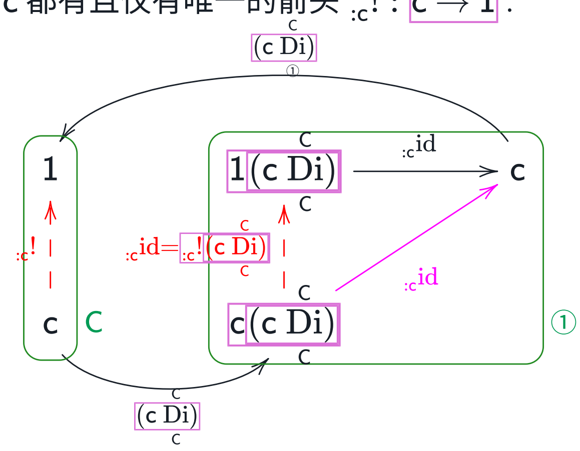
01 始对象和终对象

LaTeX Definitions are here.

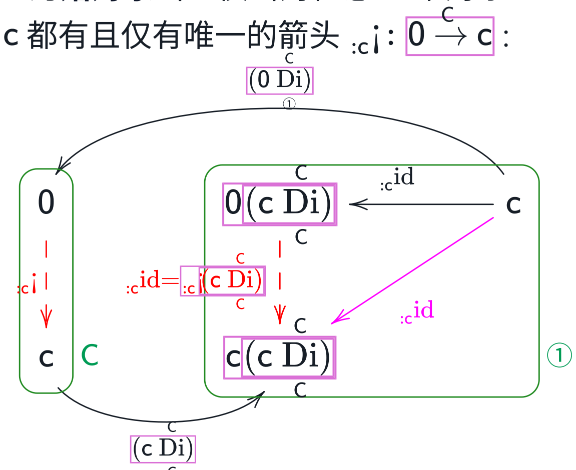
泛性质

范畴由对象及其间箭头构成。本文重点
分析**余积闭范畴** C。首先给出如下定义：

- 1 为**终对象**当且仅当对任意 C 中对象
  c 都有且仅有唯一的箭头 $_{:c}! : \boxed{c \overset{C}{\to} 1}$：



- 0 为**始对象**当且仅当对任意 C 中对象
  c 都有且仅有唯一的箭头 $_{:c}¡ : \boxed{0 \overset{C}{\to} c}$：



> ⓘ **Note**
>
> - $$\begin{aligned} \overset{C}{\underset{\textcircled{1}}{\mathrm{Di}}} : \boxed{C \overset{\mathrm{Cat}}{\longrightarrow}} \boxed{(\textcircled{1} \overset{\mathrm{Cat}}{\longrightarrow} C)} \\ c \longmapsto \text{常值函子} \\ \boxed{c\ \overset{C}{\underset{\textcircled{1}}{\mathrm{Di}}}} : \quad \boxed{(\textcircled{1} \overset{\mathrm{Cat}}{\longrightarrow} C)} \\ 1 \longmapsto c \\ \boxed{f} \longmapsto {}_{:c}\mathrm{id} \end{aligned}$$
>
>   ① 为仅含单个函子的范畴，1 为其中的对象；
>   仅含有单个对象的范畴可被等价地视作为 ①。

若范畴 C 中真的含有 0 和 1 分别作为
始对象和终对象 则根据上述信息可知

- 形如 $\boxed{1 \overset{C}{\to} 1}$ 的箭头
  只有一个，即 $_{:1}\mathrm{id}$；
- 形如 $\boxed{0 \overset{C}{\to} 0}$ 的箭头
  只有一个，即 $_{:0}\mathrm{id}$；

元素与全局元素

对任意对象 $c_1, c_1', \mathrm{etc}, c_2, c_2', \mathrm{etc}, c_3$
及任意的映射 $\boxed{j}$ 我们进行如下的规定：

- $\boxed{j}$ 为 c_2 的**元素**当且仅当
  $\boxed{j \overset{C}{\mathrm{tar}}} = c_2$；
- i 为 c_1 的**全局元素**当且仅当
  $\boxed{j \overset{C}{\mathrm{tar}}} = c_1$ 且 $\boxed{j \overset{C}{\mathrm{src}}} = 1$
- i 不存在仅当
  $\boxed{j \overset{C}{\mathrm{tar}}} = 0$。

> ⓘ **Note**
>
> 其他范畴中刚才的断言未必成立。

02-03 范畴当中的箭头

LaTeX Definitions are here.

沿用上一节提到的自由变量。我们规定：

- $c_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} c_2 =$
  所有从 c_1 射向 c_2 的箭头构成的集。

> ⓘ **Note**
>
> 上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
> 其他范畴里 $c_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} c_2$ 未必构成集。

范畴 $\mathcal{C}$ 中特定的箭头可以进行复合运算：

- $$\begin{aligned} \overset{\mathcal{C}}{\circ} : (c_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} c_2) \overset{\mathsf{Set}}{\times} (c_2 \overset{\mathcal{C}}{\to} c_3) &\overset{\mathsf{Set}}{\longrightarrow} (c_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} c_3) \\ (\quad j_1 \quad . \quad j_2 \quad) &\longmapsto (j_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} j_2) \end{aligned}$$

如果我们还知道箭头 f_1，j，f_2 分别属于
$c_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} c_1'$，$c_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} c_2$，$c_2 \overset{\mathcal{C}}{\to} c_2'$ 那么便可知

- $(f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} j) \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2 = f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} (j \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2)$，
  即箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便可获得新的函数：

- $$\begin{aligned} (f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) : (c_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \_) &\xrightarrow{\mathcal{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (c_1' \overset{\mathcal{C}}{\to} \_) \\ j &\longmapsto (f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} j) \end{aligned}$$
  称作**前复合**。下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[drr, bend left, "j : c_1 \overset{\mathcal{C}}{\longrightarrow} c_2"] & & \\
 & \Downarrow\, c_2{}^{(f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)} & c_2 \arrow[loop right, ":_{c_2}\mathrm{id}"] \\
c_1' \arrow[uu, "f_1{}^{\mathrm{op}}"] \arrow[urr, bend right, "(f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} j) : c_1' \overset{\mathcal{C}}{\longrightarrow} c_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

- $$\begin{aligned} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) : (\_ \overset{\mathcal{C}}{\to} c_2) &\xrightarrow{\mathcal{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\to} c_2') \\ j &\longmapsto (j \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) \end{aligned}$$
  称作**后复合**。 下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd}
 & & c_2 \arrow[dd, "f_2"] \\
c_1 \arrow[loop left, ":_{c_1}\mathrm{id}"] \arrow[urr, bend left, "j : c_1 \overset{\mathcal{C}}{\longrightarrow} c_2"] \arrow[drr, bend right, "(j \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) : c_1 \overset{\mathcal{C}}{\longrightarrow} c_2'"'] & \Downarrow\, c_1{}^{(_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2)} & \\
 & & c_2'
\end{tikzcd}$$

根据上面的定义不难得出下述结论：

- $(f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) \overset{???}{\circ} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) = (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) \overset{???}{\circ} (f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)$
  复合运算具有**结合律**，即后面提到的**自然性**；
- $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} j) \overset{\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) = (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} (j \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2))$
  前复合与复合运算的关系
- $(j \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) \overset{\mathcal{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}}{\circ} (f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) = ((f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} j) \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)$
  后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。
假如 a_1 为 c_1 的全局元素则可规定

- $c_1 j = c_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} j$

恒等箭头

范畴 C 内的每个对象都有恒等映射：

- ${}_{:c_1}\mathrm{id} : c_1 \overset{C}{\to} c_1$
  $c_1 \mapsto c_1$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- ${}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{C}{\circ} \jmath = \jmath$
  $= \jmath \overset{C}{\circ} {}_{:c_2}\mathrm{id}$

此外还可以得知

- $({}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{C}{\circ} \_) : (c_1 \overset{C}{\to} \_) \xrightarrow{C \overset{\mathrm{Cat}}{\longrightarrow} \mathrm{Set}} (c_1 \overset{C}{\to} \_)$
  为恒等自然变换，可记成是 ${}_{\mathrm{Cat}:(c_1 \overset{C}{\longrightarrow} \_)}\mathrm{id}$；
- $(\_ \overset{C}{\circ} {}_{:c_2}\mathrm{id}) : (\_ \overset{C}{\to} c_2) \xrightarrow{C^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Set}} (\_ \overset{C}{\to} c_2)$
  为恒等自然变换，可记成是 ${}_{:(\_ \overset{C}{\longrightarrow} c_2)}\mathrm{id}$。

单满态以及同构

接下来给出单 / 满态和同构的定义。

- $\jmath$ 为**单态**当且仅当对任意 c_1'
  若有 $f_1, f_1' : c_1 \overset{C}{\to} c_1'$ 满足 $f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{C}{\circ} \jmath = f_1'{}^{\mathrm{op}} \overset{C}{\circ} \jmath$
  则有 $f_1{}^{\mathrm{op}} = f_1'{}^{\mathrm{op}}$。详情见下图：

$$
\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[rrd, bend left, "\jmath : c_1 \overset{C}{\longrightarrow} c_2"] & & \\
 & \arrow[phantom, "c_2{}^{(f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{C}{\circ} \_)}"] & c_2 \arrow[loop right, "{}_{:c_2}\mathrm{id}"] \\
c_1' \arrow[uu, shift left, "f_1{}^{\mathrm{op}}"] \arrow[uu, shift right, "f_1'{}^{\mathrm{op}}"'] \arrow[rru, bend right, "(f_1{}^{\mathrm{op}} \overset{C}{\circ} \jmath) : c_1' \overset{C}{\longrightarrow} c_2"'] & &
\end{tikzcd}
$$

