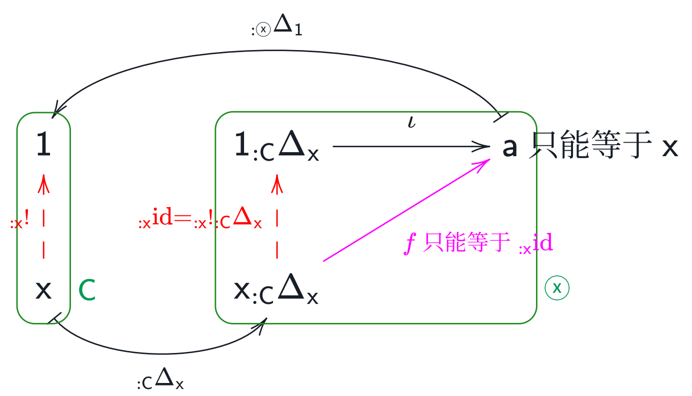
章节 01 - 03 基本概念

LaTeX Definitions are here.

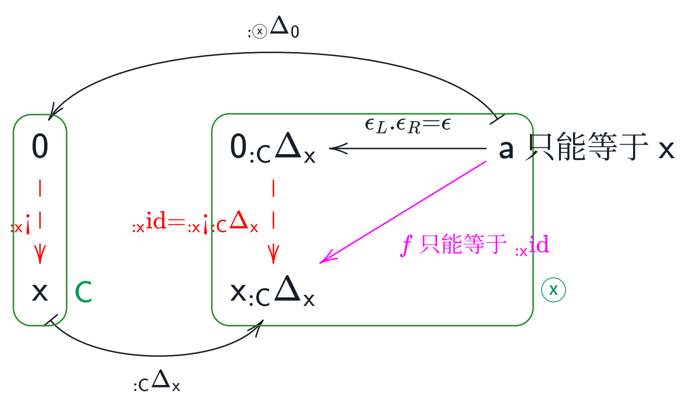
始终对象的泛性质

范畴由对象及其间箭头构成。本文重点分析**余积闭范畴** C。首先给出如下定义：

- 1 为**终对象**当且仅当对任意 C 中对象 x 都有且仅有唯一的箭头 ${}_{:\mathsf{x}}! : \mathsf{x} \xrightarrow{\mathsf{C}} 1$：



- 0 为**始对象**当且仅当对任意 C 中对象 x 都有且仅有唯一的箭头 ${}_{:\mathsf{x}}¡ : 0 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{x}$：



> **Note**
>
> ${}_{:\mathsf{C}}\Delta_{\mathsf{x}} : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} ⓧ$ 为常值函子满足 ${}_{:\mathsf{C}}\Delta_{\mathsf{x}} : \mathsf{c} \longmapsto \mathsf{x}$。 另外还有一点：其他范畴中始终对象不一定存在。

如果范畴 C 中真的含有 0 和 1 分别作为始对象和终对象, 那么根据上述信息可知

- 形如 $1 \xrightarrow{\mathsf{C}} 1$ 的箭头只有一个，即 ${}_{:1}\mathrm{id}$；
- 形如 $0 \xrightarrow{\mathsf{C}} 0$ 的箭头只有一个，即 ${}_{:0}\mathrm{id}$；

元素与全局元素

对任意对象 $\mathsf{a}, \mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \mathrm{etc}$，$\mathsf{b}, \mathsf{b}_1, \mathsf{b}_2, \mathrm{etc}$ 以及任意映射 i，我们进行如下的规定：

- i 为 b 的**元素**当且仅当 $i\ \mathrm{tar} = \mathsf{b}$；
- i 为 a 的**全局元素**当且仅当 $i\ \mathrm{tar} = \mathsf{a}$ 且 $i\ \mathrm{src} = 1$
- i 不存在仅当 $i\ \mathrm{tar} = 0$。

> **Note**
>
> 其他范畴中刚才的断言未必成立。

箭头构成的集合

这里再给一个定义：

- $\mathsf{a} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b} =$
  所有从 a 射向 b 的箭头构成的集 。

> **Note**
>
> 上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
> 在其他范畴里 $\mathsf{a} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}$ 未必构成集 。

箭头的复合运算

范畴 C 中特定的箭头可以进行复合运算：
对任意 C 中对象 c_1，c_2，c_3 我们都会有

$$\begin{array}{lcccccc} \overset{\mathsf{C}}{\circ} : (& \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) & \overset{\mathsf{Set}}{\times} & (\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_3 &) & \xrightarrow{\mathsf{Set}} & (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_3) \\ \overset{\mathsf{C}}{\circ} : (& i_1 & . & i_2 &) & \longmapsto & i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2 \end{array}$$

