

08-09 函子和自然变换

L^AT_EX Definitions are here.

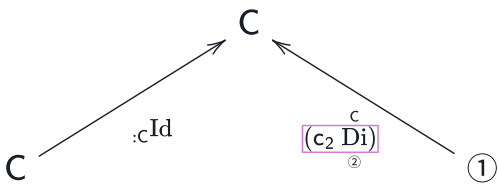
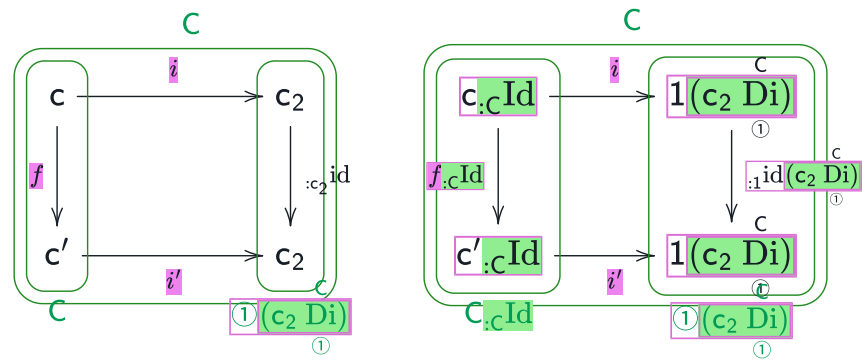
一些特殊的范畴

现在规定几种特殊的范畴。

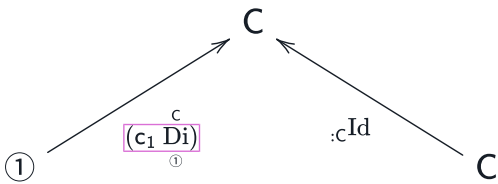
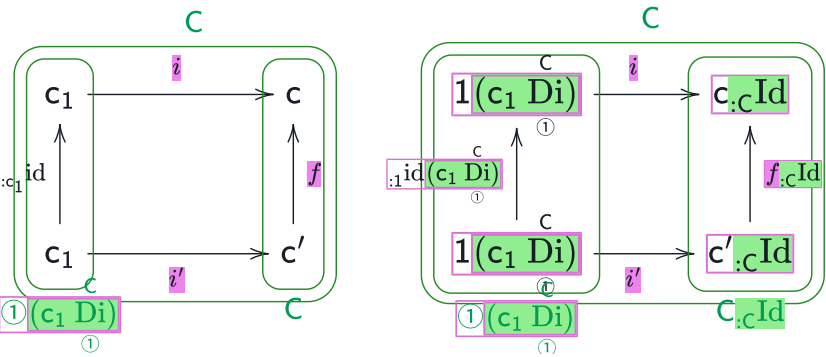
- 离散范畴：只有对象不含箭头（恒等箭头除外）的范畴。
- Set：所有集合构成的范畴，为局部小范畴，满足
 - Set 中对象为任意集合；
 - Set 中箭头为集合间映射。
- Cat：所有范畴构成的范畴，满足
 - Cat 中任何对象都构成一个范畴；
 - Cat 中任何箭头都构成一个函子。

若 C, D 为 Cat 中对象，则：

- C^{op}：反范畴，满足
 - C^{op} 中对象皆形如 c，c 为任意 C 中的对象；
 - C^{op} 中箭头皆形如 i^{op}：c₂ → c₁，i：c₁ → c₂ 可为任意 C 中的箭头。
- C^{Cat} × D^{Cat}：积范畴，满足
 - C^{Cat} × D^{Cat} 中对象皆形如 c · d，c, d 分别为任意 C, D 中的对象；
 - C^{Cat} × D^{Cat} 中箭头皆形如 i · j，i, j 分别为任意 C, D 中的箭头。
- C^{Cat} → D^{Cat}：所有 C 到 D 的函子的范畴，满足
 - C^{Cat} → D^{Cat} 中任何对象都是 C 到 D 的函子；
 - C^{Cat} → D^{Cat} 中任何箭头都是函子间自然变换。
- C/c：俯范畴，这里 c 为任意 C 中对象；满足
 - C/c₂ 中对象皆形如 ~~c · 1 · i~~，其中 c 和 i：c₁ → c₂ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
 - c₂/C 中箭头皆形如 ~~f · _{c₂} id~~ 且满足下述交换图，其中 c, c' 为 C 中任意对象且 f, i, i' 为 C 中任意箭头；



