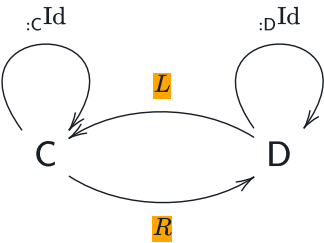


10 伴随函子

LaTeX Definitions are here.

若有函子 $L : \mathbf{D} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{C}$
以及函子 $R : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{D}$, 即



伴随函子的第一种定义

那么规定

- $L \dashv R$ 当且仅当
函子 $(_ \xrightarrow{L} _)$ 和 $(_ \xrightarrow{R} _)$
间存在着一个二元的**自然同构**。

假如确实有 $L \dashv R$, 那么不难得知

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_2 ，见下：

$$\begin{aligned}\phi_2 &: \left(_ \xrightarrow{D} _ R \right) \xrightarrow{(D \times C) \rightarrow \text{Set}} \left(_ L \xrightarrow{C} _ \right) \\ (_ \cdot c) \phi_2 &: \left(_ \xrightarrow{D} c R \right) \xrightarrow{D \rightarrow \text{Set}} \left(_ L \xrightarrow{C} c \right) \\ (d \cdot _) \phi_2 &: \left(d \xrightarrow{D} _ R \right) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} \left(d L \xrightarrow{C} _ \right)\end{aligned}$$

套用反变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{\left(_ \xrightarrow{D} c R \right) \xrightarrow{D^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}} \left(_ L \xrightarrow{C} c \right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\left(c R L \xrightarrow{C} c \right)}_{\text{一堆元素}}$$

由反变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(_ \cdot c) \phi_2$ 右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 $:_c R \text{id}(c R \cdot c) \phi_2 = c^\varepsilon$ 。如此

- $\varepsilon : R \circ L \xrightarrow{\text{Cat}} :_c \text{Id}$ 构成自然变换。

考虑任意 $f^{\text{op}} : c' \xrightarrow{C} c$ ：

$$\begin{array}{ccc} c R \xrightarrow{D} c R & \xrightarrow{(c R \cdot c) \phi_2} & c R L \xrightarrow{C} c \\ \downarrow f^{\text{op}} R \xrightarrow{D} c R & & \downarrow f^{\text{op}} R L \xrightarrow{C} c \\ c' R \xrightarrow{D} c R & \xrightarrow{(c' R \cdot c) \phi_2} & c' R L \xrightarrow{C} c \\ \uparrow c' R \xrightarrow{D} f^{\text{op}} R & & \uparrow c' R L \xrightarrow{C} f^{\text{op}} \\ c' R \xrightarrow{D} c' R & \xrightarrow{(c' R \cdot c') \phi_2} & c' R L \xrightarrow{C} c' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} :_c R \text{id} & \xrightarrow{(c R \cdot c) \phi_2} & :_c R \text{id}(c R \cdot c) \phi_2 = c^\varepsilon \\ \downarrow f^{\text{op}} R \xrightarrow{D} c R & & \downarrow f^{\text{op}} R L \xrightarrow{C} c \\ f^{\text{op}} R & \xrightarrow{(c' R \cdot c) \phi_2} & f^{\text{op}} R L \circ c^\varepsilon = c'^\varepsilon \circ f^{\text{op}} \\ \uparrow c' R \xrightarrow{D} f^{\text{op}} R & & \uparrow c' R L \xrightarrow{C} f^{\text{op}} = (c' R L) (_ \circ f^{\text{op}}) \\ :_{c'} R \text{id} & \xrightarrow{(c' R \cdot c') \phi_2} & :_{c'} R \text{id}(c' R \cdot c') \phi_2 = c'^\varepsilon \end{array}$$

上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图其实就是反变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_1 ，见下：

$$\begin{aligned}\phi_1 &: \left(_ L \xrightarrow{C} _ \right) \xrightarrow{(D \times C) \rightarrow \text{Set}} \left(_ \xrightarrow{D} _ R \right) \\ (_ \cdot c) \phi_1 &: \left(_ L \xrightarrow{C} c \right) \xrightarrow{D \rightarrow \text{Set}} \left(_ \xrightarrow{D} c R \right) \\ (d \cdot _) \phi_1 &: \left(d L \xrightarrow{C} _ \right) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} \left(d \xrightarrow{D} _ R \right)\end{aligned}$$

套用协变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{\left((d L \xrightarrow{C} _) \right) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} \left(d \xrightarrow{D} _ R \right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\left(d \xrightarrow{D} d L R \right)}_{\text{一堆元素}}$$

