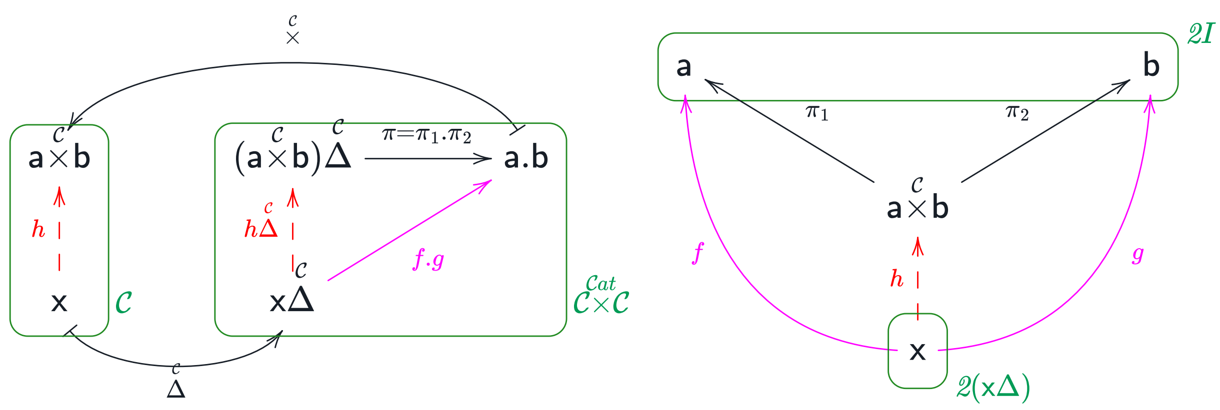
章节 04 - 05 类型的积与和

LaTeX Definitions are here.

积与和的泛性质

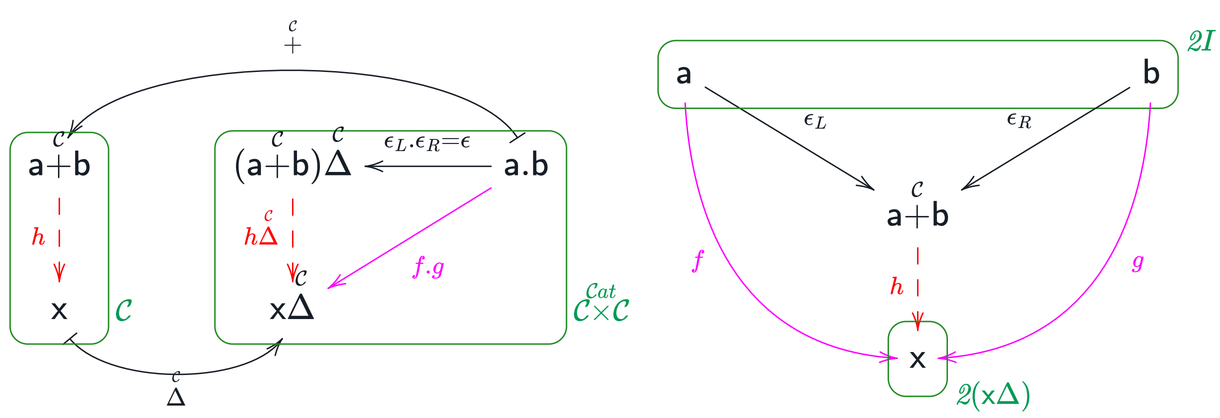
默认函子 $\overset{\mathcal{C}}{\times} : \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow} \mathcal{C}$ 在范畴 $\mathcal{C}$ 中有下述性质：

- $(x \overset{\mathcal{C}}{\to} a) \overset{\mathcal{S}et}{\times} (x \overset{\mathcal{C}}{\to} b) \cong (x \overset{\mathcal{C}}{\to} (a \overset{\mathcal{C}}{\times} b))$，x 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象 。
  —— **泛性质**，指数对乘法的分配律 。下图便于形象理解：



默认函子 $\overset{\mathcal{C}}{+} : \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow} \mathcal{C}$ 在范畴 $\mathcal{C}$ 中有下述性质：

- $(a \overset{\mathcal{C}}{\to} x) \overset{\mathcal{S}et}{\times} (b \overset{\mathcal{C}}{\to} x) \cong ((a \overset{\mathcal{C}}{+} b) \overset{\mathcal{C}}{\to} x)$，x 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象 。
  —— **泛性质**，指数对加法的分配律 。下图便于形象理解：

