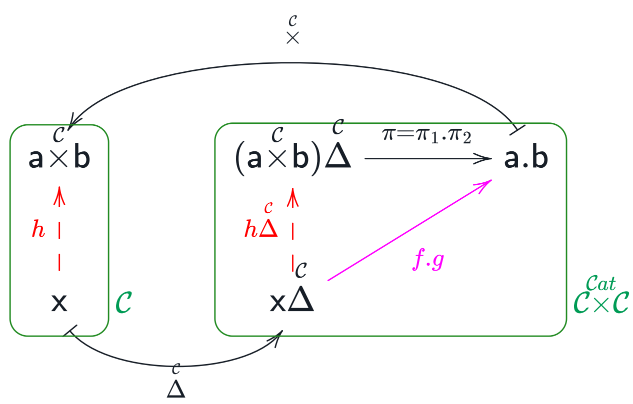
章节 04 - 05 类型的积与和

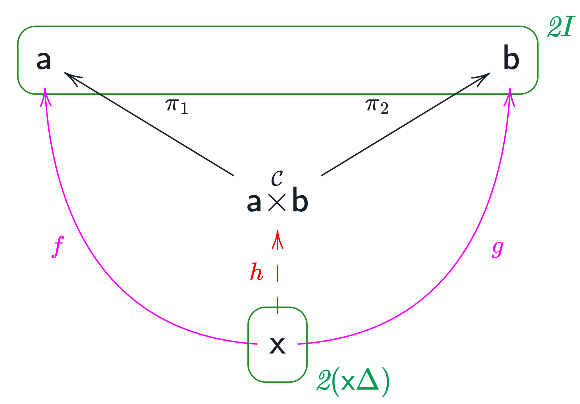
LaTeX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{\mathcal{C}}{\times} : \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow} \mathcal{C}$ 在范畴 $\mathcal{C}$ 中有下述性质：

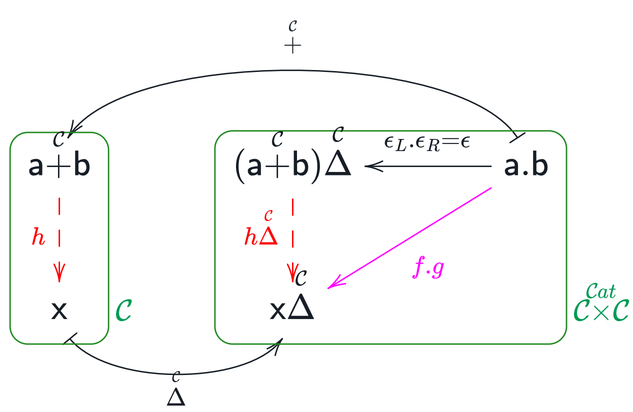
- $(\mathrm{x} \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathrm{a}) \overset{\mathcal{S}et}{\times} (\mathrm{x} \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathrm{b}) \cong (\mathrm{x} \overset{\mathcal{C}}{\to} (\mathrm{a} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathrm{b}))$，x 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象。
  —— **泛性质**，指数对乘法的分配律。下图便于形象理解：

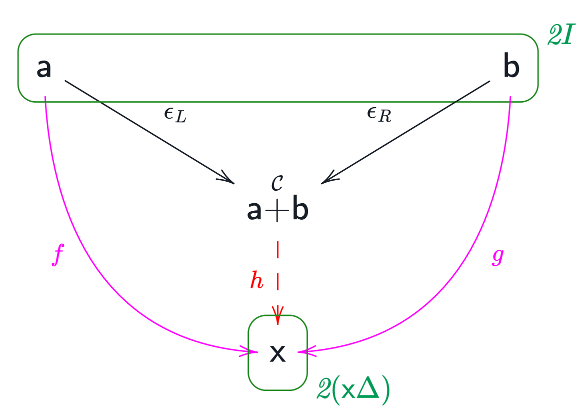




默认函子 $\overset{\mathcal{C}}{+} : \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow} \mathcal{C}$ 在范畴 $\mathcal{C}$ 中有下述性质：

- $(\mathrm{a} \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathrm{x}) \overset{\mathcal{S}et}{\times} (\mathrm{b} \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathrm{x}) \cong ((\mathrm{a} \overset{\mathcal{C}}{+} \mathrm{b}) \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathrm{x})$，x 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象。
  —— **泛性质**，指数对加法的分配律。下图便于形象理解：



