

章节 01 - 03 基本概念

L^AT_EX Definitions are here.

始对象与终对象

范畴由对象及其间箭头构成。本文重点分析**余积闭范畴** \mathcal{C} 。首先给出如下定义：

- 0 为**始对象**当且仅当对任意 \mathcal{C} 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 $!_c: 0 \xrightarrow{\mathcal{C}} c$;
- 1 为**终对象**当且仅当对任意 \mathcal{C} 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 $!_c: c \xrightarrow{\mathcal{C}} 1$;

i

Note

其他范畴中始终对象不一定存在。

范畴 \mathcal{C} 中我们假设其含 0 和 1 分别作为始对象和终对象，那么由上述信息可知

- 形如 $0 \xrightarrow{\mathcal{C}} 0$ 的箭头只有一个，即 $!_0id$;
- 形如 $1 \xrightarrow{\mathcal{C}} 1$ 的箭头只有一个，即 $!_1id$;

元素与全局元素

对任意对象 a, a_1, a_2, etc , b, b_1, b_2, etc 以及任意映射 ϕ ，我们进行如下的规定：

- ϕ 为 b 的**元素**当且仅当 $\phi: a \xrightarrow{\mathcal{C}} b$;
- ϕ 为 a 的**全局元素**当且仅当 $\phi: 1 \xrightarrow{\mathcal{C}} a$;
- ϕ 不存在可通过 $\phi: b \xrightarrow{\mathcal{C}} 0$ 得出。

i

Note

其他范畴中刚才的断言未必成立。

箭头构成的集合

这里再给一个定义：

- $\mathbf{a} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b} =$
所有从 \mathbf{a} 射向 \mathbf{b} 的箭头构成的集。

Note

上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
在其他范畴里 $\mathbf{a} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}$ 未必构成集。

箭头的复合运算

范畴 \mathcal{C} 中特定的箭头可以进行复合运算：

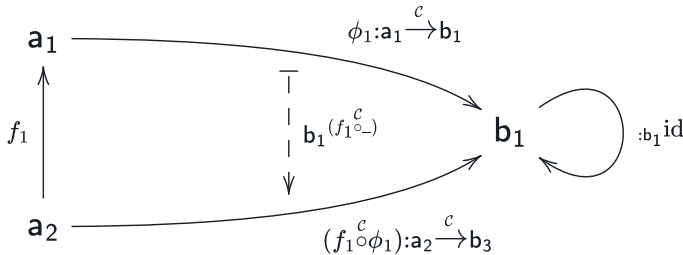
$$\begin{aligned} \overset{\mathcal{C}}{\circ} &: (\mathbf{a}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{a}_1) \times (\mathbf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1) \xrightarrow{Set} (\mathbf{a}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1) \\ \overset{\mathcal{C}}{\circ} &: \left(\begin{array}{c} f_1 \\ \cdot \\ \phi_1 \end{array} \right) \mapsto f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1 \end{aligned}$$

若我们还知道箭头 f_1, ϕ_1, g_1 分别属于
 $\mathbf{a}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_2$ 那么便有

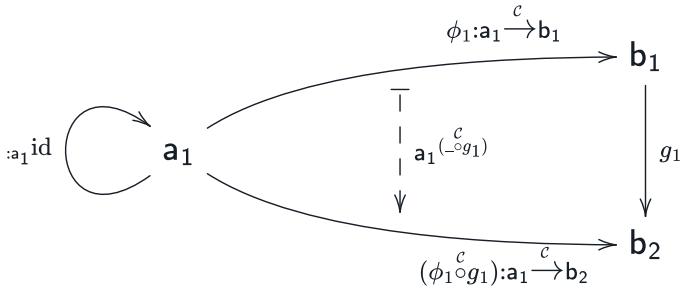
- $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1) \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1 = f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1)$
说明箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便获可得新的函数：

