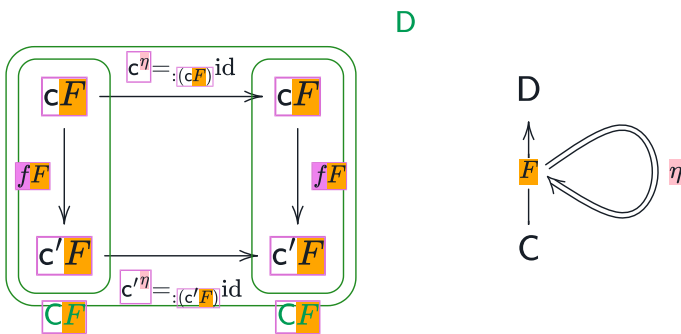
- $(\eta \circ \theta) \circ (\eta' \circ \theta') = (\eta \circ \eta') \circ (\theta \circ \theta')$ ，
即便改变纵横复合先后顺序也不影响最终结果。



恒等自然变换

同样对于自然变换也有恒等映射。

- $\eta: F \rightarrow F$ 为恒等自然变换当且仅当对范畴 C 中任意对象 c 都有下述交换图成立：



自然同构

自然同构与你想象中的同构不太像。

- $\eta: F \rightarrow F'$ 为**自然同构**当且仅当 $c\eta$ 总是同构，这里 c 为任意 C 中对象。此时 F, F' 的关系可用 $F \cong F'$ 表示

范畴等价的定义

我们用自然同构来定义范畴的等价。

- $C \cong D$ 当且仅当存在函子 $F: C \rightarrow D$ 及 $F': D \rightarrow C$ 使 $F \circ F' \cong id$ 并且有 $F' \circ F \cong id$ 。

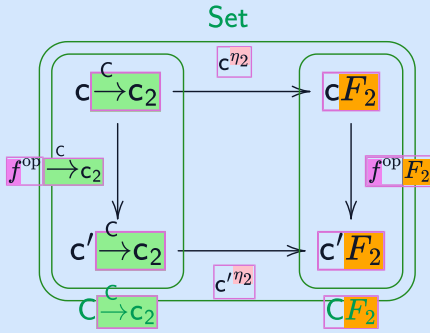
反协变米田引理

若知 $F_2 : \mathbf{C}^{\text{op}} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{Set}$ 则反变米田引理的陈述如下：

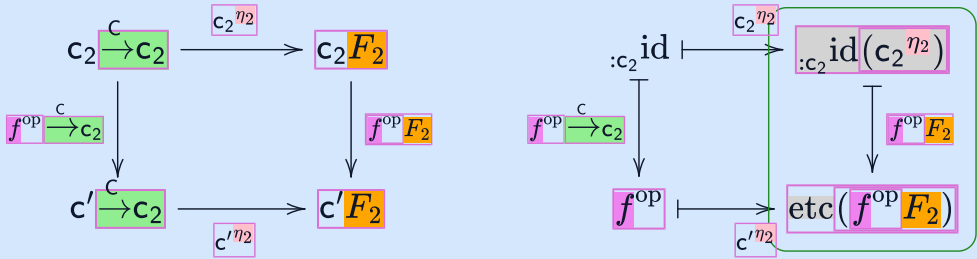
•
$$\underbrace{\left(\left((- \xrightarrow{\text{C}} \mathbf{c}_2) \right) \xrightarrow{\mathbf{C}^{\text{op}} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{Set}} F_2 \right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(\mathbf{c}_2 F_2)}_{\text{一堆元素}}$$

反变米田引理的证明如下：

1. \Leftarrow ：考虑任意 $(\mathbf{c}_2 F_2)$ 中的 etc ：根据 etc 及其所对应的下方右侧的交换图我们可为对象 \mathbf{c}_2 定义 $\mathbf{c}_2^{\eta_2}$ 并以此为基础为任意 $f^{\text{op}} : \mathbf{c}' \xrightarrow{\mathbf{C}^{\text{op}}} \mathbf{c}_2$ 定义 \mathbf{c}'^{η_2} ，于是便可构建一个完整的 η_2 。易知 η_2 是一个自然变换（见下方）。