若我们还知道箭头 f_1，i_1，g_1 分别属于
$\mathsf{a}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{a}_1$，$\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1$，$\mathsf{b}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_2$ 那么便有

- $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1) \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1 = f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} (i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1)$
  说明箭头复合运算具有**结合律** 。

另外固定住一侧实参便获可得新的函数：

- $$\begin{array}{lccc} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) : & (\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) & \xrightarrow{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}} & (\mathsf{a}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \\ (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) : & i_1 & \longmapsto & f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1 \end{array}$$
  称作**前复合** 。下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{a}_1 \arrow[drr, bend left, "i_1{:}\mathsf{a}_1\overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow}\mathsf{b}_1"] & {} \arrow[dd, dashed, mapsto, "\mathsf{b}_1{}^{(f_1\overset{\mathsf{C}}{\circ}_)}"] & \\
& & \mathsf{b}_1 \arrow[loop right, "{}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}"] \\
\mathsf{a}_2 \arrow[uu, "f_1"] \arrow[urr, bend right, "(f_1\overset{\mathsf{C}}{\circ}i_1){:}\mathsf{a}_2\overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow}\mathsf{b}_3"'] & {} &
\end{tikzcd}$$

- $$\begin{array}{lccc} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) : & (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1) & \xrightarrow{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}} & (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_2) \\ (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) : & i_1 & \longmapsto & i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1 \end{array}$$
  称作**后复合**；下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd}
& {} \arrow[dd, dashed, mapsto, "\mathsf{a}_1{}^{(_\overset{\mathsf{C}}{\circ}g_1)}"] & \mathsf{b}_1 \arrow[dd, "g_1"] \\
\mathsf{a}_1 \arrow[loop left, "{}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id}"] \arrow[urr, bend left, "i_1{:}\mathsf{a}_1\overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow}\mathsf{b}_1"] \arrow[drr, bend right, "(i_1\overset{\mathsf{C}}{\circ}g_1){:}\mathsf{a}_1\overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow}\mathsf{b}_2"'] & & \\
& {} & \mathsf{b}_2
\end{tikzcd}$$

根据上面的定义便不难得出下述结论

- $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) \overset{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$
  复合运算具有**结合律**，即后面会提到的**自然性**；
- $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1) \overset{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1))$
  前复合与复合运算的关系
- $(i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) = ((f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1) \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$
  后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合 。
假如 a_1 为 a_1 的全局元素则可规定

- $a_1 i_1 = a_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1$

恒等箭头

范畴 C 内的每个对象都有恒等映射：

- ${}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} : \mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{a}_1$
  ${}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} : a_1 \mapsto a_1$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- $${}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1 = i_1 \\ = i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}$$

此外还可以得知

- $({}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) : (\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \xrightarrow{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}} (\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)$
  为恒等自然变换，可以记作是 ${}_{:(\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)}\mathrm{id}$；
- $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}) : (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1) \xrightarrow{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1)$
  为恒等自然变换，可以记作是 ${}_{:(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1)}\mathrm{id}$；

单满态以及同构

接下来给出单 / 满态和同构的定义 。

- i_1 为**单态**当且仅当对任意 a_2 若有 $f_1, f_1' : \mathsf{a}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{a}_1$
  满足 $f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1 = f_1' \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1$ 则有 $f_1 = f_1'$ 。详情见下图：

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{a}_1 \arrow[rrd, bend left, "i_1:\mathsf{a}_1\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{b}_1"] & & \\
 & \top \arrow[d, dashed, "\mathsf{b}_1^{(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} _)}"] & \mathsf{b}_1 \arrow[loop right, "{}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}"] \\
\mathsf{a}_2 \arrow[uu, shift left, "f_1'"'] \arrow[uu, shift right, "f_1"] \arrow[rru, bend right, "(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1):\mathsf{a}_2\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{b}_3"'] & {} &
\end{tikzcd}$$

- i_1 为**满态**当且仅当对任意 b_2 若有 $g_1, g_1' : \mathsf{b}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_2$
  满足 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1 = i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1'$ 则有 $g_1 = g_1'$ 。详情见下图：

