08-09 函子和自然变换

LaTeX Definitions are here.

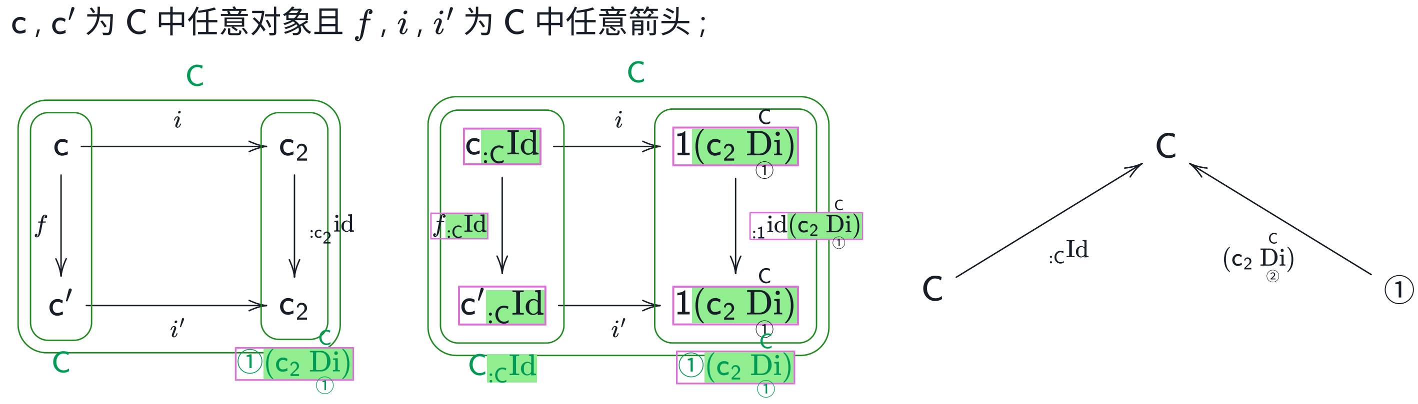
一些特殊的范畴

现在规定几种特殊的范畴。

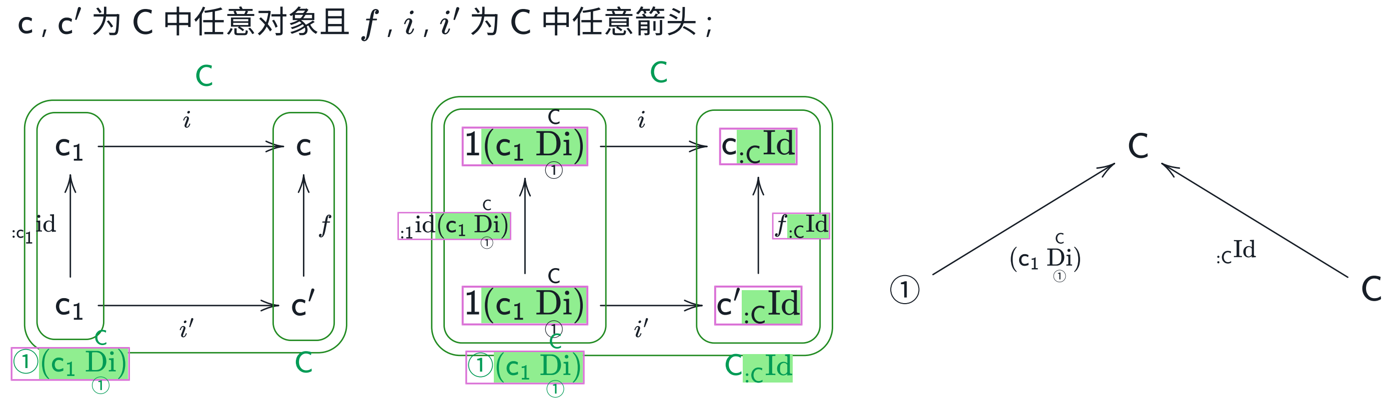
- **离散范畴**：只有对象不含箭头（恒等箭头除外）的范畴。
- Set：**所有集合构成的范畴**，为局部小范畴，满足
  - Set 中对象为任意集合；
  - Set 中箭头为集合间映射。
- Cat：**所有范畴构成的范畴**，满足
  - Cat 中任何对象都构成一个范畴；
  - Cat 中任何箭头都构成一个函子。