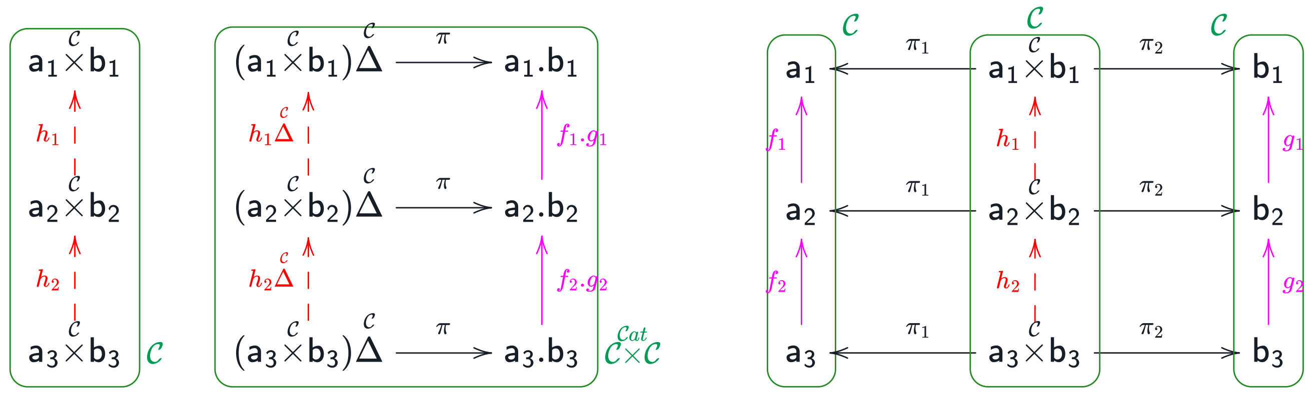


> **Note**
>
> 在上面的插图中：
>
> - $\overset{\mathcal{C}}{\Delta} : \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow} \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{C}$ 为对角函子，满足
> $\Delta : c \longmapsto c\,.\,c$
> - $I : \mathcal{2} \overset{\mathcal{C}at}{\longrightarrow} \mathcal{C}$ 为函子，满足
> $I : 1 \longmapsto a$
> $\quad 2 \longmapsto b$
> $\mathcal{2}$ 为只有两个对象的范畴，
>   1 和 2 分别为其中的对象 。
>   这里 $\mathcal{2}$ 充当一个指标范畴 。

积与和的函子性

如何证明 $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathcal{C}}{\times} : ({}_{:\mathsf{a}_2}\mathrm{id}\ .\ {}_{:\mathsf{b}_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:\mathsf{a}_2 \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{b}_2}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ **保持恒等箭头**；
- $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (f_2 \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_1\ .\ g_2 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) \mapsto h_2 \overset{\mathcal{C}}{\circ} h_1$
  —— 即函子 $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ **保持箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：

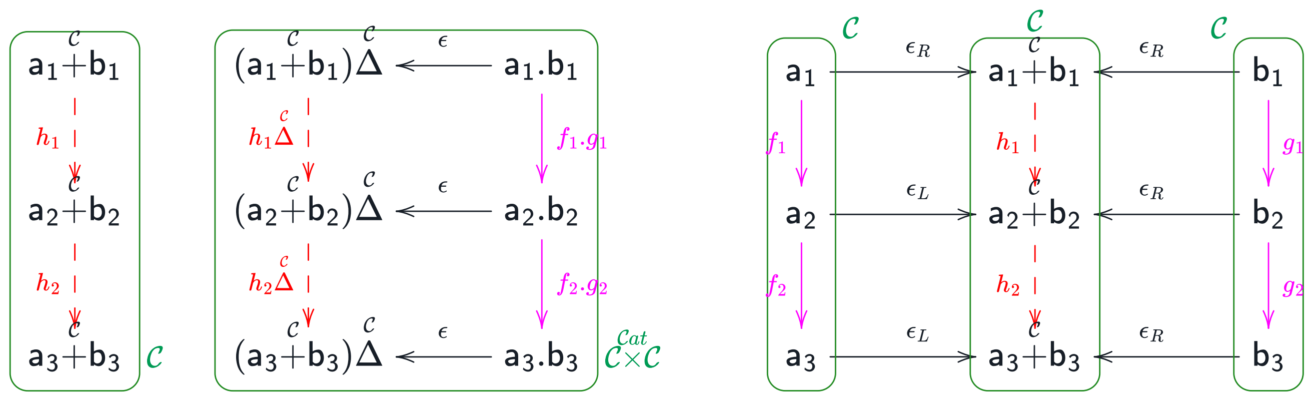


另外规定 $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ 在实参分别为箭头和对象时的输出：

- $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (f_1\ .\ \mathsf{b}_1) \longmapsto f_1 \overset{\mathcal{C}}{\times} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}$
  $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (\mathsf{a}_1\ .\ g_1) \longmapsto {}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}}{\times} g_1$

