

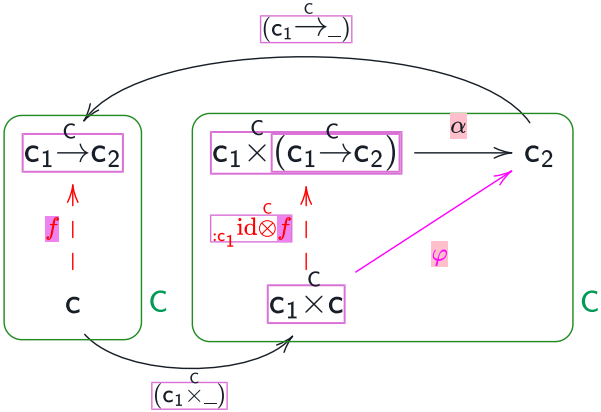
06 类型的幂

L^AT_EX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} : ((\overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}}^{\text{op}} \overset{\text{Cat}}{\times} \overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}}) \overset{\text{Cat}}{\rightarrow} \overset{\mathcal{C}}{\mathcal{C}})$ 在范畴 \mathcal{C} 中有下述性质：

- $(\overset{\mathcal{C}}{c_1} \overset{\mathcal{C}}{\times} \overset{\mathcal{C}}{c}) \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \overset{\mathcal{C}}{c_2} \cong \overset{\text{Set}}{c} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} (\overset{\mathcal{C}}{c_1} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \overset{\mathcal{C}}{c_2}) \cong \overset{\text{Set}}{c_1} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} (\overset{\mathcal{C}}{c} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \overset{\mathcal{C}}{c_2})$
—— c 为任意 \mathcal{C} 中对象。此即为幂的泛性质，亦表示了指数加乘法之间的运算关系。

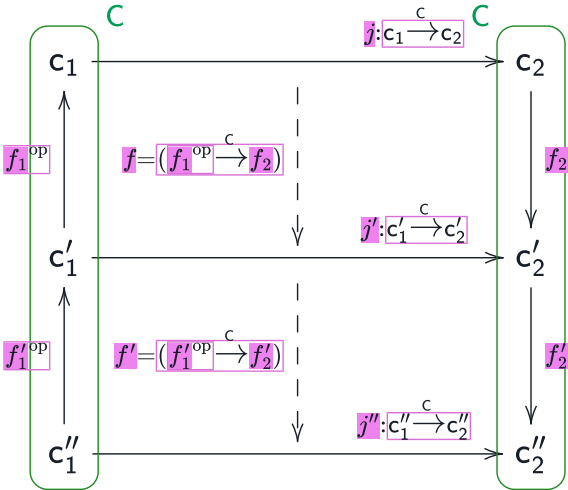
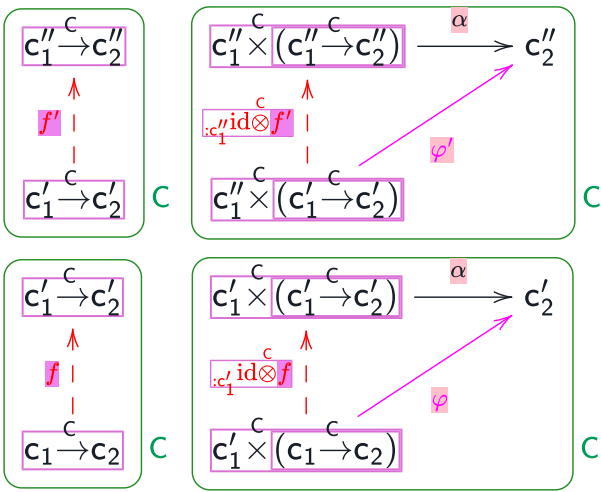