- $\jmath$ 为**满态**当且仅当对任意 c_2'
  若有 $f_2, f_2' : c_2 \overset{C}{\to} c_2'$ 满足 $\jmath \overset{C}{\circ} f_2 = \jmath \overset{C}{\circ} f_2'$
  则有 $f_2 = f_2'$。详情见下图：

$$
\begin{tikzcd}
 & & c_2 \arrow[dd, shift right, "f_2'"'] \arrow[dd, shift left, "f_2"] \\
c_1 \arrow[loop left, "{}_{:c_1}\mathrm{id}"] \arrow[rru, bend left, "\jmath : c_1 \overset{C}{\longrightarrow} c_2"] \arrow[rrd, bend right, "(\jmath \overset{C}{\circ} f_2) : c_1 \overset{C}{\longrightarrow} c_2'"'] & \arrow[phantom, "c_1{}^{(\_ \overset{C}{\circ} f_2)}"] & \\
 & & c_2'
\end{tikzcd}
$$

- i 为**同构**当且仅当存在 $\jmath' : c_2 \overset{C}{\to} c_1$
  使得 $\jmath \overset{C}{\circ} \jmath' = {}_{:c_1}\mathrm{id}$ 且 $\jmath' \overset{C}{\circ} \jmath = {}_{:c_2}\mathrm{id}$。
  此时 c_1, c_2 间的关系可记作 $c_1 \cong c_2$。

若还知道 $\jmath = \jmath_1$ 且 $\jmath_2 : c_2 \overset{C}{\to} c_3$ 则有

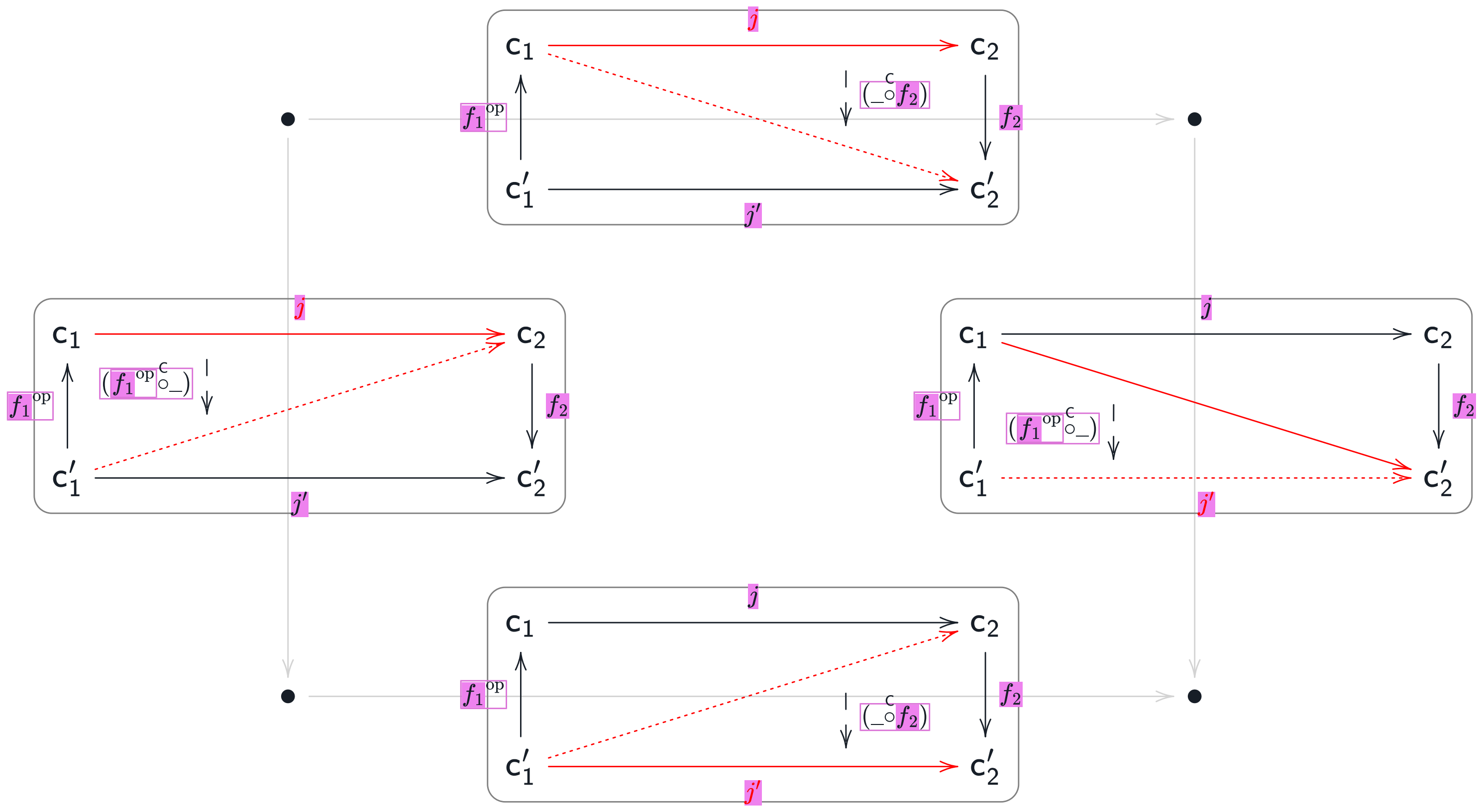
- 若 $\jmath_1$，$\jmath_2$ 为单态 / 满态 / 同构
  则 $\jmath_1 \overset{C}{\circ} \jmath_2$ 为单态 / 满态 / 同构；
- 若 $\jmath_1 \overset{C}{\circ} \jmath_2$ 为同构
  且 $\jmath_1$，$\jmath_2$ 中有一个为同构
  则 $\jmath_1$，$\jmath_2$ 两者皆构成同构。

不仅如此我们还可以得出下述结论：

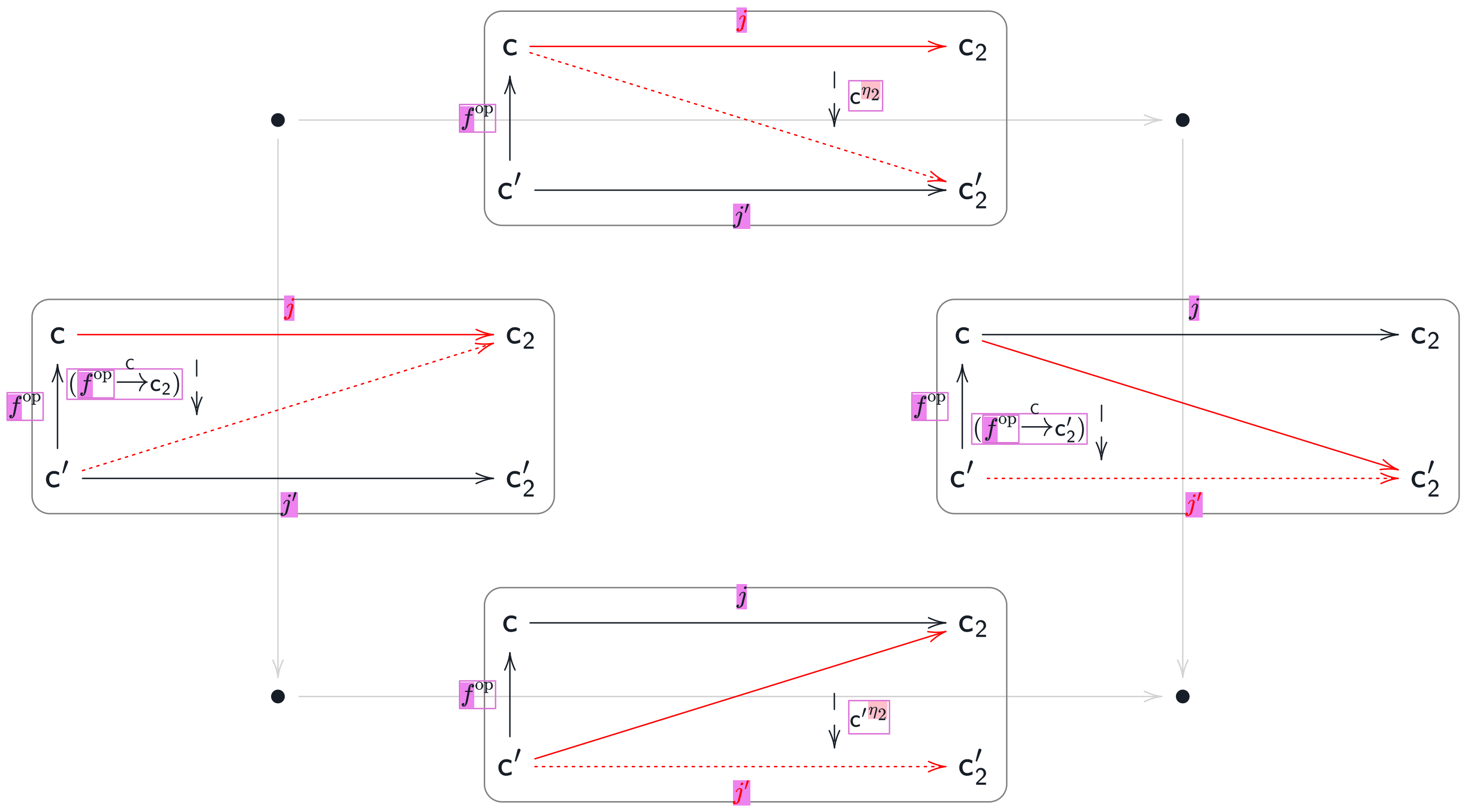
- c_1 为单态，
  由 ${}_{:c_1}!$ 的唯一性可知；
- ${}_{:0}! = {}_{:1}¡$ 为同构，
  因为 $0 \overset{C}{\to} 0 = \{{}_{:0}\mathrm{id}\}$
  并且 $1 \overset{C}{\to} 1 = \{{}_{:1}\mathrm{id}\}$

