10 伴随函子

LaTeX Definitions are here.

若有函子 $L : \mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}$
以及函子 $R : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$, 即

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[loop above, "{}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id}"] \arrow[r, bend right, "R"'] & \mathsf{D} \arrow[loop above, "{}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id}"] \arrow[l, bend right, "L"']
\end{tikzcd}$$

那么规定

伴随函子的第一种定义

- $L \dashv R$ 当且仅当
  对任意 C 中对象 c
  及任意 D 中对象 d
  都有 $(\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c})$ 。

假如确实有 $L \dashv R$, 那么不难得知

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_2，见下：

$$\phi_2 : (\_ \xrightarrow{D} \_R) \xrightarrow{(D\times C)\to Set} (\_L \xrightarrow{C} \_)$$

$$(\_ \,.\, c)^{\phi_2} : (\_ \xrightarrow{D} cR) \xrightarrow{D \to Set} (\_L \xrightarrow{C} c)$$

$$(d \,.\, \_)^{\phi_2} : (d \xrightarrow{D} \_R) \xrightarrow{C \to Set} (dL \xrightarrow{C} \_)$$

套用反变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{\left((\_ \xrightarrow{D} cR) \xrightarrow{D^{op} \xrightarrow{Cat} Set} (\_L \xrightarrow{C} c)\right)}_{\text{一堆自然变换}} \overset{Set}{\cong} \underbrace{(cRL \xrightarrow{C} c)}_{\text{一堆元素}}$$

由反变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(\_ \,.\, c)^{\phi_2}$
右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 ${:_{cR}}\mathrm{id}(cR \,.\, c)^{\phi_2} = c^{\varepsilon}$。如此

- $\varepsilon : R \circ L \xrightarrow{C \xrightarrow{Cat} C} {:_C}\mathrm{Id}$ 构成自然变换。

> 考虑任意 $f^{op} : c' \xrightarrow{C} c$：
>
> $$\begin{tikzcd}
cR \xrightarrow{D} cR \arrow[r, "(cR.c)^{\phi_2}"] \arrow[d, "f^{op}R \xrightarrow{D} cR"'] & cRL \xrightarrow{C} c \arrow[d, "f^{op}RL \xrightarrow{C} c"] \\
c'R \xrightarrow{D} cR \arrow[r, dashed, "(c'R.c)^{\phi_2}"] & c'RL \xrightarrow{C} c \\
c'R \xrightarrow{D} c'R \arrow[r, "(c'R.c')^{\phi_2}"'] \arrow[u, "c'R \xrightarrow{D} f^{op}R"] & c'RL \xrightarrow{C} c' \arrow[u, "c'RL \xrightarrow{C} f^{op}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{:_{cR}}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(cR.c)^{\phi_2}"] \arrow[d, "f^{op}R \xrightarrow{D} cR"'] & {:_{cR}}\mathrm{id}(cR.c)^{\phi_2} = c^{\varepsilon} \arrow[d, "f^{op}RL \xrightarrow{C} c = c^{(f^{op}RL \circ_C _)}"] \\
f^{op}R \arrow[r, mapsto, dashed, "(c'R.c)^{\phi_2}"] & f^{op}RL \circ_C c^{\varepsilon} = c'^{\varepsilon} \circ_C f^{op} \\
{:_{c'R}}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(c'R.c')^{\phi_2}"'] \arrow[u, "c'R \xrightarrow{D} f^{op}R"] & {:_{c'R}}\mathrm{id}(c'R.c')^{\phi_2} = c'^{\varepsilon} \arrow[u, "c'RL \xrightarrow{C} f^{op} = (c'RL)^{(_ \circ_C f^{op})}"']
\end{tikzcd}$$
>
> 上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图
> 其实就是反变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_1，见下：

$$\phi_1 : (\_L \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{(D\times C)\to Set} (\_ \xrightarrow{D} \_R)$$

$$(\_ \,.\, c)^{\phi_1} : (\_L \xrightarrow{C} c) \xrightarrow{D \to Set} (\_ \xrightarrow{D} cR)$$

$$(d \,.\, \_)^{\phi_1} : (dL \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{C \to Set} (d \xrightarrow{D} \_R)$$