若 C，D 为 Cat 中对象，则：

- C^{op}：**反范畴**，满足
  - C^{op} 中对象皆形如 c，
    c 为任意 C 中的对象；
  - C^{op} 中箭头皆形如 $i^{\mathrm{op}} : \mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}_1$，
    $i : \mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 可为任意 C 中的箭头。
- $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{D}$：**积范畴**，满足
  - $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{D}$ 中对象皆形如 c . d，
    c，d 分别为任意 C，D 中的对象；
  - $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{D}$ 中箭头皆形如 $i \mathbin{.} j$，
    i，j 分别为任意 C，D 中的箭头。
- $\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$：**所有 C 到 D 的函子的范畴**，满足
  - $\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 中任何对象
    都是 C 到 D 的函子；
  - $\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 中任何箭头
    都是函子间自然变换。
- C/c：**俯范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
  - C/c_2 中对象皆形如 $\cancel{\mathsf{c} \mathbin{.} 1} \mathbin{.} i$，其中 c 和
    $i : \mathsf{c} \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
  - c_2/C 中箭头皆形如 $f \cancel{\mathbin{.} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}}$ 且满足下述交换图，其中
    c，c′ 为 C 中任意对象且 f，i，i' 为 C 中任意箭头；



- c_1/C：**仰范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
  - c_1/C 中对象皆形如 $\cancel{1 \mathbin{.} \mathsf{c}} \mathbin{.} i$，其中 c 和
    $i : \mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
  - C/c_1 中箭头皆形如 $\cancel{{}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}} \mathbin{.} f$ 且满足下述交换图，其中
    c，c′ 为 C 中任意对象且 f，i，i' 为 C 中任意箭头；



函子

接下来我们来提供函子的正式定义：

- $F : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为**函子**当且仅当
    - 对任意 C 中对象 c，$\mathsf{c}F$ 为 D 中对象且 ${}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}F = {}_{:\mathsf{c}F}\mathrm{id}$；
    - 对任意 C 中箭头 $i_1 : \mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 和 $i_2 : \mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_3$，始终都有等式 $(i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2)F = i_1F \overset{\mathsf{D}}{\circ} i_2F$ 成立。

函子的复合运算

若已确信 $F : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为函子并
且还知道 $G : \mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$ 为函子则

- $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$
  也构成一个函子。

恒等函子

对于函子我们也有恒等映射，即：

- $$\begin{aligned} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id} \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} F &= F \\ &= F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id} \end{aligned}$$

忠实，完全和本质满函子

若 C，D，E 皆为**局部小范畴**，则

- F 是**忠实的**当且仅当对任意 C 中的对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$，$\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 与 $\mathsf{c}_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}_2F$ 之间始终都存在单射；
- F 是**完全的**当且仅当对任意 C 中的对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$，$\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 与 $\mathsf{c}_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}_2F$ 之间始终都存在满射；
- F 是**完全忠实的**当且仅当任意 C 中对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$，$\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 与 $\mathsf{c}_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}_2F$ 之间始终都存在双射。

> ⓘ **Note**
>
> 刚才提到的 “ 单 / 满 / 双射 ”
> 针对的都是范畴的箭头部分。

- F 是**本质满的**当且仅当对任意 D 中对象 d 都存在 C 中对象 c 使 $\mathsf{c}F \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{d}$ 之间有双射。

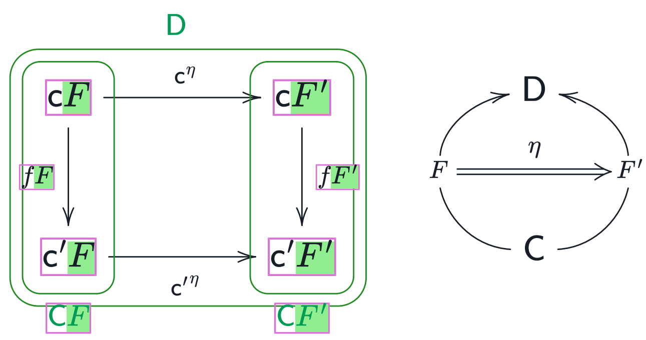
根据刚才的信息我们不难得知

- 若 F，G 为忠实函子
  则 $G \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为忠实函子；
- 若 F，G 为完全函子
  则 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为完全函子；
- 若 F，G 为完全忠实函子
  则 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为完全忠实函子；
- 若 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为完全忠实函子
  且知道 G 为完全忠实函子
  则可知 F 为完全忠实函子；
- 若 F，G 为本质满函子
  则 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为本质满函子。

