章节 08 - 09 函子与自然变换

LaTeX Definitions are here.

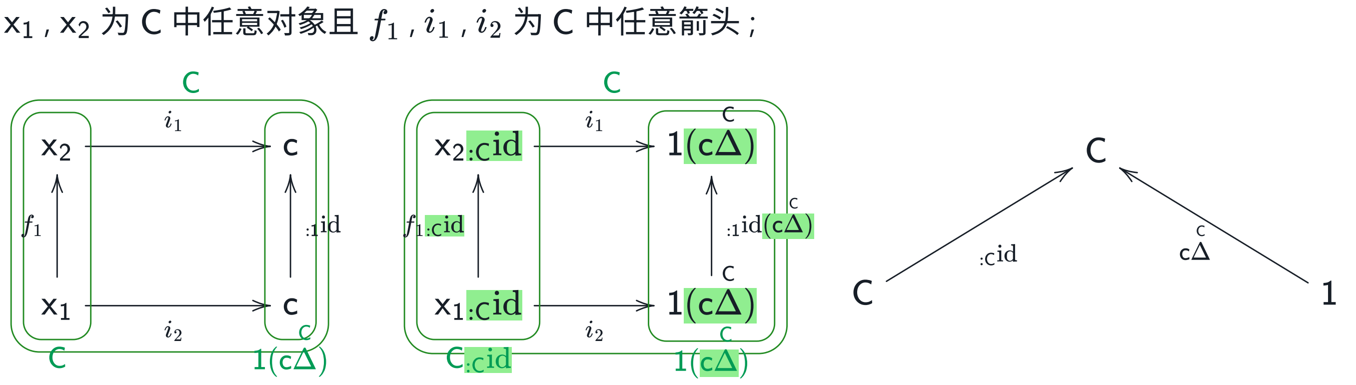
一些特殊的范畴

现在规定几种特殊的范畴。

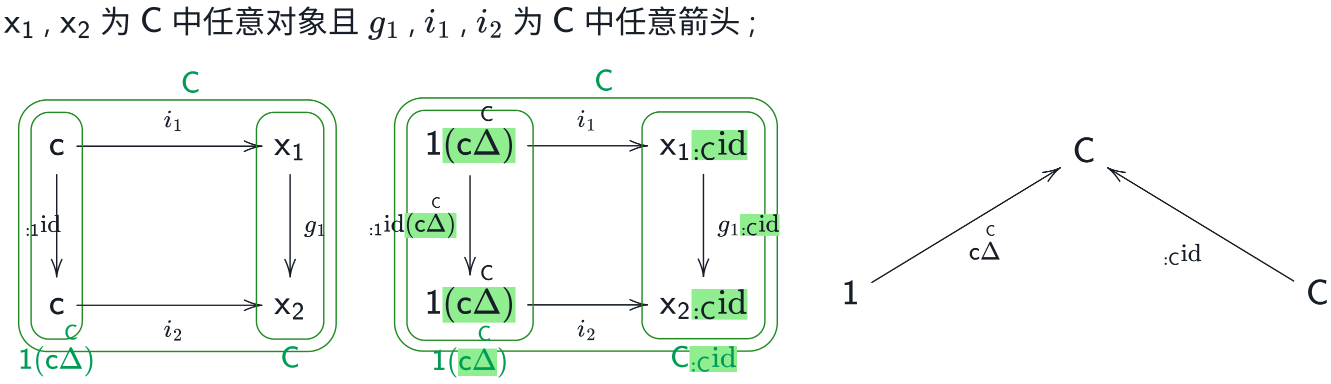
- **离散范畴**：只有对象不含箭头（恒等箭头除外）的范畴。
- Set：**所有集合构成的范畴**，为局部小范畴，满足
  - Set 中对象为任意集合；
  - Set 中箭头为集合间映射。
- Cat：**所有范畴构成的范畴**，满足
  - Cat 中任何对象都构成一个范畴；
  - Cat 中任何箭头都构成一个函子。

