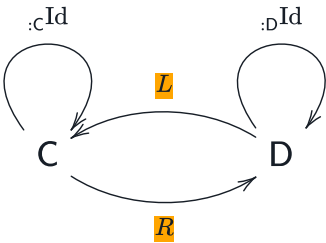


10 伴随函子

LaTeX Definitions are here.

若有函子 $L : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$
以及函子 $R : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, 即



那么规定

伴随函子的第一种定义

- $L \dashv R$ 当且仅当
对任意 \mathbf{C} 中对象 c
及任意 \mathbf{D} 中对象 d
都有 $(d \rightarrow c)_R \cong (dL \rightarrow c)$ 。

假如确实有 $L \dashv R$, 那么不难得知

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_2 ，见下：

$$\begin{aligned}\phi_2 &: (_ \xrightarrow{D} _ R) \xrightarrow{(D \times C) \rightarrow \text{Set}} (_ L \xrightarrow{C} _) \\ (_ \cdot c) \phi_2 &: (_ \xrightarrow{D} cR) \xrightarrow{D \rightarrow \text{Set}} (_ L \xrightarrow{C} c) \\ (d \cdot _) \phi_2 &: (d \xrightarrow{D} _ R) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} (dL \xrightarrow{C} _)\end{aligned}$$

套用反变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{((_ \xrightarrow{D} cR) \xrightarrow{D^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}} (_ L \xrightarrow{C} c))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(cRL \xrightarrow{C} c)}_{\text{一堆元素}}$$

由反变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(_ \cdot c) \phi_2$ 右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 $:_c R \text{id}(cR \cdot c) \phi_2 = c^\varepsilon$ 。如此

- $\varepsilon : R \circ L \xrightarrow{\text{Cat}} :_c \text{Id}$ 构成自然变换。

考虑任意 $f^{\text{op}} : c' \xrightarrow{C} c$ ：

$$\begin{array}{ccc} cR \xrightarrow{D} cR & \xrightarrow{(cR \cdot c) \phi_2} & cRL \xrightarrow{C} c \\ \downarrow f^{\text{op}} R \xrightarrow{D} cR & & \downarrow f^{\text{op}} RL \xrightarrow{C} c \\ c'R \xrightarrow{D} cR & \xrightarrow{(c'R \cdot c) \phi_2} & c'RL \xrightarrow{C} c \\ \uparrow c'R \xrightarrow{D} f^{\text{op}} R & & \uparrow c'RL \xrightarrow{C} f^{\text{op}} \\ c'R \xrightarrow{D} c'R & \xrightarrow{(c'R \cdot c') \phi_2} & c'RL \xrightarrow{C} c' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} :_c R \text{id} \vdash & \xrightarrow{(cR \cdot c) \phi_2} & :_c R \text{id}(cR \cdot c) \phi_2 = c^\varepsilon \\ \downarrow f^{\text{op}} R \xrightarrow{D} cR & & \downarrow f^{\text{op}} RL \xrightarrow{C} c = c(f^{\text{op}} RL \circ _) \\ f^{\text{op}} R \vdash & \xrightarrow{(c'R \cdot c) \phi_2} & f^{\text{op}} RL \circ c^\varepsilon = c'^\varepsilon \circ f^{\text{op}} \\ \uparrow c'R \xrightarrow{D} f^{\text{op}} R & & \uparrow c'RL \xrightarrow{D} f^{\text{op}} = (c'RL) \xrightarrow{D} f^{\text{op}} \\ :_{c'} R \text{id} \vdash & \xrightarrow{(c'R \cdot c') \phi_2} & :_{c'} R \text{id}(c'R \cdot c') \phi_2 = c'^\varepsilon \end{array}$$

上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图其实就是反变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_1 ，见下：

$$\begin{aligned}\phi_1 &: (_ L \xrightarrow{C} _) \xrightarrow{(D \times C) \rightarrow \text{Set}} (_ \xrightarrow{D} _ R) \\ (_ \cdot c) \phi_1 &: (_ L \xrightarrow{C} c) \xrightarrow{D \rightarrow \text{Set}} (_ \xrightarrow{D} cR) \\ (d \cdot _) \phi_1 &: (dL \xrightarrow{C} _) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} (d \xrightarrow{D} _ R)\end{aligned}$$