同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释。
后面会将自然性进行进一步推广。



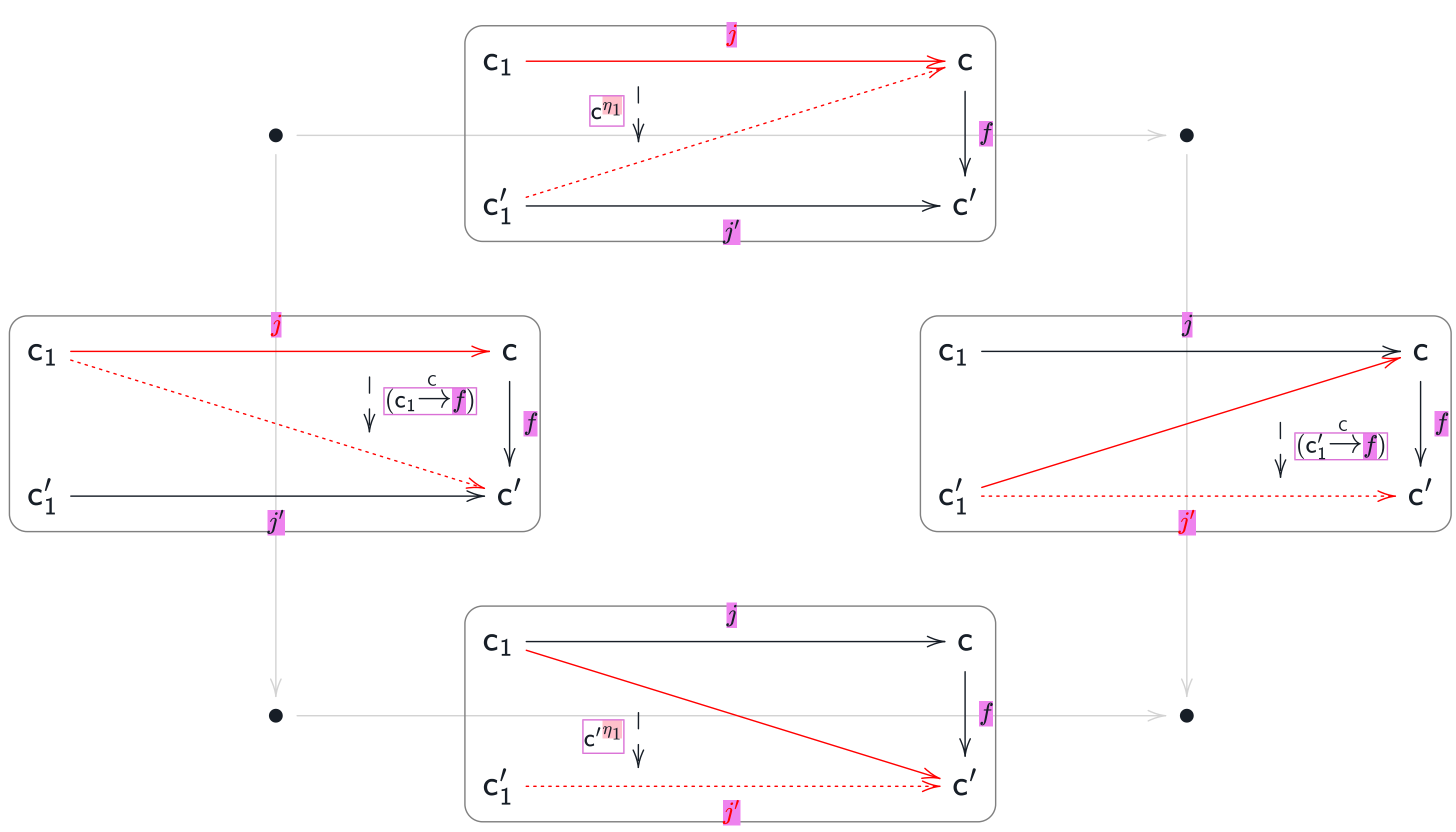
现提供自然变换 η_2 满足自然性 —— 即对
任意 C 中对象 c, c' 以及
任意 C 中映射 $f : c \overset{\mathsf{C}}{\to} c'$
都有 $(f^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\to} c_2) \overset{\mathsf{Set}}{\circ} c'^{\eta_2} = c^{\eta_2} \overset{\mathsf{Set}}{\circ} (f^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\to} c'_2)$:



那么我们便会有下述结论 :

- $c_2 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c'_2$ 当且仅当对任意 C 中的对象 c
  c^{η_2} 都是同构 。此时称 η_2 为**自然同构** 。

现提供自然变换 η_1 满足自然性 —— 即对
任意 C 中对象 c, c' 以及
任意 C 中映射 $f : c \overset{\mathsf{C}}{\to} c'$
都有 $(c_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} f) \overset{\mathsf{Set}}{\circ} c'^{\eta_1} = c^{\eta_1} \overset{\mathsf{Set}}{\circ} (c'_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} f)$:



那么我们便会有下述结论 :

- $c_1 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c'_1$ 当且仅当对任意 C 中的对象 c
  c^{η_1} 都是同构 。此时称 η_1 为**自然同构** 。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为

$$\mathsf{Set}$$

$$\begin{tikzcd}
c\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c_2"'] & c\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c_2' \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c_2'"] \\
c'\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c'\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c_2' \\
\mathsf{C}\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c_2 & \mathsf{C}\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c_2'
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧 将 c 换成 c_2 ：

$$\begin{tikzcd}
c_2\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c_2"'] & c_2\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c_2' \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c_2'"] \\
c'\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c'\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c_2'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:c_2}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c_2"'] & {}_{:c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2}) \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c_2'=c_2'^{(f^{\mathrm{op}}\overset{\mathsf{C}}{\circ}_)}"] \\
f^{\mathrm{op}} \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & f^{\mathrm{op}}\overset{\mathsf{C}}{\circ}\mathrm{etc}
\end{tikzcd}$$

为了方便就用 etc 表示 ${}_{:c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2})$ 。由上图

知 $f^{\mathrm{op}}(c'^{\eta_2}) = (f^{\mathrm{op}}\overset{\mathsf{C}}{\circ}\mathrm{etc})$（见右图底部和右侧箭头），

故 $c'^{\eta_2} = c'\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}\mathrm{etc}$（注意到箭头 $f^{\mathrm{op}} : c'\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c$）；

而 $c'^{\eta_2} = c'\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}\mathrm{etc} = c'^{(\_\overset{\mathsf{C}}{\circ}\mathrm{etc})}$ 始终是同构

故 $\mathrm{etc} : c_2\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c_2'$ 也是同构 。

> ⓘ **Note**
>
> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在**米田嵌入**处会详细介绍 。

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为

$$\mathsf{Set}$$

$$\begin{tikzcd}
c_1\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}f"'] & c_1'\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c \arrow[d, "c_1'\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}f"] \\
c_1\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c_1'\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c' \\
c_1\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}\mathsf{C} & c_1'\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}\mathsf{C}
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧 将 c 换成 c_1 ：

$$\begin{tikzcd}
c_1\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c_1 \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}f"'] & c_1'\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c_1 \arrow[d, "c_1'\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}f"] \\
c_1\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c_1'\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:c_1}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}f"'] & {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1}) \arrow[d, "c_1'\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}f=c_1'^{(_\overset{\mathsf{C}}{\circ}f)}"] \\
f \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & \mathrm{etc}\overset{\mathsf{C}}{\circ}f
\end{tikzcd}$$

为了方便就用 etc 表示 ${}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 。由上图

知 $f(c'^{\eta_1}) = (\mathrm{etc}\overset{\mathsf{C}}{\circ}f)$（见右图底部和右侧箭头），

故 $c'^{\eta_1} = \mathrm{etc}\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c'$（注意到箭头 $f : c\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c'$）；

而 $c'^{\eta_1} = \mathrm{etc}\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c' = c'^{(\mathrm{etc}\overset{\mathsf{C}}{\circ}\_)}$ 始终是同构

故 $\mathrm{etc} : c_1\overset{\mathsf{C}}{\rightarrow}c_1'$ 也是同构 。

> ⓘ **Note**
>
> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在**米田嵌入**处会详细介绍 。

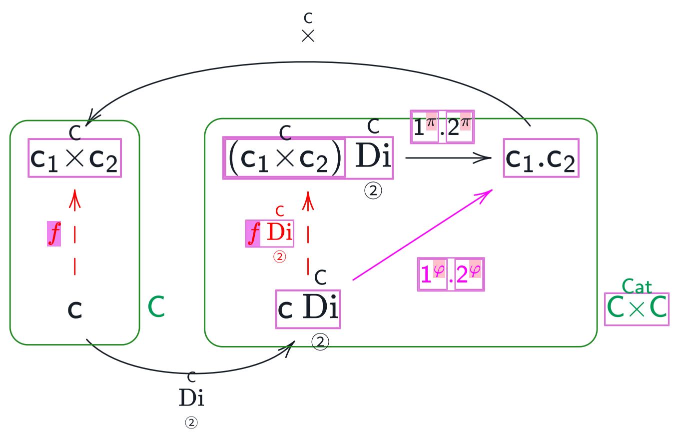
04-05 类型的和与积

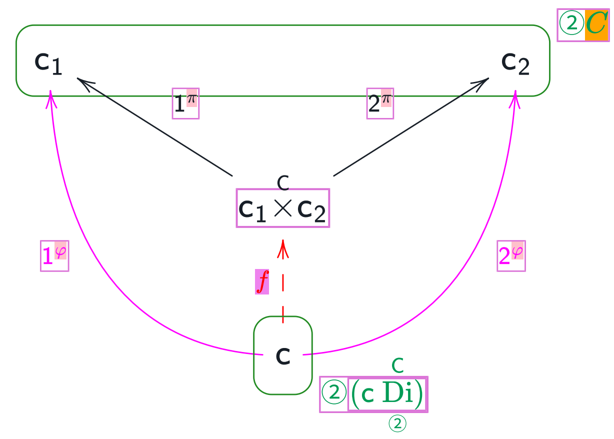
$\LaTeX$ Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{C}{\times}$: $(C \overset{Cat}{\times} C) \overset{Cat}{\longrightarrow} C$ 在范畴 C 中有如下性质：

