10 伴随函子

LaTeX Definitions are here.

若有函子 $L : \boxed{\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}}$
以及函子 $R : \boxed{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}}$, 即

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[loop above, "{}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id}"] \arrow[rr, bend right, "R"'] & & \mathsf{D} \arrow[loop above, "{}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id}"] \arrow[ll, bend right, "L"']
\end{tikzcd}$$

伴随函子的第一种定义

那么规定

- $L \dashv R$ 当且仅当
  函子 $\boxed{(\boxed{\_L} \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)}$ 和 $\boxed{(\_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \boxed{\_R})}$
  间存在着一个二元的**自然同构** 。

假如确实有 $L \dashv R$, 那么不难得知

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_2，见下：

$$\phi_2 : (\_ \xrightarrow{D} \_R) \xrightarrow{(D\times C)\to Set} (\_L \xrightarrow{C} \_)$$
$$(\_ . c)^{\phi_2} : (\_ \xrightarrow{D} cR) \xrightarrow{D\to Set} (\_L \xrightarrow{C} c)$$
$$(d . \_)^{\phi_2} : (d \xrightarrow{D} \_R) \xrightarrow{C\to Set} (dL \xrightarrow{C} \_)$$

套用反变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{(\_ \xrightarrow{D} cR) \xrightarrow{\overset{Cat}{D^{op}\to Set}} (\_L \xrightarrow{C} c)}_{一堆自然变换} \overset{Set}{\cong} \underbrace{(cRL \xrightarrow{C} c)}_{一堆元素}$$

由反变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(\_ . c)^{\phi_2}$
右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 $_{:cR}\mathrm{id}(cR . c)^{\phi_2} = c^{\varepsilon}$。如此

- $\varepsilon : R \circ L \xrightarrow{\overset{Cat}{C\to C}} {}_{:C}\mathrm{Id}$ 构成自然变换。

> 考虑任意 $f^{op} : c' \xrightarrow{C} c$：
>
> $$\begin{tikzcd}
cR \xrightarrow{D} cR \arrow[r, "(cR.c)^{\phi_2}"] \arrow[d, "f^{op}R \xrightarrow{D} cR"'] & cRL \xrightarrow{C} c \arrow[d, "f^{op}RL \xrightarrow{C} c"] \\
c'R \xrightarrow{D} cR \arrow[r, dashed, "(c'R.c)^{\phi_2}"] & c'RL \xrightarrow{C} c \\
c'R \xrightarrow{D} c'R \arrow[r, "(c'R.c')^{\phi_2}"'] \arrow[u, "c'R \xrightarrow{D} f^{op}R"] & c'RL \xrightarrow{C} c' \arrow[u, "c'RL \xrightarrow{C} f^{op}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:cR}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(cR.c)^{\phi_2}"] \arrow[d, "f^{op}R \xrightarrow{D} cR"'] & {}_{:cR}\mathrm{id}(cR.c)^{\phi_2} = c^{\varepsilon} \arrow[d, "f^{op}RL \xrightarrow{C} c = c^{(f^{op}RL \overset{C}{\circ} _)}"] \\
f^{op}R \arrow[r, mapsto, "(c'R.c)^{\phi_2}"] & f^{op}RL \overset{C}{\circ} c^{\varepsilon} = c'^{\varepsilon} \overset{C}{\circ} f^{op} \\
{}_{:c'R}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(c'R.c')^{\phi_2}"'] \arrow[u, "c'R \xrightarrow{D} f^{op}R"] & {}_{:c'R}\mathrm{id}(c'R.c')^{\phi_2} = c'^{\varepsilon} \arrow[u, "c'RL \xrightarrow{C} f^{op} = (c'RL)^{(_ \overset{C}{\circ} f^{op})}"']
\end{tikzcd}$$
>
> 上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图
> 其实就是反变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_1，见下：

$$\phi_1 : (\_L \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{(D\times C)\to Set} (\_ \xrightarrow{D} \_R)$$
$$(\_ . c)^{\phi_1} : (\_L \xrightarrow{C} c) \xrightarrow{D\to Set} (\_ \xrightarrow{D} cR)$$
$$(d . \_)^{\phi_1} : (dL \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{C\to Set} (d \xrightarrow{D} \_R)$$

