

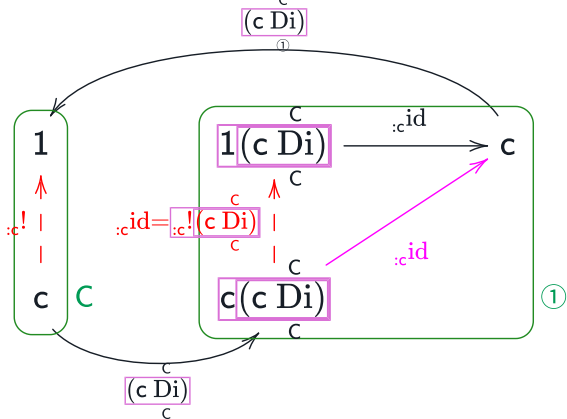
# 01 始对象和终对象

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Definitions are here.

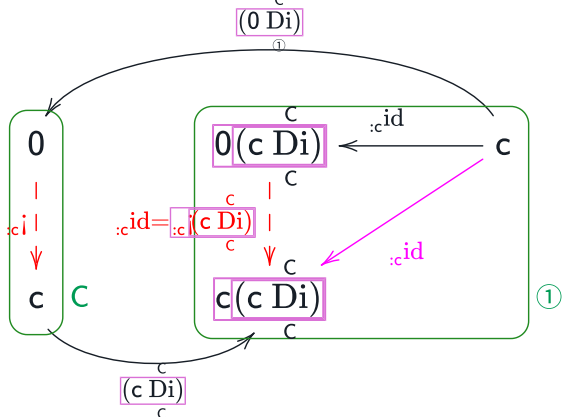
## 泛性质

范畴由对象及其间箭头构成。本文重点分析余积闭范畴  $\mathcal{C}$ 。首先给出如下定义：

- 1 为**终对象**当且仅当对任意  $\mathcal{C}$  中对象  $c$  都有且仅有唯一的箭头  $!_c : c \rightarrow 1$ ：



- 0 为**始对象**当且仅当对任意  $\mathcal{C}$  中对象  $c$  都有且仅有唯一的箭头  $!_c : 0 \rightarrow c$ ：



### Note

- $\text{Di} : \mathcal{C} \xrightarrow{\text{Cat}} (\textcircled{1} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathcal{C})$   
 $\textcircled{1} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathcal{C} \mapsto \text{常值函子}$   
 $\text{c Di} : \textcircled{1} \xrightarrow{\text{Cat}} (\textcircled{1} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathcal{C})$   
 $\textcircled{1} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathcal{C} \mapsto \text{c}$   
 $f \mapsto !_c \text{id}$   
 $\textcircled{1}$  为仅含单个函子的范畴，1 为其中的对象；  
仅含有单个对象的范畴可被等价地视为  $\textcircled{1}$ 。

若范畴  $\mathcal{C}$  中真的含有 0 和 1 分别作为始对象和终对象 则根据上述信息可知

- 形如  $1 \xrightarrow{\text{c}} 1$  的箭头  
只有一个，即  $!_1 \text{id}$ ；
- 形如  $0 \xrightarrow{\text{c}} 0$  的箭头  
只有一个，即  $!_0 \text{id}$ ；

## 元素与全局元素

对任意对象  $c_1, c'_1, \text{etc}, c_2, c'_2, \text{etc}, c_3$  及任意的映射  $f$  我们进行如下的规定：

- $f$  为  $c_2$  的**元素**当且仅当  
 $f \text{ tar} = c_2$ ；
- $i$  为  $c_1$  的**全局元素**当且仅当  
 $f \text{ tar} = c_1$  且  $f \text{ src} = 1$
- $i$  不存在仅当  
 $f \text{ tar} = 0$ 。

### Note

其他范畴中刚才的断言未必成立。

## 02-03 范畴当中的箭头

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Definitions are here.

沿用上一节提到的自由变量。我们规定：

- $\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow \mathbf{c}_2} =$   
所有从  $\mathbf{c}_1$  射向  $\mathbf{c}_2$  的箭头构成的集。

### Note

上述断言仅对于**局部小范畴**成立，  
其他范畴里  $\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow \mathbf{c}_2}$  未必构成集。

范畴  $\mathcal{C}$  中特定的箭头可以进行复合运算：

- $\overset{\mathcal{C}}{\circ} : (\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow \mathbf{c}_2}) \times (\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_2 \rightarrow \mathbf{c}_3}) \xrightarrow{\text{Set}} (\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow \mathbf{c}_3})$   
 $(\overset{\mathcal{C}}{j_1} \cdot \overset{\mathcal{C}}{j_2}) \mapsto (\overset{\mathcal{C}}{j_1 \circ j_2})$

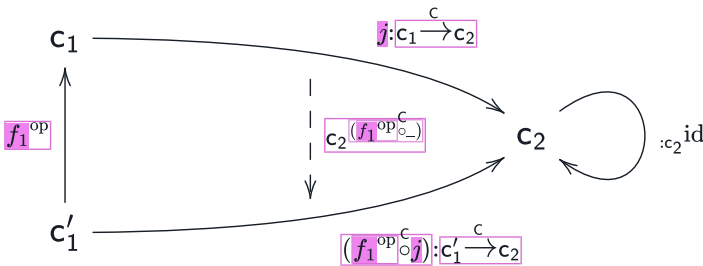
如果我们还知道箭头  $f_1, j, f_2$  分别属于  
 $\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow \mathbf{c}'_1}, \overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow \mathbf{c}_2}, \overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_2 \rightarrow \mathbf{c}'_2}$  那么便可知

- $(f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} j) \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2 = f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} (j \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2),$   
即箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便可获得新的函数：

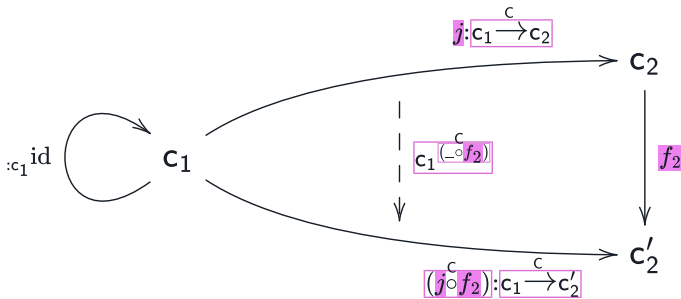
- $(f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_ ) : (\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}_1 \rightarrow \_}) \xrightarrow{\overset{\text{Cat}}{\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}}} (\overset{\mathcal{C}}{\mathbf{c}'_1 \rightarrow \_})$   
 $j \mapsto (\overset{\mathcal{C}}{f_1^{\text{op}} \circ j})$

称作**前复合**。下图有助于形象理解：



- $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) : (\_ \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow \mathbf{c}_2}) \xrightarrow{\overset{\text{Cat}}{\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}}} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow \mathbf{c}'_2})$   
 $j \mapsto (\overset{\mathcal{C}}{j \circ f_2})$

称作**后复合**。下图有助于形象理解：



根据上面的定义不难得出下述结论：

- $(f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_ ) \overset{???}{\circ} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) = (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) \overset{???}{\circ} (f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_ )$   
复合运算具有**结合律**，即后面提到的**自然性**；
- $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} j) \overset{\overset{\text{Cat}}{\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}}}{\circ} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) = (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} (j \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2))$   
前复合与复合运算的关系
- $(\overset{\mathcal{C}}{j \circ \_}) \overset{\overset{\text{Cat}}{\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}}}{\circ} (f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_ ) = ((f_1^{\text{op}} \overset{\mathcal{C}}{\circ} j) \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_ )$   
后复合与复合运算的关系

## 箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。

假如  $a_1$  为  $\mathbf{c}_1$  的全局元素则可规定

- $\mathbf{c}_1 j = \mathbf{c}_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} j$

# 恒等箭头

范畴  $\mathbf{C}$  内的每个对象都有恒等映射：

- $\text{id}_{c_1} : c_1 \rightarrow c_1$   
 $c_1 \mapsto c_1$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- $\text{id}_{c_1} \circ j = j$   
 $= j \circ \text{id}_{c_2}$

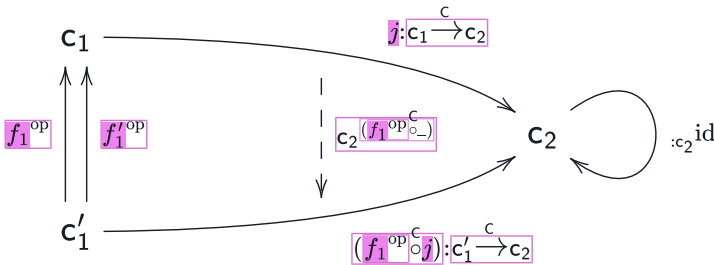
此外还可以得知

- $(\text{id}_{c_1} \circ -) : (c_1 \rightarrow -) \xrightarrow[\text{Cat}]{\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}} (c_1 \rightarrow -)$   
为恒等自然变换，可记成是  $(\text{id}_{c_1} \circ -)$ ；
- $(- \circ \text{id}_{c_2}) : (- \rightarrow c_2) \xrightarrow[\text{Cat}]{\mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}} (- \rightarrow c_2)$   
为恒等自然变换，可记成是  $(- \circ \text{id}_{c_2})$ 。

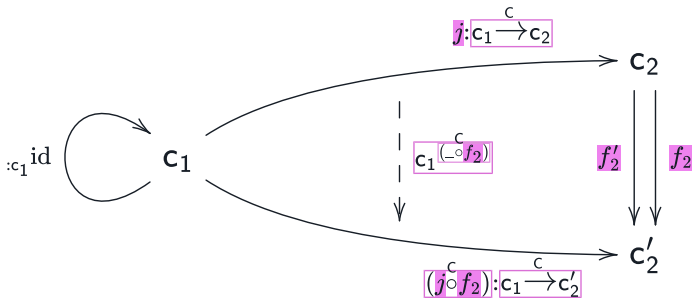
# 单满态以及同构

接下来给出单 / 满态和同构的定义。

- $j$  为**单态**当且仅当对任意  $c'_1$   
若有  $f_1, f'_1 : c_1 \rightarrow c'_1$  满足  $f_1^{\text{op}} \circ j = f'_1^{\text{op}} \circ j$   
则有  $f_1^{\text{op}} = f'_1^{\text{op}}$ 。详情见下图：



- $j$  为**满态**当且仅当对任意  $c'_2$   
若有  $f_2, f'_2 : c_2 \rightarrow c'_2$  满足  $j \circ f_2 = j \circ f'_2$   
则有  $f_2 = f'_2$ 。详情见下图：



- $i$  为**同构**当且仅当存在  $j' : c_2 \rightarrow c_1$   
使得  $j \circ j' = \text{id}_{c_1}$  且  $j' \circ j = \text{id}_{c_2}$ 。  
此时  $c_1, c_2$  间的关系可记作  $c_1 \cong c_2$ 。

