02 范畴里面的箭头

$\LaTeX$ Definitions are here.

我们进行下述规定：

- $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2 =$
  所有从 c_1 射向 c_2 的箭头构成的集。

> **Note**
>
> 上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
> 其他范畴里 $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2$ 未必构成集。

范畴 C 中特定的箭头可以进行复合运算：

- $\begin{array}{rcccl} \overset{\mathsf{C}}{\circ} : (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) & \overset{\mathsf{Set}}{\times} & (\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_3) & \xrightarrow{\mathsf{Set}} & (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_3) \\ (\quad i_1 & . & i_2 \quad) & \longmapsto & i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2 \end{array}$

如果我们还知道箭头 f_1，i，f_2 分别属于
$\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1$，$\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2$，$\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_3$ 那么便可知

- $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i) \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2 = f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} (i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)$，
  即箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便可获得新的函数：

- $\begin{array}{rcl} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) : (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) & \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{Set}} & (\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \\ i & \longmapsto & (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i) \end{array}$
  称作**前复合**。下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{c}_1 \arrow[rr, bend left, "i:\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2"] \arrow[drr, phantom, "\mathsf{c}_2(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} _)"] & & \mathsf{c}_2 \arrow[loop right, "{}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}"] \\
\mathsf{c}_1' \arrow[u, "f_1"] \arrow[urr, bend right, "(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i):\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

- $\begin{array}{rcl} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) : (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) & \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{Set}} & (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2') \\ i & \longmapsto & (i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1) \end{array}$
  称作**后复合**。 下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathsf{c}_2 \arrow[d, "f_2"] \\
\mathsf{c}_1 \arrow[loop left, "{}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}"] \arrow[urr, bend left, "i:\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2"] \arrow[drr, bend right, "(i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2):\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2'"'] \arrow[rr, phantom, "\mathsf{c}_1(_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)"] & & \\
 & & \mathsf{c}_2'
\end{tikzcd}$$

根据上面的定义不难得出下述结论：

- $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\to} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \overset{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\to} \mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$
  复合运算具有**结合律**，即后面提到的**自然性**；
- $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} i) \overset{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\to} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2))$
  前复合与复合运算的关系
- $(i \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\to} \mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) = ((f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i) \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$
  后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。
假如 a_1 为 c_1 的全局元素则可规定

- $c_1 i = c_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i$