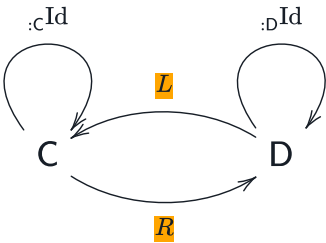


10 伴随函子

LaTeX Definitions are here.

若有函子 $L : \mathbf{D} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{C}$
以及函子 $R : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{D}$, 即



伴随函子的第一种定义

那么规定

- $L \dashv R$ 当且仅当
函子 $(_ \xrightarrow{L} _)$ 和 $(_ \xrightarrow{R} _)$
间存在着一个二元的**自然同构**。

假如确实有 $L \dashv R$, 那么不难得知

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_2 ，见下：

$$\begin{aligned}\phi_2 &: \left(_ \xrightarrow{D} _ \mathbf{R} \right) \xrightarrow{(D \times C) \rightarrow \text{Set}} \left(_ \mathbf{L} \xrightarrow{C} _ \right) \\ \left(_ \cdot \mathbf{c} \right) \phi_2 &: \left(_ \xrightarrow{D} \mathbf{cR} \right) \xrightarrow{D \rightarrow \text{Set}} \left(_ \mathbf{L} \xrightarrow{C} \mathbf{c} \right) \\ \left(\mathbf{d} \cdot _ \right) \phi_2 &: \left(\mathbf{d} \xrightarrow{D} _ \mathbf{R} \right) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} \left(\mathbf{dL} \xrightarrow{C} _ \right)\end{aligned}$$

套用反变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{\left(_ \xrightarrow{D} \mathbf{cR} \right) \xrightarrow{D^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}} \left(_ \mathbf{L} \xrightarrow{C} \mathbf{c} \right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\left(\mathbf{cRL} \xrightarrow{C} \mathbf{c} \right)}_{\text{一堆元素}}$$

由反变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(_ \cdot \mathbf{c}) \phi_2$ 右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 $:\mathbf{cR} \text{id}(\mathbf{cR} \cdot \mathbf{c}) \phi_2 = \mathbf{c}^\varepsilon$ 。如此

- $\varepsilon : \mathbf{R} \circ \mathbf{L} \xrightarrow{\text{Cat}} _ \text{Id}$ 构成自然变换。

考虑任意 $f^{\text{op}} : \mathbf{c}' \xrightarrow{C} \mathbf{c}$ ：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{cR} \xrightarrow{D} \mathbf{cR} & \xrightarrow{(\mathbf{cR} \cdot \mathbf{c}) \phi_2} & \mathbf{cRL} \xrightarrow{C} \mathbf{c} \\ \downarrow f^{\text{op}} \mathbf{R} \xrightarrow{D} \mathbf{cR} & & \downarrow f^{\text{op}} \mathbf{RL} \xrightarrow{C} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}' \mathbf{R} \xrightarrow{D} \mathbf{cR} & \xrightarrow{(\mathbf{c}' \mathbf{R} \cdot \mathbf{c}) \phi_2} & \mathbf{c}' \mathbf{RL} \xrightarrow{C} \mathbf{c} \\ \uparrow \mathbf{c}' \mathbf{R} \xrightarrow{D} f^{\text{op}} \mathbf{R} & & \uparrow \mathbf{c}' \mathbf{RL} \xrightarrow{C} f^{\text{op}} \\ \mathbf{c}' \mathbf{R} \xrightarrow{D} \mathbf{c}' \mathbf{R} & \xrightarrow{(\mathbf{c}' \mathbf{R} \cdot \mathbf{c}') \phi_2} & \mathbf{c}' \mathbf{RL} \xrightarrow{C} \mathbf{c}' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} :\mathbf{cR} \text{id} & \xrightarrow{(\mathbf{cR} \cdot \mathbf{c}) \phi_2} & :\mathbf{cR} \text{id}(\mathbf{cR} \cdot \mathbf{c}) \phi_2 = \mathbf{c}^\varepsilon \\ \downarrow f^{\text{op}} \mathbf{R} \xrightarrow{D} \mathbf{cR} & & \downarrow f^{\text{op}} \mathbf{RL} \xrightarrow{C} \mathbf{c} = \mathbf{c} (f^{\text{op}} \mathbf{RL} \xrightarrow{C} _) \\ f^{\text{op}} \mathbf{R} & \xrightarrow{(\mathbf{c}' \mathbf{R} \cdot \mathbf{c}) \phi_2} & f^{\text{op}} \mathbf{RL} \circ \mathbf{c}^\varepsilon = \mathbf{c}'^\varepsilon \circ f^{\text{op}} \\ \uparrow \mathbf{c}' \mathbf{R} \xrightarrow{D} f^{\text{op}} \mathbf{R} & & \uparrow \mathbf{c}' \mathbf{RL} \xrightarrow{C} f^{\text{op}} = (\mathbf{c}' \mathbf{RL}) (_ \xrightarrow{C} f^{\text{op}}) \\ :\mathbf{c}' \text{id} & \xrightarrow{(\mathbf{c}' \mathbf{R} \cdot \mathbf{c}') \phi_2} & :\mathbf{c}' \text{id}(\mathbf{c}' \mathbf{R} \cdot \mathbf{c}') \phi_2 = \mathbf{c}'^\varepsilon \end{array}$$