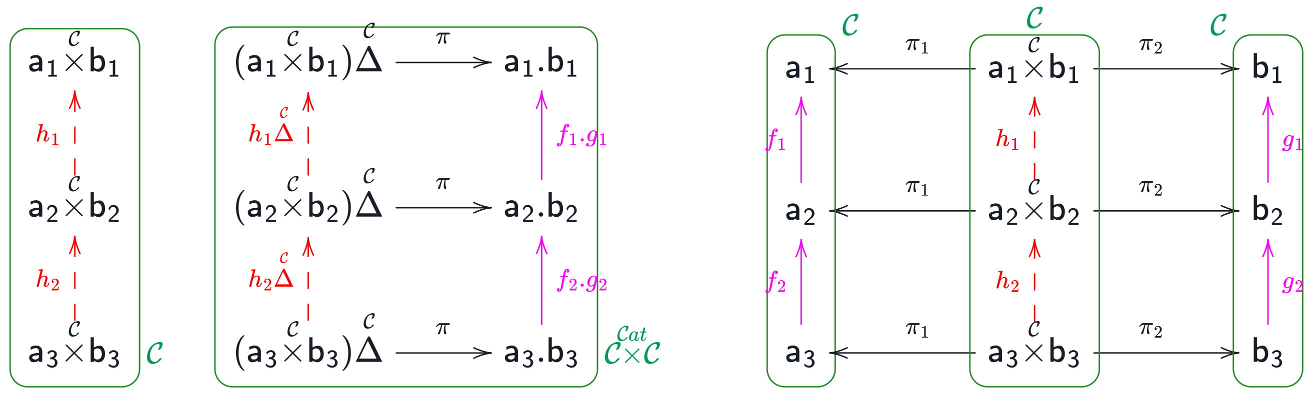


> **Note**
>
> 在上面的插图中：
>
> - $\overset{\mathcal{C}}{\Delta} : \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow} \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{C}$ 为对角函子，满足
> $\Delta : \mathrm{c} \longmapsto \mathrm{c}\ .\ \mathrm{c}$
> - $I : \mathit{2} \overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow} \mathcal{C}$ 为函子，满足
> $I : 1 \longmapsto \mathrm{a}$
> $\quad\ 2 \longmapsto \mathrm{b}$
> $\mathit{2}$ 为只有两个对象的范畴，
>   1 和 2 分别为其中的对象。
>   这里 $\mathit{2}$ 充当一个指标范畴。

函子性

如何证明 $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathcal{C}}{\times} : ({}_{:\mathsf{a}_2}\mathrm{id} \,.\, {}_{:\mathsf{b}_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:\mathsf{a}_2 \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{b}_2}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ **保持恒等箭头**；
- $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (f_2 \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_1 \,.\, g_2 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) \mapsto h_2 \overset{\mathcal{C}}{\circ} h_1$
  —— 即函子 $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ **保持箭头复合运算** 。
  下图有助于形象理解证明的过程：

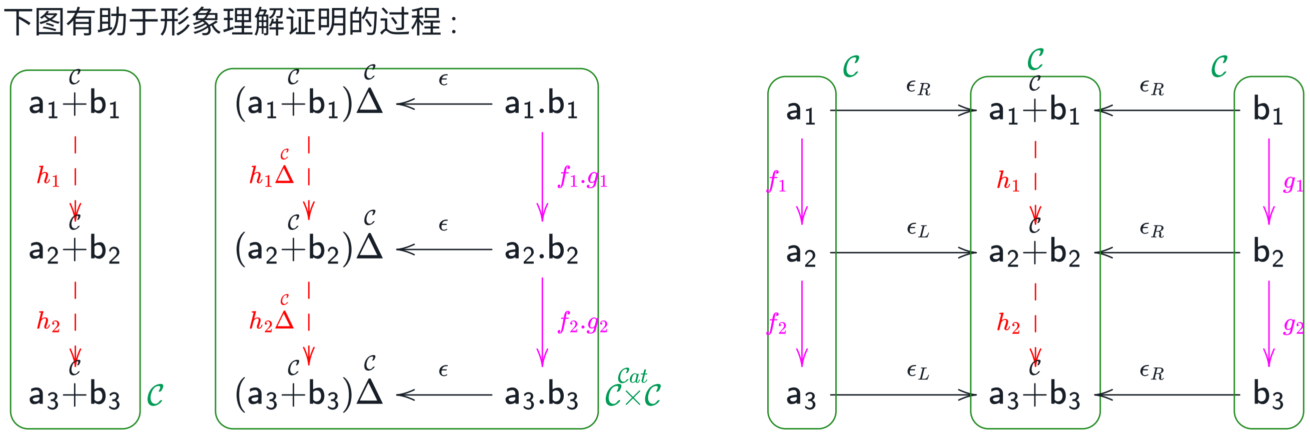


另外规定 $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ 在实参分别为箭头和对象时的输出：

- $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (f_1 \,.\, \mathsf{b}_1) \longmapsto f_1 \overset{\mathcal{C}}{\times} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}$
  $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (\mathsf{a}_1 \,.\, g_1) \longmapsto {}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}}{\times} g_1$

