$\LaTeX$ Definitions are here.

10 伴随函子

若有函子 $L : \mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}$
以及函子 $R : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$, 即

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[loop above, "{}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id}"] \arrow[r, bend right, "R"'] & \mathsf{D} \arrow[loop above, "{}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id}"] \arrow[l, bend right, "L"']
\end{tikzcd}$$

那么规定

伴随函子的第一种定义

- $L \dashv R$ 当且仅当
  对任意 C 中对象 c
  及任意 D 中对象 d
  都有 $(\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c})$ 。

假如确实有 $L \dashv R$, 那么不难得知

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_2，见下：

$$\phi_2 : (\_ \xrightarrow{D} \_R) \xrightarrow{(D\times C)\to\mathrm{Set}} (\_L \xrightarrow{C} \_)$$
$$(\_ \,.\, c)^{\phi_2} : (\_ \xrightarrow{D} cR) \xrightarrow{D\to\mathrm{Set}} (\_L \xrightarrow{C} c)$$
$$(d \,.\, \_)^{\phi_2} : (d \xrightarrow{D} \_R) \xrightarrow{C\to\mathrm{Set}} (dL \xrightarrow{C} \_)$$

套用反变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{\left((\_ \xrightarrow{D} cR) \xrightarrow[\text{Cat}]{D^{op}\to\mathrm{Set}} (\_L \xrightarrow{C} c)\right)}_{一堆自然变换} \overset{\mathrm{Set}}{\cong} \underbrace{(cRL \xrightarrow{C} c)}_{一堆元素}$$

由反变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(\_ \,.\, c)^{\phi_2}$
右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 ${}_{:cR}\mathrm{id}\,(cR \,.\, c)^{\phi_2} = c^{\varepsilon}$。如此

- $\varepsilon : R\circ L \xrightarrow[\text{Cat}]{C\to C} {}_{:C}\mathrm{Id}$ 构成自然变换。

> 考虑任意 $f^{op} : c' \xrightarrow{C} c$：
>
> $$\begin{tikzcd}
cR \xrightarrow{D} cR \arrow[r, "(cR.c)^{\phi_2}"] \arrow[d, "f^{op}R \xrightarrow{D} cR"'] & cRL \xrightarrow{C} c \arrow[d, "f^{op}RL \xrightarrow{C} c"] \\
c'R \xrightarrow{D} cR \arrow[r, dashed, "(c'R.c)^{\phi_2}"] & c'RL \xrightarrow{C} c \\
c'R \xrightarrow{D} c'R \arrow[r, "(c'R.c')^{\phi_2}"'] \arrow[u, "c'R \xrightarrow{D} f^{op}R"] & c'RL \xrightarrow{C} c' \arrow[u, "c'RL \xrightarrow{C} f^{op}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:cR}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(cR.c)^{\phi_2}"] \arrow[d, mapsto, "f^{op}R \xrightarrow{D} cR"'] & {}_{:cR}\mathrm{id}\,(cR.c)^{\phi_2} = c^{\varepsilon} \arrow[d, mapsto, "f^{op}RL \xrightarrow{C} c \,=\, c^{(f^{op}RL \,\overset{C}{\circ}\, _)}"] \\
f^{op}R \arrow[r, mapsto, dashed, "(c'R.c)^{\phi_2}"] & f^{op}RL \overset{C}{\circ} c^{\varepsilon} = c'^{\varepsilon} \overset{D}{\circ} f^{op} \\
{}_{:c'R}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(c'R.c')^{\phi_2}"'] \arrow[u, mapsto, "c'R \xrightarrow{D} f^{op}R"] & {}_{:c'R}\mathrm{id}\,(c'R.c')^{\phi_2} = c'^{\varepsilon} \arrow[u, mapsto, "c'RL \xrightarrow{C} f^{op} \,=\, (c'RL)^{(_ \,\overset{D}{\circ}\, f^{op})}"']
\end{tikzcd}$$
>
> 上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图
> 其实就是反变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_1，见下：

$$\phi_1 : (\_L \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{(D\times C)\to\mathrm{Set}} (\_ \xrightarrow{D} \_R)$$
$$(\_ \,.\, c)^{\phi_1} : (\_L \xrightarrow{C} c) \xrightarrow{D\to\mathrm{Set}} (\_ \xrightarrow{D} cR)$$
$$(d \,.\, \_)^{\phi_1} : (dL \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{C\to\mathrm{Set}} (d \xrightarrow{D} \_R)$$

套用协变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{\left((dL \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow[\text{Cat}]{C\to\mathrm{Set}} (d \xrightarrow{D} \_R)\right)}_{一堆自然变换} \overset{\mathrm{Set}}{\cong} \underbrace{(d \xrightarrow{D} dLR)}_{一堆元素}$$