若 C，D 为 Cat 中对象，则：

- C^{op}：**反范畴**，满足
  - C^{op} 中对象皆形如 c，
c 为任意 C 中的对象；
  - C^{op} 中箭头皆形如 $i^{\mathrm{op}} : \mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}_1$，
$i : \mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 可为任意 C 中的箭头。
- $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{D}$：**积范畴**，满足
  - $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{D}$ 中对象皆形如 c . d，
c，d 分别为任意 C，D 中的对象；
  - $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{D}$ 中箭头皆形如 $i\ .\ j$，
i，j 分别为任意 C，D 中的箭头。
- $\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$：**所有 C 到 D 的函子的范畴**，满足
  - $\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 中任何对象
都是 C 到 D 的函子；
  - $\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 中任何箭头
都是函子间自然变换。
- C/c：**俯范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
  - C/c 中对象皆形如 $\cancel{\mathsf{x}\ .\ 1}\ .\ i$，其中 x 和
$i : \mathsf{x} \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
  - c/C 中箭头皆形如 $f_1\ \cancel{.\ {}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}}$ 且满足下述交换图，其中
x_1，x_2 为 C 中任意对象且 f_1，i_1，i_2 为 C 中任意箭头；



- c/C：**仰范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
  - c/C 中对象皆形如 $\cancel{1\ .\ \mathsf{x}}\ .\ i$，其中 x 和
$i : \mathsf{c} \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{x}$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
  - C/c 中箭头皆形如 $\cancel{{}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}\ .}\ g_1$ 且满足下述交换图，其中
x_1，x_2 为 C 中任意对象且 g_1，i_1，i_2 为 C 中任意箭头；



函子

接下来我们来提供函子的正式定义：

- P_1 : C $\xrightarrow{\text{Cat}}$ D 为**函子**当且仅当
    - 对任意 C 中对象 c，cP_1 为
      D 中对象且 ${}_{:\text{c}}\mathrm{id}P_1 = {}_{:\text{c}P_1}\mathrm{id}$；
    - 对任意 C 中箭头 i_1 : c$_1$ $\xrightarrow{\text{C}}$ c$_2$ 和 i_2 : c$_2$ $\xrightarrow{\text{C}}$ c$_3$，
      始终都有等式 $(i_1 \overset{\text{C}}{\circ} i_2)P_1 = i_1P_1 \overset{\text{D}}{\circ} i_2P_1$ 成立。

函子的复合运算

若知道 P_1 : C $\xrightarrow{\text{Cat}}$ D 构成函子且
还知道 Q_1 : D $\xrightarrow{\text{Cat}}$ E 为函子，则

- $P_1 \overset{\text{Cat}}{\circ} Q_1$: C $\xrightarrow{\text{Cat}}$ E
  也构成一个函子。

恒等函子

对于函子我们也有恒等映射，即：

- ${}_{:\text{C}}\mathrm{id} \overset{\text{Cat}}{\circ} P_1 = P_1$
  $= P_1 \overset{\text{Cat}}{\circ} {}_{:\text{D}}\mathrm{id}$

忠实，完全和本质满函子

若 C，D，E 皆为**局部小范畴**，则

- P_1 是**忠实的**当且仅当对任意 C 中的对象 c$_1$，c$_2$
  (c$_1$ $\xrightarrow{\text{C}}$ c$_2$) 与 (c$_1P_1$ $\xrightarrow{\text{D}}$ c$_2P_1$) 之间始终存在单射；
- P_1 是**完全的**当且仅当对任意 C 中的对象 c$_1$，c$_2$
  (c$_1$ $\xrightarrow{\text{C}}$ c$_2$) 与 (c$_1P_1$ $\xrightarrow{\text{D}}$ c$_2P_1$) 之间始终存在满射；
- P_1 是**完全忠实的**当且仅当任意 C 中对象 c$_1$，c$_2$
  (c$_1$ $\xrightarrow{\text{C}}$ c$_2$) 与 (c$_1P_1$ $\xrightarrow{\text{D}}$ c$_2P_1$) 之间始终存在双射。

> **Note**
>
> 刚才提到的“单 / 满 / 双射”
> 针对的都是范畴的箭头部分。

- P_1 是**本质满的**当且仅当对任意 D 中对象 d
  都存在 C 中对象 c 使 cP_1 $\xrightarrow{\text{D}}$ d 之间有双射。