- $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} _): (\mathbf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} _) \xrightarrow{\mathcal{C} \rightarrow Set} (\mathbf{a}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} _)$
 $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} _): \phi_1 \mapsto f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1$
称作**前复合**。下图有助于形象理解：



- $(_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1): (_ \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1) \xrightarrow{\mathcal{C} \rightarrow Set} (_ \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_2)$
 $(_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1): \phi_1 \mapsto \phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1$
称作**后复合**；下图有助于形象理解：



根据上面的定义便不难得出下述结论

- $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) \overset{\mathcal{C} \rightarrow Set}{\circ} (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) = (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) \overset{\mathcal{C} \rightarrow Set}{\circ} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)$
复合运算具有**结合律**，即后面会提到的**自然性**；
- $(_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1) \overset{\mathcal{C} \rightarrow Set}{\circ} (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) = (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1))$
前复合与复合运算的关系
- $(\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) \overset{\mathcal{C} \rightarrow Set}{\circ} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) = ((f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1) \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)$
后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。

假如 a_1 为 \mathbf{a}_1 的全局元素则可规定

- $a_1 \phi_1 = a_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1$

恒等箭头

范畴 \mathcal{C} 内的每个对象都有恒等映射：

- $\text{id} : \mathbf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{a}_1$
 $\text{id} : a_1 \mapsto a_1$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- $\text{id} \circ \phi_1 = \phi_1$
 $= \phi_1 \circ \text{id}$

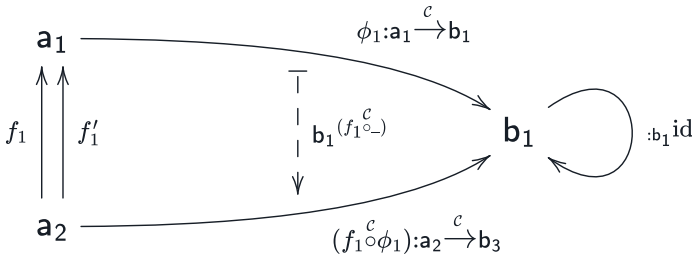
此外还可以得知

- $(\text{id} \circ _) : (\mathbf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} _) \xrightarrow{\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}} (\mathbf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} _)$
为恒等自然变换，可以记作是 (id) ；
- $(_ \circ \text{id}) : (_ \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1) \xrightarrow{\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}} (_ \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1)$
为恒等自然变换，可以记作是 $(_)$ ；

单态

在范畴论里我们也可以定义单态：

- ϕ_1 为**单态**当且仅当对任意 \mathbf{a}_2 若有 $f_1, f'_1 : \mathbf{a}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{a}_1$
满足 $f_1 \circ \phi_1 = f'_1 \circ \phi_1$ 则有 $f_1 = f'_1$ 。详情见下图：



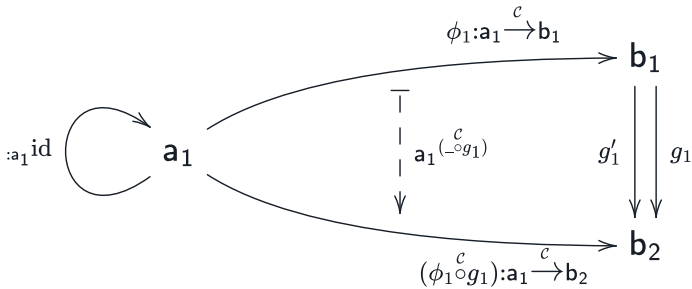
结合终对象的性质我们不难得知

- a_1 为单态 —— 由 $!$ 的唯一性可得知。

满态

在范畴论里我们也可以定义满态：

- ϕ_1 为**满态**当且仅当对任意 \mathbf{b}_2 若有 $g_1, g'_1 : \mathbf{b}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_2$
满足 $\phi_1 \circ g_1 = \phi_1 \circ g'_1$ 则有 $g_1 = g'_1$ 。详情见下图：



