10 伴随函子

LaTeX Definitions are here.

若有函子 L : $\boxed{\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}}$
以及函子 R : $\boxed{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}}$, 即

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[loop above, "{}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id}"] \arrow[rr, bend right, "R"'] & & \mathsf{D} \arrow[ll, bend right, "L"'] \arrow[loop above, "{}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id}"]
\end{tikzcd}
$$

那么规定

伴随函子的第一种定义

- $L \dashv R$ 当且仅当
  对任意 C 中对象 c
  及任意 D 中对象 d
  都有 $\boxed{(\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c})}$ 。

假如确实有 $L \dashv R$, 那么不难得知

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_2 , 见下 :

$$
\begin{aligned}
\phi_2 &: (\_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \_R) \xrightarrow{\overset{\mathsf{C}}{(\mathsf{D}\times\mathsf{C})\to\mathsf{Set}}} (\_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \\
(\_\,.\,\mathsf{c})^{\phi_2} &: (\_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R) \xrightarrow{\overset{\mathsf{C}}{\mathsf{D}\to\mathsf{Set}}} (\_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \\
(\mathsf{d}\,.\,\_)^{\phi_2} &: (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \_R) \xrightarrow{\overset{\mathsf{C}}{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}}} (\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)
\end{aligned}
$$

套用反变米田引理我们便可获得

$$
\underbrace{\left((\_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R) \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{D}^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Set}}} (\_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c})\right)}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}RL \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c})}_{\text{一堆元素}}
$$

由反变米田引理的证明可知 : 对每个左侧集合中的自然同构 $(\_\,.\,\mathsf{c})^{\phi_2}$
右侧集合中都有一个箭头与之对应 , 即 $\mathrm{id}_{:\mathsf{c}R}(\mathsf{c}R\,.\,\mathsf{c})^{\phi_2} = \mathsf{c}^{\varepsilon}$ 。如此

- $\varepsilon : R \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} L \xrightarrow{\mathsf{C}\to\mathsf{C}} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id}$ 构成自然变换 。

> 考虑任意 $f^{\mathrm{op}} : \mathsf{c}' \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$:
>
> $$
> \begin{tikzcd}
> \mathsf{c}R \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R \arrow[r, "(\mathsf{c}R.\mathsf{c})^{\phi_2}"] \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}R \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R"'] & \mathsf{c}RL \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c} \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}RL \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}"] \\
> \mathsf{c}'R \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R \arrow[r, dashed, "(\mathsf{c}'R.\mathsf{c})^{\phi_2}"] & \mathsf{c}'RL \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c} \\
> \mathsf{c}'R \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}'R \arrow[r, "(\mathsf{c}'R.\mathsf{c}')^{\phi_2}"'] \arrow[u, "\mathsf{c}'R \overset{\mathsf{D}}{\to} f^{\mathrm{op}}R"] & \mathsf{c}'RL \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}' \arrow[u, "\mathsf{c}'RL \overset{\mathsf{C}}{\to} f^{\mathrm{op}}"']
> \end{tikzcd}
> \qquad
> \begin{tikzcd}
> {}_{:\mathsf{c}R}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{c}R.\mathsf{c})^{\phi_2}"] \arrow[d, mapsto, "f^{\mathrm{op}}R \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R"'] & {}_{:\mathsf{c}R}\mathrm{id}(\mathsf{c}R.\mathsf{c})^{\phi_2} = \mathsf{c}^{\varepsilon} \arrow[d, mapsto, "f^{\mathrm{op}}RL \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c} = \mathsf{c}^{(f^{\mathrm{op}}RL \overset{\mathsf{C}}{\circ} _)}"] \\
> f^{\mathrm{op}}R \arrow[r, mapsto, dashed, "(\mathsf{c}'R.\mathsf{c})^{\phi_2}"] & f^{\mathrm{op}}RL \overset{\mathsf{C}}{\circ} \mathsf{c}^{\varepsilon} = \mathsf{c}'^{\varepsilon} \overset{\mathsf{D}}{\circ} f^{\mathrm{op}} \\
> {}_{:\mathsf{c}'R}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{c}'R.\mathsf{c}')^{\phi_2}"'] \arrow[u, mapsto, "\mathsf{c}'R \overset{\mathsf{D}}{\to} f^{\mathrm{op}}R"] & {}_{:\mathsf{c}'R}\mathrm{id}(\mathsf{c}'R.\mathsf{c}')^{\phi_2} = \mathsf{c}'^{\varepsilon} \arrow[u, mapsto, "\mathsf{c}'RL \overset{\mathsf{D}}{\to} f^{\mathrm{op}} = (\mathsf{c}'RL)^{(_ \overset{\mathsf{D}}{\circ} f^{\mathrm{op}})}"']
> \end{tikzcd}
> $$
>
> 上方右图的第二行的第二个节点说明了一切 。这两张图
> 其实就是反变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果 。

