10 伴随函子

LaTeX Definitions are here.

若有函子 $L : D \xrightarrow{\mathsf{Cat}} C$
以及函子 $R : C \xrightarrow{\mathsf{Cat}} D$, 即

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[loop above, "{}_{:C}\mathrm{Id}"] \arrow[r, bend right, "R"'] & D \arrow[l, bend right, "L"'] \arrow[loop above, "{}_{:D}\mathrm{Id}"]
\end{tikzcd}$$

伴随函子的第一种定义

那么规定

- $L \dashv R$ 当且仅当
  函子 $(\_L \xrightarrow{C} \_)$ 和 $(\_ \xrightarrow{D} \_R)$
  间存在着一个二元的**自然同构**

假如确实有 $L \dashv R$，那么

- 对任意范畴 C 中的对象 c
  及任意范畴 D 中的对象 d
  及任意箭头 $\varphi^{op} : dL \xrightarrow{C} c$
  和任意的箭头 $\gamma : d \xrightarrow{D} cR$
  可用下述相继式描述它们的关系：

  $$\frac{dL \xrightarrow{f^{op}} c}{d \xrightarrow[g]{} cR}$$

此外由于 $L \dashv R$ 蕴含一个
二元自然同构，因此便会有

- 对任意范畴 C 中的对象 c
  及任意范畴 D 中的对象 d：
  - $(dL \xrightarrow{C} c) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (d \xrightarrow{D} cR)$
  - 对任意的 $f : c \xrightarrow{C} c'$ 以及
    及任意的 $g^{op} : d' \xrightarrow{D^{op}} d$
    有下述相继式：
    - $$\frac{dL \xrightarrow{\varphi^{op}} c \xrightarrow{f} c'}{d \xrightarrow[\gamma]{} cR \xrightarrow[fR]{} c'R}$$
    - $$\frac{d'L \xrightarrow{g^{op}L} dL \xrightarrow{\varphi^{op}} c}{d' \xrightarrow[g^{op}]{} d \xrightarrow[\gamma]{} cR}$$

后面你会发现刚才的性质可
构成伴随函子的第四种定义 。

现在开始证明一系列的性质：

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_2 ，见下：

$$\phi_2 : (\_ \xrightarrow{D} \_R) \xrightarrow{\overset{C}{(D\times C)} \xrightarrow{C} \mathrm{Set}} (\_L \xrightarrow{C} \_)$$
$$(\_ \,.\, c)^{\phi_2} : (\_ \xrightarrow{D} cR) \xrightarrow{D \xrightarrow{C} \mathrm{Set}} (\_L \xrightarrow{C} c)$$
$$(d \,.\, \_)^{\phi_2} : (d \xrightarrow{D} \_R) \xrightarrow{C \xrightarrow{C} \mathrm{Set}} (dL \xrightarrow{C} \_)$$

套用反变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{(\_ \xrightarrow{D} cR) \xrightarrow{D^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{Cat}} \mathrm{Set}} (\_L \xrightarrow{C} c))}_{一堆自然变换} \overset{\mathrm{Set}}{\cong} \underbrace{(cRL \xrightarrow{C} c)}_{一堆元素}$$

由反变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(\_ \,.\, c)^{\phi_2}$
右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 ${}_{:cR}\mathrm{id}(cR \,.\, c)^{\phi_2} = c^{\varepsilon}$ 。如此

- $\varepsilon : R \overset{\mathrm{Cat}}{\circ} L \xrightarrow{C \xrightarrow{\mathrm{Cat}} C} {}_{:C}\mathrm{Id}$ 构成自然变换。

