02-03 范畴当中的箭头

$\LaTeX$ Definitions are here.

沿用上一节提到的自由变量。我们规定：

- $c_1 \overset{C}{\to} c_2 =$
  所有从 c_1 射向 c_2 的箭头构成的集。

> ⓘ **Note**
>
> 上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
> 其他范畴里 $c_1 \overset{C}{\to} c_2$ 未必构成集。

范畴 C 中特定的箭头可以进行复合运算：

- $$\begin{aligned} \overset{C}{\circ} : (c_1 \overset{C}{\to} c_2) \times (c_2 \overset{C}{\to} c_3) &\overset{Set}{\longrightarrow} (c_1 \overset{C}{\to} c_3) \\ (\quad i_1 \quad . \quad i_2 \quad) &\longmapsto (i_1 \overset{C}{\circ} i_2) \end{aligned}$$

如果我们还知道箭头 f_1，i，f_2 分别属于
$c_1' \overset{C}{\to} c_1$，$c_1 \overset{C}{\to} c_2$，$c_2 \overset{C}{\to} c_2'$ 那么便可知

- $(f_1 \overset{C}{\circ} i) \overset{C}{\circ} f_2 = f_1 \overset{C}{\circ} (i \overset{C}{\circ} f_2)$，
  即箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便可获得新的函数：

- $$\begin{aligned} (f_1 \overset{C}{\circ} \_) : (c_1 \overset{C}{\to} \_) &\overset{C \overset{Cat}{\longrightarrow} Set}{\longrightarrow} (c_1' \overset{C}{\to} \_) \\ i &\longmapsto (f_1 \overset{C}{\circ} i) \end{aligned}$$
  称作**前复合**。下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[drr, bend left, "{i : c_1 \overset{C}{\to} c_2}"] & & \\
\arrow[rr, phantom, "{\Downarrow\, c_2^{(f_1 \overset{C}{\circ} _)}}"] & & c_2 \arrow[loop right, "{:_{c_2}\mathrm{id}}"] \\
c_1' \arrow[uu, "f_1"] \arrow[urr, bend right, "{(f_1 \overset{C}{\circ} i) : c_1' \overset{C}{\to} c_2}"'] & &
\end{tikzcd}$$

- $$\begin{aligned} (\_ \overset{C}{\circ} f_2) : (\_ \overset{C}{\to} c_2) &\overset{C \overset{Cat}{\longrightarrow} Set}{\longrightarrow} (\_ \overset{C}{\to} c_2') \\ i &\longmapsto (i \overset{C}{\circ} f_1) \end{aligned}$$
  称作**后复合**。 下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd}
 & & c_2 \arrow[dd, "f_2"] \\
c_1 \arrow[loop left, "{:_{c_1}\mathrm{id}}"] \arrow[urr, bend left, "{i : c_1 \overset{C}{\to} c_2}"] \arrow[drr, bend right, "{(i \overset{C}{\circ} f_2) : c_1 \overset{C}{\to} c_2'}"'] \arrow[rr, phantom, "{\Downarrow\, c_1^{(_ \overset{C}{\circ} f_2)}}"] & & \\
 & & c_2'
\end{tikzcd}$$

根据上面的定义不难得出下述结论：

- $(f_1 \overset{C}{\circ} \_) \overset{C \overset{Cat}{\longrightarrow} Set}{\circ} (\_ \overset{C}{\circ} f_2) = (\_ \overset{C}{\circ} f_2) \overset{C \overset{Cat}{\longrightarrow} Set}{\circ} (f_1 \overset{C}{\circ} \_)$
  复合运算具有**结合律**，即后面提到的**自然性**；
- $(\_ \overset{C}{\circ} i) \overset{C \overset{Cat}{\longrightarrow} Set}{\circ} (\_ \overset{C}{\circ} f_2) = (\_ \overset{C}{\circ} (i \overset{C}{\circ} f_2))$
  前复合与复合运算的关系
- $(i \overset{C}{\circ} \_) \overset{C \overset{Cat}{\longrightarrow} Set}{\circ} (f_1 \overset{C}{\circ} \_) = ((f_1 \overset{C}{\circ} i) \overset{C}{\circ} \_)$
  后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。
假如 a_1 为 c_1 的全局元素则可规定

