LaTeX Definitions are here.

函子

接下来我们来提供函子的正式定义：

- $F : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为**函子**当且仅当
  - 对任意 C 中对象 c，cF 为 D 中对象且 ${}_{:c}\mathrm{id}F = {}_{:cF}\mathrm{id}$；
  - 对任意 C 中箭头 $i_1 : c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2$ 和 $i_2 : c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_3$，始终都有等式 $(i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2)F = i_1F \overset{\mathsf{D}}{\circ} i_2F$ 成立。

若已确信 $F : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为函子且
还知 C 中有对象 c_1, c_2
以及 C 中有箭头 $i : c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2$ 则

- 若 i 为单态 / 满态 / 同构
  则 iF 为单态 / 满态 / 同构；
- 若 iF 为同构
  则 i 为同构。

> **Note**
>
> 不难发现函子具有保持
> 对象 / 态射性质的能力。

函子的复合运算

若还知道 $G : \mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$ 为函子则

- $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$
  也构成一个函子。

恒等函子

对于函子我们也有恒等映射，即：

- $$\begin{aligned} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id} \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} F &= F \\ &= F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id} \end{aligned}$$

忠实，完全和本质满函子

若 C，D，E 皆为**局部小范畴**，则

- F 是**忠实的**当且仅当对任意 C 中的对象 c_1, c_2，
  $c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2$ 与 $c_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} c_2F$ 之间始终都存在单射；
- F 是**完全的**当且仅当对任意 C 中的对象 c_1, c_2，
  $c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2$ 与 $c_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} c_2F$ 之间始终都存在满射；
- F 是**完全忠实的**当且仅当任意 C 中对象 c_1, c_2，
  $c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2$ 与 $c_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} c_2F$ 之间始终都存在双射。

> **Note**
>
> 刚才提到的“单 / 满 / 双射”
> 针对的都是范畴的箭头部分。

- F 是**本质满的**当且仅当对任意 D 中对象 d
  都存在 C 中对象 c 使 $cF \xrightarrow{\mathsf{D}} d$ 之间有双射。

根据刚才的信息我们不难得知

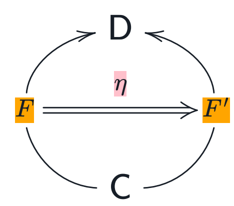
- 若 F，G 为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满函子
  则 $G \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满 函子；
- 若 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为完全忠实函子
  且知道 G 为完全忠实函子
  则可知 F 为完全忠实函子；

自然变换

如果还知道 F' : $\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为函子，那么

- $\eta : F \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}} F'$ 为自然变换当且仅当对任意 C 中对象 c，c′ 始终都会有下述交换图成立：

$$\begin{tikzcd} \mathsf{c}F \arrow[r, "\mathsf{c}^{\eta}"] \arrow[d, "fF"'] & \mathsf{c}F' \arrow[d, "fF'"] \\ \mathsf{c}'F \arrow[r, "\mathsf{c}'^{\eta}"'] & \mathsf{c}'F' \end{tikzcd}$$

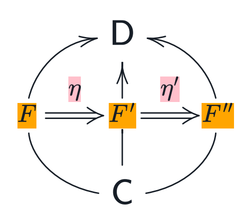


自然变换的复合

若已知 $\eta : F \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}} F'$ 构成自然变换且
还知道 $\eta' : F' \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}} F''$ 为自然变换则

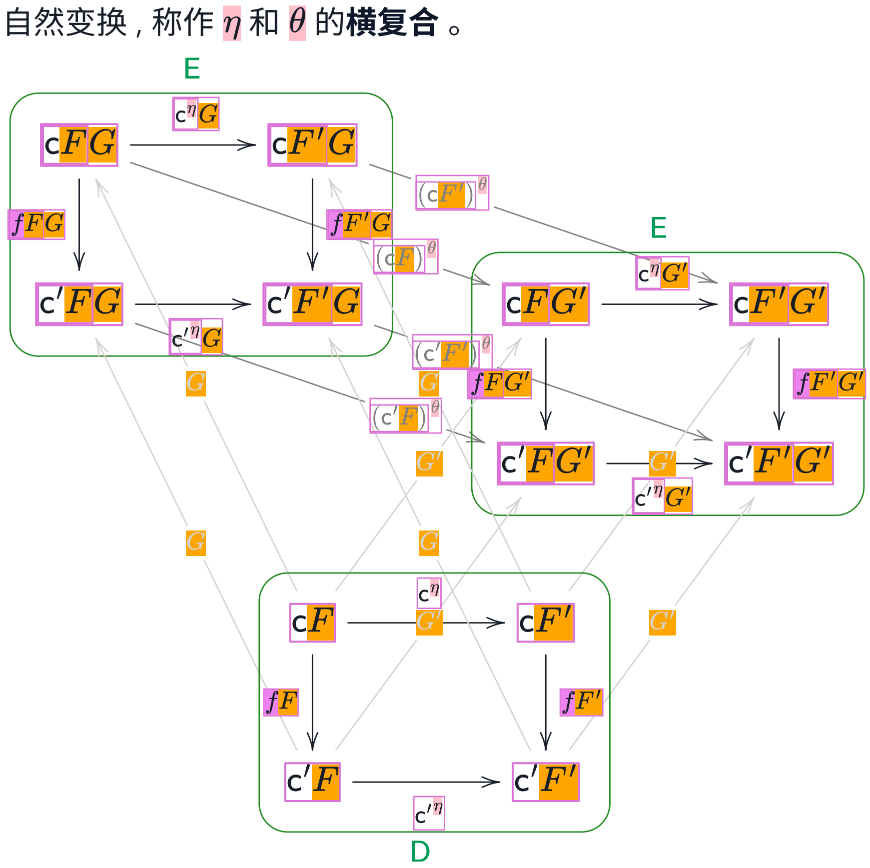
- $\eta \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}}{\circ} \eta' : F \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}} F''$ 为自然变换，称作 η 和 η' 的**纵复合**。

