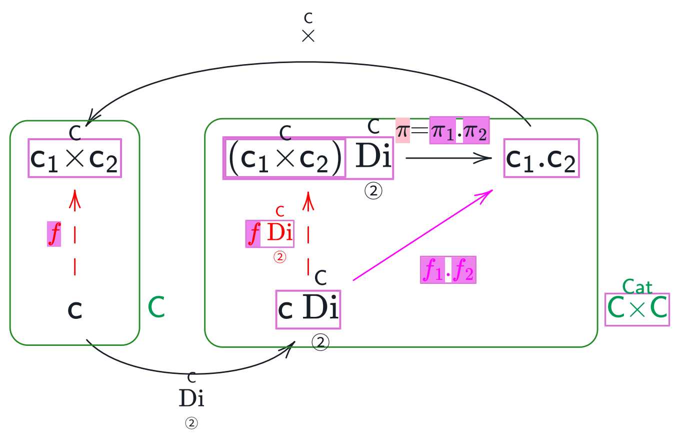
04-05 类型的和与积

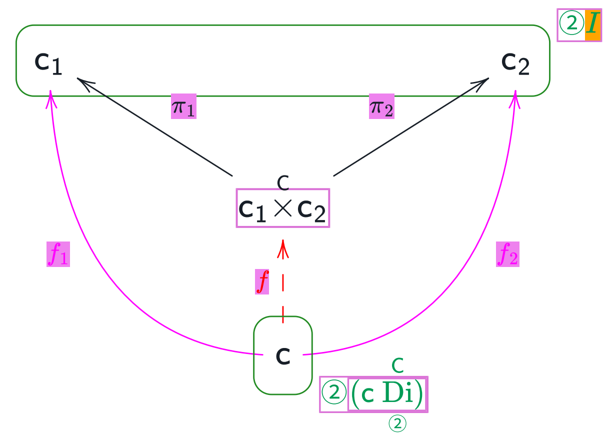
LaTeX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$: $(\mathsf{C} \times \mathsf{C}) \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$ 在范畴 C 中有如下性质：

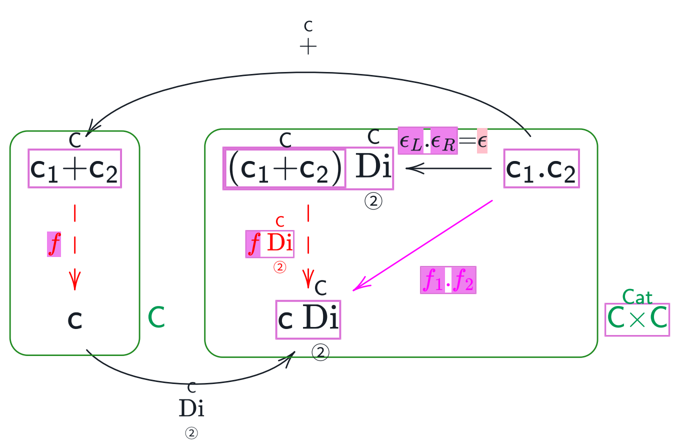
- $(c \overset{\mathsf{C}}{\to} c_1) \overset{\mathsf{Set}}{\times} (c \overset{\mathsf{C}}{\to} c_2) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} c \overset{\mathsf{C}}{\to} (c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} c_2)$
  —— c 为任意 C 中对象。此即为积的
  泛性质，亦为**指数对乘法的分配律** 。

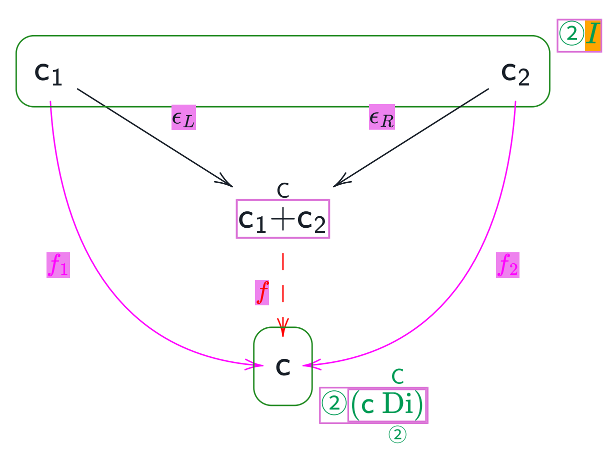




默认函子 $\overset{\mathsf{C}}{+}$: $(\mathsf{C} \times \mathsf{C}) \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$ 在范畴 C 中有如下性质：

