

# 章节 01 - 03 基本概念

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Definitions are here.

## 始对象与终对象

范畴由对象及其间箭头构成。本文重点分析**余积闭范畴**  $\mathcal{C}$ 。首先给出如下定义：

- $0$  为**始对象**当且仅当对任意  $\mathcal{C}$  中对象  $c$  都有且仅有唯一的箭头  $!_c: 0 \xrightarrow{\mathcal{C}} c$ ;
- $1$  为**终对象**当且仅当对任意  $\mathcal{C}$  中对象  $c$  都有且仅有唯一的箭头  $!_c: c \xrightarrow{\mathcal{C}} 1$ ;

### Note

其他范畴中始终对象不一定存在。

范畴  $\mathcal{C}$  中我们假设其含  $0$  和  $1$  分别作为始对象和终对象，那么由上述信息可知

- 形如  $0 \xrightarrow{\mathcal{C}} 0$  的箭头只有一个，即  $!_0 \text{id}$ ;
- 形如  $1 \xrightarrow{\mathcal{C}} 1$  的箭头只有一个，即  $!_1 \text{id}$ ;

## 元素与全局元素

对任意对象  $a, a_1, a_2, \text{etc}$ ,  $b, b_1, b_2, \text{etc}$  以及任意映射  $\phi$ ，我们进行如下的规定：

- $\phi$  为  $b$  的**元素**当且仅当  $\phi: a \xrightarrow{\mathcal{C}} b$ ;
- $\phi$  为  $a$  的**全局元素**当且仅当  $\phi: 1 \xrightarrow{\mathcal{C}} a$ ;
- $\phi$  不存在可通过  $\phi: b \xrightarrow{\mathcal{C}} 0$  得出。

### Note

其他范畴中刚才的断言未必成立。

## 箭头构成的集合

这里再给一个定义：

- $\mathbf{a} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b} =$   
所有从  $\mathbf{a}$  射向  $\mathbf{b}$  的箭头构成的集。

*i* **Note**

上述断言仅对于**局部小范畴**成立，  
在其他范畴里  $\mathbf{a} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}$  未必构成集。

## 箭头的复合运算

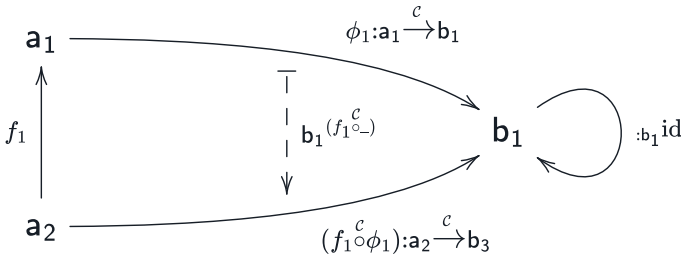
范畴  $\mathcal{C}$  中特定的箭头可以进行复合运算：  
 $\overset{\mathcal{C}}{\circ} : (\mathbf{a}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{a}_1) \times (\mathbf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1) \xrightarrow{Set} (\mathbf{a}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1)$   
 $\overset{\mathcal{C}}{\circ} : ( \quad f_1 \quad \cdot \quad \phi_1 \quad ) \longmapsto f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1$

若我们还知道箭头  $f_1, \phi_1, g_1$  分别属于  
 $\mathbf{a}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_2$  那么便有

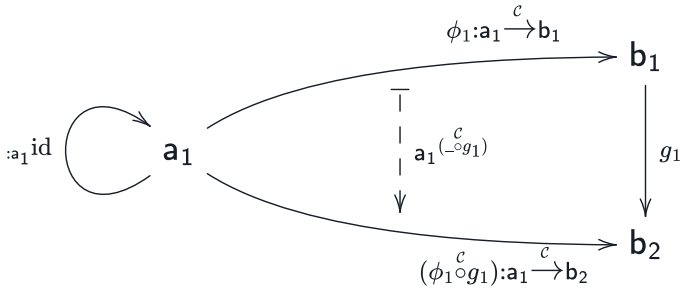
- $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1) \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1 = f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1)$   
说明箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便获可得新的函数：

- $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_ ) : (\mathbf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_ ) \xrightarrow{\mathcal{C} \rightarrow Set} (\mathbf{a}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_ )$   
 $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_ ) : \quad \phi_1 \quad \longmapsto \quad f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1$   
称作**前复合**。下图有助于形象理解：



- $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) : (\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1) \xrightarrow{\mathcal{C} \rightarrow Set} (\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_2)$   
 $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) : \quad \phi_1 \quad \longmapsto \quad \phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1$   
称作**后复合**；下图有助于形象理解：



根据上面的定义便不难得出下述结论

- $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_ ) \overset{\mathcal{C} \rightarrow Set}{\circ} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) = (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) \overset{\mathcal{C} \rightarrow Set}{\circ} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_ )$   
复合运算具有**结合律**，即后面会提到的**自然性**；
- $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1) \overset{\mathcal{C} \rightarrow Set}{\circ} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) = (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1))$   
前复合与复合运算的关系
- $(\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_ ) \overset{\mathcal{C} \rightarrow Set}{\circ} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_ ) = ((f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1) \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_ )$   
后复合与复合运算的关系

## 箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。

假如  $a_1$  为  $\mathbf{a}_1$  的全局元素则可规定

- $a_1 \phi_1 = a_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1$

## 恒等箭头

范畴  $\mathcal{C}$  内的每个对象都有恒等映射：

- $\text{a}_1 \text{ id} : \text{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \text{a}_1$   
 $\text{a}_1 \text{ id} : a_1 \mapsto a_1$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- $\text{a}_1 \text{ id} \circ \phi_1 = \phi_1$   
 $= \phi_1 \circ \text{b}_1 \text{ id}$

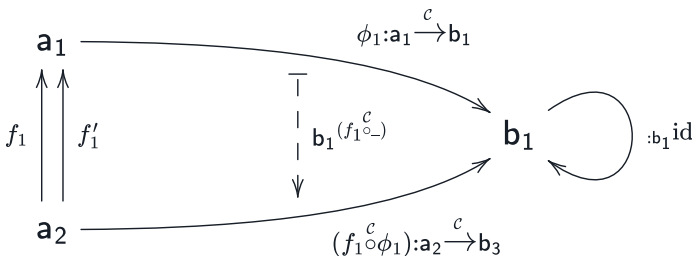
此外还可以得知

- $(\text{a}_1 \text{ id} \circ \_) : (\text{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) \xrightarrow{\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}} (\text{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_)$   
为恒等自然变换，可以记作是  $\text{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_ \text{ id}$ ；
- $(\_ \circ \text{b}_1 \text{ id}) : (\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} \text{b}_1) \xrightarrow{\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}} (\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} \text{b}_1)$   
为恒等自然变换，可以记作是  $(\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} \text{b}_1) \text{ id}$ ；

## 单态

在范畴论里我们也可以定义单态：

- $\phi_1$  为**单态**当且仅当对任意  $\text{a}_2$  若有  $f_1, f'_1 : \text{a}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \text{a}_1$   
满足  $f_1 \circ \phi_1 = f'_1 \circ \phi_1$  则有  $f_1 = f'_1$ 。详情见下图：



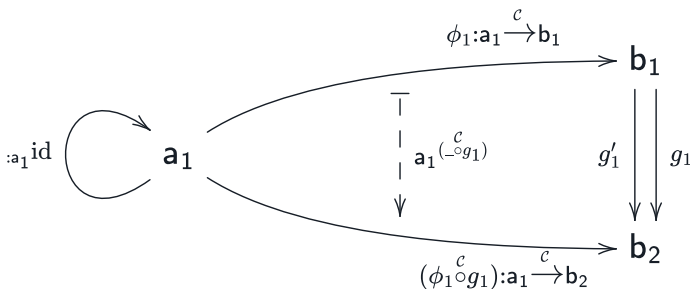
结合终对象的性质我们不难得知

- $a_1$  为单态 —— 由  $\text{a}_1 \text{ id}$  的唯一性可得知。

## 满态

在范畴论里我们也可以定义满态：

- $\phi_1$  为**满态**当且仅当对任意  $\text{b}_2$  若有  $g_1, g'_1 : \text{b}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \text{b}_2$   
满足  $\phi_1 \circ g_1 = \phi_1 \circ g'_1$  则有  $g_1 = g'_1$ 。详情见下图：



