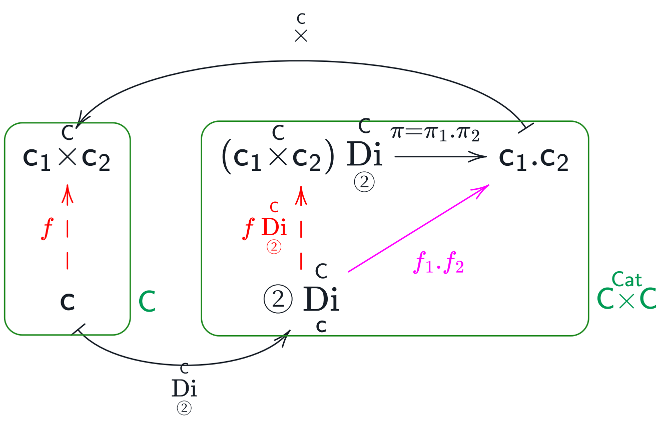
04-05 类型的和与积

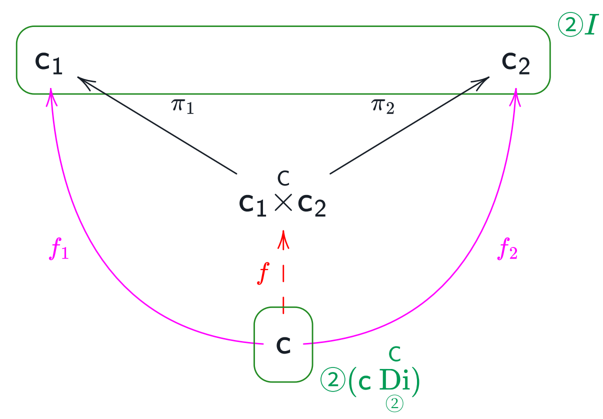
LaTeX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times} : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$ 在范畴 C 中有如下性质：

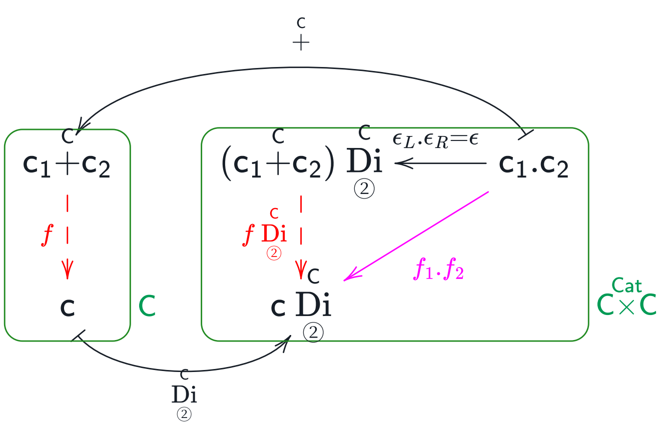
- $(\mathsf{c} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1) \overset{\mathsf{Set}}{\times} (\mathsf{c} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \mathsf{c} \overset{\mathsf{C}}{\to} (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2)$
—— c 为任意 C 中对象。此即为积的
泛性质，亦为**指数对乘法的分配律**。

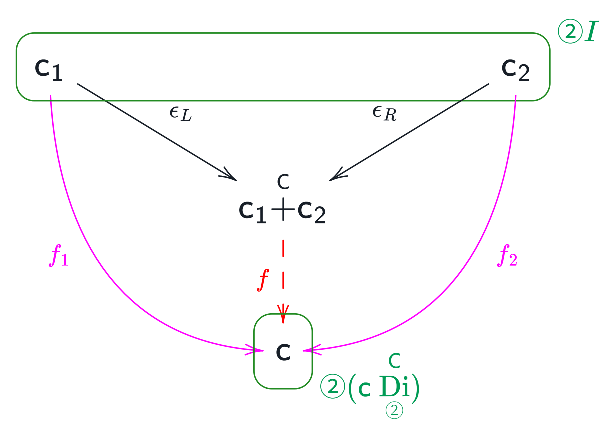




默认函子 $\overset{\mathsf{C}}{+} : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$ 在范畴 C 中有如下性质：

- $(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \overset{\mathsf{Set}}{\times} (\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2) \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$
—— c 为任意 C 中对象。此即为和的
泛性质，亦为**指数对加法的分配律**。



