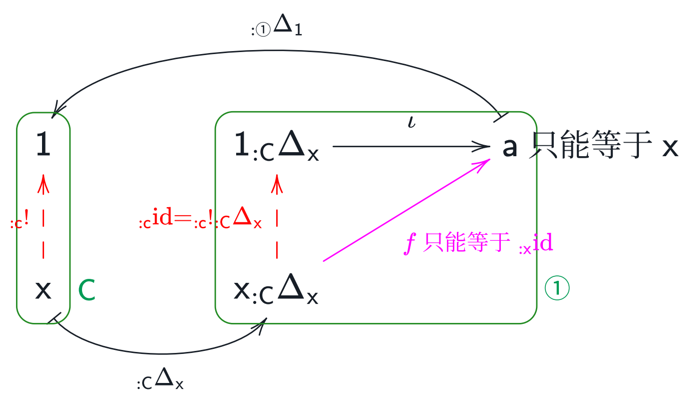
# 章节 01 - 03 基本概念

$\LaTeX$ Definitions are here.

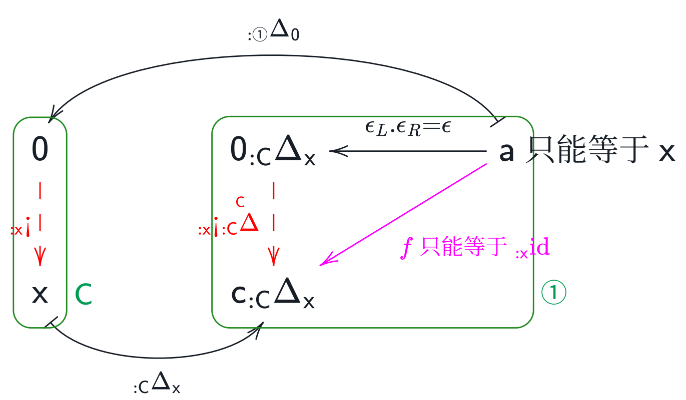
## 始终对象的泛性质

范畴由对象及其间箭头构成。本文重点分析**余积闭范畴** $\mathsf{C}$。首先给出如下定义：

- $1$ 为**终对象**当且仅当对任意 $\mathsf{C}$ 中对象 $\mathsf{c}$ 都有且仅有唯一的箭头 ${}_{:\mathsf{x}}! : \mathsf{x} \overset{\mathsf{C}}{\to} 1$；




- $0$ 为**始对象**当且仅当对任意 $\mathsf{C}$ 中对象 $\mathsf{x}$ 都有且仅有唯一的箭头 ${}_{:\mathsf{x}}¡ : 0 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{x}$；




> ⓘ **Note**
>
> ${}_{:\mathsf{C}}\Delta_\mathsf{x} : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} ①$ 为常值函子满足 ${}_{:\mathsf{C}}\Delta_\mathsf{x} : \mathsf{x} \longmapsto 1$。 另外还有一点：其他范畴中始终对象不一定存在。

如果范畴 $\mathsf{C}$ 中真的含有 $0$ 和 $1$ 分别作为始对象和终对象, 那么根据上述信息可知

- 形如 $1 \overset{\mathsf{C}}{\to} 1$ 的箭头只有一个，即 ${}_{:1}\mathrm{id}$；
- 形如 $0 \overset{\mathsf{C}}{\to} 0$ 的箭头只有一个，即 ${}_{:0}\mathrm{id}$；

## 元素与全局元素

对任意对象 $\mathsf{a}, \mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \mathrm{etc}$ , $\mathsf{b}, \mathsf{b}_1, \mathsf{b}_2, \mathrm{etc}$ 以及任意映射 $i$ , 我们进行如下的规定：

- $i$ 为 $\mathsf{b}$ 的**元素**当且仅当 $i \; \mathrm{tar} = \mathsf{b}$；
- $i$ 为 $\mathsf{a}$ 的**全局元素**当且仅当 $i \; \mathrm{tar} = \mathsf{a}$ 且 $i \; \mathrm{src} = 1$
- $i$ 不存在仅当 $i \; \mathrm{tar} = 0$。

> ⓘ **Note**
>
> 其他范畴中刚才的断言未必成立。

## 箭头构成的集合

这里再给一个定义：

- $\mathsf{a} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b} =$
  所有从 a 射向 b 的箭头构成的集 。

> ⓘ **Note**
>
> 上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
> 在其他范畴里 $\mathsf{a} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}$ 未必构成集 。