套用协变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{((dL \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{\overset{Cat}{C\to Set}} (d \xrightarrow{D} \_R))}_{一堆自然变换} \overset{Set}{\cong} \underbrace{(d \xrightarrow{D} dLR)}_{一堆元素}$$

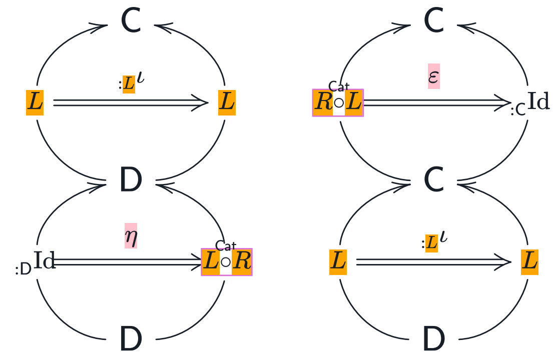
由协变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(d . \_)^{\phi_1}$
右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 $_{:dL}\mathrm{id}(d . dL)^{\phi_1} = d^{\eta}$。如此。

- $\eta : {}_{:D}\mathrm{Id} \xrightarrow{\overset{Cat}{D\to D}} L \circ R$ 构成自然变换。

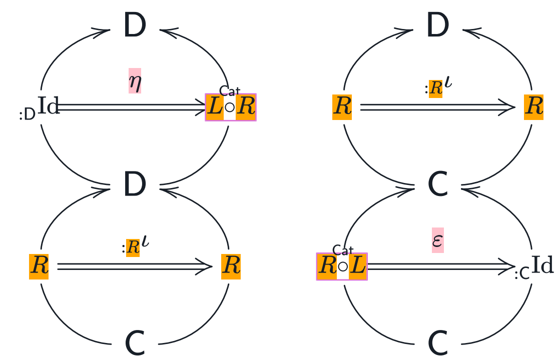
> 考虑任意 $g : d \xrightarrow{D} d'$：
>
> $$\begin{tikzcd}
dL \xrightarrow{C} dL \arrow[r, "(d.dL)^{\phi_1}"] \arrow[d, "dL \xrightarrow{C} gL"'] & d \xrightarrow{D} dLR \arrow[d, "d \xrightarrow{D} gLR"] \\
dL \xrightarrow{C} d'L \arrow[r, dashed, "(d.d'L)^{\phi_1}"] & d \xrightarrow{D} d'LR \\
d'L \xrightarrow{C} d'L \arrow[r, "(d'.d'L)^{\phi_1}"'] \arrow[u, "gL \xrightarrow{C} d'L"] & d' \xrightarrow{D} d'LR \arrow[u, "g \xrightarrow{D} d'LR"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:dL}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(d.dL)^{\phi_1}"] \arrow[d, "dL \xrightarrow{C} gL"'] & {}_{:dL}\mathrm{id}(d.dL)^{\phi_1} = d^{\eta} \arrow[d, "d \xrightarrow{D} gLR = d^{(_ \overset{D}{\circ} gLR)}"] \\
gL \arrow[r, mapsto, "(d.d'L)^{\phi_1}"] & d^{\eta} \overset{D}{\circ} gLR = g \overset{D}{\circ} d'^{\eta} \\
{}_{:d'L}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(d'.d'L)^{\phi_1}"'] \arrow[u, "gL \xrightarrow{C} d'L"] & {}_{:d'L}\mathrm{id}(d'.d'L)^{\phi_1} = d'^{\eta} \arrow[u, "g \xrightarrow{D} d'LR = (d'LR)^{(g \overset{D}{\circ} _)}"']
\end{tikzcd}$$
>
> 上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图
> 其实就是协变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