如何证明 $\overset{\mathcal{C}}{+}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathcal{C}}{+} : ({}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \,.\, {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{+} \mathsf{b}_1}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{\mathcal{C}}{+}$ **保持恒等箭头**；
- $\overset{\mathcal{C}}{+} : (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2 \,.\, g_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_2) \mapsto h_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} h_2$
  —— 即函子 $\overset{\mathcal{C}}{+}$ **保持箭头复合运算** 。
  下图有助于形象理解证明的过程：



同理规定 $\overset{\mathcal{C}}{+}$ 在实参分别为箭头和对象时的输出：

- $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (f_1 \,.\, \mathsf{b}_1) \longmapsto f_1 \overset{\mathcal{C}}{+} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}$
  $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (\mathsf{a}_1 \,.\, g_1) \longmapsto {}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}}{+} g_1$

运算性质

对于函子 $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ 我们不难得知

- $a \overset{\mathcal{C}}{\times} 1 \cong 1 \overset{\mathcal{C}}{\times} a \cong a$ —— 乘法有**幺元** 1 。
  下图便于理解证明 : (f, g) 决定 h , h' 。

$$\begin{tikzcd}
(a\overset{\mathcal{C}}{\times}1)\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & a.1 \\
x\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, "f.g=f._{:x}!"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[r, "{}_{:a}\mathrm{id}._{:a}!"] & a.1 \\
x\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "f\overset{\mathcal{C}}{\Delta}=h'\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, "f.g=f._{:x}!"']
\end{tikzcd}$$

- $a \overset{\mathcal{C}}{\times} b \cong b \overset{\mathcal{C}}{\times} a$ —— 乘法运算有**交换律** 。
  下图便于理解证明 : (f, g) 决定 h , h' 。

$$\begin{tikzcd}
(a\overset{\mathcal{C}}{\times}b)\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & a.b \\
x\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, "f.g"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(b\overset{\mathcal{C}}{\times}a)\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & b.a \\
x\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h'\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, "g.f"']
\end{tikzcd}$$

- $(a \times b) \times c \cong a \times (b \times c)$ —— 乘法运算具有**结合律** 。
  下图有助于形象理解证明 : (f_{ax}, f_{bx}, f_{cx}) 决定 h , h' 。

$$\begin{tikzcd}
((a\overset{\mathcal{C}}{\times}b)\overset{\mathcal{C}}{\times}c)\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi"] & (a\overset{\mathcal{C}}{\times}b).c \arrow[r, "\pi._{:c}\mathrm{id}"] & (a.b).c \\
x\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, dotted, "j.f_{cx}"] \arrow[urr, "(f_a.f_b).f_{cx}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(a\overset{\mathcal{C}}{\times}(b\overset{\mathcal{C}}{\times}c))\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi"] & a.(b\overset{\mathcal{C}}{\times}c) \arrow[r, "{}_{:a}\mathrm{id}.\pi"] & a.(b.c) \\
x\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h'\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, dotted, "f_{ax}.j'"] \arrow[urr, "f_a.(f_b.f_c)"']
\end{tikzcd}$$

对于函子 $\overset{\mathcal{C}}{+}$ 我们不难得知

- $a \overset{\mathcal{C}}{+} 0 \cong 0 \overset{\mathcal{C}}{+} a \cong a$ —— 加法有**幺元** 0 。
  下图有助于理解 : (f, g) 决定 h , h' 。

$$\begin{tikzcd}
(a\overset{\mathcal{C}}{+}0)\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"'] & a.0 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f.g=f._{:\backslash \mathrm{ob}x}\text{¡}"] \\
x\overset{\mathcal{C}}{\Delta}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "f=h'\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"'] & a.0 \arrow[l, "{}_{:a}\mathrm{id}._{:a}\text{¡}"'] \arrow[dl, "f.g=f._{:x}\text{¡}"] \\
x\overset{\mathcal{C}}{\Delta}
\end{tikzcd}$$

