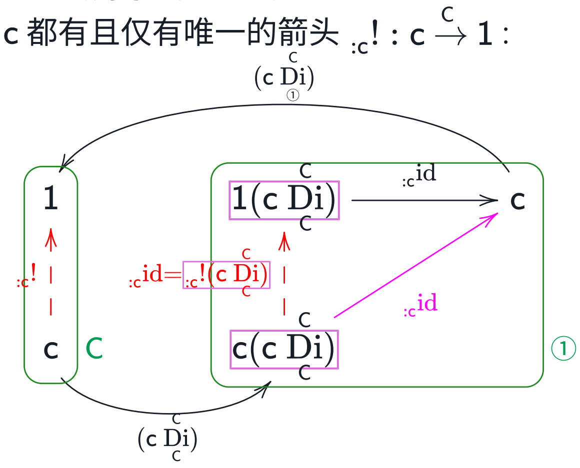
01 始对象和终对象

LaTeX Definitions are here.

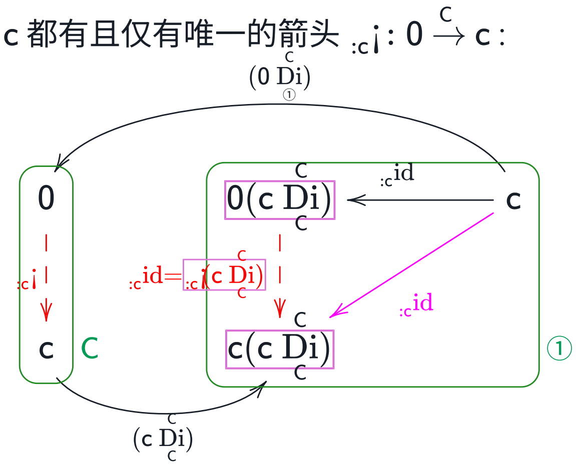
泛性质

范畴由对象及其间箭头构成。本文重点分析**余积闭范畴** C。首先给出如下定义：

- 1 为**终对象**当且仅当对任意 C 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 ${}_{:\mathsf{c}}! : \mathsf{c} \overset{\mathsf{C}}{\to} 1$：



- 0 为**始对象**当且仅当对任意 C 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 ${}_{:\mathsf{c}}¡ : 0 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$：



> **Note**
>
> - $$\begin{aligned} \underset{①}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} : \mathsf{C} &\xrightarrow{\mathsf{Cat}} (① \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}) \\ \mathsf{c} &\longmapsto \text{常值函子} \\ \mathsf{c}\,\underset{①}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} : &\quad (① \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}) \\ &\quad 1 \longmapsto \mathsf{c} \\ &\quad f \longmapsto {}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id} \end{aligned}$$
>
>   ① 为仅含单个函子的范畴，1 为其中的对象；仅含有单个对象的范畴可以被等价地视作为 ①。

若范畴 C 中真的含有 0 和 1 分别作为始对象和终对象 则根据上述信息可知

- 形如 $1 \overset{\mathsf{C}}{\to} 1$ 的箭头只有一个，即 ${}_{:1}\mathrm{id}$；
- 形如 $0 \overset{\mathsf{C}}{\to} 0$ 的箭头只有一个，即 ${}_{:0}\mathrm{id}$；

元素与全局元素

对任意对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_1', \mathrm{etc}$，$\mathsf{c}_2, \mathsf{c}_2', \mathrm{etc}$，$\mathsf{c}_3$ 及任意的映射 i 我们进行如下的规定：

- i 为 c_2 的**元素**当且仅当 $i\,\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{tar}} = \mathsf{c}_2$；
- i 为 c_1 的**全局元素**当且仅当 $i\,\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{tar}} = \mathsf{c}_1$ 且 $i\,\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{src}} = 1$
- i 不存在仅当 $i\,\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{tar}} = 0$。

> **Note**
>
> 其他范畴中刚才的断言未必成立。

02-03 范畴当中的箭头

$\LaTeX$ Definitions are here.

沿用上一节提到的自由变量。我们规定：

- $c_1 \overset{C}{\to} c_2 =$
  所有从 c_1 射向 c_2 的箭头构成的集。

> ⓘ **Note**
>
> 上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
> 其他范畴里 $c_1 \overset{C}{\to} c_2$ 未必构成集。

范畴 C 中特定的箭头可以进行复合运算：

- $$\begin{array}{cccc} \overset{C}{\circ} : (c_1 \overset{C}{\to} c_2) \overset{\mathsf{Set}}{\times} (c_2 \overset{C}{\to} c_3) & \overset{\mathsf{Set}}{\longrightarrow} & (c_1 \overset{C}{\to} c_3) \\ (\quad i_1 \quad . \quad i_2 \quad) & \longmapsto & (i_1 \overset{C}{\circ} i_2) \end{array}$$

如果我们还知道箭头 f_1，i，f_2 分别属于
$c_1' \overset{C}{\to} c_1$，$c_1 \overset{C}{\to} c_2$，$c_2 \overset{C}{\to} c_2'$ 那么便可知

- $(f_1 \overset{C}{\circ} i) \overset{C}{\circ} f_2 = f_1 \overset{C}{\circ} (i \overset{C}{\circ} f_2)$，
  即箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便可获得新的函数：

- $$\begin{array}{ccc} (f_1 \overset{C}{\circ} \_) : (c_1 \overset{C}{\to} \_) & \xrightarrow{C \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} & (c_1' \overset{C}{\to} \_) \\ i & \longmapsto & (f_1 \overset{C}{\circ} i) \end{array}$$
  称作**前复合**。下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[rrd, bend left, "i:c_1 \overset{C}{\longrightarrow} c_2"] & {} \arrow[dd, dashed, "c_2^{(f_1 \overset{C}{\circ} _)}"] & \\
 & & c_2 \arrow[loop right, "{}_{:c_2}\mathrm{id}"] \\
c_1' \arrow[uu, "f_1"] \arrow[rru, bend right, "(f_1 \overset{C}{\circ} i):c_1' \overset{C}{\longrightarrow} c_2"'] & {} &
\end{tikzcd}$$

- $$\begin{array}{ccc} (\_ \overset{C}{\circ} f_2) : (\_ \overset{C}{\to} c_2) & \xrightarrow{C \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} & (\_ \overset{C}{\to} c_2') \\ i & \longmapsto & (i \overset{C}{\circ} f_1) \end{array}$$
  称作**后复合**。 下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[dd, dashed, "c_1^{(_ \overset{C}{\circ} f_2)}"] & c_2 \arrow[dd, "f_2"] \\
c_1 \arrow[loop left, "{}_{:c_1}\mathrm{id}"] \arrow[rru, bend left, "i:c_1 \overset{C}{\longrightarrow} c_2"] \arrow[rrd, bend right, "(i \overset{C}{\circ} f_2):c_1 \overset{C}{\longrightarrow} c_2'"'] & & \\
 & {} & c_2'
\end{tikzcd}$$

根据上面的定义不难得出下述结论：

- $(f_1 \overset{C}{\circ} \_) \overset{C \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{C}{\circ} f_2) = (\_ \overset{C}{\circ} f_2) \overset{C \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \overset{C}{\circ} \_)$
  复合运算具有**结合律**，即后面提到的**自然性**；
- $(\_ \overset{C}{\circ} i) \overset{C \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{C}{\circ} f_2) = (\_ \overset{C}{\circ} (i \overset{C}{\circ} f_2))$
  前复合与复合运算的关系
- $(i \overset{C}{\circ} \_) \overset{C \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \overset{C}{\circ} \_) = ((f_1 \overset{C}{\circ} i) \overset{C}{\circ} \_)$
  后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。
假如 a_1 为 c_1 的全局元素则可规定

- $c_1 i = c_1 \overset{C}{\circ} i$

恒等箭头

范畴 C 内的每个对象都有恒等映射：

- $_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} : \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1$
  $c_1 \mapsto c_1$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- $_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\circ} i = i$
  $= i \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}$

此外还可以得知

- $({}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) : (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)$
  为恒等自然变换，可记成是 $_{:(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)}\mathrm{id}$；
- $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}) : (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2)$
  为恒等自然变换，可记成是 $_{:(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2)}\mathrm{id}$。

单满态以及同构

接下来给出单 / 满态和同构的定义。

- i 为**单态**当且仅当对任意 c_1'
  若有 $f_1, f_1' : \mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1$ 满足 $f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i = f_1' \overset{\mathsf{C}}{\circ} i$
  则有 $f_1 = f_1'$。详情见下图：

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{c}_1 \arrow[rrr, bend left, "i : \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2"] \arrow[d, phantom, ""] & & & \mathsf{c}_2 \arrow[loop right, "{}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}"] \\
\mathsf{c}_1' \arrow[u, shift right, "f_1"] \arrow[u, shift left, "f_1'"'] \arrow[urrr, bend right, "(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i) : \mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2"'] \arrow[rr, phantom, "\mathsf{c}_2(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} _)"] & & &
\end{tikzcd}$$