## 箭头的复合运算

范畴 C 中特定的箭头可以进行复合运算：
对任意 C 中对象 $\mathsf{c}_1$，$\mathsf{c}_2$，$\mathsf{c}_3$ 我们都会有

$$\begin{aligned}\overset{\mathsf{C}}{\circ} &: (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_2) \times (\mathsf{c}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_3) \xrightarrow{\mathsf{Set}} (\mathsf{c}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_3) \\ \overset{\mathsf{C}}{\circ} &: (\quad i_1 \qquad . \qquad i_2 \quad) \longmapsto i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2\end{aligned}$$

若我们还知道箭头 $f_1$，$i_1$，$g_1$ 分别属于
$\mathsf{a}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{a}_1$，$\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1$，$\mathsf{b}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_2$ 那么便有

- $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1) \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1 = f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} (i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1)$
  说明箭头复合运算具有**结合律** 。

另外固定住一侧实参便获可得新的函数：

- $\begin{aligned}(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) &: (\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \xrightarrow{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}} (\mathsf{a}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \\ (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) &: \qquad i_1 \qquad \longmapsto \qquad f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1\end{aligned}$
  称作**前复合** 。下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{a}_1 \arrow[drr, bend left, "i_1:\mathsf{a}_1\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{b}_1"] & {} \arrow[dd, mapsto, "\mathsf{b}_1{}^{(f_1\overset{\mathsf{C}}{\circ}_)}"] & \\
 & & \mathsf{b}_1 \arrow[loop right, ":_{\mathsf{b}_1}\mathrm{id}"] \\
\mathsf{a}_2 \arrow[uu, "f_1"] \arrow[urr, bend right, "(f_1\overset{\mathsf{C}}{\circ}i_1):\mathsf{a}_2\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{b}_3"'] & {} &
\end{tikzcd}$$

- $\begin{aligned}(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) &: (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1) \xrightarrow{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_2) \\ (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) &: \qquad i_1 \qquad \longmapsto \qquad i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1\end{aligned}$
  称作**后复合**；下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[dd, mapsto, "\mathsf{a}_1{}^{(_\overset{\mathsf{C}}{\circ}g_1)}"] & \mathsf{b}_1 \arrow[dd, "g_1"] \\
\mathsf{a}_1 \arrow[loop left, ":_{\mathsf{a}_1}\mathrm{id}"] \arrow[urr, bend left, "i_1:\mathsf{a}_1\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{b}_1"] \arrow[drr, bend right, "(i_1\overset{\mathsf{C}}{\circ}g_1):\mathsf{a}_1\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{b}_2"'] & & \\
 & {} & \mathsf{b}_2
\end{tikzcd}$$

根据上面的定义便不难得出下述结论

- $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) \overset{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$
  复合运算具有**结合律**，即后面会提到的**自然性**；
- $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1) \overset{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1))$
  前复合与复合运算的关系
- $(i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) = ((f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1) \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$
  后复合与复合运算的关系

## 箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合 。
假如 $a_1$ 为 $\mathsf{a}_1$ 的全局元素则可规定

- $a_1 i_1 = a_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1$

## 恒等箭头

范畴 C 内的每个对象都有恒等映射 :

- ${}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} : \mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{a}_1$
  ${}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} : a_1 \mapsto a_1$

如此我们便可以得出下述重要等式 :

- $$\begin{aligned} {}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1 &= i_1 \\ &= i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id} \end{aligned}$$

此外还可以得知

- $({}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) : (\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \xrightarrow{\mathsf{C} \to \mathsf{Set}} (\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)$
  为恒等自然变换 , 可以记作是 ${}_{:(\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)}\mathrm{id}$ ;
- $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}) : (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1) \xrightarrow{\mathsf{C} \to \mathsf{Set}} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1)$
  为恒等自然变换 , 可以记作是 ${}_{:(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1)}\mathrm{id}$ ;

## 单满态以及同构

接下来给出单 / 满态和同构的定义 。

- $i_1$ 为**单态**当且仅当对任意 $\mathsf{a}_2$ 若有 $f_1, f_1' : \mathsf{a}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{a}_1$
  满足 $f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1 = f_1' \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1$ 则有 $f_1 = f_1'$ 。详情见下图 :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{a}_1 \arrow[rrd, bend left, "i_1 : \mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow} \mathsf{b}_1"] & \phantom{x} \arrow[dd, dashed, mapsto, "\mathsf{b}_1{}^{(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} _)}"] & \\
& & \mathsf{b}_1 \arrow[loop right, "{}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}"] \\
\mathsf{a}_2 \arrow[uu, shift left, "f_1"] \arrow[uu, shift right, "f_1'"'] \arrow[rru, bend right, "(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1) : \mathsf{a}_2 \overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow} \mathsf{b}_3"'] & \phantom{x} &
\end{tikzcd}$$

