若有函子 L : $\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}$, 并
且有函子 R : $\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$, 即

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[loop above, "{}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id}"] \arrow[rr, bend right, "R"'] && \mathsf{D} \arrow[loop above, "{}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id}"] \arrow[ll, bend right, "L"']
\end{tikzcd}$$

那么规定

伴随函子的第一种定义

- $L \dashv R$ 当且仅当
  函子 $(\_L \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$ 和 $(\_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \_R)$
  间存在着一个二元的**自然同构** 。

假如确实有 $L \dashv R$ 则
对任意 C 中对象 c, c'
及任意 D 中对象 d, d' , 规定

- 对于任意 f^{op} : $\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}$
  以及任意的 g : $\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R$
  可用下述相继式描述它们的关系 :

  $$\frac{\mathsf{d}L \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}}{\mathsf{d} \xrightarrow[g]{} \mathsf{c}R}$$

由于当中蕴含一个二元自然同构 , 故

- $$\frac{\mathsf{d}L \xrightarrow{gL} \mathsf{d}'L \xrightarrow{f'^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}}{\mathsf{d} \xrightarrow[g]{} \mathsf{d}' \xrightarrow[g']{} \mathsf{c}R}$$
- $$\frac{\mathsf{d}L \xrightarrow{f'^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}' \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}}{\mathsf{d} \xrightarrow[g]{} \mathsf{c}'R \xrightarrow[f^{\mathrm{op}}R]{} \mathsf{c}R}$$

根据上面提供的信息不难得知

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_2，见下：

$$\phi_2 : (\_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \_R) \xrightarrow{(\mathsf{D}\times\mathsf{C}) \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{Set}} (\_L \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$$
$$(\_ \,.\, \mathsf{c})^{\phi_2} : (\_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R) \xrightarrow{\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{Set}} (\_L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c})$$
$$(\mathsf{d} \,.\, \_)^{\phi_2} : (\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \_R) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{Set}} (\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$$

套用反变米田引理便可以获得

$$\underbrace{((\_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R) \xrightarrow{\mathsf{D}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (\_L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}RL \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c})}_{\text{一堆元素}}$$

由反变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(\_ \,.\, \mathsf{c})^{\phi_2}$
右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 ${}_{:\mathsf{c}R}\mathrm{id}(\mathsf{c}R \,.\, \mathsf{c})^{\phi_2} = \mathsf{c}^{\varepsilon}$。此外

- $$\frac{\mathsf{d}L \xrightarrow{gL} \mathsf{c}LR \xrightarrow{\mathsf{c}^{\varepsilon}} \mathsf{c}}{\mathsf{d} \xrightarrow[g]{} \mathsf{c}R \xrightarrow[{}_{:\mathsf{c}R}\mathrm{id}]{} \mathsf{c}R} = \frac{\mathsf{d}L \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}}{\mathsf{d} \xrightarrow[g]{} \mathsf{c}R}$$
  即与任意的 $g : \mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R$ 对应的 $f^{\mathrm{op}} : \mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}$ 都可用 $gL \overset{\mathsf{C}}{\circ} \mathsf{c}^{\varepsilon}$ 来表示。
- $\varepsilon : R \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} L \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id}$ 构成自然变换。

> - 将本页第一条相继式里的 d 替换为 $\mathsf{c}'L$ 即得
>
> $$\frac{\mathsf{c}'LR \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}LR} \mathsf{c}LR \xrightarrow{\mathsf{c}^{\varepsilon}} \mathsf{c}}{\mathsf{c}'R \xrightarrow[f^{\mathrm{op}}R]{} \mathsf{c}R \xrightarrow[{}_{:\mathsf{c}R}\mathrm{id}]{} \mathsf{c}R} = \frac{\mathsf{c}'LR \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}LR} \mathsf{c}LR \xrightarrow{\mathsf{c}^{\varepsilon}} \mathsf{c}}{\mathsf{c}'R \xrightarrow[f^{\mathrm{op}}R]{} \mathsf{c}R}$$
>
> - 将上页第二条相继式里的 d 替换为 $\mathsf{c}'R$ 即得
>
> $$\frac{\mathsf{c}'RL \xrightarrow{c'^{\varepsilon}} \mathsf{c}' \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}}{\mathsf{c}'R \xrightarrow[{}_{:\mathsf{c}'R}\mathrm{id}]{} \mathsf{c}'R \xrightarrow[f^{\mathrm{op}}R]{} \mathsf{c}R} = \frac{\mathsf{c}'RL \xrightarrow{c'^{\varepsilon}} \mathsf{c}' \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}}{\mathsf{c}'R \xrightarrow[f^{\mathrm{op}}R]{} \mathsf{c}R}$$
>
> 可见 $f^{\mathrm{op}}LR \overset{\mathsf{C}}{\circ} \mathsf{c}^{\varepsilon} = c'^{\varepsilon} \overset{\mathsf{C}}{\circ} f^{\mathrm{op}} = f^{\mathrm{op}}R$。即证。

按照同样的方法我们也可得知

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_1，见下：

$$\phi_1 : (\_L \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \xrightarrow{(\mathsf{D}\times\mathsf{C}) \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{Set}} (\_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \_R)$$
$$(\_ \,.\, \mathsf{c})^{\phi_1} : (\_L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}) \xrightarrow{\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{Set}} (\_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R)$$
$$(\mathsf{d} \,.\, \_)^{\phi_1} : (\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{Set}} (\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \_R)$$

套用协变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{((\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \_R))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{d}LR)}_{\text{一堆元素}}$$

由协变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(\mathsf{d} \,.\, \_)^{\phi_1}$
右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 ${}_{:\mathsf{d}L}\mathrm{id}(\mathsf{d} \,.\, \mathsf{d}L)^{\phi_1} = \mathsf{d}^{\eta}$。如此

- $$\frac{\mathsf{d}L \xrightarrow{{}_{:\mathsf{d}L}\mathrm{id}} \mathsf{d}L \xrightarrow{f'^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}}{\mathsf{d} \xrightarrow[\mathsf{d}^{\eta}]{} \mathsf{d}LR \xrightarrow[f^{\mathrm{op}}R]{} \mathsf{c}R} = \frac{\mathsf{d}L \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}}{\mathsf{d} \xrightarrow[g]{} \mathsf{c}R}$$
  即与任意 $f^{\mathrm{op}} : \mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}$ 对应的 $g : \mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R$ 都可通过 $\mathsf{d}^{\eta} \overset{\mathsf{C}}{\circ} f^{\mathrm{op}}R$ 来表示。
- $\varepsilon : R \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} L \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id}$ 构成自然变换。

> - 将本页第二条相继式里的 c 替换为 $\mathsf{d}'L$ 即得
>
> - 将上页第一条相继式里的 c 替换为 $\mathsf{d}'L$ 即得

$$\frac{\boxed{\mathsf{d}L} \xrightarrow{gL} \boxed{\mathsf{d}'L} \xrightarrow{\boxed{\mathsf{d}'L}\mathrm{id}} \boxed{\mathsf{d}'L}}{\mathsf{d} \xrightarrow[g]{} \mathsf{d}' \xrightarrow[\boxed{\mathsf{d}'\eta}]{} \boxed{\mathsf{d}'LR}} = \frac{\boxed{\mathsf{d}L} \xrightarrow{gL} \boxed{\mathsf{d}'L}}{\mathsf{d} \xrightarrow[g]{} \mathsf{d}' \xrightarrow[\boxed{\mathsf{d}'\eta}]{} \boxed{\mathsf{d}'LR}}$$