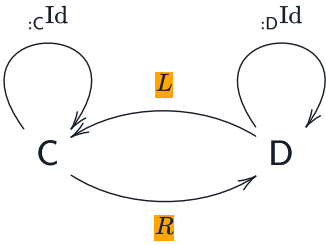


伴随函子的 unit 与 counit



伴随函子：对任意 c 和 d 有 $(d \xrightarrow{D} cR) \xrightarrow{\text{Set}} (dL \xrightarrow{C} c)$ 。如此

不难看出这其实蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_2 ，见下：

$$\begin{aligned} \phi_2 : (_ \xrightarrow{D} _ R) &\xrightarrow{(D \times C) \xrightarrow{C} \text{Set}} (_ L \xrightarrow{C} _) \\ (_ \cdot c) \phi_2 : (_ \xrightarrow{D} cR) &\xrightarrow{D \xrightarrow{C} \text{Set}} (_ L \xrightarrow{C} c) \\ (d \cdot _) \phi_2 : (d \xrightarrow{D} _ R) &\xrightarrow{C \xrightarrow{C} \text{Set}} (dL \xrightarrow{C} _) \end{aligned}$$

套用反变米田引理我们便可获得

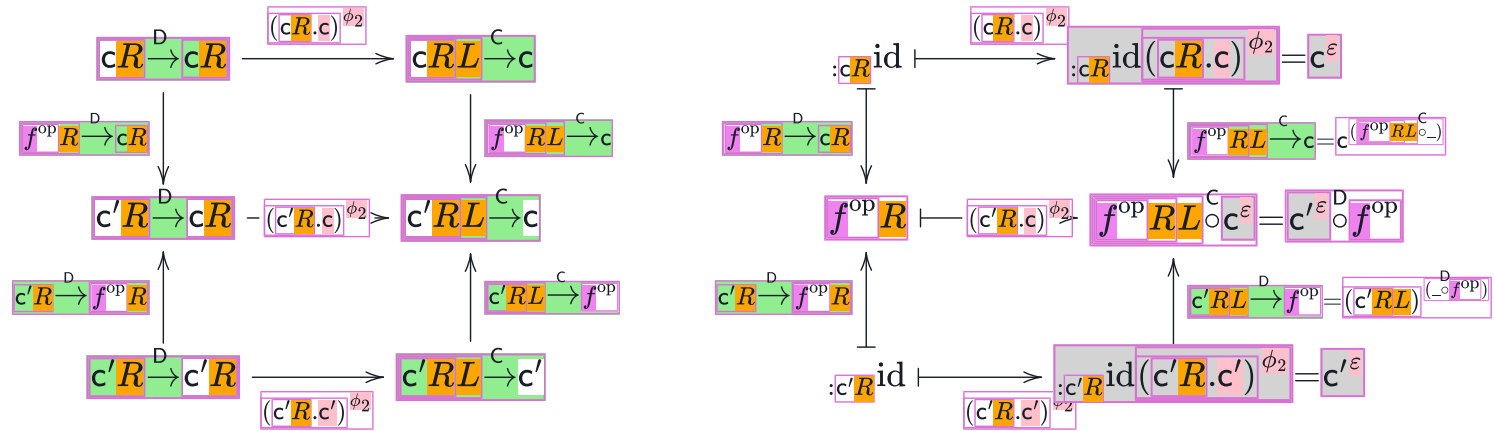
$$\underbrace{(_ \xrightarrow{D} cR) \xrightarrow{D^{\text{op}} \xrightarrow{\text{Cat}} \text{Set}} (_ L \xrightarrow{C} c)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(cRL \xrightarrow{C} c)}_{\text{一堆元素}}$$

由反变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(_ \cdot c) \phi_2$

都会有一个右侧集合中的箭头与之相对应，即 $:_c R \text{id} (cR \cdot c) \phi_2 = c^\varepsilon$ 。

为何 ε 构成自然变换呢？下方右图第二行的第二个节点说明了一切。

这两张图这其实就是反变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。



不难看出这其实蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_1 ，见下：

$$\begin{aligned} \phi_1 : (_ L \xrightarrow{C} _) &\xrightarrow{(D \times C) \xrightarrow{C} \text{Set}} (_ \xrightarrow{D} _ R) \\ (_ \cdot c) \phi_1 : (_ L \xrightarrow{C} c) &\xrightarrow{D \xrightarrow{C} \text{Set}} (_ \xrightarrow{D} cR) \\ (d \cdot _) \phi_1 : (dL \xrightarrow{C} _) &\xrightarrow{C \xrightarrow{C} \text{Set}} (d \xrightarrow{D} _ R) \end{aligned}$$

套用协变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{((dL \xrightarrow{C} _) \xrightarrow{C \xrightarrow{\text{Cat}} \text{Set}} (d \xrightarrow{D} _ R))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(d \xrightarrow{D} dLR)}_{\text{一堆元素}}$$

由协变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(d \cdot _) \phi_1$

都会有一个右侧集合中的箭头与之相对应，即 $:_d L \text{id} (d \cdot dL) \phi_1 = d^\eta$ 。

为何 η 构成自然变换呢？下方右图第二行的第二个节点说明了一切。

这两张图这其实就是协变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

