10 伴随函子

LaTeX Definitions are here.

若有函子 L : $\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}$
以及函子 R : $\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$, 即

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[loop above, "{}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id}"] \arrow[rr, bend right, "R"'] & & \mathsf{D} \arrow[ll, bend right, "L"'] \arrow[loop above, "{}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id}"]
\end{tikzcd}$$

伴随函子的第一种定义

那么规定

- $L \dashv R$ 当且仅当
  函子 $(\_L \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$ 和 $(\_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \_R)$
  间存在着一个二元的**自然同构** 。

假如确实有 $L \dashv R$, 那么不难得知

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_2，见下：

$$
\begin{aligned}
\phi_2 &: (\_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \_R) \xrightarrow{(\mathsf{D}\times\mathsf{C})\to\mathsf{Set}} (\_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \\
(\_\,.\,\mathsf{c})^{\phi_2} &: (\_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R) \xrightarrow{\mathsf{D}\to\mathsf{Set}} (\_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \\
(\mathsf{d}\,.\,\_)^{\phi_2} &: (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \_R) \xrightarrow{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}} (\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)
\end{aligned}
$$

套用反变米田引理我们便可获得

$$
\underbrace{\left((\_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R) \xrightarrow[\mathsf{Cat}]{\mathsf{D}^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Set}} (\_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c})\right)}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}RL \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c})}_{\text{一堆元素}}
$$

由反变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(\_\,.\,\mathsf{c})^{\phi_2}$
右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 $:_{\mathsf{c}R}\mathrm{id}(\mathsf{c}R\,.\,\mathsf{c})^{\phi_2} = \mathsf{c}^{\varepsilon}$。如此

- $\varepsilon : R \circ L \xrightarrow[\mathsf{Cat}]{\mathsf{C}\to\mathsf{C}} {:_{\mathsf{C}}\mathrm{Id}}$ 构成自然变换。

> 考虑任意 $f^{\mathrm{op}} : \mathsf{c}' \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$：
>
> $$
> \begin{tikzcd}
> (\mathsf{c}R \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R) \arrow[r, "(\mathsf{c}R.\mathsf{c})^{\phi_2}"] \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}R \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R"'] & (\mathsf{c}RL \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}RL \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}"] \\
> (\mathsf{c}'R \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R) \arrow[r, dashed, "(\mathsf{c}'R.\mathsf{c})^{\phi_2}"] & (\mathsf{c}'RL \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \\
> (\mathsf{c}'R \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}'R) \arrow[r, "(\mathsf{c}'R.\mathsf{c}')^{\phi_2}"'] \arrow[u, "\mathsf{c}'R \overset{\mathsf{D}}{\to} f^{\mathrm{op}}R"] & (\mathsf{c}'RL \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}') \arrow[u, "\mathsf{c}'RL \overset{\mathsf{C}}{\to} f^{\mathrm{op}}"']
> \end{tikzcd}
> \qquad
> \begin{tikzcd}
> :_{\mathsf{c}R}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{c}R.\mathsf{c})^{\phi_2}"] \arrow[d, mapsto, "f^{\mathrm{op}}R \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R"'] & :_{\mathsf{c}R}\mathrm{id}(\mathsf{c}R.\mathsf{c})^{\phi_2} = \mathsf{c}^{\varepsilon} \arrow[d, mapsto, "f^{\mathrm{op}}RL \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c} = \mathsf{c}^{(f^{\mathrm{op}}RL \overset{\mathsf{C}}{\circ} _)}"] \\
> f^{\mathrm{op}}R \arrow[r, mapsto, dashed, "(\mathsf{c}'R.\mathsf{c})^{\phi_2}"] & f^{\mathrm{op}}RL \overset{\mathsf{C}}{\circ} \mathsf{c}^{\varepsilon} = \mathsf{c}'^{\varepsilon} \overset{\mathsf{C}}{\circ} f^{\mathrm{op}} \\
> :_{\mathsf{c}'R}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{c}'R.\mathsf{c}')^{\phi_2}"'] \arrow[u, mapsto, "\mathsf{c}'R \overset{\mathsf{D}}{\to} f^{\mathrm{op}}R"] & :_{\mathsf{c}'R}\mathrm{id}(\mathsf{c}'R.\mathsf{c}')^{\phi_2} = \mathsf{c}'^{\varepsilon} \arrow[u, mapsto, "\mathsf{c}'RL \overset{\mathsf{C}}{\to} f^{\mathrm{op}} = (\mathsf{c}'RL)^{(_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f^{\mathrm{op}})}"']
> \end{tikzcd}
> $$
>
> 上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图
> 其实就是反变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_1，见下：

