

08-09 函子和自然变换

L^AT_EX Definitions are here.

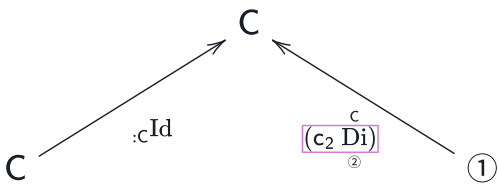
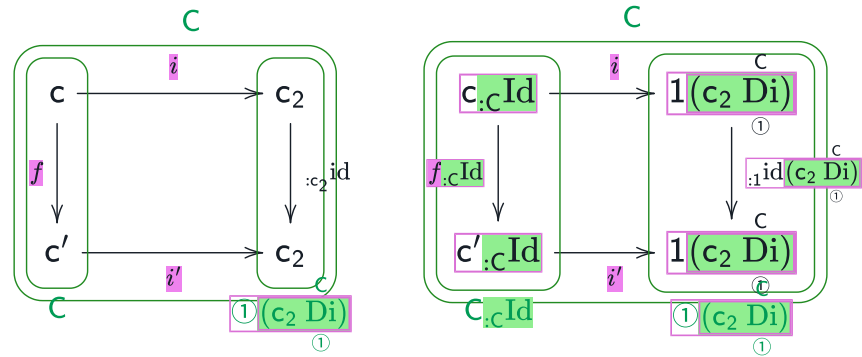
一些特殊的范畴

现在规定几种特殊的范畴。

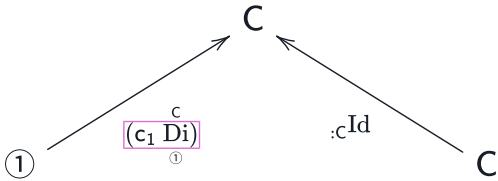
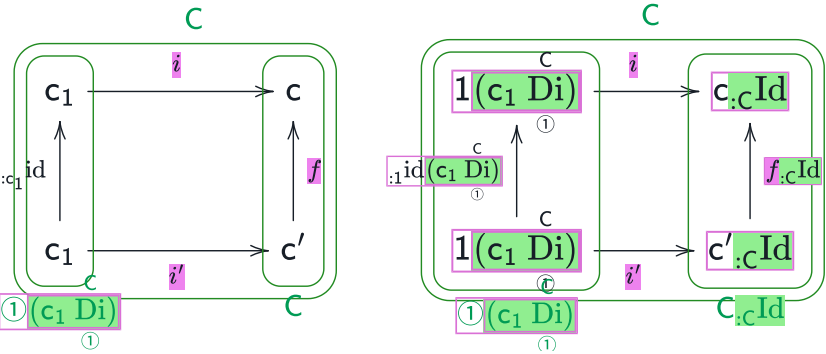
- **离散范畴**：只有对象不含箭头（恒等箭头除外）的范畴。
- **Set**：**所有集合构成的范畴**，为局部小范畴，满足
 - Set 中对象为任意集合；
 - Set 中箭头为集合间映射。
- **Cat**：**所有范畴构成的范畴**，满足
 - Cat 中任何对象都构成一个范畴；
 - Cat 中任何箭头都构成一个函子。

若 C, D 为 Cat 中对象，则：

- C^{op} ：**反范畴**，满足
 - C^{op} 中对象皆形如 c ， c 为任意 C 中的对象；
 - C^{op} 中箭头皆形如 $i^{op} : c_2 \xrightarrow{C^{op}} c_1$ ， $i : c_1 \xrightarrow{C} c_2$ 可为任意 C 中的箭头。
- $C \times^{Cat} D$ ：**积范畴**，满足
 - $C \times^{Cat} D$ 中对象皆形如 $c \cdot d$ ， c, d 分别为任意 C, D 中的对象；
 - $C \times^{Cat} D$ 中箭头皆形如 $i \cdot j$ ， i, j 分别为任意 C, D 中的箭头。
- $C \xrightarrow{Cat} D$ ：**所有 C 到 D 的函子的范畴**，满足
 - $C \xrightarrow{Cat} D$ 中任何对象都是 C 到 D 的函子；
 - $C \xrightarrow{Cat} D$ 中任何箭头都是函子间自然变换。
- C/c ：**俯范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
 - C/c 中对象皆形如 $c \cdot 1 \cdot i$ ，其中 c 和 $i : c \xrightarrow{C} c_2$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
 - c_2/C 中箭头皆形如 $f \cdot c_2 \cdot id$ 且满足下述交换图，其中 c, c' 为 C 中任意对象且 f, i, i' 为 C 中任意箭头；