同构

在范畴论里我们也可以定义同构：

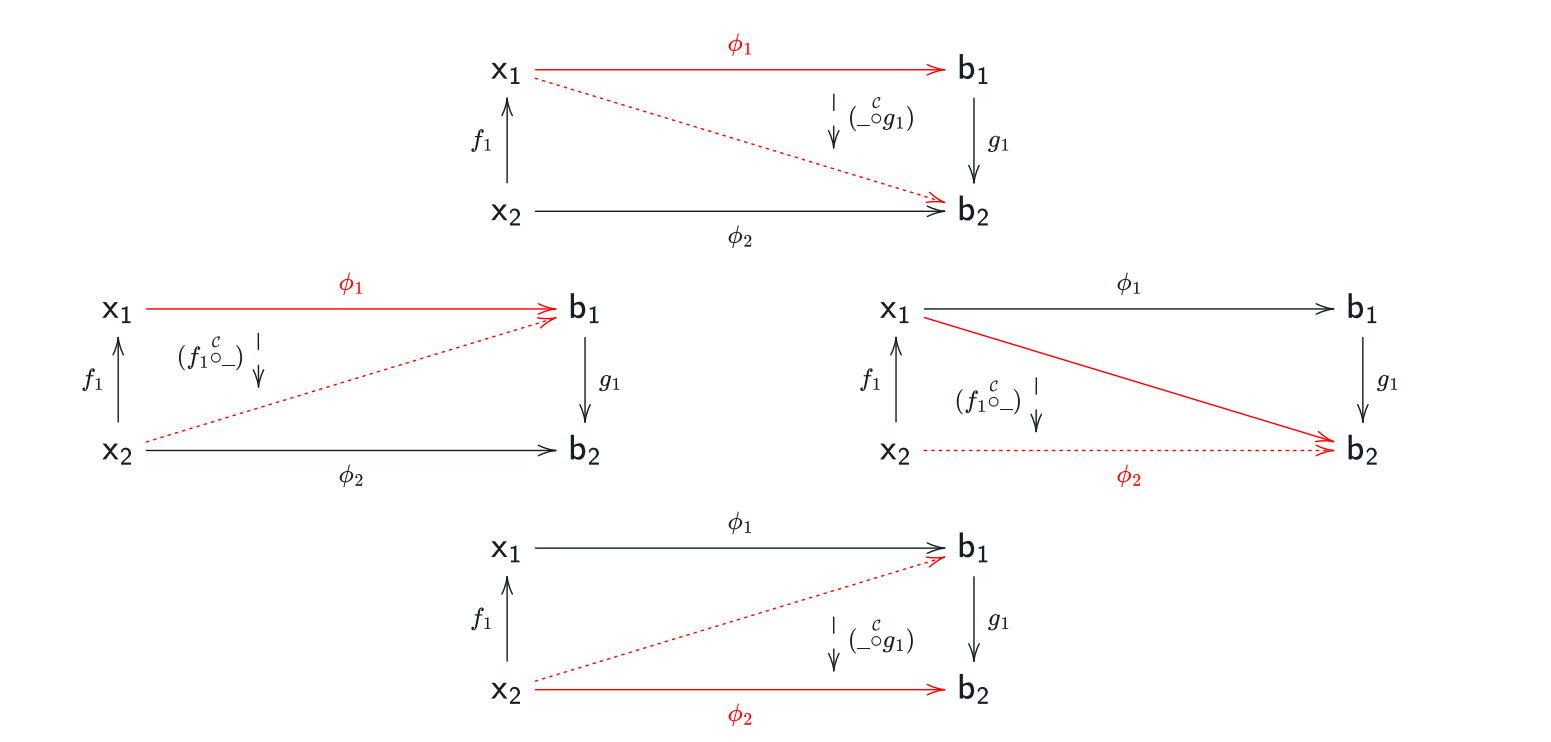
- ϕ_1 为**同构**当且仅当存在 $\psi_1 : \mathbf{b}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{a}_1$
使 $\phi_1 \circ \psi_1 = \text{id}$ 且 $\psi_1 \circ \phi_1 = \text{id}$ 。