由协变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(d \cdot _) \phi_1$ 右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 $:_d L \text{id}(d \cdot d L) \phi_1 = d^\eta$ 。如此。

- $\eta : :_D \text{Id} \xrightarrow{D \rightarrow D} L \circ R$ 构成自然变换。

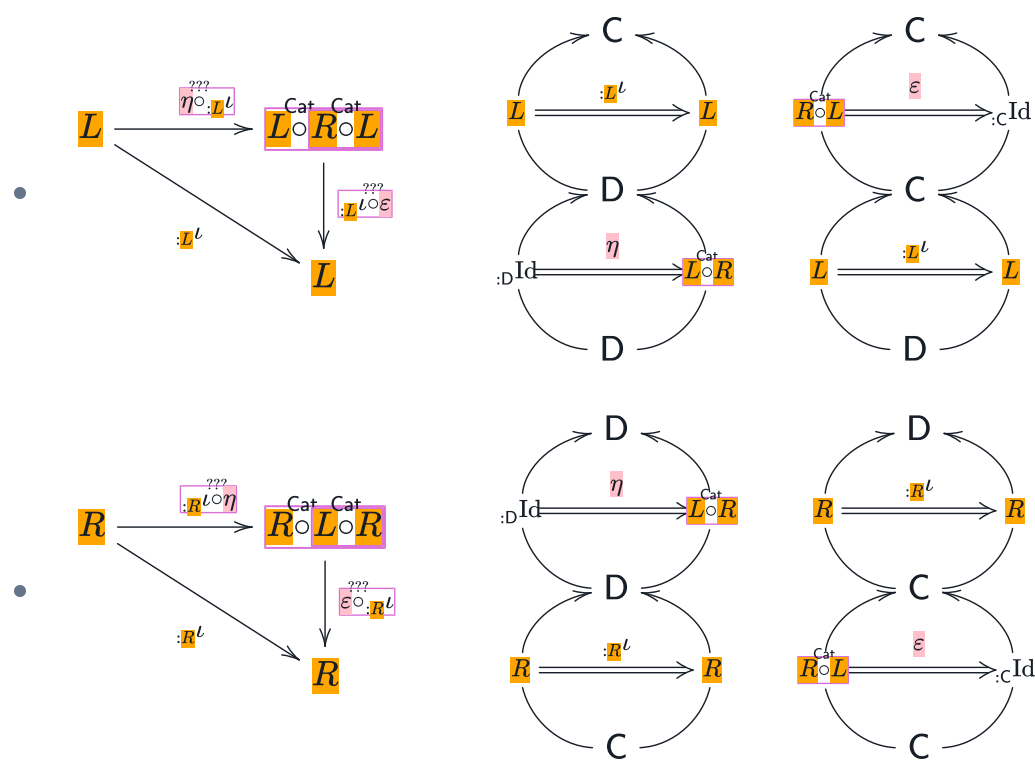
考虑任意 $g : d \xrightarrow{D} d'$ ：

$$\begin{array}{ccc} d L \xrightarrow{C} d L & \xrightarrow{(d \cdot d L) \phi_1} & d \xrightarrow{D} d L R \\ \downarrow d L \xrightarrow{C} g L & & \downarrow d \xrightarrow{D} g L R \\ d L \xrightarrow{C} d' L & \xrightarrow{(d \cdot d' L) \phi_1} & d \xrightarrow{D} d' L R \\ \uparrow g L \xrightarrow{C} d' L & & \uparrow g \xrightarrow{D} d' L R \\ d' L \xrightarrow{C} d' L & \xrightarrow{(d' \cdot d' L) \phi_1} & d' \xrightarrow{D} d' L R \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} :_d L \text{id} & \xrightarrow{(d \cdot d L) \phi_1} & :_d L \text{id}(d \cdot d L) \phi_1 = d^\eta \\ \downarrow d L \xrightarrow{C} g L & & \downarrow d \xrightarrow{D} g L R = d (_ \circ g L R) \\ g L & \xrightarrow{(d \cdot d' L) \phi_1} & d^\eta \circ g L R = g \circ d'^\eta \\ \uparrow g L \xrightarrow{C} d' L & & \uparrow g \xrightarrow{D} d' L R = (d' L R) (g \circ _) \\ :_{d'} L \text{id} & \xrightarrow{(d' \cdot d' L) \phi_1} & :_{d'} L \text{id}(d' \cdot d' L) \phi_1 = d'^\eta \end{array}$$

