08-09 函子和自然变换

$\LaTeX$ Definitions are here.

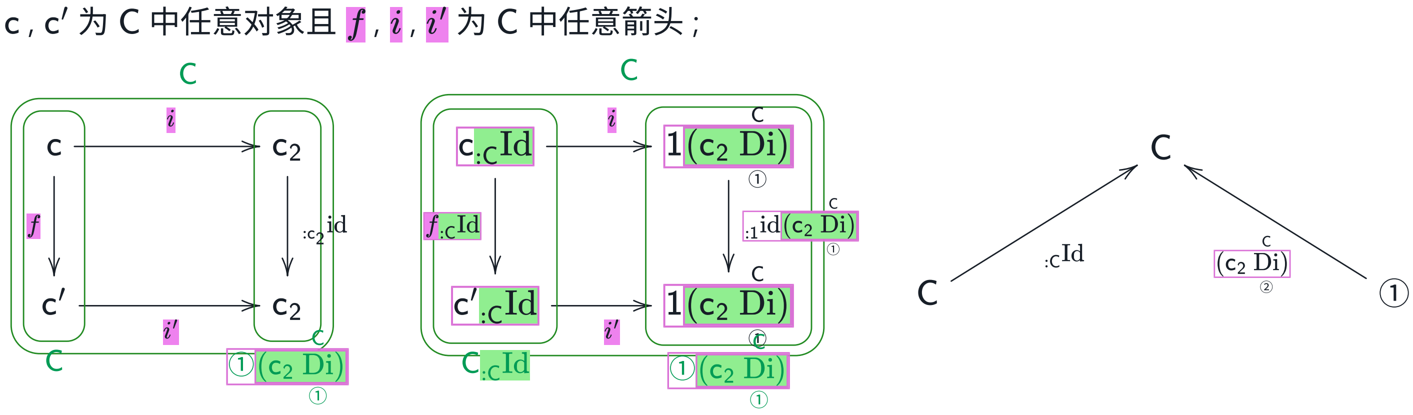
一些特殊的范畴

现在规定几种特殊的范畴。

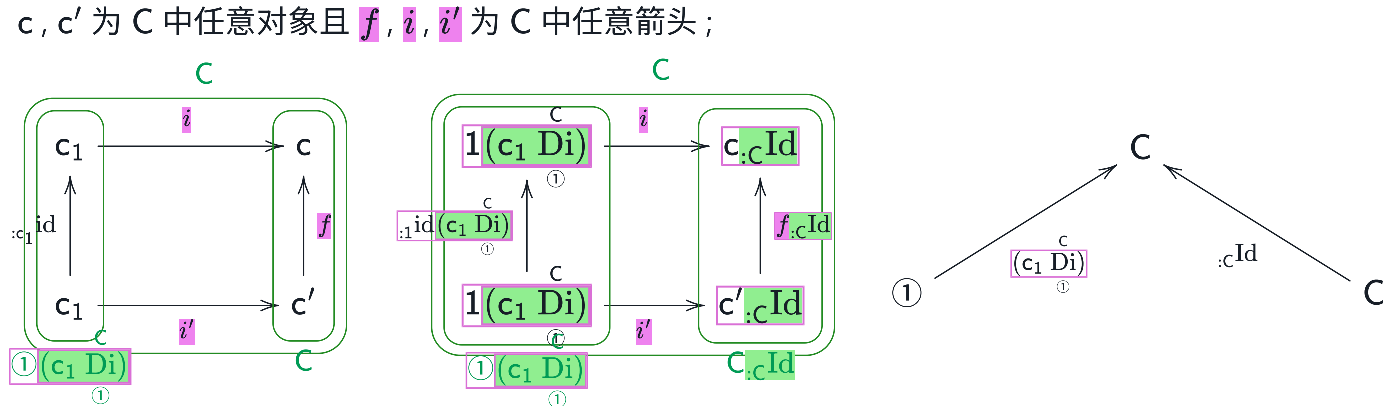
- **离散范畴**：只有对象不含箭头（恒等箭头除外）的范畴。
- Set：**所有集合构成的范畴**，为局部小范畴，满足
  - Set 中对象为任意集合；
  - Set 中箭头为集合间映射。
- Cat：**所有范畴构成的范畴**，满足
  - Cat 中任何对象都构成一个范畴；
  - Cat 中任何箭头都构成一个函子。