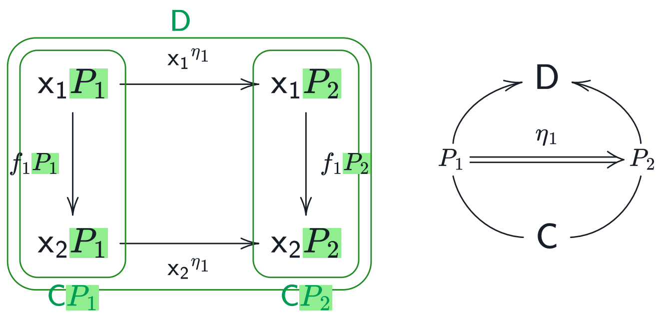
根据刚才的信息我们不难得知

- 若 P_1，Q_1 为忠实函子
  则 $P_1 \overset{\text{Cat}}{\circ} Q_1$ 为忠实函子；
- 若 P_1，Q_1 为完全函子
  则 $P_1 \overset{\text{Cat}}{\circ} Q_1$ 为完全函子；
- 若 P_1，Q_1 为完全忠实函子
  则 $P_1 \overset{\text{Cat}}{\circ} Q_1$ 为完全忠实函子；
- 若 $P_1 \overset{\text{Cat}}{\circ} Q_1$ 为完全忠实函子
  且知道 Q_1 为完全忠实函子
  则可知 P_1 为完全忠实函子；
- 若 P_1，Q_1 为本质满函子
  则 $P_1 \overset{\text{Cat}}{\circ} Q_1$ 为本质满函子。

自然变换

如果还知道 $P_2 : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为函子，那么

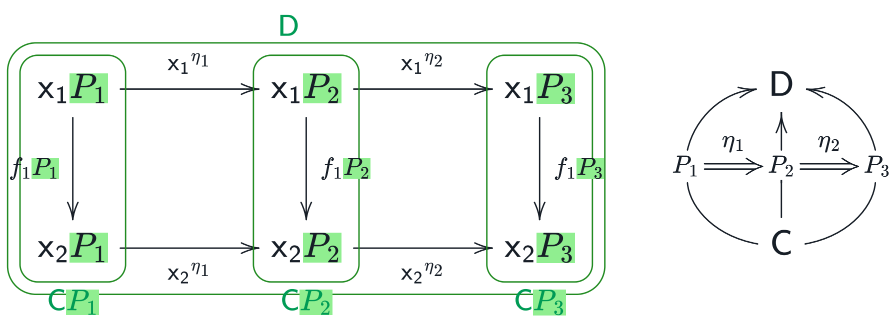
- $\eta_1 : P_1 \xrightarrow{\mathsf{C}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{D}} P_2$ 为自然变换当且仅当对任意 C 中对象 x_1，x_2 始终都会有下述交换图成立：



自然变换的复合

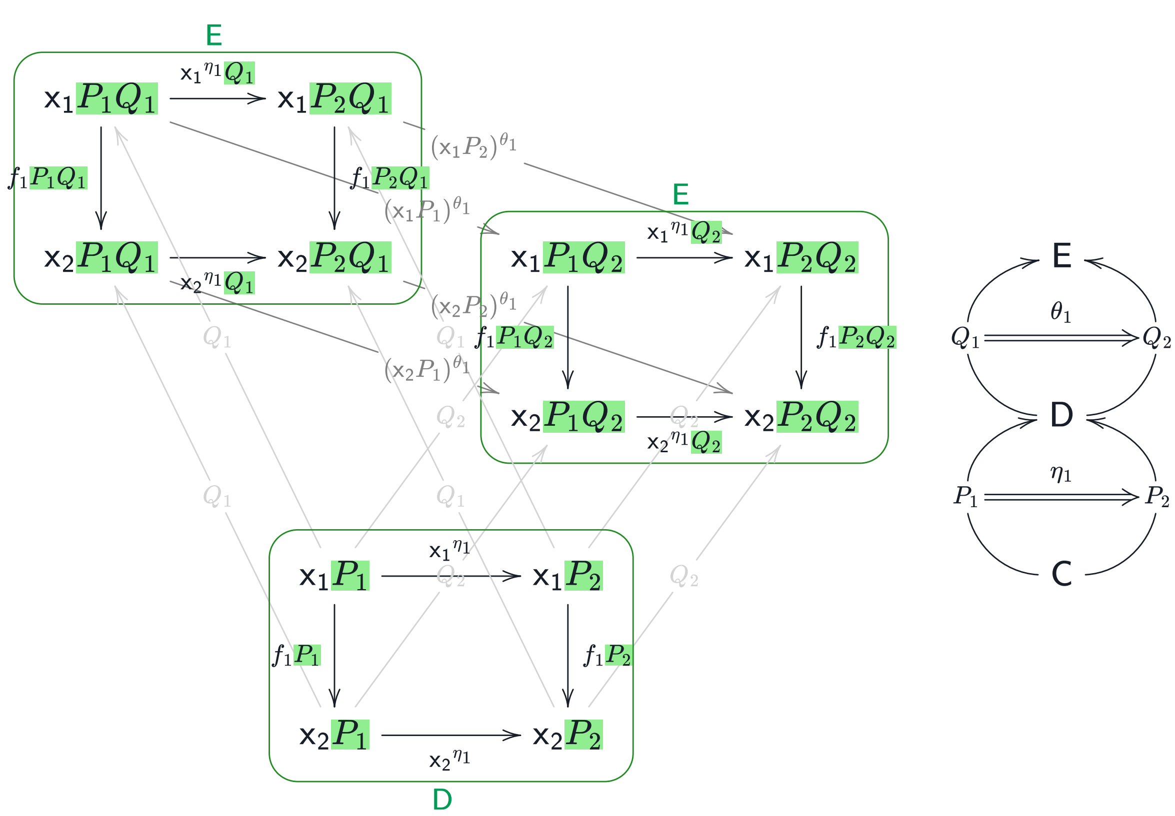
若已知 $\eta_1 : P_1 \xrightarrow{\mathsf{C}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{D}} P_2$ 构成自然变换且
还知道 $\eta_2 : P_2 \xrightarrow{\mathsf{C}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{D}} P_3$ 为自然变换则有