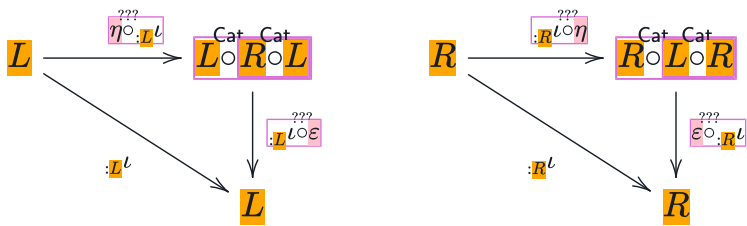
上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图其实就是协变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

对于前面的 ε 和 η 我们有下述交换图成立：



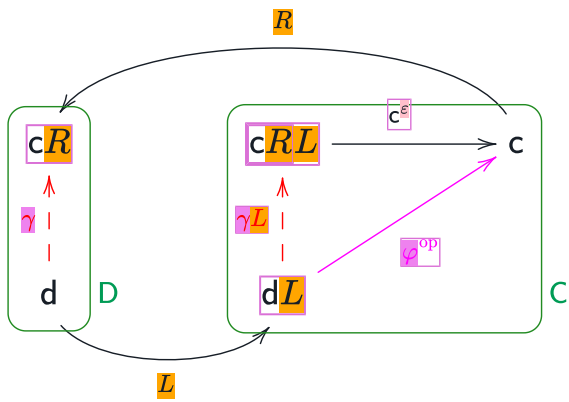
伴随函子的第二种定义

假设我们不知道 L 和 R 构成一对伴随函子并且有自然变换 $\varepsilon : R \circ L \xrightarrow{\text{Cat}} \text{Id}_C$ 和 $\eta : \text{Id}_D \xrightarrow{\text{Cat}} L \circ R$ 能同时满足上页开头的两幅交换图，即

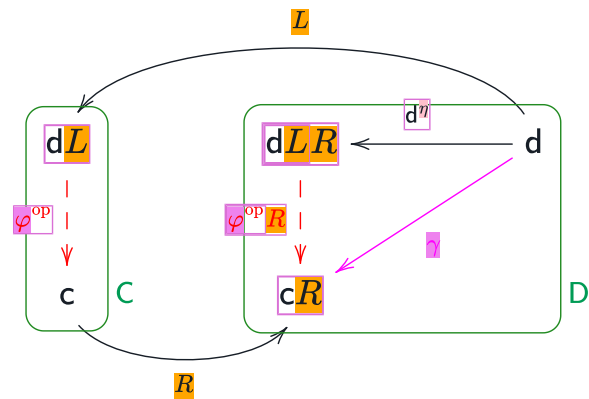


那么

- 对任意 C 中对象 c
及任意 D 中对象 d
及任意 $\varphi^{\text{op}} : dL \xrightarrow{C} c$ 始终存在
唯一的 $\gamma : d \xrightarrow{D} cR$ 使下图交换。
如此有 $((dL \xrightarrow{C} c) \xrightarrow{\text{Set}} (d \xrightarrow{D} cR))$ 。

