# 米田引理

假如知道 $F : C \xrightarrow{C} \mathsf{Set}$ 则

反变米田引理的陈述如下：

- $\underbrace{((\_ \xrightarrow{C} c_2) \xrightarrow{C \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} F)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(c_2 F)}_{\text{一堆元素}}$

反变米田引理的证明如下：

1. $\Leftarrow$：考虑任意 $(c_2 F)$ 中的 $\mathrm{etc}$：根据 $\mathrm{etc}$ 及其所对应的上方右侧的交换图
   我们可为每个对象 $c'$ 定义其所对应的 $c'^{\eta_2}$，于是便可构建一个完整的 $\eta_2$ 。
   易知 $\eta_2$ 是一个自然变换 。

$$\begin{tikzcd} c(c \xrightarrow{C} c_2) \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & cF \arrow[d, "fF"] \\ c'(c \xrightarrow{C} c_2) \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c'F \end{tikzcd}$$

$\mathsf{Set}$ $\quad C \xrightarrow{C} c_2 \quad CF$

2. $\Rightarrow$：考虑任意等式左侧的 $\eta_1$：若上述交换图成立
   则可对任意 $\eta_1$ 指派 $\mathrm{etc} = {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 为 $c_2 F$ 中与之对应的元素；

$$\begin{tikzcd} c_2(c \xrightarrow{C} c_2) \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & c_2 F \arrow[d, "fF"] \\ c'(c \xrightarrow{C} c_2) \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c'F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {}_{:c_2}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & {}_{:c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2}) \arrow[d, "fF"] \\ f \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & \mathrm{etc}(fF) \end{tikzcd}$$

为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
$c_2$ 唯一地确定了 $\eta_2$，反之 $\eta_2$ 页唯一确定了 $c_2$ 。

---

协变米田引理的陈述如下：

- $\underbrace{((c_1 \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{C \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} F)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(c_1 F)}_{\text{一堆元素}}$

协变米田引理的证明如下：

1. $\Leftarrow$：考虑任意 $(c_1 F)$ 中的 $\mathrm{etc}$：根据 $\mathrm{etc}$ 及其所对应的上方右侧的交换图
   我们可为每个对象 $c'$ 定义其所对应的 $c'^{\eta_1}$，于是便可构建一个完整的 $\eta_1$ 。
   易知 $\eta_1$ 是一个自然变换 。

$$\begin{tikzcd} (c_1 \xrightarrow{C} c) \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & cF \arrow[d, "fF"] \\ (c_1 \xrightarrow{C} c') \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c'F \end{tikzcd}$$

$\mathsf{Set}$ $\quad c_1 \xrightarrow{C} C \quad CF$

2. $\Rightarrow$：考虑任意等式左侧的 $\eta_1$：若上述交换图成立
   则可对任意 $\eta_1$ 指派 $\mathrm{etc} = {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 为 $c_1 F$ 中与之对应的元素；

$$\begin{tikzcd} (c_1 \xrightarrow{C} c_1) \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & c_1 F \arrow[d, "fF"] \\ (c_1 \xrightarrow{C} c') \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c'F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {}_{:c_1}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1}) \arrow[d, "fF"] \\ f \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & \mathrm{etc}(fF) \end{tikzcd}$$

为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
$c_1$ 唯一地确定了 $\eta_1$，反之 $\eta_1$ 页唯一确定了 $c_1$ 。

## 米田嵌入

根据前面的内容我们可知

- $\text{よ} : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})$

  $c_2 \longmapsto (c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) = (\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2)$　　构成一个函子，称作预层

  $f_2 \longmapsto (f_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) = (\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)$　　构成一个函子间映射，即自然变换

  构成一个完全忠实函子，该函子称作**米田嵌入**。

证明如下：

- よ 是函子，因为
  - $:_{c_2}\mathrm{id}\,\text{よ} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} :_{c_2}\mathrm{id}) = :_{(c_2\text{よ})}\mathrm{id}$
  - $(f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')\text{よ} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \overset{\mathsf{C}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')$,

  由于函子具有保持对象 / 映射性质的能力，
  故便可知 $f_2\text{よ}$ 为同构当且仅当 $f_2$ 为同构。

- よ 是完全忠实的，因为
  将协变米田引理中的 $c_1$ / $\mathsf{C}$ / $F$
  分别换成 $c_2$ / $\mathsf{C}^{\mathrm{op}}$ / $(c_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_)$
  即可获得下述公式：

  $$\underbrace{((c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (c_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_))}_{\text{预层范畴的 hom-set}} \cong \underbrace{(c_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} c_2)}_{\mathsf{C}\text{ 的 hom-set}}$$

  也就是

  $$\underbrace{((c_2\text{よ}) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (c_2'\text{よ}))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(c_2(c_2'\text{よ}))}_{\text{一堆元素}}$$

> ⓘ **Note**
>
> 问题来了：既然 よ 是完全忠实的，那么是否意味着
> 如果 $f_2 : c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2'$ 是同构则上式左侧部分与之对应
> 的自然变换一定就是自然同构呢？

---

根据前面的内容我们可知

- $\text{尤} : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})$

  $c_1 \longmapsto (c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$　　构成一个函子

  $f_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$　　构成一个函子间映射，即自然变换

  构成一个完全忠实函子，该函子称作**尤达嵌入**。

证明如下：

- 尤 是函子，因为
  - $:_{c_1}\mathrm{id}\,\text{尤} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} :_{c_1}\mathrm{id}) = :_{(c_1\text{尤})}\mathrm{id}$
  - $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1')\text{尤} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1')) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1) \overset{\mathsf{C}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1')$,

- 尤 是完全且忠实的，因为
  将协变米田引理中的 $F$
  换成 $(c_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$
  即可获得下述公式：

  $$\underbrace{((c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (c_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} \_))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(c_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} c_1)}_{\text{一堆元素}}$$

  也就是

  $$\underbrace{((c_1\text{尤}) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (c_1'\text{尤}))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(c_1(c_1'\text{尤}))}_{\text{一堆元素}}$$

> ⓘ **Note**
>
> 问题来了：既然 尤 是完全忠实的，那么是否意味着
> 如果 $f_1 : c_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} c_1$ 是同构则上式左侧部分与之对应
> 的自然变换一定就是自然同构呢？