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_1 , 见下 :

$$
\begin{aligned}
\phi_1 &: (\_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \xrightarrow{\overset{\mathsf{C}}{(\mathsf{D}\times\mathsf{C})\to\mathsf{Set}}} (\_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \_R) \\
(\_\,.\,\mathsf{c})^{\phi_1} &: (\_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \xrightarrow{\overset{\mathsf{C}}{\mathsf{D}\to\mathsf{Set}}} (\_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R) \\
(\mathsf{d}\,.\,\_)^{\phi_1} &: (\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \xrightarrow{\overset{\mathsf{C}}{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}}} (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \_R)
\end{aligned}
$$

套用协变米田引理我们便可获得

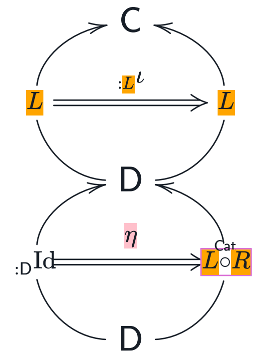
$$
\underbrace{\left((\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}}} (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \_R)\right)}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{d}LR)}_{\text{一堆元素}}
$$

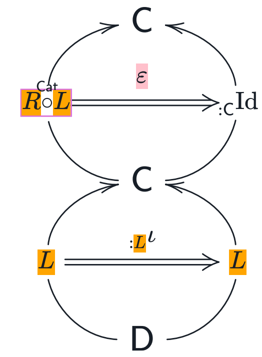
由协变米田引理的证明可知 : 对每个左侧集合中的自然同构 $(\mathsf{d}\,.\,\_)^{\phi_1}$
右侧集合中都有一个箭头与之对应 , 即 $\mathrm{id}_{:\mathsf{d}L}(\mathsf{d}\,.\,\mathsf{d}L)^{\phi_1} = \mathsf{d}^{\eta}$ 。如此 。

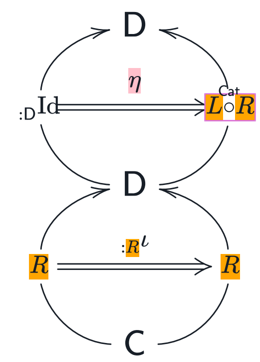
- $\eta : {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id} \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{D}\to\mathsf{D}}} L \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} R$ 构成自然变换 。

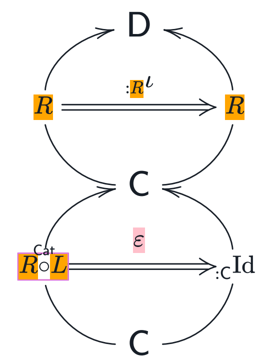
> 考虑任意 $g : \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{d}'$:
>
> $$
> \begin{tikzcd}
> \mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{d}L \arrow[r, "(\mathsf{d}.\mathsf{d}L)^{\phi_1}"] \arrow[d, "\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} gL"'] & \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{d}LR \arrow[d, "\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} gLR"] \\
> \mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{d}'L \arrow[r, dashed, "(\mathsf{d}.\mathsf{d}'L)^{\phi_1}"] & \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{d}'LR \\
> \mathsf{d}'L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{d}'L \arrow[r, "(\mathsf{d}'.\mathsf{d}'L)^{\phi_1}"'] \arrow[u, "gL \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{d}'L"] & \mathsf{d}' \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{d}'LR \arrow[u, "g \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{d}'LR"']
> \end{tikzcd}
> \qquad
> \begin{tikzcd}
> {}_{:\mathsf{d}L}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{d}.\mathsf{d}L)^{\phi_1}"] \arrow[d, mapsto, "\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} gL"'] & {}_{:\mathsf{d}L}\mathrm{id}(\mathsf{d}.\mathsf{d}L)^{\phi_1} = \mathsf{d}^{\eta} \arrow[d, mapsto, "\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} gLR = \mathsf{d}^{(_ \overset{\mathsf{D}}{\circ} gLR)}"] \\
> gL \arrow[r, mapsto, dashed, "(\mathsf{d}.\mathsf{d}'L)^{\phi_1}"] & \mathsf{d}^{\eta} \overset{\mathsf{D}}{\circ} gLR = g \overset{\mathsf{D}}{\circ} \mathsf{d}'^{\eta} \\
> {}_{:\mathsf{d}'L}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{d}'.\mathsf{d}'L)^{\phi_1}"'] \arrow[u, mapsto, "gL \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{d}'L"] & {}_{:\mathsf{d}'L}\mathrm{id}(\mathsf{d}'.\mathsf{d}'L)^{\phi_1} = \mathsf{d}'^{\eta} \arrow[u, mapsto, "g \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{d}'LR = (\mathsf{d}'LR)^{(g \overset{\mathsf{D}}{\circ} _)}"']
> \end{tikzcd}
> $$
>
> 上方右图的第二行的第二个节点说明了一切 。这两张图
> 其实就是协变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果 。