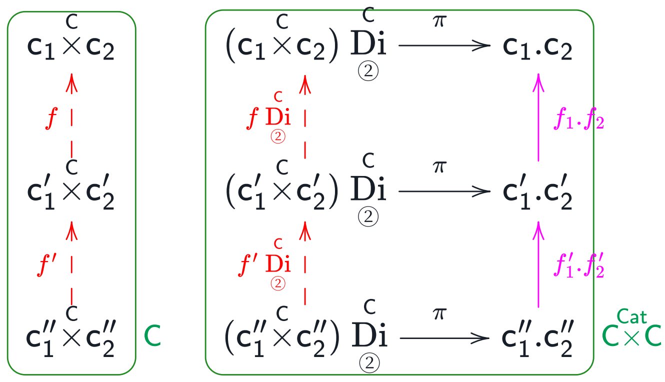


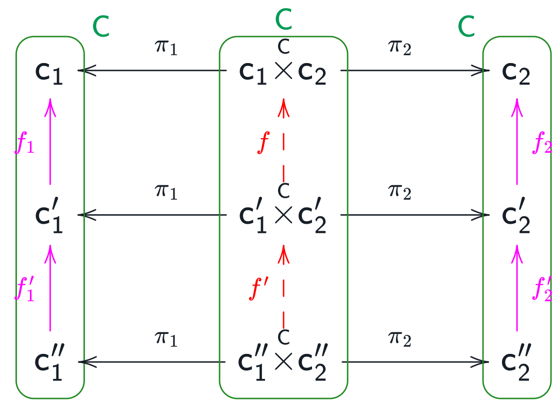
> ⓘ **Note**
>
> 在上面的插图中
>
> - $\underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C}$ 为对角函子满足
> $\mathsf{c} \longmapsto \mathsf{c} \,.\, \mathsf{c}$
> - $\underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} (② \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C})$
> $\mathsf{c} \longmapsto$ 常值函子
> $\mathsf{c}\ \underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} :\ ② \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$
> $1 \longmapsto \mathsf{c}$
> $2 \longmapsto \mathsf{c}$
>   即为对角函子的第二种等价的定义。
>   ② 为仅含两个对象的范畴，在此则
>   作为一个指标范畴。1 和 2 分别为
>   其中的对象。
> - $I : ② \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$ 为函子，满足
> $1 \longmapsto \mathsf{c}_1$
> $2 \longmapsto \mathsf{c}_2$
> - 不难看出上图中
> $\pi : I \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} ((\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2)\ \underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}})$
> $\epsilon : ((\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2)\ \underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}) \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} I$
>   都构成自然变换

函子性

如何证明 $\overset{C}{\times}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{C}{\times} : ({}_{:c_1'}\mathrm{id} \,.\, {}_{:c_2'}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:c_1' \overset{C}{\times} c_2'}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{C}{\times}$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{C}{\times} : (f_1' \overset{C}{\circ} f_1 \,.\, f_2' \overset{C}{\circ} f_2) \longmapsto f' \overset{C}{\circ} f$
  —— 即函子 $\overset{C}{\times}$ 保持**箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：



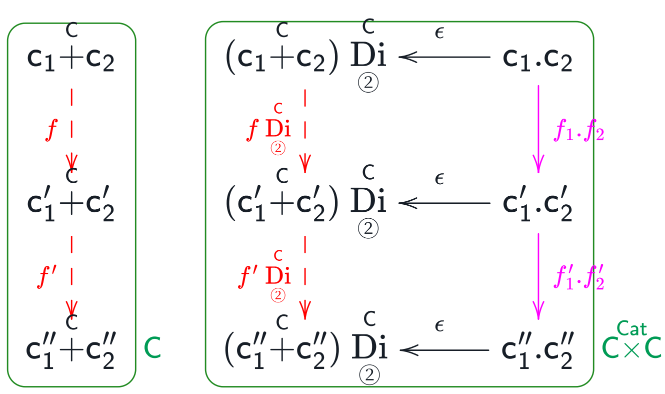


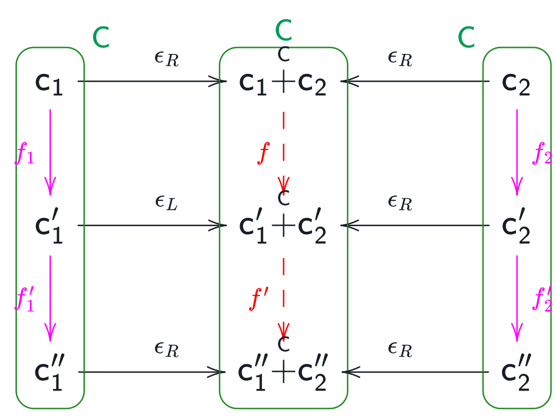
另外我们规定 $\overset{C}{\times}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{C}{\times} : f_1 \,.\, c_2 \longmapsto f_1 \overset{C}{\times} {}_{:c_2}\mathrm{id}$
  $\overset{C}{\times} : c_1 \,.\, f_2 \longmapsto {}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{C}{\times} f_2$

如何证明 $\overset{C}{+}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{C}{+} : ({}_{:c_1}\mathrm{id} \,.\, {}_{:c_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:c_1 \overset{C}{+} c_2}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $+$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{C}{+} : (f_1 \overset{C}{\circ} f_1' \,.\, f_2 \overset{C}{\circ} f_2') \longmapsto f \overset{C}{\circ} f'$
  —— 即函子 $\overset{C}{\times}$ 保持**箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：





另外我们规定 $\overset{C}{+}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{C}{+} : f_1 \,.\, c_2 \longmapsto f_1 \overset{C}{+} {}_{:c_2}\mathrm{id}$
  $\overset{C}{+} : c_1 \,.\, f_2 \longmapsto {}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{C}{+} f_2$

运算性质

对于函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 我们不难得知

- $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} 1 \overset{\mathsf{C}}{\cong} \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} 1 \overset{\mathsf{C}}{\cong} \mathsf{c}_1$
  —— 乘法具有**幺元** 1 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \ . \ _{:\mathsf{c}}!$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd} (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} 1)\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & \mathsf{c}_1.1 \\ \mathsf{c}\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_1 ._{:\mathsf{c}}!"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathsf{c}_1\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "{}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}._{:\mathsf{c}_1}!"] & \mathsf{c}_1.1 \\ \mathsf{c}\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f'\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_1 ._{:\mathsf{c}}!"'] & \end{tikzcd}$$

- $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\cong} \mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_1$
  —— 乘法具有**交换律** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \ . \ f_2$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd} (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2)\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & \mathsf{c}_1.\mathsf{c}_2 \\ \textcircled{2}\ \underset{\mathsf{c}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_1.f_2"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_1)\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & \mathsf{c}_2.\mathsf{c}_1 \\ \textcircled{2}\ \underset{\mathsf{c}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f'\ \underset{\textcircled{2}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_2.f_1"'] & \end{tikzcd}$$

- $(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2) \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_3 \overset{\mathsf{C}}{\cong} \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} (\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_3)$
  —— 乘法具有**结合律** 。
  下图有助于理解证明目标，即