- c_1/C ：**仰范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
 - c_1/C 中对象皆形如 $1 \cdot c \cdot i$ ，其中 c 和 $i : c_1 \xrightarrow{C} c$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
 - C/c_1 中箭头皆形如 $id \cdot c_1 \cdot f$ 且满足下述交换图，其中 c, c' 为 C 中任意对象且 f, i, i' 为 C 中任意箭头；



函子

接下来我们来提供函子的正式定义：

- $F : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{D}$ 为**函子**当且仅当
 - 对任意 \mathbf{C} 中对象 c , cF 为 \mathbf{D} 中对象且 $_{c}\text{id}F = _{cF}\text{id}$;
 - 对任意 \mathbf{C} 中箭头 $i_1 : c_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} c_2$ 和 $i_2 : c_2 \xrightarrow{\mathbf{C}} c_3$, 始终都有等式 $(i_1 \circ i_2)F = i_1F \circ i_2F$ 成立。

若已确信 $F : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{D}$ 为函子且
还知 \mathbf{C} 中有对象 c_1, c_2
以及 \mathbf{C} 中有箭头 $i : c_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} c_2$ 则

- 若 i 为单态 / 满态 / 同构
则 iF 为单态 / 满态 / 同构；
- 若 iF 为同构
则 i 为同构。

i

Note

不难发现函子具有保持
对象 / 态射性质的能力。

函子的复合运算

若还知道 $G : \mathbf{D} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{E}$ 为函子则

- $F \circ G : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{E}$
也构成一个函子。

恒等函子

对于函子我们也有恒等映射，即：

- $_{c}\text{Id} \circ F = F$
 $= F \circ _{D}\text{Id}$

忠实，完全和本质满函子

若 $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$ 皆为**局部小范畴**，则

- F 是**忠实的**当且仅当对任意 \mathbf{C} 中的对象 c_1, c_2 , $c_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} c_2$ 与 $c_1F \xrightarrow{\mathbf{D}} c_2F$ 之间始终都存在单射；
- F 是**完全的**当且仅当对任意 \mathbf{C} 中的对象 c_1, c_2 , $c_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} c_2$ 与 $c_1F \xrightarrow{\mathbf{D}} c_2F$ 之间始终都存在满射；
- F 是**完全忠实的**当且仅当任意 \mathbf{C} 中对象 c_1, c_2 , $c_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} c_2$ 与 $c_1F \xrightarrow{\mathbf{D}} c_2F$ 之间始终都存在双射。

i

Note

刚才提到的“单 / 满 / 双射”
针对的都是范畴的箭头部分。

- F 是**本质满的**当且仅当对任意 \mathbf{D} 中对象 d
都存在 \mathbf{C} 中对象 c 使 $cF \xrightarrow{\mathbf{D}} d$ 之间有双射。

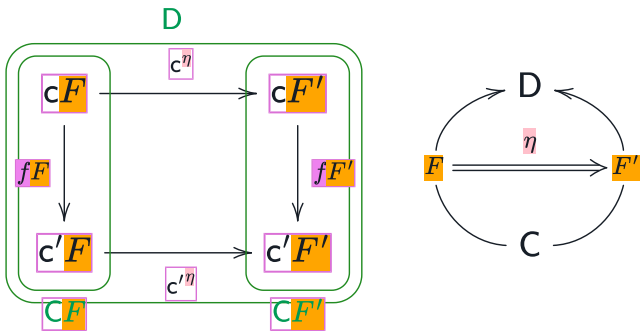
根据刚才的信息我们不难得知

- 若 F, G 为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满函子
则 $G \circ F$ 为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满 函子；
- 若 $F \circ G$ 为完全忠实函子
且知道 G 为完全忠实函子
则可知 F 为完全忠实函子；

自然变换

如果还知道 $F' : \overset{\text{Cat}}{\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{D}}$ 为函子，那么

