10 伴随函子

LaTeX Definitions are here.

若有函子 $L : \boxed{\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}}$
以及函子 $R : \boxed{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}}$, 即

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[loop above, "{}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id}"] \arrow[rr, bend right, "R"'] & & \mathsf{D} \arrow[loop above, "{}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id}"] \arrow[ll, bend right, "L"']
\end{tikzcd}$$

伴随函子的第一种定义

那么规定

- $L \dashv R$ 当且仅当
  函子 $\boxed{(\boxed{\_L} \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)}$ 和 $\boxed{(\_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \boxed{\_R})}$
  间存在着一个二元的**自然同构** 。

假如确实有 $L \dashv R$, 那么不难得知

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_2，见下：

$$\phi_2 : (\_ \xrightarrow{D} \_R) \xrightarrow{(D\times C)\xrightarrow{C}Set} (\_L \xrightarrow{C} \_)$$
$$(\_\,.\,c)^{\phi_2} : (\_ \xrightarrow{D} cR) \xrightarrow{D\xrightarrow{C}Set} (\_L \xrightarrow{C} c)$$
$$(d\,.\,\_)^{\phi_2} : (d \xrightarrow{D} \_R) \xrightarrow{C\xrightarrow{C}Set} (dL \xrightarrow{C} \_)$$

套用反变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{(\_ \xrightarrow{D} cR) \xrightarrow{D^{op}\xrightarrow{Cat}Set} (\_L \xrightarrow{C} c))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{Set}{\cong} \underbrace{(cRL \xrightarrow{C} c)}_{\text{一堆元素}}$$

由反变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(\_\,.\,c)^{\phi_2}$
右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 $:_{cR}\mathrm{id}(cR\,.\,c)^{\phi_2} = c^{\varepsilon}$ 。如此

- $\varepsilon : R\circ L \xrightarrow[Cat]{C\xrightarrow{Cat}C} :_{C}\mathrm{Id}$ 构成自然变换。

> 考虑任意 $f^{op} : c' \xrightarrow{C} c$:
>
> $$\begin{tikzcd} cR \xrightarrow{D} cR \arrow[r, "(cR.c)^{\phi_2}"] \arrow[d, "f^{op}R \xrightarrow{D} cR"'] & cRL \xrightarrow{C} c \arrow[d, "f^{op}RL \xrightarrow{C} c"] \\ c'R \xrightarrow{D} cR \arrow[r, dashed, "(c'R.c)^{\phi_2}"] & c'RL \xrightarrow{C} c \\ c'R \xrightarrow{D} c'R \arrow[r, "(c'R.c')^{\phi_2}"'] \arrow[u, "c'R \xrightarrow{D} f^{op}R"] & c'RL \xrightarrow{C} c' \arrow[u, "c'RL \xrightarrow{C} f^{op}"'] \end{tikzcd}$$
>
> $$\begin{tikzcd} :_{cR}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(cR.c)^{\phi_2}"] \arrow[d, "f^{op}R \xrightarrow{D} cR"'] & :_{cR}\mathrm{id}(cR.c)^{\phi_2} = c^{\varepsilon} \arrow[d, "f^{op}RL \xrightarrow{C} c = c^{(f^{op}RL\,\overset{C}{\circ}\,\_)}"] \\ f^{op}R \arrow[r, mapsto, "(c'R.c)^{\phi_2}"] & f^{op}RL\overset{C}{\circ}c^{\varepsilon} = c'^{\varepsilon}\overset{C}{\circ}f^{op} \\ :_{c'R}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(c'R.c')^{\phi_2}"'] \arrow[u, "c'R \xrightarrow{D} f^{op}R"] & :_{c'R}\mathrm{id}(c'R.c')^{\phi_2} = c'^{\varepsilon} \arrow[u, "c'RL \xrightarrow{C} f^{op} = (c'RL)^{(\_\overset{C}{\circ}f^{op})}"'] \end{tikzcd}$$
>
> 上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图
> 其实就是反变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_1，见下：

$$\phi_1 : (\_L \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{(D\times C)\xrightarrow{C}Set} (\_ \xrightarrow{D} \_R)$$
$$(\_\,.\,c)^{\phi_1} : (\_L \xrightarrow{C} c) \xrightarrow{D\xrightarrow{C}Set} (\_ \xrightarrow{D} cR)$$
$$(d\,.\,\_)^{\phi_1} : (dL \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{C\xrightarrow{C}Set} (d \xrightarrow{D} \_R)$$