$$
\begin{aligned}
\phi_1 &: (\_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \xrightarrow{(\mathsf{D}\times\mathsf{C})\to\mathsf{Set}} (\_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \_R) \\
(\_\,.\,\mathsf{c})^{\phi_1} &: (\_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \xrightarrow{\mathsf{D}\to\mathsf{Set}} (\_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R) \\
(\mathsf{d}\,.\,\_)^{\phi_1} &: (\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \xrightarrow{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}} (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \_R)
\end{aligned}
$$

套用协变米田引理我们便可获得

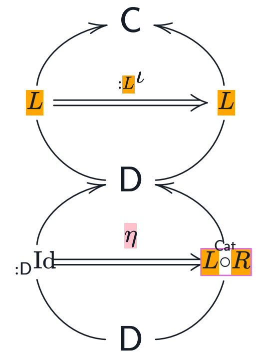
$$
\underbrace{\left((\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \xrightarrow[\mathsf{Cat}]{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}} (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \_R)\right)}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{d}LR)}_{\text{一堆元素}}
$$

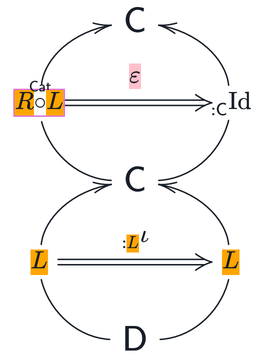
由协变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(\mathsf{d}\,.\,\_)^{\phi_1}$
右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 $:_{\mathsf{d}L}\mathrm{id}(\mathsf{d}\,.\,\mathsf{d}L)^{\phi_1} = \mathsf{d}^{\eta}$。如此。

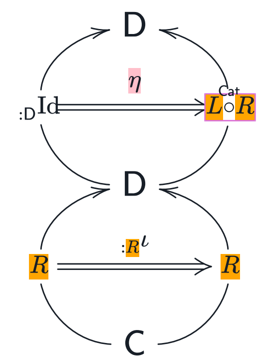
- $\eta : {:_{\mathsf{D}}\mathrm{Id}} \xrightarrow[\mathsf{Cat}]{\mathsf{D}\to\mathsf{D}} L \circ R$ 构成自然变换。

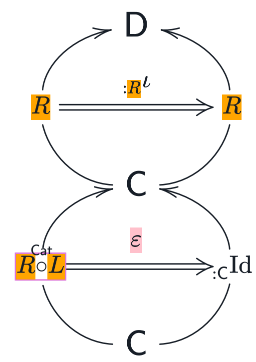
> 考虑任意 $g : \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{d}'$：
>
> $$
> \begin{tikzcd}
> (\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{d}L) \arrow[r, "(\mathsf{d}.\mathsf{d}L)^{\phi_1}"] \arrow[d, "\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} gL"'] & (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{d}LR) \arrow[d, "\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} gLR"] \\
> (\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{d}'L) \arrow[r, dashed, "(\mathsf{d}.\mathsf{d}'L)^{\phi_1}"] & (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{d}'LR) \\
> (\mathsf{d}'L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{d}'L) \arrow[r, "(\mathsf{d}'.\mathsf{d}'L)^{\phi_1}"'] \arrow[u, "gL \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{d}'L"] & (\mathsf{d}' \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{d}'LR) \arrow[u, "g \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{d}'LR"']
> \end{tikzcd}
> \qquad
> \begin{tikzcd}
> :_{\mathsf{d}L}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{d}.\mathsf{d}L)^{\phi_1}"] \arrow[d, mapsto, "\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} gL"'] & :_{\mathsf{d}L}\mathrm{id}(\mathsf{d}.\mathsf{d}L)^{\phi_1} = \mathsf{d}^{\eta} \arrow[d, mapsto, "\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} gLR = \mathsf{d}^{(_ \overset{\mathsf{D}}{\circ} gLR)}"] \\
> gL \arrow[r, mapsto, dashed, "(\mathsf{d}.\mathsf{d}'L)^{\phi_1}"] & \mathsf{d}^{\eta} \overset{\mathsf{D}}{\circ} gLR = g \overset{\mathsf{D}}{\circ} \mathsf{d}'^{\eta} \\
> :_{\mathsf{d}'L}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{d}'.\mathsf{d}'L)^{\phi_1}"'] \arrow[u, mapsto, "gL \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{d}'L"] & :_{\mathsf{d}'L}\mathrm{id}(\mathsf{d}'.\mathsf{d}'L)^{\phi_1} = \mathsf{d}'^{\eta} \arrow[u, mapsto, "g \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{d}'LR = (\mathsf{d}'LR)^{(g \overset{\mathsf{D}}{\circ} _)}"']
> \end{tikzcd}
> $$
>
> 上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图
> 其实就是协变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