- $c_1 i = c_1 \overset{C}{\circ} i$

恒等箭头

范畴 C 内的每个对象都有恒等映射：

- $${}_{:c_1}\mathrm{id} : \boxed{c_1 \overset{C}{\to} c_1}$$
  $$c_1 \mapsto c_1$$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- $$\boxed{{}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{C}{\circ} i} = i$$
  $$= \boxed{i \overset{C}{\circ} {}_{:c_2}\mathrm{id}}$$

此外还可以得知

- $\boxed{({}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{C}{\circ} \_)} : \boxed{(c_1 \overset{C}{\to} \_)} \xrightarrow{\boxed{C \longrightarrow \mathsf{Set}}^{\mathsf{Cat}}} \boxed{(c_1 \overset{C}{\to} \_)}$
  为恒等自然变换，可记成是 ${}_{:\boxed{(c_1 \overset{C}{\longrightarrow} \_)}}\mathrm{id}$；
- $\boxed{(\_ \overset{C}{\circ} {}_{:c_2}\mathrm{id})} : \boxed{(\_ \overset{C}{\to} c_2)} \xrightarrow{\boxed{C \longrightarrow \mathsf{Set}}^{\mathsf{Cat}}} \boxed{(\_ \overset{C}{\to} c_2)}$
  为恒等自然变换，可记成是 ${}_{:\boxed{(\_ \overset{C}{\longrightarrow} c_2)}}\mathrm{id}$。

单满态以及同构

接下来给出单 / 满态和同构的定义。

- i 为**单态**当且仅当对任意 c_1'
  若有 $f_1, f_1' : \boxed{c_1' \overset{C}{\to} c_1}$ 满足 $\boxed{f_1 \overset{C}{\circ} i} = \boxed{f_1' \overset{C}{\circ} i}$
  则有 $f_1 = f_1'$。详情见下图：

$$\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[rr, bend left, "i:\boxed{c_1 \overset{C}{\longrightarrow} c_2}"] & \arrow[d, phantom, "\boxed{c_2^{\boxed{(f_1 \overset{C}{\circ} _)}}}"] & c_2 \arrow[loop right, "{}_{:c_2}\mathrm{id}"] \\
c_1' \arrow[u, shift right, "f_1"] \arrow[u, shift left, "f_1'"'] \arrow[urr, bend right, "\boxed{(f_1 \overset{C}{\circ} i)}:\boxed{c_1' \overset{C}{\longrightarrow} c_2}"'] & {} &
\end{tikzcd}$$

- i 为**满态**当且仅当对任意 c_2'
  若有 $f_2, f_2' : \boxed{c_2 \overset{C}{\to} c_2'}$ 满足 $\boxed{i \overset{C}{\circ} f_2} = \boxed{i \overset{C}{\circ} f_2'}$
  则有 $f_2 = f_2'$。详情见下图：

$$\begin{tikzcd}
 & \arrow[d, phantom, "\boxed{c_1^{\boxed{(_ \overset{C}{\circ} f_2)}}}"] & c_2 \arrow[d, shift right, "f_2'"'] \arrow[d, shift left, "f_2"] \\
c_1 \arrow[loop left, "{}_{:c_1}\mathrm{id}"] \arrow[urr, bend left, "i:\boxed{c_1 \overset{C}{\longrightarrow} c_2}"] \arrow[rr, bend right, "\boxed{(i \overset{C}{\circ} f_2)}:\boxed{c_1 \overset{C}{\longrightarrow} c_2'}"'] & {} & c_2'
\end{tikzcd}$$

- i 为**同构**当且仅当存在 i' : $\boxed{c_2 \overset{C}{\to} c_1}$
  使得 $\boxed{i \overset{C}{\circ} i'} = {}_{:c_1}\mathrm{id}$ 且 $\boxed{i' \overset{C}{\circ} i} = {}_{:c_2}\mathrm{id}$。
  此时 c_1, c_2 间的关系可记作 $\boxed{c_1 \cong c_2}$。