- $\eta : F \Rightarrow F'$ 为自然变换当且仅当对任意 \mathbf{C} 中对象 c, c' 始终都会有下述交换图成立：

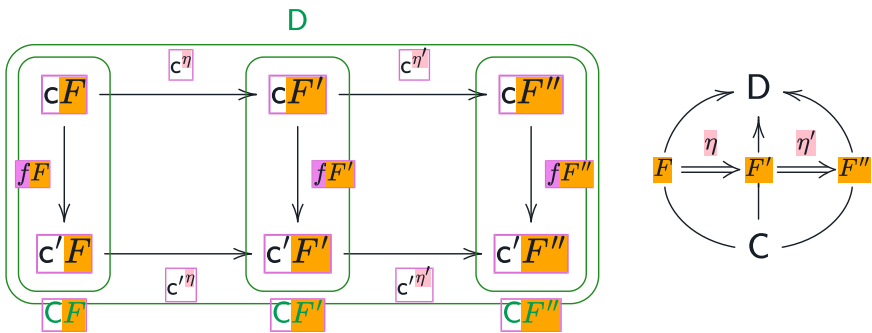


自然变换的复合

若已知 $\eta : F \Rightarrow F'$ 构成自然变换且

还知道 $\eta' : F' \Rightarrow F''$ 为自然变换则

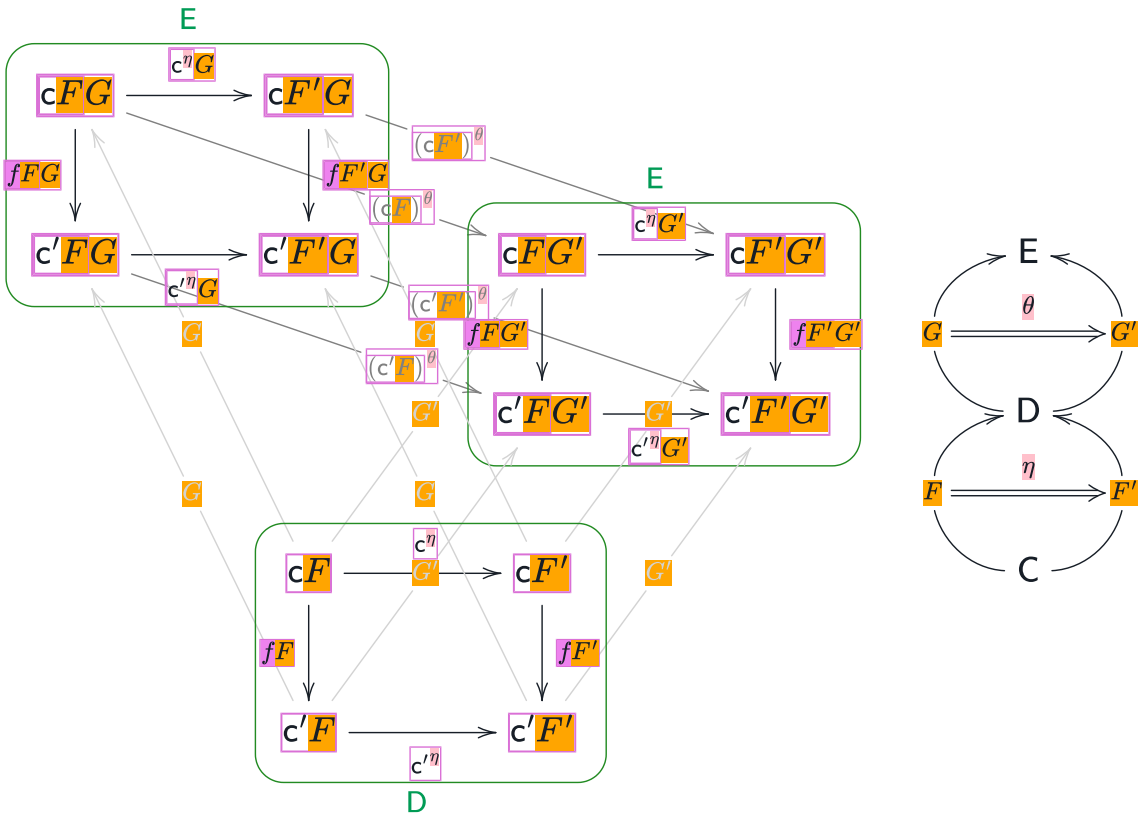
- $\eta \circ \eta' : F \Rightarrow F''$ 为自然变换，称作 η 和 η' 的纵复合。



如果还知道 $G' : \overset{\text{Cat}}{\mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{E}}$ 也是个函子