- c₁/C：仰范畴，这里 c 为任意 C 中对象；满足
 - c₁/C 中对象皆形如 ~~1 · c · i~~，其中 c 和 i：c₁ → c 分别为 C 中任意的对象和箭头；
 - C/c₁ 中箭头皆形如 ~~_{c₁} id · f~~ 且满足下述交换图，其中 c, c' 为 C 中任意对象且 f, i, i' 为 C 中任意箭头；



函子

接下来我们来提供函子的正式定义：

- $F : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{D}$ 为**函子**当且仅当
 - 对任意 \mathbf{C} 中对象 c , cF 为 \mathbf{D} 中对象且 $_{c}\text{id}F = _{:cF}\text{id}$;
 - 对任意 \mathbf{C} 中箭头 $i_1 : c_1 \xrightarrow{c} c_2$ 和 $i_2 : c_2 \xrightarrow{c} c_3$, 始终都有等式 $(i_1 \circ i_2)F = i_1F \circ i_2F$ 成立。

若已确信 $F : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{D}$ 为函子且
还知 \mathbf{C} 中有对象 c_1, c_2
以及 \mathbf{C} 中有箭头 $i : c_1 \xrightarrow{c} c_2$ 则

- 若 i 为单态 / 满态 / 同构
则 iF 为单态 / 满态 / 同构 ;
- 若 iF 为同构
则 i 为同构。

i

Note

不难发现函子具有保持
对象 / 态射性质的能力。

函子的复合运算

若还知道 $G : \mathbf{D} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{E}$ 为函子则

- $F \circ G : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{E}$
也构成一个函子。

恒等函子

对于函子我们也有恒等映射，即：

- $_{c}\text{Id} \circ F = F$
 $= F \circ _{:D}\text{Id}$

忠实，完全和本质满函子

若 $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$ 皆为**局部小范畴**，则

- F 是**忠实的**当且仅当对任意 \mathbf{C} 中的对象 c_1, c_2 ,
 $c_1 \xrightarrow{c} c_2$ 与 $c_1F \xrightarrow{D} c_2F$ 之间始终都存在单射；
- F 是**完全的**当且仅当对任意 \mathbf{C} 中的对象 c_1, c_2 ,
 $c_1 \xrightarrow{c} c_2$ 与 $c_1F \xrightarrow{D} c_2F$ 之间始终都存在满射；
- F 是**完全忠实的**当且仅当任意 \mathbf{C} 中对象 c_1, c_2 ,
 $c_1 \xrightarrow{c} c_2$ 与 $c_1F \xrightarrow{D} c_2F$ 之间始终都存在双射。

i

Note

刚才提到的 “ 单 / 满 / 双射 ”
针对的都是范畴的箭头部分。

- F 是**本质满的**当且仅当对任意 \mathbf{D} 中对象 d
都存在 \mathbf{C} 中对象 c 使 $cF \xrightarrow{D} d$ 之间有双射。

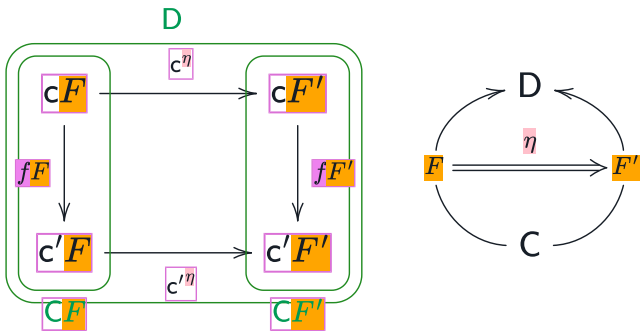
根据刚才的信息我们不难得知

- 若 F, G 为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满函子
则 $F \circ G : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{E}$ 为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满 函子；
- 若 $F \circ G : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{E}$ 为完全忠实函子
且知道 G 为完全忠实函子
则可知 F 为完全忠实函子；