套用协变米田引理我们便可获得

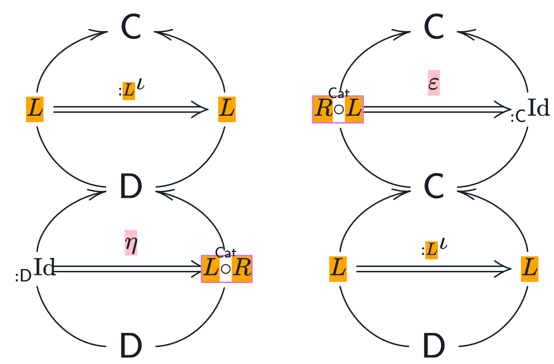
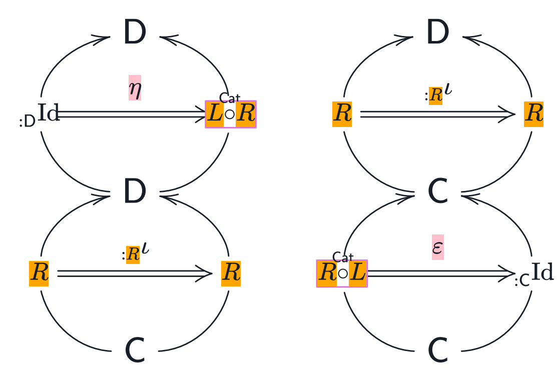
$$\underbrace{((dL \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{C\xrightarrow{Cat}Set} (d \xrightarrow{D} \_R))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{Set}{\cong} \underbrace{(d \xrightarrow{D} dLR)}_{\text{一堆元素}}$$

由协变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(d\,.\,\_)^{\phi_1}$
右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 $:_{dL}\mathrm{id}(d\,.\,dL)^{\phi_1} = d^{\eta}$ 。如此。

- $\eta : :_{D}\mathrm{Id} \xrightarrow{D\xrightarrow{Cat}D} L \overset{Cat}{\circ} R$ 构成自然变换。

> 考虑任意 $g : d \xrightarrow{D} d'$:
>
> $$\begin{tikzcd} dL \xrightarrow{C} dL \arrow[r, "(d.dL)^{\phi_1}"] \arrow[d, "dL \xrightarrow{C} gL"'] & d \xrightarrow{D} dLR \arrow[d, "d \xrightarrow{D} gLR"] \\ dL \xrightarrow{C} d'L \arrow[r, dashed, "(d.d'L)^{\phi_1}"] & d \xrightarrow{D} d'LR \\ d'L \xrightarrow{C} d'L \arrow[r, "(d'.d'L)^{\phi_1}"'] \arrow[u, "gL \xrightarrow{C} d'L"] & d' \xrightarrow{D} d'LR \arrow[u, "g \xrightarrow{D} d'LR"'] \end{tikzcd}$$
>
> $$\begin{tikzcd} :_{dL}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(d.dL)^{\phi_1}"] \arrow[d, "dL \xrightarrow{C} gL"'] & :_{dL}\mathrm{id}(d.dL)^{\phi_1} = d^{\eta} \arrow[d, "d \xrightarrow{D} gLR = d^{(\_\overset{D}{\circ}gLR)}"] \\ gL \arrow[r, mapsto, "(d.d'L)^{\phi_1}"] & d^{\eta}\overset{D}{\circ}gLR = g\overset{D}{\circ}d'^{\eta} \\ :_{d'L}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(d'.d'L)^{\phi_1}"'] \arrow[u, "gL \xrightarrow{C} d'L"] & :_{d'L}\mathrm{id}(d'.d'L)^{\phi_1} = d'^{\eta} \arrow[u, "g \xrightarrow{D} d'LR = (d'LR)^{(g\overset{D}{\circ}\_)}"'] \end{tikzcd}$$
>
> 上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图
> 其实就是协变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

对于前面的 ε 和 η 我们有下述交换图成立：

- $$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\eta\circ{:}L^{\iota}"] \arrow[dr, "{:}L^{\iota}"'] & L \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} R \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} L \arrow[d, "{:}L^{\iota}\circ\varepsilon"] \\ & L \end{tikzcd}$$
  
- $$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "{:}R^{\iota}\circ\eta"] \arrow[dr, "{:}R^{\iota}"'] & R \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} L \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} R \arrow[d, "\varepsilon\circ{:}R^{\iota}"] \\ & R \end{tikzcd}$$
  