## 同构

在范畴论里我们也可以定义同构：

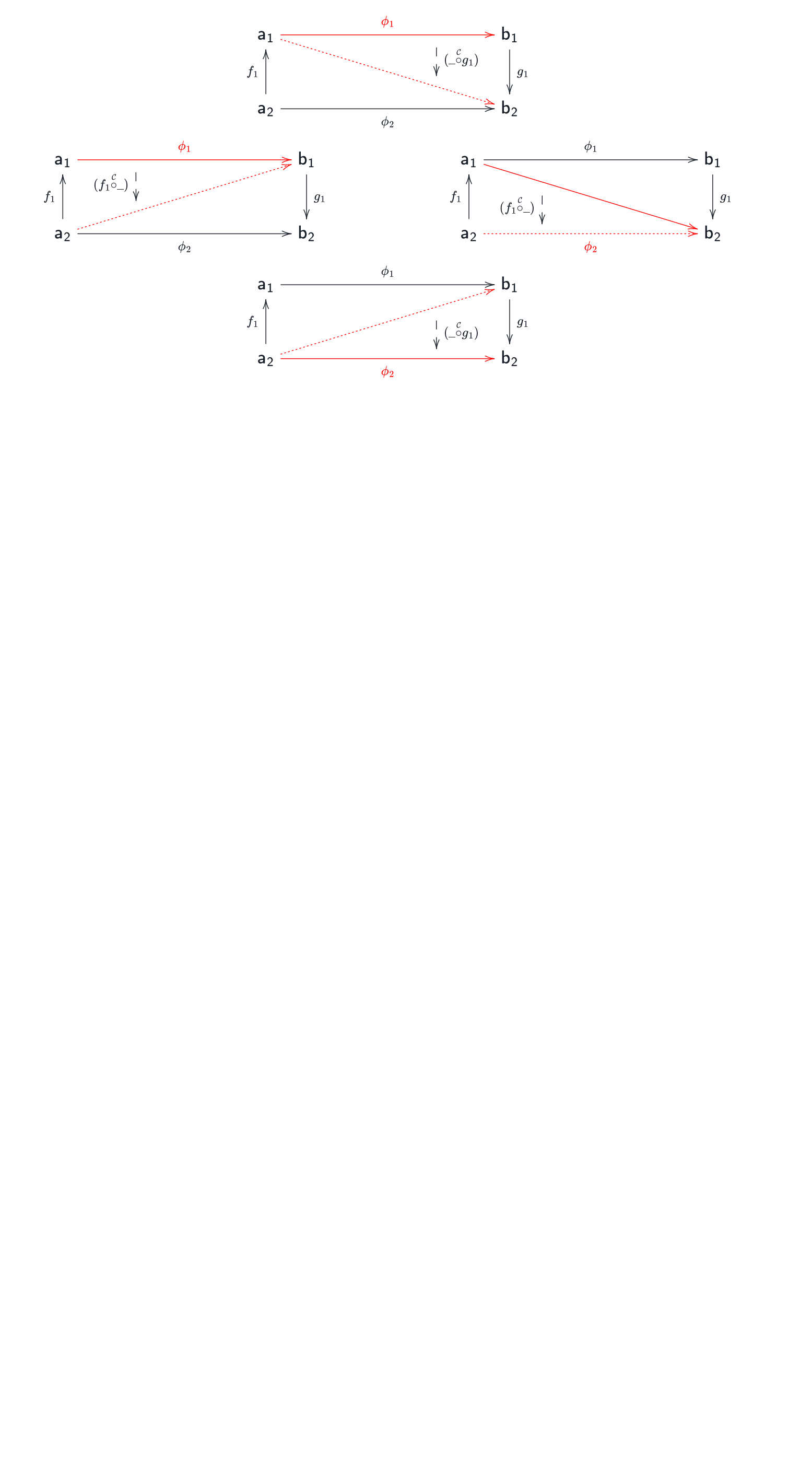
- $\phi_1$  为**同构**当且仅当存在  $\psi_1 : \text{b}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \text{a}_1$   
使  $\phi_1 \circ \psi_1 = \text{a}_1 \text{ id}$  且  $\psi_1 \circ \phi_1 = \text{b}_1 \text{ id}$ 。

结合始终对象的性质便不难得知

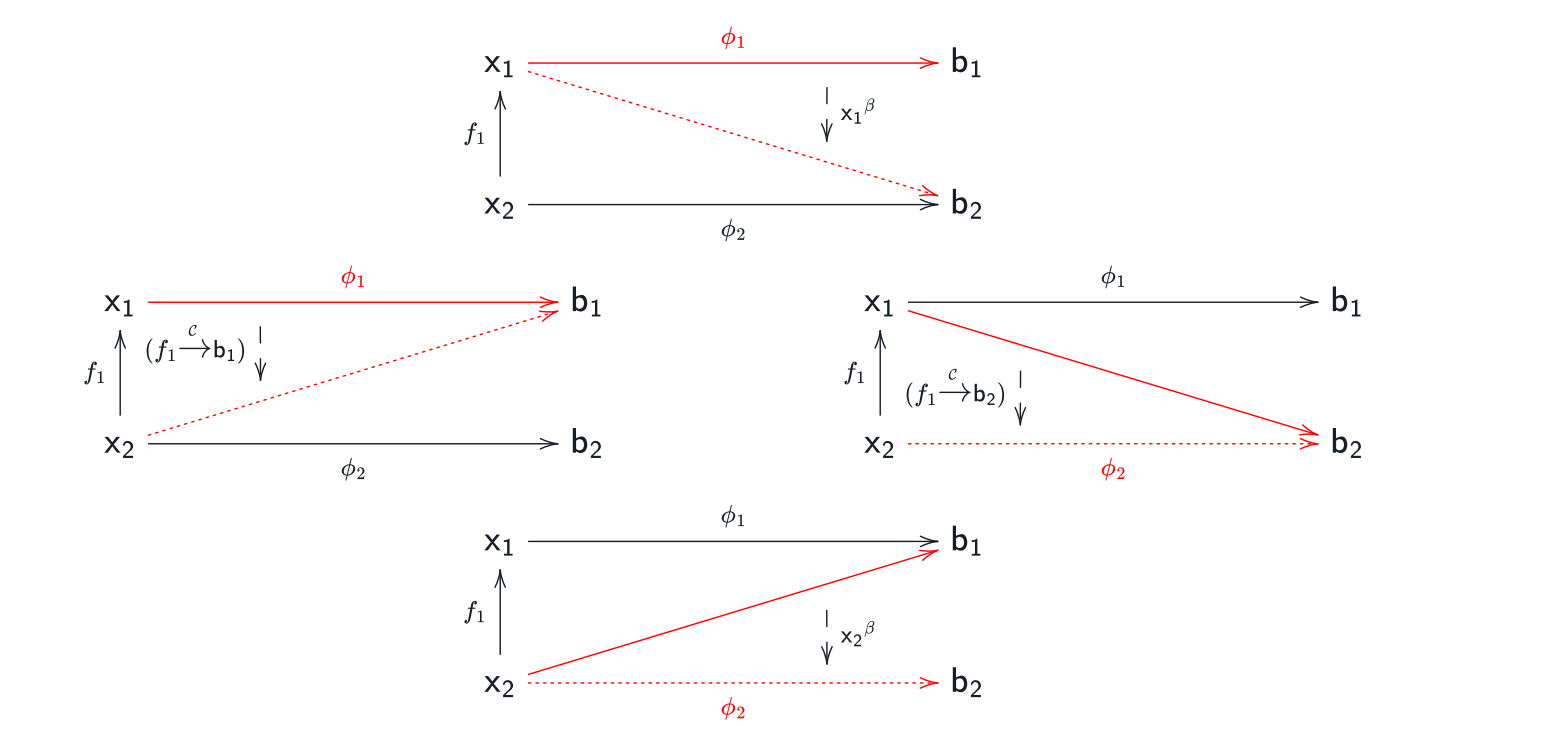
- $0! = 0$  为同构 —— 这是因为  $0 \xrightarrow{\mathcal{C}} 0 = \{0 \text{ id}\}, 1 \xrightarrow{\mathcal{C}} 1 = \{1 \text{ id}\}$