考虑任意 $f^{\mathrm{op}} : c' \xrightarrow{C} c$:

$$\begin{tikzcd}
cR \xrightarrow{D} cR \arrow[r, "(cR.c)^{\phi_2}"] \arrow[d, "{f^{\mathrm{op}}R \xrightarrow{D} cR}"'] & cRL \xrightarrow{C} c \arrow[d, "{f^{\mathrm{op}}RL \xrightarrow{C} c}"] \\
c'R \xrightarrow{D} cR \arrow[r, dashed, "(c'R.c)^{\phi_2}"] & c'RL \xrightarrow{C} c \\
c'R \xrightarrow{D} c'R \arrow[r, "(c'R.c')^{\phi_2}"'] \arrow[u, "{c'R \xrightarrow{D} f^{\mathrm{op}}R}"] & c'RL \xrightarrow{C} c' \arrow[u, "{c'RL \xrightarrow{C} f^{\mathrm{op}}}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:cR}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(cR.c)^{\phi_2}"] \arrow[d, mapsto, "{f^{\mathrm{op}}R \xrightarrow{D} cR}"'] & {}_{:cR}\mathrm{id}(cR.c)^{\phi_2} = c^{\varepsilon} \arrow[d, mapsto, "{f^{\mathrm{op}}RL \xrightarrow{C} c = c^{(f^{\mathrm{op}}RL \overset{C}{\circ} _)}}"] \\
f^{\mathrm{op}}R \arrow[r, mapsto, "(c'R.c)^{\phi_2}"] & f^{\mathrm{op}}RL \overset{C}{\circ} c^{\varepsilon} = c'^{\varepsilon} \overset{C}{\circ} f^{\mathrm{op}} \\
{}_{:c'R}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(c'R.c')^{\phi_2}"'] \arrow[u, mapsto, "{c'R \xrightarrow{D} f^{\mathrm{op}}R}"] & {}_{:c'R}\mathrm{id}(c'R.c')^{\phi_2} = c'^{\varepsilon} \arrow[u, mapsto, "{c'RL \xrightarrow{C} f^{\mathrm{op}} = (c'RL)^{(_ \overset{C}{\circ} f^{\mathrm{op}})}}"']
\end{tikzcd}$$

上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图
其实就是反变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_1 ，见下：

$$\phi_1 : (\_L \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{\overset{C}{(D\times C)} \xrightarrow{C} \mathrm{Set}} (\_ \xrightarrow{D} \_R)$$
$$(\_ \,.\, c)^{\phi_1} : (\_L \xrightarrow{C} c) \xrightarrow{D \xrightarrow{C} \mathrm{Set}} (\_ \xrightarrow{D} cR)$$
$$(d \,.\, \_)^{\phi_1} : (dL \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{C \xrightarrow{C} \mathrm{Set}} (d \xrightarrow{D} \_R)$$

套用协变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{((dL \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{C \xrightarrow{\mathrm{Cat}} \mathrm{Set}} (d \xrightarrow{D} \_R))}_{一堆自然变换} \overset{\mathrm{Set}}{\cong} \underbrace{(d \xrightarrow{D} dLR)}_{一堆元素}$$

由协变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(d \,.\, \_)^{\phi_1}$
右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 ${}_{:dL}\mathrm{id}(d \,.\, dL)^{\phi_1} = d^{\eta}$ 。如此。

- $\eta : {}_{:D}\mathrm{Id} \xrightarrow{D \xrightarrow{\mathrm{Cat}} D} L \overset{\mathrm{Cat}}{\circ} R$ 构成自然变换。

考虑任意 $g : d \xrightarrow{D} d'$:

$$\begin{tikzcd}
dL \xrightarrow{C} dL \arrow[r, "(d.dL)^{\phi_1}"] \arrow[d, "{dL \xrightarrow{C} gL}"'] & d \xrightarrow{D} dLR \arrow[d, "{d \xrightarrow{D} gLR}"] \\
dL \xrightarrow{C} d'L \arrow[r, dashed, "(d.d'L)^{\phi_1}"] & d \xrightarrow{D} d'LR \\
d'L \xrightarrow{C} d'L \arrow[r, "(d'.d'L)^{\phi_1}"'] \arrow[u, "{gL \xrightarrow{C} d'L}"] & d' \xrightarrow{D} d'LR \arrow[u, "{g \xrightarrow{D} d'LR}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:dL}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(d.dL)^{\phi_1}"] \arrow[d, mapsto, "{dL \xrightarrow{C} gL}"'] & {}_{:dL}\mathrm{id}(d.dL)^{\phi_1} = d^{\eta} \arrow[d, mapsto, "{d \xrightarrow{D} gLR = d^{(_ \overset{D}{\circ} gLR)}}"] \\
gL \arrow[r, mapsto, "(d.d'L)^{\phi_1}"] & d^{\eta} \overset{D}{\circ} gLR = g \overset{D}{\circ} d'^{\eta} \\
{}_{:d'L}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(d'.d'L)^{\phi_1}"'] \arrow[u, mapsto, "{gL \xrightarrow{C} d'L}"] & {}_{:d'L}\mathrm{id}(d'.d'L)^{\phi_1} = d'^{\eta} \arrow[u, mapsto, "{g \xrightarrow{D} d'LR = (d'LR)^{(g \overset{D}{\circ} _)}}"']
\end{tikzcd}$$