若还知道  $j = j_1$  且  $j_2 : c_2 \rightarrow c_3$  则有

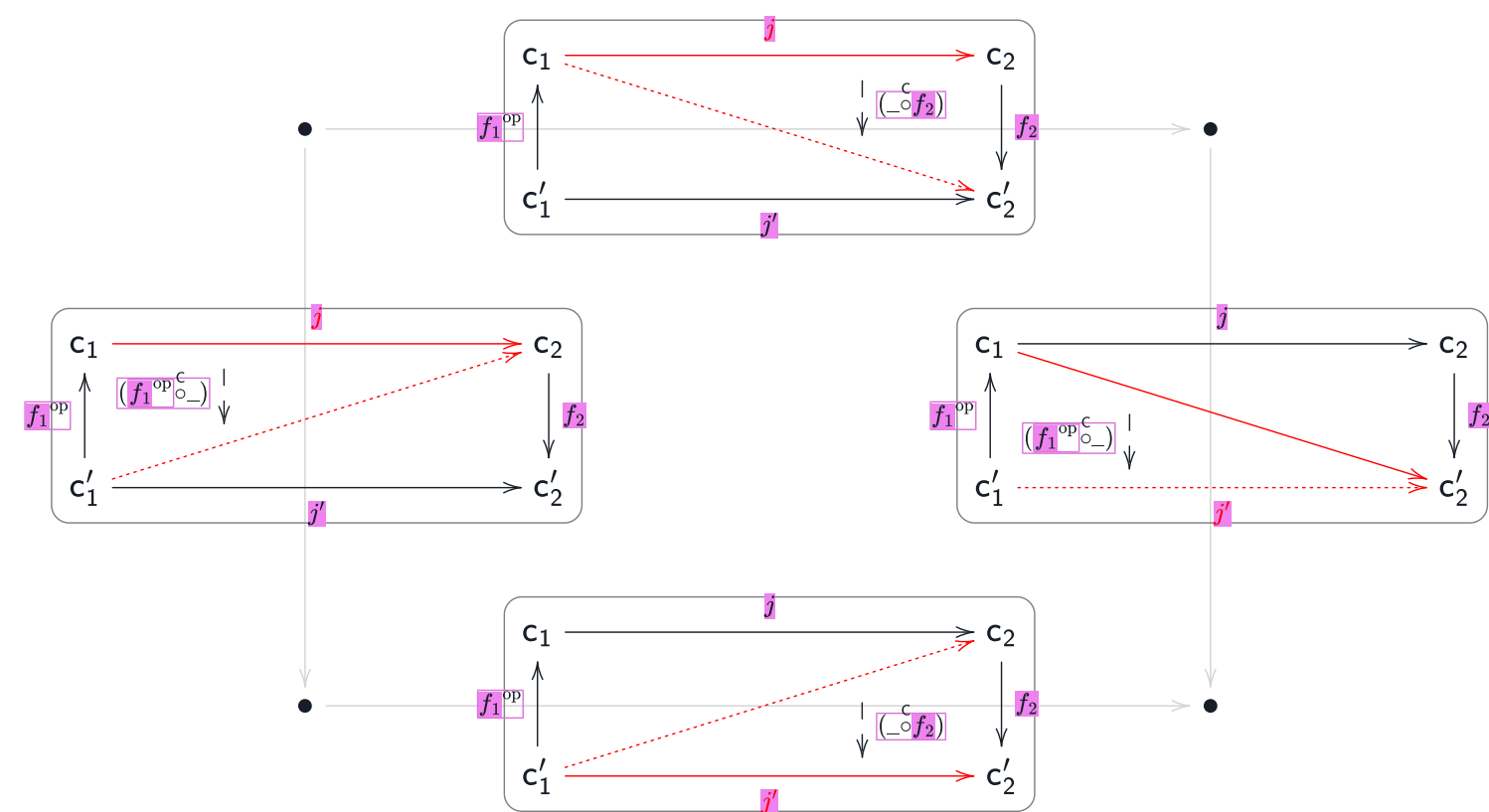
- 若  $j_1, j_2$  为单态 / 满态 / 同构  
则  $j_1 \circ j_2$  为单态 / 满态 / 同构；
- 若  $j_1 \circ j_2$  为同构  
且  $j_1, j_2$  中有一个为同构  
则  $j_1, j_2$  两者皆构成同构。

不仅如此我们还可以得出下述结论：

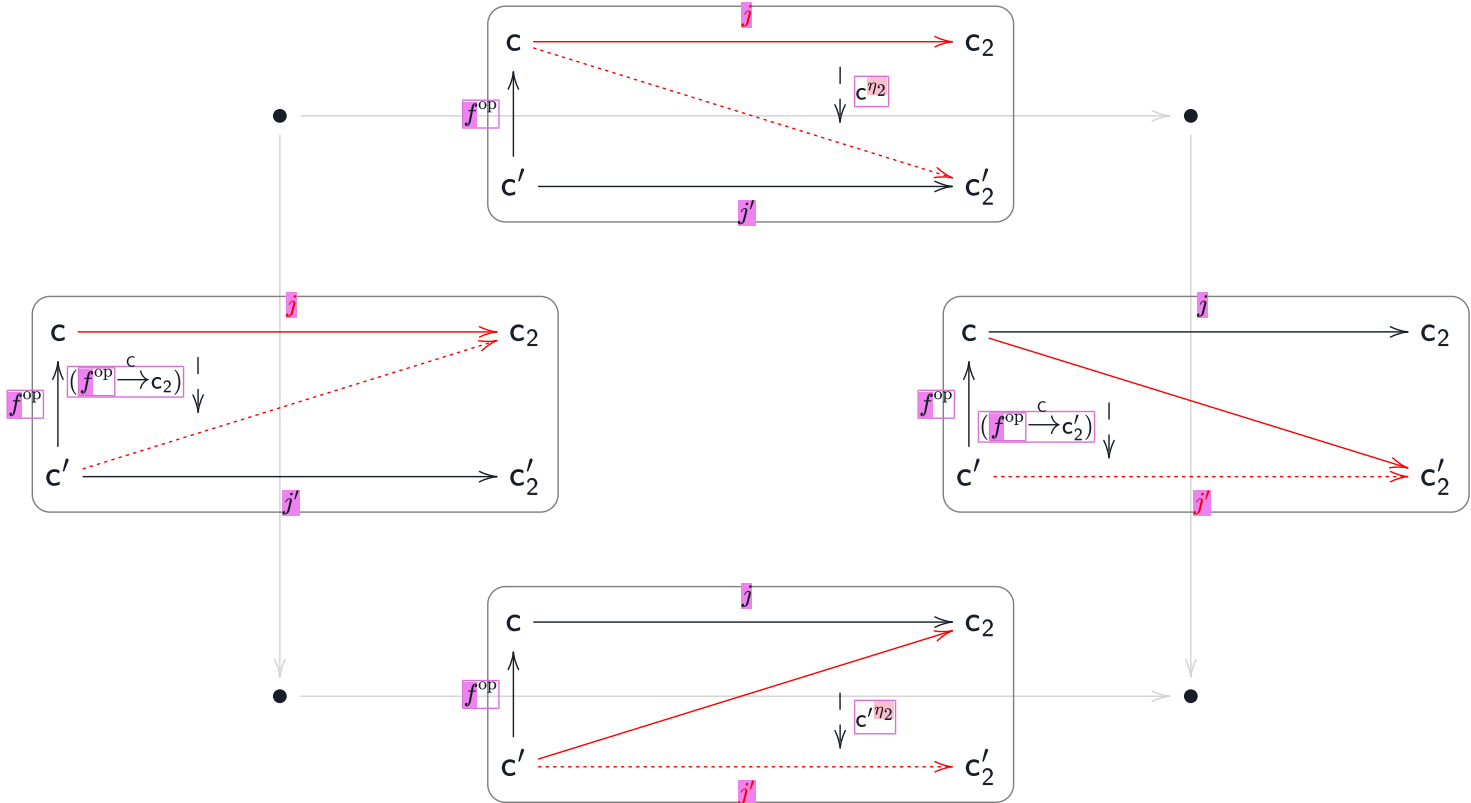
- $c_1$  为单态，  
由  $\text{id}_{c_1}$  的唯一性可知；
- $\text{id}_0 = \text{id}_1$  为同构，  
因为  $0 \rightarrow 0 = \{\text{id}_0\}$   
并且  $1 \rightarrow 1 = \{\text{id}_1\}$

# 同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释。  
后面会将自然性进行进一步推广。



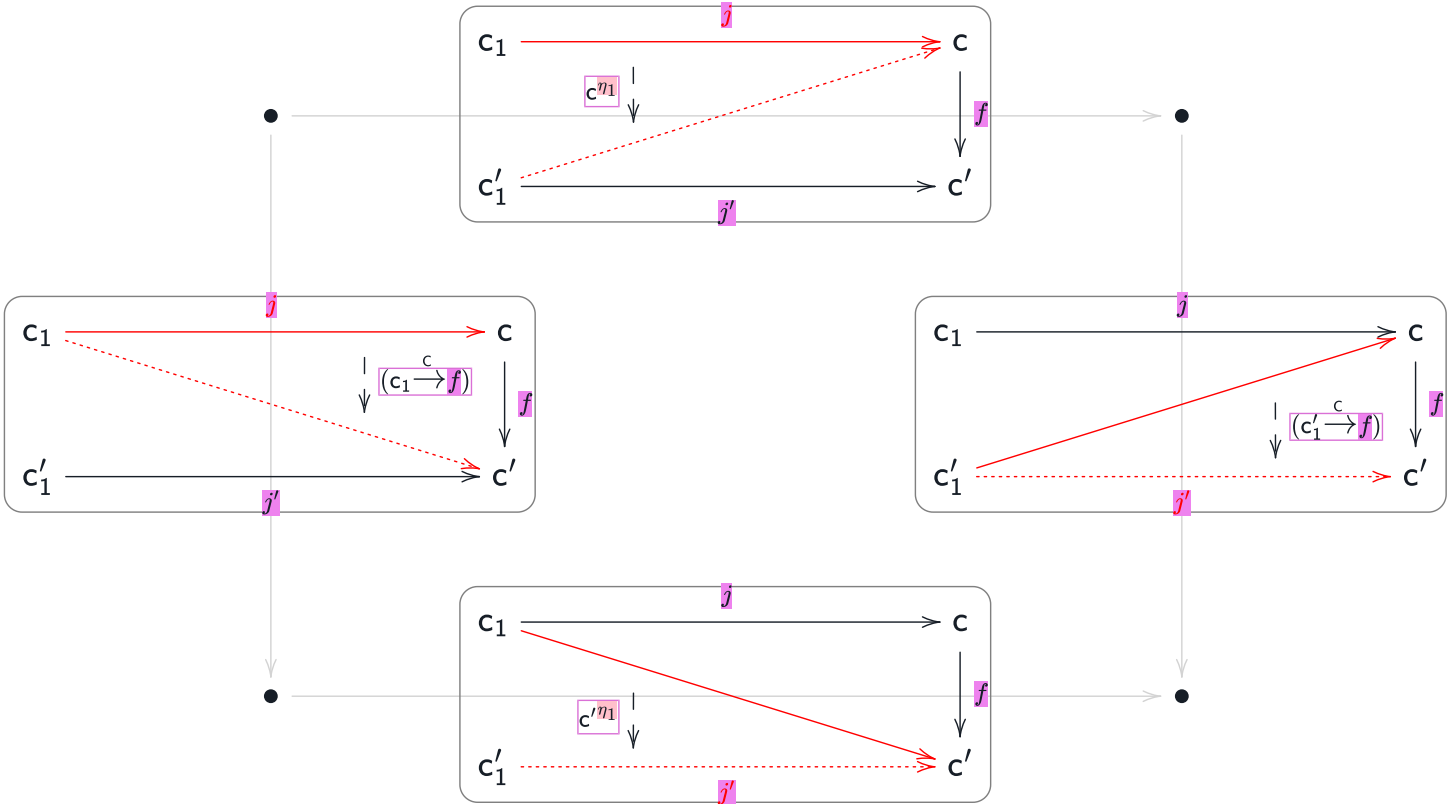
现提供自然变换  $\eta_2$  满足自然性 —— 即对任意  $\mathcal{C}$  中对象  $c, c'$  以及任意  $\mathcal{C}$  中映射  $f: c \rightarrow c'$  都有  $(f^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2) \circ^{\text{Set}} c' \eta_2 = c \eta_2 \circ (f^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} c'_2)$  :