对于前面的 ε 和 η 我们有下述交换图成立：

- $$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\eta\circ L^{\iota}"] \arrow[dr, "L^{\iota}"'] & L\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}R\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}L \arrow[d, "L^{\iota}\circ\varepsilon"] \\ & L \end{tikzcd}$$



- $$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "R^{\iota}\circ\eta"] \arrow[dr, "R^{\iota}"'] & R\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}L\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}R \arrow[d, "\varepsilon\circ R^{\iota}"] \\ & R \end{tikzcd}$$



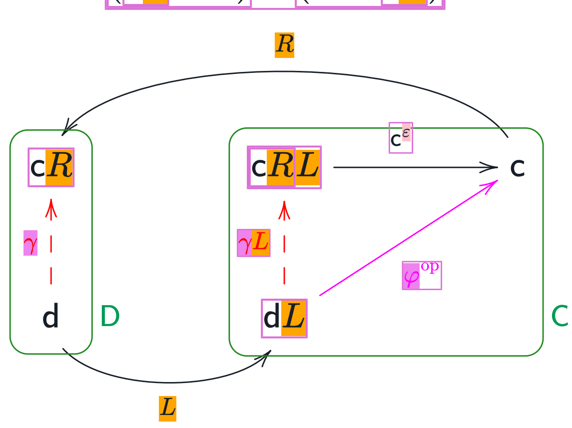
伴随函子的第二种定义

假设我们不知道 L 和 R 构成一对伴随函子并且有自然变换 $\varepsilon : R\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}L \xrightarrow{\mathsf{C}\to\mathsf{C}} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id}$ 和 $\eta : {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id} \xrightarrow{\mathsf{D}\to\mathsf{D}} L\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}R$ 能同时满足上页开头的两幅交换图，即

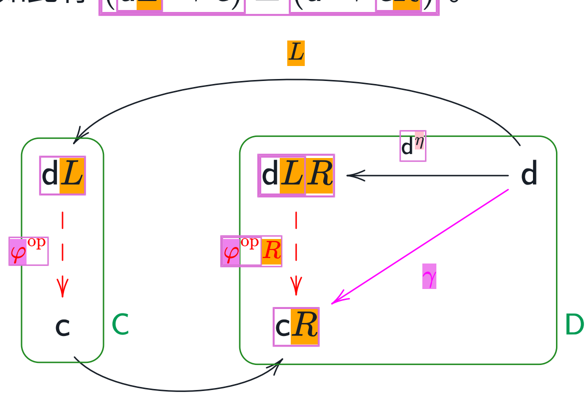
$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\eta\circ L^{\iota}"] \arrow[dr, "L^{\iota}"'] & L\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}R\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}L \arrow[d, "L^{\iota}\circ\varepsilon"] \\ & L \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "R^{\iota}\circ\eta"] \arrow[dr, "R^{\iota}"'] & R\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}L\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}R \arrow[d, "\varepsilon\circ R^{\iota}"] \\ & R \end{tikzcd}$$

那么

- 对任意 C 中对象 c
  及任意 D 中对象 d
  及任意 $\varphi^{\mathrm{op}} : \mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$ 始终存在
  唯一的 $\gamma : \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R$ 使下图交换。
  如此有 $(\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R)$。