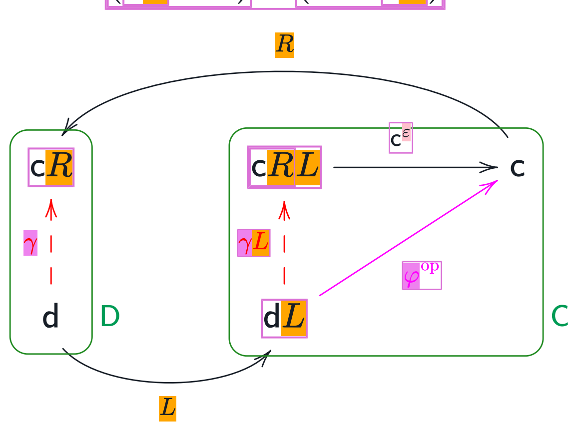
伴随函子的第二种定义

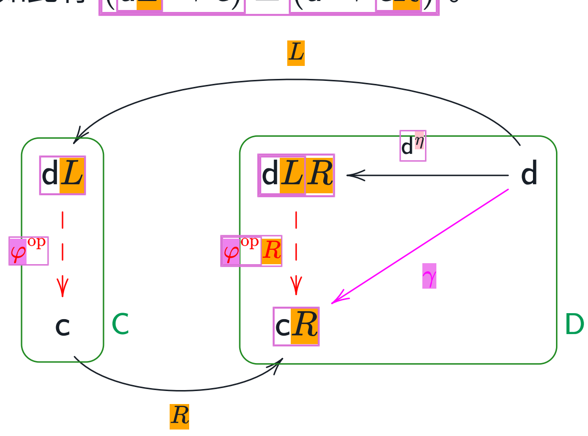
假设我们不知道 L 和 R 构成一对伴随函子并且有自然变换
$\varepsilon : R \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} L \xrightarrow{\mathsf{C}\to\mathsf{C}} {:}_{\mathsf{C}}\mathrm{Id}$ 和 $\eta : {:}_{\mathsf{D}}\mathrm{Id} \xrightarrow{\mathsf{D}\to\mathsf{D}} L \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} R$ 能同时满足
上页开头的两幅交换图，即

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\eta\circ{:}L^{\iota}"] \arrow[dr, "{:}L^{\iota}"'] & L \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} R \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} L \arrow[d, "{:}L^{\iota}\circ\varepsilon"] \\ & L \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "{:}R^{\iota}\circ\eta"] \arrow[dr, "{:}R^{\iota}"'] & R \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} L \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} R \arrow[d, "\varepsilon\circ{:}R^{\iota}"] \\ & R \end{tikzcd}$$

那么

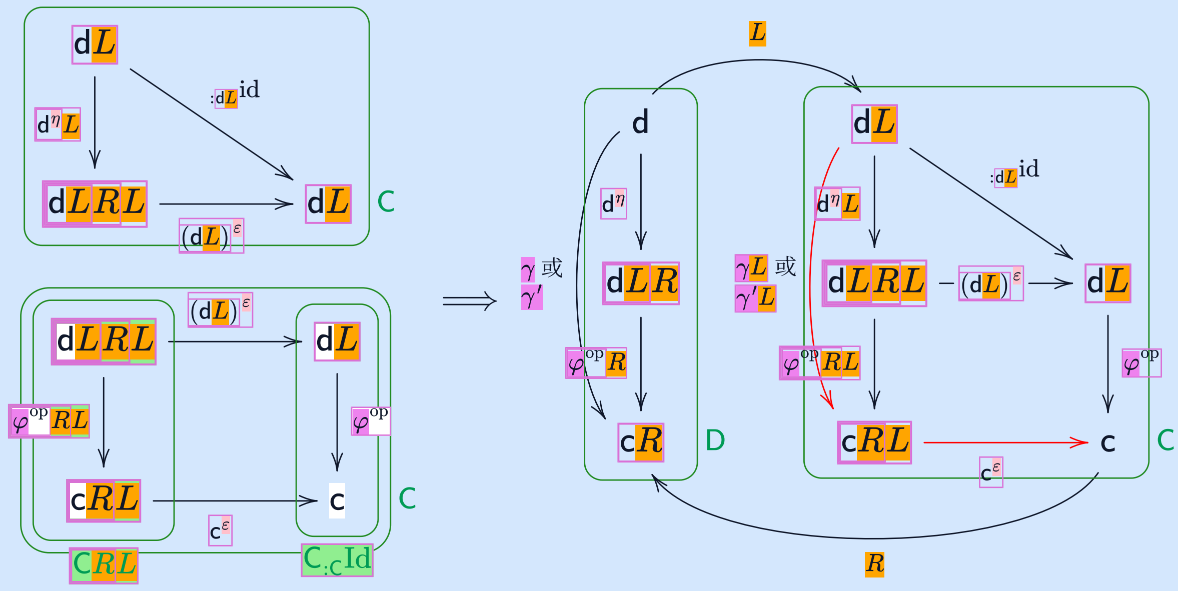
- 对任意 C 中对象 c
  及任意 D 中对象 d
  及任意 $\varphi^{\mathrm{op}} : \mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}$ 始终存在
  唯一的 $\gamma : \mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R$ 使下图交换。
  如此有 $(\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R)$。

