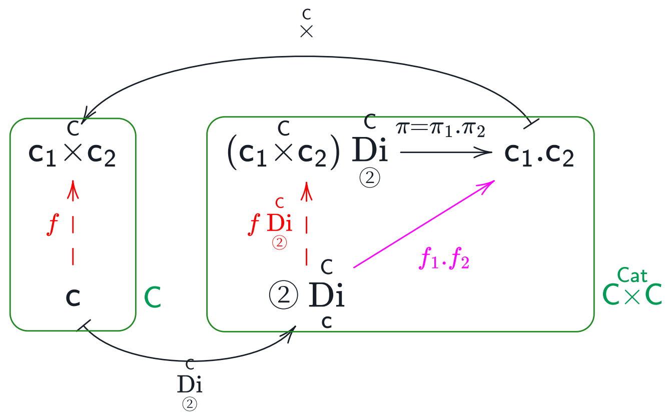
04-05 类型的和与积

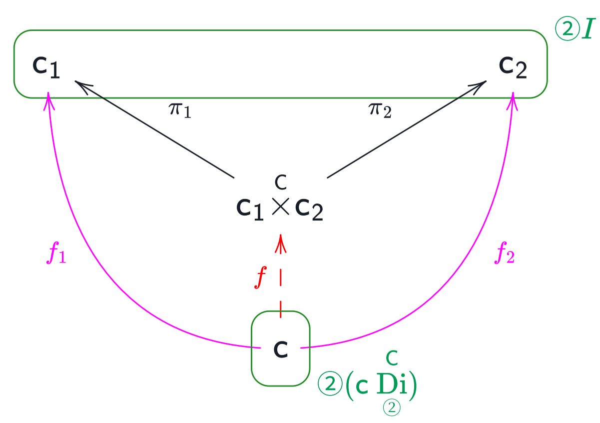
LaTeX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times} : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$ 在范畴 C 中有如下性质：

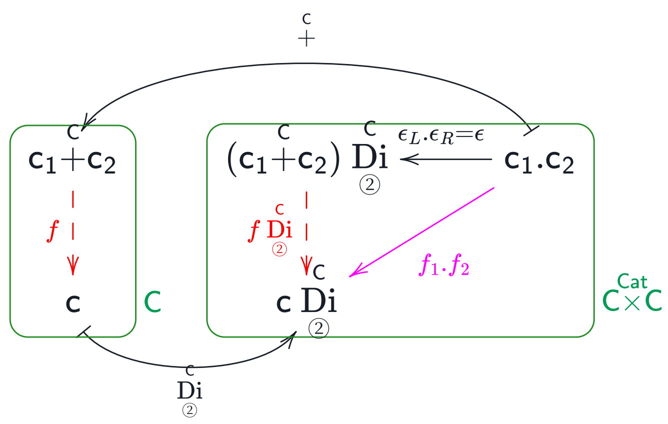
- $(\mathsf{c} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1) \overset{\mathsf{Set}}{\times} (\mathsf{c} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \mathsf{c} \overset{\mathsf{C}}{\to} (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2)$ —— c 为任意 C 中对象。此即为积的 **泛性质**，亦为**指数对乘法的分配律** 。

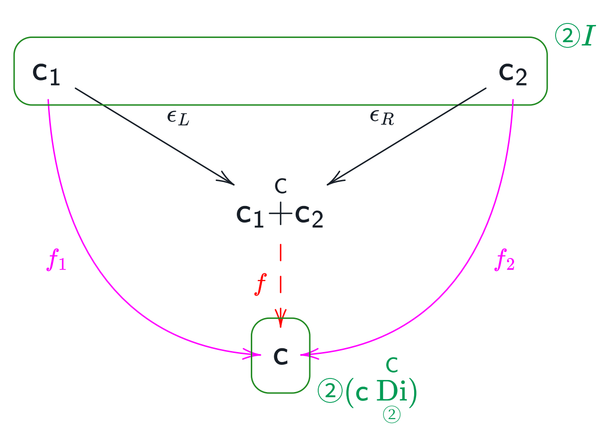




默认函子 $\overset{\mathsf{C}}{+} : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$ 在范畴 C 中有如下性质：