- i 为**满态**当且仅当对任意 c_2'
  若有 $f_2, f_2' : \mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2'$ 满足 $i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2 = i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2'$
  则有 $f_2 = f_2'$。详情见下图：

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathsf{c}_2 \arrow[d, shift right, "f_2'"'] \arrow[d, shift left, "f_2"] \\
\mathsf{c}_1 \arrow[loop left, "{}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}"] \arrow[urrr, bend left, "i : \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2"] \arrow[rrr, bend right, "(i \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) : \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2'"'] \arrow[rr, phantom, "\mathsf{c}_1(_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)"] & & & \mathsf{c}_2'
\end{tikzcd}$$

- i 为**同构**当且仅当存在 $i' : \mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1$
  使得 $i \overset{\mathsf{C}}{\circ} i' = {}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}$ 且 $i' \overset{\mathsf{C}}{\circ} i = {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}$。
  此时 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$ 间的关系可记作 $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\cong} \mathsf{c}_2$。

若还知道 $i = i_1$ 且 $i_2 : \mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_3$ 则有

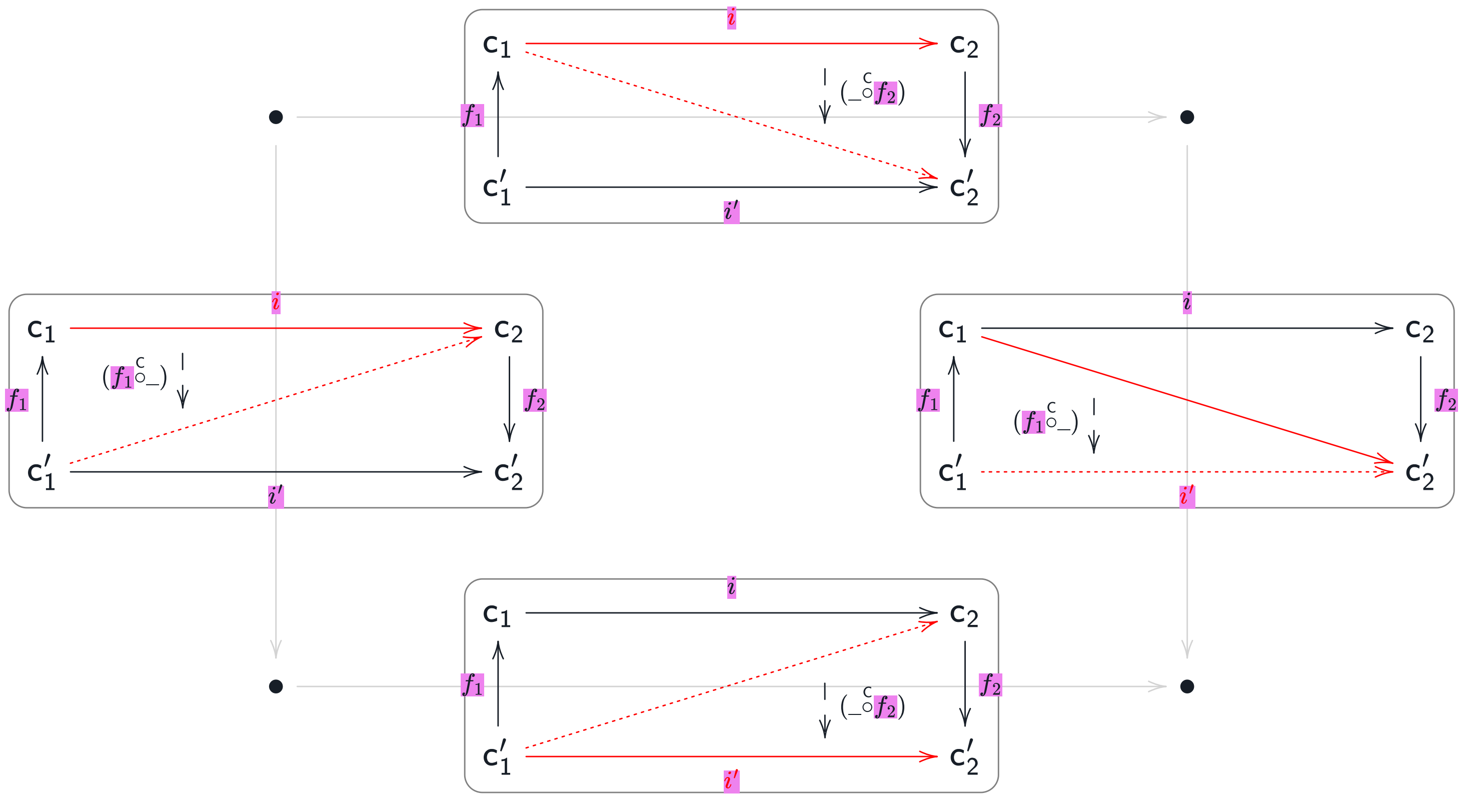
- 若 i_1, i_2 为单态
  则 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2$ 为单态；
- 若 i_1, i_2 为满态
  则 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2$ 为满态；
- 若 i_1, i_2 为同构
  则 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2$ 为同构；
- 若 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2$ 为同构
  且 i_1, i_2 中有一个为同构
  则 i_1, i_2 两者皆构成同构。

不仅如此我们还可以得出下述结论：

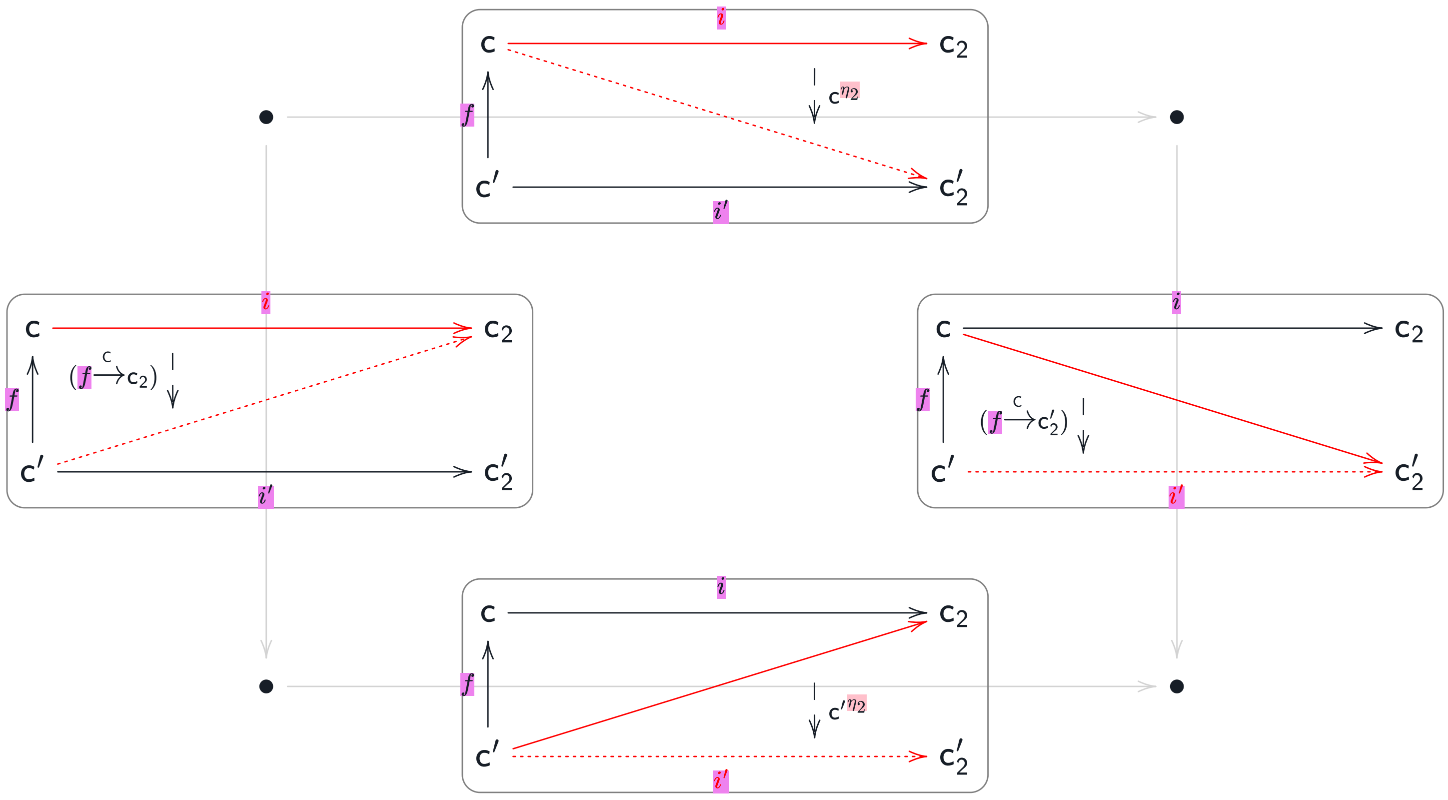
- c_1 为单态，
  由 $_{:\mathsf{c}_1}!$ 的唯一性可知；
- $_{:0}! = {}_{:1}¡$ 为同构，
  因为 $0 \overset{\mathsf{C}}{\to} 0 = \{{}_{:0}\mathrm{id}\}$
  并且 $1 \overset{\mathsf{C}}{\to} 1 = \{{}_{:1}\mathrm{id}\}$