那么我们便会有下述结论：

- $c_2 \cong c'_2$  当且仅当对任意  $\mathcal{C}$  中的对象  $c$   $c \eta_2$  都是同构。此时称  $\eta_2$  为**自然同构**。

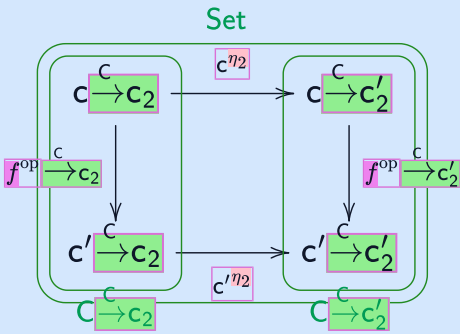
现提供自然变换  $\eta_1$  满足自然性 —— 即对任意  $\mathcal{C}$  中对象  $c, c'$  以及任意  $\mathcal{C}$  中映射  $f: c \rightarrow c'$  都有  $(c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} f) \circ^{\text{Set}} c' \eta_1 = c \eta_1 \circ (c'_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} f)$  :



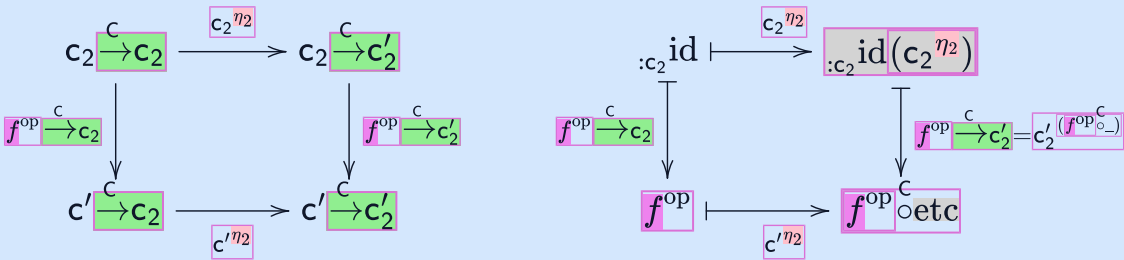
那么我们便会有下述结论：

- $c_1 \cong c'_1$  当且仅当对任意  $\mathcal{C}$  中的对象  $c$   $c \eta_1$  都是同构。此时称  $\eta_1$  为**自然同构**。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为



⇒ 易证, ⇐ 用到了米田技巧 将 c 换成 c<sub>2</sub> :

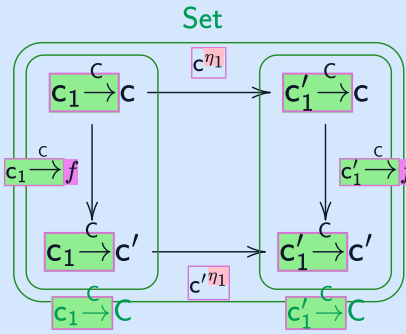


为了方便就用 **etc** 表示  $\text{id}(c_2^{\eta_2})$ 。由上图知  $f^{\text{op}}(c'^{\eta_2}) = (f^{\text{op}} \circ \text{etc})$  (见右图底部和右侧箭头), 故  $c'^{\eta_2} = c' \xrightarrow{c} \text{etc}$  (注意到箭头  $f^{\text{op}} : c' \xrightarrow{c^{\text{op}}} c_2$ ); 而  $c'^{\eta_2} = c' \xrightarrow{c} \text{etc} = c'(\text{etc} \circ \text{id})$  始终是同构 故  **$\text{etc} : c_2 \rightarrow c'_2$  也是同构**。

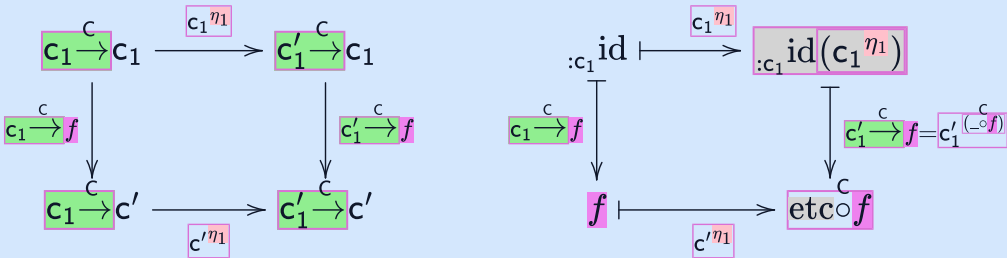
**Note**

高亮部分省去了部分推理过程, 具体在**米田嵌入**处会详细介绍。

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为



⇒ 易证, ⇐ 用到了米田技巧 将 c 换成 c<sub>1</sub> :



为了方便就用 **etc** 表示  $\text{id}(c_1^{\eta_1})$ 。由上图知  $f(c'^{\eta_1}) = (\text{etc} \circ f)$  (见右图底部和右侧箭头), 故  $c'^{\eta_1} = \text{etc} \xrightarrow{c} c'$  (注意到箭头  $f : c_1 \xrightarrow{c} c'$ ); 而  $c'^{\eta_1} = \text{etc} \xrightarrow{c} c' = c'(\text{etc} \circ \text{id})$  始终是同构 故  **$\text{etc} : c_1 \rightarrow c'_1$  也是同构**。

**Note**

高亮部分省去了部分推理过程, 具体在**米田嵌入**处会详细介绍。

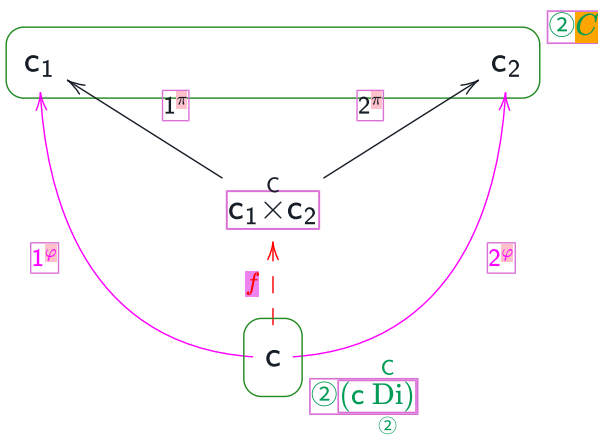
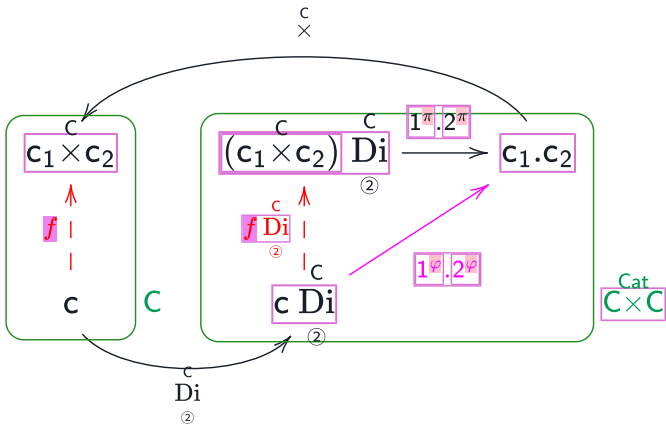
# 04-05 类型的和与积

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Definitions are here.

## 泛性质

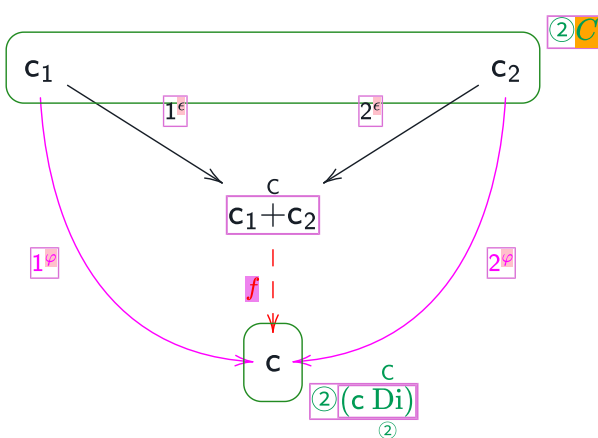
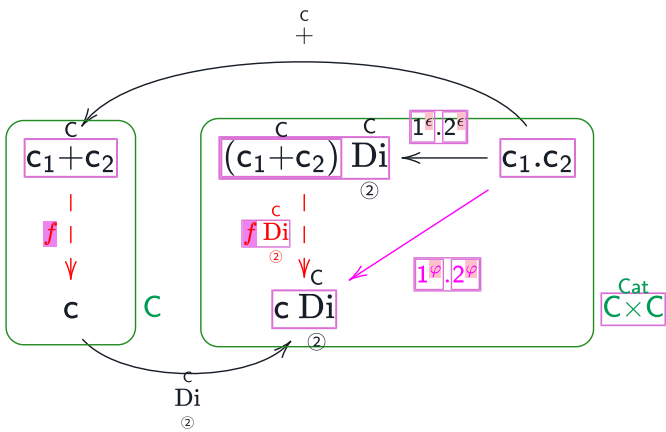
默认函子  $\overset{C}{\times} : (\overset{Cat}{C} \times \overset{Cat}{C}) \overset{Cat}{\longrightarrow} \overset{Cat}{C}$  在范畴  $C$  中有如下性质：

- $(\overset{C}{c} \rightarrow \overset{C}{c_1}) \overset{Set}{\times} (\overset{C}{c} \rightarrow \overset{C}{c_2}) \overset{Set}{\cong} \overset{C}{c} \rightarrow (\overset{C}{c_1} \times \overset{C}{c_2})$   
——  $c$  为任意  $C$  中对象。此即为积的泛性质，亦为指数对乘法的分配律。