自然变换

如果还知道 $F' : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{D}$ 为函子，那么

- $\eta : F \xrightarrow{\text{Cat}} F'$ 为自然变换当且仅当对任意 \mathbf{C} 中对象 c, c' 始终都会有下述交换图成立：

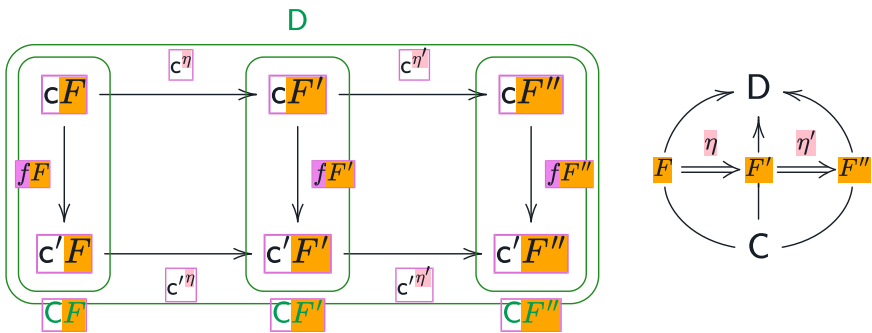


自然变换的复合

若已知 $\eta : F \xrightarrow{\text{Cat}} F'$ 构成自然变换且

还知道 $\eta' : F' \xrightarrow{\text{Cat}} F''$ 为自然变换则

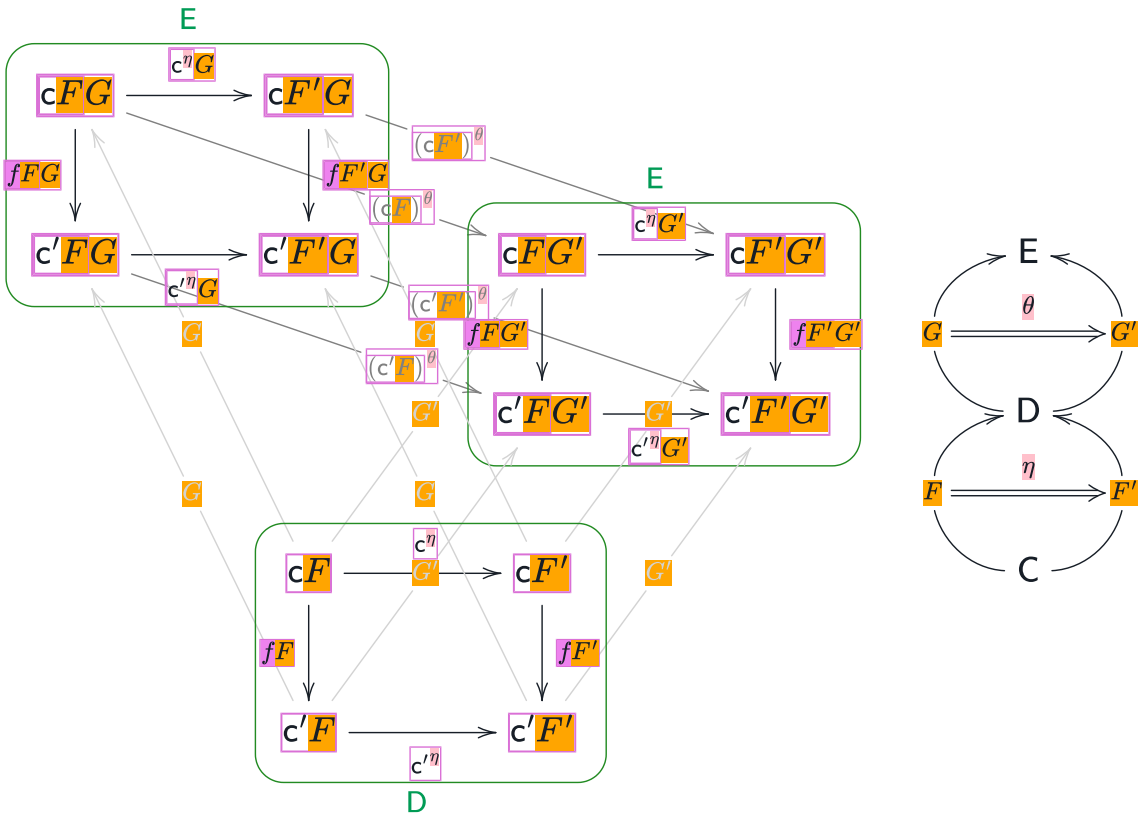
- $\eta \circ \eta' : F \xrightarrow{\text{Cat}} F''$ 为自然变换，称作 η 和 η' 的**纵复合**。