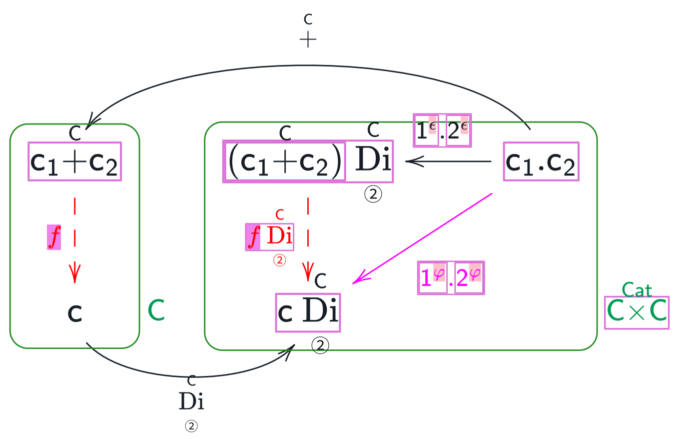
- $(c \overset{C}{\to} c_1) \overset{Set}{\times} (c \overset{C}{\to} c_2) \overset{Set}{\cong} c \overset{C}{\to} (c_1 \overset{C}{\times} c_2)$
  —— c 为任意 C 中对象。此即为积的
  泛性质，亦为**指数对乘法的分配律** 。

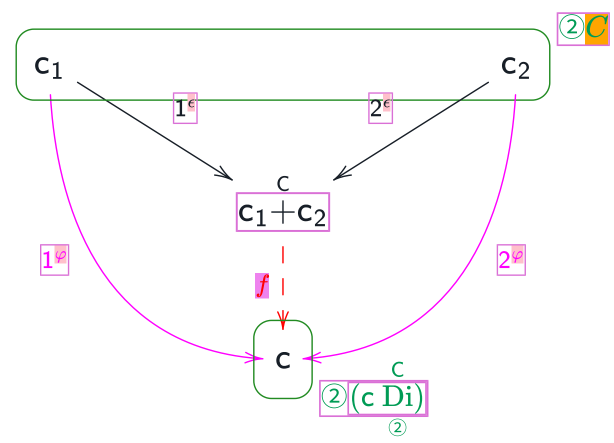




默认函子 $\overset{C}{+}$: $(C \overset{Cat}{\times} C) \overset{Cat}{\longrightarrow} C$ 在范畴 C 中有如下性质：

- $(c_1 \overset{C}{\to} c) \overset{Set}{\times} (c_2 \overset{C}{\to} c) \overset{Set}{\cong} (c_1 \overset{C}{+} c_2) \overset{C}{\to} c$
  —— c 为任意 C 中对象。此即为和的
  泛性质，亦为**指数对加法的分配律** 。





ⓘ **Note**

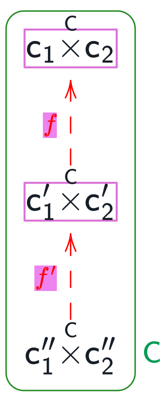
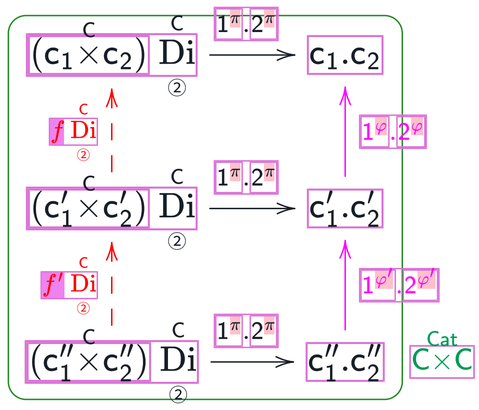
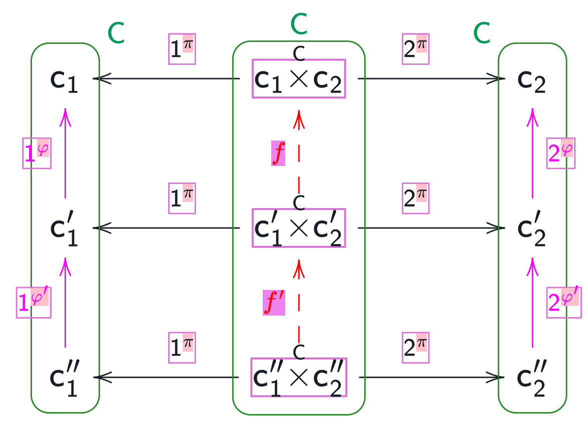
在上面的插图中

- $\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} : C \overset{Cat}{\longrightarrow} (C \overset{Cat}{\times} C)$ 为对角函子满足
  $c \longmapsto (c\,.\,c)$
- $\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} : C \overset{Cat}{\longrightarrow} (② \overset{Cat}{\longrightarrow} C)$
  $c \longmapsto$ 常值函子
  $c \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} :\quad ② \overset{Cat}{\longrightarrow} C$
  $1 \longmapsto c$
  $2 \longmapsto c$
  $f \longmapsto {}_{:c}\mathrm{id}$
  即为对角函子的第二种等价的定义 。
  ② 为仅含两个对象的范畴，在此则
  作为一个指标范畴 。1 和 2 分别为
  其中的对象 。
- $\mathcal{C}$: $② \overset{Cat}{\longrightarrow} C$ 为函子，满足
  $1 \longmapsto c_1$
  $2 \longmapsto c_2$
- 不难看出上图中
  $\pi : (c_1 \overset{C}{\times} c_2) \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \overset{Cat}{\longrightarrow} \mathcal{C}$
  $\epsilon : \mathcal{C} \overset{Cat}{\longrightarrow} (c_1 \overset{C}{+} c_2) \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}$
  都构成自然变换 。$1^\pi\,.\,2^\pi$ 和 $1^\epsilon\,.\,2^\epsilon$ 可分别视作是 π 和 ϵ 。

函子性

如何证明 $\overset{C}{\times}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{C}{\times} : ({}_{:c_1'}\mathrm{id} \,.\, {}_{:c_2'}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(c_1' \overset{C}{\times} c_2')}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\times$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{C}{\times} : (1^{\varphi'} \overset{C}{\circ} 1^{\varphi} \,.\, 2^{\varphi'} \overset{C}{\circ} 2^{\varphi}) \longmapsto (f' \overset{C}{\circ} f)$
  —— 即函子 $\overset{C}{\times}$ 保持**箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：

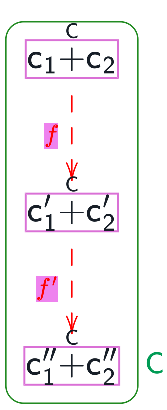
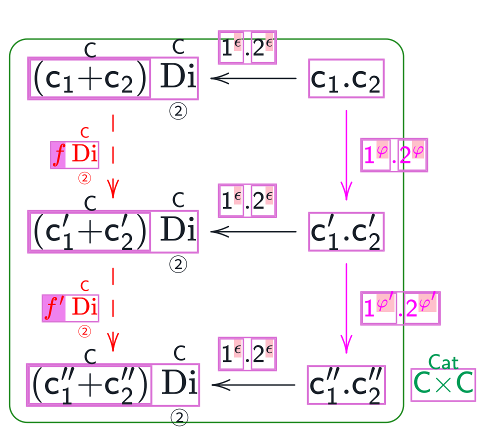
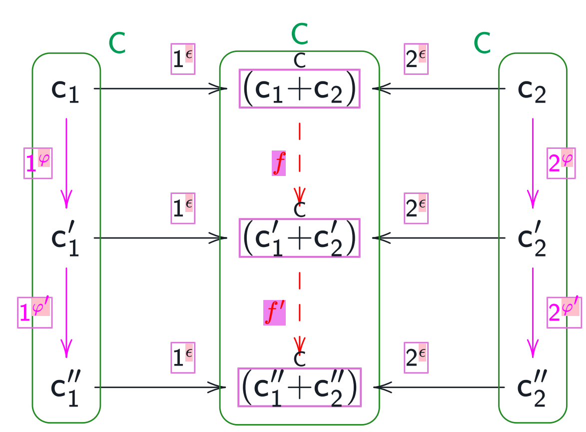




另外我们规定 $\overset{C}{\times}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{C}{\times} : (1^{\varphi} \,.\, c_2) \longmapsto (1^{\varphi} \overset{C}{\times} {}_{:c_2}\mathrm{id})$
  $\overset{C}{\times} : (c_1 \,.\, 2^{\varphi}) \longmapsto ({}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{C}{\times} 2^{\varphi})$

如何证明 $\overset{C}{+}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{C}{+} : ({}_{:c_1}\mathrm{id} \,.\, {}_{:c_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(c_1 \overset{C}{+} c_2)}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $+$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{C}{+} : (1^{\varphi} \overset{C}{\circ} 1^{\varphi'} \,.\, 2^{\varphi} \overset{C}{\circ} 2^{\varphi'}) \longmapsto (f \overset{C}{\circ} f')$
  —— 即函子 $\overset{C}{\times}$ 保持**箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：

另外我们规定 $\overset{C}{+}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{C}{+} : (1^{\varphi} \,.\, c_2) \longmapsto (1^{\varphi} \overset{C}{+} {}_{:c_2}\mathrm{id})$
  $\overset{C}{+} : (c_1 \,.\, 2^{\varphi}) \longmapsto ({}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{C}{+} 2^{\varphi})$

运算性质

对于函子 $\overset{C}{\times}$ 我们不难得知

- $c_1 \overset{C}{\times} 1 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{\times} 1 \overset{C}{\cong} c_1$

  —— 乘法具有**幺元** 1 。

  下图有助于理解证明目标，即 $1^{\varphi} . {}_{:c}!$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$
\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{\times} 1)\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "1^{\pi}.2^{\pi}"] & c_1.1 \\
c\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "1^{\varphi}.{}_{:c}!"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_1\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "{}_{:c_1}\mathrm{id}.{}_{:c_1}!"] & c_1.1 \\
c\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f'\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "1^{\varphi}.{}_{:c}!"'] &
\end{tikzcd}
$$

- $c_1 \overset{C}{\times} c_2 \overset{C}{\cong} c_2 \overset{C}{\times} c_1$

  —— 乘法具有**交换律** 。

  下图有助于理解证明目标，即 $1^{\varphi} . 2^{\varphi}$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$
\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{\times} c_2)\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "1^{\pi}.2^{\pi}"] & c_1.c_2 \\
c\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "1^{\varphi}.2^{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_2 \overset{C}{\times} c_1)\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "1^{\pi}.2^{\pi}"] & c_2.c_1 \\
c\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f'\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "2^{\varphi}.1^{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}
$$