自然变换

如果还知道 F' : C $\xrightarrow{\text{Cat}}$ D 为函子，那么

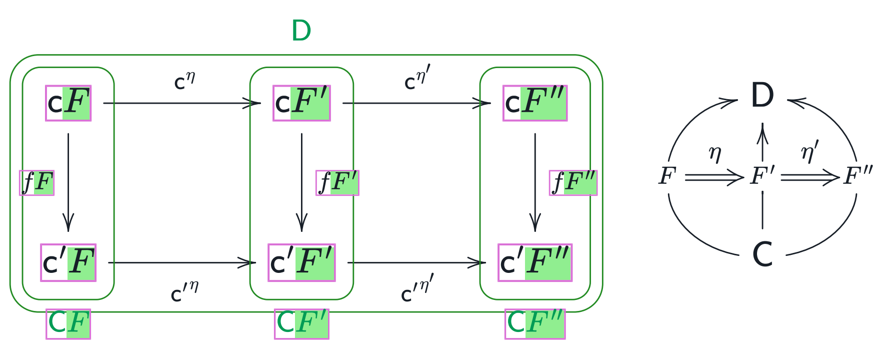
- $\eta : F \xrightarrow{\mathsf{C}\xrightarrow{\text{Cat}}\mathsf{D}} F'$ 为自然变换当且仅当对任意 C 中对象 c，c′ 始终都会有下述交换图成立：



自然变换的复合

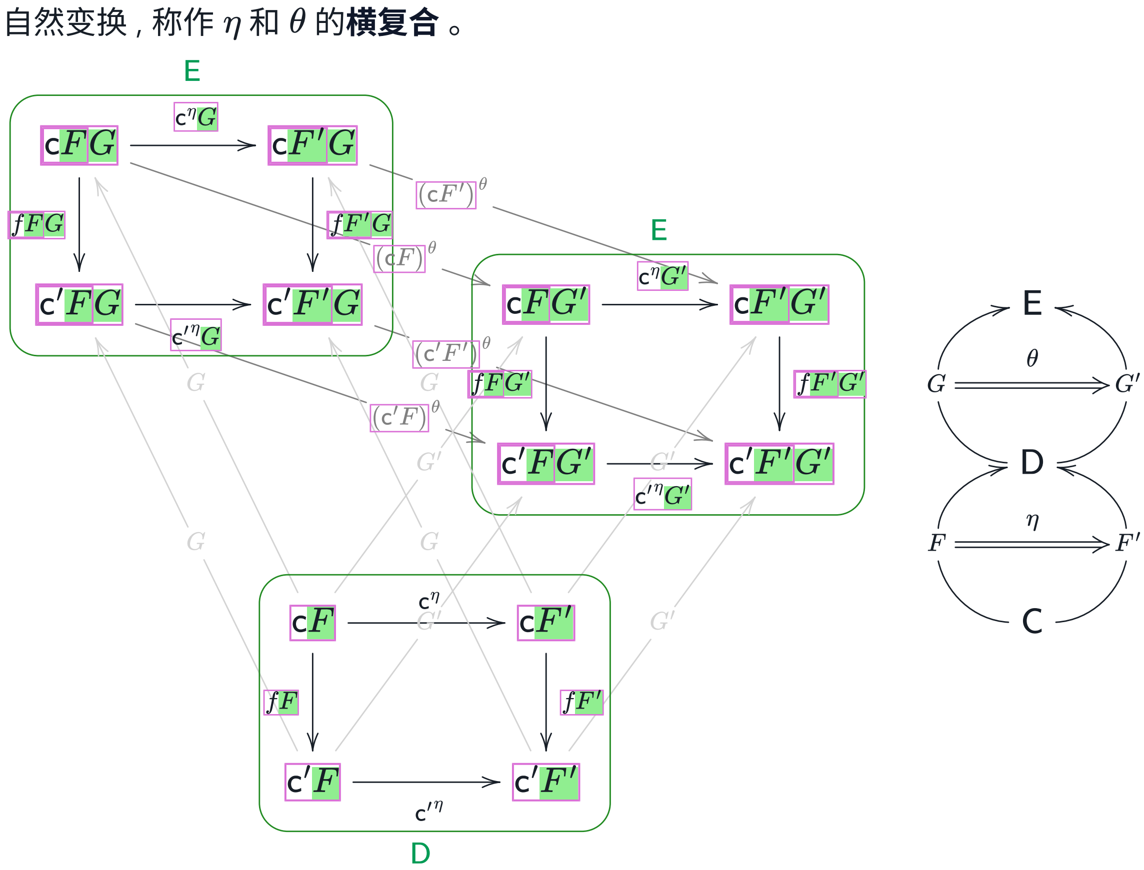
若已知 $\eta : F \xrightarrow{\mathsf{C}\xrightarrow{\text{Cat}}\mathsf{D}} F'$ 构成自然变换且
还知道 $\eta' : F' \xrightarrow{\mathsf{C}\xrightarrow{\text{Cat}}\mathsf{D}} F''$ 为自然变换则