默认函子  $\overset{C}{+} : (\overset{Cat}{C} \times \overset{Cat}{C}) \overset{Cat}{\longrightarrow} \overset{Cat}{C}$  在范畴  $C$  中有如下性质：

- $(\overset{C}{c_1} \rightarrow \overset{C}{c}) \overset{Set}{\times} (\overset{C}{c_2} \rightarrow \overset{C}{c}) \overset{Set}{\cong} (\overset{C}{c_1} + \overset{C}{c_2}) \rightarrow \overset{C}{c}$   
——  $c$  为任意  $C$  中对象。此即为和的泛性质，亦为指数对加法的分配律。



### Note

在上面的插图中

- $\overset{C}{Di} : \overset{Cat}{C} \overset{Cat}{\longrightarrow} (\overset{Cat}{C} \times \overset{Cat}{C})$  为对角函子满足  
 $\overset{C}{c} \mapsto (\overset{C}{c} . \overset{C}{c})$
- $\overset{C}{Di} : \overset{Cat}{C} \overset{Cat}{\longrightarrow} (\overset{Cat}{2} \longrightarrow \overset{Cat}{C})$   
 $\overset{C}{c} \mapsto$  常值函子  
 $\overset{C}{c Di} : \overset{Cat}{2} \overset{Cat}{\longrightarrow} \overset{Cat}{C}$   
 $1 \mapsto \overset{C}{c}$   
 $2 \mapsto \overset{C}{c}$   
 $f \mapsto \overset{C}{c} . id$

即为对角函子的第二种等价的定义。

$\overset{C}{2}$  为仅含两个对象的范畴，在此则作为一个指标范畴。 $1$  和  $2$  分别为其中的对象。

- $\overset{Cat}{C} : \overset{Cat}{2} \overset{Cat}{\longrightarrow} \overset{Cat}{C}$  为函子，满足  
 $1 \mapsto \overset{C}{c_1}$   
 $2 \mapsto \overset{C}{c_2}$

- 不难看出上图中

$$\overset{C}{\pi} : (\overset{C}{c_1} \times \overset{C}{c_2}) \overset{Cat}{Di} \overset{Cat}{\longrightarrow} \overset{Cat}{C}$$

$$\overset{C}{\epsilon} : \overset{Cat}{C} \overset{Cat}{\longrightarrow} (\overset{Cat}{c_1} + \overset{Cat}{c_2}) \overset{Cat}{Di}$$

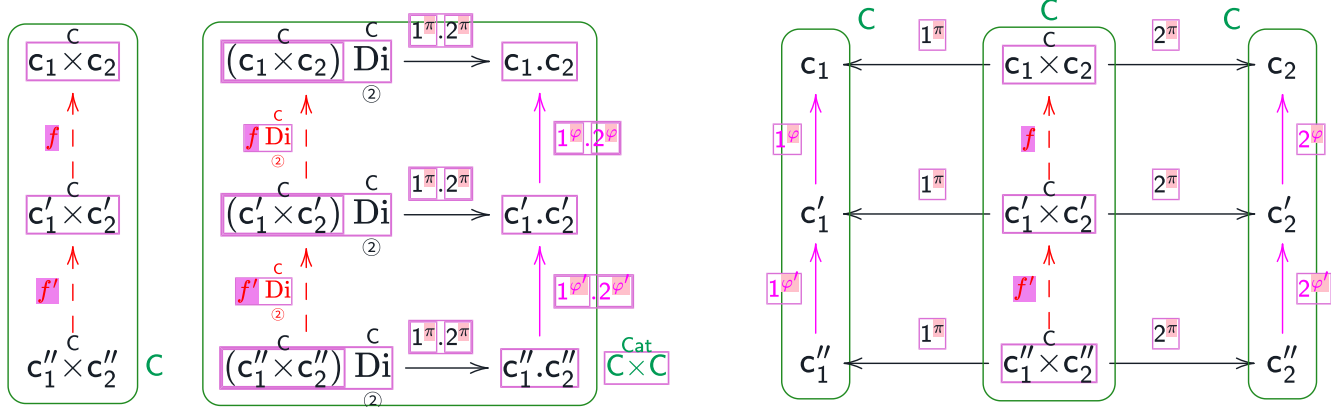
都构成自然变换。 $\overset{C}{1^\pi} . \overset{C}{2^\pi}$  和  $\overset{C}{1^\epsilon} . \overset{C}{2^\epsilon}$  可分别视作为  $\overset{C}{\pi}$  和  $\overset{C}{\epsilon}$ 。

# 函子性

如何证明  $\overset{C}{\times}$  构成函子呢？请看

- $\overset{C}{\times} : ( \overset{C}{:c_1} \text{id} \cdot \overset{C}{:c_2'} \text{id} ) \mapsto \overset{C}{:(c_1 \times c_2')} \text{id}$   
—— 即函子  $\overset{C}{\times}$  保持**恒等箭头**；
- $\overset{C}{\times} : ( \overset{C}{1\varphi'} \overset{C}{\circ} \overset{C}{1\varphi} \cdot \overset{C}{2\varphi'} \overset{C}{\circ} \overset{C}{2\varphi} ) \mapsto ( \overset{C}{f'} \overset{C}{\circ} \overset{C}{f} )$   
—— 即函子  $\overset{C}{\times}$  保持**箭头复合运算**。

下图有助于形象理解证明的过程：



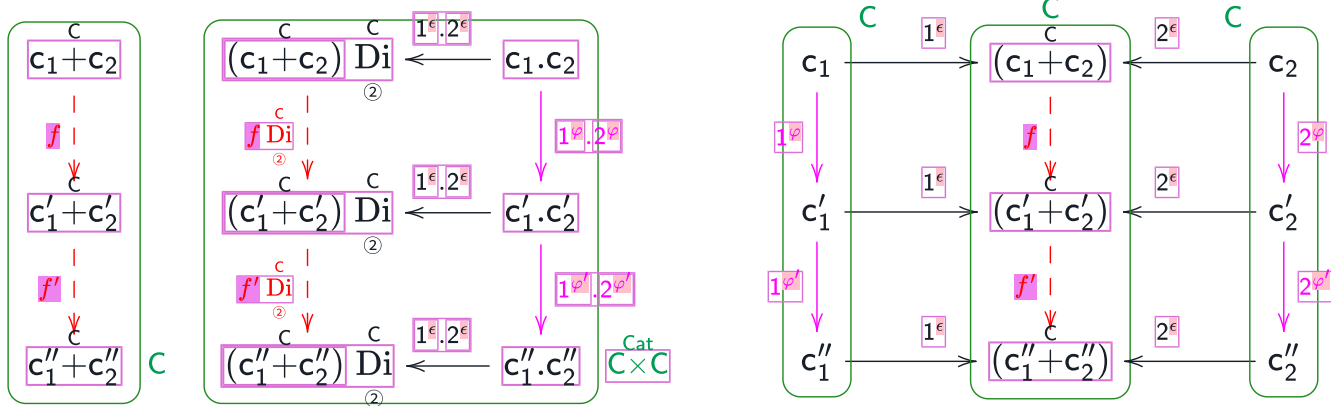
另外我们规定  $\overset{C}{\times}$  在实参分别为  
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{C}{\times} : ( \overset{C}{1\varphi} \cdot c_2 ) \mapsto ( \overset{C}{1\varphi} \overset{C}{\times} \overset{C}{:c_2} \text{id} )$
- $\overset{C}{\times} : ( c_1 \cdot \overset{C}{2\varphi} ) \mapsto ( \overset{C}{:c_1} \text{id} \overset{C}{\times} \overset{C}{2\varphi} )$

如何证明  $\overset{C}{+}$  构成函子呢？请看

- $\overset{C}{+} : ( \overset{C}{:c_1} \text{id} \cdot \overset{C}{:c_2'} \text{id} ) \mapsto \overset{C}{:(c_1 + c_2')} \text{id}$   
—— 即函子  $\overset{C}{+}$  保持**恒等箭头**；
- $\overset{C}{+} : ( \overset{C}{1\varphi'} \overset{C}{\circ} \overset{C}{1\varphi'} \cdot \overset{C}{2\varphi'} \overset{C}{\circ} \overset{C}{2\varphi'} ) \mapsto ( \overset{C}{f'} \overset{C}{\circ} \overset{C}{f'} )$   
—— 即函子  $\overset{C}{+}$  保持**箭头复合运算**。

下图有助于形象理解证明的过程：



另外我们规定  $\overset{C}{+}$  在实参分别为  
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{C}{+} : ( \overset{C}{1\varphi} \cdot c_2 ) \mapsto ( \overset{C}{1\varphi} \overset{C}{+} \overset{C}{:c_2} \text{id} )$
- $\overset{C}{+} : ( c_1 \cdot \overset{C}{2\varphi} ) \mapsto ( \overset{C}{:c_1} \text{id} \overset{C}{+} \overset{C}{2\varphi} )$

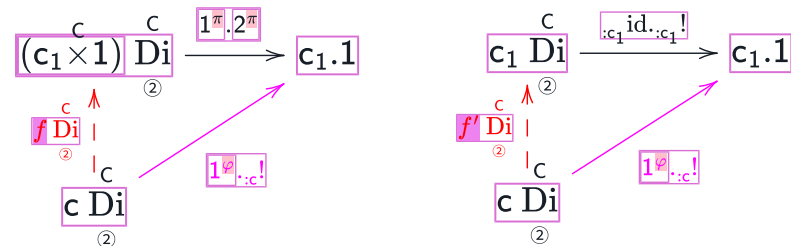


# 运算性质

对于函子  $\times$  我们不难得知

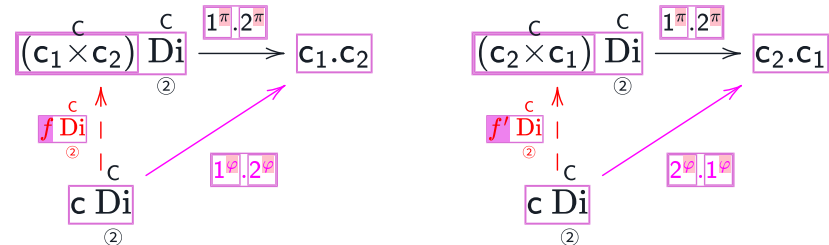
- $c_1 \times 1 \cong c_1 \times 1 \cong c_1$   
—— 乘法具有**幺元 1**。

下图有助于理解证明目标, 即  $1^\varphi \cdot .c!$  能唯一决定  $f$  和  $f'$ 。



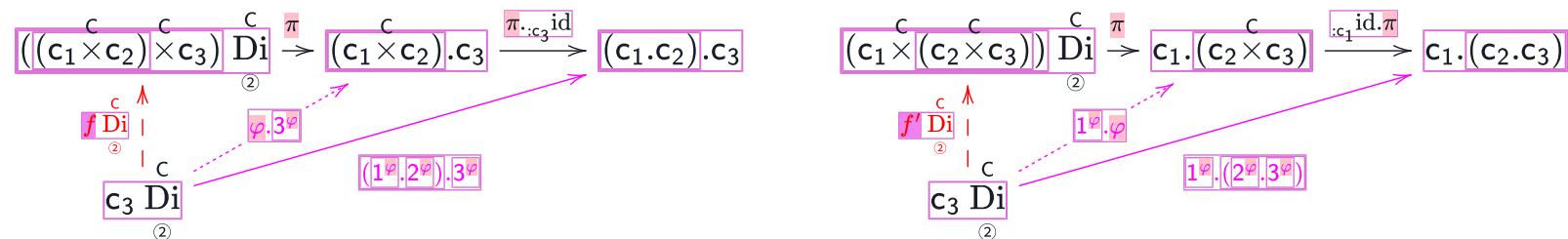
- $c_1 \times c_2 \cong c_2 \times c_1$   
—— 乘法具有**交换律**。