- $a \overset{\mathcal{C}}{+} b \cong b \overset{\mathcal{C}}{+} a$ —— 加法运算有**交换律** 。
  下图有助于理解 : (f, g) 决定 h , h' 。

$$\begin{tikzcd}
(a\overset{\mathcal{C}}{+}b)\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"'] & a.b \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f.g"] \\
x\overset{\mathcal{C}}{\Delta}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(b\overset{\mathcal{C}}{+}a)\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h'\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"'] & b.a \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "g.f"] \\
x\overset{\mathcal{C}}{\Delta}
\end{tikzcd}$$

- $(a + b) + c \cong a + (b + c)$ —— 加法运算具有**结合律** 。
  下图有助于形象理解证明 : (f_{ax}, f_{bx}, f_{cx}) 决定 h , h' 。

$$\begin{tikzcd}
((a\overset{\mathcal{C}}{+}b)\overset{\mathcal{C}}{+}c)\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"'] & (a\overset{\mathcal{C}}{+}b).c \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "j.f_c"] & (a.b).c \arrow[l, "\epsilon._{:c}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "(f_a.f_b).f_c"] \\
x\overset{\mathcal{C}}{\Delta}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(a\overset{\mathcal{C}}{+}(b\overset{\mathcal{C}}{+}c))\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h'\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"'] & a.(b\overset{\mathcal{C}}{+}c) \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "f_a.j'."] & a.(b.c) \arrow[l, "{}_{:a}\mathrm{id}.\epsilon"'] \arrow[dll, "f_a.(f_b.f_c)"] \\
x\overset{\mathcal{C}}{\Delta}
\end{tikzcd}$$

幺半范畴

像刚才这样对象运算具有**单位元**以及**结合律**的范畴称作**幺半范畴**；

若上述范畴还具有**交换律**则称作**对称幺半范畴**；

很明显我们的范畴 $\mathcal{C}$ 是典型的**对称幺半范畴** 。

幺半群

什么是幺半群呢？有两种定义方式：

- **幺半群** $\mathcal{M}$ 是个范畴，其只含一个对象 m；
  其中的复合运算正好有单位元以及结合律 。
- 对象 m 属于幺半范畴 $\mathcal{C}$，满足下述交换图：

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{1}\overset{\mathcal{C}}{\times}\mathsf{m} \arrow[r, "u\overset{\mathcal{C}}{\otimes}{}_{:\mathsf{m}}\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\text{左单位元 } u_l"'] & \mathsf{m}\overset{\mathcal{C}}{\times}\mathsf{m} \arrow[d, "p"', "\text{运算结果唯一}"] & \mathsf{m}\overset{\mathcal{C}}{\times}\mathsf{1} \arrow[l, "{}_{:\mathsf{m}}\mathrm{id}\overset{\mathcal{C}}{\otimes}u"'] \arrow[dl, "u_r \text{ 右单位元}"] \\
& \mathsf{m} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(\mathsf{m}\overset{\mathcal{C}}{\times}\mathsf{m})\overset{\mathcal{C}}{\times}\mathsf{m} \arrow[rr, "\text{结合律 } a"] \arrow[d, "\text{先算左侧括号 } p\overset{\mathcal{C}}{\otimes}{}_{:\mathsf{m}}\mathrm{id}"'] & & \mathsf{m}\overset{\mathcal{C}}{\times}(\mathsf{m}\overset{\mathcal{C}}{\times}\mathsf{m}) \arrow[d, "{}_{:\mathsf{m}}\mathrm{id}\overset{\mathcal{C}}{\otimes}p \text{ 先算右侧括号}"] \\
\mathsf{m}\overset{\mathcal{C}}{\times}\mathsf{m} \arrow[r, "\text{再算最后结果 } p"'] & \mathsf{m} & \mathsf{m}\overset{\mathcal{C}}{\times}\mathsf{m} \arrow[l, "p \text{ 再算最后结果}"]
\end{tikzcd}
$$

  其中

  - u ：1 $\overset{\mathcal{C}}{\to}$ m 其实就是 m 里面的幺元
  - u_l：1 $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ m $\overset{\mathcal{C}}{\to}$ m 表示 u 构成左幺元
  - u_r：m $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ 1 $\overset{\mathcal{C}}{\to}$ m 表示 u 构成右幺元
  - p ：m $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ m $\overset{\mathcal{C}}{\to}$ m 即为 m 中的二元运算
  - a ：(m $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ m) $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ m $\overset{\mathcal{C}}{\to}$ m $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ (m $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ m) 表示 m 具有结合律