2. \Rightarrow ：考虑任意等式左侧的 η_2 ：若上述交换图成立则可对任意 η_2 指派 $\text{etc} = \text{id}(\mathbf{c}_2^{\eta_2})$ 为 $\mathbf{c}_2 F_2$ 中与之对应的元素；



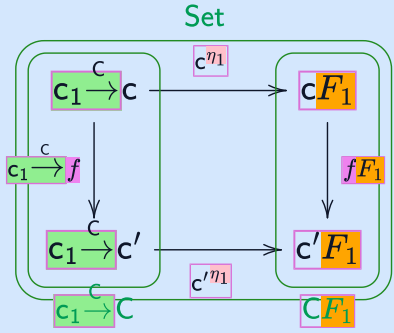
为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
 \mathbf{c}_2 通过 etc 唯一地确定了 η_2 ，反之 η_2 通过 etc 也唯一确定了 \mathbf{c}_2 。

若还知 $F_1 : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{Set}$ 则协变米田引理的陈述如下：

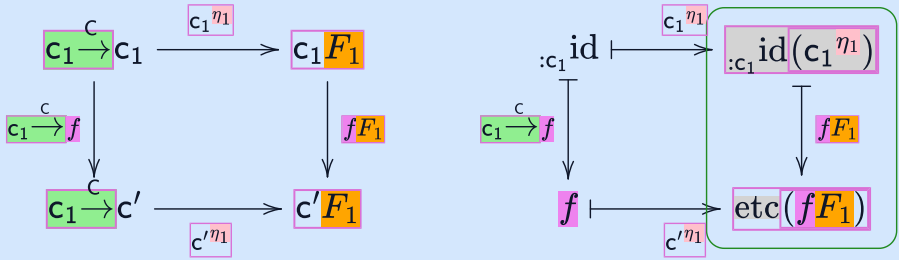
•
$$\underbrace{\left(\left(\mathbf{c}_1 \xrightarrow{\text{C}} (-) \right) \xrightarrow{\mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{Set}} F_1 \right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(\mathbf{c}_1 F_1)}_{\text{一堆元素}}$$

协变米田引理的证明如下：

1. \Leftarrow ：考虑任意 $(\mathbf{c}_1 F_1)$ 中的 etc ：根据 etc 及其所对应的下方右侧的交换图我们可为对象 \mathbf{c}_1 定义 $\mathbf{c}_1^{\eta_1}$ 并以此为基础为任意的 $f : \mathbf{c}_1 \xrightarrow{\text{C}} \mathbf{c}'$ 定义 \mathbf{c}'^{η_1} ，于是便可构建一个完整的 η_1 。易知 η_1 是一个自然变换（见下方）。



2. \Rightarrow ：考虑任意等式左侧的 η_1 ：若上述交换图成立则可对任意 η_1 指派 $\text{etc} = \text{id}(\mathbf{c}_1^{\eta_1})$ 为 $\mathbf{c}_1 F_1$ 中与之对应的元素；



为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
 \mathbf{c}_1 通过 etc 唯一地确定了 η_1 ，反之 η_1 通过 etc 也唯一确定了 \mathbf{c}_1 。

可表和余可表函子的泛性质

接下来定义一个重要的概念：

- F_2 为**可表函子**当且仅当
存在 C^{op} 中对象 c_2 使得
 $(_ \xrightarrow{c} c_2) = c_2 \bowtie _ \cong F_2$ 成立，
即 $c_2 \bowtie$ 与 F_2 间存在自然同构。
此时称 F_2 可由对象 c_2 **表出**。

同理我们也有如下对偶概念：

- F_1 为**余可表函子**当且仅当
存在 C 中对象 c_1 使得
 $(c_1 \xrightarrow{c} _) = c_1 \lrcorner _ \cong F_1$ 成立。
即 $c_1 \lrcorner$ 与 F_1 间存在自然同构。
此时称 F_1 可由对象 c_1 **余可表出**。

