章节 01 - 03 基本概念

$\LaTeX$ Definitions are here.

始对象与终对象

范畴由对象及其间箭头构成。本文重点分析**余积闭范畴** $\mathcal{C}$。首先给出如下定义：

- 0 为**始对象**当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 $_{:c}¡ : 0 \xrightarrow{\mathcal{C}} c$；
- 1 为**终对象**当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 $_{:c}! : c \xrightarrow{\mathcal{C}} 1$；

> ⓘ **Note**
>
> 其他范畴中始终对象不一定存在。

范畴 $\mathcal{C}$ 中我们假设其含 0 和 1 分别作为始对象和终对象，那么由上述信息可知

- 形如 $0 \xrightarrow{\mathcal{C}} 0$ 的箭头只有一个，即 $_{:0}\mathrm{id}$；
- 形如 $1 \xrightarrow{\mathcal{C}} 1$ 的箭头只有一个，即 $_{:1}\mathrm{id}$；

元素与全局元素

对任意对象 $a, a_1, a_2, \mathrm{etc}$，$b, b_1, b_2, \mathrm{etc}$ 以及任意映射 ϕ，我们进行如下的规定：

- ϕ 为 b 的**元素**当且仅当 $\phi : a \xrightarrow{\mathcal{C}} b$；
- ϕ 为 a 的**全局元素**当且仅当 $\phi : 1 \xrightarrow{\mathcal{C}} a$；
- ϕ 不存在可通过 $\phi : b \xrightarrow{\mathcal{C}} 0$ 得出。

> ⓘ **Note**
>
> 其他范畴中刚才的断言未必成立。

箭头构成的集合

这里再给一个定义：

- $a \xrightarrow{\mathcal{C}} b =$
  所有从 a 射向 b 的箭头构成的集。

> ⓘ **Note**
>
> 上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
> 在其他范畴里 $a \xrightarrow{\mathcal{C}} b$ 未必构成集。

箭头的复合运算

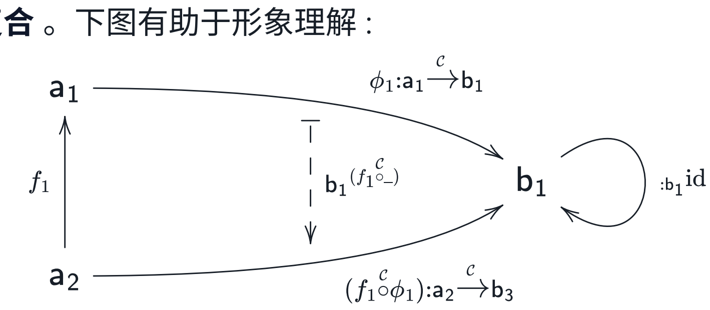
范畴 $\mathcal{C}$ 中特定的箭头可以进行复合运算：
$\overset{\mathcal{C}}{\circ} : (a_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} a_1) \times (a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1) \xrightarrow{\mathcal{S}et} (a_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1)$
$\overset{\mathcal{C}}{\circ} : (\quad f_1 \quad . \quad \phi_1 \quad) \longmapsto \quad f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1$

若我们还知道箭头 f_1，ϕ_1，g_1 分别属于
$a_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} a_1$，$a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1$，$b_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2$ 那么便有

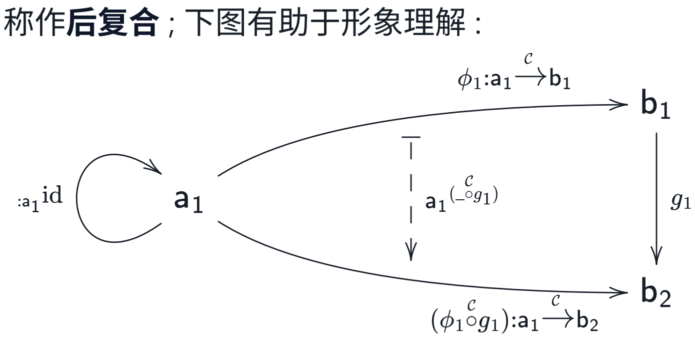
- $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1) \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1 = f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1)$
  说明箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便获可得新的函数：

- $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) : (a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) \xrightarrow{\mathcal{C} \to \mathcal{S}et} (a_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_)$
  $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) : \quad \phi_1 \quad \longmapsto \quad f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1$
  称作**前复合**。下图有助于形象理解：



- $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) : (\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1) \xrightarrow{\mathcal{C} \to \mathcal{S}et} (\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2)$
  $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) : \quad \phi_1 \quad \longmapsto \quad \phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1$
  称作**后复合**；下图有助于形象理解：



根据上面的定义便不难得出下述结论

- $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) \overset{\mathcal{C} \to \mathcal{S}et}{\circ} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) = (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) \overset{\mathcal{C} \to \mathcal{S}et}{\circ} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)$
  复合运算具有**结合律**，即后面会提到的**自然性**；
- $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1) \overset{\mathcal{C} \to \mathcal{S}et}{\circ} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) = (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1))$
  前复合与复合运算的关系
- $(\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) \overset{\mathcal{C} \to \mathcal{S}et}{\circ} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) = ((f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1) \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)$
  后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。
假如 a_1 为 a_1 的全局元素则可规定

- $a_1 \phi_1 = a_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1$

恒等箭头

范畴 $\mathcal{C}$ 内的每个对象都有恒等映射：

- ${}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} : \mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{a}_1$
  ${}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} : a_1 \mapsto a_1$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- $${}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1 = \phi_1$$
  $$= \phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}$$

此外还可以得知

- $({}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) : (\mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) \xrightarrow{\mathcal{C} \to \mathcal{S}et} (\mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_)$
  为恒等自然变换，可以记作是 ${}_{:(\mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_)}\mathrm{id}$；
- $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}) : (\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{b}_1) \xrightarrow{\mathcal{C} \to \mathcal{S}et} (\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{b}_1)$
  为恒等自然变换，可以记作是 ${}_{:(\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{b}_1)}\mathrm{id}$；

单态

在范畴论里我们也可以定义单态：

- ϕ_1 为**单态**当且仅当对任意 a_2 若有 $f_1, f_1' : \mathsf{a}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{a}_1$
  满足 $f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1 = f_1' \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1$ 则有 $f_1 = f_1'$。详情见下图：

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{a}_1 \arrow[rr, bend left, "\phi_1 : \mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{b}_1"] & \top \arrow[d, dashed, "\mathsf{b}_1{}^{(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)}"] & \mathsf{b}_1 \arrow[loop right, "{}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}"] \\
\mathsf{a}_2 \arrow[u, shift right, "f_1"] \arrow[u, shift left, "f_1'"'] \arrow[rru, bend right, "(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1) : \mathsf{a}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{b}_3"'] & {} &
\end{tikzcd}$$

结合终对象的性质我们不难得知

- a_1 为单态 —— 由
  ! 的唯一性可得知。

满态

在范畴论里我们也可以定义满态；

- ϕ_1 为**满态**当且仅当对任意 b_2 若有 $g_1, g_1' : \mathsf{b}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{b}_2$
  满足 $\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1 = \phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1'$ 则有 $g_1 = g_1'$。详情见下图：

$$\begin{tikzcd}
 & \top \arrow[d, dashed, "\mathsf{a}_1{}^{(_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1)}"] & \mathsf{b}_1 \arrow[d, shift right, "g_1'"'] \arrow[d, shift left, "g_1"] \\
\mathsf{a}_1 \arrow[loop left, "{}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id}"] \arrow[rru, bend left, "\phi_1 : \mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{b}_1"] \arrow[rr, bend right, "(\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) : \mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{b}_2"'] & {} & \mathsf{b}_2
\end{tikzcd}$$