对于前面的 ε 和 η 我们有下述交换图成立：

- $$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\eta \overset{???}{\circ} {:}L^{\iota}"] \arrow[dr, "{:}L^{\iota}"'] & L\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}R\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}L \arrow[d, "{:}L^{\iota} \overset{???}{\circ} \varepsilon"] \\ & L \end{tikzcd}$$
  

- $$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "{:}R^{\iota} \overset{???}{\circ} \eta"] \arrow[dr, "{:}R^{\iota}"'] & R\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}L\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}R \arrow[d, "\varepsilon \overset{???}{\circ} {:}R^{\iota}"] \\ & R \end{tikzcd}$$
  

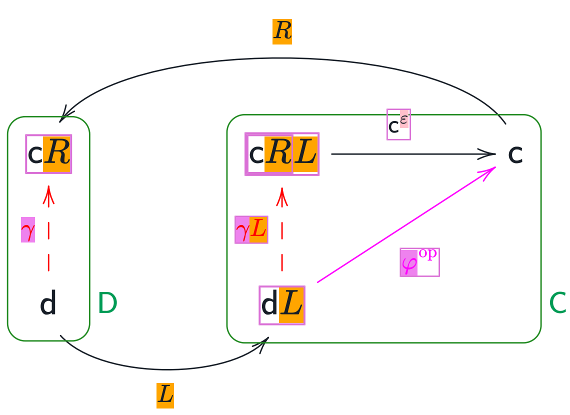
伴随函子的第二种定义

假设我们不知道 L 和 R 构成一对伴随函子并且有自然变换 $\varepsilon : R\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}L \xrightarrow{\mathsf{C}\to\mathsf{C}} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id}$ 和 $\eta : {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id} \xrightarrow{\mathsf{D}\to\mathsf{D}} L\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}R$ 能同时满足上页开头的两幅交换图，即

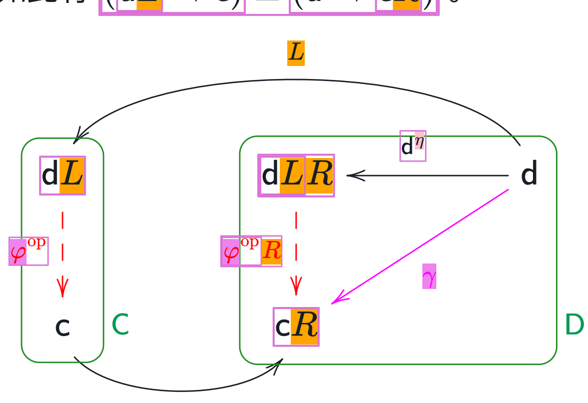
$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\eta \overset{???}{\circ} {:}L^{\iota}"] \arrow[dr, "{:}L^{\iota}"'] & L\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}R\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}L \arrow[d, "{:}L^{\iota} \overset{???}{\circ} \varepsilon"] \\ & L \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "{:}R^{\iota} \overset{???}{\circ} \eta"] \arrow[dr, "{:}R^{\iota}"'] & R\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}L\overset{\mathsf{Cat}}{\circ}R \arrow[d, "\varepsilon \overset{???}{\circ} {:}R^{\iota}"] \\ & R \end{tikzcd}$$

那么

- 对任意 C 中对象 c
  及任意 D 中对象 d
  及任意 $\varphi^{\mathrm{op}} : \mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$ 始终存在
  唯一的 $\gamma : \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R$ 使下图交换。
  如此有 $(\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R)$。