- $i_1$ 为**满态**当且仅当对任意 $\mathsf{b}_2$ 若有 $g_1, g_1' : \mathsf{b}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_2$
  满足 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1 = i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1'$ 则有 $g_1 = g_1'$ 。详情见下图 :

$$\begin{tikzcd}
& \phantom{x} \arrow[dd, dashed, mapsto, "\mathsf{a}_1{}^{(_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1)}"] & \mathsf{b}_1 \arrow[dd, shift right, "g_1'"'] \arrow[dd, shift left, "g_1"] \\
\mathsf{a}_1 \arrow[loop left, "{}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id}"] \arrow[rru, bend left, "i_1 : \mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow} \mathsf{b}_1"] \arrow[rrd, bend right, "(i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) : \mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\longrightarrow} \mathsf{b}_2"'] & & \\
& \phantom{x} & \mathsf{b}_2
\end{tikzcd}$$

- $i_1$ 为**同构**当且仅当存在 $i_1' : \mathsf{b}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{a}_1$
  使 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1' = {}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id}$ 且 $i_1' \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1 = {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}$ 。
  此时 $\mathsf{a}_1$ , $\mathsf{b}_1$ 间的关系可记作 $\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\cong} \mathsf{b}_1$

若还提供 $j_1 : \mathsf{b}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}_1$ 则不难得知

- 若 $i_1$ , $j_1$ 为单态
  则 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} j_1$ 为单态 ;
- 若 $i_1$ , $j_1$ 为满态
  则 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} j_1$ 为满态 ;
- 若 $i_1$ , $j_1$ 为同构
  则 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} j_1$ 为同构 ;
- 若 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} j_1$ 为同构
  且 $i_1$ , $j_1$ 其中一个为同构
  则 $i_1$ , $j_1$ 两者皆构成同构 。

此外我们还可以得出下述结论 :

- $a_1$ 为单态 , 由
  ! 的唯一性可知 。
- ${}_{:0}! = {}_{:1}¡$为同构 —— 这是因为
  $\mathsf{0} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{0} = \{{}_{:0}\mathrm{id}\}$ , $\mathsf{1} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{1} = \{{}_{:1}\mathrm{id}\}$

# 同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释 。
后面会将自然性进行进一步推广 。

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, red, "\color{red} i_1"] \arrow[dr, red, dashed] \arrow[dr, phantom, "\downarrow (_\circ g_1)" near end] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "i_2"'] & b_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, red, "\color{red} i_1"] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur, red, dashed] \arrow[ur, phantom, "(f_1\circ_) \downarrow" near start] \arrow[r, "i_2"'] & b_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, red] \arrow[dr, phantom, "(f_1\circ_) \downarrow" near start] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, red, dashed, "\color{red} i_2"'] & b_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "i_1"] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur, red, dashed] \arrow[ur, phantom, "\downarrow (_\circ g_1)" near end] \arrow[r, red, "\color{red} i_2"'] & b_2
\end{tikzcd}$$

若提供自然变换 $\beta$ 满足自然性 —— 即对任意
C 中对象 $x_1$, $x_2$ 及任意 C 中映射 $f_1 : x_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} x_1$
都会有 $(f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} b_1) \overset{\mathsf{Set}}{\circ} {x_2}^\beta = {x_1}^\beta \overset{\mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} b_2)$
( 即下图自西向南走向操作结果同自北向东 ) :

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, red, "i_1"] \arrow[dr, red, dashed, "{x_1}^\beta"] & b_1 \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "i_2"'] & b_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, red, "i_1"] & b_1 \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur, red, dashed, "(f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} b_1)"] \arrow[r, "i_2"'] & b_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, red, "(f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} b_2)"'] & b_1 \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, red, dashed, "i_2"'] & b_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "i_1"] & b_1 \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur, red, "{x_2}^\beta"'] \arrow[r, red, dashed, "i_2"'] & b_2
\end{tikzcd}$$

那么我们便会有下述结论 :