同构

在范畴论里我们也可以定义同构：

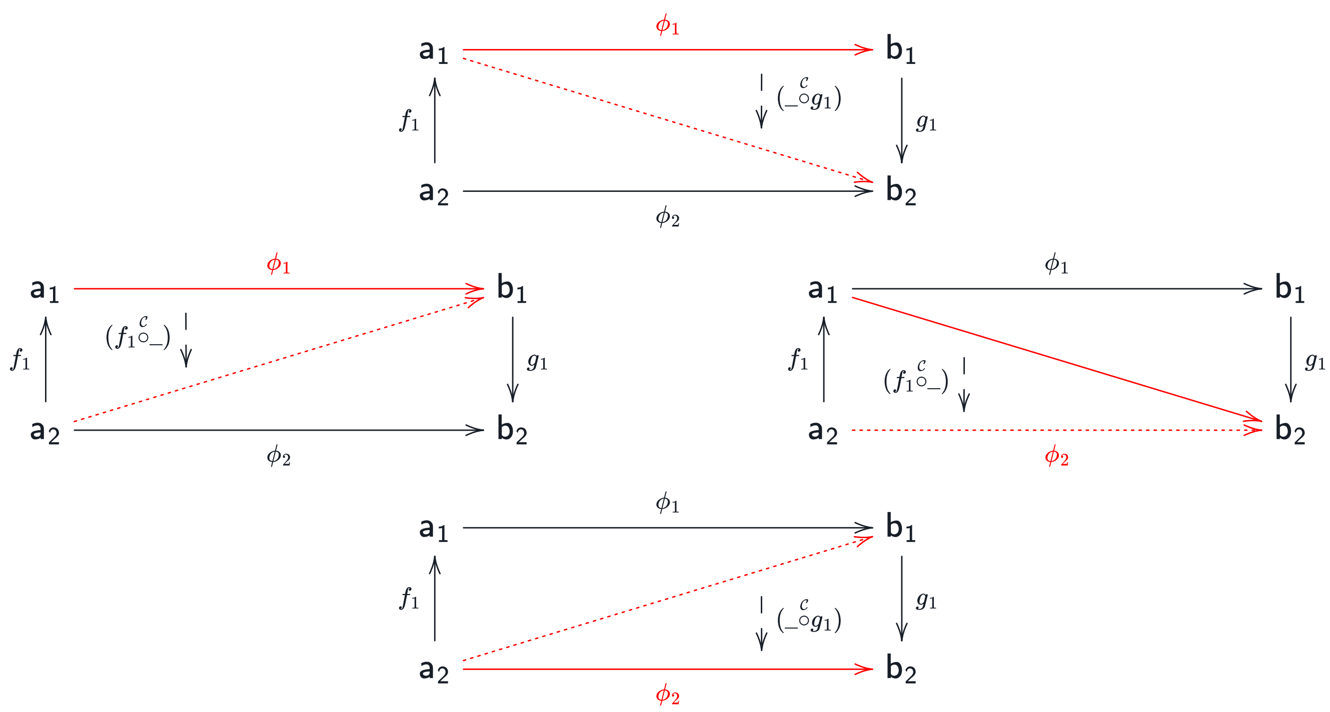
- ϕ_1 为**同构**当且仅当存在 $\psi_1 : \mathsf{b}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{a}_1$
  使 $\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \psi_1 = {}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id}$ 且 $\psi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1 = {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}$。

结合始终对象的性质便不难得知

- ${}_{:0}! = {}_{:1}¡$ 为同构 —— 这是因为
  $0 \xrightarrow{\mathcal{C}} 0 = \{{}_{:0}\mathrm{id}\}$，$1 \xrightarrow{\mathcal{C}} 1 = \{{}_{:1}\mathrm{id}\}$

同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释 。
后面会将自然性进行进一步推广 。



若提供自然变换 β 满足自然性 —— 即对任意
$\mathcal{C}$ 中对象 x_1 , x_2 及任意 $\mathcal{C}$ 中映射 $f_1 : x_2 \overset{\mathcal{C}}{\to} x_1$
都会有 $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} b_1) \overset{Set}{\circ} {x_2}^{\beta} = {x_1}^{\beta} \overset{Set}{\circ} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} b_2)$
(即下图自西向南走向操作结果同自北向东) :

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, red, "\phi_1"] \arrow[dr, red, dashed] & b_1 \arrow[d, phantom, "\downarrow {x_1}^{\beta}"] \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "\phi_2"'] & b_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, red, "\phi_1"] \arrow[d, phantom, "(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} b_1) \downarrow"] & b_1 \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur, red, dashed] \arrow[r, "\phi_2"'] & b_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[dr, red] \arrow[d, phantom, "(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} b_2) \downarrow"] & b_1 \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, red, dashed, "\phi_2"'] & b_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "\phi_1"] & b_1 \arrow[d, phantom, "\downarrow {x_2}^{\beta}"] \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur, red] \arrow[r, red, dashed, "\phi_2"'] & b_2
\end{tikzcd}$$

那么我们便会有下述结论 :

- $b_1 \cong b_2$ 当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中对象 x
  x^{β} 都是同构 。此时称 β 为**自然同构** 。

若提供自然变换 α 满足自然性 —— 即对任意
$\mathcal{C}$ 中对象 x_1 , x_2 以任意 $\mathcal{C}$ 中映射 $g_1 : x_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} x_2$
都会有 $(a_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} g_1) \overset{Set}{\circ} {x_2}^{\alpha} = {x_1}^{\alpha} \overset{Set}{\circ} (a_2 \overset{\mathcal{C}}{\to} g_1)$
(即下图自西向南走向操作结果同自北向东) :

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, red, "\phi_1"] \arrow[d, phantom, "{x_1}^{\alpha} \downarrow"] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[ur, red, dashed] \arrow[r, "\phi_2"'] & x_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, red, "\phi_1"] \arrow[dr, red, dashed] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \arrow[d, phantom, "\downarrow (a_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} g_1)"'] \\
a_2 \arrow[r, "\phi_2"'] & x_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "\phi_1"] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \arrow[d, phantom, "\downarrow (a_2 \overset{\mathcal{C}}{\to} g_1)"'] \\
a_2 \arrow[ur, red] \arrow[r, red, dashed, "\phi_2"'] & x_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[dr, red] \arrow[d, phantom, "{x_2}^{\alpha} \downarrow"] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[r, red, dashed, "\phi_2"'] & x_2
\end{tikzcd}$$

那么我们便会有下述结论 :

- $a_1 \cong a_2$ 当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中对象 x
  x^{α} 都是同构 。此时称 α 为**自然同构** 。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为

$\mathcal{S}et$

$$\begin{tikzcd}
x_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1 \arrow[r, "{x_1}^{\beta}"] \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1"'] & x_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2 \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2"] \\
x_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1 \arrow[r, "{x_2}^{\beta}"'] & x_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1$ $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧（考虑特殊情况）

$$\begin{tikzcd}
b_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1 \arrow[r, "{b_1}^{\beta}"] \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1"'] & b_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2 \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2"] \\
x_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1 \arrow[r, "{x_2}^{\beta}"'] & x_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
:_{b_1}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "{b_1}^{\beta}"] \arrow[d, mapsto, "f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1"'] & :_{b_1}\mathrm{id}(b_1^{\beta}) \arrow[d, mapsto, "f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2"] \\
f_1 \arrow[r, mapsto, "{x_2}^{\beta}"'] & f_1 \circ (\mathrm{etc})
\end{tikzcd}$$