上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图
其实就是协变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

对于前面的 ε 和 η 我们有下述交换图成立：

- $$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\eta\circ{:}L^{\iota}"] \arrow[dr, "{:}L^{\iota}"'] & L\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}R\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}L \arrow[d, "{:}L^{\iota}\circ\varepsilon"] \\
& L
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \\
\mathsf{D} \arrow[u, bend left=60, "L"] \arrow[u, bend right=60, "L"'] \arrow[u, phantom, "{:}L^{\iota}"] \\
\mathsf{D} \arrow[u, bend left=60, "{:}_{\mathsf{D}}\mathrm{Id}"] \arrow[u, bend right=60, "L\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}R"'] \arrow[u, phantom, "\eta"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \\
\mathsf{C} \arrow[u, bend left=60, "R\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}L"] \arrow[u, bend right=60, "{:}_{\mathsf{C}}\mathrm{Id}"'] \arrow[u, phantom, "\varepsilon"] \\
\mathsf{D} \arrow[u, bend left=60, "L"] \arrow[u, bend right=60, "L"'] \arrow[u, phantom, "{:}L^{\iota}"]
\end{tikzcd}$$
- $$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "{:}R^{\iota}\circ\eta"] \arrow[dr, "{:}R^{\iota}"'] & R\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}L\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}R \arrow[d, "\varepsilon\circ{:}R^{\iota}"] \\
& R
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{D} \\
\mathsf{D} \arrow[u, bend left=60, "{:}_{\mathsf{D}}\mathrm{Id}"] \arrow[u, bend right=60, "L\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}R"'] \arrow[u, phantom, "\eta"] \\
\mathsf{C} \arrow[u, bend left=60, "R"] \arrow[u, bend right=60, "R"'] \arrow[u, phantom, "{:}R^{\iota}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{D} \\
\mathsf{C} \arrow[u, bend left=60, "R"] \arrow[u, bend right=60, "R"'] \arrow[u, phantom, "{:}R^{\iota}"] \\
\mathsf{C} \arrow[u, bend left=60, "R\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}L"] \arrow[u, bend right=60, "{:}_{\mathsf{C}}\mathrm{Id}"'] \arrow[u, phantom, "\varepsilon"]
\end{tikzcd}$$

伴随函子的第二种定义

假设我们不知道 L 和 R 构成一对伴随函子并且有自然变换 $\varepsilon : R\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}L \xrightarrow{\mathsf{C}\to\mathsf{C}} {:}_{\mathsf{C}}\mathrm{Id}$ 和 $\eta : {:}_{\mathsf{D}}\mathrm{Id} \xrightarrow{\mathsf{D}\to\mathsf{D}} L\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}R$ 能同时满足上页开头的两幅交换图，即

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\eta\circ{:}L^{\iota}"] \arrow[dr, "{:}L^{\iota}"'] & L\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}R\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}L \arrow[d, "{:}L^{\iota}\circ\varepsilon"] \\
& L
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "{:}R^{\iota}\circ\eta"] \arrow[dr, "{:}R^{\iota}"'] & R\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}L\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}R \arrow[d, "\varepsilon\circ{:}R^{\iota}"] \\
& R
\end{tikzcd}$$

那么

- 对任意 C 中对象 c
  及任意 D 中对象 d：
  对任意 $\varphi^{\mathrm{op}} : \mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$ 始终存在
  唯一的 $\gamma : \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R$ 使下图交换。
  如此有 $(\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R)$。