套用协变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{((dL \xrightarrow{C} _) \xrightarrow{C \rightarrow \text{Set}} (d \xrightarrow{D} _ R))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(d \xrightarrow{D} dLR)}_{\text{一堆元素}}$$

由协变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(d \cdot _) \phi_1$ 右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 $:_d L \text{id}(d \cdot dL) \phi_1 = d^\eta$ 。如此。

- $\eta : :_D \text{Id} \xrightarrow{D \rightarrow D} L \circ R$ 构成自然变换。

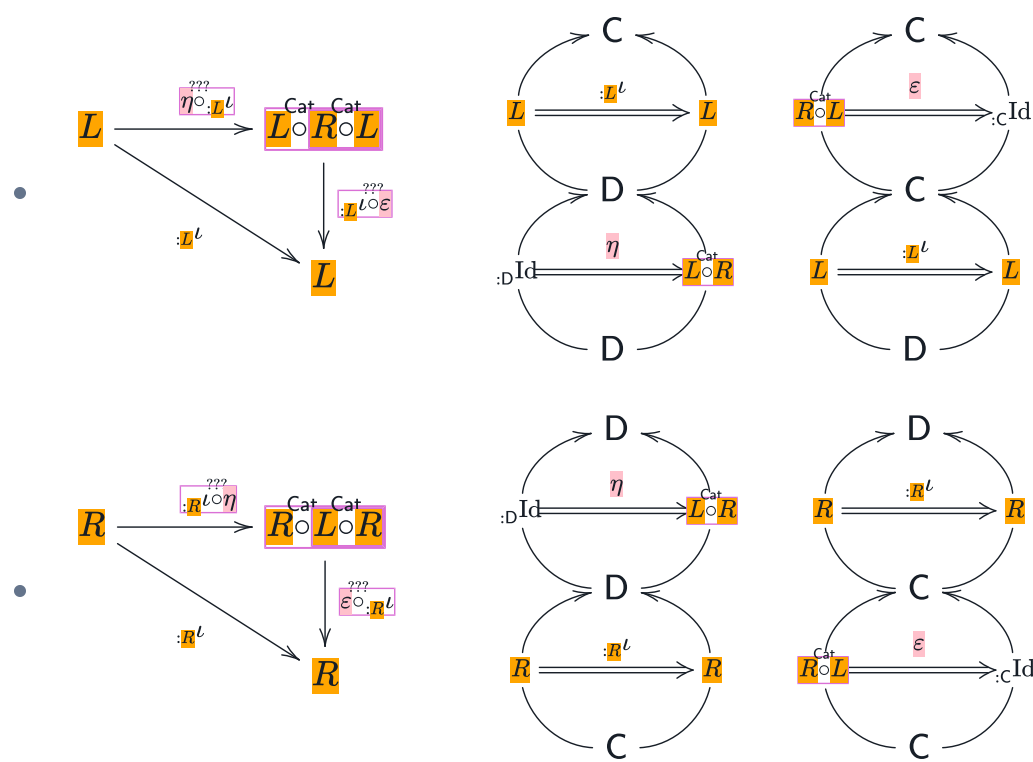
考虑任意 $g : d \xrightarrow{D} d'$ ：

$$\begin{array}{ccc} dL \xrightarrow{C} dL & \xrightarrow{(d \cdot dL) \phi_1} & d \xrightarrow{D} dLR \\ \downarrow dL \xrightarrow{C} gL & & \downarrow d \xrightarrow{D} gLR \\ dL \xrightarrow{C} d'L & \xrightarrow{(d \cdot d'L) \phi_1} & d \xrightarrow{D} d'LR \\ \uparrow gL \xrightarrow{C} d'L & & \uparrow g \xrightarrow{D} d'LR \\ d'L \xrightarrow{C} d'L & \xrightarrow{(d' \cdot d'L) \phi_1} & d' \xrightarrow{D} d'LR \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} :_d L \text{id} \vdash & \xrightarrow{(d \cdot dL) \phi_1} & :_d L \text{id}(d \cdot dL) \phi_1 = d^\eta \\ \downarrow dL \xrightarrow{C} gL & & \downarrow d \xrightarrow{D} gLR = d(\xrightarrow{D} gLR) \\ gL \vdash & \xrightarrow{(d \cdot d'L) \phi_1} & d^\eta \circ gLR = g \circ d'^\eta \\ \uparrow gL \xrightarrow{C} d'L & & \uparrow g \xrightarrow{D} d'LR = (d'LR) \xrightarrow{D} g \\ :_{d'} L \text{id} \vdash & \xrightarrow{(d' \cdot d'L) \phi_1} & :_{d'} L \text{id}(d' \cdot d'L) \phi_1 = d'^\eta \end{array}$$