- $\eta_1 \overset{\mathsf{C}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{D}}{\circ} \eta_2 : P_1 \xrightarrow{\mathsf{C}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{D}} P_2$ 为自然变换，称作 η_1 和 η_2 的**纵复合**。



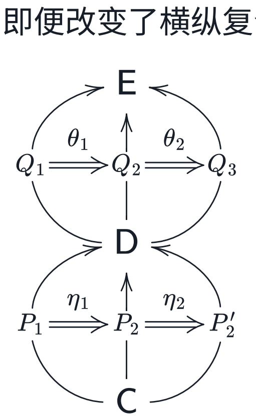
如果还知道 $Q_2 : \mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$ 也是个函子
及自然变换 $\theta_1 : Q_1 \xrightarrow{\mathsf{D}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{E}} Q_2$，那么有

- $\eta_1 \circ \theta_1 : P_1 \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} Q_1 \xrightarrow{\mathsf{C}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{E}} P_2 \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} Q_2$ 为自然变换，称作 η_1 和 θ_1 的**横复合**。



若 $\theta_2 : Q_2 \xrightarrow{\mathsf{D}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{E}} Q_3$ 为自然变换则

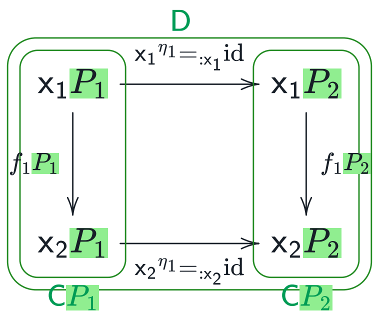
- $(\eta_1 \circ \theta_1) \overset{\mathsf{C}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{E}}{\circ} (\eta_2 \circ \theta_2) = (\eta_1 \overset{\mathsf{C}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{D}}{\circ} \eta_2) \circ (\theta_1 \overset{\mathsf{D}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{E}}{\circ} \theta_2)$，即便改变了横纵复合的先后顺序也不会影响最终结果。

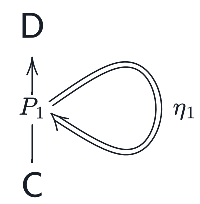


恒等自然变换

同样对于自然变换也有恒等映射 。

- ${}_{:P_1}\mathrm{id} : P_1 \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}}} P_1$ 为恒等自然变换当且仅当
  对范畴 C 中任意对象 x 有下述交换图成立 :





自然同构

自然同构与你想象中的同构不太像 。

- $\eta_1 : P_1 \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}}} P_2$ 为**自然同构**当且仅当
  x^{η_1} 总是同构 , 这里 x 为任意 C 中对象 。
  此时 P_1 , P_2 的关系可用 $P_1 \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}}}{\cong} P_2$ 表示

范畴等价的定义

我们用自然同构来定义范畴的等价 。

- $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\cong} \mathsf{D}$ 当且仅当
  存在函子 $P_1 : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 及 $P_1' : \mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}$
  使 $P_1 \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} P_1' \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{C}}}{\cong} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{id}$ 且 $P_1' \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} P_1 \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{D}}}{\cong} {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{id}$ 。