下图有助于理解证明目标, 即  $1^\varphi \cdot 2^\varphi$  能唯一决定  $f$  和  $f'$ 。



- $(c_1 \times c_2) \times c_3 \cong c_1 \times (c_2 \times c_3)$   
—— 乘法具有**结合律**。

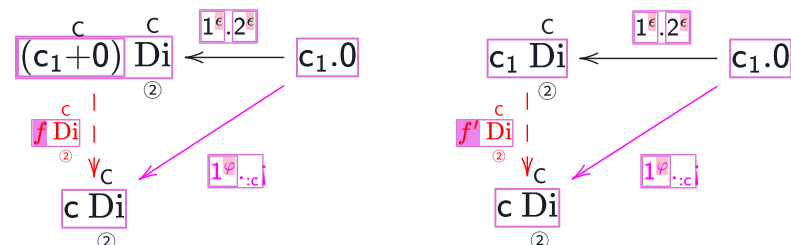
下图有助于理解证明目标, 即  $(1^\varphi \cdot 2^\varphi) \cdot 3^\varphi$  唯一决定  $f$  和  $f'$ 。



对于函子  $+$  我们不难得知

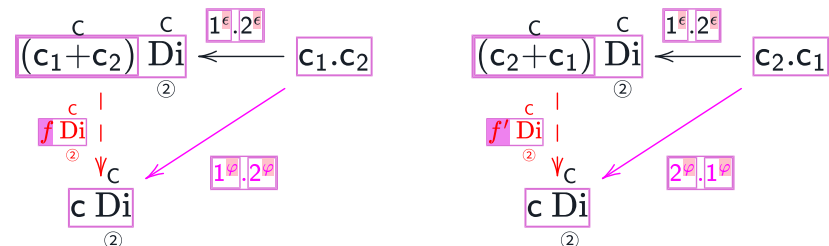
- $c_1 + 0 \cong c_1 + 1 \cong c_1$   
—— 加法具有**幺元 0**。

下图有助于理解证明目标, 即  $1^\varphi \cdot .c$  能唯一决定  $f$  和  $f'$ 。



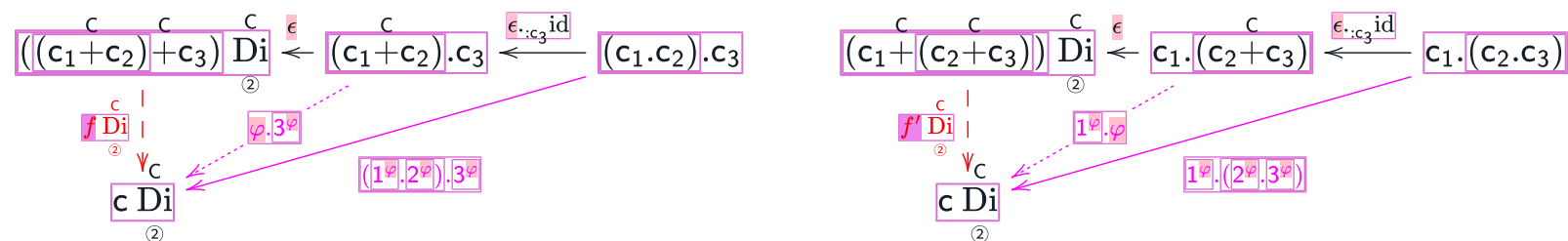
- $c_1 + c_2 \cong c_2 + c_1$   
—— 加法具有**交换律**。

下图有助于理解证明目标, 即  $1^\varphi \cdot 2^\varphi$  能唯一决定  $f$  和  $f'$ 。



- $(c_1 + c_2) + c_3 \cong c_1 + (c_2 + c_3)$   
—— 加法具有**结合律**。

下图有助于理解证明目标, 即  $(1^\varphi \cdot 2^\varphi) \cdot 3^\varphi$  唯一决定  $f$  和  $f'$ 。



## 么半范畴

像刚才这样对象运算具有**单位元**以及**结合律**的范畴称作**么半范畴**；

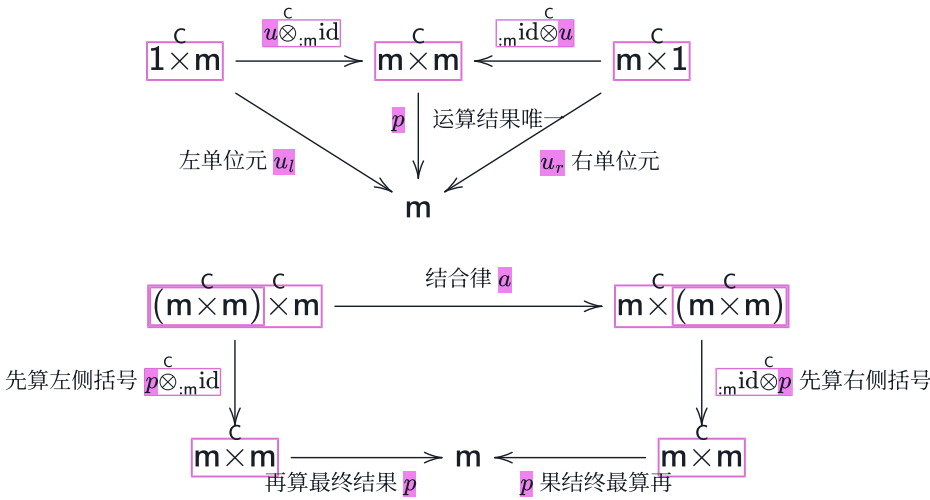
若上述范畴还具有**交换律**则称作**对称么半范畴**；

很明显我们的范畴 C 是典型的**对称么半范畴**。

## 么半群

什么是么半群呢？有两种定义方式：

- **么半群** M 是个范畴，其只含一个对象 m；其中的复合运算正好有单位元以及结合律。
- 对象 m 属于么半范畴 C，满足下述交换图：



其中

- $u : 1 \rightarrow m$  其实就是  $m$  里面的么元
- $u_l : (1 \times m) \rightarrow m$  表示  $u$  构成左么元
- $u_r : (m \times 1) \rightarrow m$  表示  $u$  构成右么元
- $p : (m \times m) \rightarrow m$  即为  $m$  中的二元运算
- $a : (m \times m) \times m \rightarrow m \times (m \times m)$  表示  $m$  具有结合律

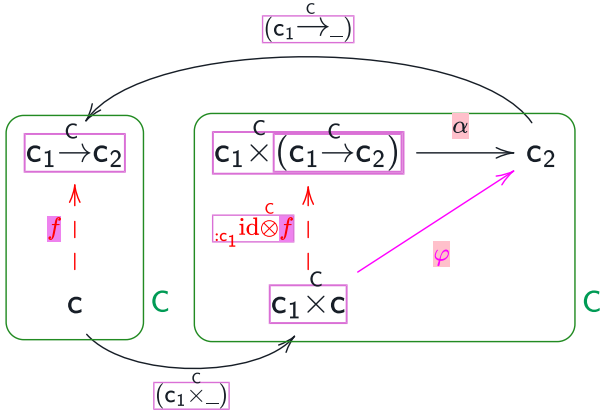
# 06 类型的幂

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Definitions are here.

## 泛性质

默认函子  $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} : ((\overset{\mathcal{C}^{\text{op}}}{\mathcal{C}} \overset{\text{Cat}}{\times} \overset{\text{Cat}}{\mathcal{C}}) \overset{\text{Cat}}{\rightarrow} \overset{\text{Cat}}{\mathcal{C}}$  在范畴  $\mathcal{C}$  中有下述性质：

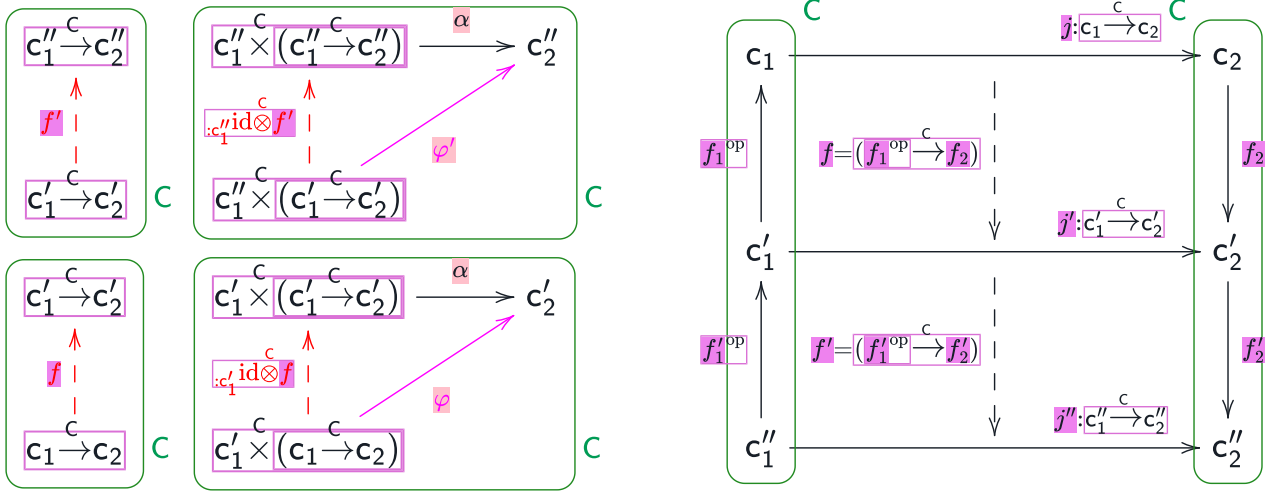
- $(\overset{\mathcal{C}}{c_1 \times c} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \overset{\mathcal{C}}{c_2} \overset{\text{Set}}{\cong} \overset{\mathcal{C}}{c} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} (\overset{\mathcal{C}}{c_1 \rightarrow c_2}) \overset{\text{Set}}{\cong} \overset{\mathcal{C}}{c_1} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} (\overset{\mathcal{C}}{c \rightarrow c_2})$   
——  $c$  为任意  $\mathcal{C}$  中对象。此即为幂的泛性质，亦表示了指数加乘法之间的运算关系。