上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图其实就是反变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_1 ，见下：

$$\begin{aligned}\phi_1 &: \left(_ \mathbf{L} \xrightarrow{C} _ \right) \xrightarrow{(D \times C) \rightarrow \text{Set}} \left(_ \xrightarrow{D} _ \mathbf{R} \right) \\ \left(_ \cdot \mathbf{c} \right) \phi_1 &: \left(_ \mathbf{L} \xrightarrow{C} \mathbf{c} \right) \xrightarrow{D \rightarrow \text{Set}} \left(_ \xrightarrow{D} \mathbf{cR} \right) \\ \left(\mathbf{d} \cdot _ \right) \phi_1 &: \left(\mathbf{dL} \xrightarrow{C} _ \right) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} \left(\mathbf{d} \xrightarrow{D} _ \mathbf{R} \right)\end{aligned}$$

套用协变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{\left(\left(\mathbf{dL} \xrightarrow{C} _ \right) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} \left(\mathbf{d} \xrightarrow{D} _ \mathbf{R} \right) \right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\left(\mathbf{d} \xrightarrow{D} \mathbf{dLR} \right)}_{\text{一堆元素}}$$

由协变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(\mathbf{d} \cdot _) \phi_1$ 右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 $:\mathbf{dL} \text{id}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{dL}) \phi_1 = \mathbf{d}^\eta$ 。如此。

- $\eta : _ \text{Id} \xrightarrow{D \rightarrow D} \mathbf{L} \circ \mathbf{R}$ 构成自然变换。