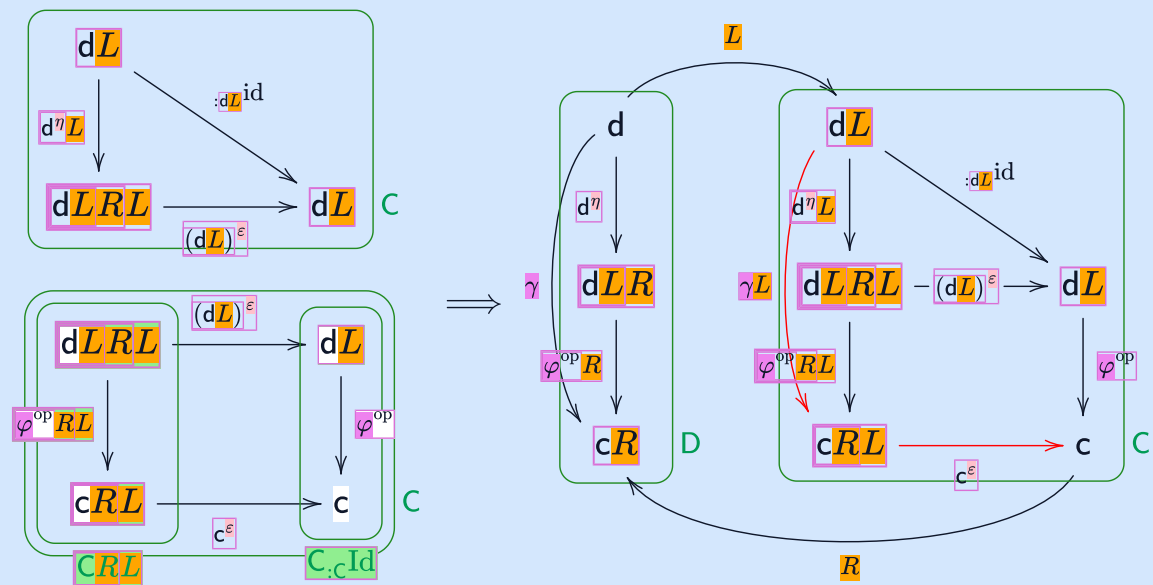


- 对任意 C 中对象 c
及任意 D 中对象 d
及任意 $\gamma : d \xrightarrow{D} cR$ 始终都会存在
唯一的 $\varphi^{\text{op}} : dL \xrightarrow{C} c$ 使下图交换。
如此有 $((dL \xrightarrow{C} c) \xrightarrow{\text{Set}} (d \xrightarrow{D} cR))$ 。

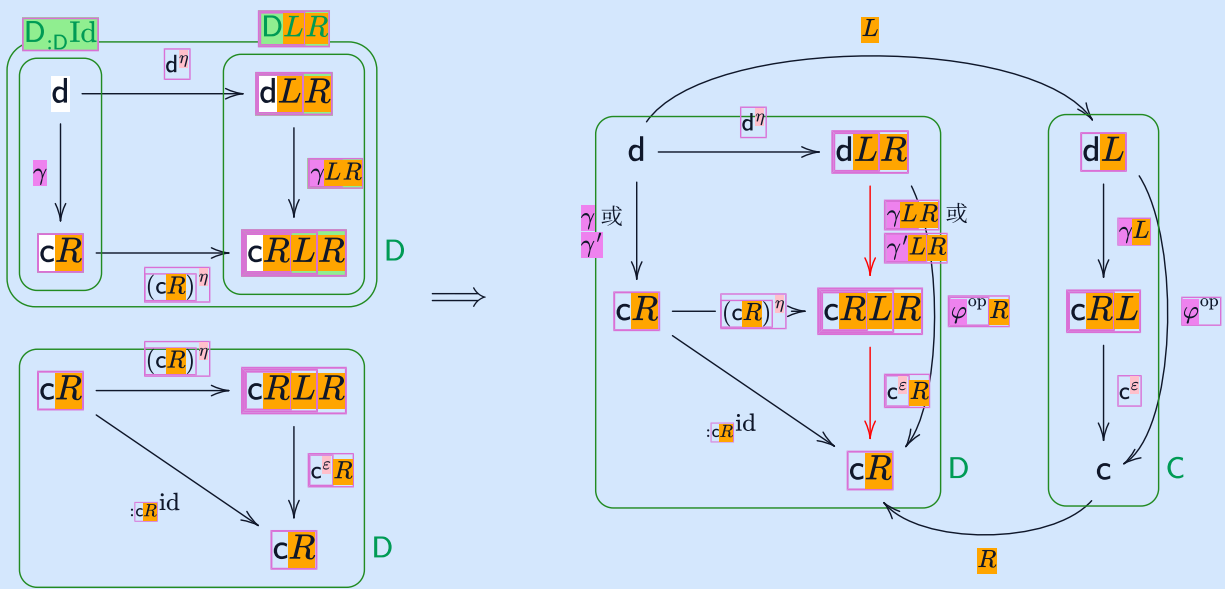


现证明上页的头两条定理。

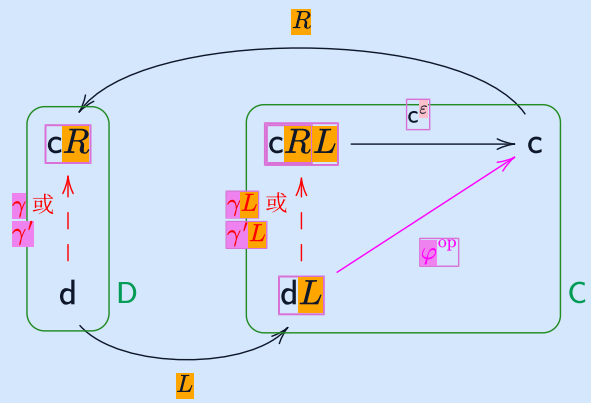
下图左侧中上半部分即为上页第一幅图，而
 下图左侧下半部分可通过 ε 为自然变换得出；
 将两图拼在一起即可获得下图右侧的交换图，
 如此便证明了 γ 的存在性。