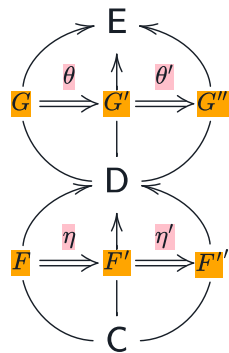
及自然变换 $\theta : G \Rightarrow G'$ 那么便有

- $\eta \circ \theta : F \circ G \Rightarrow F' \circ G'$ 为自然变换，称作 η 和 θ 的横复合。



若 $\theta' : G \Rightarrow G'$ 为自然变换则

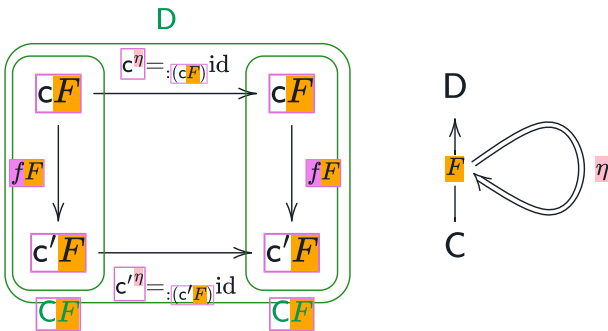
- $(\eta \circ \theta) \circ (\eta' \circ \theta') = (\eta \circ \eta') \circ (\theta \circ \theta')$ ，即便改变纵横复合先后顺序也不影响最终结果。



恒等自然变换

同样对于自然变换也有恒等映射。

- $\text{id}_F \colon F \xrightarrow{\text{Cat}} F$ 为恒等自然变换当且仅当对范畴 \mathbf{C} 中任意对象 c 都有下述交换图成立：



自然同构

自然同构与你想象中的同构不太像。

- $\eta \colon F \xrightarrow{\text{Cat}} F'$ 为**自然同构**当且仅当 c^η 总是同构，这里 c 为任意 \mathbf{C} 中对象。此时 F, F' 的关系可用 $F \cong F'$ 表示

范畴等价的定义

我们用自然同构来定义范畴的等价。

- $\mathbf{C} \cong \mathbf{D}$ 当且仅当存在函子 $F \colon \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{D}$ 及 $F' \colon \mathbf{D} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{C}$ 使 $F \circ F' \cong \text{id}_{\mathbf{D}}$ 并且有 $F' \circ F \cong \text{id}_{\mathbf{C}}$ 。

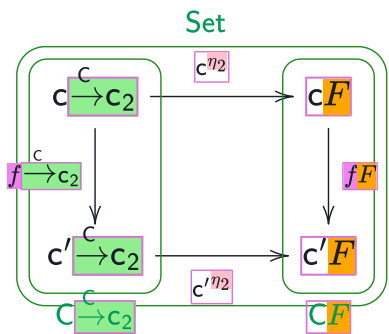
米田引理

反变米田引理的陈述如下：

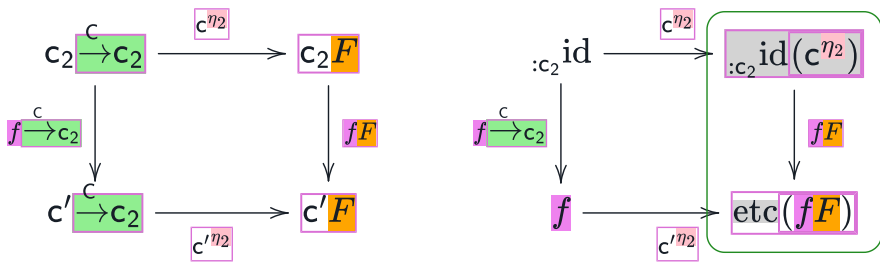
-

反变米田引理的证明如下：

1. \Leftarrow : 考虑任意 $(c_2 F)$ 中的 etc : 根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_2} , 于是便可构建一个完整的 η_2 。易知 η_2 是一个自然变换。



2. \Rightarrow : 考虑任意等式左侧的 η_1 : 若上述交换图成立
 则可对任意 η_1 指派 $\text{etc} = \text{id}(c^{\eta_1})$ 为 $c_2 F$ 中与之对应的元素;



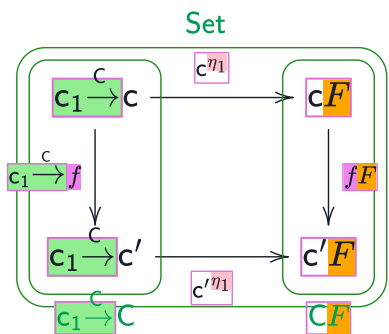
为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！ c_2 唯一地确定了 η_2 ，反之 η_2 唯一确定了 c_2 。

协变米田引理的陈述如下：

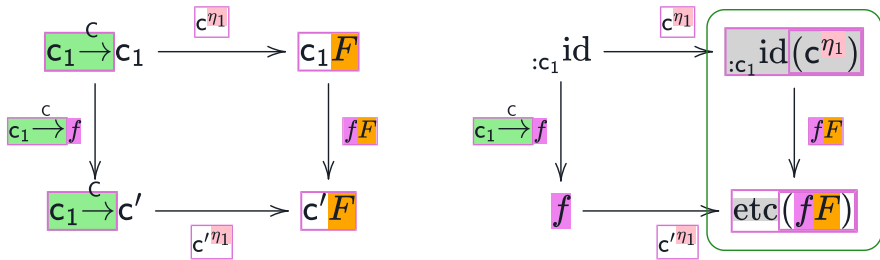
-

协变米田引理的证明如下：

1. \Leftarrow : 考虑任意 $[(c_1 F)]$ 中的 etc : 根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_1} , 于是便可构建一个完整的 η_1 。易知 η_1 是一个自然变换。