同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释。
后面会将自然性进行进一步推广。



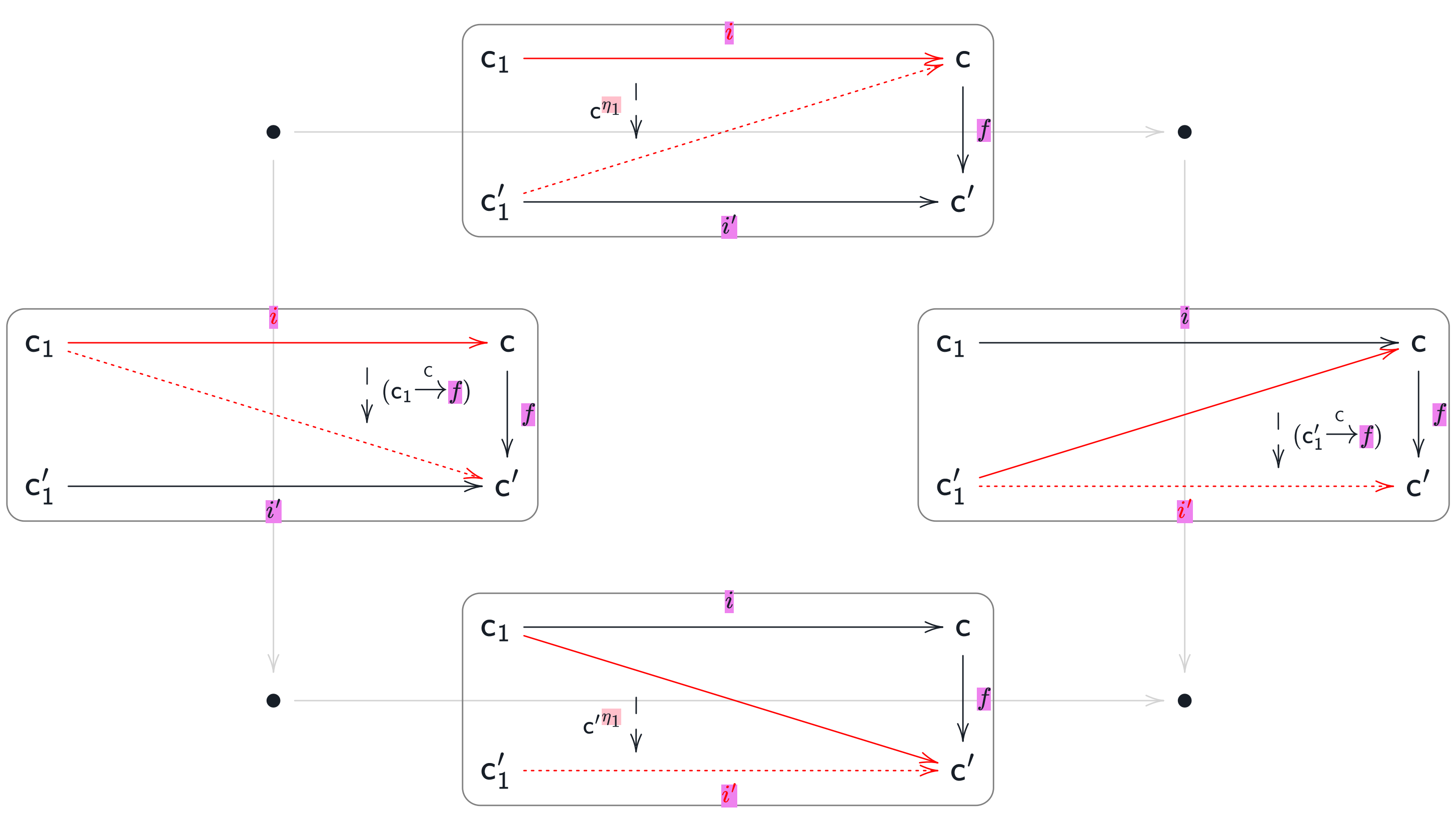
现提供自然变换 η_2 满足自然性 —— 即对
任意 C 中对象 c, c' 以及
任意 C 中映射 $f : (c' \overset{\mathsf{C}}{\to} c)$
都有 $(f \overset{\mathsf{C}}{\to} c_2) \overset{\mathsf{Set}}{\circ} c'^{\eta_2} = c^{\eta_2} \overset{\mathsf{Set}}{\circ} (f \overset{\mathsf{C}}{\to} c'_2)$:



那么我们便会有下述结论 :

- $c_2 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c'_2$ 当且仅当对任意 C 中的对象 c
  c^{η_2} 都是同构 。此时称 η_2 为**自然同构** 。

现提供自然变换 η_1 满足自然性 —— 即对
任意 C 中对象 c, c' 以及
任意 C 中映射 $f : c \overset{\mathsf{C}}{\to} c'$
都有 $(c_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} f) \overset{\mathsf{Set}}{\circ} c'^{\eta_1} = c^{\eta_1} \overset{\mathsf{Set}}{\circ} (c'_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} f)$:



那么我们便会有下述结论 :

- $c_1 \overset{\mathsf{C}}{\cong} c'_1$ 当且仅当对任意 C 中的对象 c
  c^{η_1} 都是同构 。此时称 η_1 为**自然同构** 。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为

$$
\begin{tikzcd}
c \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & c \xrightarrow{C} c_2' \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2'"] \\
c' \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c' \xrightarrow{C} c_2'
\end{tikzcd}
$$

Set

$C \xrightarrow{C} c_2$ $\quad$ $C \xrightarrow{C} c_2'$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧 将 c 换成 c_2 ：

$$
\begin{tikzcd}
c_2 \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & c_2 \xrightarrow{C} c_2' \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2'"] \\
c' \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c' \xrightarrow{C} c_2'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:c_2}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & {}_{:c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2}) \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2' = c_2'^{(f \overset{C}{\circ} -)}"] \\
f \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & f \overset{C}{\circ} \mathrm{etc}
\end{tikzcd}
$$

为了方便就用 etc 表示 ${}_{:c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2})$ 。由上图
知 $f(c'^{\eta_2}) = (f \overset{C}{\circ} \mathrm{etc})$ 右图底部和右侧箭头，
故 $c'^{\eta_2} = c' \xrightarrow{C} \mathrm{etc}$ 注意到箭头 $f : c' \xrightarrow{C} c$ ；
而 $c'^{\eta_2} = c' \xrightarrow{C} \mathrm{etc} = c'^{(- \overset{C}{\circ} \mathrm{etc})}$ 始终是同构
故 $\mathrm{etc} : c_2 \xrightarrow{C} c_2'$ 也是同构 。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在**米田嵌入**处会详细介绍 。

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为

$$
\begin{tikzcd}
c_1 \xrightarrow{C} c \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & c_1' \xrightarrow{C} c \arrow[d, "c_1' \xrightarrow{C} f"] \\
c_1 \xrightarrow{C} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c_1' \xrightarrow{C} c'
\end{tikzcd}
$$

Set

$c_1 \xrightarrow{C} C$ $\quad$ $c_1' \xrightarrow{C} C$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧 将 c 换成 c_1 ：

$$
\begin{tikzcd}
c_1 \xrightarrow{C} c_1 \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & c_1' \xrightarrow{C} c_1 \arrow[d, "c_1' \xrightarrow{C} f"] \\
c_1 \xrightarrow{C} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c_1' \xrightarrow{C} c'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:c_1}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1}) \arrow[d, "c_1' \xrightarrow{C} f = c_1'^{(- \overset{C}{\circ} f)}"] \\
f \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & \mathrm{etc} \overset{C}{\circ} f
\end{tikzcd}
$$

为了方便就用 etc 表示 ${}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 。由上图
知 $f(c'^{\eta_1}) = (\mathrm{etc} \overset{C}{\circ} f)$ 右图底部和右侧箭头，
故 $c'^{\eta_1} = \mathrm{etc} \xrightarrow{C} c'$ 注意到箭头 $f : c \xrightarrow{C} c'$ ；
而 $c'^{\eta_1} = \mathrm{etc} \xrightarrow{C} c' = c'^{(\mathrm{etc} \overset{C}{\circ} -)}$ 始终是同构
故 $\mathrm{etc} : c_1 \xrightarrow{C} c_1'$ 也是同构 。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在**米田嵌入**处会详细介绍 。

