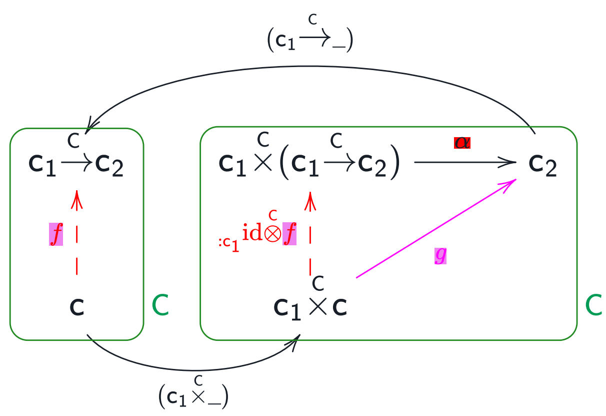
06 类型的幂

LaTeX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\xrightarrow{\mathcal{C}} : (\mathcal{C} \overset{\mathrm{Cat}}{\times} \mathcal{C}) \xrightarrow{\mathrm{Cat}} \mathcal{C}$ 在范畴 $\mathcal{C}$ 中有下述性质：

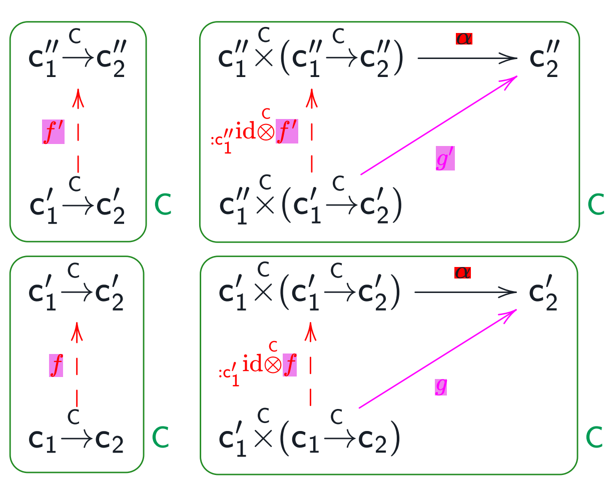
- $(c_1 \overset{\mathcal{C}}{\times} c) \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2 \overset{\mathrm{Set}}{\cong} c \xrightarrow{\mathcal{C}} (c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2) \overset{\mathrm{Set}}{\cong} c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} (c \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2)$ —— c 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象。此即为幂的泛性质，亦表示了**指数加乘法之间的运算关系**。

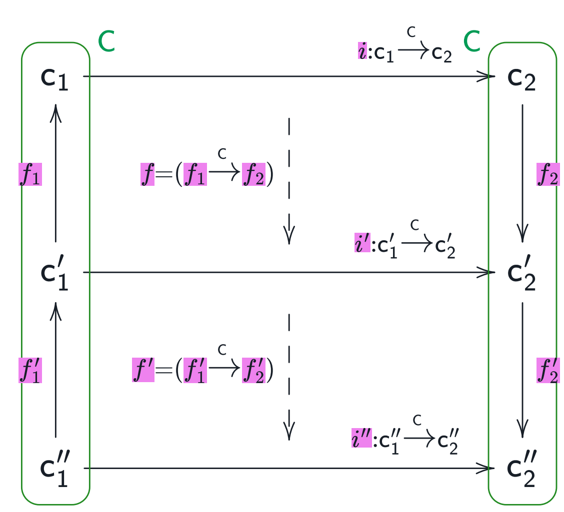


函子性

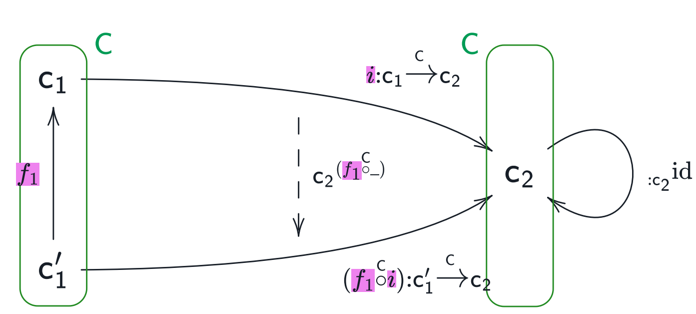
如何证明 $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ 构成函子呢？请看

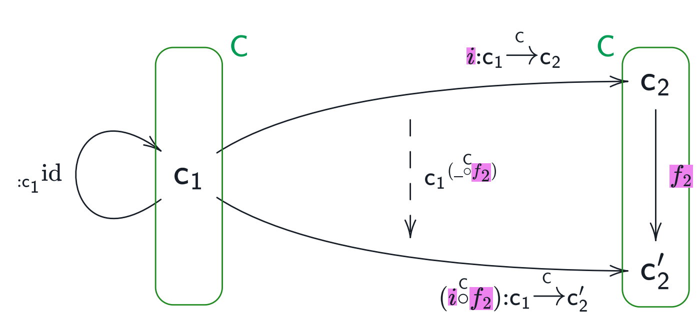
- $\xrightarrow{\mathcal{C}} : ({}_{:c_1}\mathrm{id} \underset{\mathcal{C}}{.} {}_{:c_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2)}\mathrm{id}$ —— 即函子 $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ 能**保持恒等箭头**；
- $\xrightarrow{\mathcal{C}} : (f_1' \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_1 \mathbin{.} f_2 \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2') \longmapsto (f \overset{\mathcal{C}}{\circ} f')$ —— 即函子 $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ **保持箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明过程：