## 同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释。  
后面会将自然性进行进一步推广。



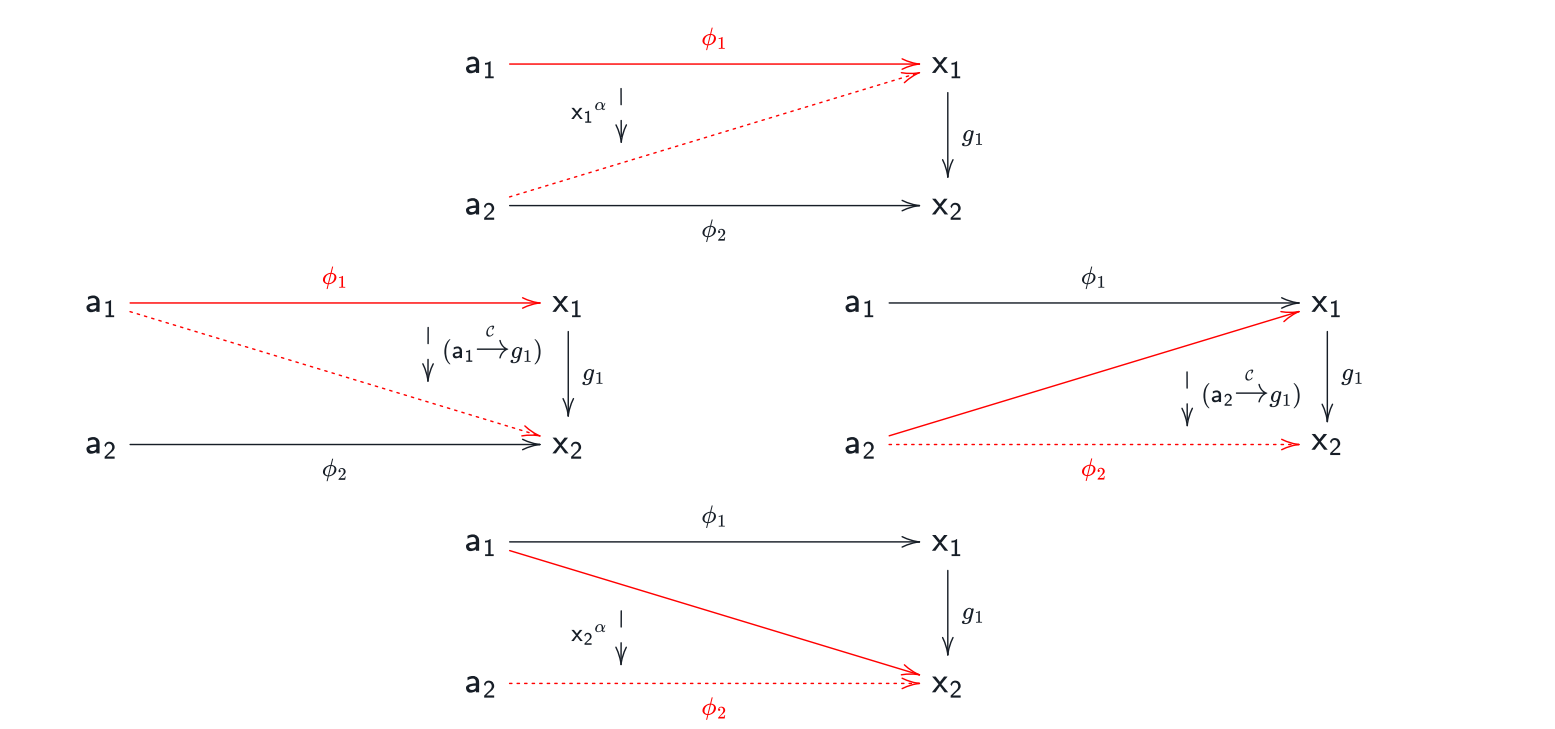
若提供自然变换  $\beta$  满足自然性 —— 即对任意  $\mathcal{C}$  中对象  $x_1, x_2$  及任意  $\mathcal{C}$  中映射  $f_1 : x_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} x_1$  都会有  $(f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1) \circ^{Set} x_2^\beta = x_1^\beta \circ^{Set} (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2)$  (即下图自西向南走向操作结果同自北向东):



那么我们便会有下述结论：

- $b_1 \cong b_2$  当且仅当对任意  $\mathcal{C}$  中对象  $x$   $x^\beta$  都是同构。此时称  $\beta$  为**自然同构**。

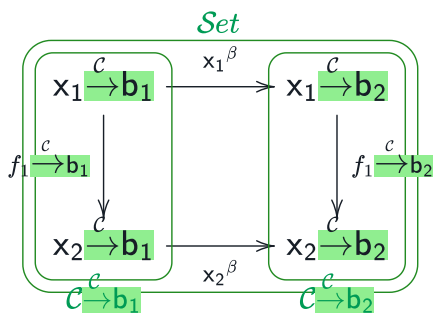
若提供自然变换  $\alpha$  满足自然性 —— 即对任意  $\mathcal{C}$  中对象  $x_1, x_2$  及任意  $\mathcal{C}$  中映射  $g_1 : x_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} x_2$  都会有  $(a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) \circ^{Set} x_2^\alpha = x_1^\alpha \circ^{Set} (a_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1)$  (即下图自西向南走向操作结果同自北向东):



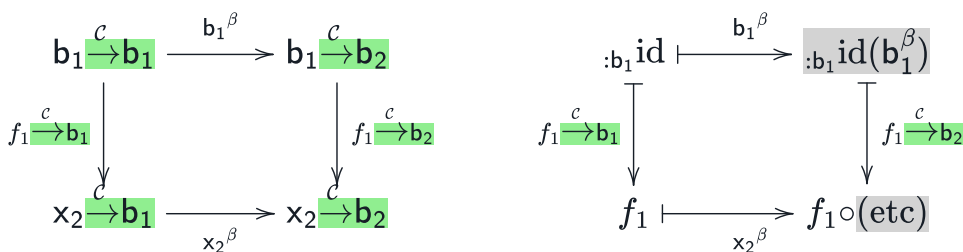
那么我们便会有下述结论：

- $a_1 \cong a_2$  当且仅当对任意  $\mathcal{C}$  中对象  $x$   $x^\alpha$  都是同构。此时称  $\alpha$  为**自然同构**。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为



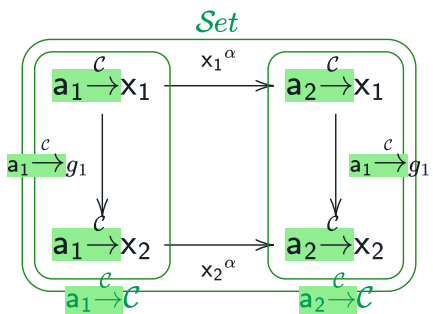
⇒ 易证，⇐ 用到了米田技巧 ( 考虑特殊情况 )



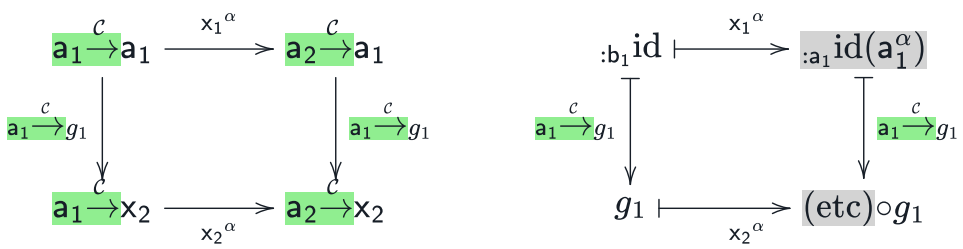
为了方便就用 (etc) 表示  $:_{b_1} \text{id}(b_1^\beta)$ 。由上图可知  $f_1(x_2^\beta) = f_1 \circ (etc)$ ，故  $x_2^\beta = x_2 \xrightarrow{c} (etc)$ ；而  $x_2^\beta = x_2 \xrightarrow{c} (etc) = x_2^{(- \circ (etc))}$  是同构，从而知  $((etc) \circ \_)$  是同构， $(etc) : b_1 \xrightarrow{c} b_2$  也是。

高亮部分省去了部分推理过程，  
具体在米田嵌入处会详细介绍。

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为



⇒ 易证，⇐ 用到了米田技巧 ( 考虑特殊情况 )



为了方便就用 (etc) 表示  $:_{a_1} \text{id}(a_1^\alpha)$ 。由上图可知  $g_1(x_2^\alpha) = (etc) \circ g_1$ ，故  $x_2^\alpha = (etc) \xrightarrow{c} x_2$ ；而  $x_2^\alpha = (etc) \xrightarrow{c} x_2 = x_2^{((etc) \circ \_)}$  是同构，从而知  $(\_ \circ (etc))$  是同构， $(etc) : a_1 \xrightarrow{c} a_2$  也是。

高亮部分省去了部分推理过程，  
具体在米田嵌入处会详细介绍。

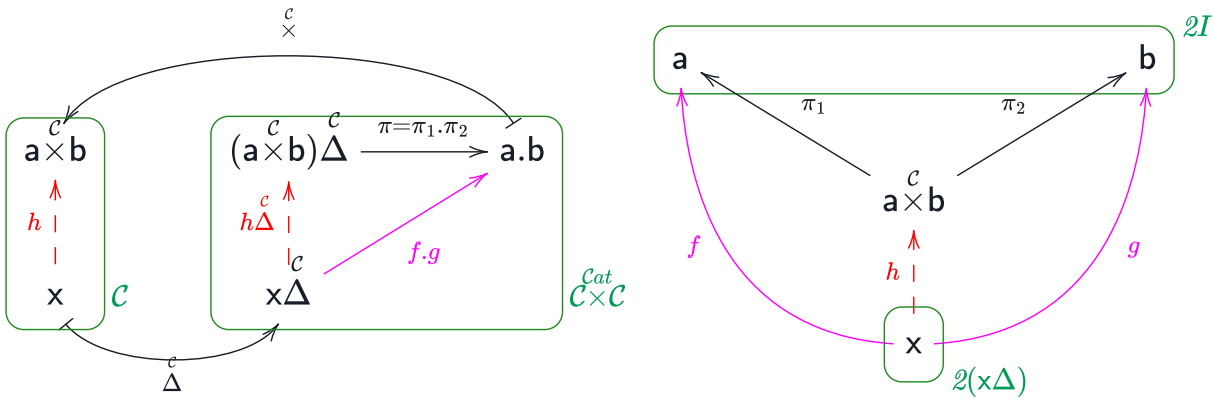
# 章节 04 - 05 类型的积与和

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Definitions are here.