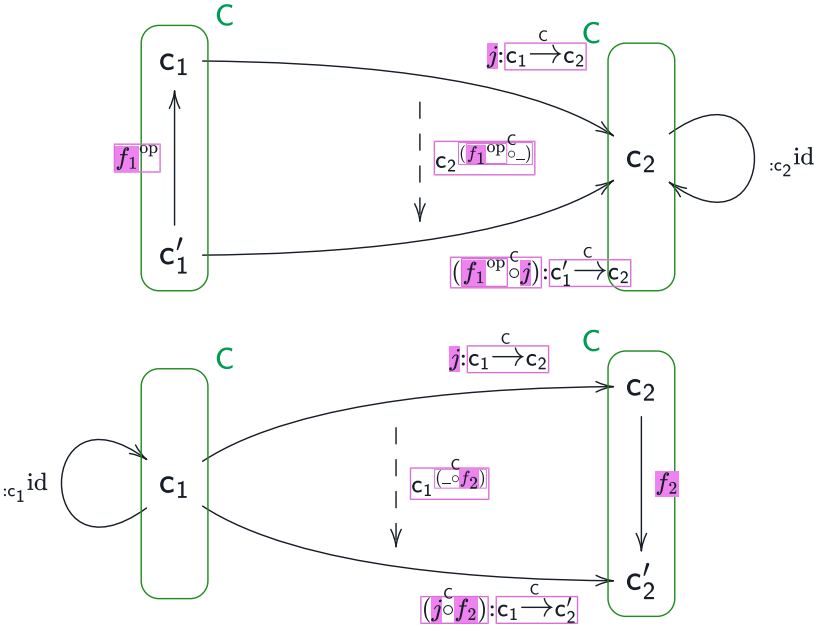
## 函子性

如何证明  $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow}$  构成函子呢？请看

- $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} : (:\underset{c_1}{\text{id}} . :_{\underset{c_2}{\text{id}}}) \mapsto :(\overset{\mathcal{C}}{c_1 \rightarrow c_2}) \text{id}$   
—— 即函子  $\rightarrow$  能保持恒等箭头；
  - $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} : ((f_1 \overset{\mathcal{C}^{\text{op}}}{\circ} f'_1) . f_2 \overset{\mathcal{C}}{\circ} f'_2) \mapsto ((f \overset{\mathcal{C}}{\circ} f'))$   
—— 即函子  $\rightarrow$  保持箭头复合运算。
- 下图有助于形象理解证明过程：



下图（自上到下分别为图 1 和图 2）后面会用到。



范畴  $\mathcal{C}$  内任意两对象  $c_1$  和  $c_2$  间的箭头构成一个集合  $c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2$  ,  
 说明  $\xrightarrow{\mathcal{C}}$  只能将两个对象打到一个集合 ; 下面使  $\xrightarrow{\mathcal{C}}$  升级为函子 :  
 若还知道箭头  $f_1^{\text{op}} : c'_1 \xrightarrow{\mathcal{C}^{\text{op}}} c_1$  以及  $f_2 : c_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} c'_2$  , 则规定

- $(\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \text{Set}$  为函子且  
 $(\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2) : c \mapsto (c \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2)$  且对任意  $f^{\text{op}} : c' \xrightarrow{\mathcal{C}} c$  有  
 $(\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2) : f^{\text{op}} \mapsto (f^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2) = (f^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} :_{c_2} \text{id}) = c_2(f^{\text{op}} \circ \_)$

图 1 有助于理解。

$$\begin{aligned} (\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} f_2) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} &\xrightarrow{\text{Cat}} \text{Set}, \\ (\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} f_2) : c &\mapsto (c \xrightarrow{\mathcal{C}} f_2) = (.:_{\text{id}} \xrightarrow{\mathcal{C}} f_2) = c_2(\_ \circ f_2) \text{ 且对任意 } f^{\text{op}} : c' \xrightarrow{\mathcal{C}^{\text{op}}} c \text{ 有} \\ (\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} f_2) : f^{\text{op}} &\mapsto (f^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} f_2) = (f^{\text{op}} \circ \_ \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) \circ (\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} f_2) = (\_ \circ f_2) \circ (f^{\text{op}} \circ \_) \end{aligned}$$

图 2 有助于理解。

**Note**

不难看出

- よ :  $\mathcal{C} \xrightarrow{\text{Cat}} (\mathcal{C}^{\text{op}} \xrightarrow{\text{Set}} \text{Set})$   
 $c_2 \mapsto (c_2 \xrightarrow{\mathcal{C}^{\text{op}}} \_)$  构成一个函子  
 $f_2 \mapsto (f_2 \xrightarrow{\mathcal{C}^{\text{op}}} \_) = (\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} f_2) = (\_ \circ f_2)$  构成一个函子间映射 , 即自然变换

该函子称作是**米田嵌入**。

- $(c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \text{Set}$  为函子且  
 $(c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) : c \mapsto (c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c)$  , 且对任意  $f : c \xrightarrow{\mathcal{C}} c'$  有  
 $(c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) : f \mapsto (c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} f) = (.:_{c_1} \text{id} \xrightarrow{\mathcal{C}} f) = c_1(\_ \circ f)$

图 2 有助于理解。

$$\begin{aligned} (f_1^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} &\xrightarrow{\text{Cat}} \text{Set}, \\ (f_1^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) : c &\mapsto (f_1^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} c) = (f_1^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} :_{c} \text{id}) = c(f_1^{\text{op}} \circ \_) \text{ 且对任意 } f : c \xrightarrow{\mathcal{C}} c' \text{ 有} \\ (f_1^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) : f &\mapsto (f_1^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} f) = (f_1^{\text{op}} \circ \_ \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) \circ (\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} f) = (\_ \circ f) \circ (f_1^{\text{op}} \circ \_) \end{aligned}$$

图 1 有助于理解。

**Note**

不难看出

- 尤 :  $\mathcal{C}^{\text{op}} \xrightarrow{\text{Cat}} (\mathcal{C} \xrightarrow{\text{Set}} \text{Set})$   
 $c_1 \mapsto (c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_)$  构成一个函子  
 $f_1^{\text{op}} \mapsto (f_1^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) = (f_1^{\text{op}} \circ \_ \xrightarrow{\mathcal{C}} \_)$  构成一个函子间映射 , 即自然变换

该函子戏称为**尤达嵌入**。

## 积闭范畴

这里插个题外话：

若范畴包含终对象 , 所有类型的积以及指数 , 则可将其称作**积闭范畴**；

若范畴包含始对象 , 所有类型的和 , 则可将其称作是**余积闭范畴**；

若范畴满足上述条件 , 则可称作**双积闭范畴**。

很明显我们讨论的范畴  $\mathcal{C}$  就是**双积闭范畴**。

## 07 递归类型

LaTeX Definitions are here.

# 08-09 函子与自然变换

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Definitions are here.

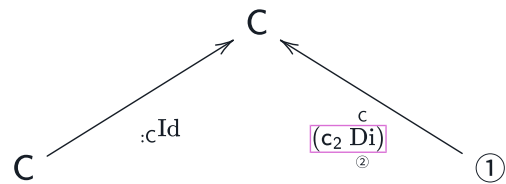
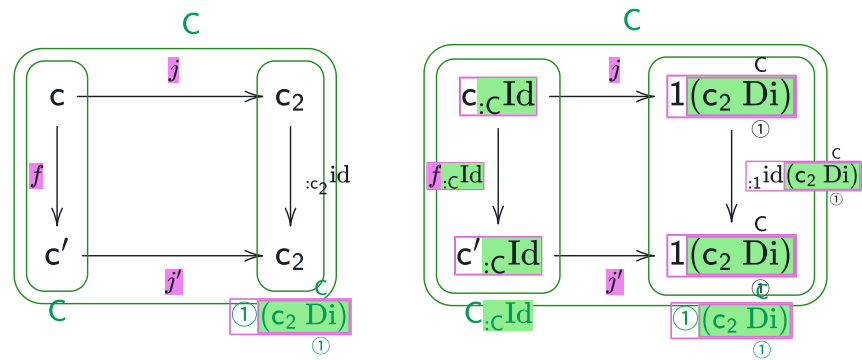
## 一些特殊的范畴

现在规定几种特殊的范畴。

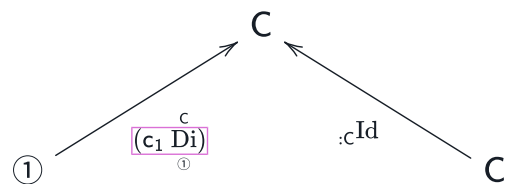
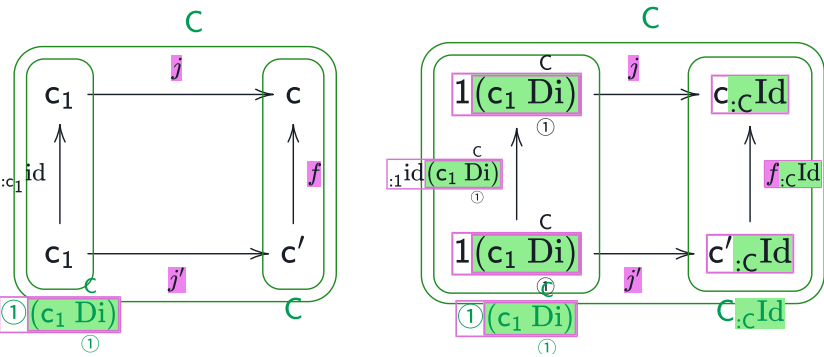
- 离散范畴：只有对象不含箭头（恒等箭头除外）的范畴。
- Set：所有集合构成的范畴，为局部小范畴，满足
  - Set 中对象为任意集合；
  - Set 中箭头为集合间映射。
- Cat：所有范畴构成的范畴，满足
  - Cat 中任何对象都构成一个范畴；
  - Cat 中任何箭头都构成一个函子。

若 C, D 为 Cat 中对象，则：

- C<sup>op</sup>：反范畴，满足
  - C<sup>op</sup> 中对象皆形如 c，c 为任意 C 中的对象；
  - C<sup>op</sup> 中箭头皆形如 j<sup>op</sup>：c<sub>2</sub> → c<sub>1</sub>，j：c<sub>1</sub> → c<sub>2</sub> 可为任意 C 中的箭头。
- C<sup>Cat</sup> × D<sup>Cat</sup>：积范畴，满足
  - C<sup>Cat</sup> × D<sup>Cat</sup> 中对象皆形如 c · d，c, d 分别为任意 C, D 中的对象；
  - C<sup>Cat</sup> × D<sup>Cat</sup> 中箭头皆形如 j · k，j, k 分别为任意 C, D 中的箭头。
- C<sup>Cat</sup> → D<sup>Cat</sup>：所有 C 到 D 的函子的范畴，满足
  - C<sup>Cat</sup> → D<sup>Cat</sup> 中任何对象都是 C 到 D 的函子；
  - C<sup>Cat</sup> → D<sup>Cat</sup> 中任何箭头都是函子间自然变换。
- C/c：俯范畴，这里 c 为任意 C 中对象；满足
  - C/c<sub>2</sub> 中对象皆形如 ~~c · 1~~ · j，其中 c 和 j：c → c<sub>2</sub> 分别为 C 中任意的对象和箭头；
  - c<sub>2</sub>/C 中箭头皆形如 ~~f · id~~ · c<sub>2</sub> 且满足下述交换图，其中 c, c' 为 C 中任意对象且 f, j, j' 为 C 中任意箭头；**TODO**