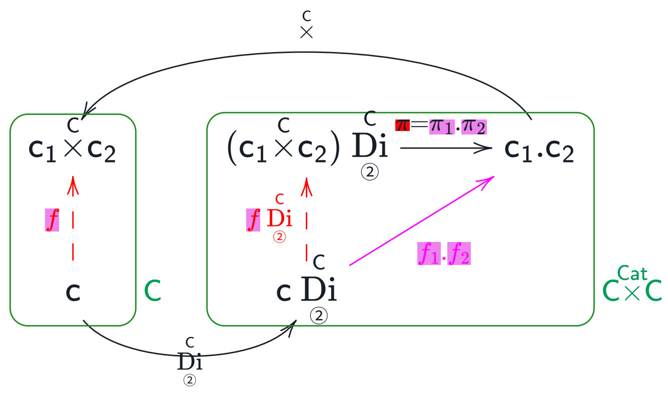
04-05 类型的和与积

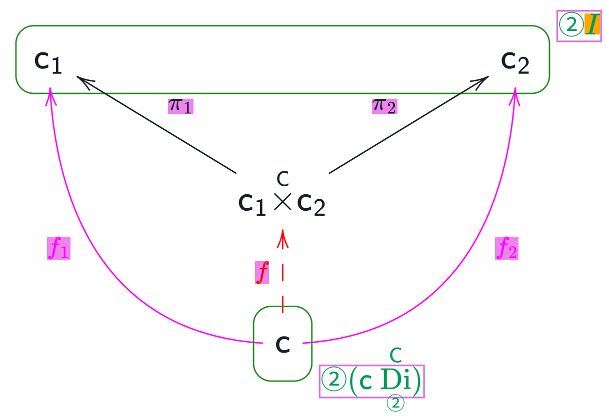
LaTeX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{C}{\times} : (C \overset{Cat}{\times} C) \overset{Cat}{\longrightarrow} C$ 在范畴 C 中有如下性质：

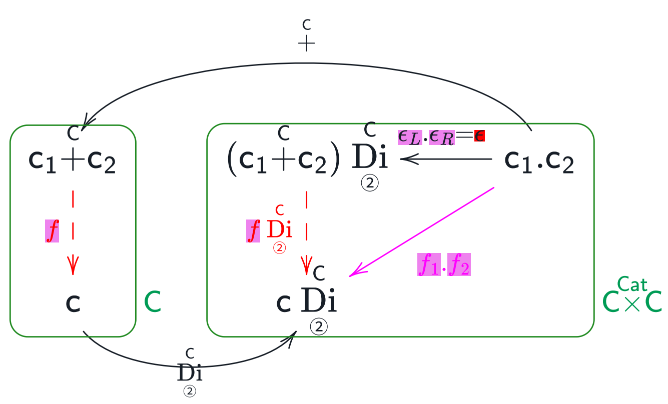
- $(c \overset{C}{\to} c_1) \overset{Set}{\times} (c \overset{C}{\to} c_2) \overset{Set}{\cong} c \overset{C}{\to} (c_1 \overset{C}{\times} c_2)$
  —— c 为任意 C 中对象。此即为积的
  泛性质，亦为**指数对乘法的分配律**。

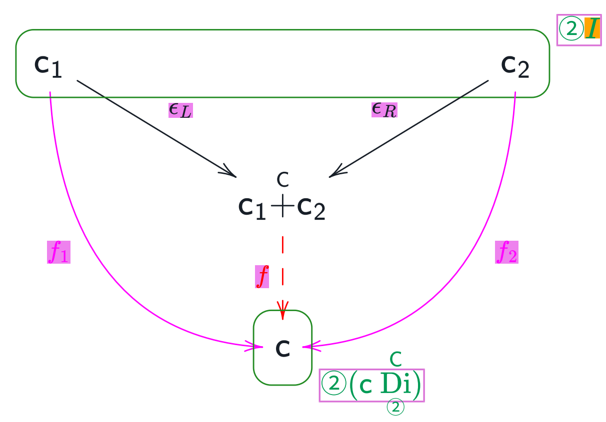




默认函子 $\overset{C}{+} : (C \overset{Cat}{\times} C) \overset{Cat}{\longrightarrow} C$ 在范畴 C 中有如下性质：

- $(c_1 \overset{C}{\to} c) \overset{Set}{\times} (c_2 \overset{C}{\to} c) \overset{Set}{\cong} (c_1 \overset{C}{+} c_2) \overset{C}{\to} c$
  —— c 为任意 C 中对象。此即为和的
  泛性质，亦为**指数对加法的分配律**。



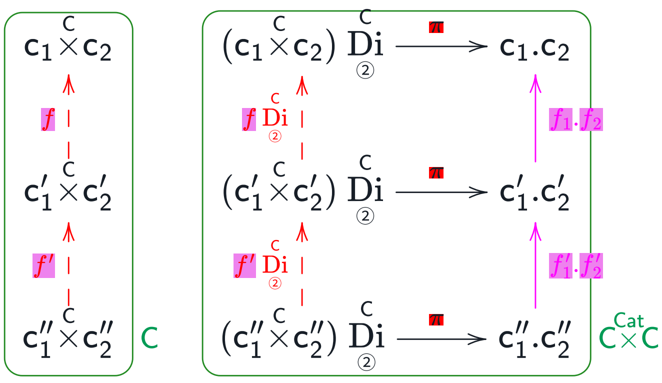


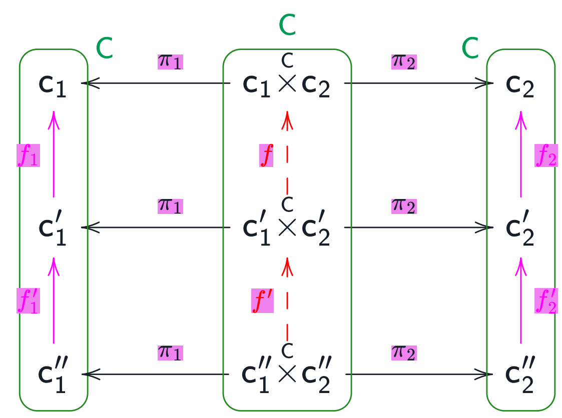
> **Note**
>
> 在上面的插图中
>
> - $\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} : C \overset{Cat}{\longrightarrow} (C \overset{Cat}{\times} C)$ 为对角函子满足
> $c \longmapsto (c \,.\, c)$
> - $\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} : C \overset{Cat}{\longrightarrow} (② \overset{Cat}{\longrightarrow} C)$
> $c \longmapsto$ 常值函子
> $c\,\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} : \; ② \overset{Cat}{\longrightarrow} C$
> $1 \longmapsto c$
> $2 \longmapsto c$
> $f \longmapsto {}_{:c}\mathrm{id}$
>   即为对角函子的第二种等价的定义。
>   ② 为仅含两个对象的范畴，在此则
>   作为一个指标范畴。1 和 2 分别为
>   其中的对象。
> - $I : ② \overset{Cat}{\longrightarrow} C$ 为函子，满足
> $1 \longmapsto c_1$
> $2 \longmapsto c_2$
> - 不难看出上图中
> $\pi : I \overset{Cat}{\longrightarrow} (c_1 \overset{C}{\times} c_2)\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}$
> $\epsilon : (c_1 \overset{C}{+} c_2)\underset{②}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \overset{Cat}{\longrightarrow} I$
>   都构成自然变换

函子性

如何证明 $\overset{C}{\times}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{C}{\times} : ({}_{:c_1'}\mathrm{id} \,.\, {}_{:c_2'}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(c_1' \overset{C}{\times} c_2')}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{C}{\times}$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{C}{\times} : (f_1' \overset{C}{\circ} f_1 \,.\, f_2' \overset{C}{\circ} f_2) \longmapsto (f' \overset{C}{\circ} f)$
  —— 即函子 $\overset{C}{\times}$ 保持**箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：



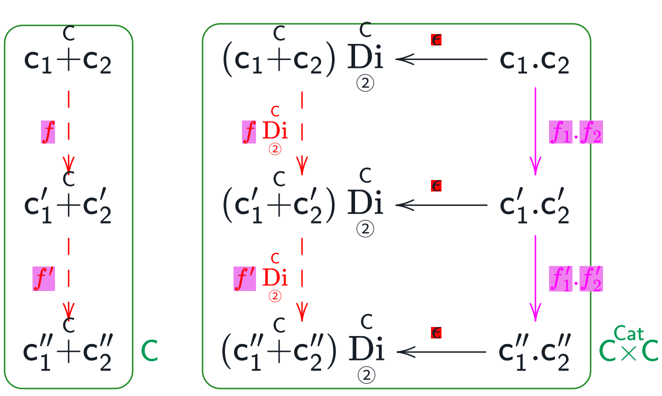


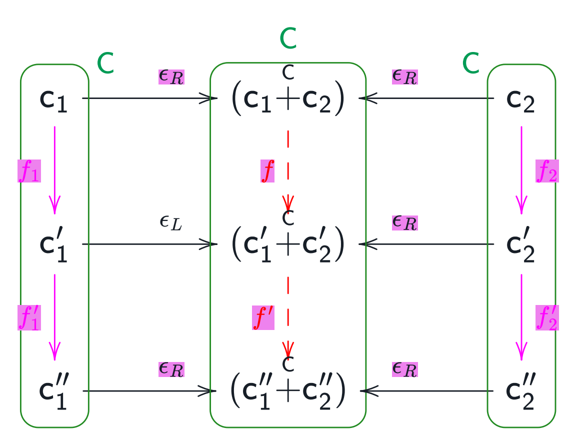
另外我们规定 $\overset{C}{\times}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{C}{\times} : (f_1 \,.\, c_2) \longmapsto (f_1 \overset{C}{\times} {}_{:c_2}\mathrm{id})$
  $\overset{C}{\times} : (c_1 \,.\, f_2) \longmapsto ({}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{C}{\times} f_2)$