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathsf{b}_1 \arrow[dd, shift right, "g_1'"'] \arrow[dd, shift left, "g_1"] \\
\mathsf{a}_1 \arrow[loop left, "{}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id}"] \arrow[rru, bend left, "i_1:\mathsf{a}_1\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{b}_1"] \arrow[rrd, bend right, "(i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1):\mathsf{a}_1\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{b}_2"'] & \top \arrow[d, dashed, "\mathsf{a}_1^{(_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1)}"] & \\
 & {} & \mathsf{b}_2
\end{tikzcd}$$

- i_1 为**同构**当且仅当存在 $i_1' : \mathsf{b}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{a}_1$
  使 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1' = {}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id}$ 且 $i_1' \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1 = {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}$ 。
  此时 a_1 , b_1 间的关系可记作 $\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\cong} \mathsf{b}_1$

若还提供 $j_1 : \mathsf{b}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1$ 则不难得知

- 若 i_1 , j_1 为单态
  则 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} j_1$ 为单态；
- 若 i_1 , j_1 为满态
  则 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} j_1$ 为满态；
- 若 i_1 , j_1 为同构
  则 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} j_1$ 为同构；
- 若 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} j_1$ 为同构
  且 i_1 , j_1 其中一个为同构
  则 i_1 , j_1 两者皆构成同构 。

此外我们还可以得出下述结论：

- a_1 为单态，由
  ! 的唯一性可知 。
- ${}_{:0}! = {}_{:1}¡$为同构 —— 这是因为
  $0 \overset{\mathsf{C}}{\to} 0 = \{{}_{:0}\mathrm{id}\}$, $1 \overset{\mathsf{C}}{\to} 1 = \{{}_{:1}\mathrm{id}\}$

同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释 。
后面会将自然性进行进一步推广 。

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, red, "i_1"] \arrow[dr, red, dotted] \arrow[dr, phantom, "\downarrow (\_ \circ g_1)"] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "i_2"'] & b_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, red, "i_1"] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "i_2"'] \arrow[ur, red, dotted] \arrow[ur, phantom, "(f_1 \circ \_) \downarrow"] & b_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, red] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, red, dotted, "i_2"'] \arrow[ur, phantom, "(f_1 \circ \_) \downarrow"] & b_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "i_1"] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, red, "i_2"'] \arrow[ur, red, dotted] \arrow[ur, phantom, "\downarrow (\_ \circ g_1)"] & b_2
\end{tikzcd}
$$

若提供自然变换 β 满足自然性 —— 即对任意
C 中对象 x_1, x_2 及任意 C 中映射 $f_1 : x_2 \xrightarrow{C} x_1$
都会有 $(f_1 \xrightarrow{C} b_1) \overset{\text{Set}}{\circ} {x_2}^{\beta} = {x_1}^{\beta} \overset{\text{Set}}{\circ} (f_1 \xrightarrow{C} b_2)$
(即下图自西向南走向操作结果同自北向东) :

$$
\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, dashed] & b_1 \arrow[d, phantom, "\downarrow {x_1}^{\beta}"] \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "i_2"'] & b_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, phantom, "(f_1 \xrightarrow{C} b_1) \downarrow"] & b_1 \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "i_2"'] & b_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "(f_1 \xrightarrow{C} b_2) \downarrow"] & b_1 \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, dashed, "i_2"'] & b_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "i_1"] & b_1 \arrow[d, phantom, "\downarrow {x_2}^{\beta}"] \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur] \arrow[r, dashed, "i_2"'] & b_2
\end{tikzcd}
$$

那么我们便会有下述结论 :

- $b_1 \cong b_2$ 当且仅当对任意 C 中对象 x
  x^{β} 都是同构 。此时称 β 为**自然同构** 。

若提供自然变换 α 满足自然性 —— 即对任意
C 中对象 x_1, x_2 及任意 C 中映射 $g_1 : x_1 \xrightarrow{C} x_2$
都会有 $(a_1 \xrightarrow{C} g_1) \overset{\text{Set}}{\circ} {x_2}^{\alpha} = {x_1}^{\alpha} \overset{\text{Set}}{\circ} (a_2 \xrightarrow{C} g_1)$
(即下图自西向南走向操作结果同自北向东) :

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, phantom, "{x_1}^{\alpha} \downarrow"] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "i_2"'] & x_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, dashed] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \arrow[d, phantom, "\downarrow (a_1 \xrightarrow{C} g_1)"'] \\
a_2 \arrow[r, "i_2"'] & x_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "i_1"] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \arrow[d, phantom, "\downarrow (a_2 \xrightarrow{C} g_1)"'] \\
a_2 \arrow[ur] \arrow[r, dashed, "i_2"'] & x_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "{x_2}^{\alpha} \downarrow"] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[r, dashed, "i_2"'] & x_2
\end{tikzcd}
$$