为了方便就用 (etc) 表示 $:_{b_1}\mathrm{id}(b_1^{\beta})$。 由上图可知 $f_1({x_2}^{\beta}) = f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\mathrm{etc})$，故 ${x_2}^{\beta} = x_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} (\mathrm{etc})$；而 ${x_2}^{\beta} = x_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} (\mathrm{etc}) = x_2^{(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\mathrm{etc}))}$ 是同构，从而知 $((\mathrm{etc}) \circ \_)$ 是同构，$(\mathrm{etc}) : b_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2$ 也是。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在米田嵌入处会详细介绍。

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为

$\mathcal{S}et$

$$\begin{tikzcd}
a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} x_1 \arrow[r, "{x_1}^{\alpha}"] \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1"'] & a_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} x_1 \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1"] \\
a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} x_2 \arrow[r, "{x_2}^{\alpha}"'] & a_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} x_2
\end{tikzcd}$$

$a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{C}$ $a_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{C}$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧（考虑特殊情况）

$$\begin{tikzcd}
a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} a_1 \arrow[r, "{x_1}^{\alpha}"] \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1"'] & a_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} a_1 \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1"] \\
a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} x_2 \arrow[r, "{x_2}^{\alpha}"'] & a_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} x_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
:_{b_1}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "{x_1}^{\alpha}"] \arrow[d, mapsto, "a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1"'] & :_{a_1}\mathrm{id}(a_1^{\alpha}) \arrow[d, mapsto, "a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1"] \\
g_1 \arrow[r, mapsto, "{x_2}^{\alpha}"'] & (\mathrm{etc}) \circ g_1
\end{tikzcd}$$

为了方便就用 (etc) 表示 $:_{a_1}\mathrm{id}(a_1^{\alpha})$。 由上图可知 $g_1({x_2}^{\alpha}) = (\mathrm{etc}) \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1$，故 ${x_2}^{\alpha} = (\mathrm{etc}) \xrightarrow{\mathcal{C}} x_2$；而 ${x_2}^{\alpha} = (\mathrm{etc}) \xrightarrow{\mathcal{C}} x_2 = x_2^{((\mathrm{etc}) \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)}$ 是同构，从而知 $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\mathrm{etc}))$ 是同构，$(\mathrm{etc}) : a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} a_2$ 也是。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在米田嵌入处会详细介绍。

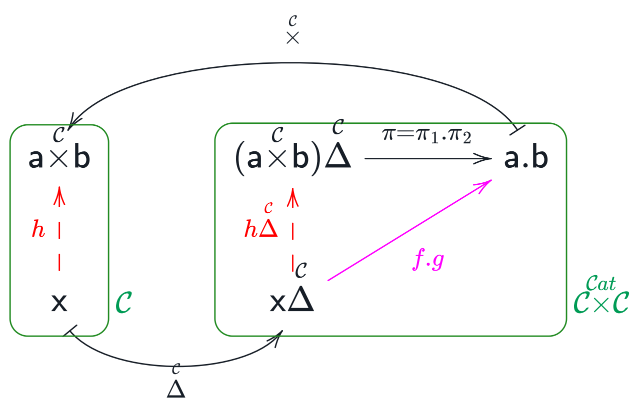
章节 04 - 05 类型的积与和

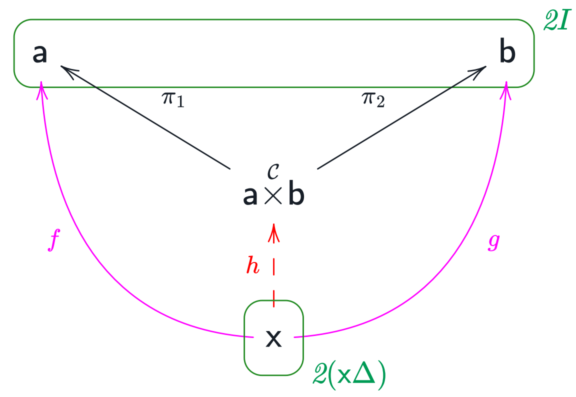
LaTeX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{\mathcal{C}}{\times} : \mathcal{C} \overset{Cat}{\times} \mathcal{C} \overset{Cat}{\longrightarrow} \mathcal{C}$ 在范畴 $\mathcal{C}$ 中有下述性质：

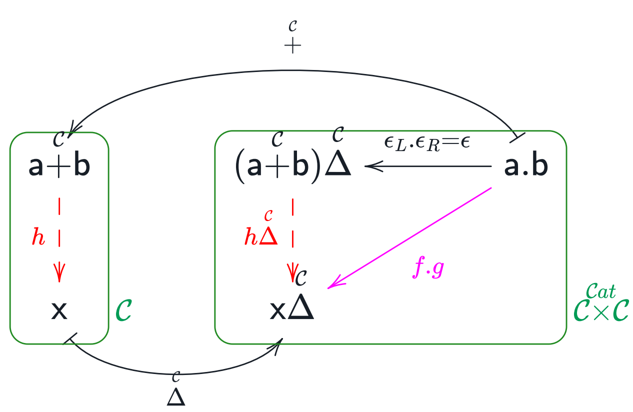
- $(x \overset{\mathcal{C}}{\to} a) \overset{\mathcal{S}et}{\times} (x \overset{\mathcal{C}}{\to} b) \cong (x \overset{\mathcal{C}}{\to} (a \overset{\mathcal{C}}{\times} b))$，x 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象。
  —— **泛性质**，指数对乘法的分配律。下图便于形象理解：

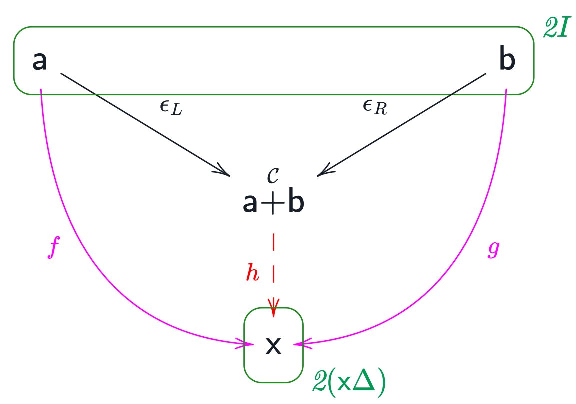




默认函子 $\overset{\mathcal{C}}{+} : \mathcal{C} \overset{Cat}{\times} \mathcal{C} \overset{Cat}{\longrightarrow} \mathcal{C}$ 在范畴 $\mathcal{C}$ 中有下述性质：

- $(a \overset{\mathcal{C}}{\to} x) \overset{\mathcal{S}et}{\times} (b \overset{\mathcal{C}}{\to} x) \cong ((a \overset{\mathcal{C}}{+} b) \overset{\mathcal{C}}{\to} x)$，x 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象。
  —— **泛性质**，指数对加法的分配律。下图便于形象理解：