如何证明 $\overset{C}{+}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{C}{+} : ({}_{:c_1}\mathrm{id} \,.\, {}_{:c_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(c_1 \overset{C}{+} c_2)}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $+$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{C}{+} : (f_1 \overset{C}{\circ} f_1' \,.\, f_2 \overset{C}{\circ} f_2') \longmapsto (f \overset{C}{\circ} f')$
  —— 即函子 $\overset{C}{\times}$ 保持**箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：





另外我们规定 $\overset{C}{+}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{C}{+} : (f_1 \,.\, c_2) \longmapsto (f_1 \overset{C}{+} {}_{:c_2}\mathrm{id})$
  $\overset{C}{+} : (c_1 \,.\, f_2) \longmapsto ({}_{:c_1}\mathrm{id} + f_2)$

运算性质

对于函子 $\overset{C}{\times}$ 我们不难得知

- $c_1 \overset{C}{\times} 1 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{\times} 1 \overset{C}{\cong} c_1$
  —— 乘法具有**幺元** 1 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 . {:}_c!$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{\times} 1)\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\blacksquare=\pi_1.\pi_2"] & c_1.1 \\
c\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_1.{:}_c!"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_1\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "{:}_{c_1}\mathrm{id}.{:}_{c_1}!"] & c_1.1 \\
c\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f'\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_1.{:}_c!"'] &
\end{tikzcd}$$

- $c_1 \overset{C}{\times} c_2 \overset{C}{\cong} c_2 \overset{C}{\times} c_1$
  —— 乘法具有**交换律** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 . f_2$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{\times} c_2)\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\blacksquare=\pi_1.\pi_2"] & c_1.c_2 \\
c\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_1.f_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_2 \overset{C}{\times} c_1)\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\blacksquare=\pi_1.\pi_2"] & c_2.c_1 \\
c\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f'\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_2.f_1"'] &
\end{tikzcd}$$

- $(c_1 \overset{C}{\times} c_2) \overset{C}{\times} c_3 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{\times} (c_2 \overset{C}{\times} c_3)$
  —— 乘法具有**结合律** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $(f_1 . f_2) . f_3$ 唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
((c_1 \overset{C}{\times} c_2) \overset{C}{\times} c_3)\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\blacksquare"] & (c_1 \overset{C}{\times} c_2).c_3 \arrow[r, "\blacksquare.{:}_{c_3}\mathrm{id}"] & (c_1.c_2).c_3 \\
c_3\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, dotted, "j.f_3"] \arrow[urr, "(f_1.f_2).f_3"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{\times} (c_2 \overset{C}{\times} c_3))\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\blacksquare"] & c_1.(c_2 \overset{C}{\times} c_3) \arrow[r, "{:}_{c_1}\mathrm{id}.\blacksquare"] & c_1.(c_2.c_3) \\
c_3\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, dotted, "f_1.j"] \arrow[urr, "f_1.(f_2.f_3)"'] & &
\end{tikzcd}$$

对于函子 $\overset{C}{+}$ 我们不难得知

- $c_1 \overset{C}{+} 0 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{+} 1 \overset{C}{\cong} c_1$
  —— 加法具有**幺元** 0 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 . {:}_c¡$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{+} 0)\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.0 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\blacksquare"'] \arrow[dl, "f_1.{:}_c¡"] \\
c\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_1\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f'\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.0 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\blacksquare"'] \arrow[dl, "f_1.{:}_c¡"] \\
c\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}$$

- $c_1 \overset{C}{+} c_2 \overset{C}{\cong} c_2 \overset{C}{+} c_1$
  —— 加法具有**交换律** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 . f_2$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{+} c_2)\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.c_2 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\blacksquare"'] \arrow[dl, "f_1.f_2"] \\
c\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_2 \overset{C}{+} c_1)\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f'\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}}"'] & c_2.c_1 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\blacksquare"'] \arrow[dl, "f_2.f_1"] \\
c\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}$$

- $(c_1 \overset{C}{+} c_2) \overset{C}{+} c_3 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{+} (c_2 \overset{C}{+} c_3)$
  —— 加法具有**结合律** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $(f_1 . f_2) . f_3$ 唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
((c_1 \overset{C}{+} c_2) \overset{C}{+} c_3)\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}}"'] & (c_1 \overset{C}{+} c_2).c_3 \arrow[l, "\blacksquare"'] \arrow[dl, dotted, "j.f_3"'] & (c_1.c_2).c_3 \arrow[l, "\blacksquare.{:}_{c_3}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "(f_1.f_2).f_3"] \\
c\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{+} (c_2 \overset{C}{+} c_3))\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.(c_2 \overset{C}{+} c_3) \arrow[l, "\blacksquare"'] \arrow[dl, dotted, "f_1.j"'] & c_1.(c_2.c_3) \arrow[l, "\blacksquare.{:}_{c_3}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "f_1.(f_2.f_3)"] \\
c\ \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}} & &
\end{tikzcd}$$

幺半范畴

像刚才这样对象运算具有**单位元**以及**结合律**的范畴称作**幺半范畴**；

若上述范畴还具有**交换律**则称作**对称幺半范畴**；

很明显我们的范畴 C 是典型的**对称幺半范畴** 。

幺半群

什么是幺半群呢？有两种定义方式：

- **幺半群** M 是个范畴，其只含一个对象 m；
  其中的复合运算正好有单位元以及结合律 。
- 对象 m 属于幺半范畴 C，满足下述交换图：

$$
\begin{tikzcd}
1 \overset{C}{\times} m \arrow[r, "\boldsymbol{u} \overset{C}{\otimes} {:_m}\mathrm{id}"] \arrow[dr, "左单位元\ \boldsymbol{u_l}"'] & m \overset{C}{\times} m \arrow[d, "\boldsymbol{p}\ 运算结果唯一"] & m \overset{C}{\times} 1 \arrow[l, "{:_m}\mathrm{id} \overset{C}{\otimes} \boldsymbol{u}"'] \arrow[dl, "\boldsymbol{u_r}\ 右单位元"] \\
 & m &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(m \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\times} m \arrow[rr, "结合律\ \boldsymbol{a}"] \arrow[d, "先算左侧括号\ \boldsymbol{p} \overset{C}{\otimes} {:_m}\mathrm{id}"'] & & m \overset{C}{\times} (m \overset{C}{\times} m) \arrow[d, "{:_m}\mathrm{id} \overset{C}{\otimes} \boldsymbol{p}\ 先算右侧括号"] \\
m \overset{C}{\times} m \arrow[r, "再算最终结果\ \boldsymbol{p}"'] & m & m \overset{C}{\times} m \arrow[l, "\boldsymbol{p}\ 果结终最算再"]
\end{tikzcd}
$$

  其中

  - $\boldsymbol{u}$ ：$1 \overset{C}{\to} m$ 其实就是 m 里面的幺元
  - $\boldsymbol{u_l}$：$(1 \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\to} m$ 表示 $\boldsymbol{u}$ 构成左幺元
  - $\boldsymbol{u_r}$：$(m \overset{C}{\times} 1) \overset{C}{\to} m$ 表示 $\boldsymbol{u}$ 构成右幺元
  - $\boldsymbol{p}$ ：$(m \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\to} m$ 即为 m 中的二元运算
  - $\boldsymbol{a}$ ：$(m \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\times} m \overset{C}{\to} m \overset{C}{\times} (m \overset{C}{\times} m)$ 表示 m 具有结合律

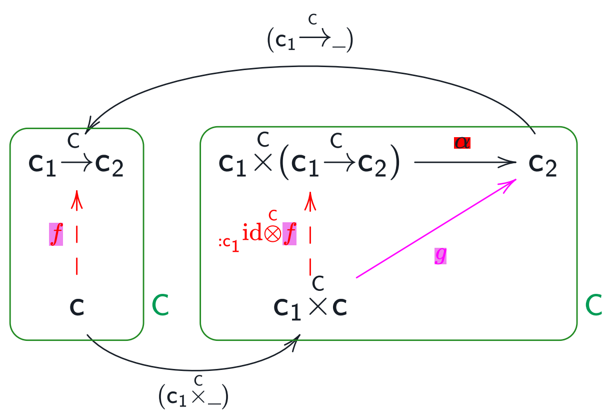
06 类型的幂

LaTeX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{\mathsf{C}}{\to}$: $(\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C}) \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$ 在范畴 C 中有下述性质：

