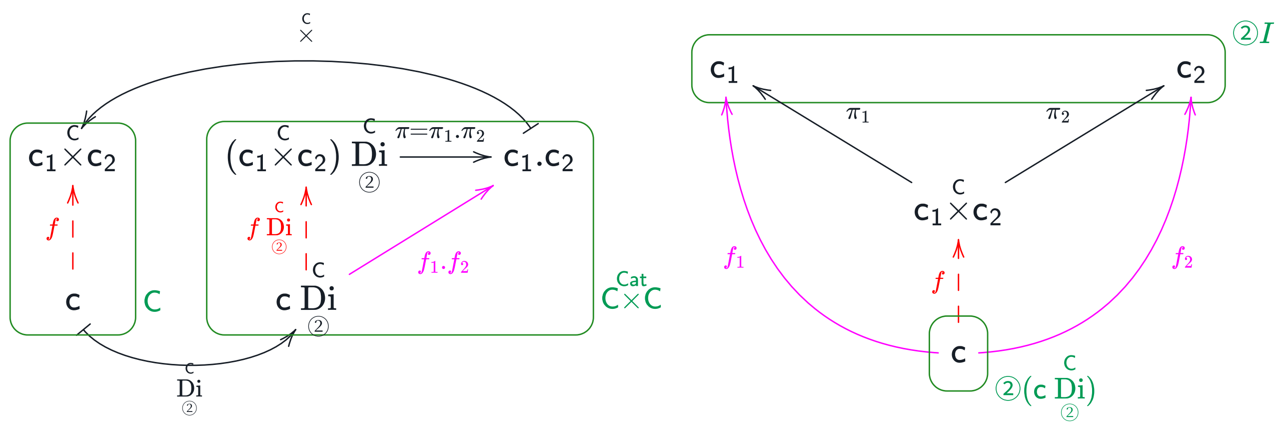
04-05 类型的和与积

LaTeX Definitions are here.

泛性质

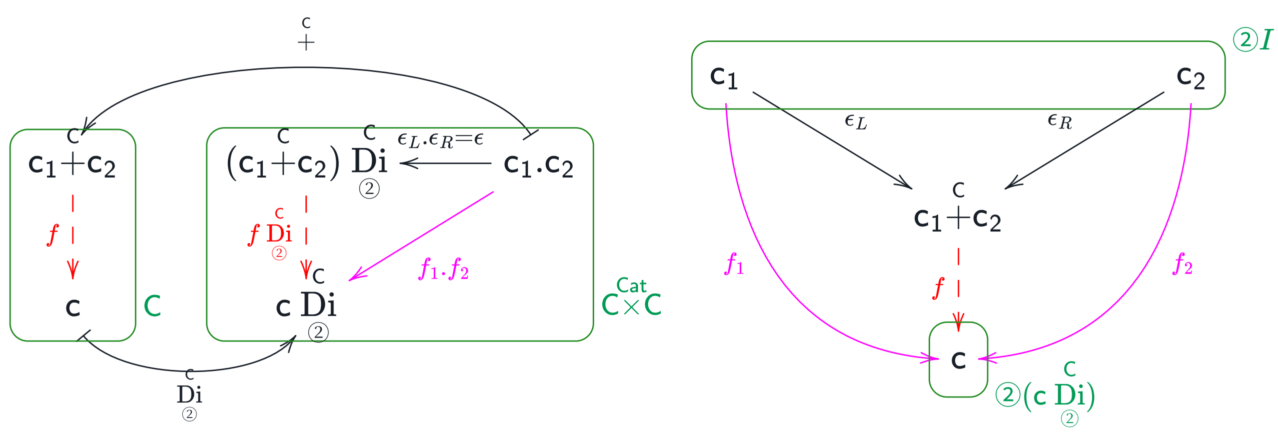
默认函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times} : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$ 在范畴 C 中有如下性质：

- $(\mathsf{c} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1) \overset{\mathsf{Set}}{\times} (\mathsf{c} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \mathsf{c} \overset{\mathsf{C}}{\to} (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2)$
  —— c 为任意 C 中对象。此即为积的
  泛性质，亦为**指数对乘法的分配律**。



