LaTeX Definitions are here.

反协变米田引理

若知 $F_2 : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}$ 则
反变米田引理的陈述如下：

- $\underbrace{((\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2) \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} F_2)}_{一堆自然变换} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(c_2 F_2)}_{一堆元素}$

反变米田引理的证明如下：

1. $\Leftarrow$: 考虑任意 $(c_2 F_2)$ 中的 etc : 根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图
我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_2}，于是便可构建一个完整的 η_2 。
易知 η_2 是一个自然变换 。

$$\begin{tikzcd}[row sep=large]
& \mathsf{Set} & \\
c \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2"'] & c F_2 \arrow[d, "f^{\mathrm{op}} F_2"] \\
c' \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c' F_2 \\
\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2 & \mathsf{C} F_2
\end{tikzcd}$$

2. $\Rightarrow$: 考虑任意等式左侧的 η_1 : 若上述交换图成立
则可对任意 η_1 指派 $\mathrm{etc} = {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 为 $c_2 F_2$ 中与之对应的元素；

$$\begin{tikzcd}[row sep=large]
c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2"'] & c_2 F_2 \arrow[d, "f^{\mathrm{op}} F_2"] \\
c' \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c' F_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[row sep=large]
{}_{:c_2}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2"'] & {}_{:c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2}) \arrow[d, "f^{\mathrm{op}} F_2"] \\
f^{\mathrm{op}} \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & \mathrm{etc}(f^{\mathrm{op}} F_2)
\end{tikzcd}$$

为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
c_2 唯一地确定了 η_2，反之 η_2 也唯一确定了 c_2 。

若还知 $F_1 : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}$ 则
协变米田引理的陈述如下：

- $\underbrace{((c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} F_1)}_{一堆自然变换} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(c_1 F_1)}_{一堆元素}$

协变米田引理的证明如下：

1. $\Leftarrow$: 考虑任意 $(c_1 F_1)$ 中的 etc : 根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图
我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_1}，于是便可构建一个完整的 η_1 。
易知 η_1 是一个自然变换 。

$$\begin{tikzcd}[row sep=large]
& \mathsf{Set} & \\
c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} f"'] & c F_1 \arrow[d, "f F_1"] \\
c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c' F_1 \\
c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{C} & \mathsf{C} F_1
\end{tikzcd}$$

2. $\Rightarrow$: 考虑任意等式左侧的 η_1 : 若上述交换图成立
则可对任意 η_1 指派 $\mathrm{etc} = {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 为 $c_1 F_1$ 中与之对应的元素；

$$\begin{tikzcd}[row sep=large]
c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_1 \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} f"'] & c_1 F_1 \arrow[d, "f F_1"] \\
c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c' F_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[row sep=large]
{}_{:c_1}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} f"'] & {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1}) \arrow[d, "f F_1"] \\
f \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & \mathrm{etc}(f F_1)
\end{tikzcd}$$

为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
c_1 唯一地确定了 η_1，反之 η_1 也唯一确定了 c_1 。

可表和余可表函子的泛性质

接下来定义一个重要的概念：

- F_2 为**可表函子**当且仅当
  存在 C^{op} 中对象 c_2 使得
  $(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2) = \mathsf{c}_2\text{よ} \underset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Set}}{\overset{\mathsf{Cat}}{\cong}} F_2$ 成立，
  即 $\mathsf{c}_2\text{よ}$ 与 F_2 间存在自然同构。
  此时称 F_2 可由对象 c_2 **表出**。

同理我们也有如下对偶概念：

- F_1 为**余可表函子**当且仅当
  存在 C 中对象 c_1 使得
  $(\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) = \mathsf{c}_1\text{尤} \underset{\mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{Set}}{\overset{\mathsf{Cat}}{\cong}} F_1$ 成立。
  即 $\mathsf{c}_1\text{尤}$ 与 F_1 间存在自然同构。
  此时称 F_1 可由对象 c_1 **余可表出**。

米田和尤达嵌入

根据前面的内容我们可知

- $\text{よ} : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})$
  $c_2 \longmapsto (c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) = (\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2)$ 构成一个函子，称作预层
  $f_2 \longmapsto (f_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) = (\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)$ 构成一个函子间映射，即自然变换

  构成一个完全忠实函子，该函子称作是**米田嵌入**。

证明如下：

- よ 是函子，因为
  - $_{:c_2}\mathrm{id}\text{よ} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ}\, _{:c_2}\mathrm{id}) = \, _{:(c_2\text{よ})}\mathrm{id}$
  - $(f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')\text{よ} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2') = f_2\text{よ} \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} f_2'\text{よ}$,

  由于函子具有保持对象 / 映射性质的能力，
  故便可知 $f_2\text{よ}$ 为同构当且仅当 f_2 为同构。
- よ 是完全忠实的，因为
  将反变米田引理中的 F_2
  换成 $(c_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_)$
  即可获得下述公式：
  $$\underbrace{\underbrace{((c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (c_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_))}_{\text{预层范畴的 hom-set}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (c_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} c_2)}_{\mathsf{C}\text{ 的 hom-set}}$$
  也就是
  $$\underbrace{\underbrace{((c_2\text{よ}) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (c_2'\text{よ}))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (c_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} c_2)}_{\mathsf{C}\text{ 的 hom-set}} = \underbrace{(c_2(c_2'\text{よ}))}_{\text{一堆元素}}$$

> ⓘ **Note**
>
> 由于函子能够保持态射的性质，
> 对任意左侧集合中的自然同构
> 右侧集合也会有同构与之对应，反之亦然。
> 这也就证明了前面自然同构相关定理省略的部分。

根据前面的内容我们可知

- $\text{尤} : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})$
  $c_1 \longmapsto (c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$ 构成一个函子
  $f_1^{\mathrm{op}} \longmapsto (f_1^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) = (f_1^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$ 构成一个函子间映射，即自然变换

  构成一个完全忠实函子，该函子称作是**尤达嵌入**。

证明如下：

- 尤 是函子，因为
  - $_{:c_1}\mathrm{id}\text{尤} = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ}\, _{:c_1}\mathrm{id}) = \, _{:(c_1\text{尤})}\mathrm{id}$
  - $(f_1 \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}{\circ} f_1')\text{尤} = ((f_1 \overset{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}{\circ} f_1') \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) = (f_1^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (f_1'^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$,
- 尤 是完全且忠实的，因为
  将协变米田引理中的 F_1
  换成 $(c_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$
  即可获得下述公式：
  $$\underbrace{((c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (c_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} \_))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(c_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} c_1)}_{\text{一堆元素}}$$
  也就是
  $$\underbrace{\underbrace{((c_1\text{尤}) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (c_1'\text{尤}))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(c_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} c_1)}_{\text{一堆元素}}} = \underbrace{(c_1(c_1'\text{尤}))}_{\text{一堆元素}}$$

> ⓘ **Note**
>
> 由于函子能够保持态射的性质，
> 对任意左侧集合中的自然同构
> 右侧集合也会有同构与之对应，反之亦然。
> 这也就证明了前面自然同构相关定理省略的部分。