上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图其实就是协变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

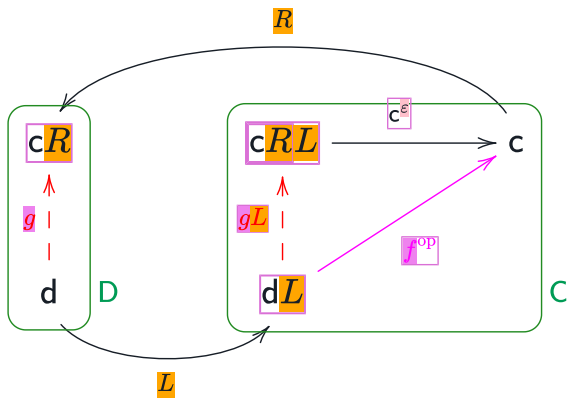
对于前面的 ε 和 η 我们有下述交换图成立：



伴随函子的第二种定义

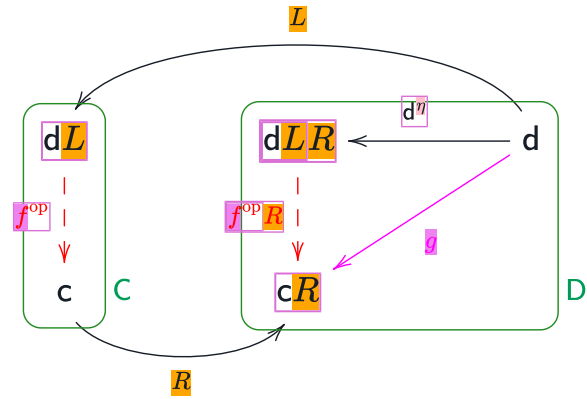
假设我们不知道 L 和 R 构成一对伴随函子并且有自然变换 $\varepsilon : R \overset{\text{Cat}}{\circ} L \xrightarrow{C \rightarrow C} \text{Id}_C$ 和 $\eta : \text{Id}_D \xrightarrow{D \rightarrow D} L \overset{\text{Cat}}{\circ} R$ 能同时满足上页开头的两幅交换图，那么

- 对任意 C 中对象 c
及任意 D 中对象 d
及任意 $f^{\text{op}} : dL \xrightarrow{C} c$ 始终存在
唯一的 $g : d \xrightarrow{D} cR$ 使下图交换。



如此有 $(dL \xrightarrow{C} c) \cong^{\text{Set}} (d \xrightarrow{D} cR)$ ，
即 $L \dashv R$ 。