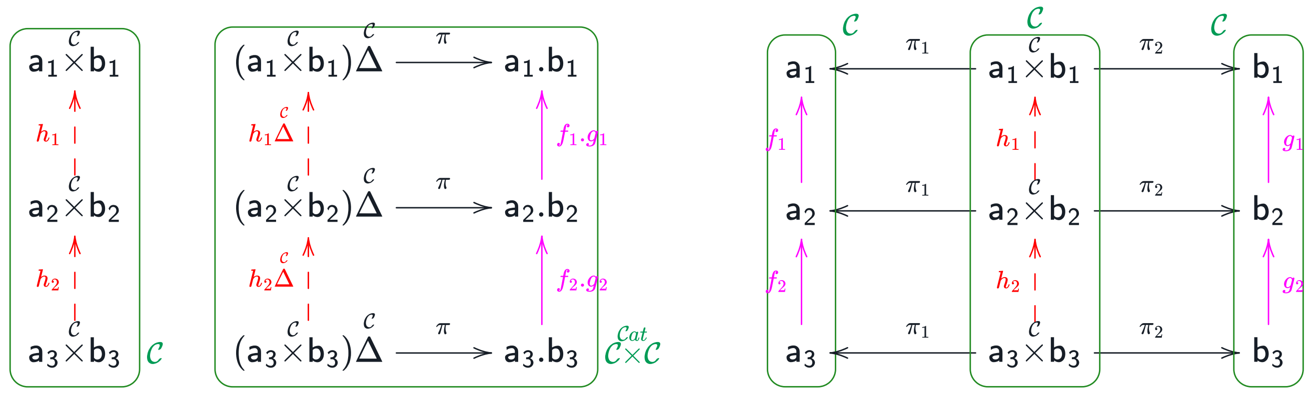


> **Note**
>
> 在上面的插图中：
>
> - $\overset{\mathcal{C}}{\underset{\mathcal{C}}{\Delta}} : \mathcal{C} \overset{Cat}{\longrightarrow} \mathcal{C} \overset{Cat}{\times} \mathcal{C}$ 为对角函子，满足
> $\Delta : c \longmapsto c\ .\ c$
> - $I : \mathit{2} \overset{Cat}{\longrightarrow} \mathcal{C}$ 为函子，满足
> $I : 1 \longmapsto a$
> $\quad 2 \longmapsto b$
> $\mathit{2}$ 为只有两个对象的范畴，
>   1 和 2 分别为其中的对象。
>   这里 $\mathit{2}$ 充当一个指标范畴。

函子性

如何证明 $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathcal{C}}{\times} : ({}_{:\mathsf{a}_2}\mathrm{id}\ .\ {}_{:\mathsf{b}_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:\mathsf{a}_2\overset{\mathcal{C}}{\times}\mathsf{b}_2}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ **保持恒等箭头**；
- $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (f_2 \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_1\ .\ g_2 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) \mapsto h_2 \overset{\mathcal{C}}{\circ} h_1$
  —— 即函子 $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ **保持箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：

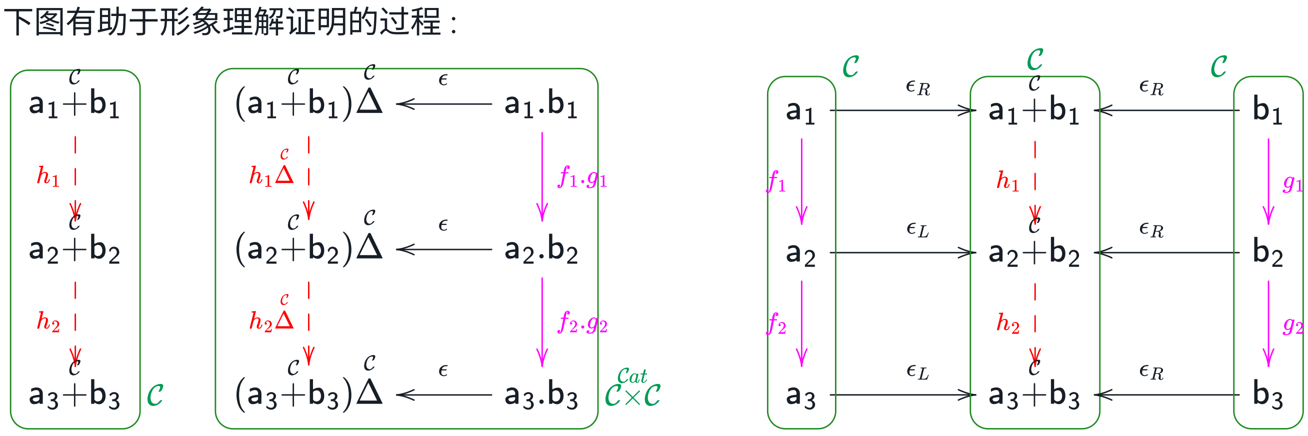


另外规定 $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ 在实参分别为箭头和对象时的输出：

- $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (f_1\ .\ \mathsf{b}_1) \longmapsto f_1 \overset{\mathcal{C}}{\times} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}$
  $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (\mathsf{a}_1\ .\ g_1) \longmapsto {}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}}{\times} g_1$

如何证明 $\overset{\mathcal{C}}{+}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathcal{C}}{+} : ({}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id}\ .\ {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:\mathsf{a}_1\overset{\mathcal{C}}{+}\mathsf{b}_1}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{\mathcal{C}}{+}$ **保持恒等箭头**；
- $\overset{\mathcal{C}}{+} : (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2\ .\ g_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_2) \mapsto h_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} h_2$
  —— 即函子 $\overset{\mathcal{C}}{+}$ **保持箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：



同理规定 $\overset{\mathcal{C}}{+}$ 在实参分别为箭头和对象时的输出：

- $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (f_1\ .\ \mathsf{b}_1) \longmapsto f_1 \overset{\mathcal{C}}{+} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}$
  $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (\mathsf{a}_1\ .\ g_1) \longmapsto {}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}}{+} g_1$

运算性质

对于函子 $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ 我们不难得知

- $\mathsf{a} \overset{\mathcal{C}}{\times} 1 \cong 1 \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{a} \cong \mathsf{a}$ —— 乘法有**幺元** 1 。
  下图便于理解证明 : (f, g) 决定 h , h' 。

$$\begin{tikzcd} (\mathsf{a}\overset{\mathcal{C}}{\times}1)\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & \mathsf{a}.1 \\ \mathsf{x}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, "f.g=f.{:}_{\mathsf{x}}!"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathsf{a}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[r, "{:}_{\mathsf{a}}\mathrm{id}.{:}_{\mathsf{a}}!"] & \mathsf{a}.1 \\ \mathsf{x}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "f\overset{\mathcal{C}}{\Delta}=h'\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, "f.g=f.{:}_{\mathsf{x}}!"'] & \end{tikzcd}$$

- $\mathsf{a} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{b} \cong \mathsf{b} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{a}$ —— 乘法运算有**交换律** 。
  下图便于理解证明 : (f, g) 决定 h , h' 。

$$\begin{tikzcd} (\mathsf{a}\overset{\mathcal{C}}{\times}\mathsf{b})\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & \mathsf{a}.\mathsf{b} \\ \mathsf{x}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, "f.g"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\mathsf{b}\overset{\mathcal{C}}{\times}\mathsf{a})\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & \mathsf{b}.\mathsf{a} \\ \mathsf{x}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h'\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, "g.f"'] & \end{tikzcd}$$