2. \Rightarrow : 考虑任意等式左侧的 η_1 : 若上述交换图成立
 则可对任意 η_1 指派 $\text{etc} = {}_{c_1}\text{id}(\mathbf{c}^{\eta_1})$ 为 $\mathbf{c}_1 F$ 中与之对应的元素;



为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！ c_1 唯一地确定了 η_1 ，反之 η_1 唯一确定了 c_1 。

米田嵌入

根据前面的内容我们可知

- よ : $C \xrightarrow{Cat} (C^{op} \xrightarrow{Set} Set)$
 $c_2 \mapsto (c_2 \xrightarrow{C^{op}} _)$ 构成一个函子，称作预层
 $f_2 \mapsto (f_2 \xrightarrow{C^{op}} _) = (_ \xrightarrow{C} c_2)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
构成一个完全忠实函子，该函子称作是**米田嵌入**。

证明如下：

- よ 是函子，因为
 - $_{:c_2} id \downarrow = (_ \circ _ :_{c_2} id) = _ :_{(c_2 \downarrow)} id$
 - $(f_2 \circ _ f'_2) \downarrow = (_ \circ _ (f_2 \circ _ f'_2)) = (_ \circ _ f_2) \xrightarrow{Cat} _ \circ _ (_ \circ _ f'_2)$ ，

由于函子具有保持对象 / 映射性质的能力，
故便可知 $f_2 \downarrow$ 为同构当且仅当 f_2 为同构。

- よ 是完全忠实的，因为
将协变米田引理中的 $c_1 / C / F$
分别换成 $c_2 / C^{op} / (c'_2 \xrightarrow{C^{op}} _)$
即可获得下述公式：

$((c_2 \xrightarrow{C^{op}} _) \xrightarrow{C^{op} \rightarrow Set} (c'_2 \xrightarrow{C^{op}} _))$

预层范畴的 hom-set

$\cong (c'_2 \xrightarrow{C^{op}} c_2)$

C 的 hom-set

也就是

$((c_2 \downarrow) \xrightarrow{C \rightarrow Set} (c'_2 \downarrow))$

一堆自然变换

$\cong (c_2 (c'_2 \downarrow))$

一堆元素

Note

问题来了：既然 よ 是完全忠实的，那么是否意味着
如果 $f_2 : c_2 \xrightarrow{C} c'_2$ 是同构则上式左侧部分与之对应的
的自然变换一定就是自然同构呢？

根据前面的内容我们可知

- 尤 : $C^{op} \xrightarrow{Cat} (C \xrightarrow{Set} Set)$
 $c_1 \mapsto (c_1 \xrightarrow{C} _)$ 构成一个函子
 $f_1 \mapsto (f_1 \xrightarrow{C} _) = (f_1 \circ _)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
构成一个完全忠实函子，该函子称作是**尤达嵌入**。

证明如下：

- 尤 是函子，因为
 - $_{:c_1} id \Uparrow = (_ \circ _ :_{c_1} id) = _ :_{(c_1 \Uparrow)} id$
 - $(f_1 \circ _ f'_1) \Uparrow = (_ \circ _ (f_1 \circ _ f'_1)) = (_ \circ _ f_1) \xrightarrow{Cat} _ \circ _ (_ \circ _ f'_1)$ ，

- 尤 是完全且忠实的，因为
将协变米田引理中的 F
换成 $(c'_1 \xrightarrow{C} _)$
即可获得下述公式：

$((c_1 \xrightarrow{C} _) \xrightarrow{C \rightarrow Set} (c'_1 \xrightarrow{C} _))$

一堆自然变换

$\cong (c'_1 \xrightarrow{C} c_1)$

一堆元素

也就是

$((c_1 \Uparrow) \xrightarrow{C \rightarrow Set} (c'_1 \Uparrow))$

一堆自然变换

$\cong (c_1 (c'_1 \Uparrow))$

一堆元素

Note

问题来了：既然 尤 是完全忠实的，那么是否意味着
如果 $f_1 : c'_1 \xrightarrow{C} c_1$ 是同构则上式左侧部分与之对应的
的自然变换一定就是自然同构呢？