下图左侧中上半部分即为上页第二幅图，而
 下图左侧下半部分可通过 η 为自然变换得出；
 将两图拼在一起即可获得下图右侧的交换图，
 此图可用于证 γ 的唯一性。



为何 γ 唯一呢？假如 γ' 亦满足下图，即不论
 γ 还是 γ' 它们与 c^ε 的复合结果始终为 φ^{op} ，
 那么也就意味着上图右侧交换图中红色路径
 的复合结果始终是一致的，如此 $\gamma = \gamma'$ 。



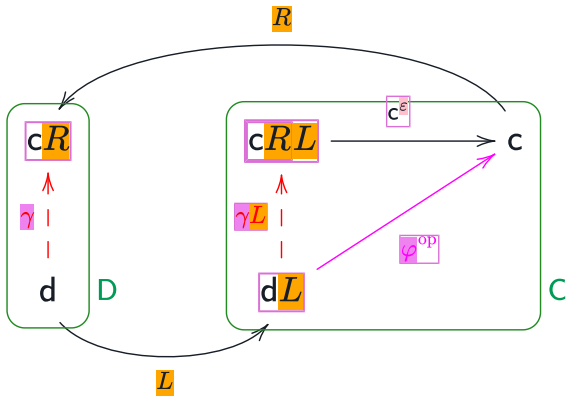
另一侧同理，这里不再赘述。

伴随函子的第三种定义

假设我们不知道 L 和 R 构成一对伴随函子并且有自然变换

$$\varepsilon : R \circ L \xrightarrow{\text{Cat}} \text{Id}_C \text{ 和 } \eta : \text{Id}_D \xrightarrow{\text{Cat}} L \circ R, \text{ 那么我们有}$$

- 若对任意 C 中对象 c
及对任意 D 中对象 d
及对任意 $\varphi^{\text{op}} : dL \xrightarrow{C} c$ 始终都会
有唯一的 $\gamma : d \xrightarrow{D} cR$ 使下图交换，

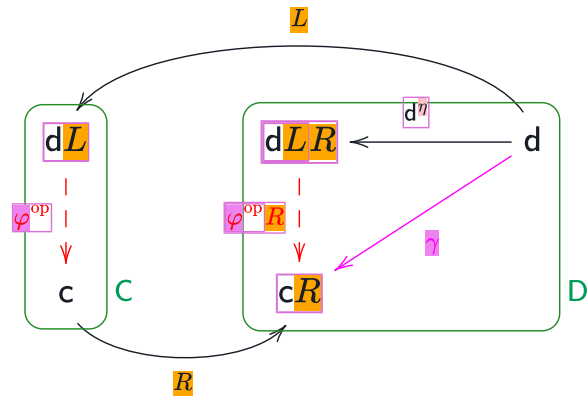


那么

$$\begin{aligned} \phi_2 : (_ \xrightarrow{D} _ R) &\xrightarrow{(D \times C) \xrightarrow{C} \text{Set}} (_ L \xrightarrow{C} _) \\ (_ \cdot c) \phi_2 : (_ \xrightarrow{D} cR) &\xrightarrow{D \xrightarrow{C} \text{Set}} (_ L \xrightarrow{C} c) \\ (d \cdot _) \phi_2 : (d \xrightarrow{D} _ R) &\xrightarrow{C \xrightarrow{C} \text{Set}} (dL \xrightarrow{C} _) \end{aligned}$$

将构成自然同构。

- 若对任意 C 中对象 c
及对任意 D 中对象 d
及对任意 $\gamma : d \xrightarrow{D} cR$ 始终都存在
唯一的 $\varphi^{\text{op}} : dL \xrightarrow{C} c$ 使下图交换，



那么

$$\begin{aligned} \phi_1 : (_ L \xrightarrow{C} _) &\xrightarrow{(D \times C) \xrightarrow{C} \text{Set}} (_ \xrightarrow{D} _ R) \\ (_ \cdot c) \phi_1 : (_ L \xrightarrow{C} c) &\xrightarrow{D \xrightarrow{C} \text{Set}} (_ \xrightarrow{D} cR) \\ (d \cdot _) \phi_1 : (dL \xrightarrow{C} _) &\xrightarrow{C \xrightarrow{C} \text{Set}} (d \xrightarrow{D} _ R) \end{aligned}$$

