

# 04-05 极限与余极限

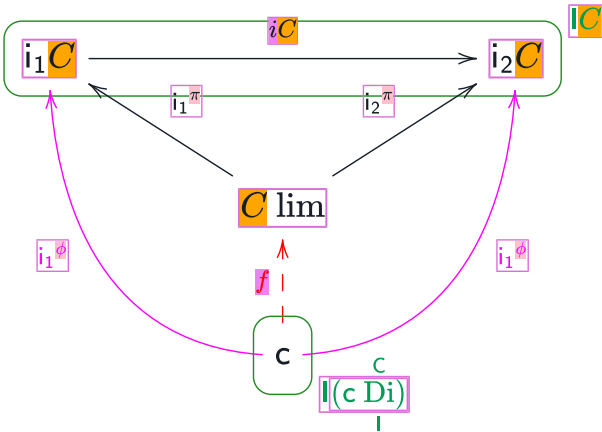
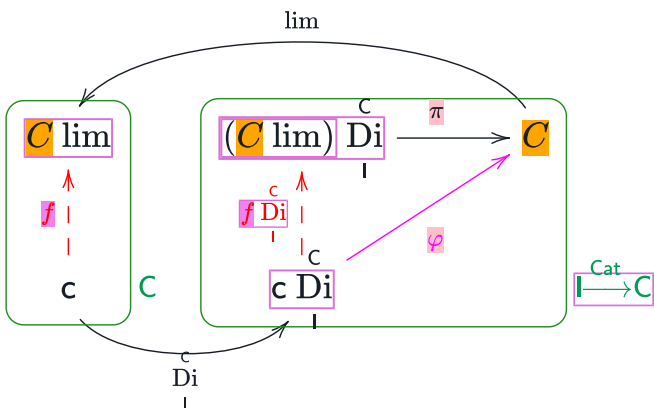
L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Definitions are here.

若提供函子  $C : I \rightarrow C$  , 其中的  $I$  为小范畴 ( 即  $I \text{Obj}$  能与  $\text{Set}$  中某个对象建立双射 ) 则

## 泛性质

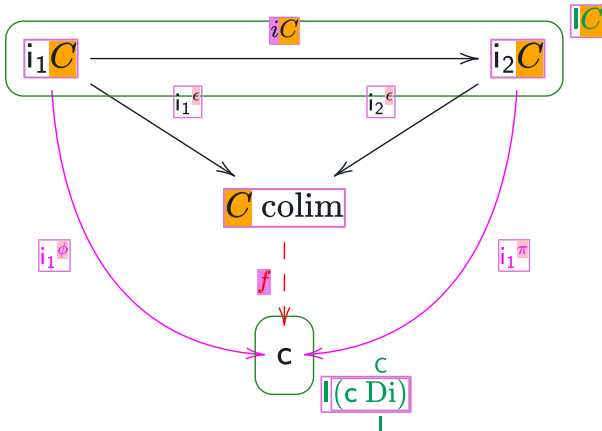
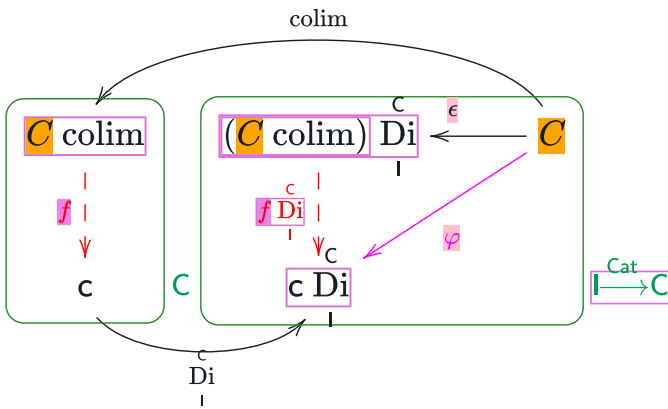
默认函子  $\lim : (I \xrightarrow{\text{Cat}} C) \xrightarrow{??} C$  在范畴  $C$  中有如下性质 :

- $(c \text{Di} \xrightarrow{C} C) \cong (c \xrightarrow{C} C \lim)$   
——  $i$  为  $I$  中任意对象。此即为极限的泛性质。



默认函子  $\text{colim} : (I \xrightarrow{\text{Cat}} C) \xrightarrow{??} C$  在范畴  $C$  中有如下性质 :

- $(C \xrightarrow{C} c \text{Di}) \cong (C \xrightarrow{C} C \text{colim} \rightarrow c)$   
——  $i$  为  $I$  中任意对象。此即为余极限的泛性质。



### Note

在上面的插图中

- $\text{Di} : C \xrightarrow{\text{Cat}} (C \times C)$  为对角函子满足  
 $c \mapsto (c, c)$
- $\text{Di} : C \xrightarrow{\text{Cat}} (I \xrightarrow{\text{Cat}} C)$   
 $c \mapsto$  常值函子  
 $c \text{Di} : I \xrightarrow{\text{Cat}} C$   
 $i \mapsto c$   
 $f \mapsto \cdot_c \text{id}$

即为对角函子的第二种等价的定义。  
 $I$  为仅含两个对象的范畴, 在此则  
作为一个指标范畴。 $1$  和  $2$  分别为  
其中的对象。

- $C : I \xrightarrow{\text{Cat}} C$  为函子, 满足  
 $i \mapsto c_i$

不难看出上图中

$$\pi : ((C \lim) \text{Di}) \xrightarrow{\text{Cat}} C$$

$$\epsilon : C \xrightarrow{\text{Cat}} ((C \text{colim}) \text{Di})$$

都构成自然变换。 $1_\pi \cdot 2_\pi$  和  $1_\epsilon \cdot 2_\epsilon$  可分别视作为  $\pi$  和  $\epsilon$ 。