04-05 极限与余极限

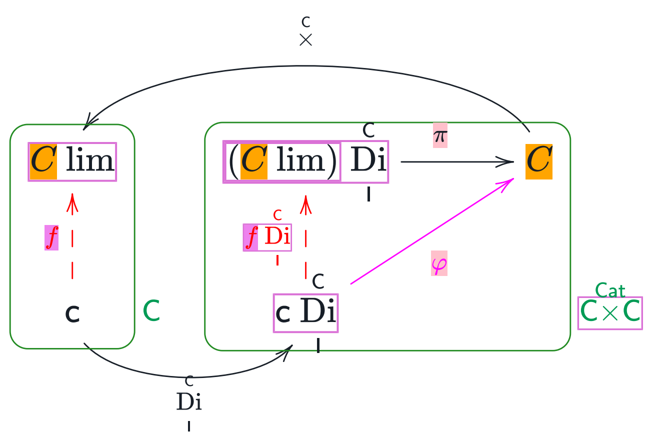
LaTeX Definitions are here.

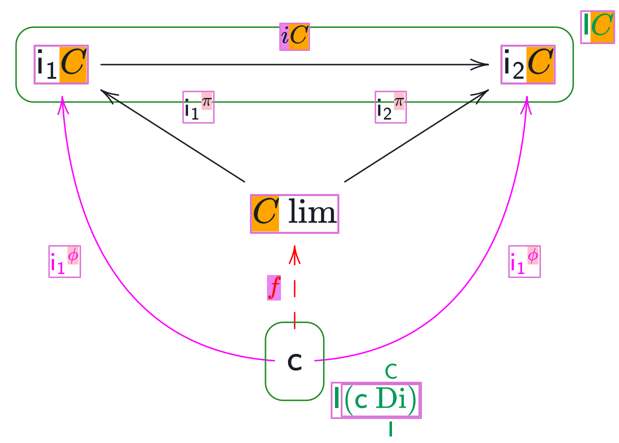
若提供函子 $C : \mathsf{I} \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{C}$，其中的 I 为小范畴（
即 $\mathsf{I}\ \mathrm{Obj}$ 能与 Set 中某个对象建立双射）则

泛性质

默认函子 $\lim : (\mathsf{I} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}) \xrightarrow{??} \mathsf{C}$ 在范畴 C 中有如下性质：

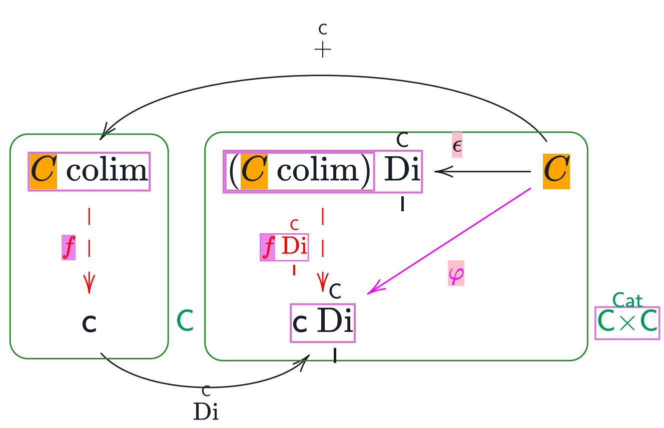
- $(\mathsf{c}\ \mathrm{Di} \xrightarrow{\mathsf{I} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}} C) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{c} \xrightarrow{\mathsf{C}} C\ \lim)$
  ——i 为 I 中任意对象。此即为
  极限的**泛性质**。

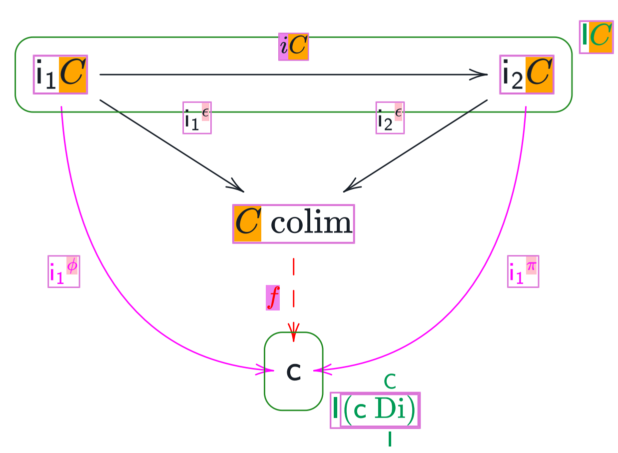




默认函子 $\mathrm{colim} : (\mathsf{I} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}) \xrightarrow{??} \mathsf{C}$ 在范畴 C 中有如下性质：

- $(C \xrightarrow{\mathsf{I} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}} \mathsf{c}\ \mathrm{Di}) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (C\ \mathrm{colim} \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c})$
  —— i 为 I 中任意对象。此即为
  余极限的**泛性质**。





> **Note**
>
> 在上面的插图中
>
> - $\mathrm{Di} : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{C} \times \mathsf{C})$ 为对角函子满足
> $\mathsf{c} \longmapsto (\mathsf{c} . \mathsf{c})$
> - $\mathrm{Di} : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{I} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C})$
> $\mathsf{c} \longmapsto$ 常值函子
> $\mathsf{c}\ \mathrm{Di} :\quad \mathsf{I} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}$
> $\mathsf{i} \longmapsto \mathsf{c}$
> $f \longmapsto {}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}$
>   即为对角函子的第二种等价的定义。
>   I 为仅含两个对象的范畴，在此则
>   作为一个指标范畴。1 和 2 分别为
>   其中的对象。
> - $C : \mathsf{I} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}$ 为函子，满足
> $\mathsf{i} \longmapsto \mathsf{c_i}$
> - 不难看出上图中
> $\pi : (C\ \lim)\ \mathrm{Di} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} C$
> $\epsilon : C \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (C\ \mathrm{colim})\ \mathrm{Di}$
>   都构成自然变换。$1^\pi . 2^\pi$ 和 $1^\epsilon . 2^\epsilon$ 可分别视作是 π 和 ϵ。