- $(\mathsf{a} \times \mathsf{b}) \times \mathsf{c} \cong \mathsf{a} \times (\mathsf{b} \times \mathsf{c})$ —— 乘法运算具有**结合律** 。
  下图有助于形象理解证明 : $(f_{\mathsf{ax}}, f_{\mathsf{bx}}, f_{\mathsf{cx}})$ 决定 h , h' 。

$$\begin{tikzcd} ((\mathsf{a}\overset{\mathcal{C}}{\times}\mathsf{b})\overset{\mathcal{C}}{\times}\mathsf{c})\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi"] & (\mathsf{a}\overset{\mathcal{C}}{\times}\mathsf{b}).\mathsf{c} \arrow[r, "\pi.{:}_{\mathsf{c}}\mathrm{id}"] & (\mathsf{a}.\mathsf{b}).\mathsf{c} \\ \mathsf{x}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, dotted, "j.f_{\mathsf{cx}}"] \arrow[urr, "(f_a.f_b).f_{\mathsf{cx}}"'] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\mathsf{a}\overset{\mathcal{C}}{\times}(\mathsf{b}\overset{\mathcal{C}}{\times}\mathsf{c}))\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi"] & \mathsf{a}.(\mathsf{b}\overset{\mathcal{C}}{\times}\mathsf{c}) \arrow[r, "{:}_{\mathsf{a}}\mathrm{id}.\pi"] & \mathsf{a}.(\mathsf{b}.\mathsf{c}) \\ \mathsf{x}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h'\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, dotted, "f_{\mathsf{ax}}.j'"] \arrow[urr, "f_a.(f_b.f_c)"'] & & \end{tikzcd}$$

对于函子 $\overset{\mathcal{C}}{+}$ 我们不难得知

- $\mathsf{a} \overset{\mathcal{C}}{+} 0 \cong 0 \overset{\mathcal{C}}{+} \mathsf{a} \cong \mathsf{a}$ —— 加法有**幺元** 0 。
  下图有助于理解 : (f, g) 决定 h , h' 。

$$\begin{tikzcd} (\mathsf{a}\overset{\mathcal{C}}{+}0)\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"'] & \mathsf{a}.0 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f.g=f.{:}_{\backslash\mathrm{ob}x}¡"] \\ \mathsf{x}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathsf{a}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "f=h'\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"'] & \mathsf{a}.0 \arrow[l, "{:}_{\mathsf{a}}\mathrm{id}.{:}_{\mathsf{a}}¡"'] \arrow[dl, "f.g=f.{:}_{\mathsf{x}}¡"] \\ \mathsf{x}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} & \end{tikzcd}$$

- $\mathsf{a} \overset{\mathcal{C}}{+} \mathsf{b} \cong \mathsf{b} \overset{\mathcal{C}}{+} \mathsf{a}$ —— 加法运算有**交换律** 。
  下图有助于理解 : (f, g) 决定 h , h' 。

$$\begin{tikzcd} (\mathsf{a}\overset{\mathcal{C}}{+}\mathsf{b})\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"'] & \mathsf{a}.\mathsf{b} \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f.g"] \\ \mathsf{x}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\mathsf{b}\overset{\mathcal{C}}{+}\mathsf{a})\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h'\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"'] & \mathsf{b}.\mathsf{a} \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "g.f"] \\ \mathsf{x}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} & \end{tikzcd}$$

- $(\mathsf{a} + \mathsf{b}) + \mathsf{c} \cong \mathsf{a} + (\mathsf{b} + \mathsf{c})$ —— 加法运算具有**结合律** 。
  下图有助于形象理解证明 : $(f_{\mathsf{ax}}, f_{\mathsf{bx}}, f_{\mathsf{cx}})$ 决定 h , h' 。

$$\begin{tikzcd} ((\mathsf{a}\overset{\mathcal{C}}{+}\mathsf{b})\overset{\mathcal{C}}{+}\mathsf{c})\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"'] & (\mathsf{a}\overset{\mathcal{C}}{+}\mathsf{b}).\mathsf{c} \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "j.f_c"'] & (\mathsf{a}.\mathsf{b}).\mathsf{c} \arrow[l, "\epsilon.{:}_{\mathsf{c}}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "(f_a.f_b).f_c"] \\ \mathsf{x}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\mathsf{a}\overset{\mathcal{C}}{+}(\mathsf{b}\overset{\mathcal{C}}{+}\mathsf{c}))\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h'\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"'] & \mathsf{a}.(\mathsf{b}\overset{\mathcal{C}}{+}\mathsf{c}) \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "f_a.j'."'] & \mathsf{a}.(\mathsf{b}.\mathsf{c}) \arrow[l, "{:}_{\mathsf{a}}\mathrm{id}.\epsilon"'] \arrow[dll, "f_a.(f_b.f_c)"] \\ \mathsf{x}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} & & \end{tikzcd}$$

幺半范畴

像刚才这样对象运算具有**单位元**以及**结合律**的范畴称作**幺半范畴**；

若上述范畴还具有**交换律**则称作**对称幺半范畴**；

很明显我们的范畴 $\mathcal{C}$ 是典型的**对称幺半范畴** 。

幺半群

什么是幺半群呢？有两种定义方式：

- **幺半群** $\mathcal{M}$ 是个范畴，其只含一个对象 m；
  其中的复合运算正好有单位元以及结合律 。
- 对象 m 属于幺半范畴 $\mathcal{C}$，满足下述交换图：

$$
\begin{tikzcd}
1 \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[r, "u \overset{\mathcal{C}}{\otimes} {}_{:\mathsf{m}}\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\text{左单位元 } u_l"'] & \mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[d, "p"', "\text{运算结果唯一}"] & \mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} 1 \arrow[l, "{}_{:\mathsf{m}}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}}{\otimes} u"'] \arrow[dl, "u_r \text{ 右单位元}"] \\
 & \mathsf{m} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(\mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m}) \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[rr, "\text{结合律 } a"] \arrow[d, "\text{先算左侧括号 } p \overset{\mathcal{C}}{\otimes} {}_{:\mathsf{m}}\mathrm{id}"'] & & \mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} (\mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m}) \arrow[d, "{}_{:\mathsf{m}}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}}{\otimes} p \text{ 先算右侧括号}"] \\
\mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[r, "\text{再算最后结果 } p"'] & \mathsf{m} & \mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[l, "p \text{ 再算最后结果}"]
\end{tikzcd}
$$

  其中

  - u ：$1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{m}$ 其实就是 m 里面的幺元
  - u_l：$1 \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{m}$ 表示 u 构成左幺元
  - u_r：$\mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} 1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{m}$ 表示 u 构成右幺元
  - p ：$\mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{m}$ 即为 m 中的二元运算
  - a ：$(\mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m}) \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} (\mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m})$ 表示 m 具有结合律

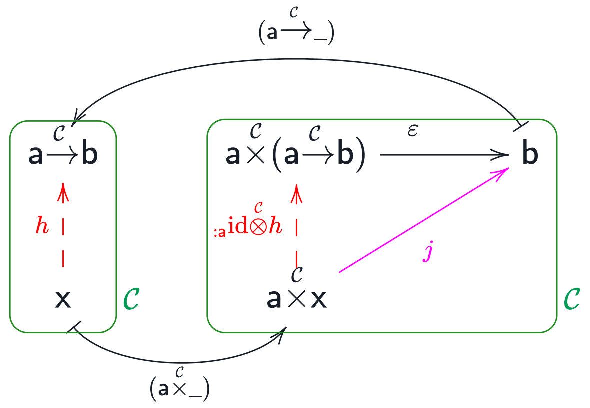
章节 06 类型的幂

LaTeX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\xrightarrow{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \overset{Cat}{\times} \mathcal{C} \xrightarrow{Cat} \mathcal{C}$ 在范畴 $\mathcal{C}$ 中有下述性质：