## 泛性质

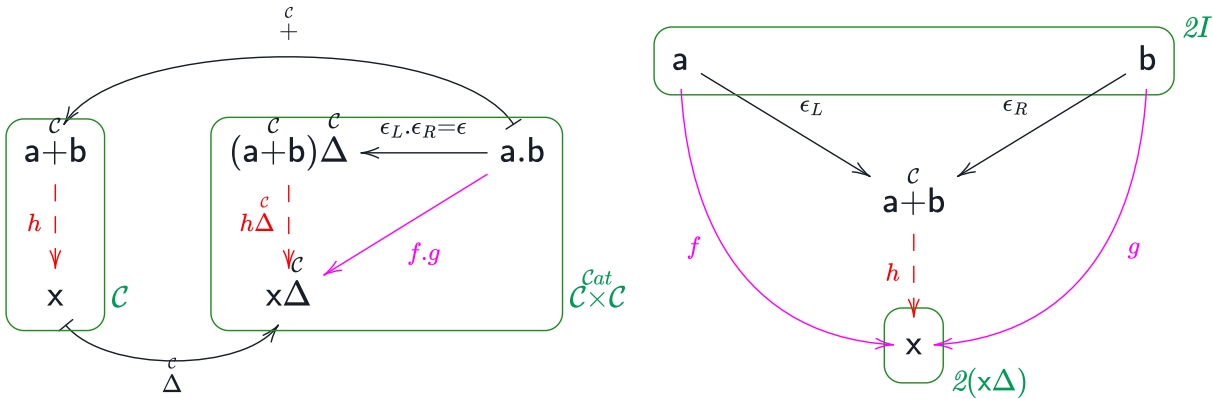
默认函子  $\overset{\mathcal{C}}{\times} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \overset{Cat}{\longrightarrow} \mathcal{C}$  在范畴  $\mathcal{C}$  中有下述性质：

- $(x \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} a) \overset{Set}{\times} (x \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} b) \cong (x \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} (a \overset{\mathcal{C}}{\times} b))$  ,  $x$  为任意  $\mathcal{C}$  中对象。  
—— **泛性质** , 指数对乘法的分配律 。 下图便于形象理解：



默认函子  $\overset{\mathcal{C}}{+} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \overset{Cat}{\longrightarrow} \mathcal{C}$  在范畴  $\mathcal{C}$  中有下述性质：

- $(a \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} x) \overset{Set}{\times} (b \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} x) \cong ((a \overset{\mathcal{C}}{+} b) \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} x)$  ,  $x$  为任意  $\mathcal{C}$  中对象。  
—— **泛性质** , 指数对加法的分配律 。 下图便于形象理解：



### Note

在上面的插图中：

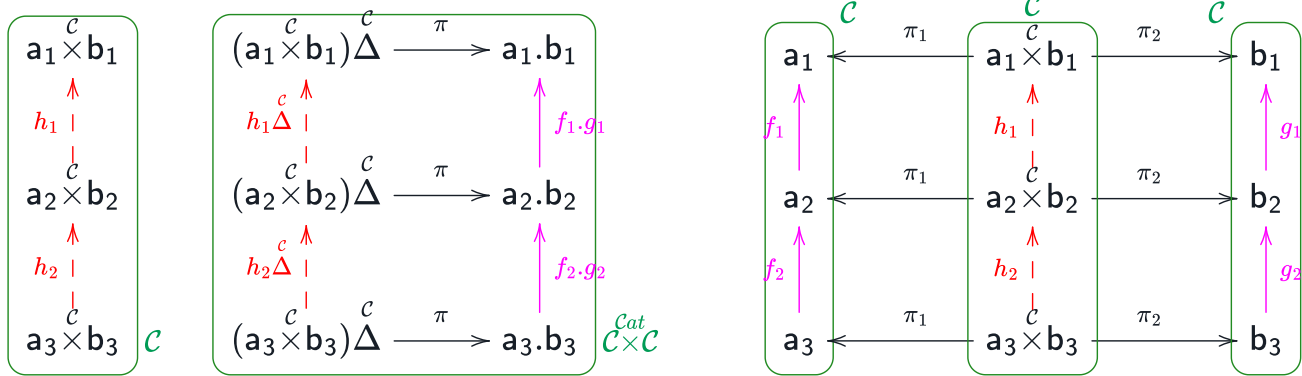
- $\overset{\mathcal{C}}{\Delta} : \mathcal{C} \overset{Cat}{\longrightarrow} \mathcal{C} \times \mathcal{C}$  为对角函子 , 满足  $\Delta : c \longmapsto c . c$
- $I : \mathcal{2} \overset{Cat}{\longrightarrow} \mathcal{C}$  为函子 , 满足  $I : 1 \longmapsto a$   $2 \longmapsto b$   $\mathcal{2}$  为只有两个对象的范畴 ,  $1$  和  $2$  分别为其中的对象 。 这里  $\mathcal{2}$  充当一个指标范畴 。

# 函子性

如何证明  $\overset{\mathcal{C}}{\times}$  构成函子呢？请看

- $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (:_{a_2}\text{id} \cdot :_{b_2}\text{id}) \longmapsto :_{a_2 \times b_2}\text{id}$   
—— 即函子  $\times$  **保持恒等箭头**；
- $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (f_2 \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_1 \cdot g_2 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) \mapsto h_2 \overset{\mathcal{C}}{\circ} h_1$   
—— 即函子  $\times$  **保持箭头复合运算**。

下图有助于形象理解证明的过程：



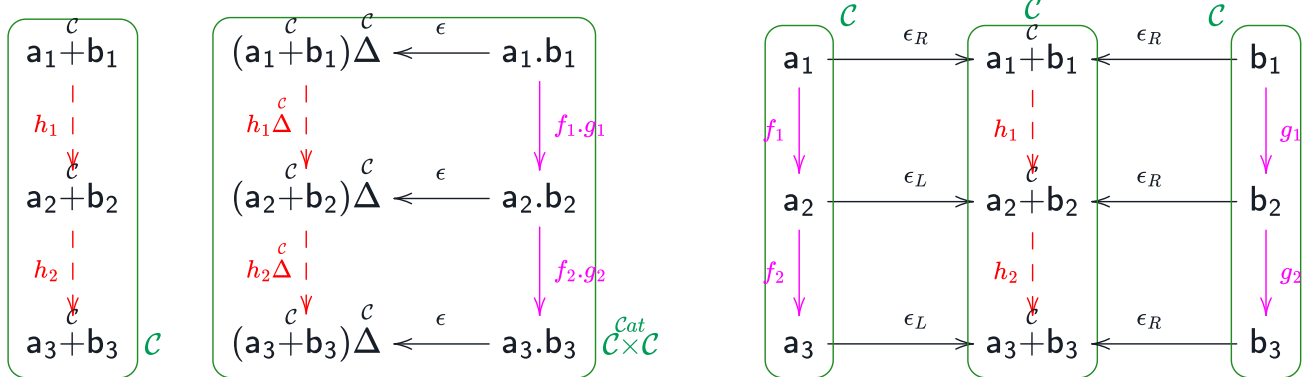
另外规定  $\overset{\mathcal{C}}{\times}$  在实参分别为箭头和对象时的输出：

- $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (f_1 \cdot b_1) \longmapsto f_1 \overset{\mathcal{C}}{\times} :_{b_1}\text{id}$   
 $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (a_1 \cdot g_1) \longmapsto :_{a_1}\text{id} \times g_1$