- $(c_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} c) \overset{\mathsf{Set}}{\times} (c_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} c) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} c_2) \overset{\mathsf{C}}{\to} c$
  —— c 为任意 C 中对象。此即为和的
  泛性质，亦为**指数对加法的分配律** 。





Note

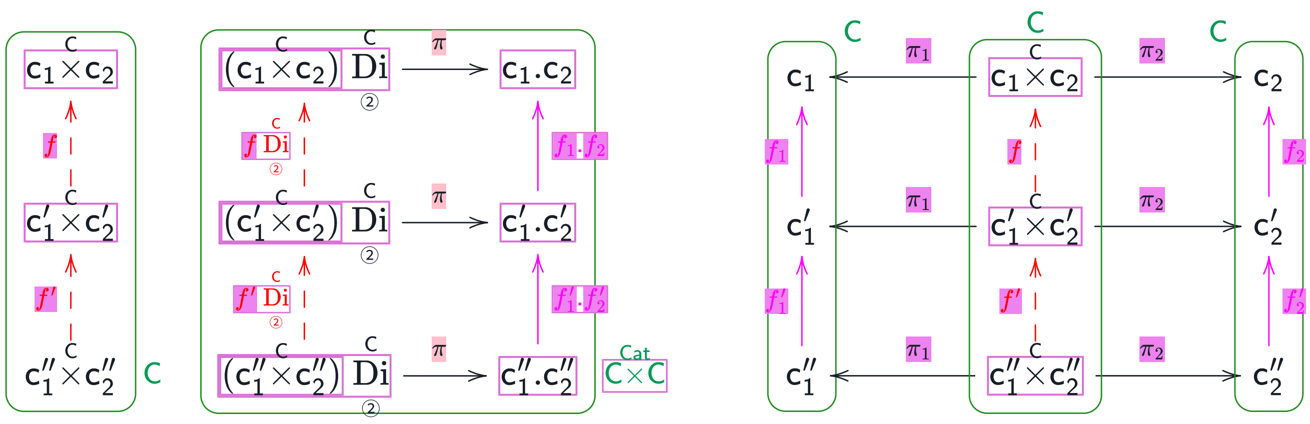
在上面的插图中

- $\underset{\text{②}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} (\mathsf{C} \times \mathsf{C})$ 为对角函子满足
  $c \longmapsto (c\,.\,c)$
- $\underset{\text{②}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} (\text{②} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C})$
  $c \longmapsto$ 常值函子
  $c\,\underset{\text{②}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} :$ $\text{②} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$
  $1 \longmapsto c$
  $2 \longmapsto c$
  $f \longmapsto {}_{:c}\mathrm{id}$
  即为对角函子的第二种等价的定义 。
  ② 为仅含两个对象的范畴，在此则
  作为一个指标范畴 。1 和 2 分别为
  其中的对象 。
- $I : \text{②} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$ 为函子，满足
  $1 \longmapsto c_1$
  $2 \longmapsto c_2$
- 不难看出上图中
  $\pi : I \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} (c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} c_2)\,\underset{\text{②}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}$
  $\epsilon : (c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} c_2)\,\underset{\text{②}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} I$
  都构成自然变换

函子性

如何证明 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : ({}_{:c_1'}\mathrm{id} \,.\, {}_{:c_2'}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(c_1' \overset{\mathsf{C}}{\times} c_2')}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : (f_1' \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1 \,.\, f_2' \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \longmapsto (f' \overset{\mathsf{C}}{\circ} f)$
  —— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 保持**箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：