套用协变米田引理我们便可获得

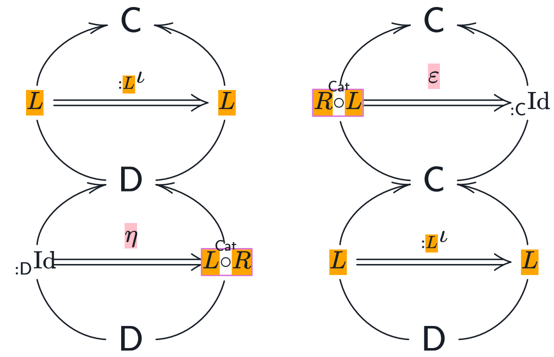
$$\underbrace{\left((dL \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{C \xrightarrow{Cat} Set} (d \xrightarrow{D} \_R)\right)}_{\text{一堆自然变换}} \overset{Set}{\cong} \underbrace{(d \xrightarrow{D} dLR)}_{\text{一堆元素}}$$

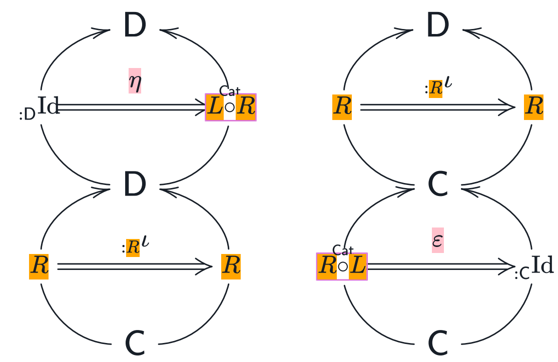
由协变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(d \,.\, \_)^{\phi_1}$
右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 ${:_{dL}}\mathrm{id}(d \,.\, dL)^{\phi_1} = d^{\eta}$。如此。

- $\eta : {:_D}\mathrm{Id} \xrightarrow{D \xrightarrow{Cat} D} L \circ R$ 构成自然变换。

> 考虑任意 $g : d \xrightarrow{D} d'$：
>
> $$\begin{tikzcd}
dL \xrightarrow{C} dL \arrow[r, "(d.dL)^{\phi_1}"] \arrow[d, "dL \xrightarrow{C} gL"'] & d \xrightarrow{D} dLR \arrow[d, "d \xrightarrow{D} gLR"] \\
dL \xrightarrow{C} d'L \arrow[r, dashed, "(d.d'L)^{\phi_1}"] & d \xrightarrow{D} d'LR \\
d'L \xrightarrow{C} d'L \arrow[r, "(d'.d'L)^{\phi_1}"'] \arrow[u, "gL \xrightarrow{C} d'L"] & d' \xrightarrow{D} d'LR \arrow[u, "g \xrightarrow{D} d'LR"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{:_{dL}}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(d.dL)^{\phi_1}"] \arrow[d, "dL \xrightarrow{C} gL"'] & {:_{dL}}\mathrm{id}(d.dL)^{\phi_1} = d^{\eta} \arrow[d, "d \xrightarrow{D} gLR = d^{(_ \circ_D gLR)}"] \\
gL \arrow[r, mapsto, dashed, "(d.d'L)^{\phi_1}"] & d^{\eta} \circ_D gLR = g \circ_D d'^{\eta} \\
{:_{d'L}}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(d'.d'L)^{\phi_1}"'] \arrow[u, "gL \xrightarrow{C} d'L"] & {:_{d'L}}\mathrm{id}(d'.d'L)^{\phi_1} = d'^{\eta} \arrow[u, "g \xrightarrow{D} d'LR = (d'LR)^{(g \circ_D _)}"']
\end{tikzcd}$$
>
> 上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图
> 其实就是协变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