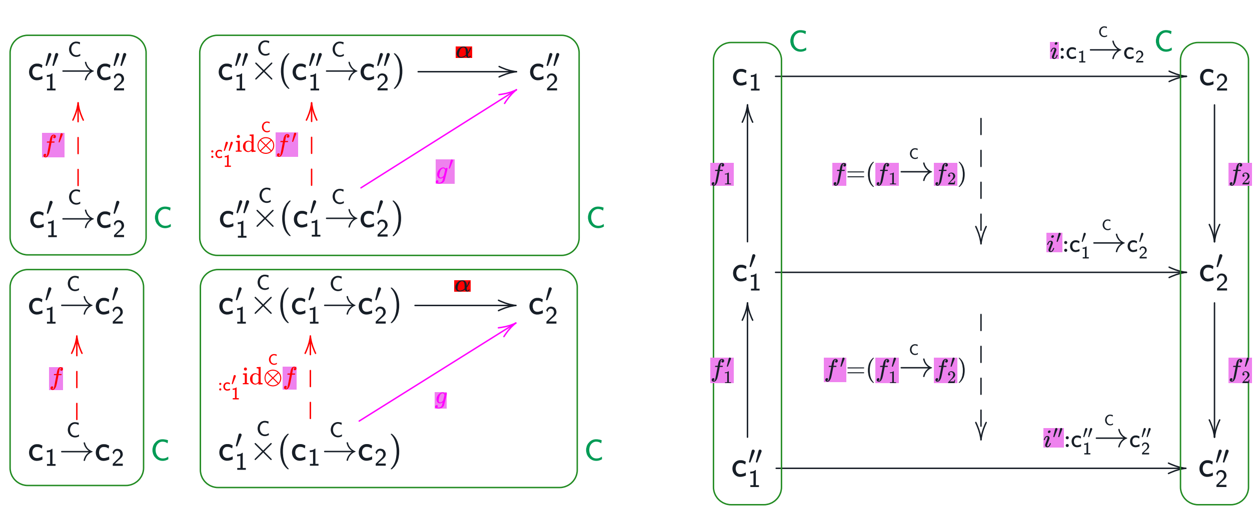
- $(c_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} c) \overset{\mathsf{C}}{\to} c_2 \overset{\mathsf{Set}}{\cong} c \overset{\mathsf{C}}{\to} (c_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} c_2) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} c_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} (c \overset{\mathsf{C}}{\to} c_2)$ —— c 为任意 C 中对象。此即为幂的泛性质，亦表示了**指数加乘法之间的运算关系**。



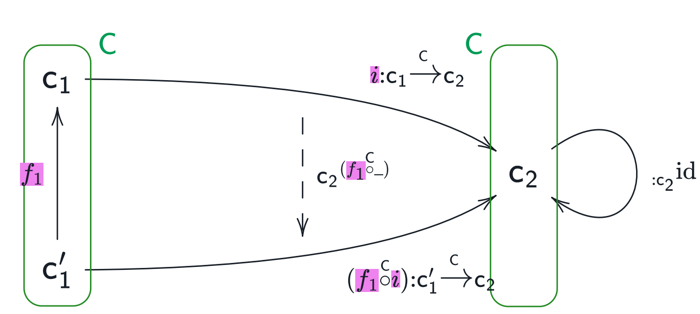
函子性

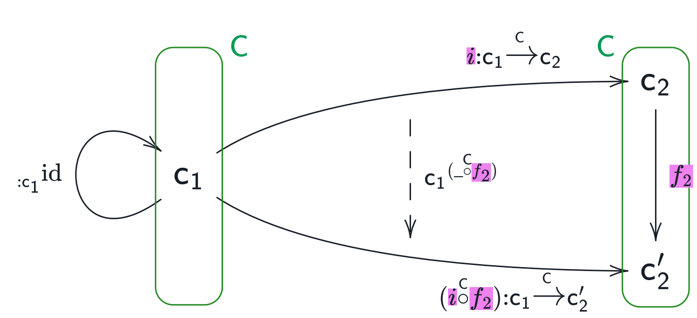
如何证明 $\overset{\mathsf{C}}{\to}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathsf{C}}{\to} : ({}_{:c_1}\mathrm{id} \,.\, {}_{:c_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(c_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} c_2)}\mathrm{id}$ —— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{\to}$ 能**保持恒等箭头**；
- $\overset{\mathsf{C}}{\to} : (f_1' \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1 \underset{\mathsf{C}}{.} f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2') \longmapsto (f \overset{\mathsf{C}}{\circ} f')$ —— 即函子 $\to$ **保持箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明过程：



下图 自上到下分别为图 1 和图 2 后面会用到。





范畴 C 内任意两对象 c_1 和 c_2 间的箭头构成一个集合 $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2$,
说明 $\overset{\mathsf{C}}{\to}$ 只能将两个对象打到一个集合；下面使 $\overset{\mathsf{C}}{\to}$ 升级为函子：
若还知道箭头 $f_1 : \mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1$ 以及 $f_2 : \mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2'$, 则规定

- $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\cancel{\times \mathsf{C}}} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}$ 为函子且
  $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) : \mathsf{c}_1 \longmapsto (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2)$ ，并且有
  $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) : f_1 \longmapsto (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}) = \mathsf{c}_2^{(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}$
  图 1 有助于理解 。
  $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\cancel{\times \mathsf{C}}} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}$,
  $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) : \mathsf{c}_1 \longmapsto (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) = ({}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) = \mathsf{c}_2^{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)}$
  $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) : f_1 \longmapsto (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$
  图 2 有助于理解 。

  > ⓘ **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - $よ : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} (\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Set}}{\longrightarrow} \mathsf{Set})$
  > $\mathsf{c}_2 \longmapsto (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2)$ 构成一个函子
  > $f_2 \longmapsto (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
  >   该函子称作是**米田嵌入** 。

- $(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) : \cancel{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\times}} \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}$ 为函子且
  $(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) : \mathsf{c}_2 \longmapsto (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2)$, 并且有
  $(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) : f_2 \longmapsto (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) = ({}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) = \mathsf{c}_1^{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)}$
  图 2 有助于理解 。
  $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) : \cancel{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\times}} \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}$,
  $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) : \mathsf{c}_2 \longmapsto (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}) = \mathsf{c}_2^{(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}$
  $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) : f_2 \longmapsto (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} f_2) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$
  图 1 有助于理解 。

  > ⓘ **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - $尢 : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} (\mathsf{C} \overset{\mathsf{Set}}{\longrightarrow} \mathsf{Set})$
  > $\mathsf{c}_1 \longmapsto (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)$ 构成一个函子
  > $f_1 \longmapsto (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
  >   该函子戏称为**尤达嵌入** 。

积闭范畴

这里插个题外话：

若范畴包含终对象，所有类型的积以及指数，则可将其称作**积闭范畴**；

若范畴包含始对象，所有类型的和，则可将其称作是**余积闭范畴**；

若范畴满足上述条件，则可称作**双积闭范畴** 。

很明显我们讨论的范畴 C 就是**双积闭范畴** 。

07 递归类型

LaTeX Definitions are here.

08-09 函子和自然变换

LaTeX Definitions are here.

