

函子

接下来我们来提供函子的正式定义：

- $F : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{D}$ 为**函子**当且仅当
 - 对任意 \mathbf{C} 中对象 c , cF 为 \mathbf{D} 中对象且 $\text{id}_c F = \text{id}_{cF}$;
 - 对任意 \mathbf{C} 中箭头 $i_1 : c_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} c_2$ 和 $i_2 : c_2 \xrightarrow{\mathbf{C}} c_3$, 始终都有等式 $(i_1 \circ i_2)F = i_1 F \circ i_2 F$ 成立。

若已确信 $F : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{D}$ 为函子且

还知 \mathbf{C} 中有对象 c_1, c_2

以及 \mathbf{C} 中有箭头 $i : c_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} c_2$ 则

- 若 i 为单态 / 满态 / 同构
则 iF 为单态 / 满态 / 同构;
- 若 iF 为同构
则 i 为同构。

Note

不难发现函子具有保持
对象 / 态射性质的能力。

函子的复合运算

若还知道 $G : \mathbf{D} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{E}$ 为函子则

- $F \circ G : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{E}$
也构成一个函子。

恒等函子

对于函子我们也有恒等映射，即：

- $\text{id}_\mathbf{C} \circ F = F$
 $= F \circ \text{id}_\mathbf{D}$

忠实，完全和本质满函子

若 $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$ 皆为**局部小范畴**，则

- F 是**忠实**的当且仅当对任意 \mathbf{C} 中的对象 c_1, c_2 , $c_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} c_2$ 与 $c_1 F \xrightarrow{\mathbf{D}} c_2 F$ 之间始终都存在单射；
- F 是**完全**的当且仅当对任意 \mathbf{C} 中的对象 c_1, c_2 , $c_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} c_2$ 与 $c_1 F \xrightarrow{\mathbf{D}} c_2 F$ 之间始终都存在满射；
- F 是**完全忠实**的当且仅当任意 \mathbf{C} 中对象 c_1, c_2 , $c_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} c_2$ 与 $c_1 F \xrightarrow{\mathbf{D}} c_2 F$ 之间始终都存在双射。

Note

刚才提到的 “单 / 满 / 双射”
针对的都是范畴的箭头部分。

- F 是**本质满**的当且仅当对任意 \mathbf{D} 中对象 d
都存在 \mathbf{C} 中对象 c 使 $cF \xrightarrow{\mathbf{D}} d$ 之间有双射。

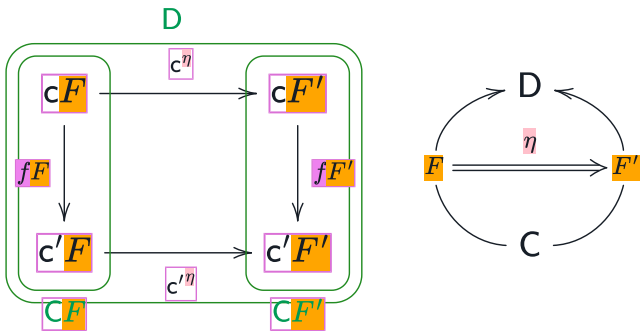
根据刚才的信息我们不难得知

- 若 F, G 为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满函子
则 $F \circ G$ 为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满 函子；
- 若 $F \circ G$ 为完全忠实函子
且知道 G 为完全忠实函子
则可知 F 为完全忠实函子；

自然变换

如果还知道 $F' : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{D}$ 为函子，那么

- $\eta : F \xrightarrow{\text{Cat}} F'$ 为自然变换当且仅当对任意 \mathbf{C} 中对象 c, c' 始终都会有下述交换图成立：