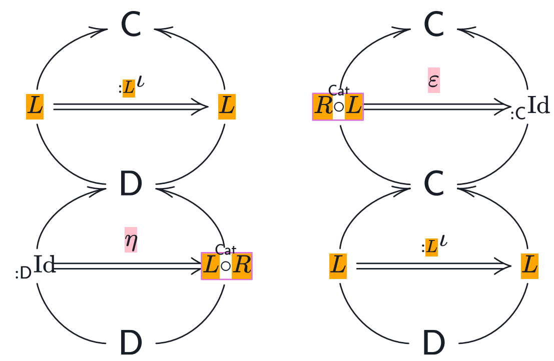
由协变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(d \,.\, \_)^{\phi_1}$
右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 ${}_{:dL}\mathrm{id}\,(d \,.\, dL)^{\phi_1} = d^{\eta}$。如此。

- $\eta : {}_{:D}\mathrm{Id} \xrightarrow[\text{Cat}]{D\to D} L\circ R$ 构成自然变换。

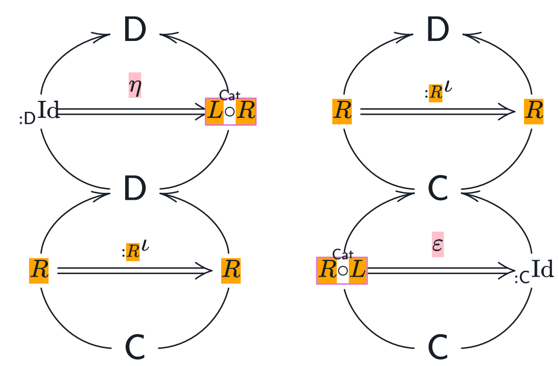
> 考虑任意 $g : d \xrightarrow{D} d'$：
>
> $$\begin{tikzcd}
dL \xrightarrow{C} dL \arrow[r, "(d.dL)^{\phi_1}"] \arrow[d, "dL \xrightarrow{C} gL"'] & d \xrightarrow{D} dLR \arrow[d, "d \xrightarrow{D} gLR"] \\
dL \xrightarrow{C} d'L \arrow[r, dashed, "(d.d'L)^{\phi_1}"] & d \xrightarrow{D} d'LR \\
d'L \xrightarrow{C} d'L \arrow[r, "(d'.d'L)^{\phi_1}"'] \arrow[u, "gL \xrightarrow{C} d'L"] & d' \xrightarrow{D} d'LR \arrow[u, "g \xrightarrow{D} d'LR"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:dL}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(d.dL)^{\phi_1}"] \arrow[d, mapsto, "dL \xrightarrow{C} gL"'] & {}_{:dL}\mathrm{id}\,(d.dL)^{\phi_1} = d^{\eta} \arrow[d, mapsto, "d \xrightarrow{D} gLR \,=\, d^{(_ \,\overset{D}{\circ}\, gLR)}"] \\
gL \arrow[r, mapsto, dashed, "(d.d'L)^{\phi_1}"] & d^{\eta} \overset{D}{\circ} gLR = g \overset{D}{\circ} d'^{\eta} \\
{}_{:d'L}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(d'.d'L)^{\phi_1}"'] \arrow[u, mapsto, "gL \xrightarrow{C} d'L"] & {}_{:d'L}\mathrm{id}\,(d'.d'L)^{\phi_1} = d'^{\eta} \arrow[u, mapsto, "g \xrightarrow{D} d'LR \,=\, d'LR^{(g \,\overset{D}{\circ}\, _)}"']
\end{tikzcd}$$
>
> 上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图
> 其实就是协变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

对于前面的 ε 和 η 我们有下述交换图成立：

- $$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\eta \circ {}_{:}L^{\iota}"] \arrow[dr, "{}_{:}L^{\iota}"'] & L \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} R \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} L \arrow[d, "{}_{:}L^{\iota} \circ \varepsilon"] \\ & L \end{tikzcd}$$



