章节 08 - 09 函子与自然变换

LaTeX Definitions are here.

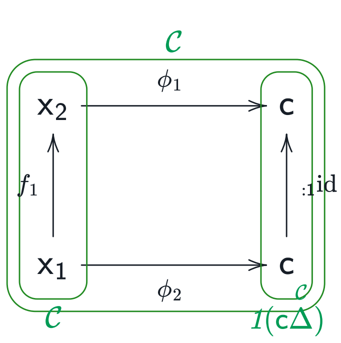
一些特殊的范畴

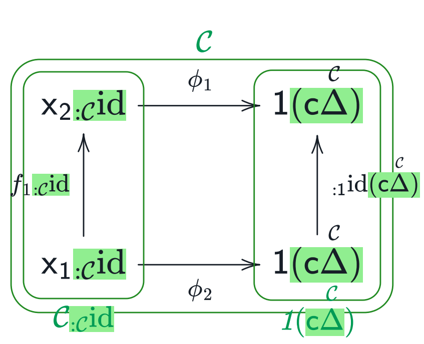
现在规定几种特殊的范畴。

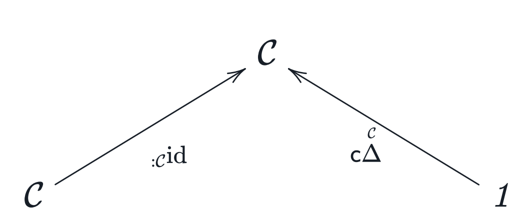
- **离散范畴**：只有对象不含箭头（恒等箭头除外）的范畴。
- $\mathcal{Set}$：**所有集合构成的范畴**，为局部小范畴，满足
  - $\mathcal{Set}$ 中对象为任意集合；
  - $\mathcal{Set}$ 中箭头为集合间映射。
- $\mathcal{Cat}$：**所有范畴构成的范畴**，满足
  - $\mathcal{Cat}$ 中任何对象都构成一个范畴；
  - $\mathcal{Cat}$ 中任何箭头都构成一个函子。

若 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{Cat}$ 中对象，则：

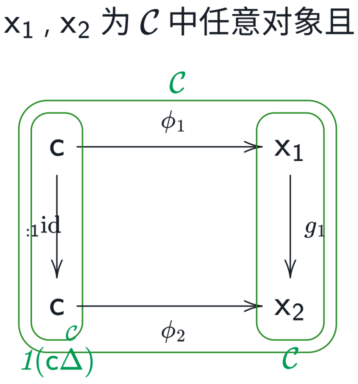
- $\mathcal{C}^{\text{op}}$：**反范畴**，满足
  - $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 中对象皆形如 c，
    c 为任意 $\mathcal{C}$ 中的对象；
  - $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 中箭头皆形如 $\phi^{\text{op}} : \mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}^{\text{op}}} \mathsf{c}_1$，
    $\phi : \mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_2$ 可为任意 $\mathcal{C}$ 中的箭头。
- $\mathcal{C} \overset{\mathcal{Cat}}{\times} \mathcal{D}$：**积范畴**，满足
  - $\mathcal{C} \overset{\mathcal{Cat}}{\times} \mathcal{D}$ 中对象皆形如 c . d，
    c，d 为任意 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$ 中的对象；
  - $\mathcal{C} \overset{\mathcal{Cat}}{\times} \mathcal{D}$ 中箭头皆形如 $\phi\ .\ \psi$，
    ϕ，ψ 为任意 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$ 中的箭头。
- $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{Cat}} \mathcal{D}$：**所有 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的函子的范畴**，满足
  - $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{Cat}} \mathcal{D}$ 中任何对象
    都是 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的函子；
  - $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{Cat}} \mathcal{D}$ 中任何箭头
    都是函子间自然变换。
- $\mathcal{C}/\mathsf{c}$：**俯范畴**，这里 c 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象；满足
  - $\mathcal{C}/\mathsf{c}$ 中对象皆形如 $\cancel{\mathsf{x}\ .\ 1}\ .\ \phi$，其中 x
    和 $\phi : \mathsf{x} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}$ 分别为 $\mathcal{C}$ 中任意的对象和箭头；
  - $\mathsf{c}/\mathcal{C}$ 中箭头皆形如 $f_1\ \cancel{.\ {}_{:\mathcal{C}}\mathrm{id}}$ 且满足下述交换图，其中
    x_1，x_2 为 $\mathcal{C}$ 中任意对象且 f_1，ϕ_1，ϕ_2 为 $\mathcal{C}$ 中任意箭头；

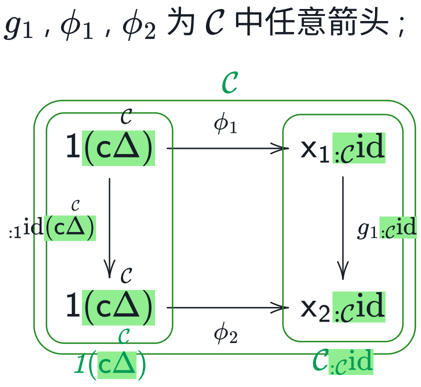


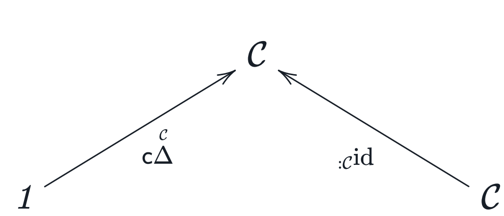




- $\mathsf{c}/\mathcal{C}$：**仰范畴**，这里 c 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象；满足
  - $\mathsf{c}/\mathcal{C}$ 中对象皆形如 $\cancel{1\ .\ \mathsf{x}}\ .\ \phi$，其中 x
    和 $\phi : \mathsf{c} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{x}$ 分别为 $\mathcal{C}$ 中对象和箭头；
  - $\mathcal{C}/\mathsf{c}$ 中箭头皆形如 $\cancel{{}_{:\mathcal{C}}\mathrm{id}\ .}\ g_1$ 且满足下述交换图，其中
    x_1，x_2 为 $\mathcal{C}$ 中任意对象且 g_1，ϕ_1，ϕ_2 为 $\mathcal{C}$ 中任意箭头；