- $b_1 \cong b_2$ 当且仅当对任意 C 中对象 $x$
  $x^\beta$ 都是同构 。此时称 $\beta$ 为**自然同构** 。

---

若提供自然变换 $\alpha$ 满足自然性 —— 即对任意
C 中对象 $x_1$, $x_2$ 及任意 C 中映射 $g_1 : x_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} x_2$
都会有 $(a_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} g_1) \overset{\mathsf{Set}}{\circ} {x_2}^\alpha = {x_1}^\alpha \overset{\mathsf{Set}}{\circ} (a_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} g_1)$
( 即下图自西向南走向操作结果同自北向东 ) :

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, red, "i_1"] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[ur, red, dashed, "{x_1}^\alpha"] \arrow[r, "i_2"'] & x_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, red, "i_1"] \arrow[dr, red, dashed, "(a_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} g_1)"] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[r, "i_2"'] & x_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "i_1"] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[ur, red, "(a_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} g_1)"'] \arrow[r, red, dashed, "i_2"'] & x_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, red, "{x_2}^\alpha"'] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[r, red, dashed, "i_2"'] & x_2
\end{tikzcd}$$

那么我们便会有下述结论 :

- $a_1 \cong a_2$ 当且仅当对任意 C 中对象 $x$
  $x^\alpha$ 都是同构 。此时称 $\alpha$ 为**自然同构** 。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为

$$
\begin{tikzcd}
x_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} b_1 \arrow[r, "x_1^{\beta}"] \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} b_1"'] & x_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} b_2 \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} b_2"] \\
x_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} b_1 \arrow[r, "x_2^{\beta}"'] & x_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} b_2
\end{tikzcd}
$$

Set

$\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{C}} b_1$ $\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{C}} b_2$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧（考虑特殊情况）

$$
\begin{tikzcd}
b_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} b_1 \arrow[r, "b_1^{\beta}"] \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} b_1"'] & b_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} b_2 \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} b_2"] \\
x_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} b_1 \arrow[r, "x_2^{\beta}"'] & x_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} b_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
:_{b_1}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "b_1^{\beta}"] \arrow[d, mapsto, "f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} b_1"'] & :_{b_1}\mathrm{id}(b_1^{\beta}) \arrow[d, mapsto, "f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} b_2"] \\
f_1 \arrow[r, mapsto, "x_2^{\beta}"'] & f_1 \circ (\mathrm{etc})
\end{tikzcd}
$$

为了方便就用 $(\mathrm{etc})$ 表示 $:_{b_1}\mathrm{id}(b_1^{\beta})$。由上图可知 $f_1(x_2{}^{\beta}) = f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} (\mathrm{etc})$，故 $x_2{}^{\beta} = x_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} (\mathrm{etc})$；而 $x_2{}^{\beta} = x_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} (\mathrm{etc}) = x_2{}^{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (\mathrm{etc}))}$ 是同构，从而知 $((\mathrm{etc}) \circ \_)$ 是同构，$(\mathrm{etc}) : b_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} b_2$ 也是。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在米田嵌入处会详细介绍。

---

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} x_1 \arrow[r, "x_1^{\alpha}"] \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} g_1"'] & a_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} x_1 \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} g_1"] \\
a_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} x_2 \arrow[r, "x_2^{\alpha}"'] & a_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} x_2
\end{tikzcd}
$$

Set

$a_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{C}$ $a_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{C}$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧（考虑特殊情况）

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} a_1 \arrow[r, "x_1^{\alpha}"] \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} g_1"'] & a_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} a_1 \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} g_1"] \\
a_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} x_2 \arrow[r, "x_2^{\alpha}"'] & a_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} x_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
:_{b_1}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "x_1^{\alpha}"] \arrow[d, mapsto, "a_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} g_1"'] & :_{a_1}\mathrm{id}(a_1^{\alpha}) \arrow[d, mapsto, "a_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} g_1"] \\
g_1 \arrow[r, mapsto, "x_2^{\alpha}"'] & (\mathrm{etc}) \circ g_1
\end{tikzcd}
$$

为了方便就用 $(\mathrm{etc})$ 表示 $:_{a_1}\mathrm{id}(a_1^{\alpha})$。由上图可知 $g_1(x_2{}^{\alpha}) = (\mathrm{etc}) \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1$，故 $x_2{}^{\alpha} = (\mathrm{etc}) \xrightarrow{\mathsf{C}} x_2$；而 $x_2{}^{\alpha} = (\mathrm{etc}) \xrightarrow{\mathsf{C}} x_2 = x_2{}^{((\mathrm{etc}) \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}$ 是同构，从而知 $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (\mathrm{etc}))$ 是同构，$(\mathrm{etc}) : a_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} a_2$ 也是。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在米田嵌入处会详细介绍。