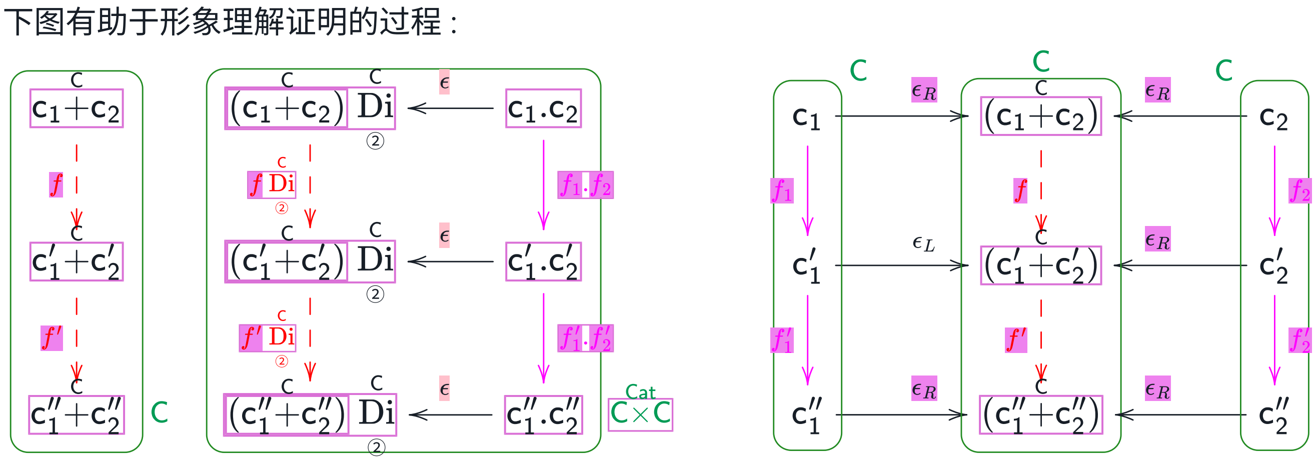


另外我们规定 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : (f_1 \,.\, c_2) \longmapsto (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} {}_{:c_2}\mathrm{id})$
  $\overset{\mathsf{C}}{\times} : (c_1 \,.\, f_2) \longmapsto ({}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\times} f_2)$

如何证明 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathsf{C}}{+} : ({}_{:c_1}\mathrm{id} \,.\, {}_{:c_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} c_2)}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{\mathsf{C}}{+} : (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1' \,.\, f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2') \longmapsto (f \overset{\mathsf{C}}{\circ} f')$
  —— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 保持**箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：



另外我们规定 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{\mathsf{C}}{+} : (f_1 \,.\, c_2) \longmapsto (f_1 \overset{\mathsf{C}}{+} {}_{:c_2}\mathrm{id})$
  $\overset{\mathsf{C}}{+} : (c_1 \,.\, f_2) \longmapsto ({}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{+} f_2)$

运算性质

对于函子 $\overset{C}{\times}$ 我们不难得知

- $c_1 \overset{C}{\times} 1 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{\times} 1 \overset{C}{\cong} c_1$
  —— 乘法具有**幺元** 1 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \, . \, {}_{:c}!$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$
\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{\times} 1) \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi = \pi_1 . \pi_2"] & c_1 . 1 \\
c \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_1 . {}_{:c}!"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_1 \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "{}_{:c_1}\mathrm{id} . {}_{:c_1}!"] & c_1 . 1 \\
c \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f' \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_1 . {}_{:c}!"'] &
\end{tikzcd}
$$

- $c_1 \overset{C}{\times} c_2 \overset{C}{\cong} c_2 \overset{C}{\times} c_1$
  —— 乘法具有**交换律** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \, . \, f_2$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$
\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{\times} c_2) \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi = \pi_1 . \pi_2"] & c_1 . c_2 \\
c \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_1 . f_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_2 \overset{C}{\times} c_1) \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi = \pi_1 . \pi_2"] & c_2 . c_1 \\
c \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f' \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_2 . f_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

- $(c_1 \overset{C}{\times} c_2) \overset{C}{\times} c_3 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{\times} (c_2 \overset{C}{\times} c_3)$
  —— 乘法具有**结合律** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $(f_1 \, . \, f_2) \, . \, f_3$ 唯一决定 f 和 f' 。

$$
\begin{tikzcd}
((c_1 \overset{C}{\times} c_2) \overset{C}{\times} c_3) \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi"] & (c_1 \overset{C}{\times} c_2) . c_3 \arrow[r, "\pi ._{:c_3} \mathrm{id}"] & (c_1 . c_2) . c_3 \\
c_3 \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, dotted, "j . f_3"] \arrow[urr, "(f_1 . f_2) . f_3"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{\times} (c_2 \overset{C}{\times} c_3)) \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi"] & c_1 . (c_2 \overset{C}{\times} c_3) \arrow[r, "{}_{:c_1}\mathrm{id} . \pi"] & c_1 . (c_2 . c_3) \\
c_3 \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, dotted, "f_1 . j"] \arrow[urr, "f_1 . (f_2 . f_3)"'] & &
\end{tikzcd}
$$

