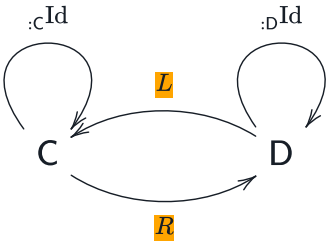


伴随函子的 unit 与 counit



伴随函子：对任意 c 和 d 有 $(d \overset{D}{\rightarrow} c \textcolor{brown}{R}) \overset{\text{Set}}{\cong} (d \textcolor{brown}{L} \overset{C}{\rightarrow} c)$ 。如此

不难看出这其实蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_2 ，见下：

$$\begin{aligned}\phi_2 &: (_ \xrightarrow{D} _ R) \xrightarrow{(D \times C) \xrightarrow{C} \text{Set}} ((_ L \xrightarrow{C} _)) \\ (_ \cdot c) \phi_2 &: (_ \xrightarrow{D} cR) \xrightarrow{D \xrightarrow{C} \text{Set}} ((_ L \xrightarrow{C} c)) \\ (d \cdot _) \phi_2 &: (d \xrightarrow{D} _ R) \xrightarrow{C \xrightarrow{C} \text{Set}} (dL \xrightarrow{C} _)\end{aligned}$$

套用反变米田引理我们便可获得

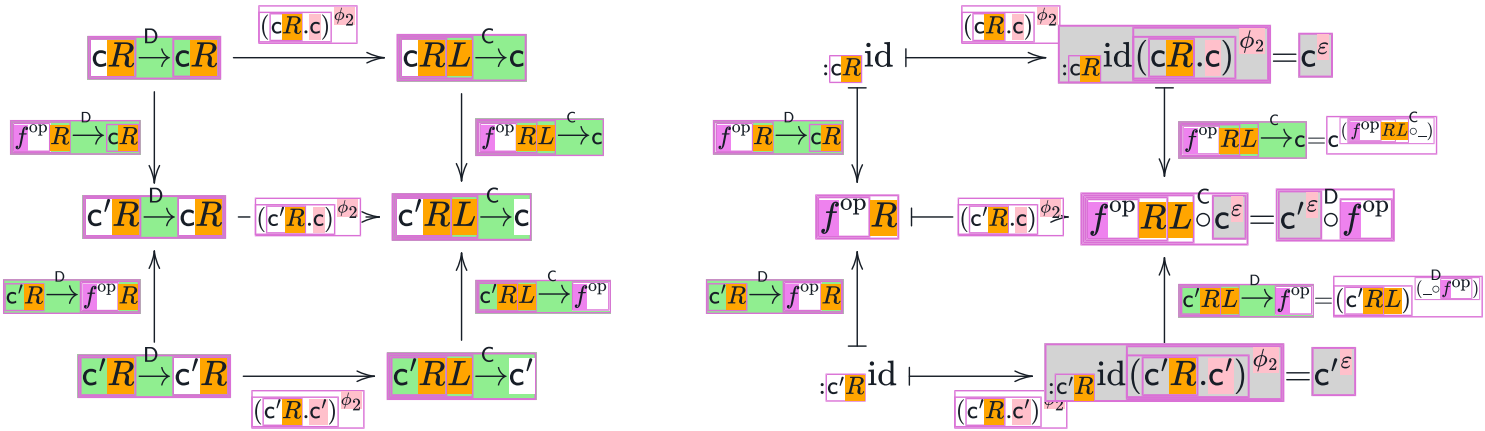
$$\underbrace{((_ \xrightarrow{D} cR) \xrightarrow{D^{op} \xrightarrow{C} \text{Set}} (_ L \xrightarrow{C} c))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(cRL \xrightarrow{C} c)}_{\text{一堆元素}}$$

由反变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(_ \cdot c) \phi_2$

都会有一个右侧集合中的箭头与之相对应，即 $:_{cR} \text{id}(cR \cdot c) \phi_2 = c^\varepsilon$ 。

为何 ε 构成自然变换呢？下方右图第二行的第二个节点说明了一切。

这两张图这其实就是反变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。



不难看出这其实蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_1 ，见下：

$$\begin{aligned}\phi_1 &: (_ L \xrightarrow{C} _) \xrightarrow{(D \times C) \xrightarrow{C} \text{Set}} (_ \xrightarrow{D} _ R) \\ (_ \cdot c) \phi_1 &: (_ L \xrightarrow{C} c) \xrightarrow{D \xrightarrow{C} \text{Set}} (_ \xrightarrow{D} cR) \\ (d \cdot _) \phi_1 &: (dL \xrightarrow{C} _) \xrightarrow{C \xrightarrow{C} \text{Set}} (d \xrightarrow{D} _ R)\end{aligned}$$

套用协变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{((dL \xrightarrow{C} _) \xrightarrow{C \xrightarrow{C} \text{Set}} (d \xrightarrow{D} _ R))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(d \xrightarrow{D} dLR)}_{\text{一堆元素}}$$

由协变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(d \cdot _) \phi_1$

都会有一个右侧集合中的箭头与之相对应，即 $:_{dL} \text{id}(d \cdot dL) \phi_1 = d^\eta$ 。

为何 η 构成自然变换呢？下方右图第二行的第二个节点说明了一切。

这两张图这其实就是协变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