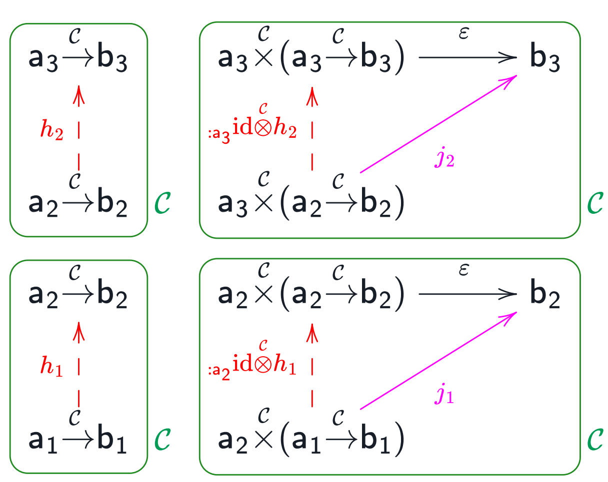
- $\underline{(a \overset{\mathcal{C}}{\times} x) \xrightarrow{\mathcal{C}} b} \cong \underline{x \xrightarrow{\mathcal{C}} (a \xrightarrow{\mathcal{C}} b)} \cong \underline{a \xrightarrow{\mathcal{C}} (x \xrightarrow{\mathcal{C}} b)}$，x 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象
  —— **泛性质**，指数与加乘法运算间的关系 。 下图便于理解证明：

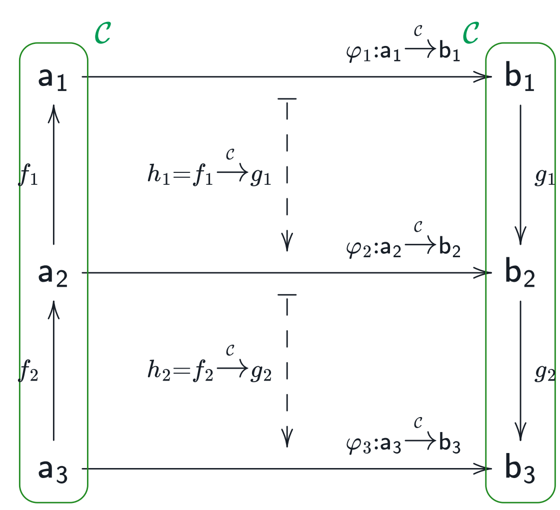


函子性

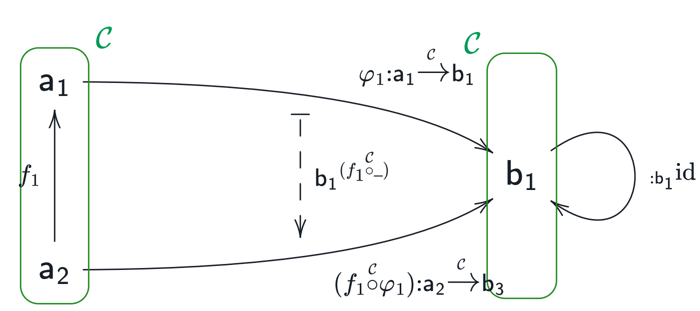
如何证明 $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ 构成函子呢？请看

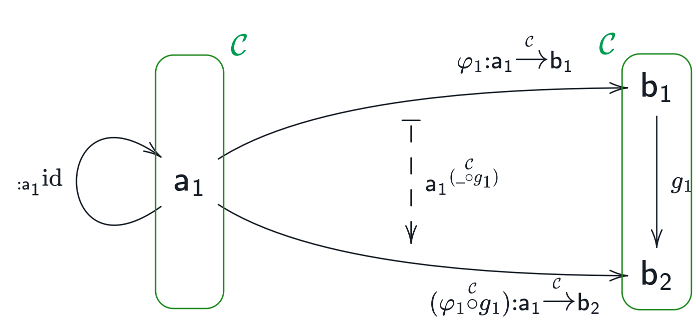
- $\xrightarrow{\mathcal{C}} : ({}_{:a_1}\mathrm{id} \underset{\mathcal{C}}{.} {}_{:b_1}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1)}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ 能**保持恒等箭头**；
- $\xrightarrow{\mathcal{C}} : (f_2 \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_1 \underset{\mathcal{C}}{.} g_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_2) \longmapsto h_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} h_2$
  —— 即函子 $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ **保持箭头复合运算** 。
  下图有助于形象理解证明过程：





下图（自上到下分别为图 1 和图 2）后面会用到 。





范畴 $\mathcal{C}$ 内任意两对象 a_1 和 b_1 间的箭头构成一个集合 $\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_1$，
说明 $\overset{\mathcal{C}}{\to}$ 只能将两个对象打到一个集合。下面使 $\overset{\mathcal{C}}{\to}$ 升级为函子：
若还知道箭头 $f_1 : \mathsf{a}_2 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{a}_1$ 以及 $g_1 : \mathsf{b}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_2$，则规定

- $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_1) : \mathcal{C}^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}at}{\cancel{\times \mathcal{C}}} \overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow} \mathcal{S}et$ 为函子且
  $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_1) : \mathsf{a}_1 \longmapsto (\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_1)$，并且有
  $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_1) : f_1 \longmapsto (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_1) = (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}) = \mathsf{b}_1{}^{(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)}$

  图 1 有助于理解。

  $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\to} g_1) : \mathcal{C}^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}at}{\cancel{\times \mathcal{C}}} \overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow} \mathcal{S}et$ 为函子且
  $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\to} g_1) : \mathsf{a}_1 \longmapsto (\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} g_1) = ({}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}}{\to} g_1) = \mathsf{a}_1{}^{(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1)}$
  $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\to} g_1) : f_1 \longmapsto (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} g_1) = (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) \overset{\mathcal{C}\to\mathcal{S}et}{\circ} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) = (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) \overset{\mathcal{C}\to\mathcal{S}et}{\circ} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)$

  图 2 有助于理解。

  > ⓘ **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - $$\begin{aligned} よ : \mathcal{C} &\overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow} (\mathcal{C}^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathcal{S}et) & \\ \mathsf{b}_1 &\longmapsto (\_ \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_1) & \text{构成一个函子,称作预层} \\ g_1 &\longmapsto (\_ \overset{\mathcal{C}}{\to} g_1) = (\_ \circ g_1) & \text{构成一个函子间映射,即自然变换} \end{aligned}$$
  >
  >   该函子称作是**米田嵌入**。

- $(\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \_) : \cancel{\mathcal{C}^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}at}{\times}} \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow} \mathcal{S}et$ 为函子且
  $(\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \_) : \mathsf{b}_1 \longmapsto (\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_1)$，并且有
  $(\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \_) : g_1 \longmapsto (\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} g_1) = ({}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}}{\to} g_1) = \mathsf{a}_1{}^{(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1)}$