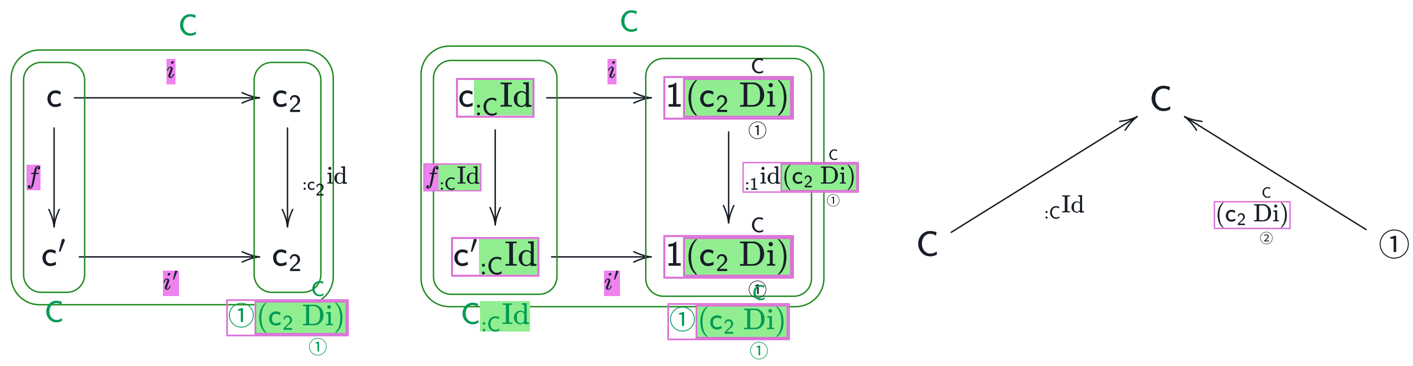
一些特殊的范畴

现在规定几种特殊的范畴。

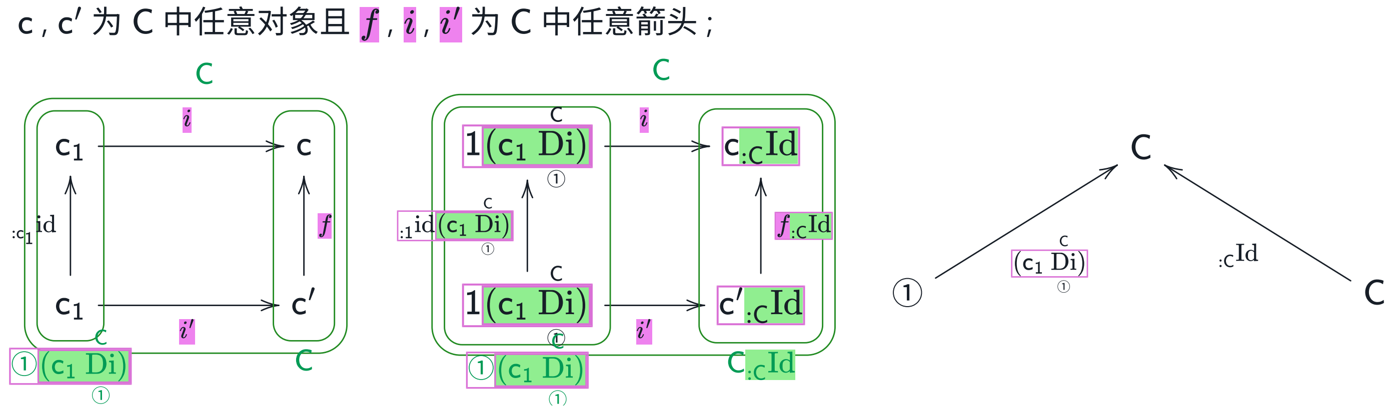
- **离散范畴**：只有对象不含箭头（恒等箭头除外）的范畴。
- Set：**所有集合构成的范畴**，为局部小范畴，满足
  - Set 中对象为任意集合；
  - Set 中箭头为集合间映射。
- Cat：**所有范畴构成的范畴**，满足
  - Cat 中任何对象都构成一个范畴；
  - Cat 中任何箭头都构成一个函子。

若 C，D 为 Cat 中对象，则：

- $\boxed{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$：**反范畴**，满足
  - $\boxed{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$ 中对象皆形如 c，
c 为任意 C 中的对象；
  - $\boxed{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$ 中箭头皆形如 $\boxed{i^{\mathrm{op}}} : \boxed{c_2 \xrightarrow{\boxed{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}} c_1}$，
$i : \boxed{c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2}$ 可为任意 C 中的箭头。
- $\boxed{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{D}}$：**积范畴**，满足
  - $\boxed{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{D}}$ 中对象皆形如 $\boxed{c \,.\, d}$，
c，d 分别为任意 C，D 中的对象；
  - $\boxed{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{D}}$ 中箭头皆形如 $\boxed{i \,.\, j}$，
i，j 分别为任意 C，D 中的箭头。
- $\boxed{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}}$：**所有 C 到 D 的函子的范畴**，满足
  - $\boxed{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}}$ 中任何对象
都是 C 到 D 的函子；
  - $\boxed{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}}$ 中任何箭头
都是函子间自然变换。
- C/c：**俯范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
  - C/c_2 中对象皆形如 $\boxed{\cancel{\boxed{c \,.\, 1}} \,.\, i}$，其中 c 和
$i : \boxed{c \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2}$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
  - c_2/C 中箭头皆形如 $\boxed{f \cancel{\,. \,{}_{:c_2}\mathrm{id}}}$ 且满足下述交换图，其中
c，c′ 为 C 中任意对象且 f，i，i' 为 C 中任意箭头；



- c_1/C：**仰范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
  - c_1/C 中对象皆形如 $\boxed{\cancel{\boxed{1 \,.\, c}} \,.\, i}$，其中 c 和
$i : \boxed{c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c}$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
  - C/c_1 中箭头皆形如 $\boxed{\cancel{{}_{:c_1}\mathrm{id} \,.}\, f}$ 且满足下述交换图，其中
c，c′ 为 C 中任意对象且 f，i，i' 为 C 中任意箭头；



函子

接下来我们来提供函子的正式定义：

- $F : C \xrightarrow{\text{Cat}} D$ 为**函子**当且仅当
  - 对任意 C 中对象 c，cF 为 D 中对象且 $_{:c}\mathrm{id}F = {}_{:cF}\mathrm{id}$；
  - 对任意 C 中箭头 $i_1 : c_1 \xrightarrow{C} c_2$ 和 $i_2 : c_2 \xrightarrow{C} c_3$，始终都有等式 $(i_1 \overset{C}{\circ} i_2)F = i_1F \overset{D}{\circ} i_2F$ 成立。

函子的复合运算

若已确信 $F : C \xrightarrow{\text{Cat}} D$ 为函子并
且还知道 $G : D \xrightarrow{\text{Cat}} E$ 为函子则

- $F \overset{\text{Cat}}{\circ} G : C \xrightarrow{\text{Cat}} E$
  也构成一个函子。

恒等函子

对于函子我们也有恒等映射，即：

- $_{:C}\mathrm{Id} \overset{\text{Cat}}{\circ} F = F$
  $= F \overset{\text{Cat}}{\circ} {}_{:D}\mathrm{Id}$

忠实，完全和本质满函子

若 C，D，E 皆为**局部小范畴**，则

- F 是**忠实的**当且仅当对任意 C 中的对象 c_1, c_2，$c_1 \xrightarrow{C} c_2$ 与 $c_1F \xrightarrow{D} c_2F$ 之间始终都存在单射；
- F 是**完全的**当且仅当对任意 C 中的对象 c_1, c_2，$c_1 \xrightarrow{C} c_2$ 与 $c_1F \xrightarrow{D} c_2F$ 之间始终都存在满射；
- F 是**完全忠实的**当且仅当任意 C 中对象 c_1, c_2，$c_1 \xrightarrow{C} c_2$ 与 $c_1F \xrightarrow{D} c_2F$ 之间始终都存在双射。

> ⓘ **Note**
>
> 刚才提到的“单 / 满 / 双射”
> 针对的都是范畴的箭头部分。

- F 是**本质满的**当且仅当对任意 D 中对象 d 都存在 C 中对象 c 使 $cF \xrightarrow{D} d$ 之间有双射。

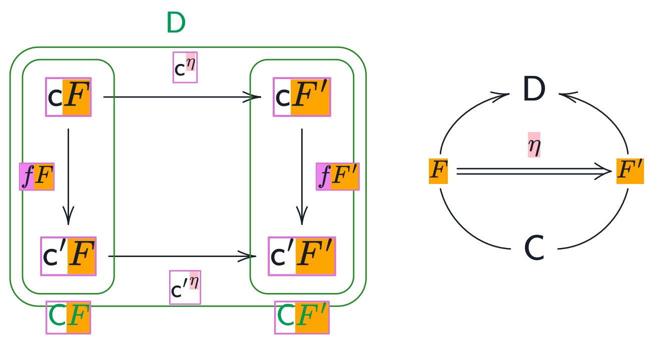
根据刚才的信息我们不难得知

- 若 F，G 为忠实函子
  则 $G \overset{\text{Cat}}{\circ} G$ 为忠实函子；
- 若 F，G 为完全函子
  则 $F \overset{\text{Cat}}{\circ} G$ 为完全函子；
- 若 F，G 为完全忠实函子
  则 $F \overset{\text{Cat}}{\circ} G$ 为完全忠实函子；
- 若 $F \overset{\text{Cat}}{\circ} G$ 为完全忠实函子
  且知道 G 为完全忠实函子
  则可知 F 为完全忠实函子；
- 若 F，G 为本质满函子
  则 $F \overset{\text{Cat}}{\circ} G$ 为本质满函子。

自然变换

如果还知道 $F' : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为函子，那么

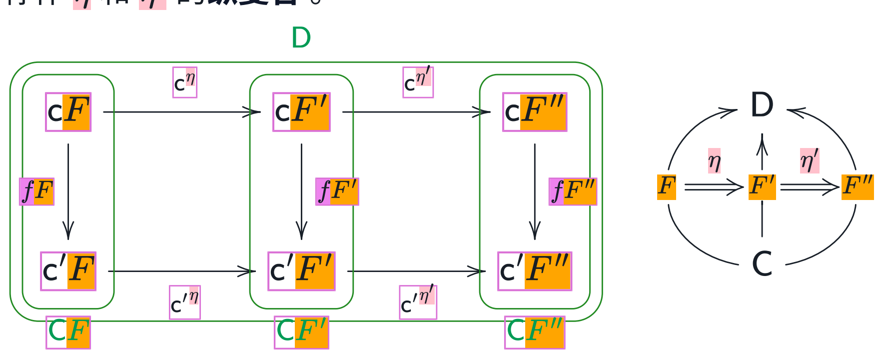
- $\eta : F \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}} F'$ 为自然变换当且仅当对任意 C 中对象 c，c′ 始终都会有下述交换图成立：