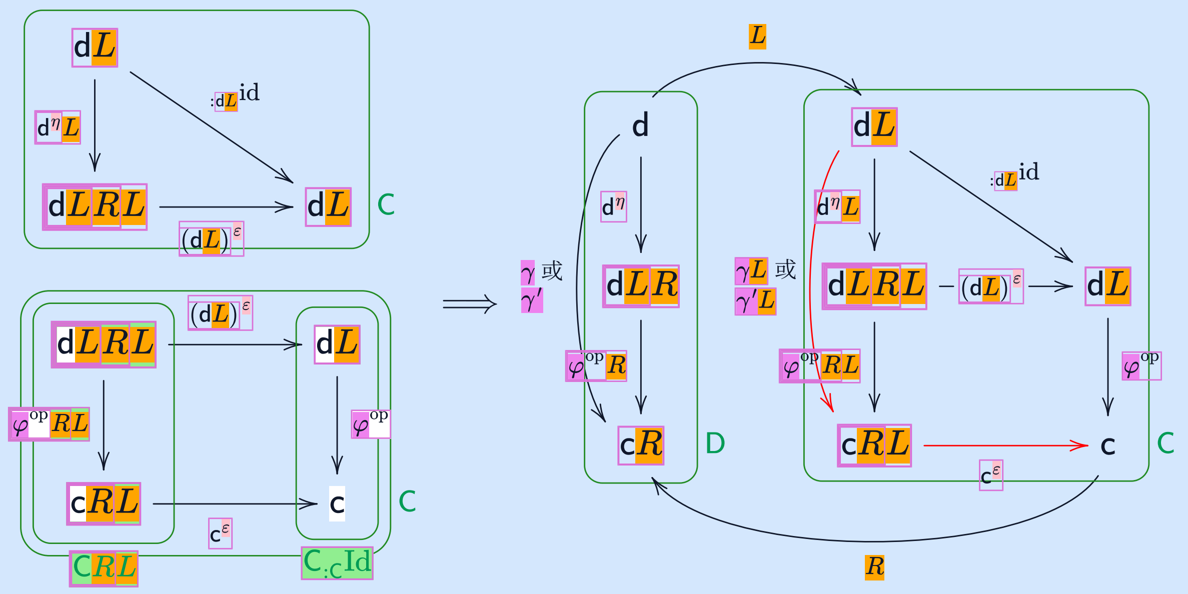
  

- 对任意 C 中对象 c
  及任意 D 中对象 d
  及任意 $\gamma : \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R$ 始终都会存在
  唯一的 $\varphi^{\mathrm{op}} : \mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$ 使下图交换。
  如此有 $(\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R)$。