  图 2 有助于理解。

  $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \_) : \cancel{\mathcal{C}^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}at}{\times}} \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow} \mathcal{S}et$ 为函子且
  $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \_) : \mathsf{b}_1 \longmapsto (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_1) = (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}) = \mathsf{b}_1{}^{(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)}$
  $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \_) : g_1 \longmapsto (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} g_1) = (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) \overset{\mathcal{C}\to\mathcal{S}et}{\circ} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) = (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) \overset{\mathcal{C}\to\mathcal{S}et}{\circ} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)$

  图 1 有助于理解。

  > ⓘ **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - $$\begin{aligned} 尤 : \mathcal{C}^{\text{op}} &\overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow} (\mathcal{C} \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathcal{S}et) & \\ \mathsf{a}_1 &\longmapsto (\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \_) & \text{构成一个函子} \\ f_1 &\longmapsto (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \_) = (f_1 \circ \_) & \text{构成一个函子间映射,即自然变换} \end{aligned}$$
  >
  >   该函子戏称为**尤达嵌入**。

积闭范畴

这里插个题外话：

若范畴包含终对象，所有类型的积以及指数，则可将其称作**积闭范畴**；

若范畴包含始对象，所有类型的和，则可将其称作是**余积闭范畴**；

若范畴满足上述条件，则可称作**双积闭范畴**。

很明显我们讨论的范畴 $\mathcal{C}$ 就是**双积闭范畴**。

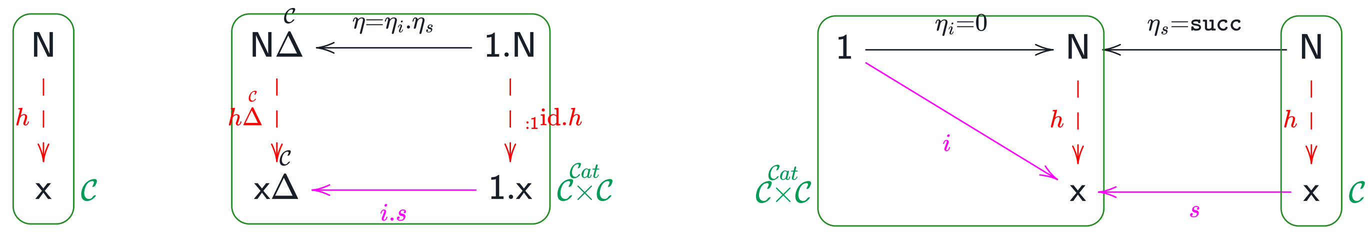
章节 07 递归类型

LaTeX Definitions are here.

泛性质

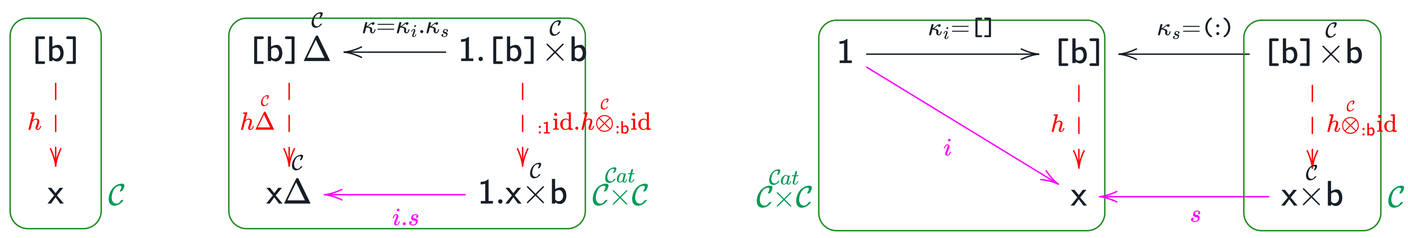
默认对象 N 在范畴 $\mathcal{C}$ 中有下述性质：

- $(1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{x}) \overset{\mathcal{C}at}{\times} (\mathsf{x} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{x}) \cong (\mathsf{N} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{x})$, x 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象
  —— **泛性质** 。`rec` 即对应的同构（上式从左至右）。



默认函子 $[\_] : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{C}$ 在范畴 $\mathcal{C}$ 中有下述性质：

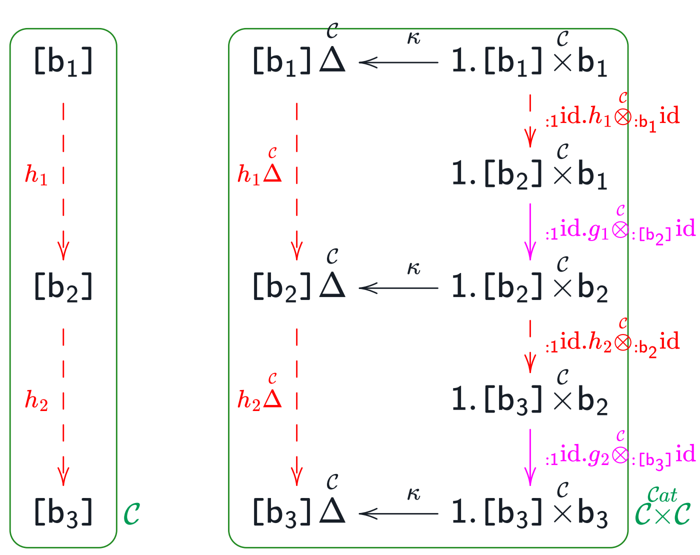
- $(1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{x}) \overset{\mathcal{C}at}{\times} ((\mathsf{x} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{b}) \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{x}) \cong ([\mathsf{b}] \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{x})$, x 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象
  —— **泛性质** 。`foldr` 即对应的同构（上述等式从左至右）。



函子性

如何证明 [_] 构成函子呢？请看

- $[\_] : {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id} \longmapsto {}_{:[\mathsf{b}_1]}\mathrm{id}$
  —— **[_] 保持恒等箭头**；
- $[\_] : (g_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_2) \longmapsto (h_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} h_2)$
  —— **[_] 保持箭头复合运算** 。
  下图便于形象理解证明过程 。