如何证明 $\overset{\mathcal{C}}{+}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathcal{C}}{+} : ({}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id}\ .\ {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{+} \mathsf{b}_1}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{\mathcal{C}}{+}$ **保持恒等箭头**；
- $\overset{\mathcal{C}}{+} : (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2\ .\ g_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_2) \mapsto h_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} h_2$
  —— 即函子 $\overset{\mathcal{C}}{+}$ **保持箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：



同理规定 $\overset{\mathcal{C}}{+}$ 在实参分别为箭头和对象时的输出：

- $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (f_1\ .\ \mathsf{b}_1) \longmapsto f_1 \overset{\mathcal{C}}{+} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}$
  $\overset{\mathcal{C}}{\times} : (\mathsf{a}_1\ .\ g_1) \longmapsto {}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}}{+} g_1$

积与和的运算性质

对于函子 $\overset{\mathcal{C}}{\times}$ 我们不难得知

- $\mathsf{a} \overset{\mathcal{C}}{\times} 1 \cong 1 \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{a} \cong \mathsf{a}$ —— 乘法有**幺元** 1 。
  下图便于理解证明 : (f, g) 决定 h , h' 。

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{a}\overset{\mathcal{C}}{\times}1)\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & \mathsf{a}.1 \\
\mathsf{x}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, "f.g=f._{:\mathsf{x}}!"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{a}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[r, "_{:\mathsf{a}}\mathrm{id}._{:\mathsf{a}}!"] & \mathsf{a}.1 \\
\mathsf{x}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "f\overset{\mathcal{C}}{\Delta}=h'\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, "f.g=f._{:\mathsf{x}}!"'] &
\end{tikzcd}$$

- $\mathsf{a} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{b} \cong \mathsf{b} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{a}$ —— 乘法运算有**交换律** 。
  下图便于理解证明 : (f, g) 决定 h , h' 。

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{a}\overset{\mathcal{C}}{\times}\mathsf{b})\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & \mathsf{a}.\mathsf{b} \\
\mathsf{x}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, "f.g"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathsf{b}\overset{\mathcal{C}}{\times}\mathsf{a})\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & \mathsf{b}.\mathsf{a} \\
\mathsf{x}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h'\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, "g.f"'] &
\end{tikzcd}$$

- $(\mathsf{a} \times \mathsf{b}) \times \mathsf{c} \cong \mathsf{a} \times (\mathsf{b} \times \mathsf{c})$ —— 乘法运算具有**结合律** 。
  下图有助于形象理解证明 : $(f_{\mathsf{ax}}, f_{\mathsf{bx}}, f_{\mathsf{cx}})$ 决定 h , h' 。

$$\begin{tikzcd}
((\mathsf{a}\overset{\mathcal{C}}{\times}\mathsf{b})\overset{\mathcal{C}}{\times}\mathsf{c})\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi"] & (\mathsf{a}\overset{\mathcal{C}}{\times}\mathsf{b}).\mathsf{c} \arrow[r, "\pi._{:\mathsf{c}}\mathrm{id}"] & (\mathsf{a}.\mathsf{b}).\mathsf{c} \\
\mathsf{x}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, dotted, "j.f_{\mathsf{cx}}"] \arrow[urr, "(f_a.f_b).f_{\mathsf{cx}}"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathsf{a}\overset{\mathcal{C}}{\times}(\mathsf{b}\overset{\mathcal{C}}{\times}\mathsf{c}))\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi"] & \mathsf{a}.(\mathsf{b}\overset{\mathcal{C}}{\times}\mathsf{c}) \arrow[r, "_{:\mathsf{a}}\mathrm{id}.\pi"] & \mathsf{a}.(\mathsf{b}.\mathsf{c}) \\
\mathsf{x}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h'\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, dotted, "f_{\mathsf{ax}}.j'"] \arrow[urr, "f_a.(f_b.f_c)"'] & &
\end{tikzcd}$$

对于函子 $\overset{\mathcal{C}}{+}$ 我们不难得知

- $\mathsf{a} \overset{\mathcal{C}}{+} 0 \cong 0 \overset{\mathcal{C}}{+} \mathsf{a} \cong \mathsf{a}$ —— 加法有**幺元** 0 。
  下图有助于理解 : (f, g) 决定 h , h' 。

