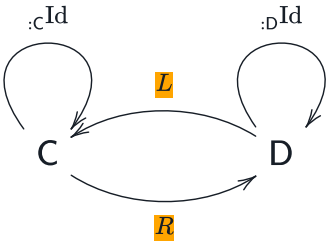


伴随函子的 unit 与 counit



伴随函子：对任意 c 和 d 有 $(d \overset{D}{\rightarrow} c \textcolor{brown}{R}) \overset{\text{Set}}{\cong} (d \textcolor{brown}{L} \overset{C}{\rightarrow} c)$ 。如此

- 不难看出这其实蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_2 ，见下：

$$\begin{aligned}\phi_2 &: (_ \xrightarrow{D} _ R) \xrightarrow{(D \times C) \xrightarrow{C} \text{Set}} (_ L \xrightarrow{C} _) \\ (_ \cdot c) \phi_2 &: (_ \xrightarrow{D} c R) \xrightarrow{D \xrightarrow{C} \text{Set}} (_ L \xrightarrow{C} c) \\ (d \cdot _) \phi_2 &: (d \xrightarrow{D} _ R) \xrightarrow{C \xrightarrow{C} \text{Set}} (d L \xrightarrow{C} _)\end{aligned}$$

套用反变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{((_ \xrightarrow{D} c R) \xrightarrow{D^{op} \xrightarrow{C} \text{Set}} (_ L \xrightarrow{C} c))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(c R L \xrightarrow{C} c)}_{\text{一堆元素}}$$

由反变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(_ \cdot c) \phi_2$ 右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 $:c R \text{id}(c R \cdot c) \phi_2 = c^\varepsilon$ 。如此

- ε 构成自然变换。

考虑任意 $f^{op} : c' \xrightarrow{C} c$ ：

$$\begin{array}{ccc} c R \xrightarrow{D} c R & \xrightarrow{(c R \cdot c) \phi_2} & c R L \xrightarrow{C} c \\ \downarrow f^{op} R \xrightarrow{D} c R & & \downarrow f^{op} R L \xrightarrow{C} c \\ c' R \xrightarrow{D} c R & \xrightarrow{(c' R \cdot c) \phi_2} & c' R L \xrightarrow{C} c \\ \uparrow c' R \xrightarrow{D} f^{op} R & & \uparrow c' R L \xrightarrow{C} f^{op} \\ c' R \xrightarrow{D} c' R & \xrightarrow{(c' R \cdot c') \phi_2} & c' R L \xrightarrow{C} c' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} :c R \text{id} & \xrightarrow{(c R \cdot c) \phi_2} & :c R \text{id}(c R \cdot c) \phi_2 = c^\varepsilon \\ \downarrow f^{op} R \xrightarrow{D} c R & & \downarrow f^{op} R L \xrightarrow{C} c = c \circ (f^{op} R L \xrightarrow{C} _) \\ f^{op} R & \xrightarrow{(c' R \cdot c) \phi_2} & f^{op} R L \xrightarrow{C} c^\varepsilon = c'^\varepsilon \circ f^{op} \\ \uparrow c' R \xrightarrow{D} f^{op} R & & \uparrow c' R L \xrightarrow{C} f^{op} = (c' R L) \xrightarrow{D} (c' f^{op}) \\ :c' R \text{id} & \xrightarrow{(c' R \cdot c') \phi_2} & :c' R \text{id}(c' R \cdot c') \phi_2 = c'^\varepsilon \end{array}$$

上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图其实就是反变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

- 不难看出这其实蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_1 ，见下：

$$\begin{aligned}\phi_1 &: (_ L \xrightarrow{C} _) \xrightarrow{(D \times C) \xrightarrow{C} \text{Set}} (_ \xrightarrow{D} _ R) \\ (_ \cdot c) \phi_1 &: (_ L \xrightarrow{C} c) \xrightarrow{D \xrightarrow{C} \text{Set}} (_ \xrightarrow{D} c R) \\ (d \cdot _) \phi_1 &: (d L \xrightarrow{C} _) \xrightarrow{C \xrightarrow{C} \text{Set}} (d \xrightarrow{D} _ R)\end{aligned}$$

套用协变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{((d L \xrightarrow{C} _) \xrightarrow{C \xrightarrow{C} \text{Set}} (d \xrightarrow{D} _ R))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(d \xrightarrow{D} d L R)}_{\text{一堆元素}}$$

由协变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(d \cdot _) \phi_1$ 右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 $:d L \text{id}(d \cdot d L) \phi_1 = d^\eta$ 。如此。