  
- 对任意 C 中对象 c
  及任意 D 中对象 d
  及任意 $\gamma : \mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R$ 始终都会存在
  唯一的 $\varphi^{\mathrm{op}} : \mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}$ 使下图交换。
  如此有 $(\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R)$。

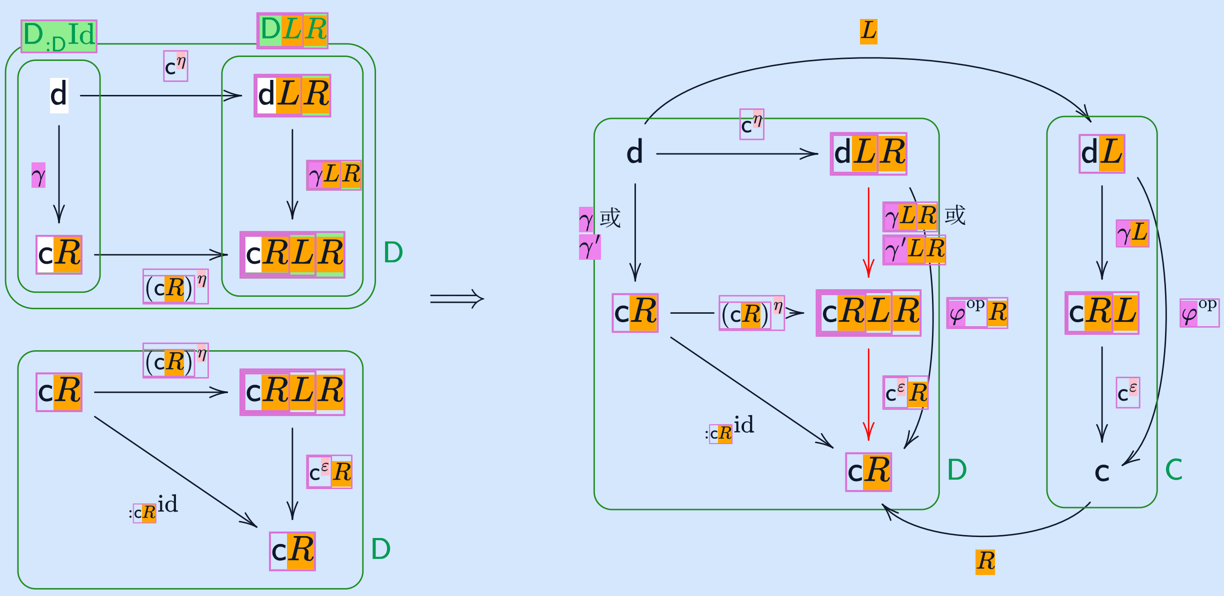
  

现证明上页的头两条定理。

我们将下图称作图 1。图 1 上半部分即为上页第一幅图，而图 1 下半部分可由 ε 为自然变换得出。两图拼在一起即可得图 1 右侧部分。



我们将下图称作图 2。图 2 下半部分即为上页第二幅图，而图 2 上半部分可由 η 为自然变换得出。两图拼在一起即可得图 2 右侧部分。



为何 γ 唯一呢？若 γ' 亦满足上图——即不论是 γ 还是 γ' 图 1 右侧部分中 L 形走向红色路径的复合结果都为 φ^{op}；故图 2 右侧部分中红色路径的复合结果也是一致的；如此根据图 2 右侧部分即可知 $\gamma = \gamma'$。

另一侧同理，这里不再赘述。

伴随函子的第三种定义

假设我们不知道 L 和 R 构成一对伴随函子并且有自然变换
$\varepsilon : R \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} L \xrightarrow{\mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{C}} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id}$ 和 $\eta : {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id} \xrightarrow{\mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{D}} L \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} R$，那么我们有

- 若对任意 C 中对象 c
  及对任意 D 中对象 d
  及对任意 $\varphi^{\mathrm{op}} : \mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$ 始终都会
  有唯一的 $\gamma : \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R$ 使下图交换，

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{c}R & & \mathsf{c}RL \arrow[ll, bend right, "R"'] \arrow[r, "\mathsf{c}^{\varepsilon}"] & \mathsf{c} \\
\mathsf{d} \arrow[u, dashed, "\gamma"] \arrow[rr, bend right, "L"'] & \mathsf{D} & \mathsf{d}L \arrow[u, dashed, "\gamma L"] \arrow[ur, "\varphi^{\mathrm{op}}"'] & \mathsf{C}
\end{tikzcd}
$$