若还知道 $i = i_1$ 且 $i_2 : \boxed{c_2 \overset{C}{\to} c_3}$ 则有

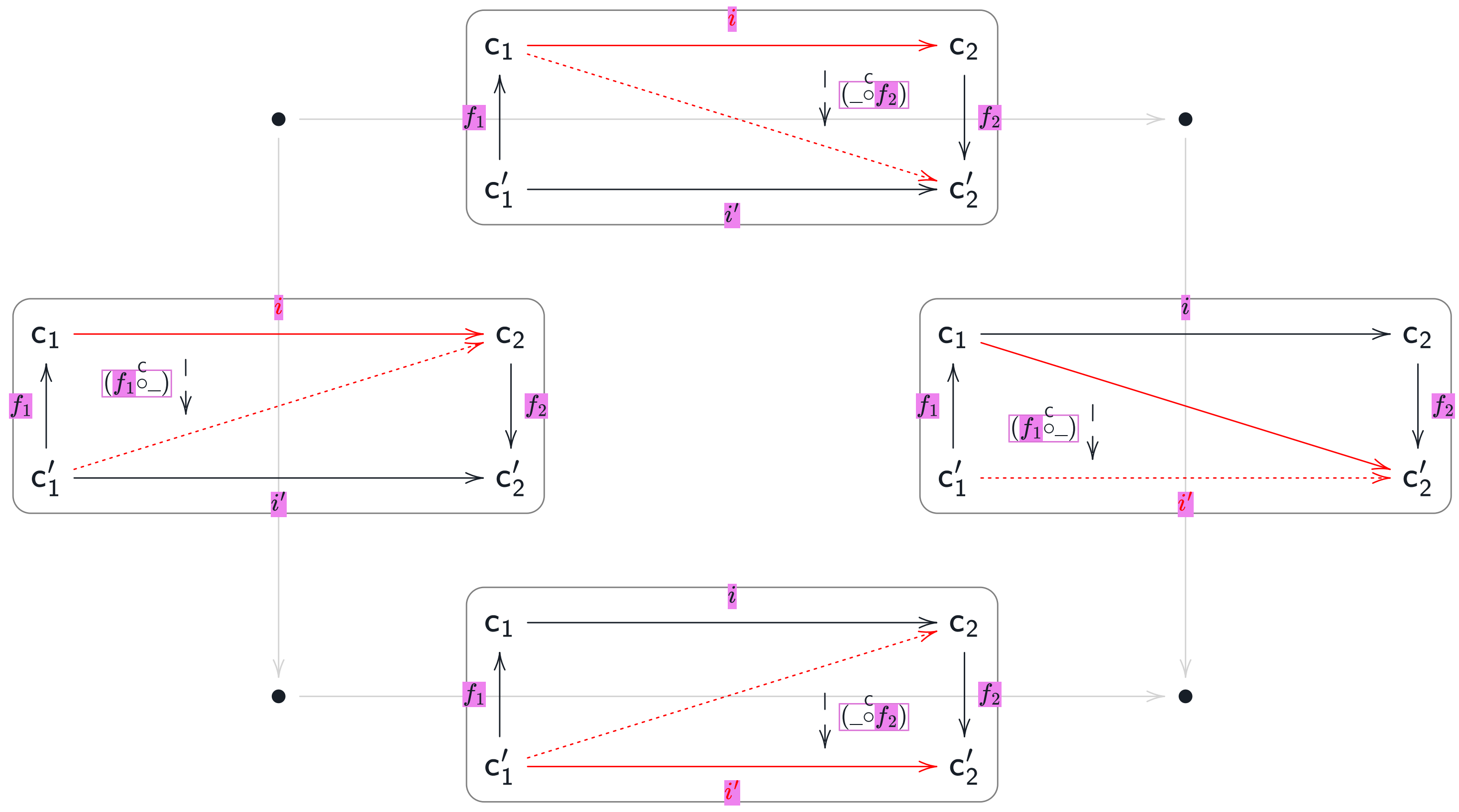
- 若 i_1 , i_2 为单态 / 满态 / 同构
  则 $\boxed{i_1 \overset{C}{\circ} i_2}$ 为单态 / 满态 / 同构；
- 若 $\boxed{i_1 \overset{C}{\circ} i_2}$ 为同构
  且 i_1 , i_2 中有一个为同构
  则 i_1 , i_2 两者皆构成同构。