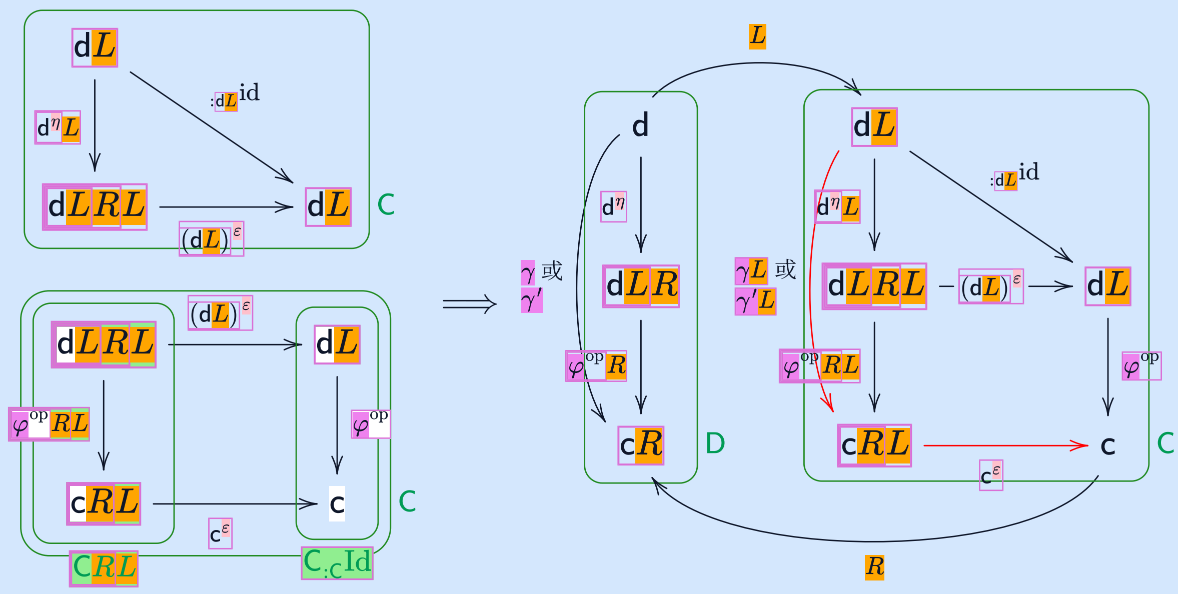


- 对任意 C 中对象 c
  及任意 D 中对象 d
  及任意 $\gamma : \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R$ 始终都会存在
  唯一的 $\varphi^{\mathrm{op}} : \mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$ 使下图交换。
  如此有 $(\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R)$。