- $(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \overset{\mathsf{Set}}{\times} (\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2) \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$ —— c 为任意 C 中对象。此即为和的 **泛性质**，亦为**指数对加法的分配律** 。





ⓘ **Note**

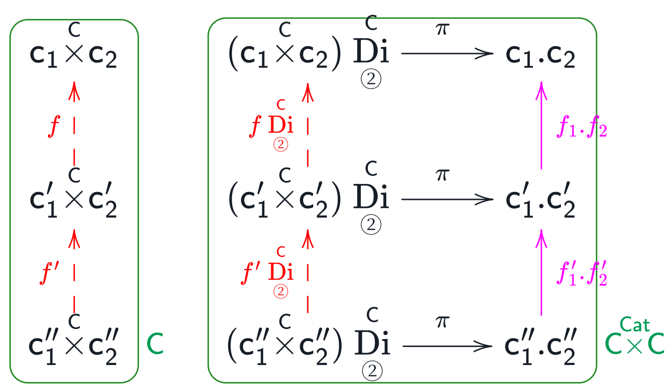
在上面的插图中

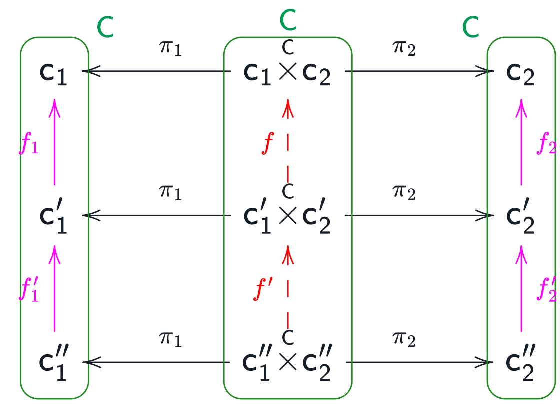
- $\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C}$ 为对角函子满足
  $\mathsf{c} \longmapsto \mathsf{c} \,.\, \mathsf{c}$
- $\underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} (\textcircled{2} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C})$
  $\mathsf{c} \longmapsto$ 常值函子
  $\mathsf{c}\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} : \quad \textcircled{2} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$
  $1 \longmapsto \mathsf{c}$
  $2 \longmapsto \mathsf{c}$
  即为对角函子的第二种等价的定义 。
  ② 为仅含两个对象的范畴，在此则作为一个指标范畴 。1 和 2 分别为其中的对象 。
- $I : \textcircled{2} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$ 为函子，满足
  $1 \longmapsto \mathsf{c}_1$
  $2 \longmapsto \mathsf{c}_2$
- 不难看出上图中
  $\pi : I \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} ((\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2)\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}})$
  $\epsilon : ((\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2)\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}) \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} I$
  都构成自然变换

函子性

如何证明 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : ({}_{:c_1'}\mathrm{id} \underset{\mathsf{C}}{.} {}_{:c_2'}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:c_1' \overset{\mathsf{C}}{\times} c_2'}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\times$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : (f_1' \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1 \underset{\mathsf{C}}{.} f_2' \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \longmapsto f' \overset{\mathsf{C}}{\circ} f$
  —— 即函子 $\times$ 保持**箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：