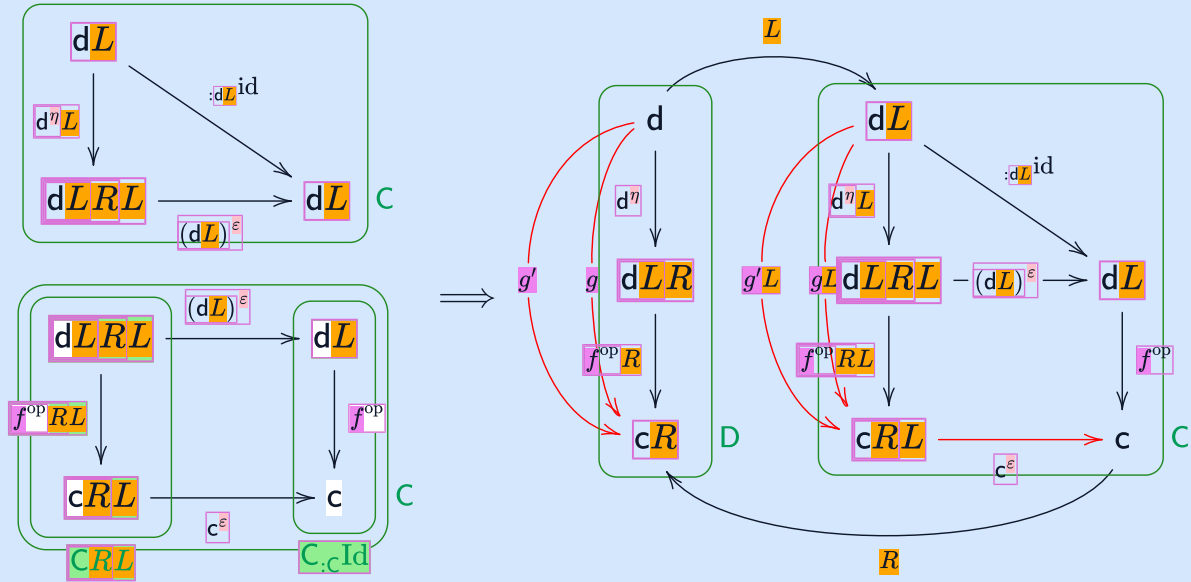
- 对任意 C 中对象 c
及任意 D 中对象 d
及任意 $g : d \xrightarrow{D} cR$ 始终都会存在
唯一的 $f^{\text{op}} : dL \xrightarrow{C} c$ 使下图交换。



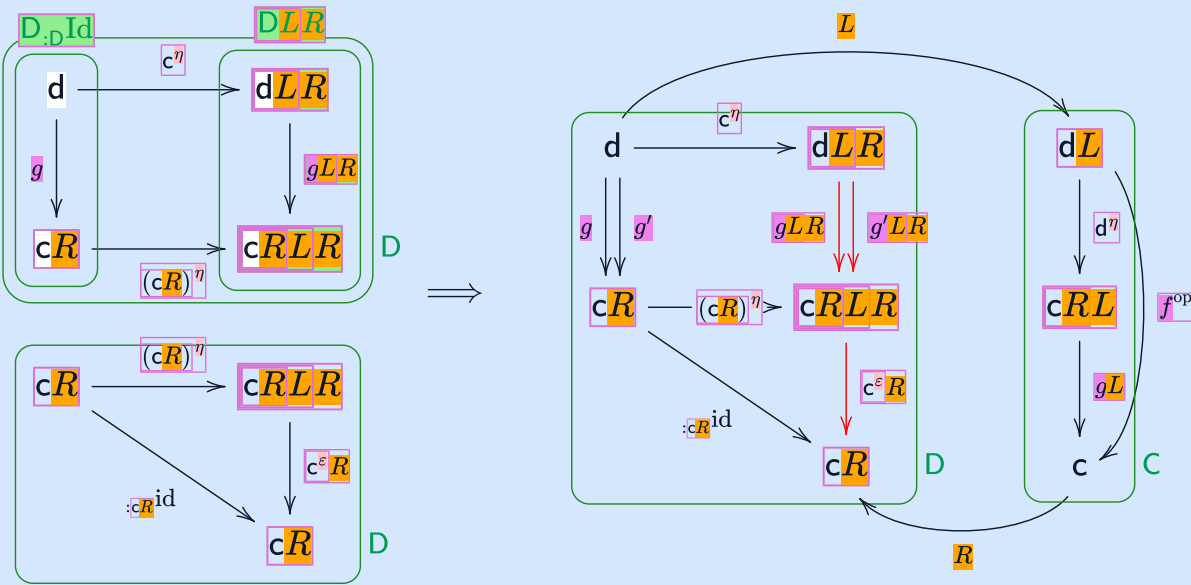
如此有 $(dL \xrightarrow{C} c) \cong^{\text{Set}} (d \xrightarrow{D} cR)$ ，
即 $L \dashv R$ 。

现证明上页的头两条定理。

下方左图上半部分即为上页第一幅图，而
下方左图下半部分可由 ε 为自然变换得出；
将两个图拼在一起即可获得下方右图：



为何 g 唯一呢？若 g' 亦满足上图——即上方右图中
右侧的两条 L 形走向的红色路径的复合结果是一致的，
则下方右图中的两条红色路径的复合结果也是一致的；
如此根据下方右图即可得知 $g = g'$ 。



另一侧同理，这里不再赘述。