如何证明  $\overset{\mathcal{C}}{+}$  构成函子呢？请看

- $\overset{\mathcal{C}}{+} : (:_{a_1}\text{id} \cdot :_{b_1}\text{id}) \longmapsto :_{a_1 + b_1}\text{id}$   
—— 即函子  $+$  **保持恒等箭头**；
- $\overset{\mathcal{C}}{+} : (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2 \cdot g_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_2) \mapsto h_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} h_2$   
—— 即函子  $+$  **保持箭头复合运算**。

下图有助于形象理解证明的过程：



同理规定  $\overset{\mathcal{C}}{+}$  在实参分别为箭头和对象时的输出：

- $\overset{\mathcal{C}}{+} : (f_1 \cdot b_1) \longmapsto f_1 \overset{\mathcal{C}}{+} :_{b_1}\text{id}$   
 $\overset{\mathcal{C}}{+} : (a_1 \cdot g_1) \longmapsto :_{a_1}\text{id} + g_1$

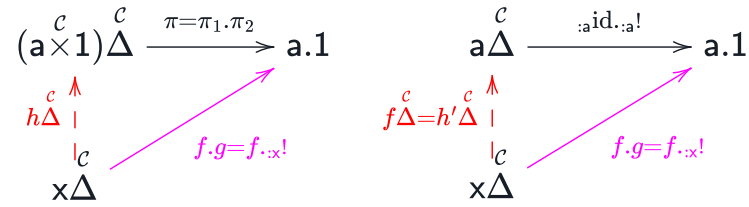


# 运算性质

对于函子  $\times^{\mathcal{C}}$  我们不难得知

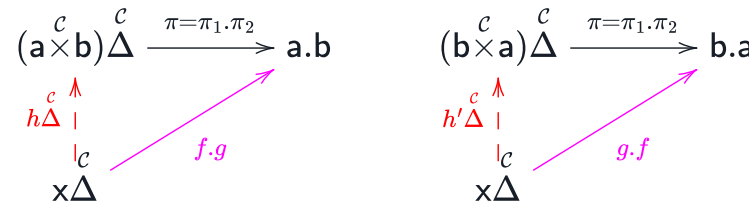
- $\mathbf{a} \times^{\mathcal{C}} \mathbf{1} \cong \mathbf{1} \times^{\mathcal{C}} \mathbf{a} \cong \mathbf{a}$  —— 乘法有**么元 1**。

下图便于理解证明： $(f, g)$  决定  $h, h'$ 。



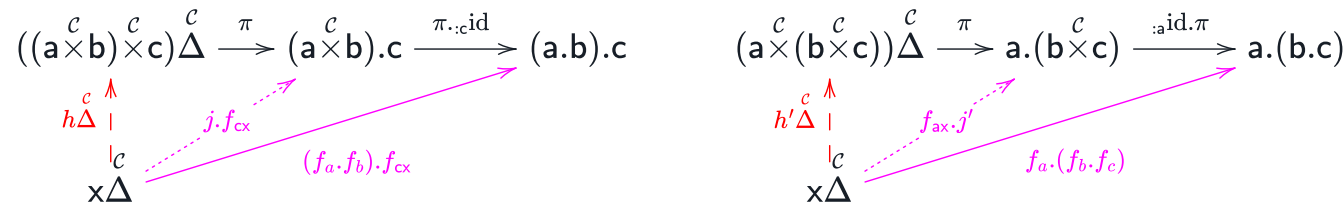
- $\mathbf{a} \times^{\mathcal{C}} \mathbf{b} \cong \mathbf{b} \times^{\mathcal{C}} \mathbf{a}$  —— 乘法运算有**交换律**。

下图便于理解证明： $(f, g)$  决定  $h, h'$ 。



- $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \cong \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  —— 乘法运算具有**结合律**。

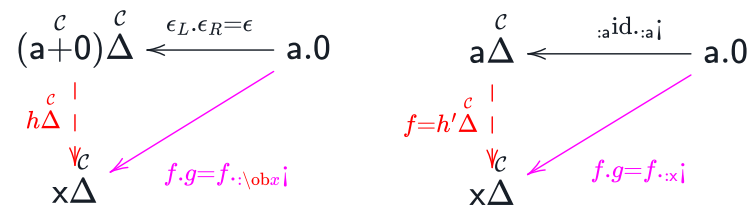
下图有助于形象理解证明： $(f_{ax}, f_{bx}, f_{cx})$  决定  $h, h'$ 。



对于函子  $+\mathcal{C}$  我们不难得知

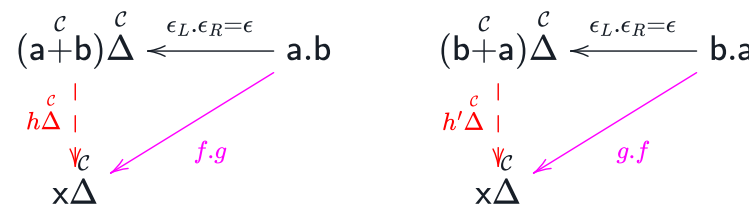
- $\mathbf{a} + \mathbf{0} \cong \mathbf{0} + \mathbf{a} \cong \mathbf{a}$  —— 加法有**么元 0**。

下图有助于理解： $(f, g)$  决定  $h, h'$ 。



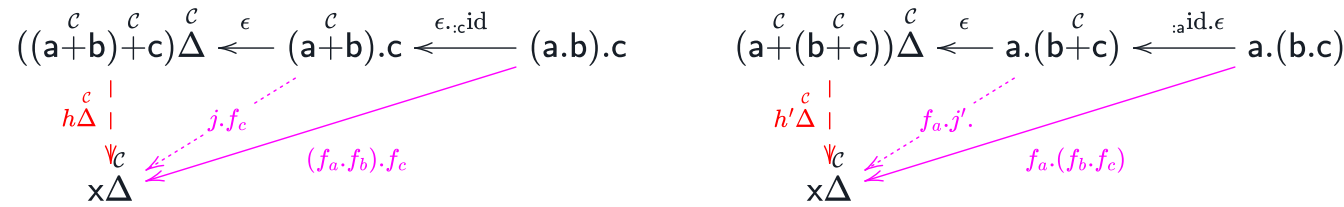
- $\mathbf{a} + \mathbf{b} \cong \mathbf{b} + \mathbf{a}$  —— 加法运算有**交换律**。

下图有助于理解： $(f, g)$  决定  $h, h'$ 。



- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} \cong \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$  —— 加法运算具有**结合律**。

下图有助于形象理解证明： $(f_{ax}, f_{bx}, f_{cx})$  决定  $h, h'$ 。



## 么半范畴

像刚才这样对象运算具有**单位元**以及**结合律**的范畴称作**么半范畴**；

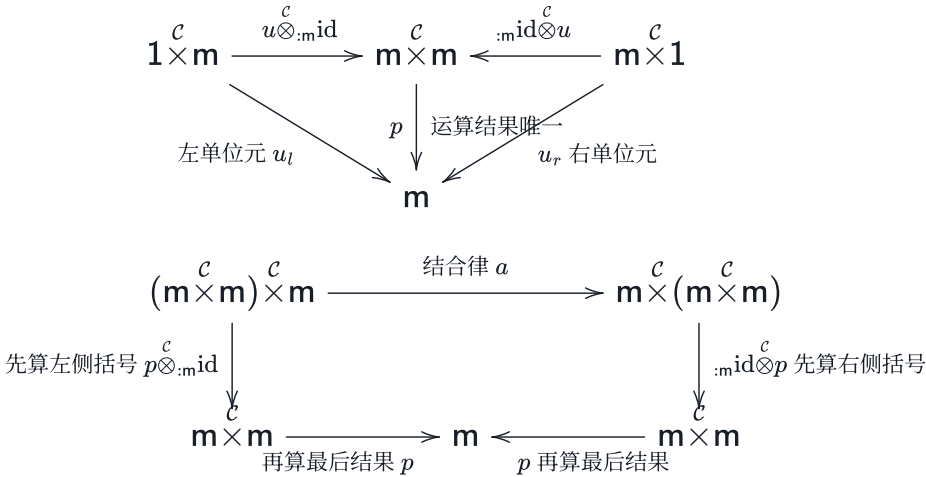
若上述范畴还具有**交换律**则称作**对称么半范畴**；

很明显我们的范畴  $\mathcal{C}$  是典型的**对称么半范畴**。

## 么半群

什么是么半群呢？有两种定义方式：

- **么半群**  $\mathcal{M}$  是个范畴，其只含一个对象  $m$ ；其中的复合运算正好有单位元以及结合律。
- 对象  $m$  属于么半范畴  $\mathcal{C}$ ，满足下述交换图：



其中

- $u : 1 \xrightarrow{\quad} m$  其实就是  $m$  里面的么元
- $u_l : 1 \times m \xrightarrow{\quad} m$  表示  $u$  构成左么元
- $u_r : m \times 1 \xrightarrow{\quad} m$  表示  $u$  构成右么元
- $p : m \times m \xrightarrow{\quad} m$  即为  $m$  中的二元运算
- $a : (m \times m) \times m \xrightarrow{\quad} m \times (m \times m)$  表示  $m$  具有结合律

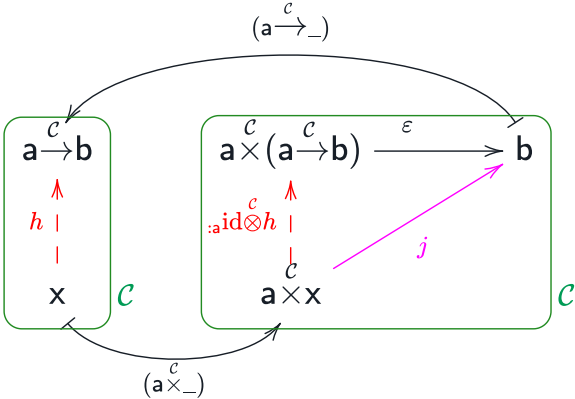
# 章节 06 类型的幂

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Definitions are here.