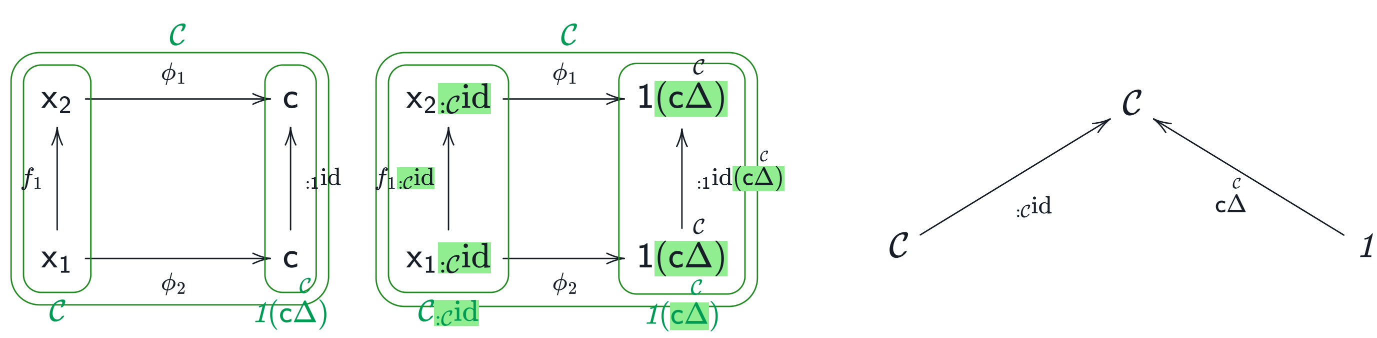


章节 08 函子

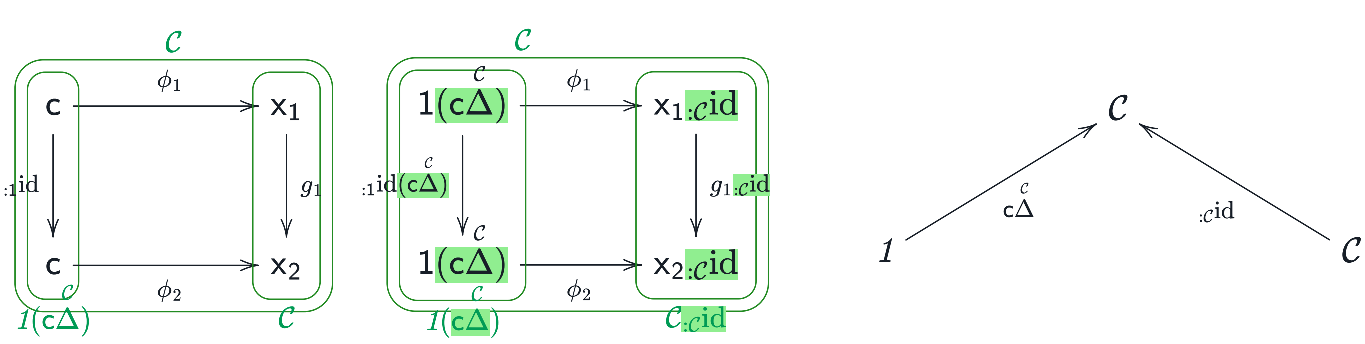
LaTeX Definitions are here.

先规定几种特殊的范畴：

- **离散范畴**：只有对象不含箭头（恒等箭头除外）的范畴 。
- $\mathcal{S}et$：**集合范畴**，为局部小范畴，满足
  - $\mathcal{S}et$ 中对象可以是任意集合
  - $\mathcal{S}et$ 中箭头便是集合间映射 。
- $\mathcal{C}^{\text{op}}$：**反范畴**，满足
  - $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 中对象皆形如 c，
    c 为任意 $\mathcal{C}$ 中的对象；
  - $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 中箭头皆形如 $\phi^{\text{op}} : \mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}^{\text{op}}} \mathsf{c}_1$，
    $\phi : \mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_2$ 可为任意 $\mathcal{C}$ 中的箭头 。
- $\mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{D}$：**积范畴**，满足
  - $\mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{D}$ 中对象皆形如 $\mathsf{c}\,.\,\mathsf{d}$，
    c，d 为任意 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$ 中的对象；
  - $\mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{D}$ 中箭头皆形如 $\phi\,.\,\psi$，
    ϕ，ψ 为任意 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$ 中的箭头 。
- $\mathcal{C}/\mathsf{c}$：**俯范畴**，这里 c 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象；满足
  - $\mathcal{C}/\mathsf{c}$ 中对象皆形如 $\cancel{\mathsf{x}\,.\,1\,.}\,\phi$，其中
    x 和 $\phi : \mathsf{x} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}$ 分别为 $\mathcal{C}$ 中对象和箭头；
  - $\mathsf{c}/\mathcal{C}$ 中箭头皆形如 $f_1\ \cancel{.\ {}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}}$ 且满足下述交换图，其中
    x_1，x_2 为 $\mathcal{C}$ 中对象且 ϕ_1，ϕ_2，f_1，${}_{:1}\mathrm{id}$ 皆为 $\mathcal{C}$ 中箭头；



- $\mathsf{c}/\mathcal{C}$：**仰范畴**，这里 c 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象；
  - $\mathsf{c}/\mathcal{C}$ 中对象皆形如 $\cancel{1\,.\,\mathsf{x}\,.}\,\phi$，其中
    x 和 $\phi : \mathsf{c} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{x}$ 分别为 $\mathcal{C}$ 中对象和箭头；
  - $\mathcal{C}/\mathsf{c}$ 中箭头皆形如 $\cancel{{}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}}\,.\,g_1$ 且满足下述交换图，其中
    x_1，x_2 为 $\mathcal{C}$ 中对象且 ϕ_1，ϕ_2，${}_{:1}\mathrm{id}$，g_1 皆为 $\mathcal{C}$ 中箭头；



考虑范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$，现提供函子定义：

- $\Phi : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$ 为范畴当且仅当
  - 对任意 $\mathcal{C}$ 中对象 c
    $\mathsf{c}\Phi$ 为 $\mathcal{D}$ 中对象且
    ${}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}\Phi = {}_{:\mathsf{c}\Phi}\mathrm{id}$；
  - 对任意 $\mathcal{C}$ 中箭头 $\phi_1 : \mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_2$ 和 $\phi_2 : \mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_3$，
    始终都有等式 $(\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_2)\Phi = \phi_1\Phi \overset{\mathcal{D}}{\circ} \phi_2\Phi$ 成立 。

假如 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$ 皆为**局部小范畴**，并且
刚才的 Φ 确实构成一个函子， 则

- Φ 是**忠实的**当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中对象 c_1 和 c_2
  $(c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2)$ 与 $(c_1\Phi \xrightarrow{\mathcal{D}} c_2\Phi)$ 之间始终存在单射；
- Φ 是**完全的**当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中对象 c_1 和 c_2
  $(c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2)$ 与 $(c_1\Phi \xrightarrow{\mathcal{D}} c_2\Phi)$ 之间始终存在满射；
- Φ 是**完全忠实的**当且仅当
  $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ 与 $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ 间存在自然同构，即
  $(c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_)$ 与 $(c_1 \xrightarrow{\mathcal{D}} \_)$ 间存在自然同构

若还知道 $F_1, F_2, G_1, G_2 : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$
为函子，则有

- $$\begin{tikzcd} x_1\Phi \arrow[r, "x_1\natural"] \arrow[d, "f_1\Phi"'] & x_1\Psi \arrow[d, "f_2\Psi"] \\ x_2\Phi \arrow[r, "x_2\natural"'] & x_2\Psi \\ \mathcal{C}\Phi & \mathcal{C}\Psi \end{tikzcd}$$
- $\mathcal{C}$ 中的映射：ϕ，$\mathcal{C}$ 中对象：c
  $\mathcal{D}$ 中的映射：ψ，$\mathcal{D}$ 中对象：d
  映射的复合：$\phi_1 \circ \phi_2$，$\psi_1 \circ \psi_2$
- 函子 $\Phi : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$，
  函子 $\Psi : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$，
  函子的复合：$\Phi_1 \circ \Phi_2$，$\Psi_1 \circ \Psi_2$
- 自然变换 $\natural : \Phi \to \Psi$，自然变换 $\sharp : \Psi \to \Upsilon$
  自然变换 $\natural_1 : \Phi_1 \to \Phi_2$，自然变换 $\natural_2 : \Phi_2 \to \Phi_3$
  自然变换的纵复合：$\natural \circ \sharp$，
  自然变换的横复合：$\natural_1 \circ_h \natural_2$，

- 函子 $\Phi_1 : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$
  函子 $\Phi_2 : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$
  函子的复合：$\Phi \circ \Psi \circ \Upsilon$，
- 自然变换 $\natural_1 : \Phi_1 \to \Phi_2$，自然变换 $\natural_2 : \Phi_1 \to \Phi_2$
  自然变换的纵复合：$\natural_1 \circ \natural_2$，