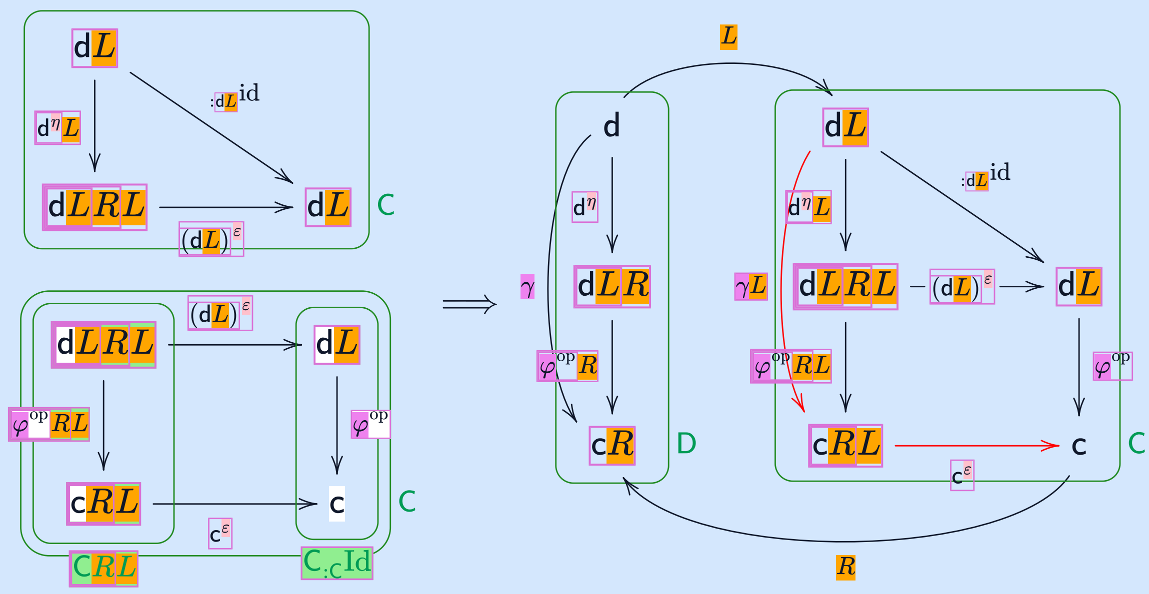
$$\begin{tikzcd}
\mathsf{c}R & & \mathsf{c}RL \arrow[r, "\mathsf{c}^{\varepsilon}"] & \mathsf{c} \arrow[lll, bend right, "R"'] \\
\mathsf{d} \arrow[u, dashed, "\gamma"] \arrow[rr, bend right, "L"'] & \mathsf{D} & \mathsf{d}L \arrow[u, dashed, "\gamma L"] \arrow[ur, "\varphi^{\mathrm{op}}"'] & \mathsf{C}
\end{tikzcd}$$

- 对任意 C 中对象 c
  及任意 D 中对象 d
  及任意 $\gamma : \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R$ 始终都会存在
  唯一的 $\varphi^{\mathrm{op}} : \mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$ 使下图交换。
  如此有 $(\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R)$。