- c<sub>1</sub>/C：仰范畴，这里 c 为任意 C 中对象；满足
  - c<sub>1</sub>/C 中对象皆形如 ~~1 · c~~ · j，其中 c 和 j：c<sub>1</sub> → c 分别为 C 中任意的对象和箭头；
  - C/c<sub>1</sub> 中箭头皆形如 ~~id · f~~ · c<sub>1</sub> 且满足下述交换图，其中 c, c' 为 C 中任意对象且 f, j, j' 为 C 中任意箭头；**TODO**



# 函子

接下来我们来提供函子的正式定义：

- $F : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{D}$  为**函子**当且仅当
  - 对任意  $\mathbf{C}$  中对象  $c$ ,  $cF$  为  $\mathbf{D}$  中对象且  $_{c}\text{id}F = _{:cF}\text{id}$  ;
  - 对任意  $\mathbf{C}$  中箭头  $j_1 : c_1 \xrightarrow{c} c_2$  和  $j_2 : c_2 \xrightarrow{c} c_3$  , 始终都有等式  $(j_1 \circ j_2)F = j_1F \circ j_2F$  成立。

若已确信  $F : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{D}$  为函子且  
还知  $\mathbf{C}$  中有对象  $c_1, c_2$   
以及  $\mathbf{C}$  中有箭头  $j : c_1 \xrightarrow{c} c_2$  则

- 若  $j$  为单态 / 满态 / 同构  
则  $jF$  为单态 / 满态 / 同构；
- 若  $jF$  为同构  
则  $j$  为同构。

i

Note

不难发现函子具有保持  
对象 / 态射性质的能力。

## 函子的复合运算

若还知道  $G : \mathbf{D} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{E}$  为函子则

- $F \circ G : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{E}$   
也构成一个函子。

## 恒等函子

对于函子我们也有恒等映射，即：

- $_{c}\text{Id} \circ F = F$   
 $= F \circ _{:D}\text{Id}$

## 忠实，完全和本质满函子

若  $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$  皆为**局部小范畴**，则

- $F$  是**忠实的**当且仅当对任意  $\mathbf{C}$  中的对象  $c_1, c_2$  ,  
 $c_1 \xrightarrow{c} c_2$  与  $c_1F \xrightarrow{D} c_2F$  之间始终都存在单射；
- $F$  是**完全的**当且仅当对任意  $\mathbf{C}$  中的对象  $c_1, c_2$  ,  
 $c_1 \xrightarrow{c} c_2$  与  $c_1F \xrightarrow{D} c_2F$  之间始终都存在满射；
- $F$  是**完全忠实的**当且仅当任意  $\mathbf{C}$  中对象  $c_1, c_2$  ,  
 $c_1 \xrightarrow{c} c_2$  与  $c_1F \xrightarrow{D} c_2F$  之间始终都存在双射。

i

Note

刚才提到的 “ 单 / 满 / 双射 ”  
针对的都是范畴的箭头部分。

- $F$  是**本质满的**当且仅当对任意  $\mathbf{D}$  中对象  $d$   
都存在  $\mathbf{C}$  中对象  $c$  使  $cF \xrightarrow{D} d$  之间有双射。

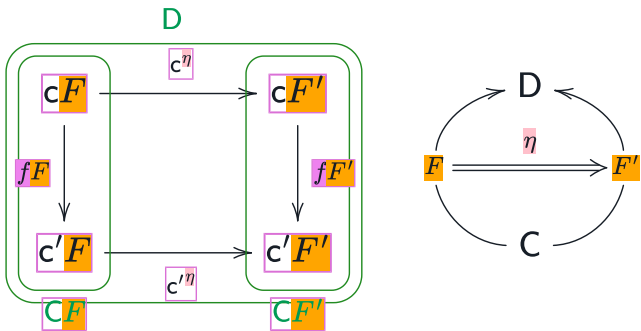
根据刚才的信息我们不难得知

- 若  $F, G$  为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满函子  
则  $F \circ G : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{E}$  为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满 函子；
- 若  $F \circ G : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{E}$  为完全忠实函子  
且知道  $G$  为完全忠实函子  
则可知  $F$  为完全忠实函子；

## 自然变换

如果还知道  $F' : \overset{\text{Cat}}{\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{D}}$  为函子，那么

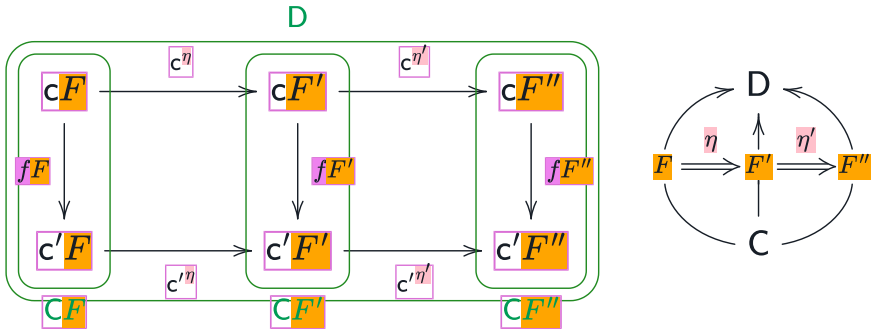
- $\eta : F \Rightarrow F'$  为自然变换当且仅当对任意  $\mathbf{C}$  中对象  $c, c'$  始终都会有下述交换图成立：



## 自然变换的复合

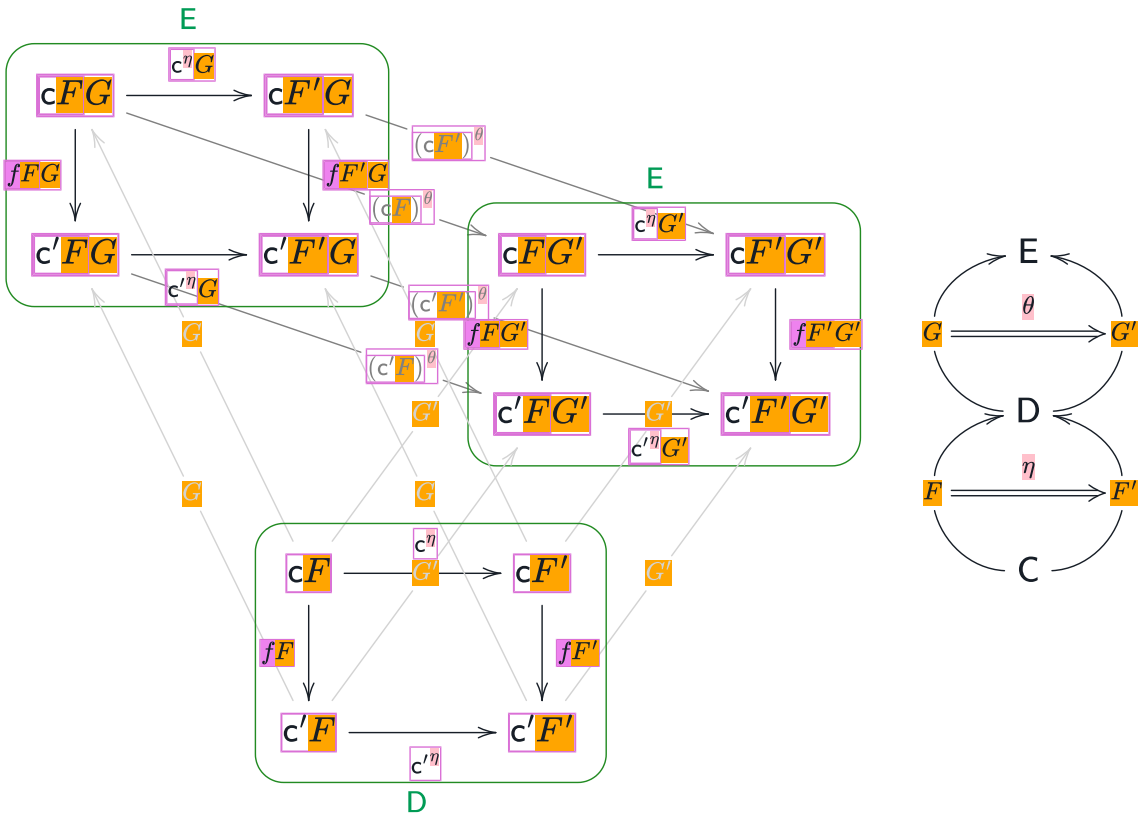
若已知  $\eta : F \xrightarrow{\overset{\text{Cat}}{\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{D}}} F'$  构成自然变换且  
还知道  $\eta' : F' \xrightarrow{\overset{\text{Cat}}{\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{D}}} F''$  为自然变换则

- $\eta \circ \eta' : F \xrightarrow{\overset{\text{Cat}}{\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{D}}} F''$  为自然变换，  
称作  $\eta$  和  $\eta'$  的**纵复合**。



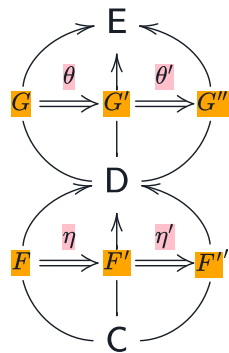
如果还知道  $G' : \overset{\text{Cat}}{\mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{E}}$  也是个函子  
及自然变换  $\theta : G \xrightarrow{\overset{\text{Cat}}{\mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{E}}} G'$  那么便有

- $\eta \circ \theta : F \xrightarrow{\overset{\text{Cat}}{\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{E}}} F' \circ G'$  为  
自然变换，称作  $\eta$  和  $\theta$  的**横复合**。



若  $\theta' : G \xrightarrow{\overset{\text{Cat}}{\mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{E}}} G'$  为自然变换则

- $(\eta \circ \theta) \circ (\eta' \circ \theta') = (\eta \circ \eta') \circ (\theta \circ \theta')$ ，  
即便改变纵横复合先后顺序也不影响最终结果。

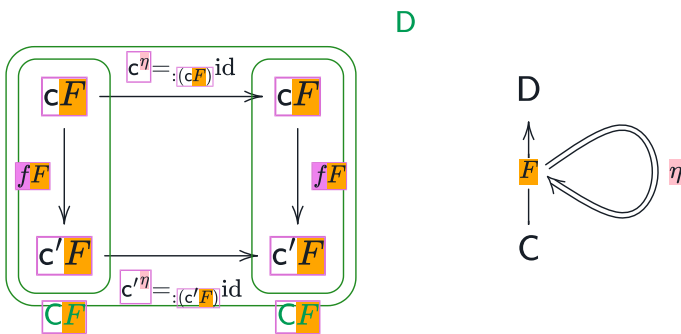




## 恒等自然变换

同样对于自然变换也有恒等映射。

- $\eta: F \rightarrow F$  为恒等自然变换当且仅当对范畴  $C$  中任意对象  $c$  都有下述交换图成立：



## 自然同构

自然同构与你想象中的同构不太像。

- $\eta: F \rightarrow F'$  为**自然同构**当且仅当  $c^\eta$  总是同构，这里  $c$  为任意  $C$  中对象。  
此时  $F, F'$  的关系可用  $F \cong F'$  表示