如果还知道 $G' : \mathbf{D} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{E}$ 也是个函子

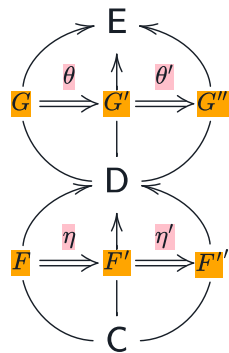
及自然变换 $\theta : G \xrightarrow{\text{Cat}} G'$ 那么便有

- $\eta \circ \theta : F \xrightarrow{\text{Cat}} G \xrightarrow{\text{Cat}} F' \xrightarrow{\text{Cat}} G' \xrightarrow{\text{Cat}} E$ 为自然变换，称作 η 和 θ 的**横复合**。



若 $\theta' : G' \xrightarrow{\text{Cat}} G''$ 为自然变换则

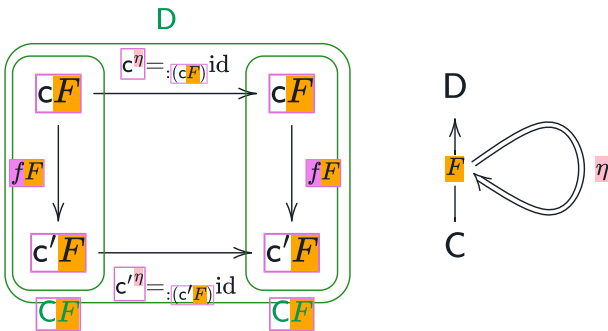
- $(\eta \circ \theta) \circ (\eta' \circ \theta') = (\eta \circ \eta') \circ (\theta \circ \theta')$ ，即便改变纵横复合先后顺序也不影响最终结果。



恒等自然变换

同样对于自然变换也有恒等映射。

- $\eta: F \rightarrow F$ 为恒等自然变换当且仅当对范畴 \mathbf{C} 中任意对象 c 都有下述交换图成立：



自然同构

自然同构与你想象中的同构不太像。

- $\eta: F \rightarrow F'$ 为**自然同构**当且仅当 $c\eta$ 总是同构，这里 c 为任意 \mathbf{C} 中对象。
此时 F, F' 的关系可用 $F \cong F'$ 表示

范畴等价的定义

我们用自然同构来定义范畴的等价。

- $\mathbf{C} \cong \mathbf{D}$ 当且仅当存在函子 $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ 及 $F': \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ 使 $F \circ F' \cong \text{id}_{\mathbf{D}}$ 并且有 $F' \circ F \cong \text{id}_{\mathbf{C}}$ 。

米田引理

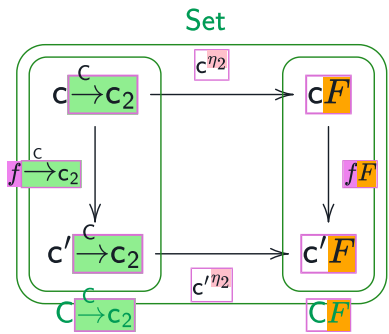
若知道 $F : \mathbf{C} \overset{\text{Cat}}{\longrightarrow} \mathbf{Set}$, 则