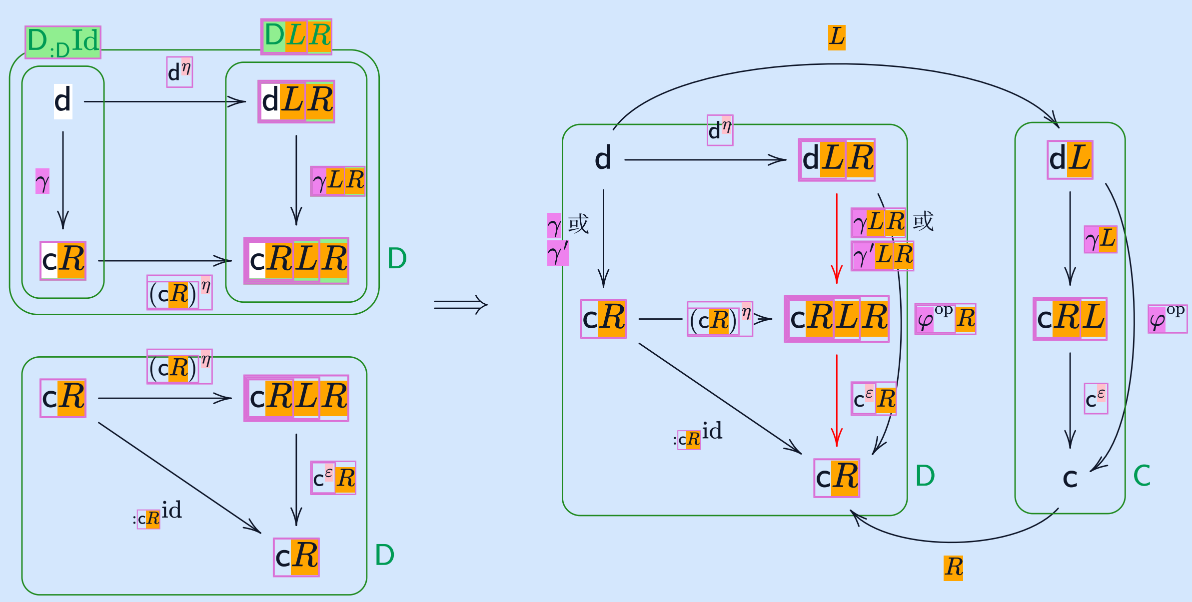
$$\begin{tikzcd}
\mathsf{d}L & & \mathsf{d}LR & \mathsf{d} \arrow[l, "\mathsf{d}^{\eta}"'] \arrow[lll, bend right, "L"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
\mathsf{c} \arrow[from=1-1, dashed, "\varphi^{\mathrm{op}}"'] \arrow[rr, bend right, "R"'] & \mathsf{C} & \mathsf{c}R \arrow[from=1-3, dashed, "\varphi^{\mathrm{op}}R"'] & \mathsf{D}
\end{tikzcd}$$

现证明上页的头两条定理。

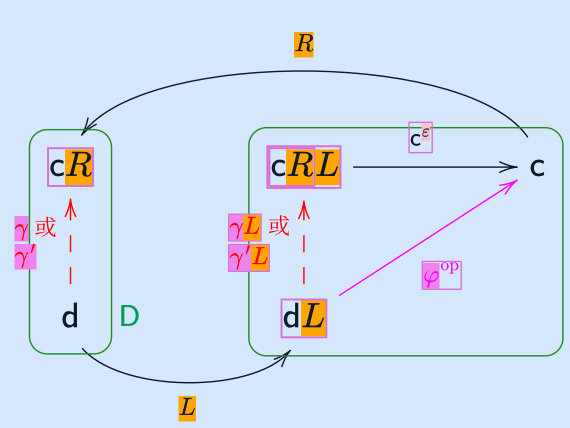
下图左侧中上半部分即为上页第一幅图，而
下图左侧下半部分可通过 ε 为自然变换得出；
将两图拼在一起即可获得下图右侧的交换图，
如此便证明了 γ 的存在性。



下图左侧中上半部分即为上页第二幅图，而
下图左侧下半部分可通过 η 为自然变换得出；
将两图拼在一起即可获得下图右侧的交换图，
此图可用于证 γ 的唯一性。



为何 γ 唯一呢？假如 γ' 亦满足下图，即不论
γ 还是 γ' 它们与 c^ε 的复合结果始终为 φ^{op}，
那么也就意味着上图右侧交换图中红色路径
的复合结果始终是一致的，如此 $\gamma = \gamma'$。



另一侧同理，这里不再赘述。

伴随函子的第三种定义

假设我们不知道 L 和 R 构成一对伴随函子并且有自然变换
$\varepsilon : R \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} L \xrightarrow{\mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{C}} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id}$ 和 $\eta : {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id} \xrightarrow{\mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{D}} L \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} R$, 那么会有

- 若对任意 C 中对象 c
  及对任意 D 中对象 d
  及对任意 $\varphi^{\mathrm{op}} : \mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$ 始终都会
  有唯一的 $\gamma : \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R$ 使下图交换，