不仅如此我们还可以得出下述结论：

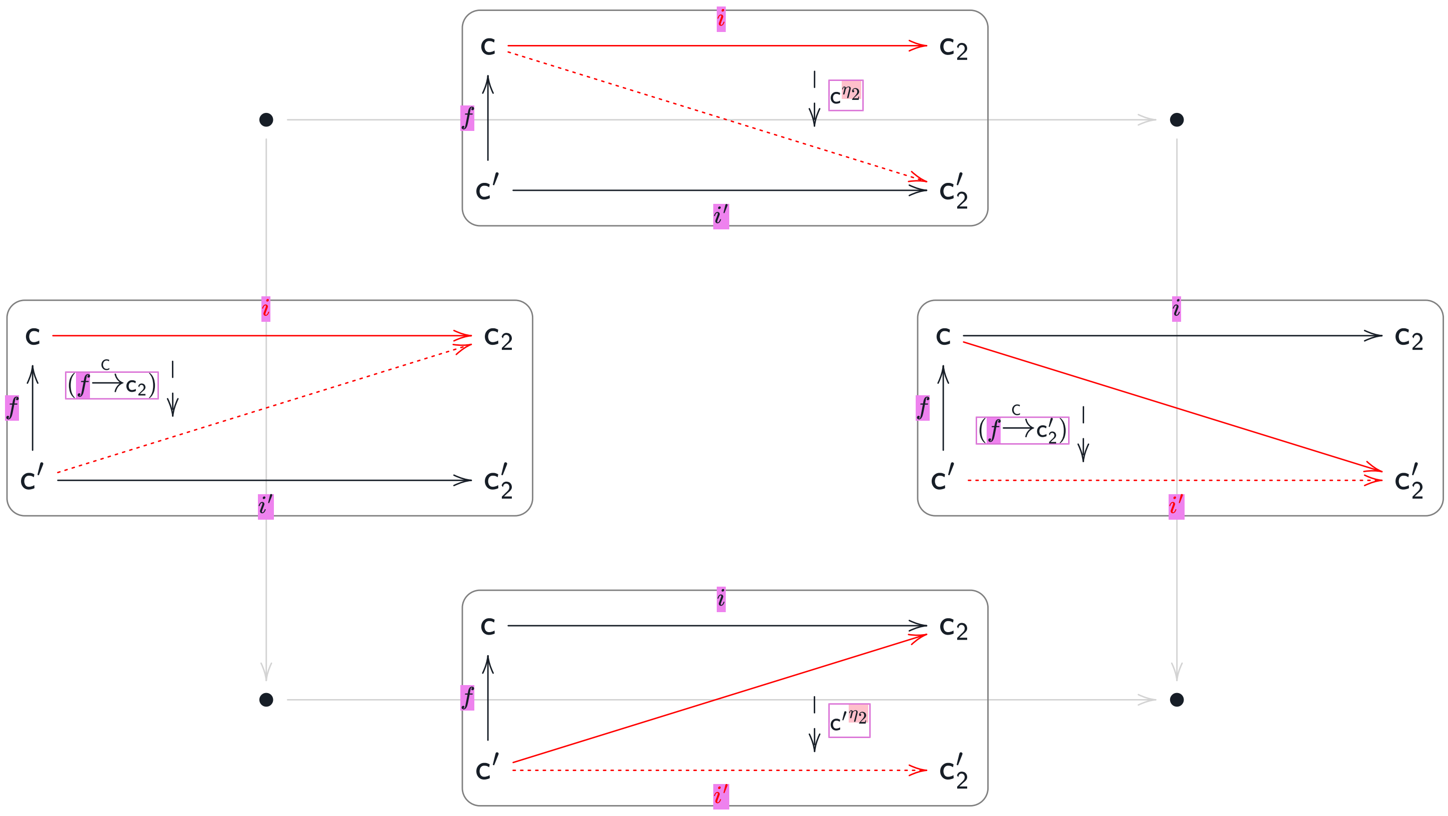
- c_1 为单态，
  由 ${}_{:c_1}!$ 的唯一性可知；
- ${}_{:0}! = {}_{:1}¡$ 为同构，
  因为 $\boxed{0 \overset{C}{\to} 0} = \{{}_{:0}\mathrm{id}\}$
  并且 $\boxed{1 \overset{C}{\to} 1} = \{{}_{:1}\mathrm{id}\}$