若 C，D 为 Cat 中对象，则：

- $\boxed{C^{\mathrm{op}}}$：**反范畴**，满足
  - $\boxed{C^{\mathrm{op}}}$ 中对象皆形如 c，
    c 为任意 C 中的对象；
  - $\boxed{C^{\mathrm{op}}}$ 中箭头皆形如 $\boxed{i^{\mathrm{op}}}$: $\boxed{c_2 \xrightarrow{\boxed{C^{\mathrm{op}}}} c_1}$，
    i : $\boxed{c_1 \xrightarrow{C} c_2}$ 可为任意 C 中的箭头。
- $\boxed{C \overset{\mathrm{Cat}}{\times} D}$：**积范畴**，满足
  - $\boxed{C \overset{\mathrm{Cat}}{\times} D}$ 中对象皆形如 $\boxed{c\,.\,d}$，
    c，d 分别为任意 C，D 中的对象；
  - $\boxed{C \overset{\mathrm{Cat}}{\times} D}$ 中箭头皆形如 $\boxed{i\,.\,j}$，
    i，j 分别为任意 C，D 中的箭头。
- $\boxed{C \xrightarrow{\mathrm{Cat}} D}$：**所有 C 到 D 的函子的范畴**，满足
  - $\boxed{C \xrightarrow{\mathrm{Cat}} D}$ 中任何对象
    都是 C 到 D 的函子；
  - $\boxed{C \xrightarrow{\mathrm{Cat}} D}$ 中任何箭头
    都是函子间自然变换。
- C/c：**俯范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
  - C/c_2 中对象皆形如 $\boxed{\cancel{c\,.\,1}\,.\,i}$，其中 c 和
    i : $\boxed{c \xrightarrow{C} c_2}$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
  - c_2/C 中箭头皆形如 $\boxed{f\,\cancel{.\,{}_{:c_2}\mathrm{id}}}$ 且满足下述交换图，其中
    c，c′ 为 C 中任意对象且 f，i，i' 为 C 中任意箭头；



- c_1/C：**仰范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
  - c_1/C 中对象皆形如 $\boxed{\cancel{1\,.\,c}\,.\,i}$，其中 c 和
    i : $\boxed{c_1 \xrightarrow{C} c}$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
  - C/c_1 中箭头皆形如 $\boxed{\cancel{{}_{:c_1}\mathrm{id}}\,.\,f}$ 且满足下述交换图，其中
    c，c′ 为 C 中任意对象且 f，i，i' 为 C 中任意箭头；



函子

接下来我们来提供函子的正式定义：

- $F : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为**函子**当且仅当
  - 对任意 C 中对象 c，cF 为 D 中对象且 $_{:c}\mathrm{id}F = {}_{:cF}\mathrm{id}$；
  - 对任意 C 中箭头 $i_1 : c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2$ 和 $i_2 : c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_3$，始终都有等式 $(i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2)F = i_1F \overset{\mathsf{D}}{\circ} i_2F$ 成立。

函子的复合运算

若已确信 $F : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为函子并
且还知道 $G : \mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$ 为函子则

- $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$
  也构成一个函子。

恒等函子

对于函子我们也有恒等映射，即：

- $$\begin{aligned} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id} \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} F &= F \\ &= F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id} \end{aligned}$$

忠实，完全和本质满函子

若 C，D，E 皆为**局部小范畴**，则

- F 是**忠实的**当且仅当对任意 C 中的对象 c_1, c_2，$c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2$ 与 $c_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} c_2F$ 之间始终都存在单射；
- F 是**完全的**当且仅当对任意 C 中的对象 c_1, c_2，$c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2$ 与 $c_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} c_2F$ 之间始终都存在满射；
- F 是**完全忠实的**当且仅当任意 C 中对象 c_1, c_2，$c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2$ 与 $c_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} c_2F$ 之间始终都存在双射。