对于前面的 ε 和 η 我们有下述交换图成立：

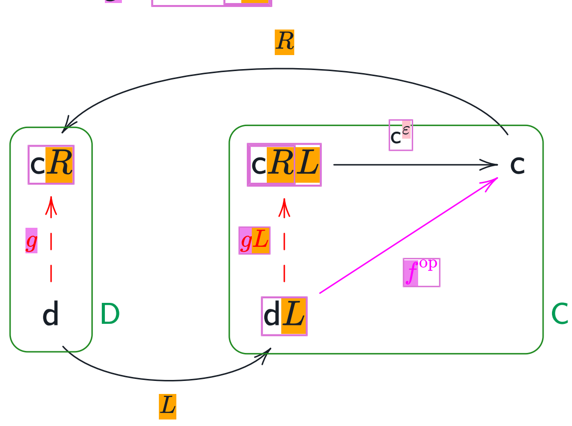
- $$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\overset{???}{\eta\circ{:}L^{\iota}}"] \arrow[dr, "{:}L^{\iota}"'] & L\overset{\text{Cat}}{\circ}R\overset{\text{Cat}}{\circ}L \arrow[d, "\overset{???}{{:}L^{\iota}\circ\varepsilon}"] \\ & L \end{tikzcd}$$
  

- $$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\overset{???}{{:}R^{\iota}\circ\eta}"] \arrow[dr, "{:}R^{\iota}"'] & R\overset{\text{Cat}}{\circ}L\overset{\text{Cat}}{\circ}R \arrow[d, "\overset{???}{\varepsilon\circ{:}R^{\iota}}"] \\ & R \end{tikzcd}$$
  

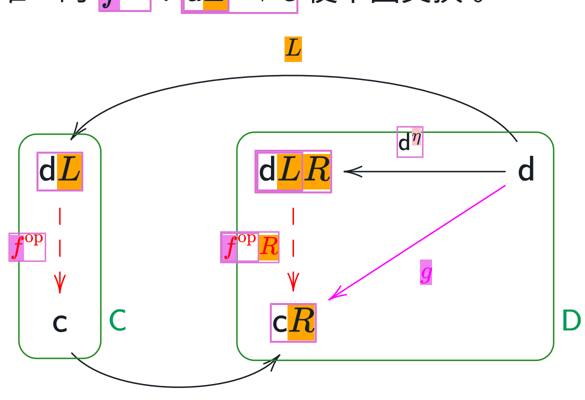
伴随函子的第二种定义

假设我们不知道 L 和 R 构成一对伴随函子并且有自然变换
$\varepsilon : R\overset{\text{Cat}}{\circ}L \xrightarrow{\mathsf{C}\to\mathsf{C}} {:}_{\mathsf{C}}\mathrm{Id}$ 和 $\eta : {:}_{\mathsf{D}}\mathrm{Id} \xrightarrow{\mathsf{D}\to\mathsf{D}} L\overset{\text{Cat}}{\circ}R$ 能同时满足
上页开头的两幅交换图，那么

- 对任意 C 中对象 c
  及任意 D 中对象 d
  及任意 $f^{\mathrm{op}} : \mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$ 始终存在
  唯一的 $g : \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R$ 使下图交换。

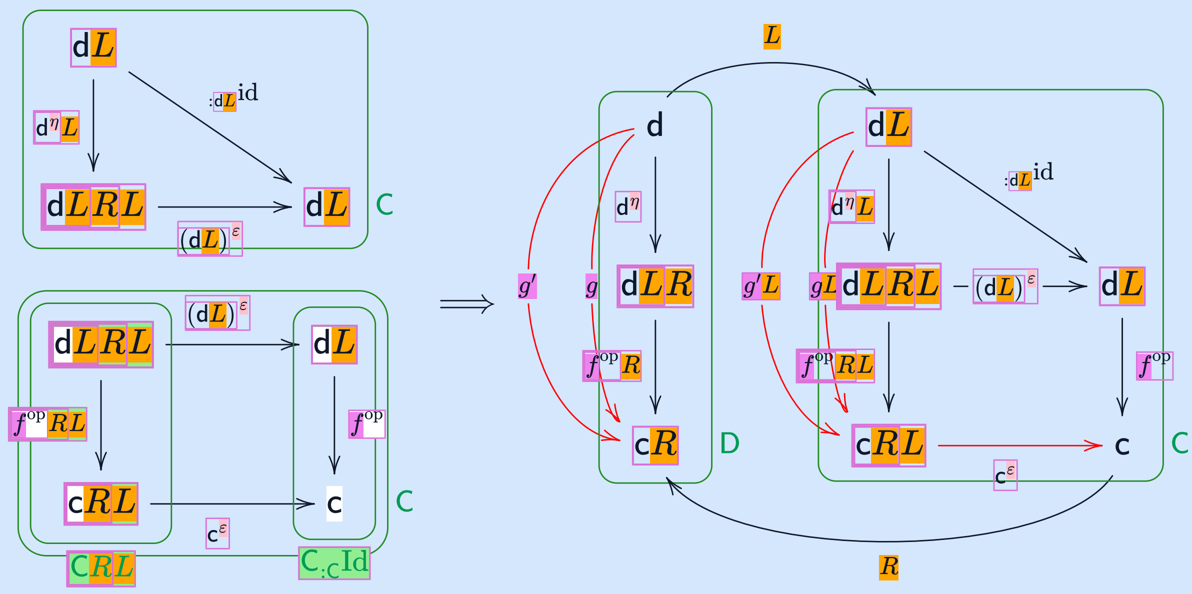
  如此有 $(\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \overset{\text{Set}}{\cong} (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R)$，
  即 $L \dashv R$。
- 对任意 C 中对象 c
  及任意 D 中对象 d
  及任意 $g : \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R$ 始终都会存在
  唯一的 $f^{\mathrm{op}} : \mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$ 使下图交换。