同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释 。
后面会将自然性进行进一步推广 。



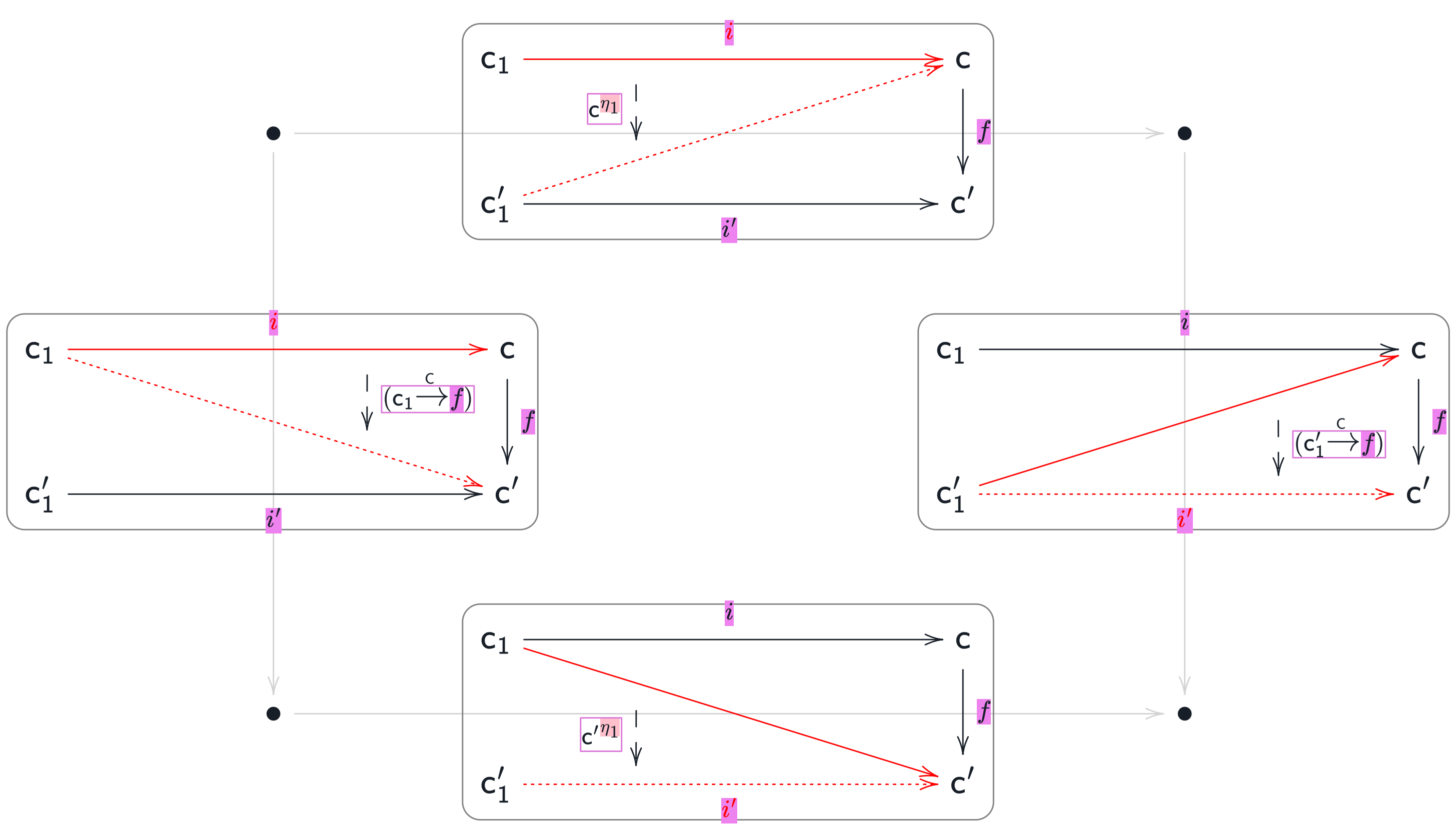
现提供自然变换 η_2 满足自然性 —— 即对
任意 C 中对象 c, c' 以及
任意 C 中映射 $f : (c' \xrightarrow{\mathsf{C}} c)$
都有 $(f \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2) \overset{\mathsf{Set}}{\circ} c'^{\eta_2} = c^{\eta_2} \overset{\mathsf{Set}}{\circ} (f \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2')$:



那么我们便会有下述结论 :

- $c_2 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c_2'$ 当且仅当对任意 C 中的对象 c
  c^{η_2} 都是同构 。此时称 η_2 为**自然同构** 。

现提供自然变换 η_1 满足自然性 —— 即对
任意 C 中对象 c, c' 以及
任意 C 中映射 $f : c \xrightarrow{\mathsf{C}} c'$
都有 $(c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} f) \overset{\mathsf{Set}}{\circ} c'^{\eta_1} = c^{\eta_1} \overset{\mathsf{Set}}{\circ} (c_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} f)$:



那么我们便会有下述结论 :

- $c_1 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c_1'$ 当且仅当对任意 C 中的对象 c
  c^{η_1} 都是同构 。此时称 η_1 为**自然同构** 。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为

$$
\begin{tikzcd}
& \mathrm{Set} & \\
c \xrightarrow{C} c_2 \arrow[rr, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & & c \xrightarrow{C} c'_2 \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c'_2"] \\
c' \xrightarrow{C} c_2 \arrow[rr, "c'^{\eta_2}"'] & & c' \xrightarrow{C} c'_2 \\
C \xrightarrow{C} c_2 & & C \xrightarrow{C} c'_2
\end{tikzcd}
$$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧 将 c 换成 c_2 ：

$$
\begin{tikzcd}
c_2 \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & c_2 \xrightarrow{C} c'_2 \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c'_2"] \\
c' \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c' \xrightarrow{C} c'_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:c_2}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & {}_{:c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2}) \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c'_2 = c_2'^{\overset{C}{(f\circ\_)}}"] \\
f \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & f \overset{C}{\circ} \mathrm{etc}
\end{tikzcd}
$$

为了方便就用 etc 表示 ${}_{:c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2})$ 。由上图
知 $f(c'^{\eta_2}) = (f \overset{C}{\circ} \mathrm{etc})$ 右图底部和右侧箭头，
故 $c'^{\eta_2} = c' \xrightarrow{C} \mathrm{etc}$ 注意到箭头 $f : c' \xrightarrow{C} c$ ；
而 $c'^{\eta_2} = c' \xrightarrow{C} \mathrm{etc} = c'^{(\_\overset{C}{\circ}\mathrm{etc})}$ 始终是同构
故 $\mathrm{etc} : c_2 \xrightarrow{C} c'_2$ 也是同构 。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在**米田嵌入**处会详细介绍 。

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为

$$
\begin{tikzcd}
& \mathrm{Set} & \\
c_1 \xrightarrow{C} c \arrow[rr, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & & c'_1 \xrightarrow{C} c \arrow[d, "c'_1 \xrightarrow{C} f"] \\
c_1 \xrightarrow{C} c' \arrow[rr, "c'^{\eta_1}"'] & & c'_1 \xrightarrow{C} c' \\
c_1 \xrightarrow{C} C & & c'_1 \xrightarrow{C} C
\end{tikzcd}
$$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧 将 c 换成 c_1 ：

$$
\begin{tikzcd}
c_1 \xrightarrow{C} c_1 \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & c'_1 \xrightarrow{C} c_1 \arrow[d, "c'_1 \xrightarrow{C} f"] \\
c_1 \xrightarrow{C} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c'_1 \xrightarrow{C} c'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:c_1}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1}) \arrow[d, "c'_1 \xrightarrow{C} f = c_1'^{\overset{C}{(\_\circ f)}}"] \\
f \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & \mathrm{etc} \overset{C}{\circ} f
\end{tikzcd}
$$

为了方便就用 etc 表示 ${}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 。由上图
知 $f(c'^{\eta_1}) = (\mathrm{etc} \overset{C}{\circ} f)$ 右图底部和右侧箭头，
故 $c'^{\eta_1} = \mathrm{etc} \xrightarrow{C} c'$ 注意到箭头 $f : c \xrightarrow{C} c'$;
而 $c'^{\eta_1} = \mathrm{etc} \xrightarrow{C} c' = c'^{(\mathrm{etc}\overset{C}{\circ}\_)}$ 始终是同构
故 $\mathrm{etc} : c_1 \xrightarrow{C} c'_1$ 也是同构 。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在**米田嵌入**处会详细介绍 。