那么我们便会有下述结论 :

- $a_1 \cong a_2$ 当且仅当对任意 C 中对象 x
  x^{α} 都是同构 。此时称 α 为**自然同构** 。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{Set} & \\
x_1 \xrightarrow{C} b_1 \arrow[rr, "x_1^\beta"] \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{C} b_1"'] & & x_1 \xrightarrow{C} b_2 \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{C} b_2"] \\
x_2 \xrightarrow{C} b_1 \arrow[rr, "x_2^\beta"'] & & x_2 \xrightarrow{C} b_2 \\
C \xrightarrow{C} b_1 & & C \xrightarrow{C} b_2
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧（考虑特殊情况）

$$\begin{tikzcd}
b_1 \xrightarrow{C} b_1 \arrow[r, "b_1^\beta"] \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{C} b_1"'] & b_1 \xrightarrow{C} b_2 \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{C} b_2"] \\
x_2 \xrightarrow{C} b_1 \arrow[r, "x_2^\beta"'] & x_2 \xrightarrow{C} b_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
:_{b_1}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "b_1^\beta"] \arrow[d, mapsto, "f_1 \xrightarrow{C} b_1"'] & :_{b_1}\mathrm{id}(b_1^\beta) \arrow[d, mapsto, "f_1 \xrightarrow{C} b_2"] \\
f_1 \arrow[r, mapsto, "x_2^\beta"'] & f_1 \circ (\mathrm{etc})
\end{tikzcd}$$

为了方便就用 (etc) 表示 $:_{b_1}\mathrm{id}(b_1^\beta)$。 由上图可知 $f_1(x_2^\beta) = f_1 \overset{C}{\circ} (\mathrm{etc})$，故 $x_2^\beta = x_2 \xrightarrow{C} (\mathrm{etc})$；而 $x_2^\beta = x_2 \xrightarrow{C} (\mathrm{etc}) = x_2^{(\_ \overset{C}{\circ} (\mathrm{etc}))}$ 是同构，从而知 $((\mathrm{etc}) \circ \_)$ 是同构，$(\mathrm{etc}) : b_1 \xrightarrow{C} b_2$ 也是。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在米田嵌入处会详细介绍。

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{Set} & \\
a_1 \xrightarrow{C} x_1 \arrow[rr, "x_1^\alpha"] \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{C} g_1"'] & & a_2 \xrightarrow{C} x_1 \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{C} g_1"] \\
a_1 \xrightarrow{C} x_2 \arrow[rr, "x_2^\alpha"'] & & a_2 \xrightarrow{C} x_2 \\
a_1 \xrightarrow{C} C & & a_2 \xrightarrow{C} C
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧（考虑特殊情况）

$$\begin{tikzcd}
a_1 \xrightarrow{C} a_1 \arrow[r, "x_1^\alpha"] \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{C} g_1"'] & a_2 \xrightarrow{C} a_1 \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{C} g_1"] \\
a_1 \xrightarrow{C} x_2 \arrow[r, "x_2^\alpha"'] & a_2 \xrightarrow{C} x_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
:_{b_1}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "x_1^\alpha"] \arrow[d, mapsto, "a_1 \xrightarrow{C} g_1"'] & :_{a_1}\mathrm{id}(a_1^\alpha) \arrow[d, mapsto, "a_1 \xrightarrow{C} g_1"] \\
g_1 \arrow[r, mapsto, "x_2^\alpha"'] & (\mathrm{etc}) \circ g_1
\end{tikzcd}$$

为了方便就用 (etc) 表示 $:_{a_1}\mathrm{id}(a_1^\alpha)$。 由上图可知 $g_1(x_2^\alpha) = (\mathrm{etc}) \overset{C}{\circ} g_1$，故 $x_2^\alpha = (\mathrm{etc}) \xrightarrow{C} x_2$；而 $x_2^\alpha = (\mathrm{etc}) \xrightarrow{C} x_2 = x_2^{((\mathrm{etc}) \overset{C}{\circ} \_)}$ 是同构，从而知 $(\_ \overset{C}{\circ} (\mathrm{etc}))$ 是同构，$(\mathrm{etc}) : a_1 \xrightarrow{C} a_2$ 也是。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在米田嵌入处会详细介绍。