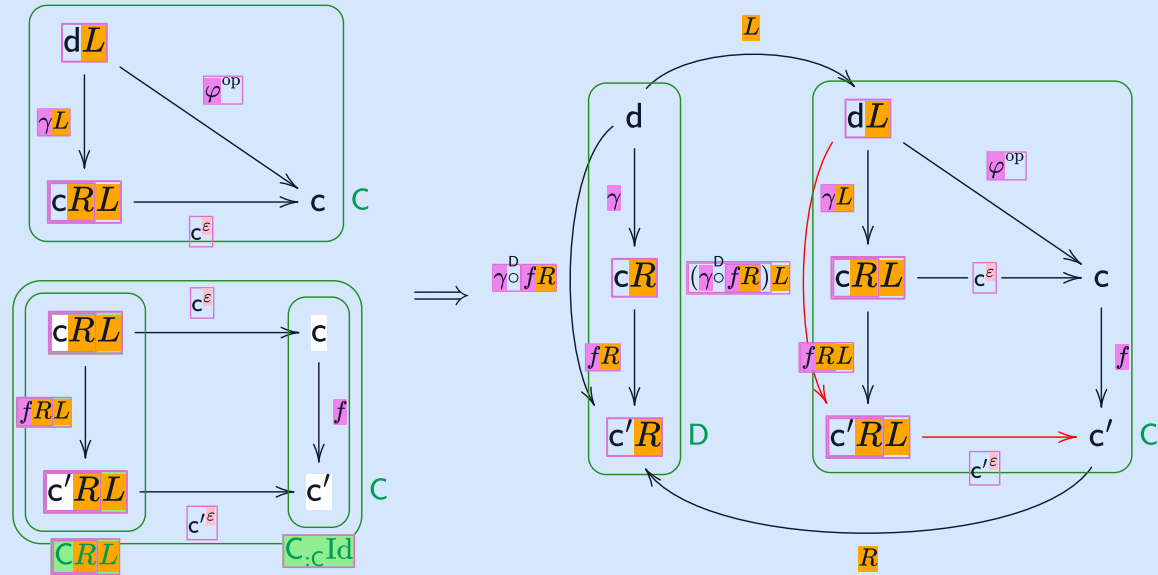
将构成自然同构。

只证上页第一条定理，另一个雷同。

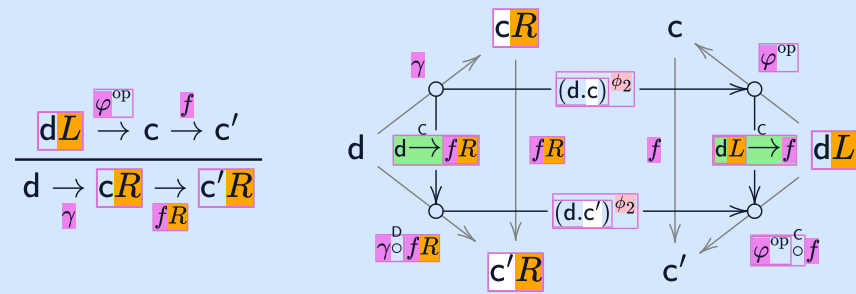
由定理的假设可知 $(dL \xrightarrow{c} c) \cong (d \xrightarrow{D} cR)$ ；因此存在同构

$$\begin{aligned} \phi_2 : (_ \xrightarrow{D} _ R) &\xrightarrow{(_ \times C) \xrightarrow{c} \text{Set}} (_ L \xrightarrow{c} _) \\ (_ \cdot c)^{\phi_2} : (_ \xrightarrow{D} cR) &\xrightarrow{D \rightarrow \text{Set}} (_ L \xrightarrow{c} c) \\ (d \cdot _)^{\phi_2} : (d \xrightarrow{D} _ R) &\xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} (dL \xrightarrow{c} _) \end{aligned}$$

- 先验证 $(_ \cdot c)^{\phi_2}$ 构成自然变换。和上上页一样也是拼图：



如此也就证明了下方左侧的相继式，而这相当于下方右图。



- 再验证 $(d \cdot _)^{\phi_2}$ 构成自然变换。和上上页一样也是拼图：