函子

接下来我们来提供函子的正式定义：

- $P : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$ 为范畴当且仅当
  - 对任意 $\mathcal{C}$ 中对象 c，cP 为 $\mathcal{D}$ 中对象且 ${}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}P = {}_{:\mathsf{c}P}\mathrm{id}$；
  - 对任意 $\mathcal{C}$ 中箭头 $\phi_1 : \mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_2$ 和 $\phi_2 : \mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_3$，始终都有等式 $(\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_2)P = \phi_1 P \overset{\mathcal{D}}{\circ} \phi_2 P$ 成立。

函子的复合运算

假如刚才的 P 确实构成一个函子
且 $Q : \mathcal{D} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{E}$ 也构成函子，那么

- $P \overset{\mathcal{C}at}{\circ} Q : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{E}$
  也构成一个函子。

恒等函子

对于函子我们也有恒等映射，即：

- $${}_{:\mathcal{C}}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}at}{\circ} P = P \\ = P \overset{\mathcal{C}at}{\circ} {}_{:\mathcal{D}}\mathrm{id}$$

忠实和完全函子

若 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$，$\mathcal{E}$ 皆为**局部小范畴**，则

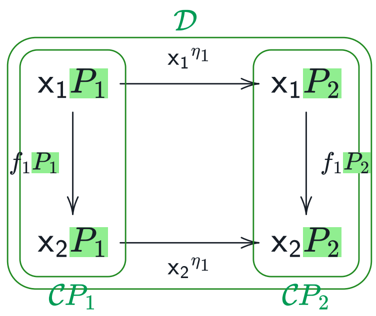
- P 是**忠实的**当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 c_1，c_2
  $(\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_2)$ 与 $(\mathsf{c}_1 P \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathsf{c}_2 P)$ 之间始终存在单射；
- P 是**完全的**当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 c_1，c_2
  $(\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_2)$ 与 $(\mathsf{c}_1 P \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathsf{c}_2 P)$ 之间始终存在满射；
- P 是**完全忠实的**当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 c_1，c_2
  $(\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_2)$ 与 $(\mathsf{c}_1 P \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathsf{c}_2 P)$ 之间始终存在双射（即集合间同构）。

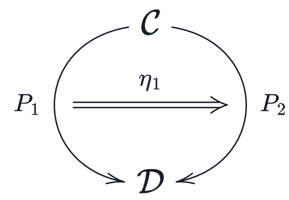
> **Note**
>
> 刚才提到的“单 / 满 / 双射”
> 针对的都是范畴的箭头部分。

自然变换

若还知道 $P_1, P_2 : \mathcal{C} \xrightarrow{Cat} \mathcal{D}$ 为函子，则

- $\eta_1 : P_1 \xrightarrow{\mathcal{C}\xrightarrow{Cat}\mathcal{D}} P_2$ 为自然变换当且仅当对任意
  $\mathcal{C}$ 中对象 x_1，x_2 始终都会有下述交换图成立：

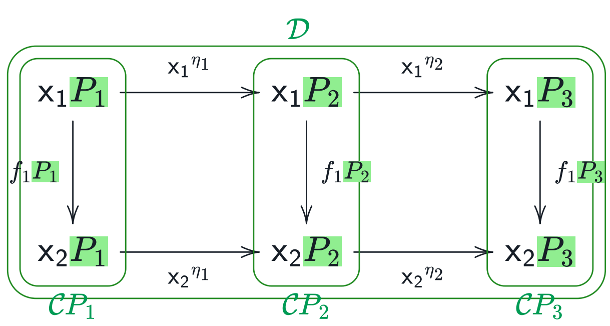


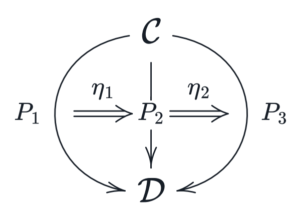


自然变换的纵复合

倘若已知 $\eta_1 : P_1 \xrightarrow{\mathcal{C}\xrightarrow{Cat}\mathcal{D}} P_2$
另外加上 $\eta_2 : P_2 \xrightarrow{\mathcal{C}\xrightarrow{Cat}\mathcal{D}} P_3$
为自然变换，那么便会有

- $\eta_1 \circ \eta_2 : P_1 \xrightarrow{\mathcal{C}\xrightarrow{Cat}\mathcal{D}} P_2$ 亦为自然变换，
  称作 η_1 和 η_2 的**纵复合**。





自然变换的横复合

TODO

- 函子 $P_1 : \mathcal{C} \xrightarrow{Cat} \mathcal{D}$，
  函子 $P_2 : \mathcal{C} \xrightarrow{Cat} \mathcal{D}$，
  函子的复合：$P_1 \circ P_2$
- 自然变换 $\eta_1 : P_1 \xrightarrow{Cat} Q_1$，
  自然变换 $\eta_2 : P_1 \xrightarrow{Cat} Q_1$，
  自然变换 $\theta_1 : Q_1 \xrightarrow{Cat} R_1$
  自然变换的纵复合：$\eta_1 \circ_{\mathrm{v}} \eta_2$，
  自然变换的横复合：$\eta_1 \circ_{\mathrm{h}} \theta_1$，