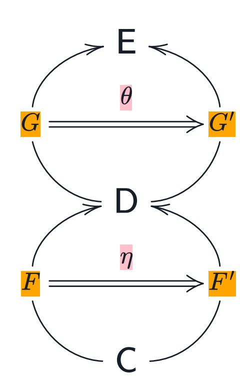
$$\begin{tikzcd} \mathsf{c}F \arrow[r, "\mathsf{c}^{\eta}"] \arrow[d, "fF"'] & \mathsf{c}F' \arrow[r, "\mathsf{c}^{\eta'}"] \arrow[d, "fF'"] & \mathsf{c}F'' \arrow[d, "fF''"] \\ \mathsf{c}'F \arrow[r, "\mathsf{c}'^{\eta}"'] & \mathsf{c}'F' \arrow[r, "\mathsf{c}'^{\eta'}"'] & \mathsf{c}'F'' \end{tikzcd}$$



如果还知道 G' : $\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$ 也是个函子
及自然变换 $\theta : G \xrightarrow{\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}} G'$ 那么便有

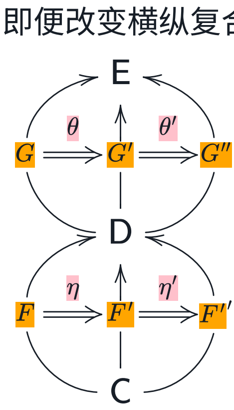
- $\eta \circ \theta : F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}} F' \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G'$ 为自然变换，称作 η 和 θ 的**横复合**。





若 $\theta' : G \xrightarrow{\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}} G'$ 为自然变换则

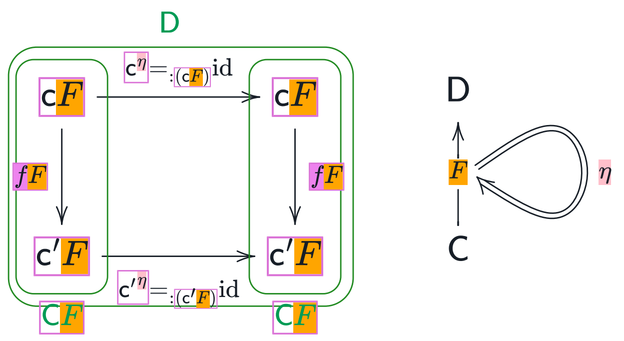
- $(\eta \circ \theta) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}}{\circ} (\eta' \circ \theta') = (\eta \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}}{\circ} \eta') \circ (\theta \overset{\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}}{\circ} \theta')$，
即便改变横纵复合先后顺序也不影响最终结果。



恒等自然变换

同样对于自然变换也有恒等映射 。

- ${}_{:F}\iota : F \xrightarrow{\overset{\text{Cat}}{\mathrm{C}\longrightarrow\mathrm{D}}} F$ 为恒等自然变换当且仅当
  对范畴 C 中任意对象 c 都有下述交换图成立 :



自然同构

自然同构与你想象中的同构不太像 。

- $\eta : F \xrightarrow{\overset{\text{Cat}}{\mathrm{C}\longrightarrow\mathrm{D}}} F'$ 为**自然同构**当且仅当
  c^{η} 总是同构 , 这里 c 为任意 C 中对象 。

  此时 F , F' 的关系可用 $F \overset{\overset{\text{Cat}}{\mathrm{C}\longrightarrow\mathrm{D}}}{\cong} F'$ 表示

范畴等价的定义

我们用自然同构来定义范畴的等价 。

- $\mathrm{C} \overset{\text{Cat}}{\cong} \mathrm{D}$ 当且仅当
  存在函子 F : $\mathrm{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathrm{D}$ 及 F' : $\mathrm{D} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathrm{C}$
  使 $F \overset{\text{Cat}}{\circ} F' \overset{\overset{\text{Cat}}{\mathrm{C}\longrightarrow\mathrm{C}}}{\cong} {}_{:\mathrm{C}}\mathrm{id}$ 并且有 $F' \overset{\text{Cat}}{\circ} F \overset{\overset{\text{Cat}}{\mathrm{D}\longrightarrow\mathrm{D}}}{\cong} {}_{:\mathrm{D}}\mathrm{id}$ 。