对于前面的 ε 和 η 我们有下述交换图成立：

- $$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\overset{???}{\eta \circ {:_L}\iota}"] \arrow[dr, ":_L\iota"'] & L \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} R \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} L \arrow[d, "\overset{???}{{:_L}\iota \circ \varepsilon}"] \\
& L
\end{tikzcd}$$




- $$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\overset{???}{{:_R}\iota \circ \eta}"] \arrow[dr, ":_R\iota"'] & R \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} L \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} R \arrow[d, "\overset{???}{\varepsilon \circ {:_R}\iota}"] \\
& R
\end{tikzcd}$$




伴随函子的第二种定义

假设我们不知道 L 和 R 构成一对伴随函子并且有自然变换
$\varepsilon : R \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} L \xrightarrow{\mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{C}} {:_\mathsf{C}}\mathrm{Id}$ 和 $\eta : {:_\mathsf{D}}\mathrm{Id} \xrightarrow{\mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{D}} L \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} R$ 能同时满足
上页开头的两幅交换图，那么

- 对任意 C 中对象 c
  及任意 D 中对象 d
  及任意 $f^{\mathrm{op}} : \mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$ 始终存在
  唯一的 $g : \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R$ 使下图交换。

  $$\begin{tikzcd}
  \mathsf{c}R & & \mathsf{c}RL \arrow[r, "\mathsf{c}^{\varepsilon}"] & \mathsf{c} \arrow[lll, bend right, "R"'] \\
  \mathsf{d} \arrow[u, dashed, "g"] \arrow[rr, bend right, "L"'] & \mathsf{D} & \mathsf{d}L \arrow[u, dashed, "gL"] \arrow[ur, "f^{\mathrm{op}}"'] & \mathsf{C}
  \end{tikzcd}$$

  如此便有 $(\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R)$，
  即 $L \dashv R$。

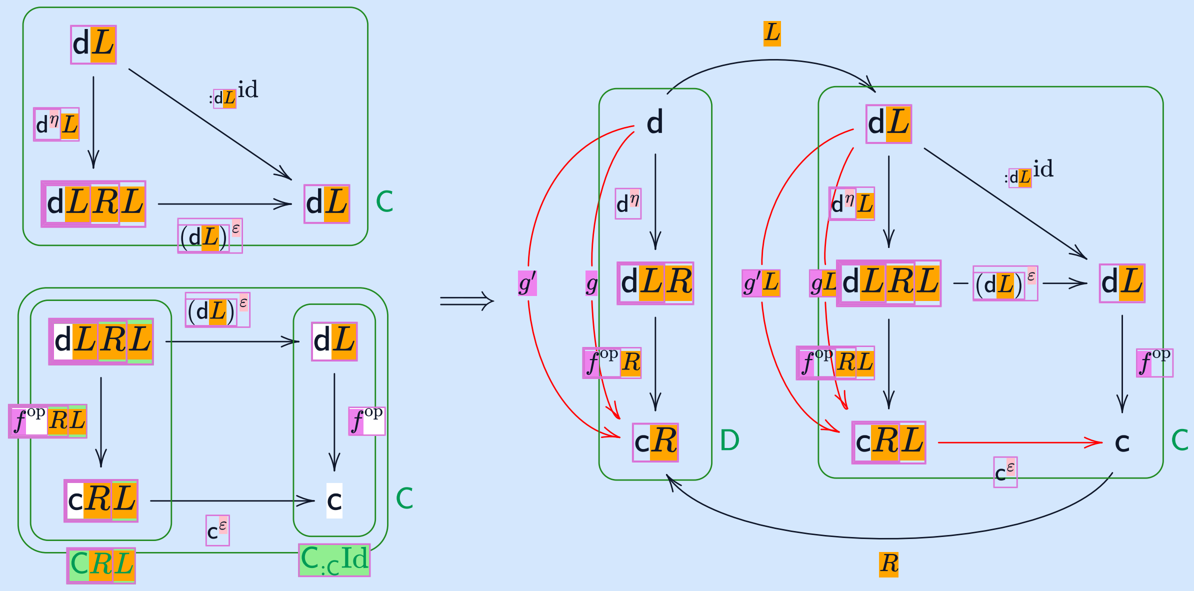
- 对任意 C 中对象 c
  及任意 D 中对象 d
  及任意 $g : \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R$ 始终都会存在
  唯一的 $f^{\mathrm{op}} : \mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$ 使下图交换。