米田和尤达嵌入

根据前面的内容我们可知

- よ : $C \xrightarrow{Cat} ((C^{op} \xrightarrow{Set} Set))$
 $c_2 \mapsto (c_2 \xrightarrow{C^{op}} _) = (_ \xrightarrow{C} c_2)$ 构成一个函子，称作预层
 $f_2 \mapsto (f_2 \xrightarrow{C^{op}} _) = (_ \xrightarrow{C} f_2) = (_ \circ f_2)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
构成一个完全忠实函子，该函子称作是**米田嵌入**。

证明如下：

- よ 是函子，因为
 - $_{:c_2} id \text{よ} = (_ \circ_{:c_2} id) = _{(c_2 \text{よ})} id$
 - $(f_2 \circ f'_2) \text{よ} = (_ \circ (f_2 \circ f'_2)) = (_ \circ f_2) \circ_{C^{op} \rightarrow Set} (_ \circ f'_2) = f_2 \text{よ} \circ_{C^{op} \rightarrow Set} f'_2 \text{よ} ,$
- よ 是完全忠实的，因为将反变米田引理中的 F_2 换成 $(c'_2 \xrightarrow{C^{op}} _)$ 即可获得下述公式：

$$\underbrace{((c_2 \xrightarrow{C^{op}} _) \xrightarrow{C^{op} \rightarrow Set} (c'_2 \xrightarrow{C^{op}} _))}_{\text{预层范畴的 hom-set}} \cong \underbrace{(c'_2 \xrightarrow{C^{op}} c_2)}_{C \text{ 的 hom-set}}$$

也就是

$$\underbrace{((c_2 \text{よ}) \xrightarrow{C \rightarrow Set} (c'_2 \text{よ}))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(c'_2 \xrightarrow{C^{op}} c_2)}_{C \text{ 的 hom-set}} = \underbrace{(c_2 (c'_2 \text{よ}))}_{\text{一堆元素}}$$

④ Note

由于函子能够保持态射的性质，对任意左侧集合中的自然同构右侧集合也会有同构与之对应，反之亦然。这也就证明了前面自然同构相关定理省略的部分。

根据前面的内容我们可知

- 尤 : $C^{op} \xrightarrow{Cat} (C \xrightarrow{Set} Set)$
 $c_1 \mapsto (c_1 \xrightarrow{C} _)$ 构成一个函子
 $f_1^{op} \mapsto (f_1^{op} \xrightarrow{C} _) = (f_1^{op} \circ _)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
构成一个完全忠实函子，该函子称作是**尤达嵌入**。

证明如下：

- 尤 是函子，因为
 - $_{:c_1} id \text{尤} = (_ \circ_{:c_1} id) = _{(c_1 \text{尤})} id$
 - $(f_1 \circ f'_1) \text{尤} = ((f_1 \circ f'_1) \circ _) = (f_1^{op} \circ _) \circ_{C \rightarrow Set} (f'_1 \circ _) = f_1^{op} \text{尤} \circ_{C \rightarrow Set} f'_1 \text{尤} ,$
- 尤 是完全且忠实的，因为将协变米田引理中的 F_1 换成 $(c'_1 \xrightarrow{C} _)$ 即可获得下述公式：

$$\underbrace{((c_1 \xrightarrow{C} _) \xrightarrow{C \rightarrow Set} (c'_1 \xrightarrow{C} _))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(c'_1 \xrightarrow{C} c_1)}_{\text{一堆元素}}$$

也就是

$$\underbrace{((c_1 \text{尤}) \xrightarrow{C \rightarrow Set} (c'_1 \text{尤}))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(c'_1 \xrightarrow{C} c_1)}_{\text{一堆元素}} = \underbrace{(c_1 (c'_1 \text{尤}))}_{\text{一堆元素}}$$

④ Note

由于函子能够保持态射的性质，对任意左侧集合中的自然同构右侧集合也会有同构与之对应，反之亦然。这也就证明了前面自然同构相关定理省略的部分。