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{c}R & & \mathsf{c}RL \arrow[r, "\mathsf{c}^{\varepsilon}"] & \mathsf{c} \arrow[lll, bend right, "R"'] \\
\mathsf{d} \arrow[u, dashed, "\gamma"] \arrow[rr, bend right, "L"'] & \mathsf{D} & \mathsf{d}L \arrow[u, dashed, "\gamma L"] \arrow[ur, "\varphi^{\mathrm{op}}"'] & \mathsf{C}
\end{tikzcd}$$

  那么

$$\begin{aligned}
\phi_2 &: (_ \overset{\mathsf{D}}{\to} _R) \xrightarrow{(\mathsf{D} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{C}) \overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (_L \overset{\mathsf{C}}{\to} _) \\
(_ \,.\, \mathsf{c})^{\phi_2} &: (_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R) \xrightarrow{\mathsf{D} \overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \\
(\mathsf{d} \,.\, _)^{\phi_2} &: (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} _R) \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} _)
\end{aligned}$$

  将构成自然同构 。

- 若对任意 C 中对象 c
  及对任意 D 中对象 d
  及对任意 $\gamma : \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R$ 始终都存在
  唯一的 $\varphi^{\mathrm{op}} : \mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$ 使下图交换，

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{d}L \arrow[d, dashed, "\varphi^{\mathrm{op}}"'] & & \mathsf{d}LR \arrow[d, dashed, "\varphi^{\mathrm{op}}R"'] & \mathsf{d} \arrow[l, "\mathsf{d}^{\eta}"'] \arrow[dl, "\gamma"] \arrow[lll, bend right, "L"'] \\
\mathsf{c} \arrow[rr, bend right, "R"'] & \mathsf{C} & \mathsf{c}R & \mathsf{D}
\end{tikzcd}$$

  那么

$$\begin{aligned}
\phi_1 &: (_L \overset{\mathsf{C}}{\to} _) \xrightarrow{(\mathsf{D} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{C}) \overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (_ \overset{\mathsf{D}}{\to} _R) \\
(_ \,.\, \mathsf{c})^{\phi_1} &: (_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \xrightarrow{\mathsf{D} \overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R) \\
(\mathsf{d} \,.\, _)^{\phi_1} &: (\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} _) \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} _R)
\end{aligned}$$