  $$\begin{tikzcd}
  \mathsf{d}L \arrow[d, dashed, "f^{\mathrm{op}}"'] & & \mathsf{d}LR \arrow[d, dashed, "f^{\mathrm{op}}R"'] & \mathsf{d} \arrow[l, "\mathsf{d}^{\eta}"'] \arrow[dl, "g"] \arrow[lll, bend right, "L"'] \\
  \mathsf{c} \arrow[rr, bend right, "R"'] & \mathsf{C} & \mathsf{c}R & \mathsf{D}
  \end{tikzcd}$$

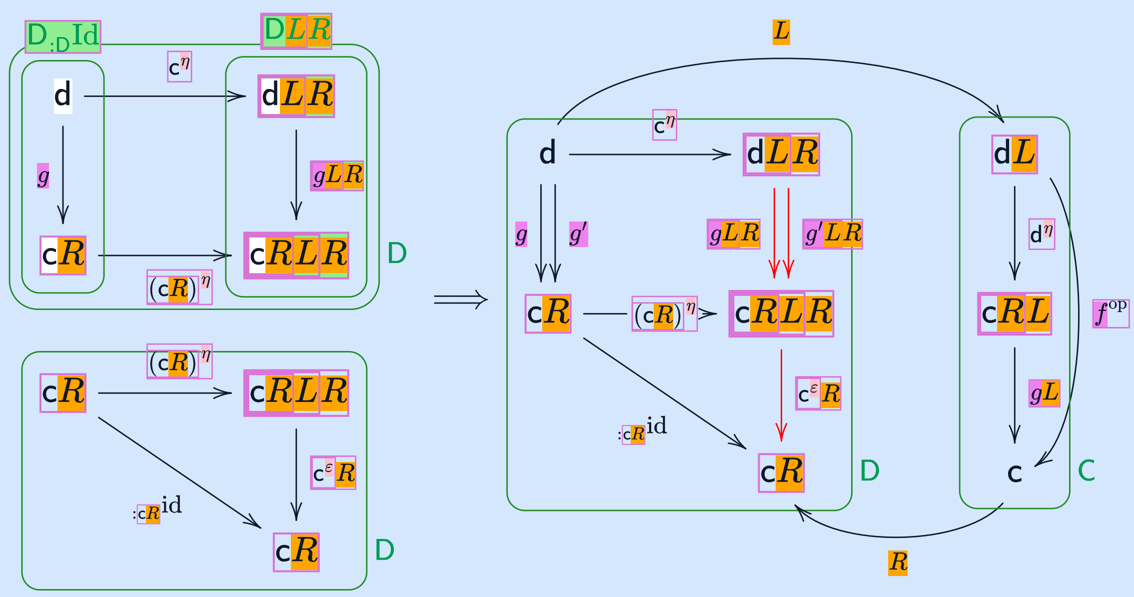
  如此便有 $(\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R)$，
  即 $L \dashv R$。

现证明上页的头两条定理。

下方左图上半部分即为上页第一幅图，而
下方左图下半部分可由 ε 为自然变换得出；
将两个图拼在一起即可获得下方右图：



为何 g 唯一呢？若 g' 亦满足上图 —— 即上方右图中
右侧的两条 L 形走向的红色路径的复合结果是一致的，
则下方右图中的两条红色路径的复合结果也是一致的；
如此根据下方右图即可得知 $g = g'$ 。



另一侧同理，这里不再赘述。