> ⓘ **Note**
>
> 刚才提到的“单/满/双射”
> 针对的都是范畴的箭头部分。

- F 是**本质满的**当且仅当对任意 D 中对象 d 都存在 C 中对象 c 使 $cF \xrightarrow{\mathsf{D}} d$ 之间有双射。

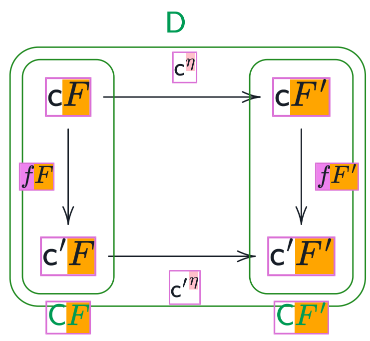
根据刚才的信息我们不难得知

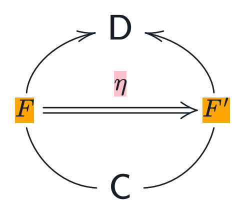
- 若 F, G 为忠实函子
  则 $G \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为忠实函子；
- 若 F, G 为完全函子
  则 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为完全函子；
- 若 F, G 为完全忠实函子
  则 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为完全忠实函子；
- 若 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为完全忠实函子
  且知道 G 为完全忠实函子
  则可知 F 为完全忠实函子；
- 若 F, G 为本质满函子
  则 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为本质满函子。

自然变换

如果还知道 F' : $\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为函子，那么

- $\eta : F \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{D}}} F'$ 为自然变换当且仅当对任意 C 中对象 c , c' 始终都会有下述交换图成立：

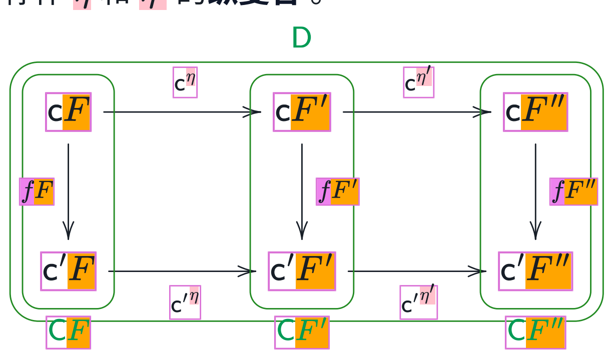


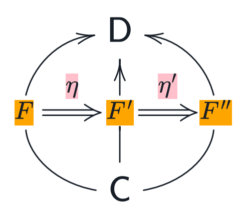


自然变换的复合

若已知 $\eta : F \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{D}}} F'$ 构成自然变换且
还知道 $\eta' : F' \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{D}}} F''$ 为自然变换则

