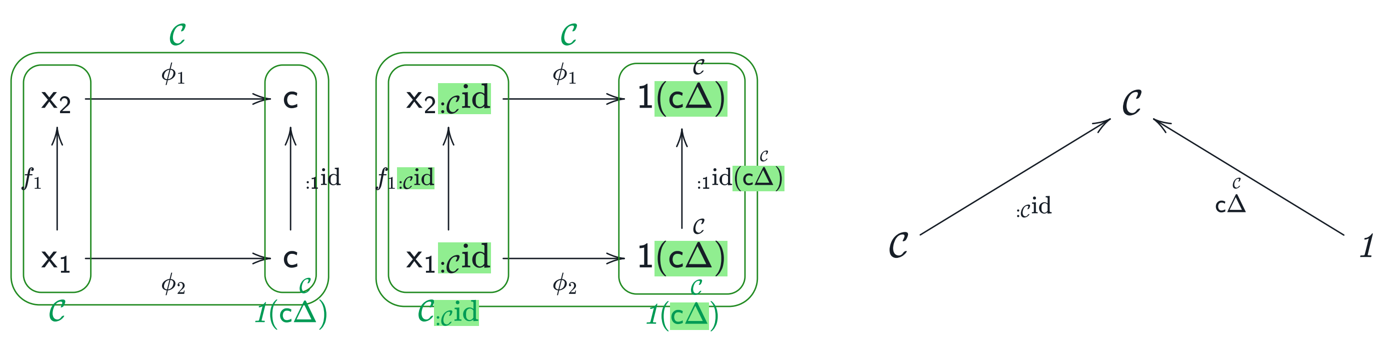
章节 08 函子

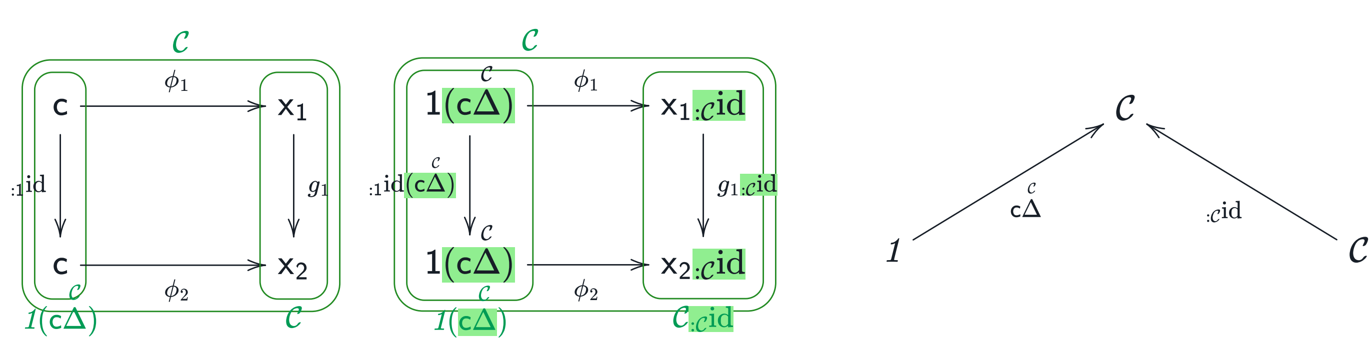
LaTeX Definitions are here.

先规定几种特殊的范畴：

- **离散范畴**：只有对象不含箭头（恒等箭头除外）的范畴。
- $\mathscr{S}et$：**集合范畴**，为局部小范畴，满足
  - $\mathscr{S}et$ 中对象可以是任意集合
  - $\mathscr{S}et$ 中箭头便是集合间映射。
- $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$：**反范畴**，满足
  - $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中对象皆形如 c，
    c 为任意 $\mathcal{C}$ 中的对象；
  - $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中箭头皆形如 $\phi^{\mathrm{op}} : c_2 \xrightarrow{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} c_1$，
    $\phi : c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2$ 可为任意 $\mathcal{C}$ 中的箭头。
- $\mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{D}$：**积范畴**，满足
  - $\mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{D}$ 中对象皆形如 c . d，
    c，d 为任意 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$ 中的对象；
  - $\mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{D}$ 中箭头皆形如 $\phi \,.\, \psi$，
    ϕ，ψ 为任意 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$ 中的箭头。
- $\mathcal{C}/c$：**俯范畴**，这里 c 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象；满足
  - $\mathcal{C}/c$ 中对象皆形如 $\cancel{x \,.\, 1} \,.\, \phi$，其中
    x 和 $\phi : x \xrightarrow{\mathcal{C}} c$ 分别为 $\mathcal{C}$ 中对象和箭头；
  - $c/\mathcal{C}$ 中箭头皆形如 $f_1 \cancel{\,.\, {}_{:c}\mathrm{id}}$ 且满足下述交换图，其中
    x_1，x_2 为 $\mathcal{C}$ 中对象且 ϕ_1，ϕ_2，f_1，${}_{:1}\mathrm{id}$ 皆为 $\mathcal{C}$ 中箭头；