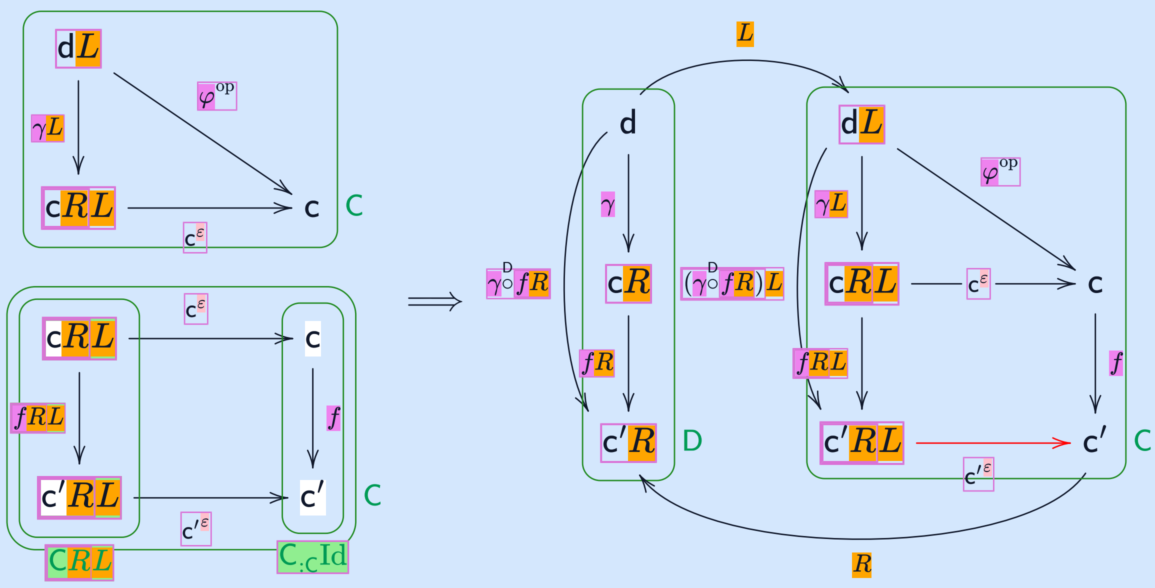
  将构成自然同构 。

只证上页第一条定理，另一个雷同。

由定理的假设可知 $(\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R)$；因此存在同构

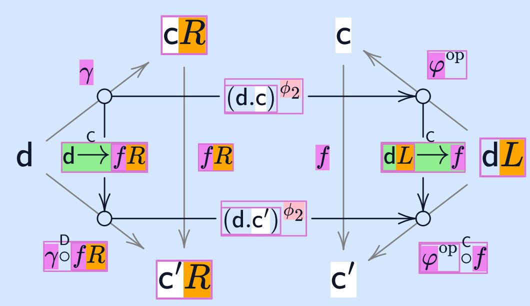
$$\begin{aligned}
\phi_2 &: (_ \xrightarrow{\mathsf{D}} _R) \xrightarrow{(\mathsf{D}\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{C})\xrightarrow{\mathsf{C}}\mathsf{Set}} (_L \xrightarrow{\mathsf{C}} _) \\
(_\,.\,\mathsf{c})^{\phi_2} &: (_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R) \xrightarrow{\mathsf{D}\xrightarrow{\mathsf{C}}\mathsf{Set}} (_L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}) \\
(\mathsf{d}\,.\,_)^{\phi_2} &: (\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} _R) \xrightarrow{\mathsf{C}\xrightarrow{\mathsf{C}}\mathsf{Set}} (\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} _)
\end{aligned}$$

- 先验证 $(\mathsf{d}\,.\,\_)^{\phi_2}$ 构成自然变换。和上上页一样也是拼图：

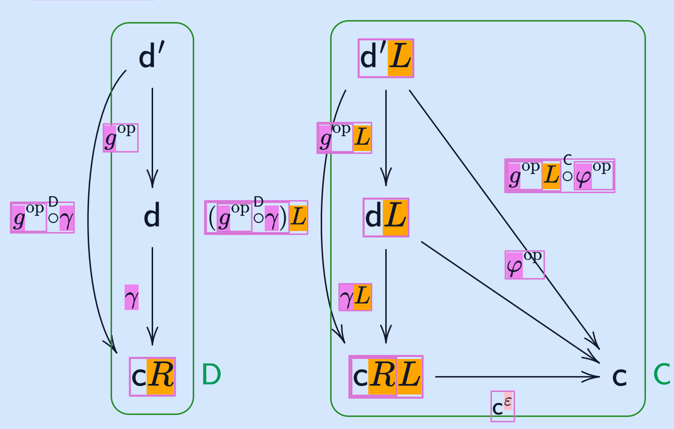


如此也就证明了下方左侧的相继式，而这相当于下方右图。

$$\frac{\mathsf{d}L \xrightarrow{\varphi^{\mathrm{op}}} \mathsf{c} \xrightarrow{f} \mathsf{c}'}{\mathsf{d} \xrightarrow[\gamma]{} \mathsf{c}R \xrightarrow[fR]{} \mathsf{c}'R}$$

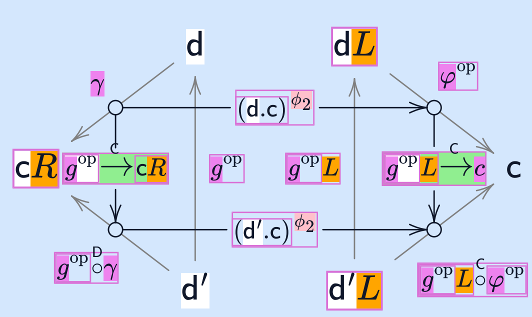


- 再验证 $(\_\,.\,\mathsf{c})^{\phi_2}$ 构成自然变换：



如此也就证明了下方左侧的相继式，而这相当于下方右图。

$$\frac{\mathsf{d}'L \xrightarrow{g^{\mathrm{op}}L} \mathsf{d}L \xrightarrow{\varphi^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}}{\mathsf{d}' \xrightarrow[g^{\mathrm{op}}]{} \mathsf{d} \xrightarrow[\gamma]{} \mathsf{c}R}$$



如此 ϕ_2 便构成了一个二元的自然同构。即证。