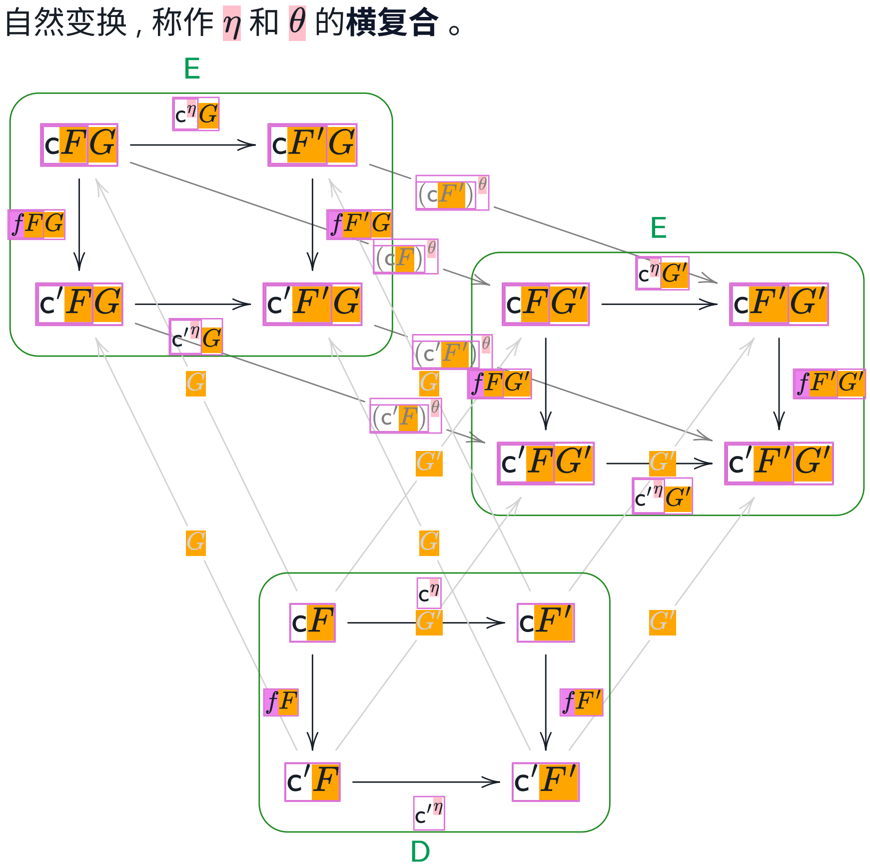
- $\eta \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{D}}}{\circ} \eta' : F \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{D}}} F''$ 为自然变换，
  称作 η 和 η' 的**纵复合**。

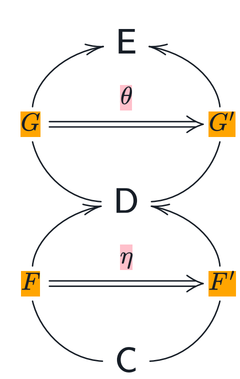




如果还知道 G' : $\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$ 也是个函子
及自然变换 $\theta : G \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{D}\longrightarrow\mathsf{E}}} G'$ 那么便有

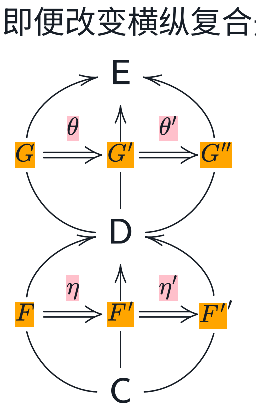
- $\eta \circ \theta : F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{E}}} F' \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G'$ 为
  自然变换，称作 η 和 θ 的**横复合**。





若 $\theta' : G' \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{D}\longrightarrow\mathsf{E}}} G''$ 为自然变换则

- $(\eta \circ \theta) \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{E}}}{\circ} (\eta' \circ \theta') = (\eta \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{D}}}{\circ} \eta') \circ (\theta \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{D}\longrightarrow\mathsf{E}}}{\circ} \theta')$ ，
  即便改变横纵复合先后顺序也不影响最终结果。

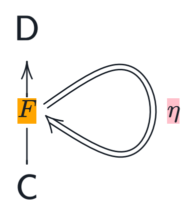


恒等自然变换

同样对于自然变换也有恒等映射。

- ${}_{:F}\iota : \overset{\overset{\mathrm{Cat}}{\mathrm{C}\longrightarrow\mathrm{D}}}{F \longrightarrow F}$ 为恒等自然变换当且仅当
  对范畴 C 中任意对象 c 都有下述交换图成立：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{c}F \arrow[r, "\mathrm{c}\eta =_{:(\mathrm{c}F)} \mathrm{id}"] \arrow[d, "fF"'] & \mathrm{c}F \arrow[d, "fF"] \\
\mathrm{c}'F \arrow[r, "\mathrm{c}'\eta =_{:(\mathrm{c}'F)} \mathrm{id}"'] & \mathrm{c}'F \\
\mathrm{C}F & \mathrm{C}F
\end{tikzcd}$$