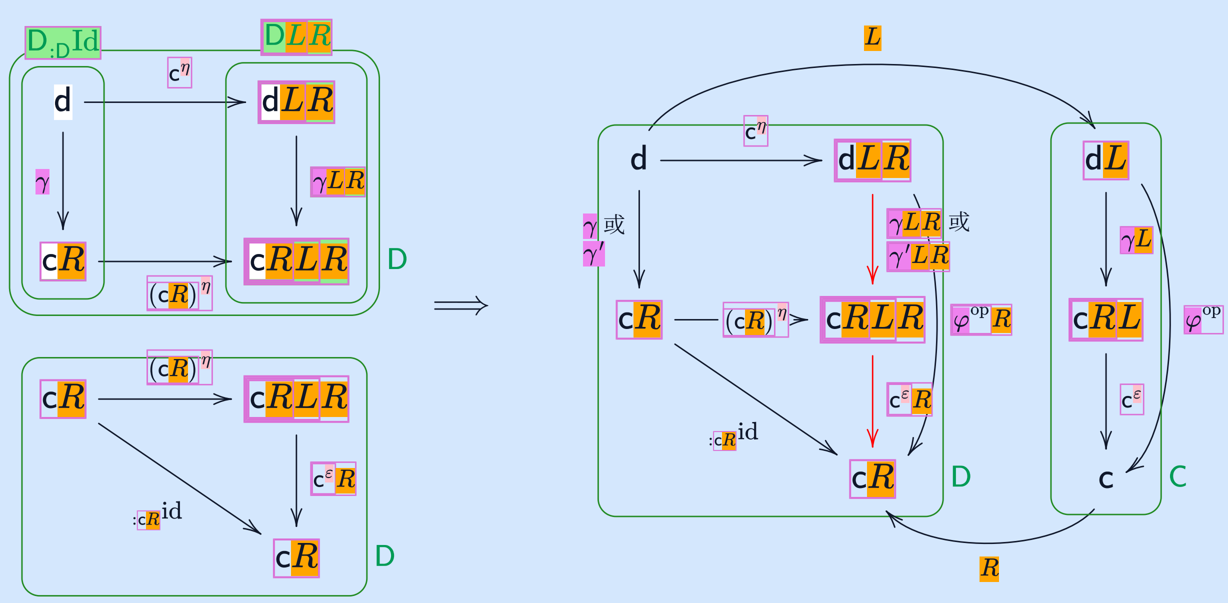


现证明上页的头两条定理。

我们将下图称作图 1 : 图 1 上半部分即为上页第一幅图，而图 1 下半部分可由 ε 为自然变换得出。两图拼在一起即得图 1 右侧部分。



我们将下图称作图 2 : 图 2 下半部分即为上页第二幅图，而图 2 上半部分可由 η 为自然变换得出。两图拼在一起即得图 2 右侧部分。



为何 γ 唯一呢？若 γ' 亦满足上图 —— 即不论是 γ 还是 γ' 图 1 右侧部分中 L 形走向红色路径的复合结果都为 φ^{op} ; 故图 2 右侧部分中红色路径的复合结果也是一致的 ; 如此根据图 2 右侧部分即可知 $\gamma = \gamma'$ 。

另一侧同理，这里不再赘述。

伴随函子的第三种定义

假设我们不知道 L 和 R 构成一对伴随函子并且有自然变换 $\varepsilon : R \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} L \xrightarrow{\mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{C}} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id}$ 和 $\eta : {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id} \xrightarrow{\mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{D}} L \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} R$, 那么我们有

- 若对任意 C 中对象 c
  及对任意 D 中对象 d
  及对任意 $\varphi^{\mathrm{op}} : \mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$ 始终都会
  有唯一的 $\gamma : \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R$ 使下图交换，

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{c}R & & \mathsf{c}RL \arrow[r, "\mathsf{c}^{\varepsilon}"] & \mathsf{c} \arrow[lll, bend right, "R"'] \\
\mathsf{d} \arrow[u, dashed, "\gamma"] \arrow[rr, bend right, "L"'] & \mathsf{D} & \mathsf{d}L \arrow[u, dashed, "\gamma L"] \arrow[ur, "\varphi^{\mathrm{op}}"'] & \mathsf{C}
\end{tikzcd}
$$

  那么

$$
\begin{aligned}
\phi_2 &: (\_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \_R) \xrightarrow{\overset{\mathsf{C}}{(\mathsf{D}\times\mathsf{C})} \overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (\_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \\
(\_\,.\,\mathsf{c})^{\phi_2} &: (\_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R) \xrightarrow{\mathsf{D} \overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (\_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \\
(\mathsf{d}\,.\,\_)^{\phi_2} &: (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \_R) \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)
\end{aligned}
$$

  将构成自然同构 。

- 若对任意 C 中对象 c
  及对任意 D 中对象 d
  及对任意 $\gamma : \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R$ 始终都存在
  唯一的 $\varphi^{\mathrm{op}} : \mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$ 使下图交换，

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{d}L \arrow[d, dashed, "\varphi^{\mathrm{op}}"'] & & \mathsf{d}LR \arrow[d, dashed, "\varphi^{\mathrm{op}} R"'] & \mathsf{d} \arrow[l, "\mathsf{d}^{\eta}"'] \arrow[lll, bend right, "L"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
\mathsf{c} \arrow[rr, bend right, "R"'] & \mathsf{C} & \mathsf{c}R & \mathsf{D}
\end{tikzcd}
$$

  那么

$$
\begin{aligned}
\phi_1 &: (\_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \xrightarrow{\overset{\mathsf{C}}{(\mathsf{D}\times\mathsf{C})} \overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (\_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \_R) \\
(\_\,.\,\mathsf{c})^{\phi_1} &: (\_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \xrightarrow{\mathsf{D} \overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (\_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R) \\
(\mathsf{d}\,.\,\_)^{\phi_1} &: (\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \_R)
\end{aligned}
$$