结合始终对象的性质便不难得知

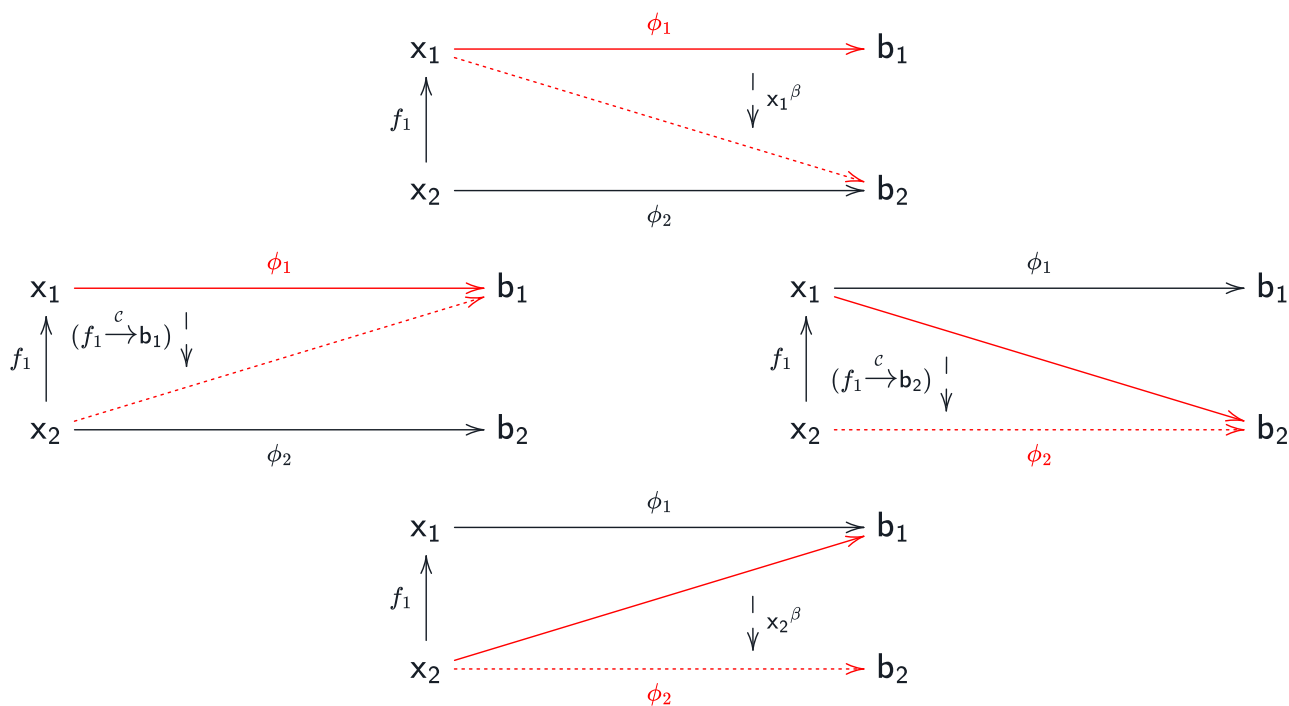
- $0! = 1!$ 为同构 —— 这是因为 $0 \xrightarrow{\mathcal{C}} 0 = \{\text{id}\}, 1 \xrightarrow{\mathcal{C}} 1 = \{\text{id}\}$