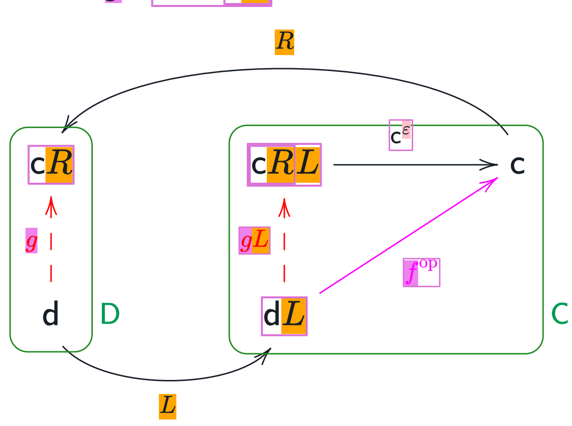
- $$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "{}_{:}R^{\iota} \circ \eta"] \arrow[dr, "{}_{:}R^{\iota}"'] & R \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} L \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} R \arrow[d, "\varepsilon \circ {}_{:}R^{\iota}"] \\ & R \end{tikzcd}$$



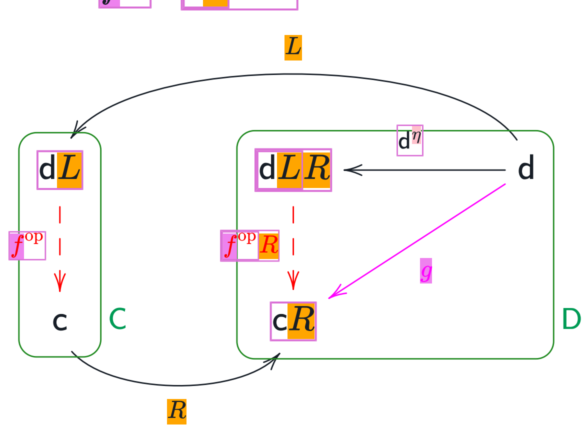
伴随函子的第二种定义

假设我们不知道 L 和 R 构成一对伴随函子并且有自然变换 $\varepsilon : R \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} L \xrightarrow{\mathsf{C} \to \mathsf{C}} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id}$ 和 $\eta : {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id} \xrightarrow{\mathsf{D} \to \mathsf{D}} L \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} R$ 能同时满足上页开头的两幅交换图，那么

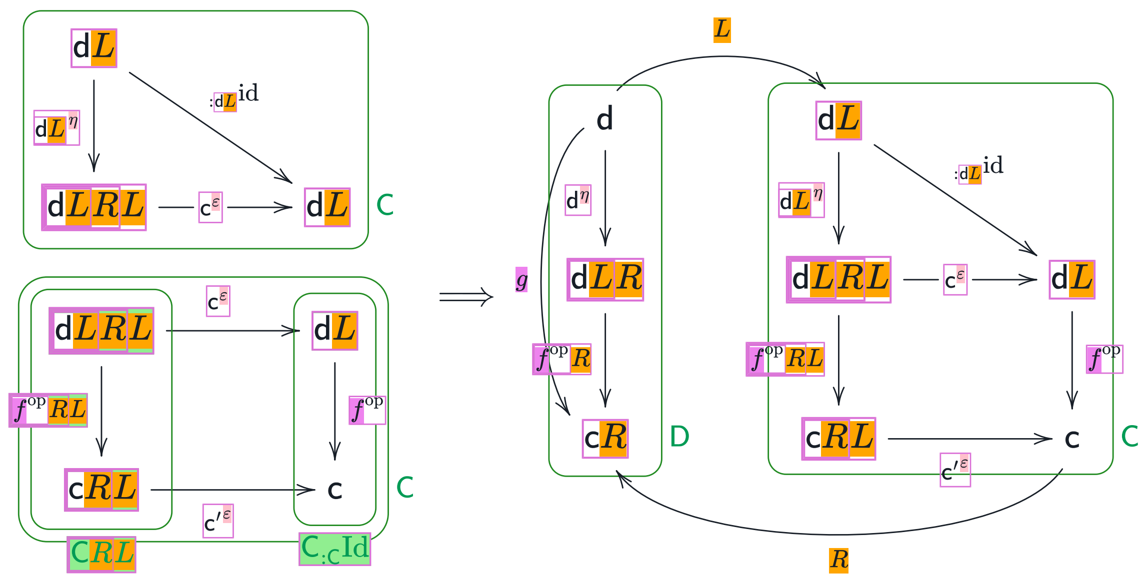
- 对任意 C 中对象 c
  及任意 D 中对象 d
  及任意 $f^{\mathrm{op}} : \mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$ 始终存在
  唯一的 $g : \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R$ 使下图交换。



- 对任意 C 中对象 c
  及任意 D 中对象 d
  及任意 $g : \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R$ 始终都会存在
  唯一的 $f^{\mathrm{op}} : \mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$ 使下图交换。



下方左图上半部分即为上页第一幅图，而
下方左图下半部分可由 ε 为自然变换得出；
将两个图拼在一起即可获得下方右图：



那为何 g 是唯一的呢？假如有 g' 亦满足上图，则