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{a}\overset{\mathcal{C}}{+}0)\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"'] & \mathsf{a}.0 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f.g=f._{:\backslash\mathrm{ob}x}¡"] \\
\mathsf{x}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{a}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "f=h'\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"'] & \mathsf{a}.0 \arrow[l, "_{:\mathsf{a}}\mathrm{id}._{:\mathsf{a}}¡"'] \arrow[dl, "f.g=f._{:\mathsf{x}}¡"] \\
\mathsf{x}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} &
\end{tikzcd}$$

- $\mathsf{a} \overset{\mathcal{C}}{+} \mathsf{b} \cong \mathsf{b} \overset{\mathcal{C}}{+} \mathsf{a}$ —— 加法运算有**交换律** 。
  下图有助于理解 : (f, g) 决定 h , h' 。

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{a}\overset{\mathcal{C}}{+}\mathsf{b})\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"'] & \mathsf{a}.\mathsf{b} \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f.g"] \\
\mathsf{x}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathsf{b}\overset{\mathcal{C}}{+}\mathsf{a})\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h'\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"'] & \mathsf{b}.\mathsf{a} \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "g.f"] \\
\mathsf{x}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} &
\end{tikzcd}$$

- $(\mathsf{a} + \mathsf{b}) + \mathsf{c} \cong \mathsf{a} + (\mathsf{b} + \mathsf{c})$ —— 加法运算具有**结合律** 。
  下图有助于形象理解证明 : $(f_{\mathsf{ax}}, f_{\mathsf{bx}}, f_{\mathsf{cx}})$ 决定 h , h' 。

$$\begin{tikzcd}
((\mathsf{a}\overset{\mathcal{C}}{+}\mathsf{b})\overset{\mathcal{C}}{+}\mathsf{c})\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"'] & (\mathsf{a}\overset{\mathcal{C}}{+}\mathsf{b}).\mathsf{c} \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "j.f_c"] & (\mathsf{a}.\mathsf{b}).\mathsf{c} \arrow[l, "\epsilon._{:\mathsf{c}}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "(f_a.f_b).f_c"] \\
\mathsf{x}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathsf{a}\overset{\mathcal{C}}{+}(\mathsf{b}\overset{\mathcal{C}}{+}\mathsf{c}))\overset{\mathcal{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h'\overset{\mathcal{C}}{\Delta}"'] & \mathsf{a}.(\mathsf{b}\overset{\mathcal{C}}{+}\mathsf{c}) \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "f_a.j'."] & \mathsf{a}.(\mathsf{b}.\mathsf{c}) \arrow[l, "_{:\mathsf{a}}\mathrm{id}.\epsilon"'] \arrow[dll, "f_a.(f_b.f_c)"] \\
\mathsf{x}\overset{\mathcal{C}}{\Delta} & &
\end{tikzcd}$$

幺半范畴

像刚才这样对象运算具有**单位元**以及**结合律**的范畴称作**幺半范畴**；

若上述范畴还具有**交换律**则称作**对称幺半范畴**；

很明显我们的范畴 $\mathcal{C}$ 是典型的**对称幺半范畴** 。

幺半群

什么是幺半群呢？有两种定义方式：

- **幺半群** $\mathcal{M}$ 是个范畴，其只含一个对象 m；
  其中的复合运算正好有单位元以及结合律 。
- 对象 m 属于幺半范畴 $\mathcal{C}$，满足下述交换图：

$$
\begin{tikzcd}
1 \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[r, "u \overset{\mathcal{C}}{\otimes}_{:\mathsf{m}} \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\text{左单位元 } u_l"'] & \mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[d, "p"', "\text{运算结果唯一}"] & \mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} 1 \arrow[l, "{}_{:\mathsf{m}}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}}{\otimes} u"'] \arrow[dl, "u_r \text{ 右单位元}"] \\
& \mathsf{m} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(\mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m}) \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[rr, "\text{结合律 } a"] \arrow[d, "\text{先算左侧括号 } p \overset{\mathcal{C}}{\otimes}_{:\mathsf{m}} \mathrm{id}"'] & & \mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} (\mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m}) \arrow[d, "{}_{:\mathsf{m}}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}}{\otimes} p \text{ 先算右侧括号}"] \\
\mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[r, "\text{再算最后结果 } p"'] & \mathsf{m} & \mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[l, "p \text{ 再算最后结果}"]
\end{tikzcd}
$$

  其中

  - u ：$1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{m}$ 其实就是 m 里面的幺元
  - u_l：$1 \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{m}$ 表示 u 构成左幺元
  - u_r：$\mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} 1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{m}$ 表示 u 构成右幺元
  - p ：$\mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{m}$ 即为 m 中的二元运算
  - a ：$(\mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m}) \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} (\mathsf{m} \overset{\mathcal{C}}{\times} \mathsf{m})$ 表示 m 具有结合律