- $c/\mathcal{C}$：**仰范畴**，这里 c 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象；
  - $c/\mathcal{C}$ 中对象皆形如 $\cancel{1 \,.\, x} \,.\, \phi$，其中
    x 和 $\phi : c \xrightarrow{\mathcal{C}} x$ 分别为 $\mathcal{C}$ 中对象和箭头；
  - $\mathcal{C}/c$ 中箭头皆形如 $\cancel{{}_{:c}\mathrm{id}} \,.\, g_1$ 且满足下述交换图，其中
    x_1，x_2 为 $\mathcal{C}$ 中对象且 ϕ_1，ϕ_2，${}_{:1}\mathrm{id}$，g_1 皆为 $\mathcal{C}$ 中箭头；



考虑范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$，现提供函子定义：

- $\Phi : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$ 为范畴当且仅当
  - 对任意 $\mathcal{C}$ 中对象 c
    $c\Phi$ 为 $\mathcal{D}$ 中对象且
    ${}_{:c}\mathrm{id}\Phi = {}_{:c\Phi}\mathrm{id}$；
  - 对任意 $\mathcal{C}$ 中箭头 $\phi_1 : c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2$ 和 $\phi_2 : c_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_3$，
    始终都有等式 $(\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_2)\Phi = \phi_1\Phi \overset{\mathcal{D}}{\circ} \phi_2\Phi$ 成立。

假如 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$ 皆为**局部小范畴**，并且
刚才的 Φ 确实构成一个函子， 则

- Φ 是**忠实的**当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中对象 c_1 和 c_2
  $(\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_2)$ 与 $(\mathsf{c}_1\Phi \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathsf{c}_2\Phi)$ 之间始终存在单射；
- Φ 是**完全的**当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中对象 c_1 和 c_2
  $(\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_2)$ 与 $(\mathsf{c}_1\Phi \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathsf{c}_2\Phi)$ 之间始终存在满射；
- Φ 是**完全忠实的**当且仅当
  $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ 与 $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ 间存在自然同构，即
  $(\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_)$ 与 $(\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{D}} \_)$ 间存在自然同构

若还知道 $F_1, F_2, G_1, G_2 : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$
为函子，则有

- $$\begin{tikzcd}
\mathsf{x}_1\Phi \arrow[r, "\mathsf{x}_1\natural"] \arrow[d, "f_1\Phi"'] & \mathsf{x}_1\Psi \arrow[d, "f_2\Psi"] \\
\mathsf{x}_2\Phi \arrow[r, "\mathsf{x}_2\natural"'] & \mathsf{x}_2\Psi \\
\mathcal{C}\Phi & \mathcal{C}\Psi
\end{tikzcd}$$
- $\mathcal{C}$ 中的映射：ϕ，$\mathcal{C}$ 中对象：c
  $\mathcal{D}$ 中的映射：ψ，$\mathcal{D}$ 中对象：d
  映射的复合：$\phi_1 \circ \phi_2$，$\psi_1 \circ \psi_2$
- 函子 $\Phi : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$，
  函子 $\Psi : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$，
  函子的复合：$\Phi_1 \circ \Phi_2$，$\Psi_1 \circ \Psi_2$
- 自然变换 $\natural : \Phi \to \Psi$，自然变换 $\sharp : \Psi \to \Upsilon$
  自然变换 $\natural_1 : \Phi_1 \to \Phi_2$，自然变换 $\natural_2 : \Phi_2 \to \Phi_3$
  自然变换的纵复合：$\natural \circ \sharp$，
  自然变换的横复合：$\natural_1 \circ_{\mathrm{h}} \natural_2$，

- 函子 $\Phi_1 : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$
  函子 $\Phi_2 : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$
  函子的复合：$\Phi \circ \Psi \circ \Upsilon$，
- 自然变换 $\natural_1 : \Phi_1 \to \Phi_2$，自然变换 $\natural_2 : \Phi_1 \to \Phi_2$
  自然变换的纵复合：$\natural_1 \circ \natural_2$，