- $\eta \overset{\mathsf{C}\xrightarrow{\text{Cat}}\mathsf{D}}{\circ} \eta' : F \xrightarrow{\mathsf{C}\xrightarrow{\text{Cat}}\mathsf{D}} F''$ 为自然变换，称作 η 和 η' 的**纵复合**。



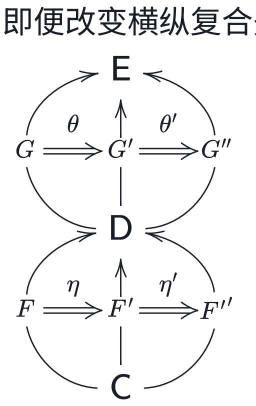
如果还知道 G' : D $\xrightarrow{\text{Cat}}$ E 也是个函子
及自然变换 $\theta : G \xrightarrow{\mathsf{D}\xrightarrow{\text{Cat}}\mathsf{E}} G'$ 那么便有

- $\eta \circ \theta : F \overset{\text{Cat}}{\circ} G \xrightarrow{\mathsf{C}\xrightarrow{\text{Cat}}\mathsf{E}} F' \overset{\text{Cat}}{\circ} G'$ 为自然变换，称作 η 和 θ 的**横复合**。



若 $\theta' : G \xrightarrow{\mathsf{D}\xrightarrow{\text{Cat}}\mathsf{E}} G'$ 为自然变换则

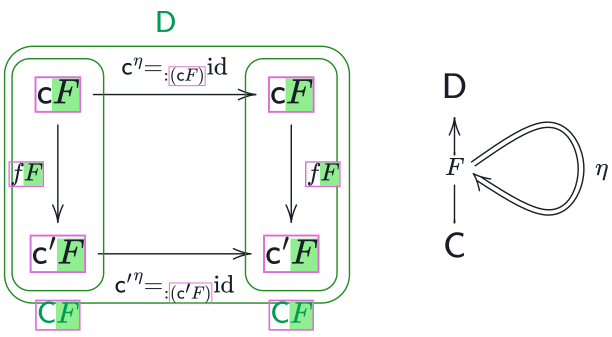
- $(\eta \circ \theta) \overset{\mathsf{C}\xrightarrow{\text{Cat}}\mathsf{E}}{\circ} (\eta' \circ \theta') = (\eta \overset{\mathsf{C}\xrightarrow{\text{Cat}}\mathsf{D}}{\circ} \eta') \circ (\theta \overset{\mathsf{D}\xrightarrow{\text{Cat}}\mathsf{E}}{\circ} \theta')$，
  即便改变横纵复合先后顺序也不影响最终结果。



恒等自然变换

同样对于自然变换也有恒等映射 。

- ${}_{:F}\iota : F \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{D}}} F$ 为恒等自然变换当且仅当
  对范畴 C 中任意对象 c 都有下述交换图成立 :



自然同构

自然同构与你想象中的同构不太像 。

- $\eta : F \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{D}}} F'$ 为**自然同构**当且仅当
  c^η 总是同构 , 这里 c 为任意 C 中对象 。
  此时 F , F' 的关系可用 $F \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{D}}}{\cong} F'$ 表示

范畴等价的定义

我们用自然同构来定义范畴的等价 。

- $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\cong} \mathsf{D}$ 当且仅当
  存在函子 $F : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 及 $F' : \mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}$
  使 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} F' \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{C}}}{\cong} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{id}$ 并且有 $F' \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} F \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{D}\longrightarrow\mathsf{D}}}{\cong} {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{id}$ 。