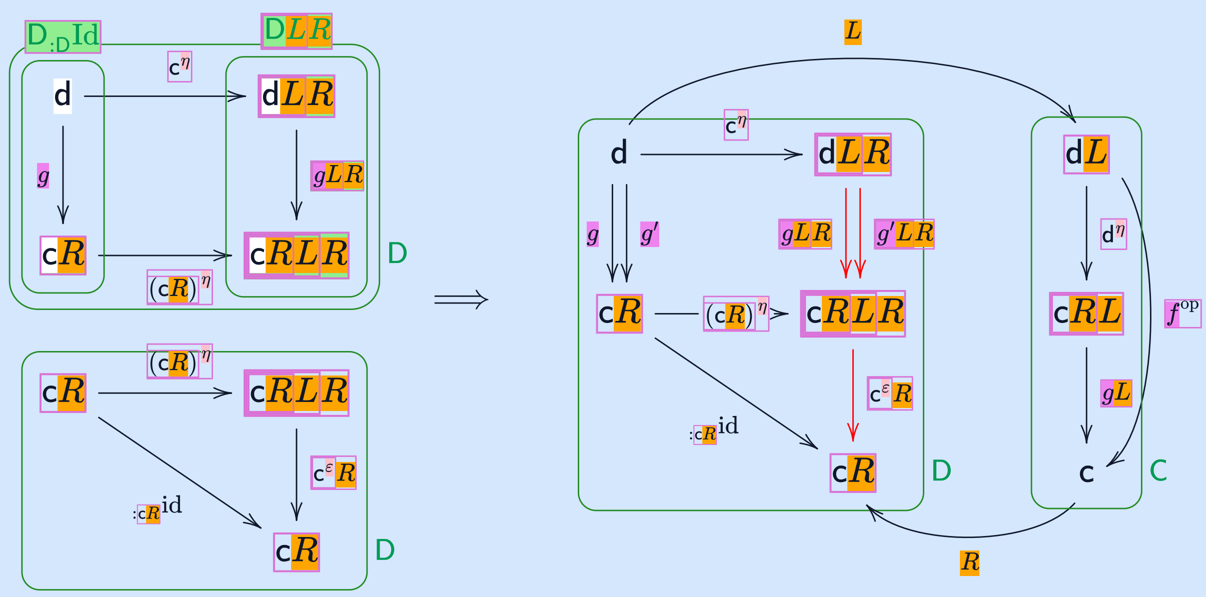
  如此有 $(\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \overset{\text{Set}}{\cong} (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R)$，
  即 $L \dashv R$。

现证明上页的头两条定理。

下方左图上半部分即为上页第一幅图，而
下方左图下半部分可由 ε 为自然变换得出；
将两个图拼在一起即可获得下方右图：



为何 g 唯一呢？若 g' 亦满足上图 —— 即上方右图中
右侧的两条 L 形走向的红色路径的复合结果是一致的，
则下方右图中的两条红色路径的复合结果也是一致的；
如此根据下方右图即可得知 $g = g'$。



另一侧同理，这里不再赘述。