对于函子 $\overset{C}{+}$ 我们不难得知

- $c_1 \overset{C}{+} 0 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{+} 1 \overset{C}{\cong} c_1$
  —— 加法具有**幺元** 0 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \, . \, {}_{:c}¡$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$
\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{+} 0) \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1 . 0 \arrow[l, "\epsilon_L . \epsilon_R = \epsilon"'] \arrow[dl, "f_1 . {}_{:c}¡"] \\
c \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_1 \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f' \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1 . 0 \arrow[l, "\epsilon_L . \epsilon_R = \epsilon"'] \arrow[dl, "f_1 . {}_{:c}¡"] \\
c \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}
$$

- $c_1 \overset{C}{+} c_2 \overset{C}{\cong} c_2 \overset{C}{+} c_1$
  —— 加法具有**交换律** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \, . \, f_2$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$
\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{+} c_2) \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1 . c_2 \arrow[l, "\epsilon_L . \epsilon_R = \epsilon"'] \arrow[dl, "f_1 . f_2"] \\
c \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_2 \overset{C}{+} c_1) \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f' \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}"'] & c_2 . c_1 \arrow[l, "\epsilon_L . \epsilon_R = \epsilon"'] \arrow[dl, "f_2 . f_1"] \\
c \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}
$$

- $(c_1 \overset{C}{+} c_2) \overset{C}{+} c_3 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{+} (c_2 \overset{C}{+} c_3)$
  —— 加法具有**结合律** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $(f_1 \, . \, f_2) \, . \, f_3$ 唯一决定 f 和 f' 。

$$
\begin{tikzcd}
((c_1 \overset{C}{+} c_2) \overset{C}{+} c_3) \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}"'] & (c_1 \overset{C}{+} c_2) . c_3 \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "j . f_3"] & (c_1 . c_2) . c_3 \arrow[l, "\epsilon ._{:c_3} \mathrm{id}"'] \arrow[dll, "(f_1 . f_2) . f_3"] \\
c \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{+} (c_2 \overset{C}{+} c_3)) \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1 . (c_2 \overset{C}{+} c_3) \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "f_1 . j"] & c_1 . (c_2 . c_3) \arrow[l, "\epsilon ._{:c_3} \mathrm{id}"'] \arrow[dll, "f_1 . (f_2 . f_3)"] \\
c \overset{C}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} & &
\end{tikzcd}
$$

幺半范畴

像刚才这样对象运算具有**单位元**以及**结合律**的范畴称作**幺半范畴**；

若上述范畴还具有**交换律**则称作**对称幺半范畴**；

很明显我们的范畴 C 是典型的**对称幺半范畴**。

幺半群

什么是幺半群呢？有两种定义方式：

- **幺半群** M 是个范畴，其只含一个对象 m；
  其中的复合运算正好有单位元以及结合律。
- 对象 m 属于幺半范畴 C，满足下述交换图：

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{1 \overset{C}{\times} m} \arrow[r, "u \overset{C}{\otimes}_{:m} \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\text{左单位元 } u_l"'] & \boxed{m \overset{C}{\times} m} \arrow[d, "p"', "\text{运算结果唯一}"] & \boxed{m \overset{C}{\times} 1} \arrow[l, "{}_{:m}\mathrm{id} \overset{C}{\otimes} u"'] \arrow[dl, "u_r \text{ 右单位元}"] \\
 & m &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{(m \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\times} m} \arrow[rr, "\text{结合律 } a"] \arrow[d, "\text{先算左侧括号 } p \overset{C}{\otimes}_{:m} \mathrm{id}"'] & & \boxed{m \overset{C}{\times} (m \overset{C}{\times} m)} \arrow[d, "{}_{:m}\mathrm{id} \overset{C}{\otimes} p \text{ 先算右侧括号}"] \\
\boxed{m \overset{C}{\times} m} \arrow[r, "\text{再算最终结果 } p"'] & m & \boxed{m \overset{C}{\times} m} \arrow[l, "p \text{ 果结终最算再}"]
\end{tikzcd}
$$

  其中

  - u ：$\boxed{1 \overset{C}{\to} m}$ 其实就是 m 里面的幺元
  - u_l ：$\boxed{(1 \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\to} m}$ 表示 u 构成左幺元
  - u_r ：$\boxed{(m \overset{C}{\times} 1) \overset{C}{\to} m}$ 表示 u 构成右幺元
  - p ：$\boxed{(m \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\to} m}$ 即为 m 中的二元运算
  - a ：$\boxed{(m \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\times} m \overset{C}{\to} m \overset{C}{\times} (m \overset{C}{\times} m)}$ 表示 m 具有结合律