自然变换的复合

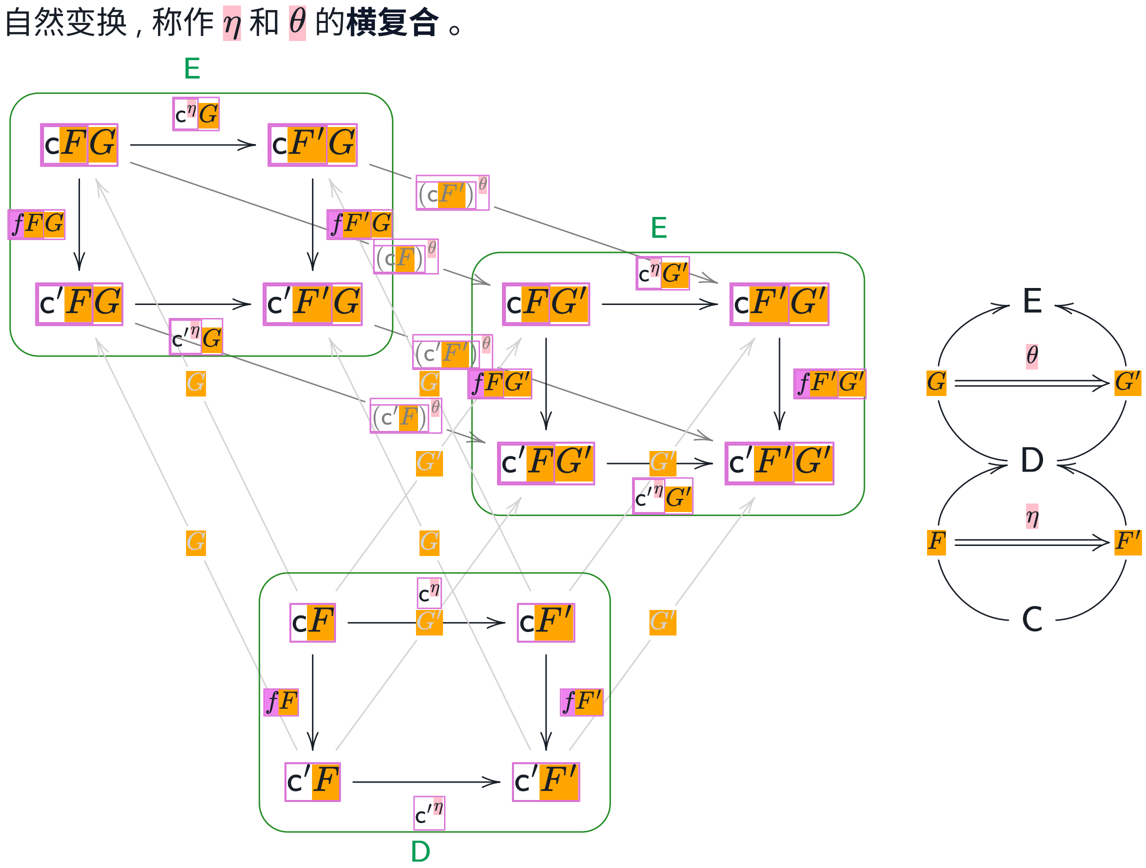
若已知 $\eta : F \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}} F'$ 构成自然变换且
还知道 $\eta' : F' \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}} F''$ 为自然变换则

- $\eta \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}}{\circ} \eta' : F \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}} F''$ 为自然变换，称作 η 和 η' 的**纵复合**。



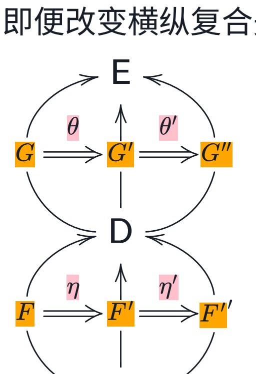
如果还知道 $G' : \mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$ 也是个函子
及自然变换 $\theta : G \xrightarrow{\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}} G'$ 那么便有

- $\eta \circ \theta : F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}} F' \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G'$ 为自然变换，称作 η 和 θ 的**横复合**。



若 $\theta' : G \xrightarrow{\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}} G'$ 为自然变换则

- $(\eta \circ \theta) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}}{\circ} (\eta' \circ \theta') = (\eta \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}}{\circ} \eta') \circ (\theta \overset{\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}}{\circ} \theta')$，即便改变横纵复合先后顺序也不影响最终结果。



恒等自然变换

同样对于自然变换也有恒等映射。

- ${}_{:F}\iota : F \xrightarrow{\overset{\mathrm{Cat}}{\mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}}} F$ 为恒等自然变换当且仅当
  对范畴 C 中任意对象 c 都有下述交换图成立：

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{c}F \arrow[r, "\mathsf{c}^{\eta} =_{:(\mathsf{c}F)} \mathrm{id}"] \arrow[d, "fF"'] & \mathsf{c}F \arrow[d, "fF"] \\
\mathsf{c}'F \arrow[r, "\mathsf{c}'^{\eta} =_{:(\mathsf{c}'F)} \mathrm{id}"'] & \mathsf{c}'F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{D} \\
F \arrow[u] \arrow[loop right, Rightarrow, "\eta"] \\
\mathsf{C} \arrow[u, dash]
\end{tikzcd}$$

D

$\mathsf{C}F$ $\quad$ $\mathsf{C}F$

自然同构

自然同构与你想象中的同构不太像。

- $\eta : F \xrightarrow{\overset{\mathrm{Cat}}{\mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}}} F'$ 为**自然同构**当且仅当
  c^{η} 总是同构，这里 c 为任意 C 中对象。

  此时 F，F' 的关系可用 $F \overset{\overset{\mathrm{Cat}}{\mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}}}{\cong} F'$ 表示

范畴等价的定义

我们用自然同构来定义范畴的等价。

- $\mathsf{C} \overset{\mathrm{Cat}}{\cong} \mathsf{D}$ 当且仅当
  存在函子 $F : \mathsf{C} \overset{\mathrm{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{D}$ 及 $F' : \mathsf{D} \overset{\mathrm{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$
  使 $F \overset{\mathrm{Cat}}{\circ} F' \overset{\overset{\mathrm{Cat}}{\mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{C}}}{\cong} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{id}$ 并且有 $F' \overset{\mathrm{Cat}}{\circ} F \overset{\overset{\mathrm{Cat}}{\mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{D}}}{\cong} {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{id}$。

米田引理

反变米田引理的陈述如下：

$$\underbrace{\left(\left(\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2\right) \xrightarrow[\mathbf{Cat}]{\mathcal{C}\to\mathbf{Set}} F\right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\overset{\mathcal{C}}{\left(c_2 F\right)}}_{\text{一堆元素}}$$

反变米田引理的证明如下：

1. $\Leftarrow$：考虑任意 $(c_2 F)$ 中的 etc：根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图
   我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_2}，于是便可构建一个完整的 η_2 。
   易知 η_2 是一个自然变换 。

$$\mathbf{Set}$$

$$\begin{tikzcd} c \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2"'] & cF \arrow[d, "fF"] \\ c' \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c'F \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2 \qquad \mathcal{C}F$$

2. $\Rightarrow$：考虑任意等式左侧的 η_1：若上述交换图成立
   则可对任意 η_1 指派 $\mathrm{etc} = {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 为 $c_2 F$ 中与之对应的元素；

$$\begin{tikzcd} c_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2"'] & c_2 F \arrow[d, "fF"] \\ c' \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c'F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {}_{:c_2}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2"'] & {}_{:c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2}) \arrow[d, "fF"] \\ f \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & \mathrm{etc}(fF) \end{tikzcd}$$

为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
c_2 唯一地确定了 η_2，反之 η_2 页唯一确定了 c_2 。

协变米田引理的陈述如下：

$$\underbrace{\left(\left(c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_\right) \xrightarrow[\mathbf{Cat}]{\mathcal{C}\to\mathbf{Set}} F\right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\overset{\mathcal{C}}{\left(c_1 F\right)}}_{\text{一堆元素}}$$

协变米田引理的证明如下：

1. $\Leftarrow$：考虑任意 $(c_1 F)$ 中的 etc：根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图
   我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_1}，于是便可构建一个完整的 η_1 。
   易知 η_1 是一个自然变换 。

$$\mathbf{Set}$$

$$\begin{tikzcd} c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} f"'] & cF \arrow[d, "fF"] \\ c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c'F \end{tikzcd}$$

$$c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{C} \qquad \mathcal{C}F$$

2. $\Rightarrow$：考虑任意等式左侧的 η_1：若上述交换图成立
   则可对任意 η_1 指派 $\mathrm{etc} = {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 为 $c_1 F$ 中与之对应的元素；

$$\begin{tikzcd} c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_1 \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} f"'] & c_1 F \arrow[d, "fF"] \\ c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c'F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {}_{:c_1}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} f"'] & {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1}) \arrow[d, "fF"] \\ f \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & \mathrm{etc}(fF) \end{tikzcd}$$

为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
c_1 唯一地确定了 η_1，反之 η_1 页唯一确定了 c_1 。