- $(c_1 \overset{C}{\times} c_2) \overset{C}{\times} c_3 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{\times} (c_2 \overset{C}{\times} c_3)$

  —— 乘法具有**结合律** 。

  下图有助于理解证明目标，即 $(1^{\varphi} . 2^{\varphi}) . 3^{\varphi}$ 唯一决定 f 和 f' 。

$$
\begin{tikzcd}
((c_1 \overset{C}{\times} c_2) \overset{C}{\times} c_3)\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi"] & (c_1 \overset{C}{\times} c_2).c_3 \arrow[r, "\pi.{}_{:c_3}\mathrm{id}"] & (c_1.c_2).c_3 \\
c_3\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, dotted, "\varphi.3^{\varphi}"] \arrow[urr, "(1^{\varphi}.2^{\varphi}).3^{\varphi}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{\times} (c_2 \overset{C}{\times} c_3))\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi"] & c_1.(c_2 \overset{C}{\times} c_3) \arrow[r, "{}_{:c_1}\mathrm{id}.\pi"] & c_1.(c_2.c_3) \\
c_3\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f'\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, dotted, "1^{\varphi}.\varphi"] \arrow[urr, "1^{\varphi}.(2^{\varphi}.3^{\varphi})"'] & &
\end{tikzcd}
$$

对于函子 $\overset{C}{+}$ 我们不难得知

- $c_1 \overset{C}{+} 0 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{+} 1 \overset{C}{\cong} c_1$

  —— 加法具有**幺元** 0 。

  下图有助于理解证明目标，即 $1^{\varphi} . {}_{:c}¡$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$
\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{+} 0)\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.0 \arrow[l, "1^{\epsilon}.2^{\epsilon}"'] \arrow[dl, "1^{\varphi}.{}_{:c}¡"] \\
c\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_1\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f'\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.0 \arrow[l, "1^{\epsilon}.2^{\epsilon}"'] \arrow[dl, "1^{\varphi}.{}_{:c}¡"] \\
c\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}
$$

- $c_1 \overset{C}{+} c_2 \overset{C}{\cong} c_2 \overset{C}{+} c_1$

  —— 加法具有**交换律** 。

  下图有助于理解证明目标，即 $1^{\varphi} . 2^{\varphi}$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$
\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{+} c_2)\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.c_2 \arrow[l, "1^{\epsilon}.2^{\epsilon}"'] \arrow[dl, "1^{\varphi}.2^{\varphi}"] \\
c\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_2 \overset{C}{+} c_1)\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f'\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & c_2.c_1 \arrow[l, "1^{\epsilon}.2^{\epsilon}"'] \arrow[dl, "2^{\varphi}.1^{\varphi}"] \\
c\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}
$$

- $(c_1 \overset{C}{+} c_2) \overset{C}{+} c_3 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{+} (c_2 \overset{C}{+} c_3)$

  —— 加法具有**结合律** 。

  下图有助于理解证明目标，即 $(1^{\varphi} . 2^{\varphi}) . 3^{\varphi}$ 唯一决定 f 和 f' 。

$$
\begin{tikzcd}
((c_1 \overset{C}{+} c_2) \overset{C}{+} c_3)\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & (c_1 \overset{C}{+} c_2).c_3 \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "\varphi.3^{\varphi}"] & (c_1.c_2).c_3 \arrow[l, "\epsilon.{}_{:c_3}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "(1^{\varphi}.2^{\varphi}).3^{\varphi}"] \\
c\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{+} (c_2 \overset{C}{+} c_3))\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f'\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.(c_2 \overset{C}{+} c_3) \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "1^{\varphi}.\varphi"] & c_1.(c_2.c_3) \arrow[l, "\epsilon.{}_{:c_3}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "1^{\varphi}.(2^{\varphi}.3^{\varphi})"] \\
c\ \underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} & &
\end{tikzcd}
$$

幺半范畴

像刚才这样对象运算具有**单位元**以及**结合律**的范畴称作**幺半范畴**；

若上述范畴还具有**交换律**则称作**对称幺半范畴**；

很明显我们的范畴 C 是典型的**对称幺半范畴** 。

幺半群

什么是幺半群呢？有两种定义方式：

- **幺半群** M 是个范畴，其只含一个对象 m；
  其中的复合运算正好有单位元以及结合律 。
- 对象 m 属于幺半范畴 C，满足下述交换图：

$$
\begin{tikzcd}
1 \overset{C}{\times} m \arrow[r, "u \overset{C}{\otimes} {}_{:m}\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\text{左单位元 } u_l"'] & m \overset{C}{\times} m \arrow[d, "p"', "\text{运算结果唯一}"] & m \overset{C}{\times} 1 \arrow[l, "{}_{:m}\mathrm{id} \overset{C}{\otimes} u"'] \arrow[dl, "u_r \text{ 右单位元}"] \\
 & m &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(m \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\times} m \arrow[rr, "\text{结合律 } a"] \arrow[d, "\text{先算左侧括号 } p \overset{C}{\otimes} {}_{:m}\mathrm{id}"'] & & m \overset{C}{\times} (m \overset{C}{\times} m) \arrow[d, "{}_{:m}\mathrm{id} \overset{C}{\otimes} p \text{ 先算右侧括号}"] \\
m \overset{C}{\times} m \arrow[r, "\text{再算最终结果 } p"'] & m & m \overset{C}{\times} m \arrow[l, "p \text{ 果结终最算再}"]
\end{tikzcd}
$$

  其中

  - u ：$1 \overset{C}{\to} m$ 其实就是 m 里面的幺元
  - u_l ：$(1 \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\to} m$ 表示 u 构成左幺元
  - u_r ：$(m \overset{C}{\times} 1) \overset{C}{\to} m$ 表示 u 构成右幺元
  - p ：$(m \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\to} m$ 即为 m 中的二元运算
  - a ：$(m \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\times} m \overset{C}{\to} m \overset{C}{\times} (m \overset{C}{\times} m)$ 表示 m 具有结合律

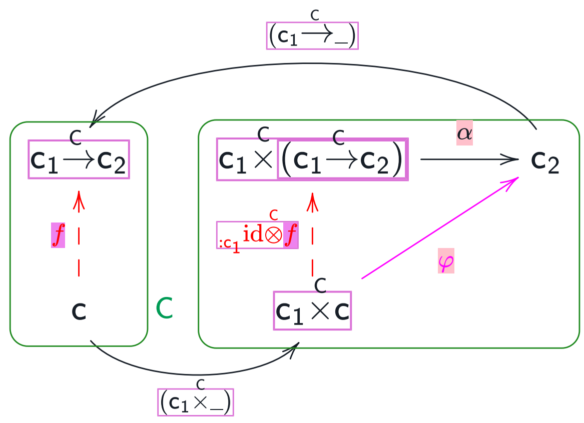
06 类型的幂

LaTeX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{C}{\to}$: $(C \overset{Cat}{\times} C) \overset{Cat}{\longrightarrow} C$ 在范畴 C 中有下述性质：

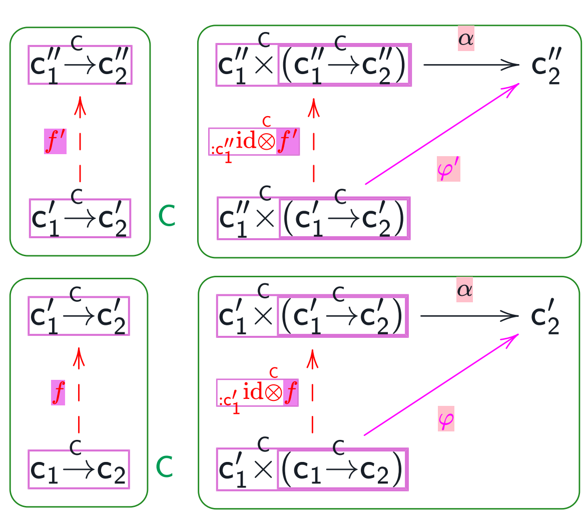
- $(c_1 \overset{C}{\times} c) \overset{C}{\to} c_2 \overset{Set}{\cong} c \overset{C}{\to} (c_1 \overset{C}{\to} c_2) \overset{Set}{\cong} c_1 \overset{C}{\to} (c \overset{C}{\to} c_2)$
  —— c 为任意 C 中对象。此即为幂的泛性质，亦表示了**指数加乘法之间的运算关系**。

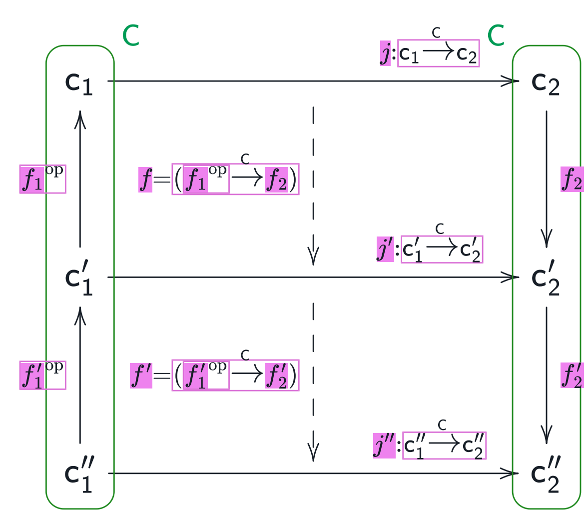


函子性

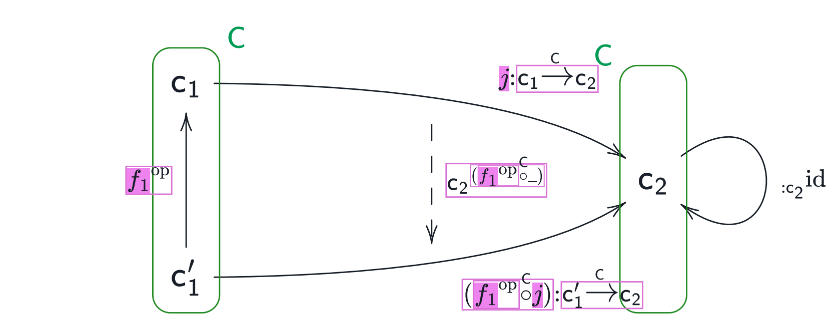
如何证明 $\overset{C}{\to}$ 构成函子呢？请看

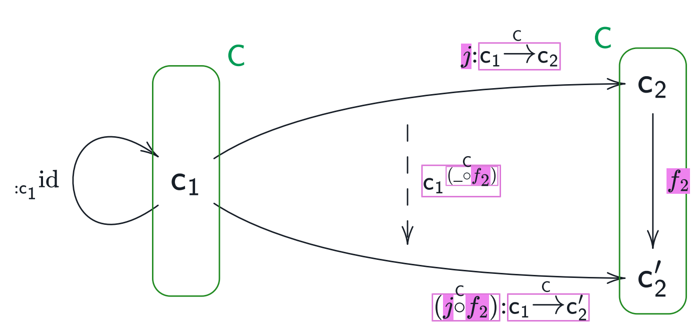
- $\overset{C}{\to}$: $({}_{:c_1}\mathrm{id} \,.\, {}_{:c_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(c_1 \overset{C}{\to} c_2)}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{C}{\to}$ 能**保持恒等箭头**；
- $\overset{C}{\to}$: $(f_1 \overset{C^{op}}{\circ} f_1' \,.\, f_2 \overset{C}{\circ} f_2') \longmapsto (f \overset{C}{\circ} f')$
  —— 即函子 $\overset{C}{\to}$ **保持箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明过程：