## 泛性质

默认函子  $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} : \mathcal{C} \times^{\mathcal{Cat}} \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$  在范畴  $\mathcal{C}$  中有下述性质：

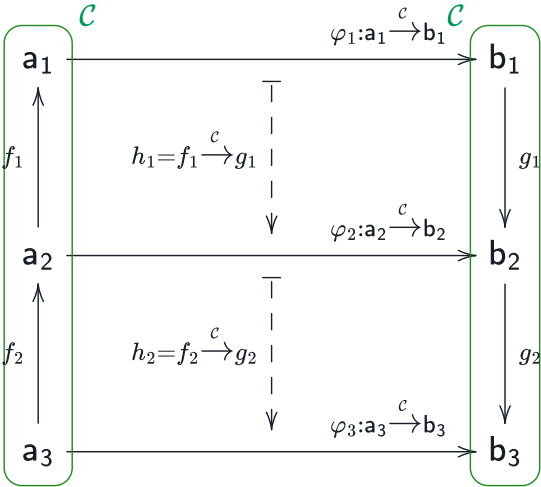
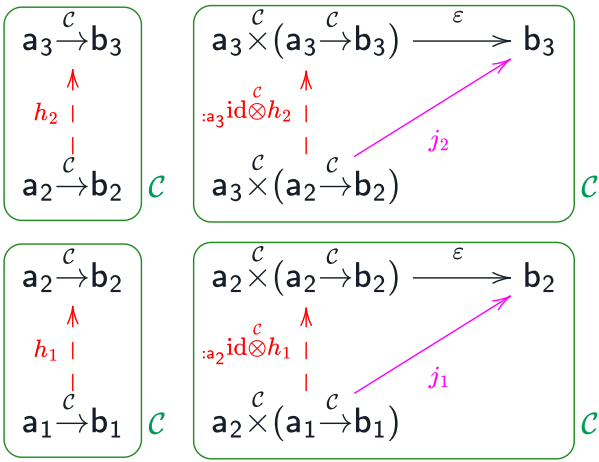
- $(\underline{a \times x} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \underline{b}) \cong \underline{x \rightarrow (a \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} b)} \cong \underline{a \rightarrow (x \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} b)}$  , x 为任意  $\mathcal{C}$  中对象  
—— **泛性质** , 指数与加乘法运算间的关系 。 下图便于理解证明：



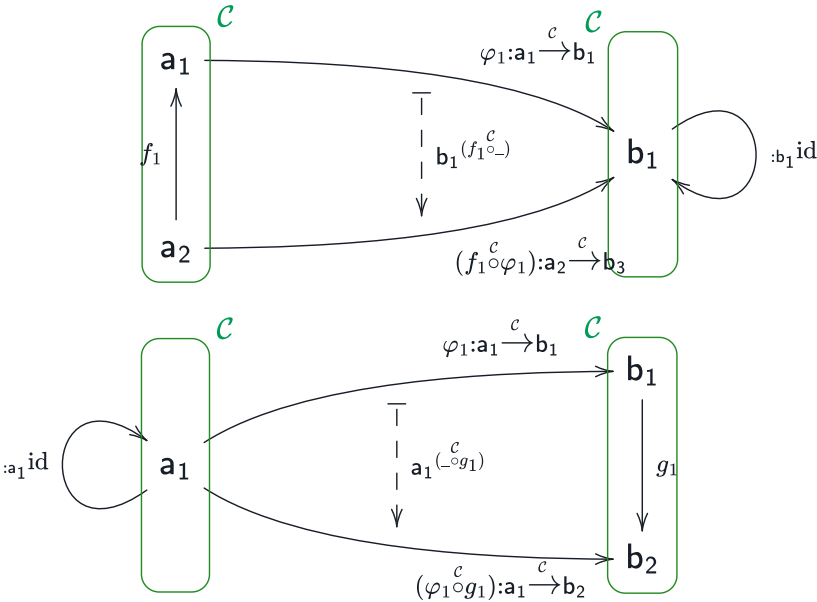
## 函子性

如何证明  $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow}$  构成函子呢？请看

- $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} : (:_{a_1} \text{id} \cdot :_{b_1} \text{id}) \longmapsto :_{(a_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} b_1)} \text{id}$   
—— 即函子  $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow}$  能**保持恒等箭头**；
  - $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} : (f_2 \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_1 \cdot g_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_2) \longmapsto h_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} h_2$   
—— 即函子  $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow}$  **保持箭头复合运算**。
- 下图有助于形象理解证明过程：



下图 ( 自上到下分别为图 1 和图 2 ) 后面会用到 。



范畴  $\mathcal{C}$  内任意两对象  $\mathbf{a}_1$  和  $\mathbf{b}_1$  间的箭头构成一个集合  $\mathbf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1$  ,  
说明  $\xrightarrow{\mathcal{C}}$  只能将两个对象打到一个集合。下面使  $\xrightarrow{\mathcal{C}}$  升级为函子:  
若还知道箭头  $f_1 : \mathbf{a}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{a}_1$  以及  $g_1 : \mathbf{b}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_2$  , 则规定

- $(\xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathcal{S}et$  为函子且  
 $(\xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1) : \mathbf{a}_1 \longmapsto (\mathbf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1)$  , 并且有  
 $(\xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1) : f_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1) = (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \cdot_{\mathbf{b}_1} \text{id}) = \mathbf{b}_1^{(f_1 \circ \xrightarrow{\mathcal{C}})}$

图 1 有助于理解。

$$\begin{aligned} &(\xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathcal{S}et , \\ &(\xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) : \mathbf{a}_1 \longmapsto (\mathbf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) = (\cdot_{\mathbf{a}_1} \text{id} \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) = \mathbf{a}_1^{(\xrightarrow{\mathcal{C}} g_1)} \\ &(\xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) : f_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) = (f_1 \circ \xrightarrow{\mathcal{C}}) \xrightarrow{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et} (\xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) = (\xrightarrow{\mathcal{C}} g_1)^{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et} (f_1 \circ \xrightarrow{\mathcal{C}}) \end{aligned}$$

图 2 有助于理解。

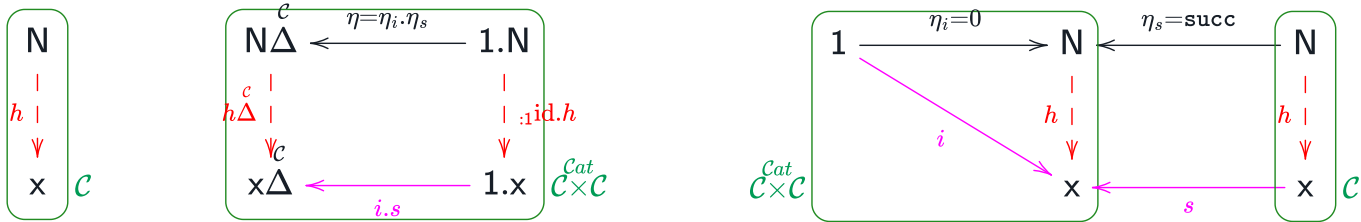
# 章节 07 递归类型

LaTeX Definitions are here.