自然同构

自然同构与你想象中的同构不太像。

- $\eta : \overset{\overset{\mathrm{Cat}}{\mathrm{C}\longrightarrow\mathrm{D}}}{F \longrightarrow F'}$ 为**自然同构**当且仅当
  $\mathrm{c}\eta$ 总是同构，这里 c 为任意 C 中对象。

  此时 F，F' 的关系可用 $\overset{\overset{\mathrm{Cat}}{\mathrm{C}\longrightarrow\mathrm{D}}}{F \cong F'}$ 表示

范畴等价的定义

我们用自然同构来定义范畴的等价。

- $\mathrm{C} \overset{\mathrm{Cat}}{\cong} \mathrm{D}$ 当且仅当
  存在函子 $F : \mathrm{C} \overset{\mathrm{Cat}}{\longrightarrow} \mathrm{D}$ 及 $F' : \mathrm{D} \overset{\mathrm{Cat}}{\longrightarrow} \mathrm{C}$
  使 $\underset{\overset{\mathrm{Cat}}{\mathrm{C}\longrightarrow\mathrm{C}}}{F \overset{\mathrm{Cat}}{\circ} F'} \cong {}_{:\mathrm{C}}\mathrm{id}$ 并且有 $\underset{\overset{\mathrm{Cat}}{\mathrm{D}\longrightarrow\mathrm{D}}}{F' \overset{\mathrm{Cat}}{\circ} F} \cong {}_{:\mathrm{D}}\mathrm{id}$。

米田引理

反变米田引理的陈述如下：

$$\underbrace{\left(\left(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2\right) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} F\right)}_{一堆自然变换} \overset{\mathsf{C}}{\cong} \underbrace{\left(c_2 F\right)}_{一堆元素}$$

反变米田引理的证明如下：

1. $\Leftarrow$: 考虑任意 $(c_2 F)$ 中的 etc : 根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图
我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_2} , 于是便可构建一个完整的 η_2 。
易知 η_2 是一个自然变换 。

Set

$$\begin{tikzcd}
c \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2"'] & cF \arrow[d, "fF"] \\
c' \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c'F
\end{tikzcd}$$

$\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2$ $\qquad$ $\mathsf{C}F$

2. $\Rightarrow$: 考虑任意等式左侧的 η_1 : 若上述交换图成立
则可对任意 η_1 指派 $\mathrm{etc} = {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 为 $c_2 F$ 中与之对应的元素；

$$\begin{tikzcd}
c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2"'] & c_2 F \arrow[d, "fF"] \\
c' \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c'F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:c_2}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2"'] & {}_{:c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2}) \arrow[d, "fF"] \\
f \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & \mathrm{etc}(fF)
\end{tikzcd}$$

为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
c_2 唯一地确定了 η_2 , 反之 η_2 页唯一确定了 c_2 。

协变米田引理的陈述如下：

$$\underbrace{\left(\left(c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_\right) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} F\right)}_{一堆自然变换} \overset{\mathsf{C}}{\cong} \underbrace{\left(c_1 F\right)}_{一堆元素}$$

协变米田引理的证明如下：

1. $\Leftarrow$: 考虑任意 $(c_1 F)$ 中的 etc : 根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图
我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_1} , 于是便可构建一个完整的 η_1 。
易知 η_1 是一个自然变换 。

Set

$$\begin{tikzcd}
c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} f"'] & cF \arrow[d, "fF"] \\
c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c'F
\end{tikzcd}$$

$c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{C}$ $\qquad$ $\mathsf{C}F$

2. $\Rightarrow$: 考虑任意等式左侧的 η_1 : 若上述交换图成立
则可对任意 η_1 指派 $\mathrm{etc} = {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 为 $c_1 F$ 中与之对应的元素；

$$\begin{tikzcd}
c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_1 \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} f"'] & c_1 F \arrow[d, "fF"] \\
c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c'F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:c_1}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} f"'] & {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1}) \arrow[d, "fF"] \\
f \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & \mathrm{etc}(fF)
\end{tikzcd}$$

为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
c_1 唯一地确定了 η_1 , 反之 η_1 页唯一确定了 c_1 。