下图 自上到下分别为图 1 和图 2 后面会用到。





范畴 C 内任意两对象 c_1 和 c_2 间的箭头构成一个集合 $c_1 \xrightarrow{C} c_2$，
说明 $\xrightarrow{C}$ 只能将两个对象打到一个集合；下面使 $\xrightarrow{C}$ 升级为函子：
若还知道箭头 $f_1 : c_1' \xrightarrow{C} c_1$ 以及 $f_2 : c_2 \xrightarrow{C} c_2'$，则规定

- $(\_ \xrightarrow{C} c_2) : C^{op} \cancel{\overset{Cat}{\times} C} \xrightarrow{Cat} Set$ 为函子且
  $(\_ \xrightarrow{C} c_2) : c_1 \longmapsto (c_1 \xrightarrow{C} c_2)$，并且有
  $(\_ \xrightarrow{C} c_2) : f_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{C} c_2) = (f_1 \xrightarrow{C} {}_{:c_2}\mathrm{id}) = c_2^{(f_1 \overset{C}{\circ} \_)}$
  图 1 有助于理解。
  $(\_ \xrightarrow{C} f_2) : C^{op} \cancel{\overset{Cat}{\times} C} \xrightarrow{Cat} Set$，
  $(\_ \xrightarrow{C} f_2) : c_1 \longmapsto (c_1 \xrightarrow{C} f_2) = ({}_{:c_1}\mathrm{id} \xrightarrow{C} f_2) = c_2^{(\_ \overset{C}{\circ} f_2)}$
  $(\_ \xrightarrow{C} f_2) : f_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{C} f_2) = (f_1 \overset{C}{\circ} \_) \overset{C \xrightarrow{Cat} Set}{\circ} (\_ \overset{C}{\circ} f_2) = (\_ \overset{C}{\circ} f_2) \overset{C \xrightarrow{Cat} Set}{\circ} (f_1 \overset{C}{\circ} \_)$
  图 2 有助于理解。
  > **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - $よ : C \xrightarrow{Cat} (C^{op} \xrightarrow{Set} Set)$
  > $c_2 \longmapsto (\_ \xrightarrow{C} c_2)$ 构成一个函子
  > $f_2 \longmapsto (\_ \xrightarrow{C} f_2) = (\_ \overset{C}{\circ} f_2)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
  >   该函子称作是**米田嵌入**。
- $(c_1 \xrightarrow{C} \_) : \cancel{C^{op} \overset{Cat}{\times}} C \xrightarrow{Cat} Set$ 为函子且
  $(c_1 \xrightarrow{C} \_) : c_2 \longmapsto (c_1 \xrightarrow{C} c_2)$，并且有
  $(c_1 \xrightarrow{C} \_) : f_2 \longmapsto (c_1 \xrightarrow{C} f_2) = ({}_{:c_1}\mathrm{id} \xrightarrow{C} f_2) = c_1^{(\_ \overset{C}{\circ} f_2)}$
  图 2 有助于理解。
  $(f_1 \xrightarrow{C} \_) : \cancel{C^{op} \overset{Cat}{\times}} C \xrightarrow{Cat} Set$，
  $(f_1 \xrightarrow{C} \_) : c_2 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{C} c_2) = (f_1 \xrightarrow{C} {}_{:c_2}\mathrm{id}) = c_2^{(f_1 \overset{C}{\circ} \_)}$
  $(f_1 \xrightarrow{C} \_) : f_2 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{C} f_2) = (f_1 \overset{C}{\circ} \_) \overset{C \xrightarrow{Cat} Set}{\circ} (\_ \overset{C}{\circ} f_2) = (\_ \overset{C}{\circ} f_2) \overset{C \xrightarrow{Cat} Set}{\circ} (f_1 \overset{C}{\circ} \_)$
  图 1 有助于理解。
  > **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - $尤 : C^{op} \xrightarrow{Cat} (C \xrightarrow{Set} Set)$
  > $c_1 \longmapsto (c_1 \xrightarrow{C} \_)$ 构成一个函子
  > $f_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{C} \_) = (f_1 \overset{C}{\circ} \_)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
  >   该函子戏称为**尤达嵌入**。

积闭范畴

这里插个题外话：

若范畴包含终对象，所有类型的积以及指数，则可将其称作**积闭范畴**；

若范畴包含始对象，所有类型的和，则可将其称作是**余积闭范畴**；

若范畴满足上述条件，则可称作**双积闭范畴**。

很明显我们讨论的范畴 C 就是**双积闭范畴**。