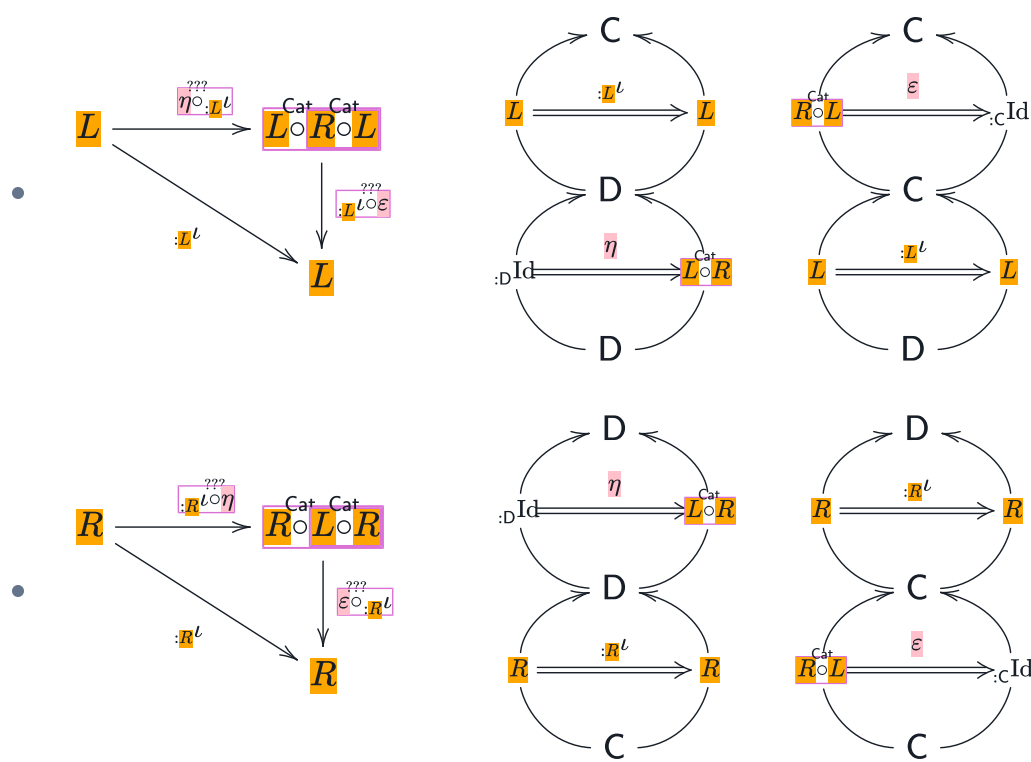
考虑任意 $g : \mathbf{d} \xrightarrow{D} \mathbf{d}'$ ：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{dL} \xrightarrow{C} \mathbf{dL} & \xrightarrow{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{dL}) \phi_1} & \mathbf{d} \xrightarrow{D} \mathbf{dLR} \\ \downarrow \mathbf{dL} \xrightarrow{C} g \mathbf{L} & & \downarrow \mathbf{d} \xrightarrow{D} g \mathbf{LR} \\ \mathbf{dL} \xrightarrow{C} \mathbf{d}' \mathbf{L} & \xrightarrow{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}' \mathbf{L}) \phi_1} & \mathbf{d} \xrightarrow{D} \mathbf{d}' \mathbf{LR} \\ \uparrow g \mathbf{L} \xrightarrow{C} \mathbf{d}' \mathbf{L} & & \uparrow g \mathbf{L} \xrightarrow{C} \mathbf{d}' \mathbf{L} \\ \mathbf{d}' \mathbf{L} \xrightarrow{C} \mathbf{d}' \mathbf{L} & \xrightarrow{(\mathbf{d}' \cdot \mathbf{d}' \mathbf{L}) \phi_1} & \mathbf{d}' \xrightarrow{D} \mathbf{d}' \mathbf{LR} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} :\mathbf{dL} \text{id} & \xrightarrow{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{dL}) \phi_1} & :\mathbf{dL} \text{id}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{dL}) \phi_1 = \mathbf{d}^\eta \\ \downarrow \mathbf{dL} \xrightarrow{C} g \mathbf{L} & & \downarrow \mathbf{d} \xrightarrow{D} g \mathbf{LR} = \mathbf{d} (_ \xrightarrow{D} g \mathbf{LR}) \\ g \mathbf{L} & \xrightarrow{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}' \mathbf{L}) \phi_1} & \mathbf{d}^\eta \circ g \mathbf{LR} = g \circ \mathbf{d}'^\eta \\ \uparrow g \mathbf{L} \xrightarrow{C} \mathbf{d}' \mathbf{L} & & \uparrow g \mathbf{L} \xrightarrow{C} \mathbf{d}' \mathbf{L} = (\mathbf{d}' \mathbf{LR}) (g \circ _) \\ :\mathbf{d}' \text{id} & \xrightarrow{(\mathbf{d}' \cdot \mathbf{d}' \mathbf{L}) \phi_1} & :\mathbf{d}' \text{id}(\mathbf{d}' \cdot \mathbf{d}' \mathbf{L}) \phi_1 = \mathbf{d}'^\eta \end{array}$$