- η 构成自然变换。

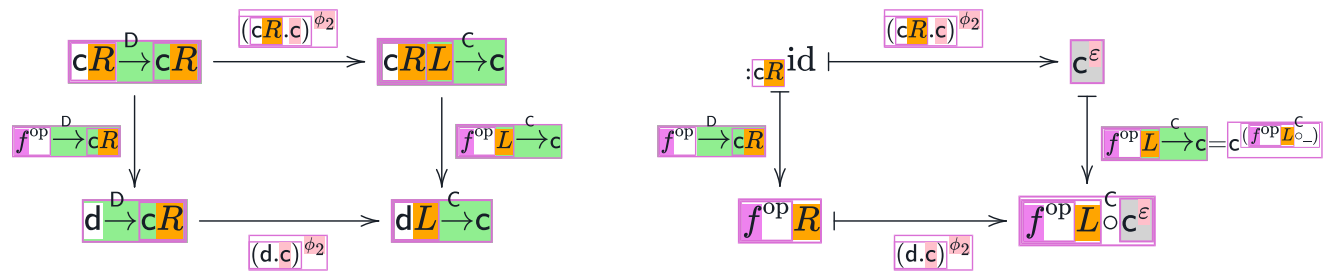
考虑任意 $g : d \xrightarrow{D} d'$ ：

$$\begin{array}{ccc} d L \xrightarrow{C} d L & \xrightarrow{(d \cdot d L) \phi_1} & d \xrightarrow{D} d L R \\ \downarrow d L \xrightarrow{C} g L & & \downarrow d \xrightarrow{D} g L R \\ d L \xrightarrow{C} d' L & \xrightarrow{(d \cdot d' L) \phi_1} & d \xrightarrow{D} d' L R \\ \uparrow g L \xrightarrow{C} d' L & & \uparrow g \xrightarrow{D} d' L R \\ d' L \xrightarrow{C} d' L & \xrightarrow{(d' \cdot d' L) \phi_1} & d' \xrightarrow{D} d' L R \end{array} \quad \begin{array}{ccc} :d L \text{id} & \xrightarrow{(d \cdot d L) \phi_1} & :d L \text{id}(d \cdot d L) \phi_1 = d^\eta \\ \downarrow d L \xrightarrow{C} g L & & \downarrow d \xrightarrow{D} g L R = d \circ (g L R) \\ g L & \xrightarrow{(d \cdot d' L) \phi_1} & d^\eta \circ g L R = g \circ d'^\eta \\ \uparrow g L \xrightarrow{C} d' L & & \uparrow g \xrightarrow{D} d' L R = d' L R \xrightarrow{D} (g \circ _) \\ :d' L \text{id} & \xrightarrow{(d' \cdot d' L) \phi_1} & :d' L \text{id}(d' \cdot d' L) \phi_1 = d'^\eta \end{array}$$

上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图其实就是协变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

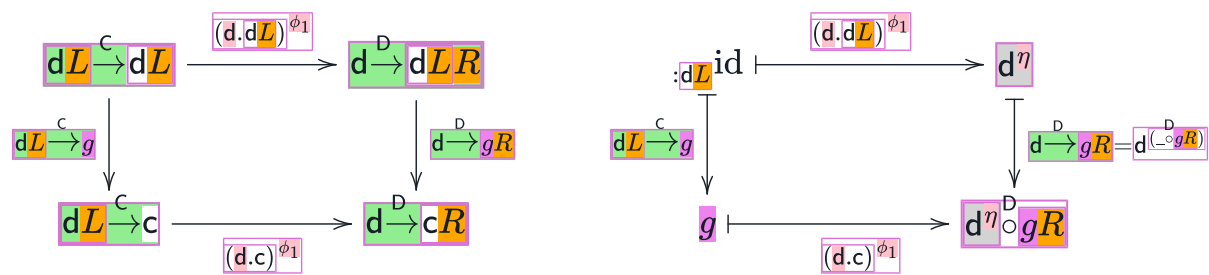
同样，给定自然同构 ε, η ，我们也可以推出自然同构 ϕ_2 和 ϕ_1 。

考虑任意 $f^{\text{op}} : \mathbf{d} \xrightarrow{\mathbf{c}} \mathbf{cR}$:



于是我们可以根据上图定义 $(\mathbf{d} . \mathbf{c})^{\phi_2}$ 。

考虑任意 $g : \mathbf{dL} \xrightarrow{\mathbf{D}} \mathbf{c}$:



于是我们可以根据上图定义 $(\mathbf{d} . \mathbf{c})^{\phi_1}$ 。

但是这里面怎么体现了用到了 ε 和 η 为自然变换的性质呢？