反变米田引理的陈述如下：

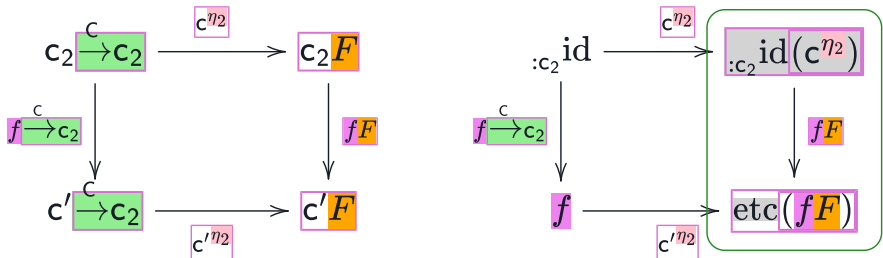
- $$\underbrace{\left(\left(\left(_ \overset{\text{C}}{\longrightarrow} \mathbf{c}_2 \right) \overset{\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}}{\longrightarrow} F \right) \right)}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\text{Set}}{\cong} \underbrace{\left(\mathbf{c}_2 F \right)}_{\text{一堆元素}}$$

反变米田引理的证明如下：

- \Leftarrow ：考虑任意 $(\mathbf{c}_2 F)$ 中的 etc ：根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_2} , 于是便可构建一个完整的 η_2 。易知 η_2 是一个自然变换。



- \Rightarrow ：考虑任意等式左侧的 η_1 ：若上述交换图成立则可对任意 η_1 指派 $\text{etc} = \text{id}(\eta_1)$ 为 $\mathbf{c}_2 F$ 中与之对应的元素；



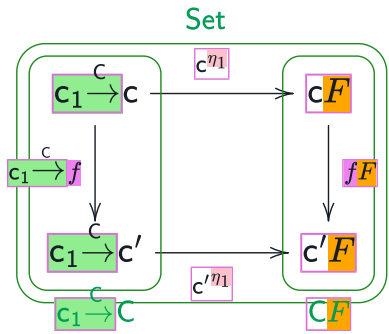
为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
 c_2 唯一地确定了 η_2 , 反之 η_2 也唯一确定了 c_2 。

协变米田引理的陈述如下：

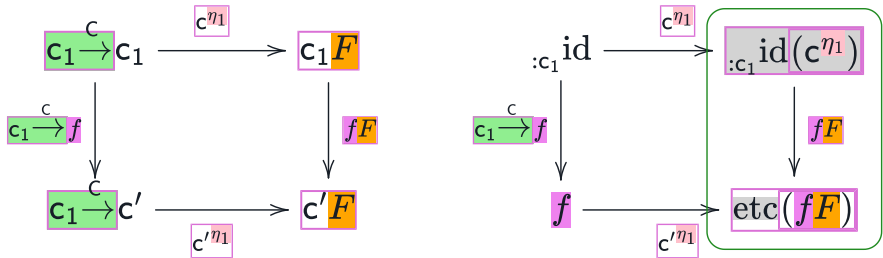
- $$\underbrace{\left(\left(\left(\mathbf{c}_1 \overset{\text{C}}{\longrightarrow} _ \right) \overset{\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}}{\longrightarrow} F \right) \right)}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\text{Set}}{\cong} \underbrace{\left(\mathbf{c}_1 F \right)}_{\text{一堆元素}}$$

协变米田引理的证明如下：

- \Leftarrow ：考虑任意 $(\mathbf{c}_1 F)$ 中的 etc ：根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_1} , 于是便可构建一个完整的 η_1 。易知 η_1 是一个自然变换。



- \Rightarrow ：考虑任意等式左侧的 η_1 ：若上述交换图成立则可对任意 η_1 指派 $\text{etc} = \text{id}(\eta_1)$ 为 $\mathbf{c}_1 F$ 中与之对应的元素；



为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
 c_1 唯一地确定了 η_1 , 反之 η_1 也唯一确定了 c_1 。