## 泛性质

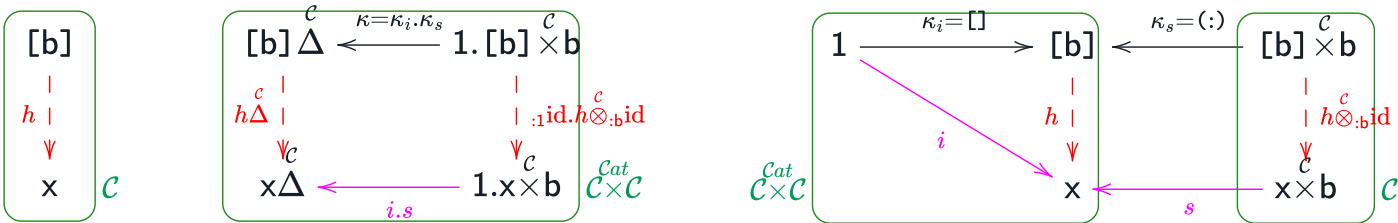
默认对象  $N$  在范畴  $\mathcal{C}$  中有下述性质：

- $(1 \xrightarrow{\mathcal{C}} x) \times^{Cat} (x \xrightarrow{\mathcal{C}} x) \cong (N \xrightarrow{\mathcal{C}} x)$  ,  $x$  为任意  $\mathcal{C}$  中对象  
—— **泛性质**。`rec` 即对应的同构 ( 上式从左至右 )。



默认函子  $[\_] : \mathcal{C} \xrightarrow{Cat} \mathcal{C}$  在范畴  $\mathcal{C}$  中有下述性质：

- $(1 \xrightarrow{\mathcal{C}} x) \times^{Cat} ((x \times^{\mathcal{C}} b) \xrightarrow{\mathcal{C}} x) \cong ([b] \xrightarrow{\mathcal{C}} x)$  ,  $x$  为任意  $\mathcal{C}$  中对象  
—— **泛性质**。`foldr` 即对应的同构 ( 上述等式从左至右 )。

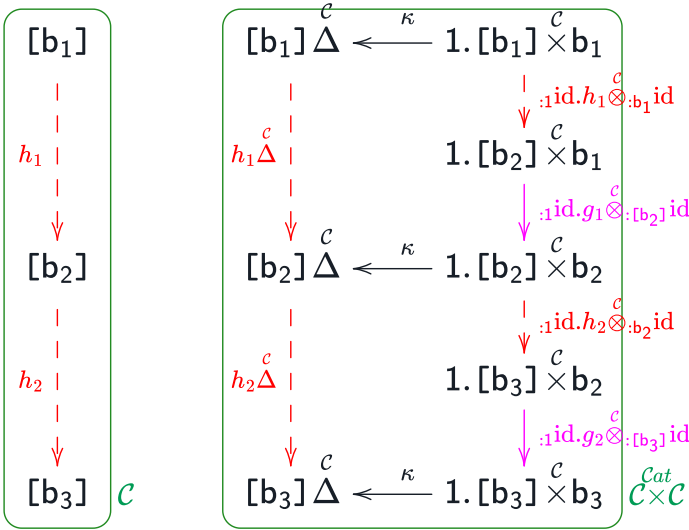


## 函子性

如何证明  $[\_]$  构成函子呢？请看

- $[\_] : :b_1 \text{ id} \mapsto :[b_1] \text{ id}$   
——  $[\_]$  **保持恒等箭头**；
- $[\_] : (g_1 \circ g_2) \mapsto (h_1 \circ h_2)$   
——  $[\_]$  **保持箭头复合运算**。

下图便于形象理解证明过程。



# 章节 08 - 09 函子与自然变换

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Definitions are here.

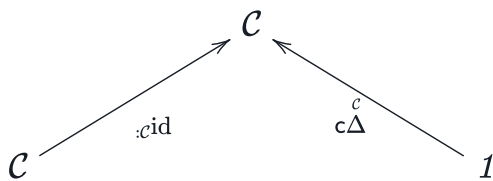
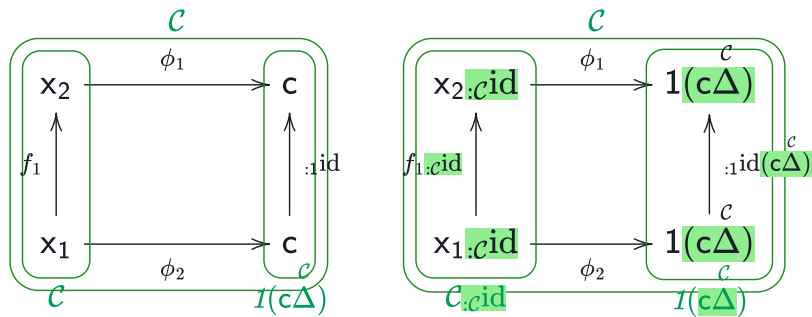
## 一些特殊的范畴

现在规定几种特殊的范畴。

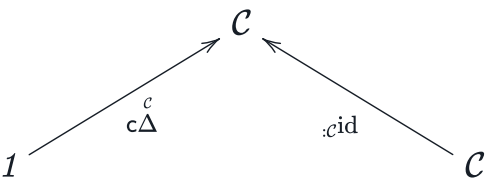
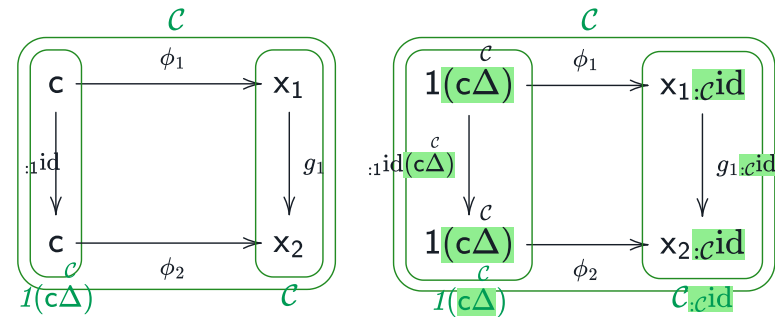
- **离散范畴**：只有对象不含箭头（恒等箭头除外）的范畴。
- *Set*：**所有集合构成的范畴**，为局部小范畴，满足
  - *Set* 中对象为任意集合；
  - *Set* 中箭头为集合间映射。
- *Cat*：**所有范畴构成的范畴**，满足
  - *Cat* 中任何对象都构成一个范畴；
  - *Cat* 中任何箭头都构成一个函子。

若  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  为 *Cat* 中对象，则：

- $\mathcal{C}^{\text{op}}$ ：**反范畴**，满足
  - $\mathcal{C}^{\text{op}}$  中对象皆形如  $c$ ，  
 $c$  为任意  $\mathcal{C}$  中的对象；
  - $\mathcal{C}^{\text{op}}$  中箭头皆形如  $\phi^{\text{op}} : c_2 \xrightarrow{\mathcal{C}^{\text{op}}} c_1$ ，  
 $\phi : c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2$  可为任意  $\mathcal{C}$  中的箭头。
- $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ ：**积范畴**，满足
  - $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  中对象皆形如  $c \cdot d$ ，  
 $c, d$  为任意  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  中的对象；
  - $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  中箭头皆形如  $\phi \cdot \psi$ ，  
 $\phi, \psi$  为任意  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  中的箭头。
- $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$ ：**所有  $\mathcal{C}$  到  $\mathcal{D}$  的函子的范畴**，满足
  - $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$  中任何对象  
都是  $\mathcal{C}$  到  $\mathcal{D}$  的函子；
  - $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$  中任何箭头  
都是函子间自然变换。
- $\mathcal{C}/c$ ：**俯范畴**，这里  $c$  为任意  $\mathcal{C}$  中对象；满足
  - $\mathcal{C}/c$  中对象皆形如  ~~$x \cdot 1 \cdot \phi$~~ ，其中  $x$   
和  $\phi : x \xrightarrow{\mathcal{C}} c$  分别为  $\mathcal{C}$  中任意的对象和箭头；
  - $c/\mathcal{C}$  中箭头皆形如  ~~$f_1 \cdot \cdot id$~~  且满足下述交换图，其中  
 $x_1, x_2$  为  $\mathcal{C}$  中任意对象且  $f_1, \phi_1, \phi_2$  为  $\mathcal{C}$  中任意箭头；



- $c/\mathcal{C}$ ：**仰范畴**，这里  $c$  为任意  $\mathcal{C}$  中对象；满足
  - $c/\mathcal{C}$  中对象皆形如  ~~$1 \cdot x \cdot \phi$~~ ，其中  $x$   
和  $\phi : c \xrightarrow{\mathcal{C}} x$  分别为  $\mathcal{C}$  中对象和箭头；
  - $\mathcal{C}/c$  中箭头皆形如  ~~$\cdot id \cdot g_1$~~  且满足下述交换图，其中  
 $x_1, x_2$  为  $\mathcal{C}$  中任意对象且  $g_1, \phi_1, \phi_2$  为  $\mathcal{C}$  中任意箭头；