  那么

$$\phi_2 : (\_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \_R) \xrightarrow{\overset{\mathsf{c}}{(\mathsf{D}\times\mathsf{C})} \overset{\mathsf{c}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (\_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)$$
$$(\_ \,.\, \mathsf{c})^{\phi_2} : (\_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R) \xrightarrow{\overset{\mathsf{c}}{\mathsf{D}} \longrightarrow \mathsf{Set}} (\_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c})$$
$$(\mathsf{d} \,.\, \_)^{\phi_2} : (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \_R) \xrightarrow{\overset{\mathsf{c}}{\mathsf{C}} \longrightarrow \mathsf{Set}} (\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)$$

  将构成自然同构 。

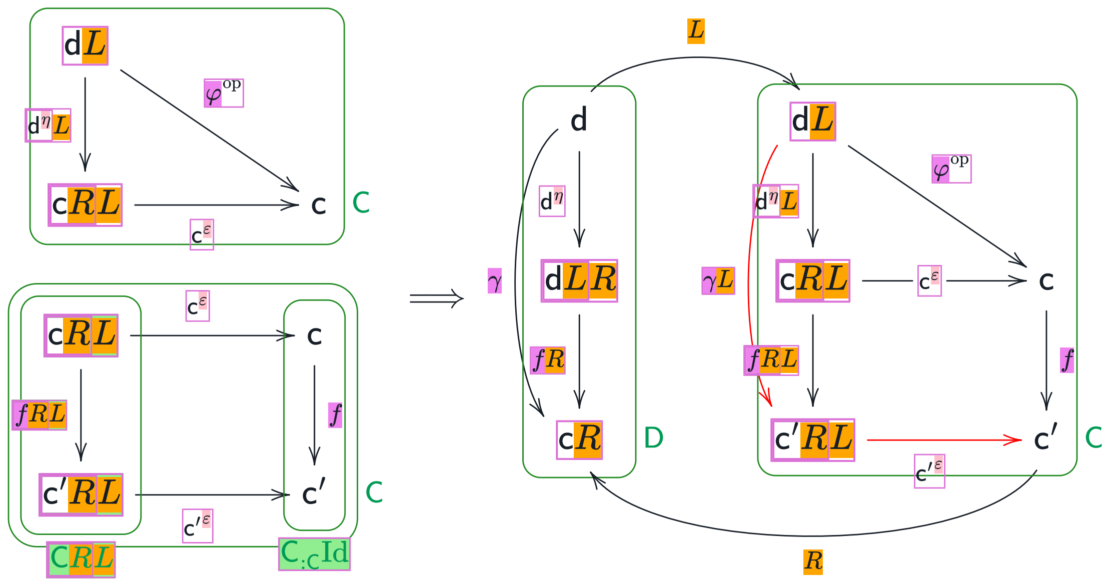
- 若对任意 C 中对象 c
  及对任意 D 中对象 d
  及对任意 $\gamma : \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R$ 始终都存在
  唯一的 $\varphi^{\mathrm{op}} : \mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$ 使下图交换，

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{d}L \arrow[d, dashed, "\varphi^{\mathrm{op}}"'] & & \mathsf{d}LR \arrow[ll, bend right, "L"'] \arrow[d, dashed, "\varphi^{\mathrm{op}}R"'] & \mathsf{d} \arrow[l, "\mathsf{d}^{\eta}"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
\mathsf{c} \arrow[rr, bend right, "R"'] & \mathsf{C} & \mathsf{c}R & \mathsf{D}
\end{tikzcd}
$$

  那么

$$\phi_1 : (\_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \xrightarrow{\overset{\mathsf{c}}{(\mathsf{D}\times\mathsf{C})} \overset{\mathsf{c}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (\_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \_R)$$
$$(\_ \,.\, \mathsf{c})^{\phi_1} : (\_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \xrightarrow{\overset{\mathsf{c}}{\mathsf{D}} \longrightarrow \mathsf{Set}} (\_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R)$$
$$(\mathsf{d} \,.\, \_)^{\phi_1} : (\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \xrightarrow{\overset{\mathsf{c}}{\mathsf{C}} \longrightarrow \mathsf{Set}} (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \_R)$$

  将构成自然同构 。



dL
d^η L
φ^op
cRL
c^ε
c
C
fRL
c'RL
c'
c'^ε
f
CRL
C;_C Id
⟹
L
d
d^η
dLR
γ
fR
cR
D
γL
R