米田嵌入

根据前面的内容我们可知

- よ : $C \xrightarrow{\text{Cat}} ((C^{\text{op}} \xrightarrow{\text{Set}} \text{Set}))$
 $c_2 \mapsto (c_2 \xrightarrow{C} _)$ 构成一个函子，称作预层
 $f_2 \mapsto (f_2 \xrightarrow{C^{\text{op}}} _) = (_ \xrightarrow{C} c_2)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
构成一个完全忠实函子，该函子称作是**米田嵌入**。

证明如下：

- よ 是函子，因为
 - $_{:c_2} \text{id} \text{よ} = (_ \circ_{:c_2} \text{id}) = _{:(c_2 \text{よ})} \text{id}$
 - $(f_2 \circ^C f'_2) \text{よ} = (_ \circ^C (f_2 \circ^C f'_2)) = (_ \circ^C f_2) \xrightarrow{\text{Cat} \rightarrow \text{Set}} (_ \circ^C f'_2)$ ，

由于函子具有保持对象 / 映射性质的能力，
故便可知 $f_2 \text{よ}$ 为同构当且仅当 f_2 为同构。

- よ 是完全忠实的，因为
将协变米田引理中的 $c_1 / C / F$
分别换成 $c_2 / C^{\text{op}} / (c'_2 \xrightarrow{C^{\text{op}}} _)$
即可获得下述公式：

$$\underbrace{((c_2 \xrightarrow{C^{\text{op}}} _) \xrightarrow{C^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}} (c'_2 \xrightarrow{C^{\text{op}}} _))}_{\text{预层范畴的 hom-set}} \cong \underbrace{(c'_2 \xrightarrow{C^{\text{op}}} c_2)}_{C \text{ 的 hom-set}}$$

也就是

$$\underbrace{((c_2 \text{よ}) \xrightarrow{\text{Cat} \rightarrow \text{Set}} (c'_2 \text{よ}))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(c'_2 \xrightarrow{C^{\text{op}}} c_2)}_{C \text{ 的 hom-set}} = \underbrace{(c_2 (c'_2 \text{よ}))}_{\text{一堆元素}}$$

Note

由于函子能够保持态射的性质，
对任意左侧集合中的自然同构
右侧集合也会有同构与之对应，反之亦然。
这也就证明了前面自然同构相关定理省略的部分。

根据前面的内容我们可知

- 尤 : $C^{\text{op}} \xrightarrow{\text{Cat}} (C \xrightarrow{\text{Set}} \text{Set})$
 $c_1 \mapsto (c_1 \xrightarrow{C} _)$ 构成一个函子
 $f_1 \mapsto (f_1 \xrightarrow{C} _) = (f_1 \circ^C _)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
构成一个完全忠实函子，该函子称作是**尤达嵌入**。

证明如下：

- 尤 是函子，因为
 - $_{:c_1} \text{id} \text{尤} = (_ \circ_{:c_1} \text{id}) = _{:(c_1 \text{尤})} \text{id}$
 - $(f_1 \circ^C f'_1) \text{尤} = (_ \circ^C (f_1 \circ^C f'_1)) = (_ \circ^C f_1) \xrightarrow{\text{Cat} \rightarrow \text{Set}} (_ \circ^C f'_1)$ ，

- 尤 是完全且忠实的，因为
将协变米田引理中的 F
换成 $(c'_1 \xrightarrow{C} _)$
即可获得下述公式：

$$\underbrace{((c_1 \xrightarrow{C} _) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} (c'_1 \xrightarrow{C} _))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(c'_1 \xrightarrow{C} c_1)}_{\text{一堆元素}}$$

也就是

$$\underbrace{((c_1 \text{尤}) \xrightarrow{\text{Cat} \rightarrow \text{Set}} (c'_1 \text{尤}))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(c'_1 \xrightarrow{C} c_1)}_{\text{一堆元素}} = \underbrace{(c_1 (c'_1 \text{尤}))}_{\text{一堆元素}}$$

Note

由于函子能够保持态射的性质，
对任意左侧集合中的自然同构
右侧集合也会有同构与之对应，反之亦然。
这也就证明了前面自然同构相关定理省略的部分。