自然变换的性质

下图即为自然性对应的形象解释。
后面会将自然性进行进一步推广。



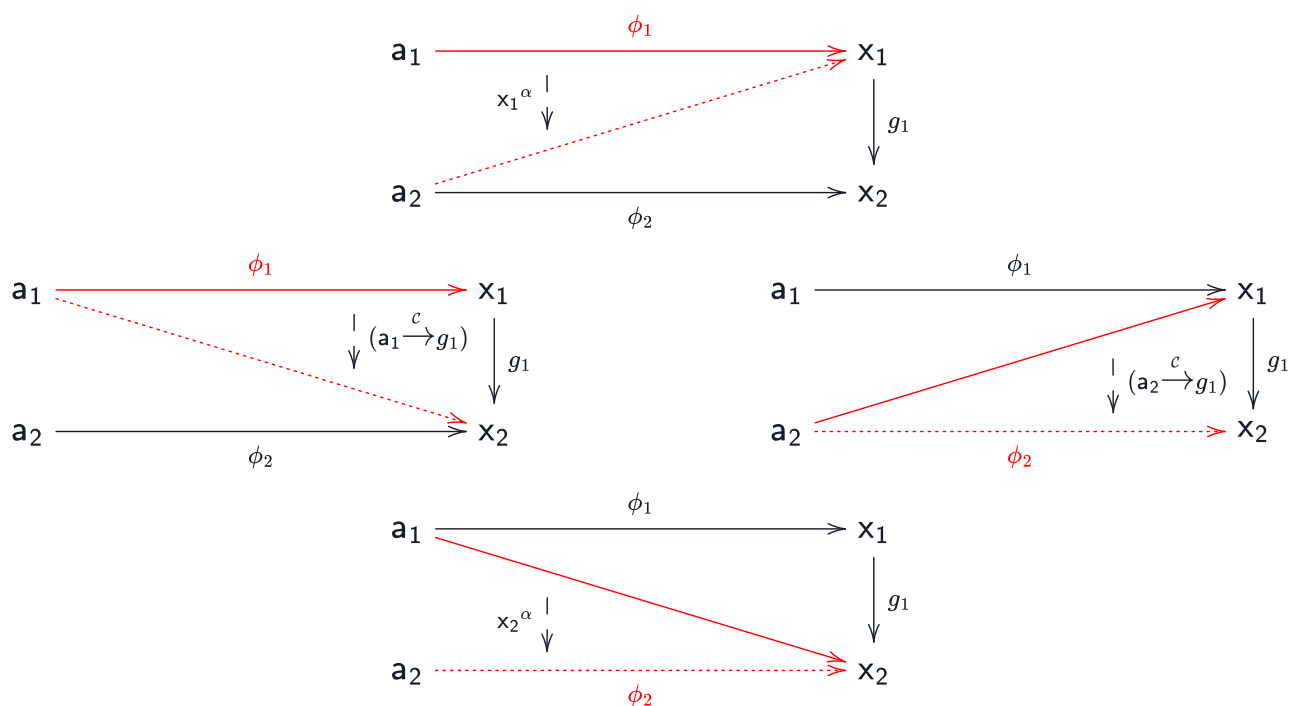
若提供自然变换 β 满足自然性 —— 即对任意 C 中对象 x_1, x_2 及任意 C 中映射 $f_1: x_2 \xrightarrow{C} x_1$ 都会有 $(f_1 \xrightarrow{C} b_1) \circ_{Set} x_2^\beta = x_1^\beta \circ_{Set} (f_1 \xrightarrow{C} b_2)$ (即下图自西向南走向操作结果同自北向东):



那么我们便会有下述结论：

- $b_1 \cong b_2$ 当且仅当对任意 \mathcal{C} 中对象 x $x^{b_1} \cong x^{b_2}$ 都是同构。此时称 β 为**自然同构**。

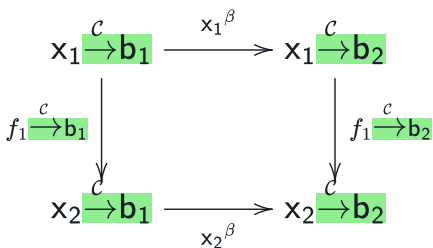
若提供自然变换 α 满足自然性——即对任意 C 中对象 x_1, x_2 以任意 C 中映射 $g_1: x_1 \xrightarrow{C} x_2$ 都会有 $(a_1 \xrightarrow{C} g_1) \circ_{Set} x_2^\alpha = x_1^\alpha \circ_{Set} (a_2 \xrightarrow{C} g_1)$ (即下图自西向南走向操作结果同自北向东):