上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图其实就是协变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

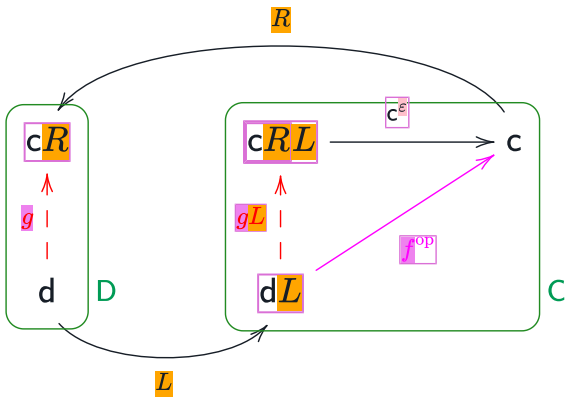
对于前面的 ε 和 η 我们有下述交换图成立：



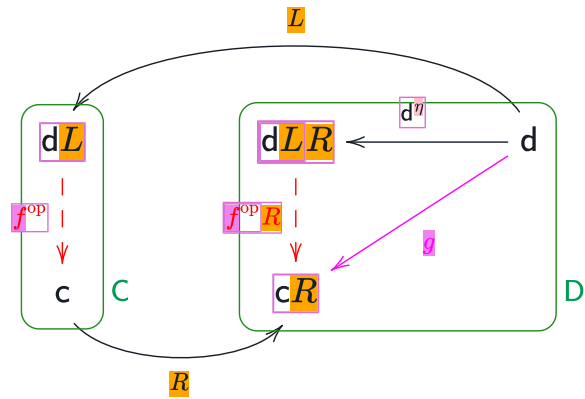
伴随函子的第二种定义

假设我们不知道 L 和 R 构成一对伴随函子并且有自然变换 $\varepsilon : R \circ L \xrightarrow{\text{Cat}} \text{Id}$ 和 $\eta : \text{Id} \xrightarrow{\text{D}} L \circ R$ 能同时满足上页开头的两幅交换图，那么

- 对任意 C 中对象 c
及任意 D 中对象 d
及任意 $f^{\text{op}} : dL \xrightarrow{C} c$ 始终存在
唯一的 $g : d \xrightarrow{D} cR$ 使下图交换。
如此有 $(dL \xrightarrow{C} c) \cong (d \xrightarrow{D} cR)$ 。



- 对任意 C 中对象 c
及任意 D 中对象 d
及任意 $g : d \xrightarrow{D} cR$ 始终都会存在
唯一的 $f^{\text{op}} : dL \xrightarrow{C} c$ 使下图交换。
如此有 $(dL \xrightarrow{C} c) \cong (d \xrightarrow{D} cR)$ 。