默认函子 $\overset{\mathsf{C}}{+} : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$ 在范畴 C 中有如下性质：

- $(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \overset{\mathsf{Set}}{\times} (\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2) \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}$
  —— c 为任意 C 中对象。此即为和的
  泛性质，亦为**指数对加法的分配律**。

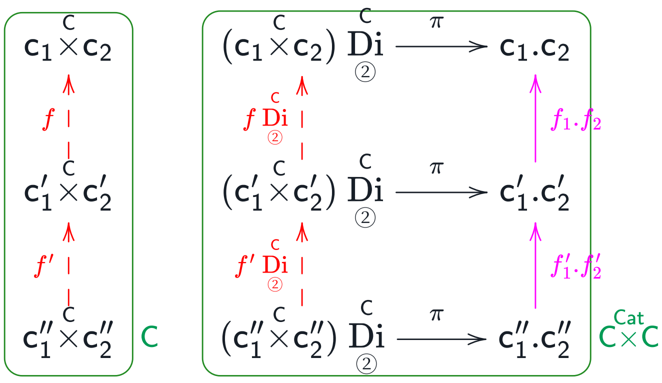


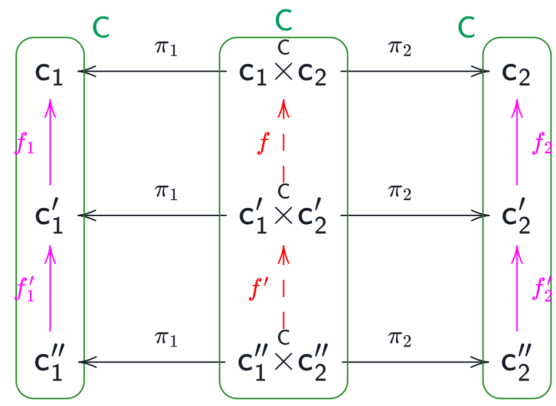
> **Note**
>
> 在上面的插图中
>
> - $\underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C}$ 为对角函子满足
> $\mathsf{c} \longmapsto \mathsf{c} . \mathsf{c}$
> - $\underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} (② \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C})$
> $\mathsf{c} \longmapsto$ 常值函子
> $\mathsf{c}\ \underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} : \quad ② \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$
> $1 \longmapsto \mathsf{c}$
> $2 \longmapsto \mathsf{c}$
>   即为对角函子的第二种等价的定义。
>   ② 为仅含两个对象的范畴，在此则
>   作为一个指标范畴。1 和 2 分别为
>   其中的对象。
> - $I : ② \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{C}$ 为函子，满足
> $1 \longmapsto \mathsf{c}_1$
> $2 \longmapsto \mathsf{c}_2$
> - 不难看出上图中
> $\pi : I \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} ((\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2)\ \underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}})$
> $\epsilon : ((\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2)\ \underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}) \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} I$
>   都构成自然变换

函子性

如何证明 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : ({}_{:\mathsf{c}_1'}\mathrm{id} \,.\, {}_{:\mathsf{c}_2'}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:\mathsf{c}_1' \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2'}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\times$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : (f_1' \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1 \,.\, f_2' \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \longmapsto f' \overset{\mathsf{C}}{\circ} f$
  —— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 保持**箭头复合运算** 。
  下图有助于形象理解证明的过程：