## 范畴等价的定义

我们用自然同构来定义范畴的等价。

- $C \cong D$  当且仅当存在函子  $F: C \rightarrow D$  及  $F': D \rightarrow C$  使  $F \circ F' \cong id_D$  并且有  $F' \circ F \cong id_C$ 。

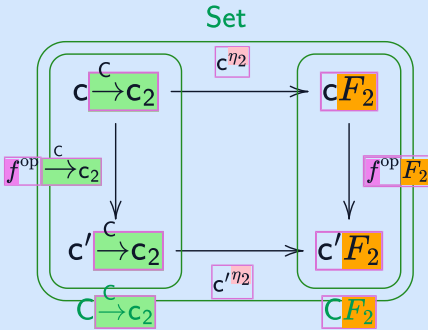
# 反协变米田引理

若知  $F_2 : \mathbf{C}^{\text{op}} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{Set}$  则反变米田引理的陈述如下：

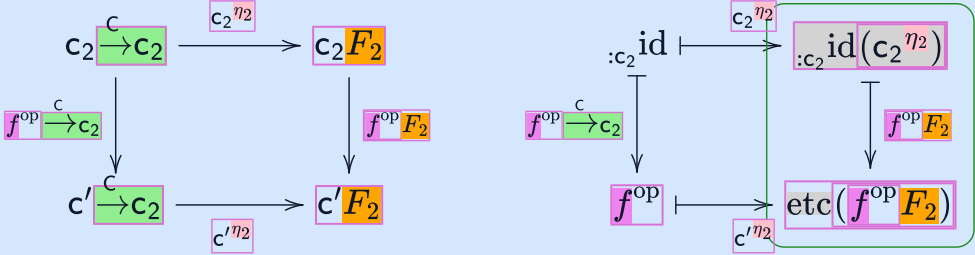
• 
$$\underbrace{\left( \left( (- \xrightarrow{\text{C}} \mathbf{c}_2) \right) \xrightarrow{\mathbf{C}^{\text{op}} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{Set}} F_2 \right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\left( \mathbf{c}_2 F_2 \right)}_{\text{一堆元素}}$$

反变米田引理的证明如下：

1.  $\Leftarrow$ ：考虑任意  $(\mathbf{c}_2 F_2)$  中的  $\text{etc}$ ：根据  $\text{etc}$  及其所对应的下方右侧的交换图我们可为对象  $\mathbf{c}_2$  定义  $\mathbf{c}_2^{\eta_2}$  并以此为基础为任意  $f^{\text{op}} : \mathbf{c}' \xrightarrow{\mathbf{C}^{\text{op}}} \mathbf{c}_2$  定义  $\mathbf{c}'^{\eta_2}$ ，于是便可构建一个完整的  $\eta_2$ 。易知  $\eta_2$  是一个自然变换（见下方）。



2.  $\Rightarrow$ ：考虑任意等式左侧的  $\eta_2$ ：若上述交换图成立则可对任意  $\eta_2$  指派  $\text{etc} = \text{id}(\mathbf{c}_2^{\eta_2})$  为  $\mathbf{c}_2 F_2$  中与之对应的元素；



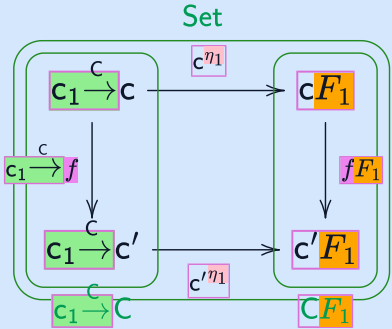
为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！  
 $\mathbf{c}_2$  通过  $\text{etc}$  唯一地确定了  $\eta_2$ ，反之  $\eta_2$  通过  $\text{etc}$  也唯一确定了  $\mathbf{c}_2$ 。

若还知  $F_1 : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{Set}$  则协变米田引理的陈述如下：

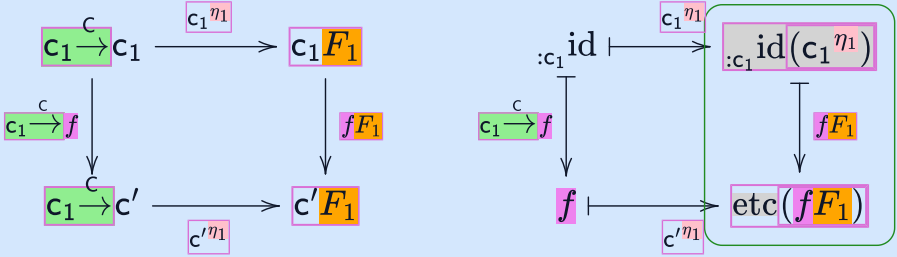
• 
$$\underbrace{\left( \left( \mathbf{c}_1 \xrightarrow{\text{C}} (-) \right) \xrightarrow{\mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{Set}} F_1 \right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\left( \mathbf{c}_1 F_1 \right)}_{\text{一堆元素}}$$

协变米田引理的证明如下：

1.  $\Leftarrow$ ：考虑任意  $(\mathbf{c}_1 F_1)$  中的  $\text{etc}$ ：根据  $\text{etc}$  及其所对应的下方右侧的交换图我们可为对象  $\mathbf{c}_1$  定义  $\mathbf{c}_1^{\eta_1}$  并以此为基础为任意的  $f : \mathbf{c}_1 \xrightarrow{\text{C}} \mathbf{c}'$  定义  $\mathbf{c}'^{\eta_1}$ ，于是便可构建一个完整的  $\eta_1$ 。易知  $\eta_1$  是一个自然变换（见下方）。



2.  $\Rightarrow$ ：考虑任意等式左侧的  $\eta_1$ ：若上述交换图成立则可对任意  $\eta_1$  指派  $\text{etc} = \text{id}(\mathbf{c}_1^{\eta_1})$  为  $\mathbf{c}_1 F_1$  中与之对应的元素；



为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！  
 $\mathbf{c}_1$  通过  $\text{etc}$  唯一地确定了  $\eta_1$ ，反之  $\eta_1$  通过  $\text{etc}$  也唯一确定了  $\mathbf{c}_1$ 。

# 可表和余可表函子的泛性质

接下来定义一个重要的概念：

- $F_2$  为**可表函子**当且仅当  
存在  $C^{op}$  中对象  $c_2$  使得  
 $(\_ \xrightarrow{c} c_2) = c_2 \bowtie \_ \cong F_2$  成立，  
即  $c_2 \bowtie$  与  $F_2$  间存在自然同构。  
此时称  $F_2$  可由对象  $c_2$  **表出**。

同理我们也有如下对偶概念：

- $F_1$  为**余可表函子**当且仅当  
存在  $C$  中对象  $c_1$  使得  
 $(c_1 \xrightarrow{c} \_) = c_1 \lrcorner \_ \cong F_1$  成立。  
即  $c_1 \lrcorner$  与  $F_1$  间存在自然同构。  
此时称  $F_1$  可由对象  $c_1$  **余可表出**。

# 米田和尤达嵌入

根据前面的内容我们可知

- よ :  $C \xrightarrow{Cat} ((C^{op} \xrightarrow{Set} Set))$   
 $c_2 \mapsto (c_2 \xrightarrow{C^{op}} \_ ) = (\_ \xrightarrow{C} c_2)$  构成一个函子，称作预层  
 $f_2 \mapsto (f_2 \xrightarrow{C^{op}} \_ ) = (\_ \xrightarrow{C} f_2) = (\_ \circ f_2)$  构成一个函子间映射，即自然变换  
构成一个完全忠实函子，该函子称作是**米田嵌入**。

证明如下：

- よ 是函子，因为
  - $_{:c_2} id \text{よ} = (\_ \circ \_ :_{c_2} id) = \_ :_{(c_2 \text{よ})} id$
  - $((f_2 \circ f'_2) \text{よ}) = (\_ \circ ((f_2 \circ f'_2) \text{よ})) = (\_ \circ f_2) \circ (\_ \circ f'_2) = f_2 \text{よ} \circ f'_2 \text{よ} ,$
- よ 是完全忠实的，因为将反变米田引理中的  $F_2$  换成  $(c'_2 \xrightarrow{C^{op}} \_ )$  即可获得下述公式：  

$$\underbrace{((c_2 \xrightarrow{C^{op}} \_ ) \xrightarrow{C^{op} \rightarrow Set} (c'_2 \xrightarrow{C^{op}} \_ ))}_{\text{预层范畴的 hom-set}} \cong \underbrace{(c'_2 \xrightarrow{C^{op}} c_2)}_{C \text{ 的 hom-set}}$$

  
也就是  

$$\underbrace{((c_2 \text{よ}) \xrightarrow{C \rightarrow Set} (c'_2 \text{よ}))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(c'_2 \xrightarrow{C^{op}} c_2)}_{C \text{ 的 hom-set}} = \underbrace{(c_2 (c'_2 \text{よ}))}_{\text{一堆元素}}$$

④ Note

由于函子能够保持态射的性质，对任意左侧集合中的自然同构右侧集合也会有同构与之对应，反之亦然。这也就证明了前面自然同构相关定理省略的部分。

根据前面的内容我们可知

- 尤 :  $C^{op} \xrightarrow{Cat} (C \xrightarrow{Set} Set)$   
 $c_1 \mapsto (c_1 \xrightarrow{C} \_ )$  构成一个函子  
 $f_1^{op} \mapsto (f_1^{op} \xrightarrow{C} \_ ) = (f_1^{op} \circ \_ )$  构成一个函子间映射，即自然变换  
构成一个完全忠实函子，该函子称作是**尤达嵌入**。

证明如下：

- 尤 是函子，因为
  - $_{:c_1} id \text{尤} = (\_ \circ \_ :_{c_1} id) = \_ :_{(c_1 \text{尤})} id$
  - $((f_1 \circ f'_1) \text{尤}) = (((f_1 \circ f'_1) \text{尤}) \circ \_ ) = (f_1^{op} \circ \_ ) \circ (f'_1^{op} \circ \_ ) = f_1^{op} \text{尤} \circ f'_1^{op} \text{尤} ,$
- 尤 是完全且忠实的，因为将协变米田引理中的  $F_1$  换成  $(c'_1 \xrightarrow{C} \_ )$  即可获得下述公式：  

$$\underbrace{((c_1 \xrightarrow{C} \_ ) \xrightarrow{C \rightarrow Set} (c'_1 \xrightarrow{C} \_ ))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(c'_1 \xrightarrow{C} c_1)}_{\text{一堆元素}}$$

  
也就是  

$$\underbrace{((c_1 \text{尤}) \xrightarrow{C \rightarrow Set} (c'_1 \text{尤}))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(c'_1 \xrightarrow{C} c_1)}_{\text{一堆元素}} = \underbrace{(c_1 (c'_1 \text{尤}))}_{\text{一堆元素}}$$

④ Note

由于函子能够保持态射的性质，对任意左侧集合中的自然同构右侧集合也会有同构与之对应，反之亦然。这也就证明了前面自然同构相关定理省略的部分。