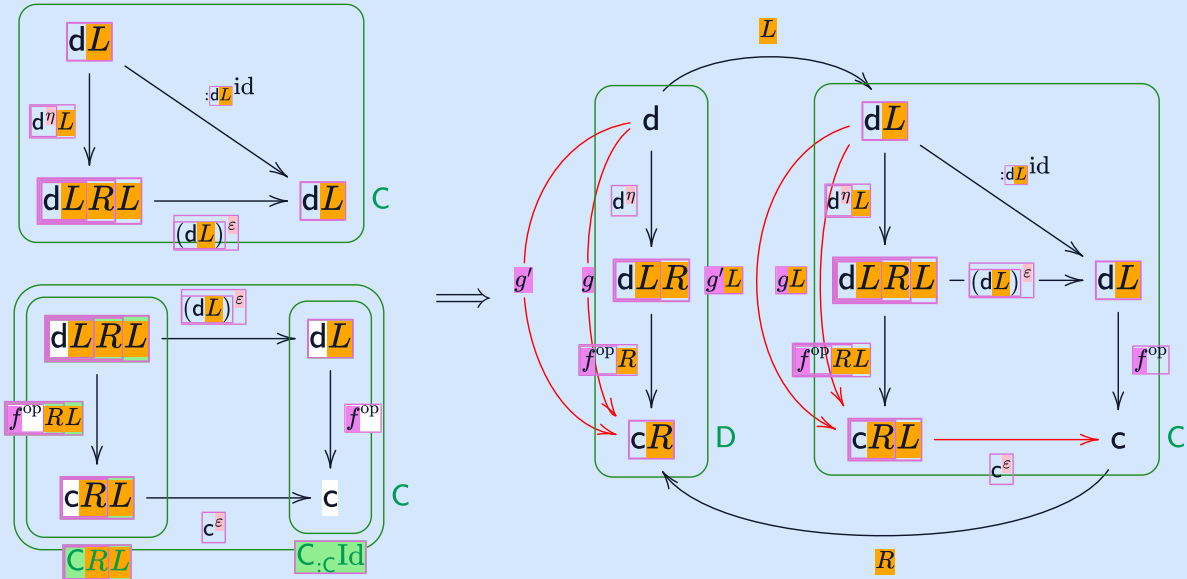
现证明上页的头两条定理。

我们将下图称作图 1。

图 1 上半部分即为上页第一幅图，而

图 1 下半部分可由 ε 为自然变换得出。

两图拼在一起即得图 1 右侧部分。

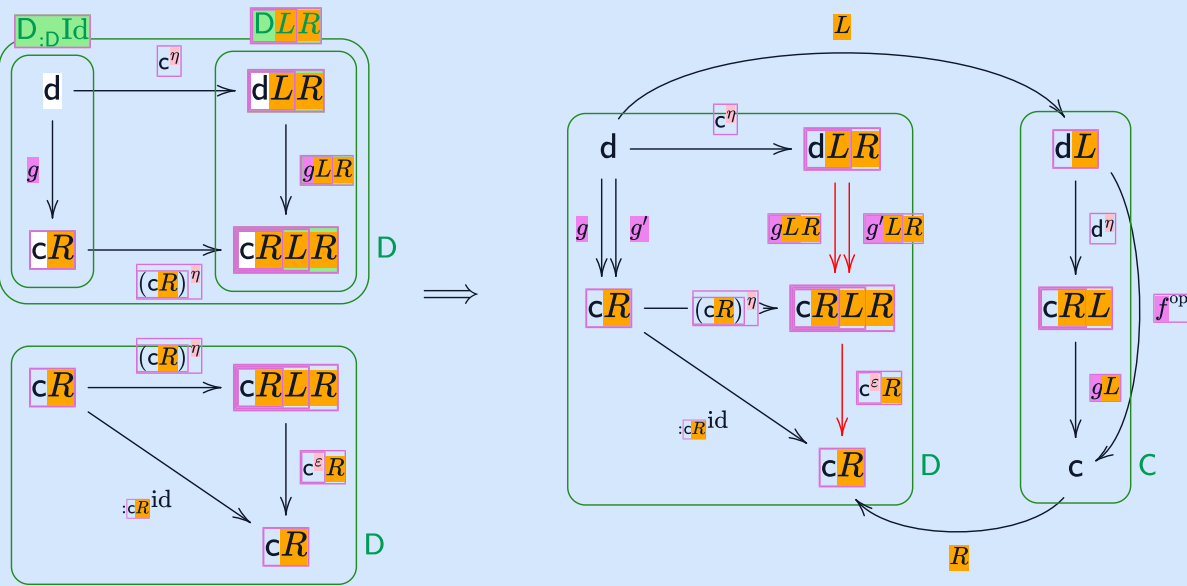


我们将下图称作图 2。

图 2 下半部分即为上页第二幅图，而

图 2 上半部分可由 η 为自然变换得出。

两图拼在一起即得图 2 右侧部分，即



为何 g 唯一呢？若 g' 亦满足上图——即图 1 右侧部分中两条 L 形走向的红色路径的复合结果是一致的，都为 f^{op} ；则图 2 右侧部分中的两条红色路径的复合结果也是一致的；如此根据下方右图即可得知 $g = g'$ 。

另一侧同理，这里不再赘述。