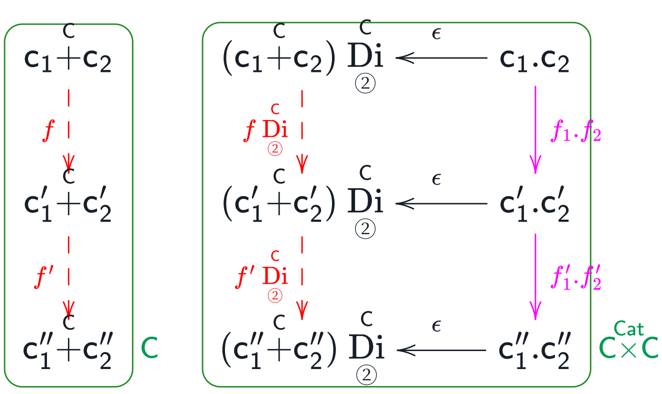


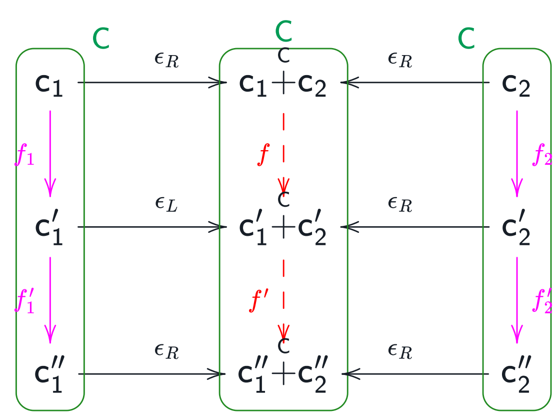
另外我们规定 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : f_1 \,.\, \mathsf{c}_2 \longmapsto f_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}$
  $\overset{\mathsf{C}}{\times} : \mathsf{c}_1 \,.\, f_2 \longmapsto {}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\times} f_2$

如何证明 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathsf{C}}{+} : ({}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} \,.\, {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $+$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{\mathsf{C}}{+} : (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1' \,.\, f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2') \longmapsto f \overset{\mathsf{C}}{\circ} f'$
  —— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 保持**箭头复合运算** 。
  下图有助于形象理解证明的过程：





另外我们规定 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{\mathsf{C}}{+} : f_1 \,.\, \mathsf{c}_2 \longmapsto f_1 \overset{\mathsf{C}}{+} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}$
  $\overset{\mathsf{C}}{+} : \mathsf{c}_1 \,.\, f_2 \longmapsto {}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{+} f_2$

运算性质

对于函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 我们不难得知

- $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} 1 \overset{\mathsf{C}}{\cong} \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} 1 \overset{\mathsf{C}}{\cong} \mathsf{c}_1$
  —— 乘法具有**幺元** 1 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \cdot {}_{:\mathsf{c}}!$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} 1)\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & \mathsf{c}_1.1 \\
\mathsf{c}\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_1\cdot_{:\mathsf{c}}!"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{c}_1\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "{}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}\cdot_{:\mathsf{c}_1}!"] & \mathsf{c}_1.1 \\
\mathsf{c}\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f'\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_1\cdot_{:\mathsf{c}}!"'] &
\end{tikzcd}$$

- $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\cong} \mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_1$
  —— 乘法具有**交换律** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \cdot f_2$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2)\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & \mathsf{c}_1.\mathsf{c}_2 \\
\mathsf{c}\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_1.f_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_1)\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & \mathsf{c}_2.\mathsf{c}_1 \\
\mathsf{c}\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f'\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_2.f_1"'] &
\end{tikzcd}$$

- $(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2) \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_3 \overset{\mathsf{C}}{\cong} \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} (\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_3)$
  —— 乘法具有**结合律** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$ 唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
((\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2) \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_3\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}) \arrow[r, "\pi"] & (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_2).\mathsf{c}_3 \arrow[r, "\pi\cdot_{:\mathsf{c}_3}\mathrm{id}"] & (\mathsf{c}_1.\mathsf{c}_2).\mathsf{c}_3 \\
\mathsf{c}_3\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, dotted, "j.f_3"] \arrow[urr, "(f_1.f_2).f_3"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} (\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_3))\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi"] & \mathsf{c}_1.(\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{c}_3) \arrow[r, "{}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}.\pi"] & \mathsf{c}_1.(\mathsf{c}_2.\mathsf{c}_3) \\
\mathsf{c}_3\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, dotted, "f_1.j"] \arrow[urr, "f_1.(f_2.f_3)"'] & &
\end{tikzcd}$$