## 函子

接下来我们来提供函子的正式定义：

- $P : \mathcal{C} \xrightarrow{Cat} \mathcal{D}$  为范畴当且仅当
  - 对任意  $\mathcal{C}$  中对象  $c$  ,  $cP$  为  $\mathcal{D}$  中对象且  $idP = id$  ;
  - 对任意  $\mathcal{C}$  中箭头  $\phi_1 : c_1 \xrightarrow{c} c_2$  和  $\phi_2 : c_2 \xrightarrow{c} c_3$  , 始终都有等式  $(\phi_1 \circ \phi_2)P = \phi_1P \circ \phi_2P$  成立。

## 函子的复合运算

假如刚才的  $P$  确实构成一个函子  
且  $Q : \mathcal{D} \xrightarrow{Cat} \mathcal{E}$  也构成函子 , 那么

- $P \circ Q : \mathcal{C} \xrightarrow{Cat} \mathcal{E}$   
也构成一个函子。

## 恒等函子

对于函子我们也有恒等映射 , 即：

- $id \circ P = P$   
 $= P \circ id$

## 忠实和完全函子

若  $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$  皆为**局部小范畴** , 则

- $P$  是**忠实的**当且仅当对任意  $\mathcal{C}$  中的对象  $c_1, c_2$   
 $(c_1 \xrightarrow{c} c_2)$  与  $(c_1P \xrightarrow{D} c_2P)$  之间始终存在单射；
- $P$  是**完全的**当且仅当对任意  $\mathcal{C}$  中的对象  $c_1, c_2$   
 $(c_1 \xrightarrow{c} c_2)$  与  $(c_1P \xrightarrow{D} c_2P)$  之间始终存在满射；
- $P$  是**完全忠实的**当且仅当对任意  $\mathcal{C}$  中的对象  $c_1, c_2$   
 $(c_1 \xrightarrow{c} c_2)$  与  $(c_1P \xrightarrow{D} c_2P)$  之间始终存在双射 ( 即集合间同构 )。

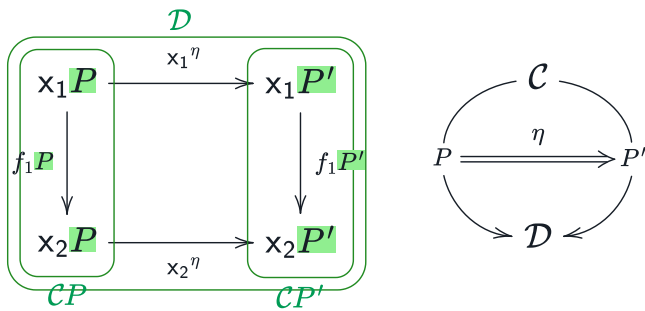
Note

刚才提到的 “ 单 / 满 / 双射 ”  
针对的都是范畴的箭头部分。

## 自然变换

如果还知道  $P' : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$  为函子 , 那么

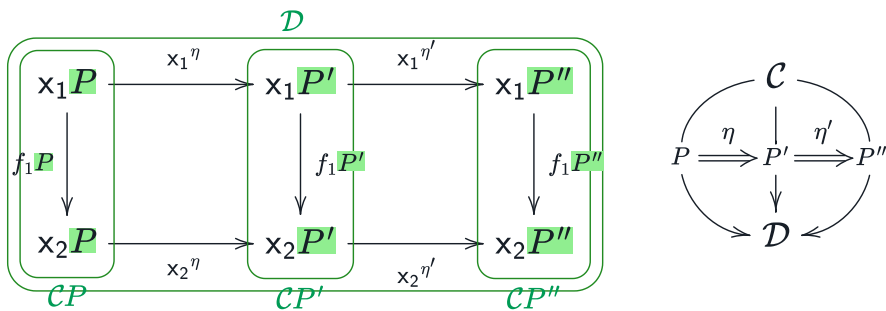
- $\eta : P \xrightarrow{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}} P'$  为自然变换当且仅当对任意  $\mathcal{C}$  中对象  $x_1, x_2$  始终都会有下述交换图成立 :



## 自然变换的复合

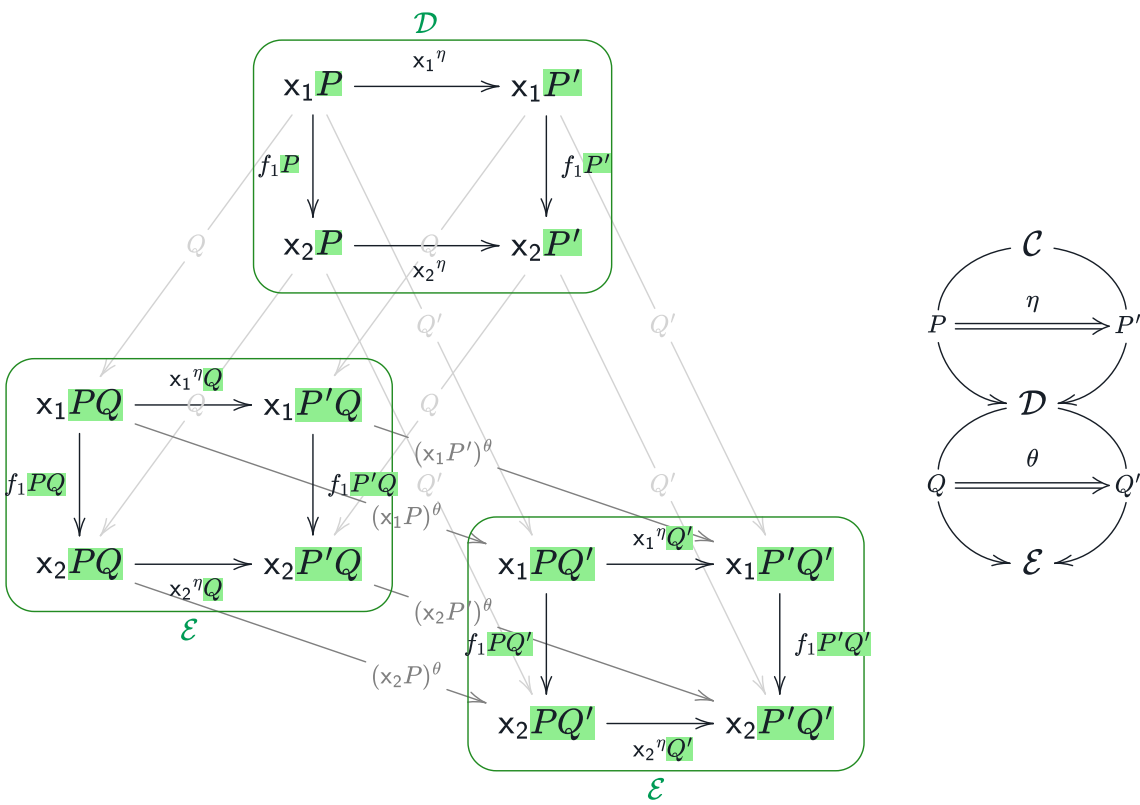
若已知  $\eta : P \xrightarrow{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}} P'$  构成自然变换且  
还知道  $\eta' : P' \xrightarrow{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}} P''$  为自然变换则

- $\eta \circ \eta' : P \xrightarrow{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}} P''$  为自然变换 ,  
称作  $\eta$  和  $\eta'$  的**纵复合**。



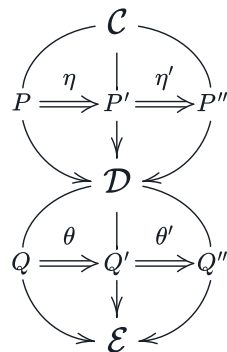
如果还知道  $Q' : \mathcal{D} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{E}$  也是个函子  
以及自然变换  $\theta : Q \xrightarrow{\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}} Q'$  , 则有

- $\eta \circ \theta : P \circ Q \xrightarrow{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}} P' \circ Q'$  为自然变换 ,  
称作  $\eta$  和  $\theta$  的**横复合**。



若  $\theta' : Q' \xrightarrow{\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}} Q''$  为自然变换则

- $(\eta \circ \theta) \circ (\eta' \circ \theta') = (\eta \circ \eta') \circ (\theta \circ \theta')$  ,  
改变纵横复合的先后顺序也不会影响最终结果。





## 恒等自然变换

同样对于自然变换也有恒等映射。

- $\text{id} : P \xrightarrow{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}} P$ , 并且对范畴  $\mathcal{C}$  中任意对象  $x$  都会有
$$x.\text{id} : xP \xrightarrow{\mathcal{D}} xP$$
$$x.\text{id} := \text{id}_{xP}$$

## 自然同构

在范畴论中我们更关心的是自然同构。

- $\eta : P \xrightarrow{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}} P'$  为**自然同构**当且仅当 $x^\eta$  总是同构, 这里  $x$  为任意  $\mathcal{C}$  中对象。