下图（自上到下分别为图 1 和图 2）后面会用到。





范畴 C 内任意两对象 c_1 和 c_2 间的箭头构成一个集合 $c_1 \xrightarrow{C} c_2$，
说明 $\xrightarrow{C}$ 只能将两个对象打到一个集合；下面使 $\xrightarrow{C}$ 升级为函子：
若还知道箭头 ${f_1}^{op} : c_1' \xrightarrow{C} c_1$ 以及 $f_2 : c_2 \xrightarrow{C} c_2'$，则规定

- $(\_ \xrightarrow{C} c_2) : C^{op} \cancel{\overset{Cat}{\times} C} \xrightarrow{Cat} Set$ 为函子且
  $(\_ \xrightarrow{C} c_2) : c \longmapsto (c \xrightarrow{C} c_2)$ 且对任意 $f^{op} : c' \xrightarrow{C} c$ 有
  $(\_ \xrightarrow{C} c_2) : f^{op} \longmapsto (f^{op} \xrightarrow{C} c_2) = (f^{op} \xrightarrow{C} {}_{:c_2}\mathrm{id}) = c_2^{(f^{op} \overset{C}{\circ} \_)}$
  图 1 有助于理解。
  $(\_ \xrightarrow{C} f_2) : C^{op} \cancel{\overset{Cat}{\times} C} \xrightarrow{Cat} Set$，
  $(\_ \xrightarrow{C} f_2) : c \longmapsto (c \xrightarrow{C} f_2) = ({}_{:c}\mathrm{id} \xrightarrow{C} f_2) = c_2^{(\_ \overset{C}{\circ} f_2)}$ 且对任意 $f^{op} : c' \xrightarrow{C} c$ 有
  $(\_ \xrightarrow{C} f_2) : f^{op} \longmapsto (f^{op} \xrightarrow{C} f_2) = (f^{op} \overset{C}{\circ} \_) \overset{???}{\circ} (\_ \overset{C}{\circ} f_2) = (\_ \overset{C}{\circ} f_2) \overset{???}{\circ} (f^{op} \overset{C}{\circ} \_)$
  图 2 有助于理解。

  > **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - よ : $C \xrightarrow{Cat} (C^{op} \xrightarrow{Set} Set)$
  > $c_2 \longmapsto (c_2 \xrightarrow{C^{op}} \_) = (\_ \xrightarrow{C} c_2)$ 构成一个函子
  > $f_2 \longmapsto (f_2 \xrightarrow{C^{op}} \_) = (\_ \xrightarrow{C} f_2) = (\_ \overset{C}{\circ} f_2)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
  >
  >   该函子称作是**米田嵌入**。

- $(c_1 \xrightarrow{C} \_) : \cancel{C^{op}} \overset{Cat}{\times} C \xrightarrow{Cat} Set$ 为函子且
  $(c_1 \xrightarrow{C} \_) : c \longmapsto (c_1 \xrightarrow{C} c)$，且对任意 $f : c \xrightarrow{C} c'$ 有
  $(c_1 \xrightarrow{C} \_) : f \longmapsto (c_1 \xrightarrow{C} f) = ({}_{:c_1}\mathrm{id} \xrightarrow{C} f) = c_1^{(\_ \overset{C}{\circ} f)}$
  图 2 有助于理解。
  $({f_1}^{op} \xrightarrow{C} \_) : \cancel{C^{op}} \overset{Cat}{\times} C \xrightarrow{Cat} Set$，
  $({f_1}^{op} \xrightarrow{C} \_) : c \longmapsto ({f_1}^{op} \xrightarrow{C} c) = ({f_1}^{op} \xrightarrow{C} {}_{:c}\mathrm{id}) = c^{({f_1}^{op} \overset{C}{\circ} \_)}$ 且对任意 $f : c \xrightarrow{C} c'$ 有
  $({f_1}^{op} \xrightarrow{C} \_) : f \longmapsto ({f_1}^{op} \xrightarrow{C} f) = ({f_1}^{op} \overset{C}{\circ} \_) \overset{???}{\circ} (\_ \overset{C}{\circ} f) = (\_ \overset{C}{\circ} f) \overset{???}{\circ} ({f_1}^{op} \overset{C}{\circ} \_)$
  图 1 有助于理解。

  > **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - 尤 : $C^{op} \xrightarrow{Cat} (C \xrightarrow{Set} Set)$
  > $c_1 \longmapsto (c_1 \xrightarrow{C} \_)$ 构成一个函子
  > ${f_1}^{op} \longmapsto ({f_1}^{op} \xrightarrow{C} \_) = ({f_1}^{op} \overset{C}{\circ} \_)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
  >
  >   该函子戏称为**尤达嵌入**。

积闭范畴

这里插个题外话：

若范畴包含终对象，所有类型的积以及指数，则可将其称作**积闭范畴**；

若范畴包含始对象，所有类型的和，则可将其称作是**余积闭范畴**；

若范畴满足上述条件，则可称作**双积闭范畴**。

很明显我们讨论的范畴 C 就是**双积闭范畴**。

07 递归类型

LaTeX Definitions are here.

08-09 函子与自然变换

LaTeX Definitions are here.

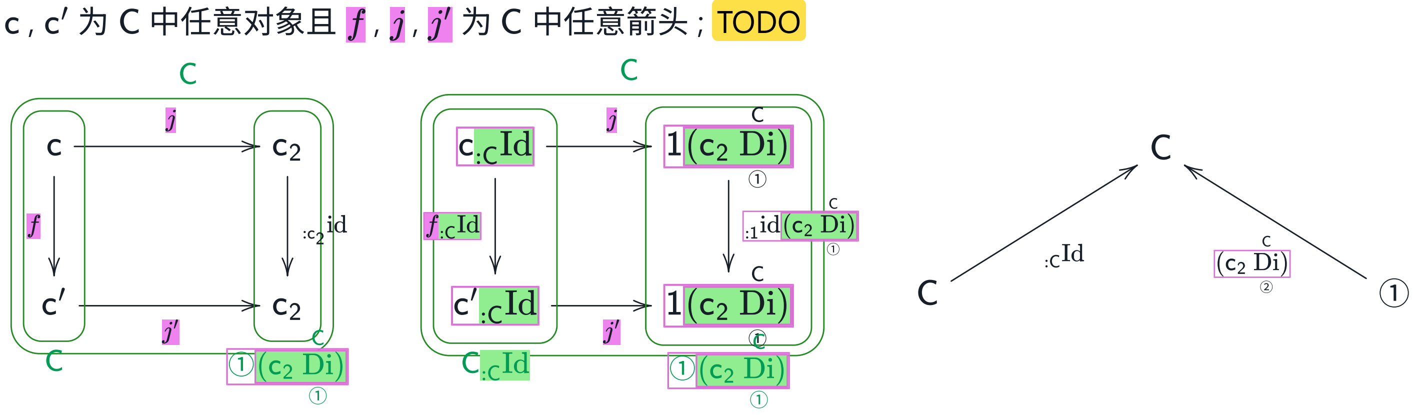
一些特殊的范畴

现在规定几种特殊的范畴。

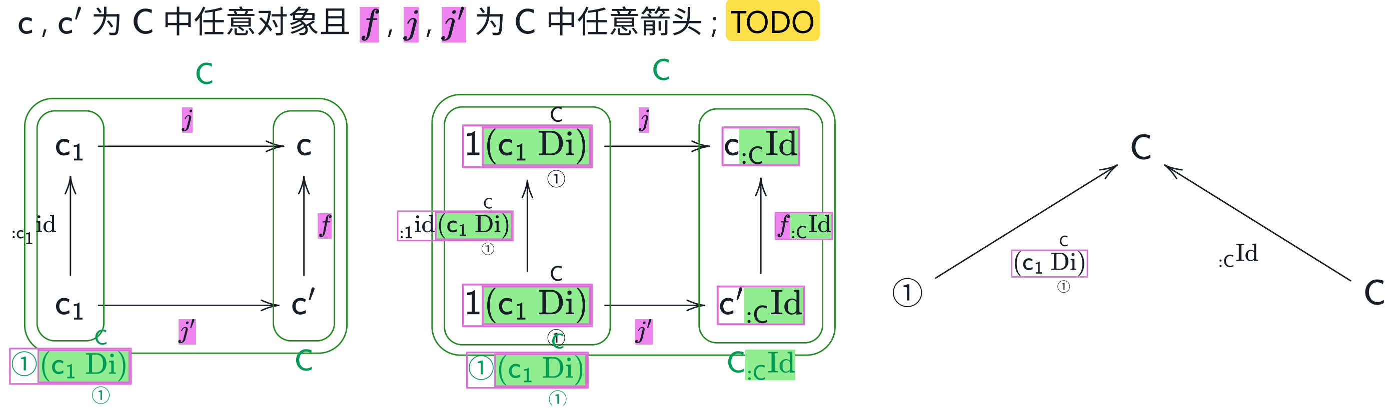
- **离散范畴**：只有对象不含箭头（恒等箭头除外）的范畴。
- Set：**所有集合构成的范畴**，为局部小范畴，满足
  - Set 中对象为任意集合；
  - Set 中箭头为集合间映射。
- Cat：**所有范畴构成的范畴**，满足
  - Cat 中任何对象都构成一个范畴；
  - Cat 中任何箭头都构成一个函子。