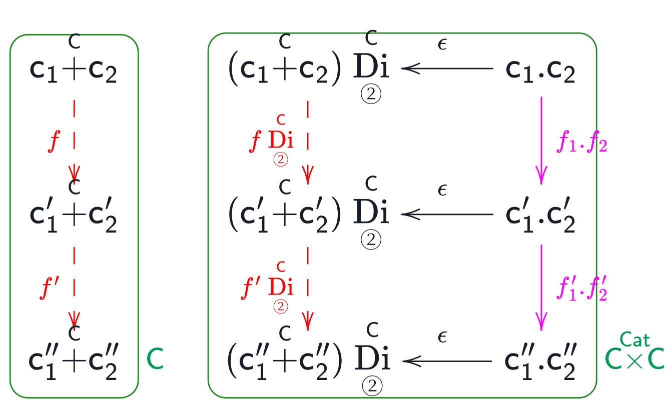


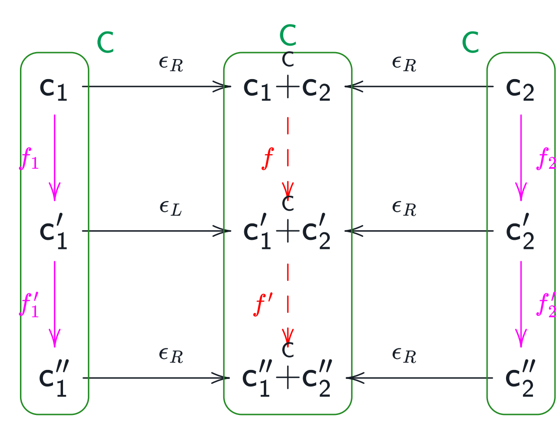
另外我们规定 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : f_1 \,.\, c_2 \longmapsto f_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} {}_{:c_2}\mathrm{id}$
  $\overset{\mathsf{C}}{\times} : c_1 \,.\, f_2 \longmapsto {}_{:c_1}\mathrm{id} \times f_2$

如何证明 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathsf{C}}{+} : ({}_{:c_1}\mathrm{id} \underset{\mathsf{C}}{.} {}_{:c_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} c_2}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $+$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{\mathsf{C}}{+} : (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1' \underset{\mathsf{C}}{.} f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2') \longmapsto f \overset{\mathsf{C}}{\circ} f'$
  —— 即函子 $\times$ 保持**箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：





另外我们规定 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{\mathsf{C}}{+} : f_1 \,.\, c_2 \longmapsto f_1 \overset{\mathsf{C}}{+} {}_{:c_2}\mathrm{id}$
  $\overset{\mathsf{C}}{+} : c_1 \,.\, f_2 \longmapsto {}_{:c_1}\mathrm{id} + f_2$

运算性质

对于函子 $\overset{C}{\times}$ 我们不难得知

- $c_1 \overset{C}{\times} 1 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{\times} 1 \overset{C}{\cong} c_1$
  —— 乘法具有**幺元 1**。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \cdot {}_{:c}!$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
(c_1\overset{C}{\times}1)\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & c_1.1 \\
c\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_1\cdot_{:c}!"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_1\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "{}_{:c_1}\mathrm{id}\cdot_{:c_1}!"] & c_1.1 \\
c\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f'\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_1\cdot_{:c}!"'] &
\end{tikzcd}$$

- $c_1 \overset{C}{\times} c_2 \overset{C}{\cong} c_2 \overset{C}{\times} c_1$
  —— 乘法具有**交换律**。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \cdot f_2$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
(c_1\overset{C}{\times}c_2)\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & c_1.c_2 \\
\textcircled{2}\ \underset{c}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_1.f_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_2\overset{C}{\times}c_1)\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & c_2.c_1 \\
\textcircled{2}\ \underset{c}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f'\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_2.f_1"'] &
\end{tikzcd}$$

- $(c_1 \overset{C}{\times} c_2) \overset{C}{\times} c_3 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{\times} (c_2 \overset{C}{\times} c_3)$
  —— 乘法具有**结合律**。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$ 唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
((c_1\overset{C}{\times}c_2)\overset{C}{\times}c_3\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}) \arrow[r, "\pi"] & (c_1\overset{C}{\times}c_2).c_3 \arrow[r, "\pi\cdot_{:c_3}\mathrm{id}"] & (c_1.c_2).c_3 \\
c_3\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, dotted, "j.f_3"] \arrow[urr, "(f_1.f_2).f_3"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_1\overset{C}{\times}(c_2\overset{C}{\times}c_3))\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi"] & c_1.(c_2\overset{C}{\times}c_3) \arrow[r, "{}_{:c_1}\mathrm{id}.\pi"] & c_1.(c_2.c_3) \\
c_3\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, dotted, "f_1.j"] \arrow[urr, "f_1.(f_2.f_3)"'] & &
\end{tikzcd}$$

