$\LaTeX$ Definitions are here.

伴随函子的 unit 与 counit

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[loop above, "{_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id}}"] \arrow[rr, bend right, "R"'] & & \mathsf{D} \arrow[loop above, "{_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id}}"] \arrow[ll, bend right, "L"'] \end{tikzcd}$$

对任意 c 和 d 有 $(\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R)$，将 c 替换为 $\mathsf{d}L$ 后即为

对任意 d 都会有 $(\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{d}L) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{d}LR)$，等价于

对任意 d 都会有 $(\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{d}L) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{d}\,{_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id}} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{d}LR)$

既然如此，那么对于任意 d 在左侧集合选取 ${_{:\mathsf{d}L}\mathrm{id}}$
右侧集合中就必然会有箭头 d $\longmapsto$ $\mathsf{d}LR$ 与之对应。
我们将这些右侧集合的箭头拼起来就可以构建一个自然变换，
即 η : ${_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id}} \xrightarrow{\mathsf{C}} L \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} R$。

所以这和米田引理有什么关系呢？

- 套用协变米田引理我们便可获得
  $\underbrace{((\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{C}} \_R))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{d}LR)}_{\text{一堆元素}}$
  之前证米田引理的时候有提到过
  任何左侧集合中的 ϕ 都会与右侧集合中的 ${_{:(\mathsf{d}L)}\mathrm{id}}((\mathsf{d}L)^{\phi})$ 一一对应。

$\underbrace{((\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2) \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} F_2)}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}_2 F_2)}_{\text{一堆元素}}$

$\underbrace{((\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} F_1)}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}_1 F_1)}_{\text{一堆元素}}$