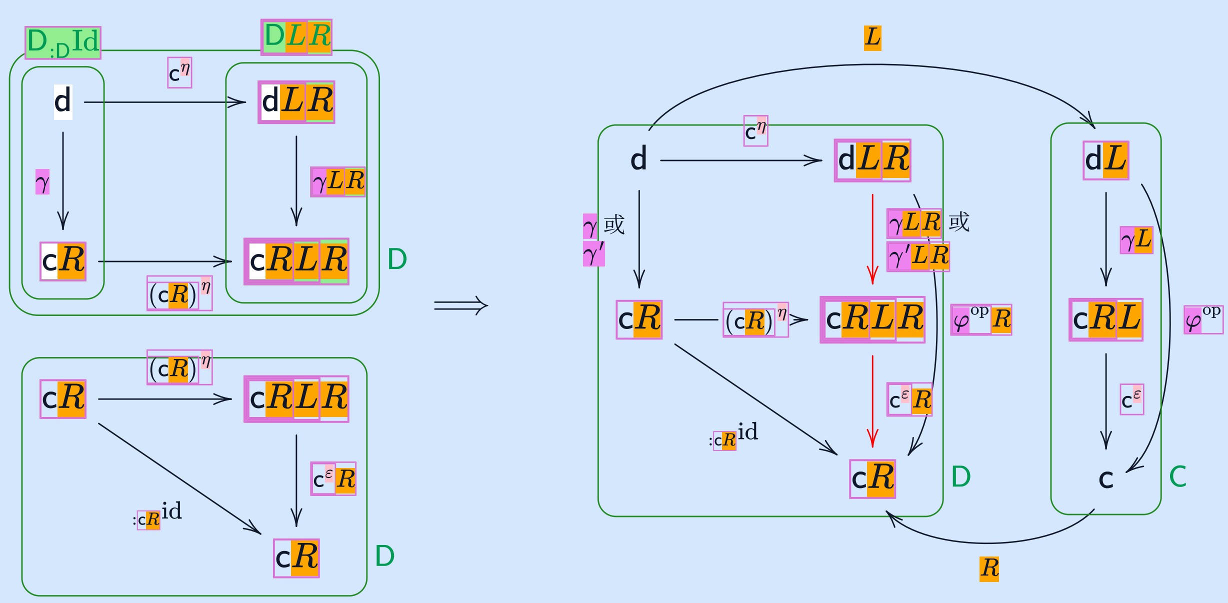
  

现证明上页的头两条定理。

我们将下图称作图 1 : 图 1 上半部分即为上页第一幅图，而图 1 下半部分可由 ε 为自然变换得出。两图拼在一起即得图 1 右侧部分。



我们将下图称作图 2 : 图 2 下半部分即为上页第二幅图，而图 2 上半部分可由 η 为自然变换得出。两图拼在一起即得图 2 右侧部分。



为何 γ 唯一呢？若 γ' 亦满足上图 —— 即不论是 γ 还是 γ' 图 1 右侧部分中 L 形走向红色路径的复合结果都为 φ^{op}；故图 2 右侧部分中红色路径的复合结果也是一致的；如此根据图 2 右侧部分即可知 $\gamma = \gamma'$。

另一侧同理，这里不再赘述。

伴随函子的第三种定义

假设我们不知道 L 和 R 构成一对伴随函子并且有自然变换
$\varepsilon : R \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} L \xrightarrow{\mathsf{C}\to\mathsf{C}} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id}$ 和 $\eta : {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id} \xrightarrow{\mathsf{D}\to\mathsf{D}} L \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} R$，那么我们有

- 若对任意 C 中对象 c
  及对任意 D 中对象 d
  及对任意 $\varphi^{\mathrm{op}} : \mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$ 始终都会
  有唯一的 $\gamma : \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R$ 使下图交换，

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{c}R & & \mathsf{c}RL \arrow[r, "\mathsf{c}^{\varepsilon}"] & \mathsf{c} \arrow[lll, bend right, "R"'] \\
\mathsf{d} \arrow[u, dashed, "\gamma"] \arrow[rr, bend right, "L"'] & \mathsf{D} & \mathsf{d}L \arrow[u, dashed, "\gamma L"] \arrow[ur, "\varphi^{\mathrm{op}}"'] & \mathsf{C}
\end{tikzcd}$$

  那么

$$\begin{aligned}
\phi_2 &: (_ \overset{\mathsf{D}}{\to} _R) \xrightarrow{\overset{\mathsf{C}}{(\mathsf{D}\times\mathsf{C})}\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{Set}} (_L \overset{\mathsf{C}}{\to} _) \\
(_\,.\,\mathsf{c})^{\phi_2} &: (_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R) \xrightarrow{\mathsf{D}\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{Set}} (_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \\
(\mathsf{d}\,.\,_)^{\phi_2} &: (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} _R) \xrightarrow{\mathsf{C}\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{Set}} (\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} _)
\end{aligned}$$

  将构成自然同构。

- 若对任意 C 中对象 c
  及对任意 D 中对象 d
  及对任意 $\gamma : \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R$ 始终都存在
  唯一的 $\varphi^{\mathrm{op}} : \mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$ 使下图交换，

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{d}L \arrow[d, dashed, "\varphi^{\mathrm{op}}"'] & & \mathsf{d}LR \arrow[d, dashed, "\varphi^{\mathrm{op}}R"'] & \mathsf{d} \arrow[l, "\mathsf{d}^{\eta}"'] \arrow[dl, "\gamma"] \arrow[lll, bend right, "L"'] \\
\mathsf{c} \arrow[rr, bend right, "R"'] & \mathsf{C} & \mathsf{c}R & \mathsf{D}
\end{tikzcd}$$

  那么

$$\begin{aligned}
\phi_1 &: (_L \overset{\mathsf{C}}{\to} _) \xrightarrow{\overset{\mathsf{C}}{(\mathsf{D}\times\mathsf{C})}\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{Set}} (_ \overset{\mathsf{D}}{\to} _R) \\
(_\,.\,\mathsf{c})^{\phi_1} &: (_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \xrightarrow{\mathsf{D}\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{Set}} (_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R) \\
(\mathsf{d}\,.\,_)^{\phi_1} &: (\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} _) \xrightarrow{\mathsf{C}\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{Set}} (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} _R)
\end{aligned}$$