对于函子 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ 我们不难得知

- $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} 0 \overset{\mathsf{C}}{\cong} \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} 1 \overset{\mathsf{C}}{\cong} \mathsf{c}_1$
  —— 加法具有**幺元** 0 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \cdot {}_{:\mathsf{c}}¡$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} 0)\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}"'] & \mathsf{c}_1.0 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f_1\cdot_{:\mathsf{c}}¡"] \\
\mathsf{c}\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{c}_1\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f'\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}"'] & \mathsf{c}_1.0 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f_1\cdot_{:\mathsf{c}}¡"] \\
\mathsf{c}\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}$$

- $\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\cong} \mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_1$
  —— 加法具有**交换律** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \cdot f_2$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2)\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}"'] & \mathsf{c}_1.\mathsf{c}_2 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f_1.f_2"] \\
\mathsf{c}\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_1)\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f'\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}"'] & \mathsf{c}_2.\mathsf{c}_1 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f_2.f_1"] \\
\mathsf{c}\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}$$

- $(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2) \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_3 \overset{\mathsf{C}}{\cong} \mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} (\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_3)$
  —— 加法具有**结合律** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$ 唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
((\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2) \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_3)\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}"'] & (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_2).\mathsf{c}_3 \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "j.f_3"] & (\mathsf{c}_1.\mathsf{c}_2).\mathsf{c}_3 \arrow[l, "\epsilon\cdot_{:\mathsf{c}_3}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "(f_1.f_2).f_3"] \\
\mathsf{c}\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} (\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_3))\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}}"'] & \mathsf{c}_1.(\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{c}_3) \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "f_1.j"] & \mathsf{c}_1.(\mathsf{c}_2.\mathsf{c}_3) \arrow[l, "\epsilon\cdot_{:\mathsf{c}_3}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "f_1.(f_2.f_3)"] \\
\mathsf{c}\ \overset{\mathsf{C}}{\underset{\textcircled{2}}{\mathrm{Di}}} & &
\end{tikzcd}$$

幺半范畴

像刚才这样对象运算具有**单位元**以及**结合律**的范畴称作**幺半范畴**；

若上述范畴还具有**交换律**则称作**对称幺半范畴**；

很明显我们的范畴 C 是典型的**对称幺半范畴** 。

幺半群

什么是幺半群呢？有两种定义方式：

- **幺半群** M 是个范畴，其只含一个对象 m；
  其中的复合运算正好有单位元以及结合律 。
- 对象 m 属于幺半范畴 C，满足下述交换图：

$$
\begin{tikzcd}
1 \overset{C}{\times} m \arrow[r, "u \overset{C}{\otimes} {}_{:m}\mathrm{id}"] \arrow[dr, "左单位元\ u_l"'] & m \overset{C}{\times} m \arrow[d, "p"', "运算结果唯一"] & m \overset{C}{\times} 1 \arrow[l, "{}_{:m}\mathrm{id} \overset{C}{\otimes} u"'] \arrow[dl, "u_r\ 右单位元"] \\
& m &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(m \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\times} m \arrow[rr, "结合律\ a"] \arrow[d, "先算左侧括号\ p \overset{C}{\otimes} {}_{:m}\mathrm{id}"'] & & m \overset{C}{\times} (m \overset{C}{\times} m) \arrow[d, "{}_{:m}\mathrm{id} \overset{C}{\otimes} p\ 先算右侧括号"] \\
m \overset{C}{\times} m \arrow[r, "再算最终结果\ p"'] & m & m \overset{C}{\times} m \arrow[l, "p\ 果结终最算再"]
\end{tikzcd}
$$

  其中

  - u ：$1 \overset{C}{\to} m$ 其实就是 m 里面的幺元
  - u_l：$1 \overset{C}{\times} m \overset{C}{\to} m$ 表示 u 构成左幺元
  - u_r：$m \overset{C}{\times} 1 \overset{C}{\to} m$ 表示 u 构成右幺元
  - p ：$m \overset{C}{\times} m \overset{C}{\to} m$ 即为 m 中的二元运算
  - a ：$(m \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\times} m \overset{C}{\to} m \overset{C}{\times} (m \overset{C}{\times} m)$ 表示 m 具有结合律