对于函子 $\overset{C}{+}$ 我们不难得知

- $c_1 \overset{C}{+} 0 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{+} 1 \overset{C}{\cong} c_1$
  —— 加法具有**幺元 0**。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \cdot {}_{:c}¡$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
(c_1\overset{C}{+}0)\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.0 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f_1\cdot_{:c}¡"] \\
c\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_1\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f'\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.0 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f_1\cdot_{:c}¡"] \\
c\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}$$

- $c_1 \overset{C}{+} c_2 \overset{C}{\cong} c_2 \overset{C}{+} c_1$
  —— 加法具有**交换律**。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \cdot f_2$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
(c_1\overset{C}{+}c_2)\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.c_2 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f_1.f_2"] \\
c\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_2\overset{C}{+}c_1)\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f'\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & c_2.c_1 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f_2.f_1"] \\
c\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}$$

- $(c_1 \overset{C}{+} c_2) \overset{C}{+} c_3 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{+} (c_2 \overset{C}{+} c_3)$
  —— 加法具有**结合律**。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$ 唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
((c_1\overset{C}{+}c_2)\overset{C}{+}c_3)\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & (c_1\overset{C}{+}c_2).c_3 \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "j.f_3"] & (c_1.c_2).c_3 \arrow[l, "\epsilon\cdot_{:c_3}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "(f_1.f_2).f_3"] \\
c\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_1\overset{C}{+}(c_2\overset{C}{+}c_3))\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.(c_2\overset{C}{+}c_3) \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "f_1.j"] & c_1.(c_2.c_3) \arrow[l, "\epsilon\cdot_{:c_3}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "f_1.(f_2.f_3)"] \\
c\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} & &
\end{tikzcd}$$

幺半范畴

像刚才这样对象运算具有**单位元**以及**结合律**的范畴称作**幺半范畴**；

若上述范畴还具有**交换律**则称作**对称幺半范畴**；

很明显我们的范畴 C 是典型的**对称幺半范畴**。

幺半群

什么是幺半群呢？有两种定义方式：

- **幺半群** M 是个范畴，其只含一个对象 m；
  其中的复合运算正好有单位元以及结合律。
- 对象 m 属于幺半范畴 C，满足下述交换图：

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{1}\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{m} \arrow[r, "u\overset{\mathsf{C}}{\otimes}{}_{:\mathsf{m}}\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\text{左单位元 } u_l"'] & \mathsf{m}\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{m} \arrow[d, "p"', "\text{运算结果唯一}"] & \mathsf{m}\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{1} \arrow[l, "{}_{:\mathsf{m}}\mathrm{id}\overset{\mathsf{C}}{\otimes}u"'] \arrow[dl, "u_r\text{ 右单位元}"] \\
 & \mathsf{m} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(\mathsf{m}\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{m})\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{m} \arrow[rr, "\text{结合律 } a"] \arrow[d, "\text{先算左侧括号 } p\overset{\mathsf{C}}{\otimes}{}_{:\mathsf{m}}\mathrm{id}"'] & & \mathsf{m}\overset{\mathsf{C}}{\times}(\mathsf{m}\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{m}) \arrow[d, "{}_{:\mathsf{m}}\mathrm{id}\overset{\mathsf{C}}{\otimes}p\text{ 先算右侧括号}"] \\
\mathsf{m}\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{m} \arrow[r, "\text{再算最终结果 } p"'] & \mathsf{m} & \mathsf{m}\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{m} \arrow[l, "p\text{ 果结终最算再}"]
\end{tikzcd}
$$

  其中

  - u ：$\mathsf{1} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{m}$ 其实就是 m 里面的幺元
  - u_l：$\mathsf{1} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{m}$ 表示 u 构成左幺元
  - u_r：$\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{1} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{m}$ 表示 u 构成右幺元
  - p ：$\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{m}$ 即为 m 中的二元运算
  - a ：$(\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m}) \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} (\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m})$ 表示 m 具有结合律