  将构成自然同构。

只证上页第一条定理，另一个雷同。

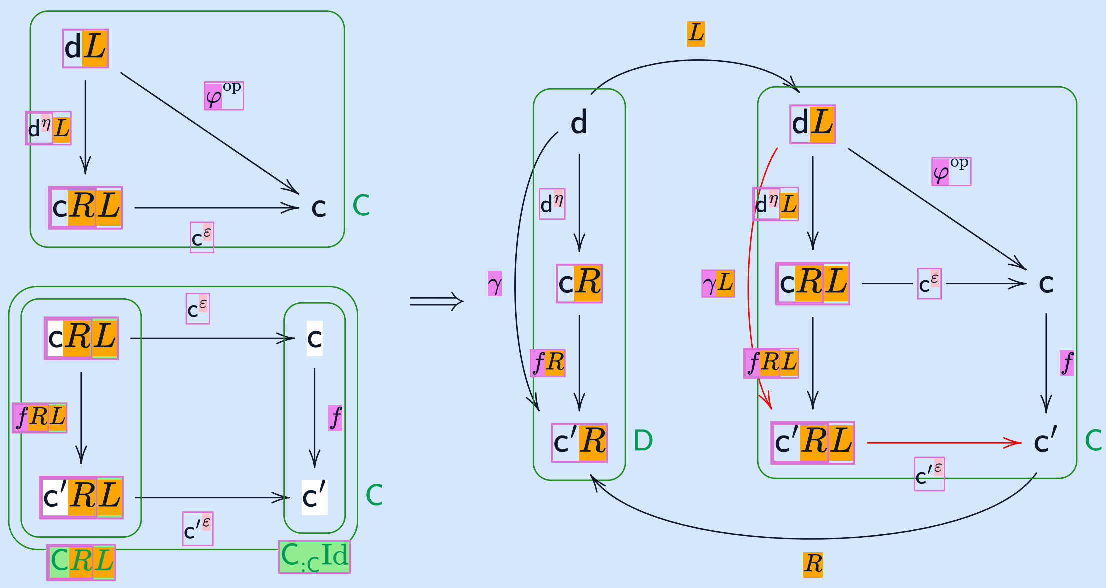
由定理的假设可知 $(\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R)$；因此存在同构

$$\phi_2 : (\_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \_R) \xrightarrow{(\mathsf{D}\overset{\mathsf{c}}{\times}\mathsf{C})\overset{\mathsf{c}}{\longrightarrow}\mathsf{Set}} (\_L \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$$

$$(\_ . \mathsf{c})^{\phi_2} : (\_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R) \xrightarrow{\mathsf{D}\overset{\mathsf{c}}{\longrightarrow}\mathsf{Set}} (\_L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c})$$

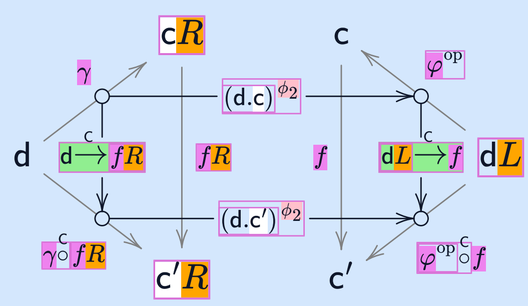
$$(\mathsf{d} . \_)^{\phi_2} : (\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \_R) \xrightarrow{\mathsf{C}\overset{\mathsf{c}}{\longrightarrow}\mathsf{Set}} (\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$$

- 先验证 $(\_ . \mathsf{c})^{\phi_2}$ 构成自然变换。和上上页一样也是拼图：



如此也就证明了下方左侧的相继式，而这相当于下方右图。

$$\frac{\mathsf{d}L \xrightarrow{\varphi^{\mathrm{op}}} \mathsf{c} \xrightarrow{f} \mathsf{c}'}{\mathsf{d} \xrightarrow[\gamma]{} \mathsf{c}R \xrightarrow[fR]{} \mathsf{c}'R}$$



- 再验证 $(\mathsf{d} . \_)^{\phi_2}$ 构成自然变换。和上上页一样也是拼图：