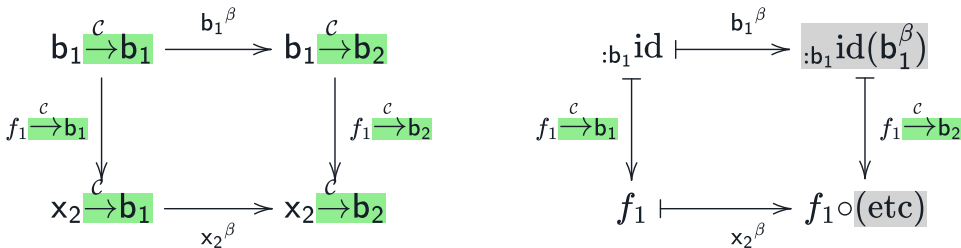
那么我们便会有下述结论：

- $a_1 \cong a_2$ 当且仅当对任意 \mathcal{C} 中对象 x $x^{a_1} \cong x^{a_2}$ 都是同构。此时称 α 为**自然同构**。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为



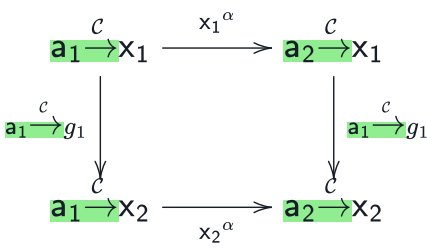
⇒ 易证, ⇐ 用到了米田技巧 (考虑特殊情况)



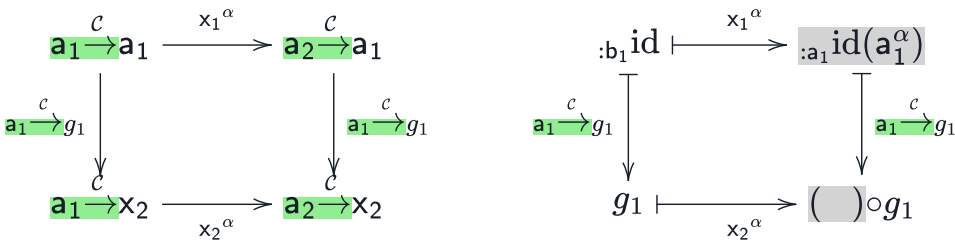
为了方便就用 (etc) 表示 $:b_1 \text{id}(b_1^\beta)$ 。由上图可知 $f_1(x_2^\beta) = f_1 \circ^c (etc)$, 故 $x_2^\beta = x_2 \xrightarrow{c} (etc)$; 而 $x_2^\beta = x_2 \xrightarrow{c} (etc) = x_2^{(-\circ^c(etc))}$ 是同构, 从而知 $((etc) \circ _)$ 是同构, $(etc) : b_1 \xrightarrow{c} b_2$ 也是。

高亮部分省去了部分推理过程, 具体在米田嵌入处会详细介绍。

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为



⇒ 易证, ⇐ 用到了米田技巧 (考虑特殊情况)



为了方便就用 (etc) 表示 $:a_1 \text{id}(a_1^\alpha)$ 。由上图可知 $g_1(x_2^\alpha) = (etc) \circ^c g_1$, 故 $x_2^\alpha = (etc) \xrightarrow{c} x_2$; 而 $x_2^\alpha = (etc) \xrightarrow{c} x_2 = x_2^{((etc) \circ^c _)}$ 是同构, 从而知 $(_ \circ^c (etc))$ 是同构, $(etc) : a_1 \xrightarrow{c} a_2$ 也是。

高亮部分省去了部分推理过程, 具体在米田嵌入处会详细介绍。