函子性

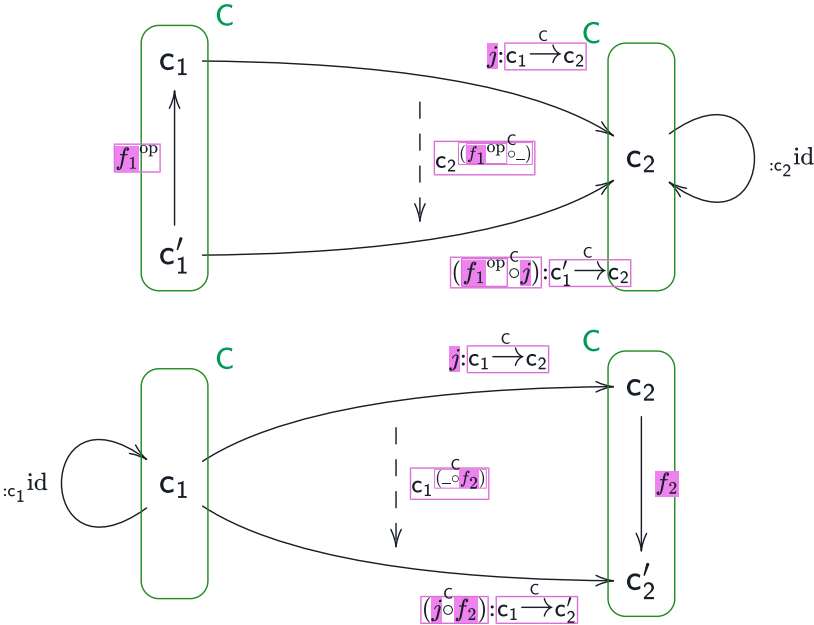
如何证明 $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} : (:\overset{\mathcal{C}}{c_1} \text{id} . : \overset{\mathcal{C}}{c_2} \text{id}) \mapsto :(\overset{\mathcal{C}}{c_1} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \overset{\mathcal{C}}{c_2}) \text{id}$
—— 即函子 $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow}$ 能保持恒等箭头；
- $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} : ((f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} f'_1 . f_2 \overset{\mathcal{C}}{\circ} f'_2)) \mapsto ((f \overset{\mathcal{C}}{\circ} f'))$
—— 即函子 $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow}$ 保持箭头复合运算。

下图有助于形象理解证明过程：



下图（自上到下分别为图 1 和图 2）后面会用到。



范畴 \mathcal{C} 内任意两对象 c_1 和 c_2 间的箭头构成一个集合 $\boxed{c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2}$,
 说明 $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ 只能将两个对象打到一个集合 ; 下面使 $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ 升级为函子 :
 若还知道箭头 $f_1^{\text{op}} : \boxed{c'_1 \xrightarrow{\mathcal{C}^{\text{op}}} c_1}$ 以及 $f_2 : \boxed{c_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} c'_2}$, 则规定

- $\boxed{(_ \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2)} : \boxed{\mathcal{C}^{\text{op}} \times^{\text{Cat}} \mathcal{C}} \xrightarrow{\text{Cat}} \text{Set}$ 为函子且
 $\boxed{(_ \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2)} : c \mapsto \boxed{(c \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2)}$ 且对任意 $f^{\text{op}} : \boxed{c' \xrightarrow{\mathcal{C}} c}$ 有
 $\boxed{(_ \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2)} : f^{\text{op}} \mapsto \boxed{(f^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2)} = \boxed{(f^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} :_{c_2} \text{id})} = \boxed{c_2 (f^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)} \quad$