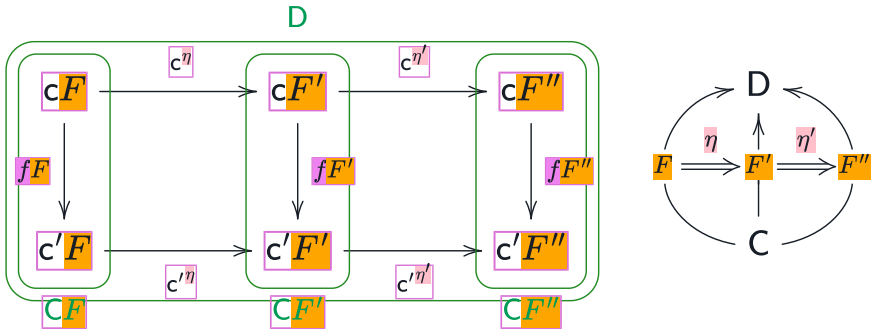


自然变换的复合

若已知 $\eta : F \xrightarrow{\text{Cat}} F'$ 构成自然变换且

还知道 $\eta' : F' \xrightarrow{\text{Cat}} F''$ 为自然变换则

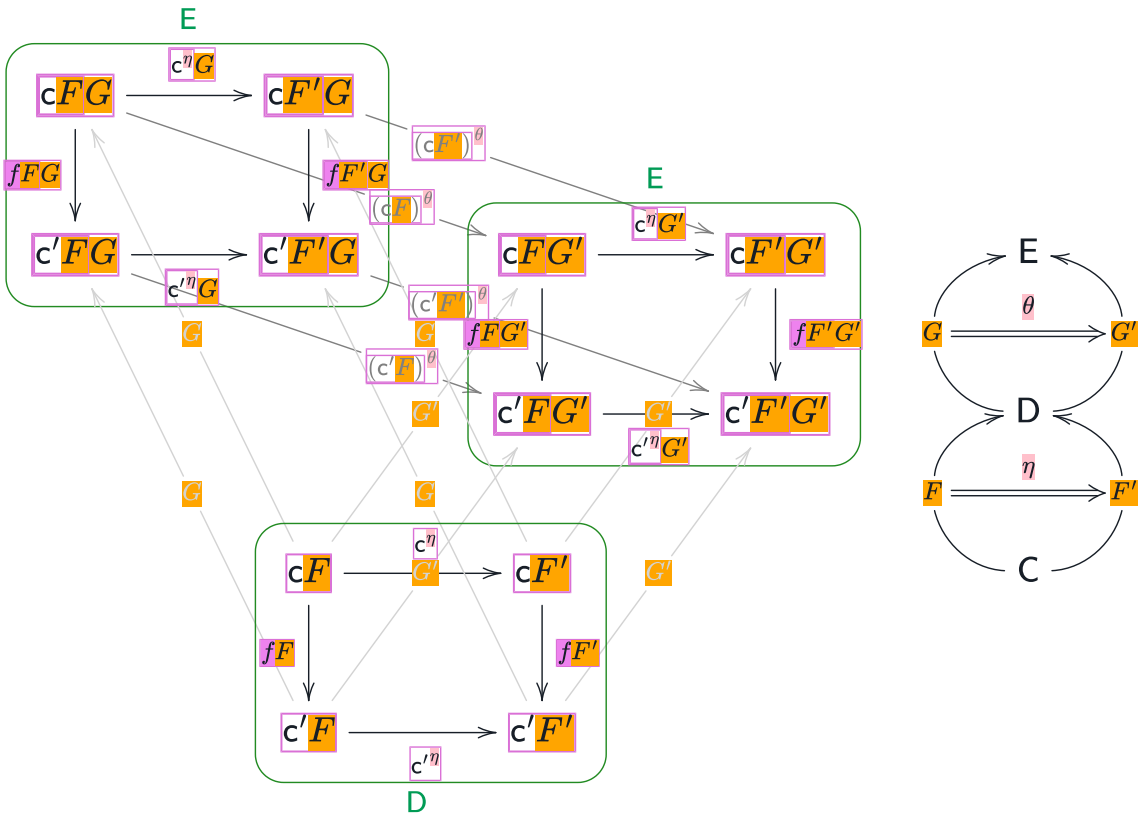
- $\eta \circ \eta' : F \xrightarrow{\text{Cat}} F''$ 为自然变换，称作 η 和 η' 的**纵复合**。



如果还知道 $G' : \mathbf{D} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{E}$ 也是个函子

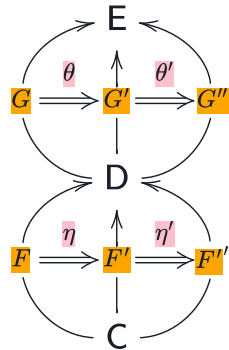
及自然变换 $\theta : G \xrightarrow{\text{Cat}} G'$ 那么便有

- $\eta \circ \theta : F \xrightarrow{\text{Cat}} G \xrightarrow{\text{Cat}} F' \xrightarrow{\text{Cat}} G'$ 为自然变换，称作 η 和 θ 的**横复合**。



若 $\theta' : G \xrightarrow{\text{Cat}} G''$ 为自然变换则

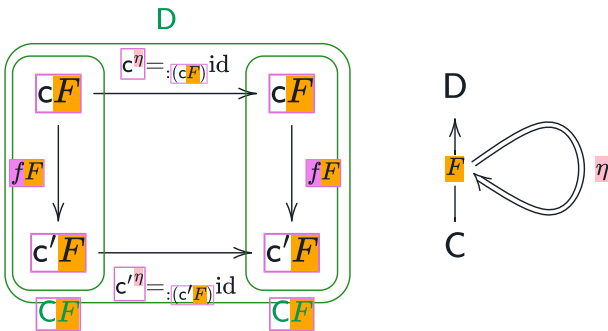
- $(\eta \circ \theta) \circ (\eta' \circ \theta') = (\eta \circ \eta') \circ (\theta \circ \theta')$ ，即便改变纵横复合先后顺序也不影响最终结果。



恒等自然变换

同样对于自然变换也有恒等映射。

- $\eta: F \rightarrow F$ 为恒等自然变换当且仅当对范畴 C 中任意对象 c 都有下述交换图成立：



自然同构

自然同构与你想象中的同构不太像。

- $\eta: F \rightarrow F'$ 为**自然同构**当且仅当 $c\eta$ 总是同构，这里 c 为任意 C 中对象。
- 此时 F, F' 的关系可用 $F \cong F'$ 表示

范畴等价的定义

我们用自然同构来定义范畴的等价。

- $C \cong D$ 当且仅当存在函子 $F: C \rightarrow D$ 及 $F': D \rightarrow C$ 使 $F \circ F' \cong \text{id}_D$ 并且有 $F' \circ F \cong \text{id}_C$ 。