若 C，D 为 Cat 中对象，则：

- $\boxed{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$：**反范畴**，满足
  - $\boxed{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$ 中对象皆形如 c，
    c 为任意 C 中的对象；
  - $\boxed{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$ 中箭头皆形如 $\boxed{j^{\mathrm{op}}} : \boxed{c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} c_1}$，
    $j : \boxed{c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2}$ 可为任意 C 中的箭头。
- $\boxed{\mathsf{C} \overset{\mathrm{Cat}}{\times} \mathsf{D}}$：**积范畴**，满足
  - $\boxed{\mathsf{C} \overset{\mathrm{Cat}}{\times} \mathsf{D}}$ 中对象皆形如 $\boxed{c\,.\,d}$，
    c，d 分别为任意 C，D 中的对象；
  - $\boxed{\mathsf{C} \overset{\mathrm{Cat}}{\times} \mathsf{D}}$ 中箭头皆形如 $\boxed{j\,.\,k}$，
    j，k 分别为任意 C，D 中的箭头。
- $\boxed{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathrm{Cat}} \mathsf{D}}$：**所有 C 到 D 的函子的范畴**，满足
  - $\boxed{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathrm{Cat}} \mathsf{D}}$ 中任何对象
    都是 C 到 D 的函子；
  - $\boxed{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathrm{Cat}} \mathsf{D}}$ 中任何箭头
    都是函子间自然变换。
- C/c：**俯范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
  - C/c_2 中对象皆形如 $\boxed{\cancel{c\,.\,1}\,.\,j}$，其中 c 和
    $j : \boxed{c \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2}$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
  - c_2/C 中箭头皆形如 $f\,\boxed{\cancel{._{c_2}\mathrm{id}}}$ 且满足下述交换图，其中
    c，c′ 为 C 中任意对象且 f，j，j' 为 C 中任意箭头；TODO



- c_1/C：**仰范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
  - c_1/C 中对象皆形如 $\boxed{\cancel{1\,.\,c}\,.\,j}$，其中 c 和
    $j : \boxed{c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c}$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
  - C/c_1 中箭头皆形如 $\boxed{\cancel{{}_{:c_1}\mathrm{id}\,.}}\,f$ 且满足下述交换图，其中
    c，c′ 为 C 中任意对象且 f，j，j' 为 C 中任意箭头；TODO



函子

接下来我们来提供函子的正式定义：

- F : $\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为**函子**当且仅当
  - 对任意 C 中对象 c，$\mathsf{c}F$ 为 D 中对象且 $_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}F = {}_{:\mathsf{c}F}\mathrm{id}$；
  - 对任意 C 中箭头 j_1 : $\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 和 j_2 : $\mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_3$，始终都有等式 $(j_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} j_2)F = j_1F \overset{\mathsf{D}}{\circ} j_2F$ 成立。

若已确信 F : $\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为函子且
还知 C 中有对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$
以及 C 中有箭头 j : $\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 则

- 若 j 为单态 / 满态 / 同构
  则 jF 为单态 / 满态 / 同构；
- 若 jF 为同构
  则 j 为同构。

> **Note**
>
> 不难发现函子具有保持
> 对象 / 态射性质的能力。

函子的复合运算

若还知道 G : $\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$ 为函子则

- $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$: $\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$
  也构成一个函子。

恒等函子

对于函子我们也有恒等映射，即：

- $$\begin{aligned} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id} \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} F &= F \\ &= F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id} \end{aligned}$$

忠实，完全和本质满函子

若 C，D，E 皆为**局部小范畴**，则

- F 是**忠实的**当且仅当对任意 C 中的对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$，
  $\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 与 $\mathsf{c}_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}_2F$ 之间始终都存在单射；
- F 是**完全的**当且仅当对任意 C 中的对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$，
  $\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 与 $\mathsf{c}_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}_2F$ 之间始终都存在满射；
- F 是**完全忠实的**当且仅当任意 C 中对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$，
  $\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 与 $\mathsf{c}_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}_2F$ 之间始终都存在双射。

> **Note**
>
> 刚才提到的 “ 单 / 满 / 双射 ”
> 针对的都是范畴的箭头部分。

- F 是**本质满的**当且仅当对任意 D 中对象 d
  都存在 C 中对象 c 使 $\mathsf{c}F \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{d}$ 之间有双射。

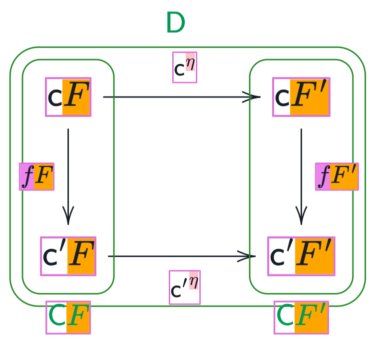
根据刚才的信息我们不难得知

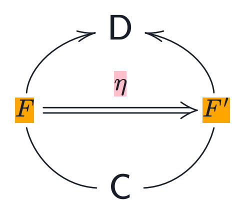
- 若 F, G 为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满函子
  则 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满 函子；
- 若 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为完全忠实函子
  且知道 G 为完全忠实函子
  则可知 F 为完全忠实函子；

自然变换

如果还知道 F' : $\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为函子，那么

- $\eta : F \xrightarrow{\mathsf{C}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{D}} F'$ 为自然变换当且仅当对任意 C 中对象 c , c′ 始终都会有下述交换图成立：

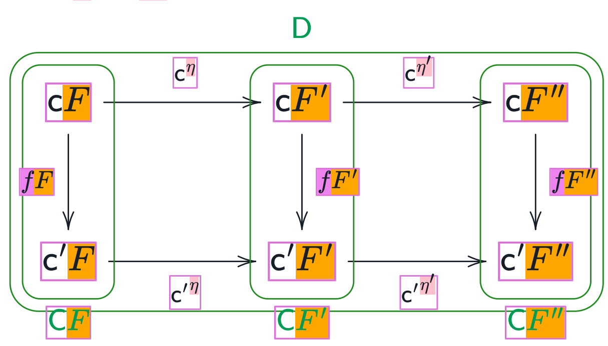


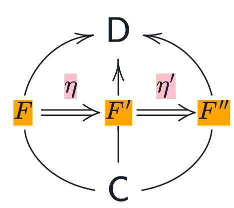


自然变换的复合

若已知 $\eta : F \xrightarrow{\mathsf{C}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{D}} F'$ 构成自然变换且
还知道 $\eta' : F' \xrightarrow{\mathsf{C}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{D}} F''$ 为自然变换则

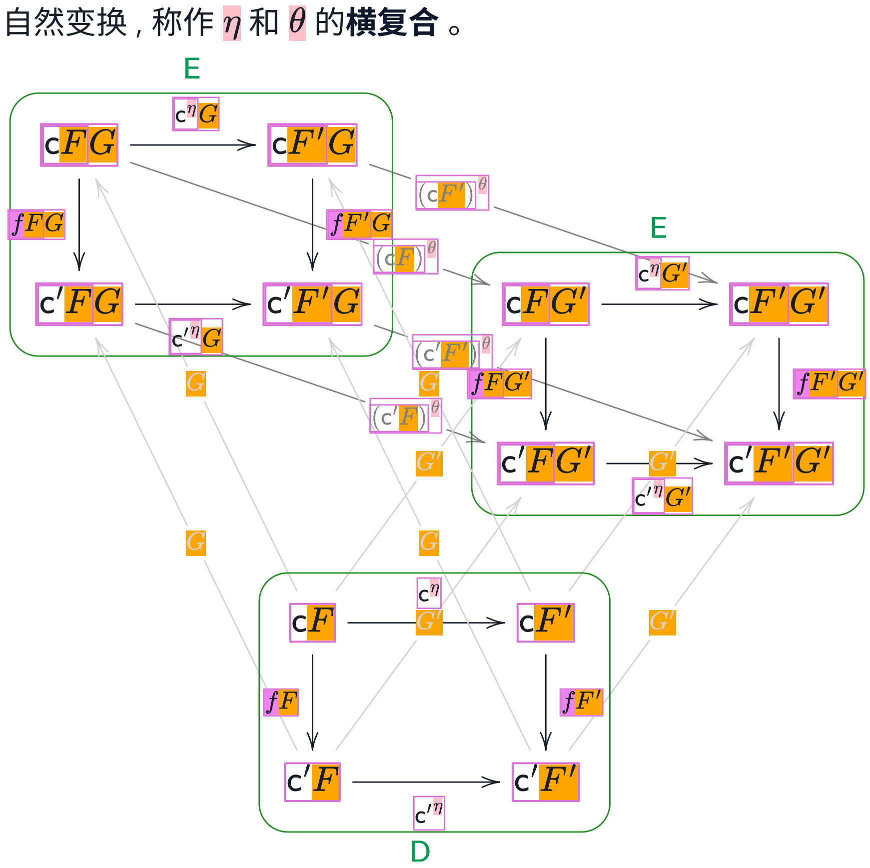
- $\eta \overset{\mathsf{C}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{D}}{\circ} \eta' : F \xrightarrow{\mathsf{C}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{D}} F''$ 为自然变换，
称作 η 和 η' 的**纵复合**。

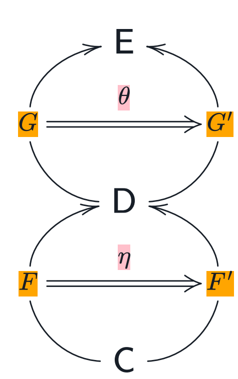




如果还知道 G' : $\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$ 也是个函子
及自然变换 $\theta : G \xrightarrow{\mathsf{D}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{E}} G'$ 那么便有

