

## 02 范畴里面的箭头

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Definitions are here.

我们进行下述规定：

- $\mathbf{c}_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_2 =$   
所有从  $\mathbf{c}_1$  射向  $\mathbf{c}_2$  的箭头构成的集。

**Note**  
上述断言仅对于**局部小范畴**成立，  
其他范畴里  $\mathbf{c}_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_2$  未必构成集。

范畴  $\mathbf{C}$  中特定的箭头可以进行复合运算：

- $\circ^{\mathbf{C}} : (\mathbf{c}_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_2) \times (\mathbf{c}_2 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_3) \xrightarrow{\text{Set}} (\mathbf{c}_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_3)$   
 $(i_1 \quad \cdot \quad i_2) \longmapsto i_1 \circ^{\mathbf{C}} i_2$

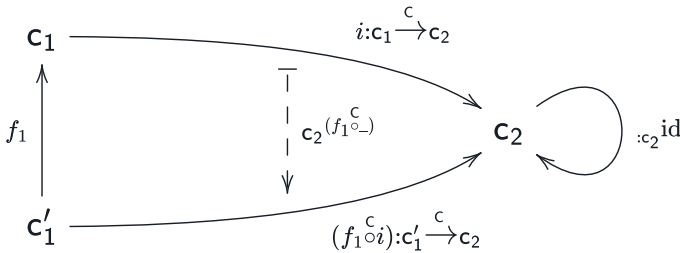
如果我们还知道箭头  $f_1, i, f_2$  分别属于  
 $\mathbf{c}'_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_2 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_3$  那么便可知

- $(f_1 \circ^{\mathbf{C}} i) \circ^{\mathbf{C}} f_2 = f_1 \circ^{\mathbf{C}} (i \circ^{\mathbf{C}} f_2),$   
即箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便可获得新的函数：

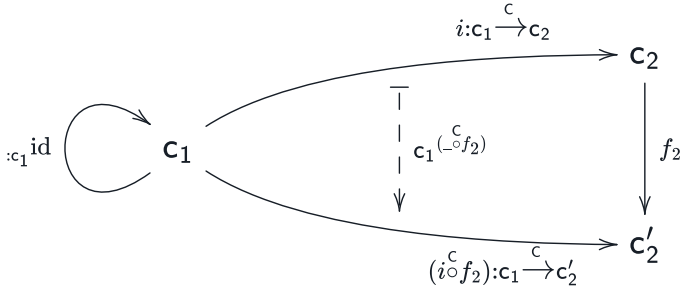
- $(f_1 \circ^{\mathbf{C}} \_): (\mathbf{c}_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} \_) \xrightarrow{\mathbf{C} \rightarrow \text{Set}} (\mathbf{c}'_1 \xrightarrow{\mathbf{C}} \_)$   
 $i \longmapsto (f_1 \circ^{\mathbf{C}} i)$

称作**前复合**。下图有助于形象理解：



- $(\_ \circ^{\mathbf{C}} f_2): (\_ \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}_2) \xrightarrow{\mathbf{C} \rightarrow \text{Set}} (\_ \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{c}'_2)$   
 $i \longmapsto (i \circ^{\mathbf{C}} f_1)$

称作**后复合**。下图有助于形象理解：



根据上面的定义不难得出下述结论：

- $(f_1 \circ^{\mathbf{C}} \_) \circ^{\text{Cat}} (\_ \circ^{\mathbf{C}} f_2) = (\_ \circ^{\mathbf{C}} f_2) \circ^{\text{Cat}} (f_1 \circ^{\mathbf{C}} \_)$   
复合运算具有**结合律**，即后面提到的**自然性**；
- $(\_ \circ^{\mathbf{C}} i) \circ^{\text{Cat}} (\_ \circ^{\mathbf{C}} f_2) = (\_ \circ^{\mathbf{C}} (i \circ^{\mathbf{C}} f_2))$   
前复合与复合运算的关系
- $(i \circ^{\mathbf{C}} \_) \circ^{\text{Cat}} (f_1 \circ^{\mathbf{C}} \_) = ((f_1 \circ^{\mathbf{C}} i) \circ^{\mathbf{C}} \_)$   
后复合与复合运算的关系

### 箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。

假如  $a_1$  为  $\mathbf{c}_1$  的全局元素则可规定

- $c_1 i = c_1 \circ^{\mathbf{C}} i$