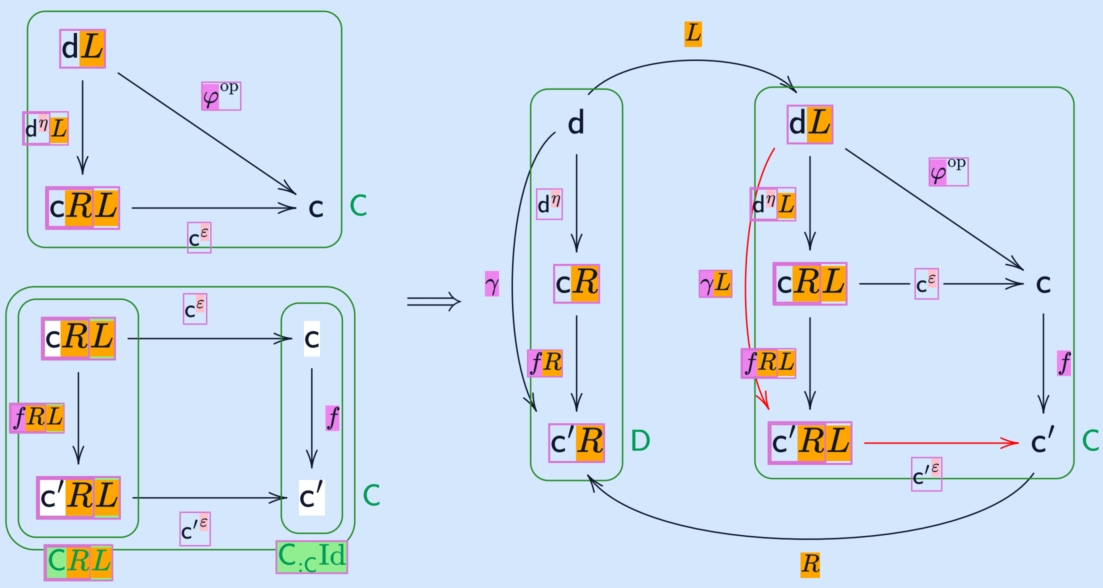
  将构成自然同构 。

只证上页第一条定理 , 另一个雷同。

由定理的假设可知 $(\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R)$; 因此存在同构

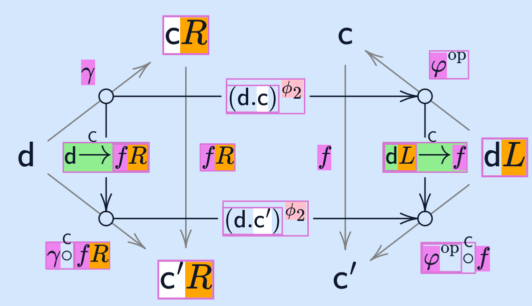
$$\begin{aligned} \phi_2 &: (\_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \_R) \xrightarrow{(\mathsf{D} \overset{c}{\times} \mathsf{C}) \overset{c}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (\_L \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \\ (\_\,.\,\mathsf{c})^{\phi_2} &: (\_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R) \xrightarrow{\mathsf{D} \overset{c}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (\_L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}) \\ (\mathsf{d}\,.\,\_)^{\phi_2} &: (\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \_R) \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{c}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \end{aligned}$$

- 先验证 $(\_\,.\,\mathsf{c})^{\phi_2}$ 构成自然变换 :



如此便证明了下方左侧的相继式 , 而这相当于下方右图。

$$\frac{\mathsf{d}L \xrightarrow{\varphi^{\mathrm{op}}} \mathsf{c} \xrightarrow{f} \mathsf{c}'}{\mathsf{d} \xrightarrow[\gamma]{} \mathsf{c}R \xrightarrow[fR]{} \mathsf{c}'R}$$



- 再验证 $(\mathsf{d}\,.\,\_)^{\phi_2}$ 构成自然变换 :