图 1 有助于理解。

$$\begin{aligned} \boxed{(_ \xrightarrow{\mathcal{C}} f_2)} : \boxed{\mathcal{C}^{\text{op}} \times^{\text{Cat}} \mathcal{C}} &\xrightarrow{\text{Cat}} \text{Set}, \\ \boxed{(_ \xrightarrow{\mathcal{C}} f_2)} : c &\mapsto \boxed{(c \xrightarrow{\mathcal{C}} f_2)} = \boxed{(_ \cdot \text{id} \xrightarrow{\mathcal{C}} f_2)} = \boxed{c_2 (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2)} \text{ 且对任意 } f^{\text{op}} : \boxed{c' \xrightarrow{\mathcal{C}^{\text{op}}} c} \text{ 有} \\ \boxed{(_ \xrightarrow{\mathcal{C}} f_2)} : f^{\text{op}} &\mapsto \boxed{(f^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} f_2)} = \boxed{(f^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)} \overset{???}{\circ} \boxed{(_ \xrightarrow{\mathcal{C}} f_2)} = \boxed{(_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2)} \overset{???}{\circ} \boxed{(f^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)} \end{aligned}$$

图 2 有助于理解。

Note

不难看出

- よ : $\boxed{\mathcal{C} \xrightarrow{\text{Cat}} (\mathcal{C}^{\text{op}} \xrightarrow{\text{Set}} \text{Set})}$
 $c_2 \mapsto \boxed{(c_2 \xrightarrow{\mathcal{C}^{\text{op}}} _)} = \boxed{(_ \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2)}$ 构成一个函子
 $f_2 \mapsto \boxed{(f_2 \xrightarrow{\mathcal{C}^{\text{op}}} _)} = \boxed{(_ \xrightarrow{\mathcal{C}} f_2)} = \boxed{(_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2)}$ 构成一个函子间映射 , 即自然变换

该函子称作是**米田嵌入**。

- $\boxed{(c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} _)} : \boxed{\mathcal{C}^{\text{op}} \times^{\text{Cat}} \mathcal{C}} \xrightarrow{\text{Cat}} \text{Set}$ 为函子且
 $\boxed{(c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} _)} : c \mapsto \boxed{(c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c)}$, 且对任意 $f : \boxed{c \xrightarrow{\mathcal{C}} c'}$ 有
 $\boxed{(c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} _)} : f \mapsto \boxed{(c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} f)} = \boxed{(_ \cdot c_1 \text{id} \xrightarrow{\mathcal{C}} f)} = \boxed{c_1 (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f)}$

图 2 有助于理解。

$$\begin{aligned} \boxed{(f_1^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} _)} : \boxed{\mathcal{C}^{\text{op}} \times^{\text{Cat}} \mathcal{C}} &\xrightarrow{\text{Cat}} \text{Set}, \\ \boxed{(f_1^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} _)} : c &\mapsto \boxed{(f_1^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} c)} = \boxed{(f_1^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} :_c \text{id})} = \boxed{c (f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)} \text{ 且对任意 } f : \boxed{c \xrightarrow{\mathcal{C}} c'} \text{ 有} \\ \boxed{(f_1^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} _)} : f &\mapsto \boxed{(f_1^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} f)} = \boxed{(f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)} \overset{???}{\circ} \boxed{(_ \xrightarrow{\mathcal{C}} f)} = \boxed{(_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f)} \overset{???}{\circ} \boxed{(f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)} \end{aligned}$$

图 1 有助于理解。

Note

不难看出

- 尤 : $\boxed{\mathcal{C}^{\text{op}} \xrightarrow{\text{Cat}} (\mathcal{C} \xrightarrow{\text{Set}} \text{Set})}$
 $c_1 \mapsto \boxed{(c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} _)} \quad$ 构成一个函子
 $f_1^{\text{op}} \mapsto \boxed{(f_1^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} _)} = \boxed{(f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)} \quad$ 构成一个函子间映射 , 即自然变换

该函子戏称为**尤达嵌入**。

积闭范畴

这里插个题外话 :

若范畴包含终对象 , 所有类型的积以及指数 , 则可将其称作**积闭范畴** ;

若范畴包含始对象 , 所有类型的和 , 则可将其称作是**余积闭范畴** ;

若范畴满足上述条件 , 则可称作**双积闭范畴**。

很明显我们讨论的范畴 \mathcal{C} 就是**双积闭范畴**。