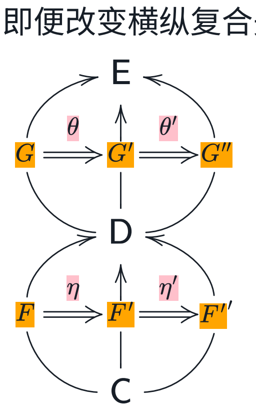
- $\eta \overset{???}{\circ} \theta : F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G \xrightarrow{\mathsf{C}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{E}} F' \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G'$ 为
自然变换，称作 η 和 θ 的**横复合**。





若 $\theta' : G \xrightarrow{\mathsf{D}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{E}} G'$ 为自然变换则

- $(\eta \circ \theta) \overset{\mathsf{C}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{E}}{\circ} (\eta' \circ \theta') = (\eta \overset{\mathsf{C}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{D}}{\circ} \eta') \overset{???}{\circ} (\theta \overset{\mathsf{D}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{E}}{\circ} \theta')$,
即便改变横纵复合先后顺序也不影响最终结果。



恒等自然变换

同样对于自然变换也有恒等映射。

- ${}_{:F}\iota : F \xrightarrow[\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}]{} F$ 为恒等自然变换当且仅当
  对范畴 C 中任意对象 c 都有下述交换图成立：

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{c}F \arrow[r, "\mathsf{c}^{\eta} =_{:(\mathsf{c}F)} \mathrm{id}"] \arrow[d, "fF"'] & \mathsf{c}F \arrow[d, "fF"] \\
\mathsf{c}'F \arrow[r, "\mathsf{c}'^{\eta} =_{:(\mathsf{c}'F)} \mathrm{id}"'] & \mathsf{c}'F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{D} \\
\mathsf{C} \arrow[u, "F"] \arrow[u, phantom, loop right, "\eta"]
\end{tikzcd}$$

D

$\mathsf{C}F$ $\mathsf{C}F$

自然同构

自然同构与你想象中的同构不太像。

- $\eta : F \xrightarrow[\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}]{} F'$ 为**自然同构**当且仅当
  c^{η} 总是同构，这里 c 为任意 C 中对象。

  此时 F，F' 的关系可用 $F \underset{}{\overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}}{\cong}} F'$ 表示

范畴等价的定义

我们用自然同构来定义范畴的等价。

- $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\cong} \mathsf{D}$ 当且仅当
  存在函子 $F : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 及 $F' : \mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}$
  使 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} F' \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}}{\cong} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{id}$ 并且有 $F' \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} F \overset{\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}}{\cong} {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{id}$。

反协变米田引理

若知 $F_2 : C^{op} \xrightarrow{Cat} Set$ 则反变米田引理的陈述如下：

- $\underbrace{((\_ \xrightarrow{C} c_2) \xrightarrow{C^{op} \xrightarrow{Cat} Set} F_2)}_{一堆自然变换} \overset{Set}{\cong} \underbrace{(c_2 F_2)}_{一堆元素}$

反变米田引理的证明如下：

> 1. $\Leftarrow$：考虑任意 $(c_2 F_2)$ 中的 etc：根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图
> 我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_2}，于是便可构建一个完整的 η_2。
> 易知 η_2 是一个自然变换。
>
> Set
>
> $$\begin{tikzcd} c \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f^{op} \xrightarrow{C} c_2"'] & cF_2 \arrow[d, "f^{op}F_2"] \\ c' \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c'F_2 \end{tikzcd}$$
>
> $C \xrightarrow{C} c_2$ $\quad$ CF_2
>
> 2. $\Rightarrow$：考虑任意等式左侧的 η_1：若上述交换图成立
> 则可对任意 η_1 指派 $etc = {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 为 c_2F_2 中与之对应的元素；
>
> $$\begin{tikzcd} c_2 \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f^{op} \xrightarrow{C} c_2"'] & c_2F_2 \arrow[d, "f^{op}F_2"] \\ c' \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c'F_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {}_{:c_2}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f^{op} \xrightarrow{C} c_2"'] & {}_{:c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2}) \arrow[d, "f^{op}F_2"] \\ f^{op} \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & etc(f^{op}F_2) \end{tikzcd}$$
>
> 为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
> c_2 唯一地确定了 η_2，反之 η_2 也唯一确定了 c_2。

若还知 $F_1 : C \xrightarrow{Cat} Set$ 则协变米田引理的陈述如下：

- $\underbrace{((c_1 \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{C \xrightarrow{Cat} Set} F_1)}_{一堆自然变换} \overset{Set}{\cong} \underbrace{(c_1 F_1)}_{一堆元素}$

协变米田引理的证明如下：

> 1. $\Leftarrow$：考虑任意 $(c_1 F_1)$ 中的 etc：根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图
> 我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_1}，于是便可构建一个完整的 η_1。
> 易知 η_1 是一个自然变换。
>
> Set
>
> $$\begin{tikzcd} c_1 \xrightarrow{C} c \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & cF_1 \arrow[d, "fF_1"] \\ c_1 \xrightarrow{C} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c'F_1 \end{tikzcd}$$
>
> $c_1 \xrightarrow{C} C$ $\quad$ CF_1
>
> 2. $\Rightarrow$：考虑任意等式左侧的 η_1：若上述交换图成立
> 则可对任意 η_1 指派 $etc = {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 为 c_1F_1 中与之对应的元素；
>
> $$\begin{tikzcd} c_1 \xrightarrow{C} c_1 \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & c_1F_1 \arrow[d, "fF_1"] \\ c_1 \xrightarrow{C} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c'F_1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {}_{:c_1}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1}) \arrow[d, "fF_1"] \\ f \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & etc(fF_1) \end{tikzcd}$$
>
> 为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
> c_1 唯一地确定了 η_1，反之 η_1 也唯一确定了 c_1。

可表和余可表函子的泛性质

接下来定义一个重要的概念：

- F_2 为**可表函子**当且仅当
  存在 C^{op} 中对象 c_2 使得
  $(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2) = c_2\text{よ} \underset{\mathsf{Cat}}{\overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Set}}{\cong}} F_2$ 成立，
  即 $c_2\text{よ}$ 与 F_2 间存在自然同构。
  此时称 F_2 可由对象 c_2 **表出**。

同理我们也有如下对偶概念：

- F_1 为**余可表函子**当且仅当
  存在 C 中对象 c_1 使得
  $(c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) = c_1\text{尤} \underset{\mathsf{Cat}}{\overset{\mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{Set}}{\cong}} F_1$ 成立。
  即 $c_1\text{尤}$ 与 F_1 间存在自然同构。
  此时称 F_1 可由对象 c_1 **余可表出**。

米田和尤达嵌入

根据前面的内容我们可以知

- $\text{よ}: \boxed{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})}$

  $$\begin{aligned} \mathsf{c}_2 &\longmapsto (\mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\rightarrow} \mathsf{c}_2) && \text{构成一个函子，称作预层} \\ f_2 &\longmapsto (f_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\rightarrow} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) && \text{构成一个函子间映射，即自然变换} \end{aligned}$$

  构成一个完全忠实函子，该函子称作是**米田嵌入**。

证明如下：

- よ 是函子，因为
  - $:_{\mathsf{c}_2}\mathrm{id}\,\text{よ} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} :_{\mathsf{c}_2}\mathrm{id}) = :_{(\mathsf{c}_2\text{よ})}\mathrm{id}$
  - $(f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')\text{よ} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2') = f_2\text{よ} \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} f_2'\text{よ}$,
- よ 是完全忠实的，因为将反变米田引理中的 F_2 换成 $(\mathsf{c}_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_)$ 即可获得下述公式：

  $$\underbrace{((\mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (\mathsf{c}_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_))}_{\text{预层范畴的 hom-set}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}_2)}_{\mathsf{C}\text{ 的 hom-set}}$$

  也就是

  $$\underbrace{((\mathsf{c}_2\text{よ}) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (\mathsf{c}_2'\text{よ}))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}_2)}_{\mathsf{C}\text{ 的 hom-set}} = \underbrace{(\mathsf{c}_2(\mathsf{c}_2'\text{よ}))}_{\text{一堆元素}}$$

> ⓘ **Note**
>
> 由于函子能够保持态射的性质，对任意左侧集合中的自然同构右侧集合也会有同构与之对应，反之亦然。这也就证明了前面自然同构相关定理省略的部分。

根据前面的内容我们可以知

- $\text{尤}: \boxed{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})}$

  $$\begin{aligned} \mathsf{c}_1 &\longmapsto (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\rightarrow} \_) && \text{构成一个函子} \\ f_1^{\mathrm{op}} &\longmapsto (f_1^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\rightarrow} \_) = (f_1^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) && \text{构成一个函子间映射，即自然变换} \end{aligned}$$

  构成一个完全忠实函子，该函子称作是**尤达嵌入**。

证明如下：

- 尤 是函子，因为
  - $:_{\mathsf{c}_1}\mathrm{id}\,\text{尤} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} :_{\mathsf{c}_1}\mathrm{id}) = :_{(\mathsf{c}_1\text{尤})}\mathrm{id}$
  - $(f_1 \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}{\circ} f_1')\text{尤} = ((f_1 \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}{\circ} f_1') \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) = (f_1^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (f_1'^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) = f_1^{\mathrm{op}}\text{尤} \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} f_1^{\mathrm{op}}\text{尤}$,
- 尤 是完全且忠实的，因为将协变米田引理中的 F_1 换成 $(\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\rightarrow} \_)$ 即可获得下述公式：

  $$\underbrace{((\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\rightarrow} \_) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\rightarrow} \_))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\rightarrow} \mathsf{c}_1)}_{\text{一堆元素}}$$

  也就是

  $$\underbrace{((\mathsf{c}_1\text{尤}) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (\mathsf{c}_1'\text{尤}))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\rightarrow} \mathsf{c}_1)}_{\text{一堆元素}} = \underbrace{(\mathsf{c}_1(\mathsf{c}_1'\text{尤}))}_{\text{一堆元素}}$$

> ⓘ **Note**
>
> 由于函子能够保持态射的性质，对任意左侧集合中的自然同构右侧集合也会有同构与之对应，反之亦然。这也就证明了前面自然同构相关定理省略的部分。