章节 01 - 03 基本概念

LaTeX Definitions are here.

始对象与终对象

范畴由对象及其间箭头构成。本文重点分析**余积闭范畴** $\mathcal{C}$。首先给出如下定义：

- 0 为**始对象**当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 ${}_{:c}¡ : 0 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}$；
- 1 为**终对象**当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 ${}_{:c}! : \mathsf{c} \xrightarrow{\mathcal{C}} 1$；

> ⓘ **Note**
>
> 其他范畴中始终对象不一定存在。

范畴 $\mathcal{C}$ 中我们假设其含 0 和 1 分别作为始对象和终对象，那么由上述信息可知

- 形如 $0 \xrightarrow{\mathcal{C}} 0$ 的箭头只有一个，即 ${}_{:0}\mathrm{id}$；
- 形如 $1 \xrightarrow{\mathcal{C}} 1$ 的箭头只有一个，即 ${}_{:1}\mathrm{id}$；

元素与全局元素

对任意对象 $\mathsf{a}, \mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \mathrm{etc}$，$\mathsf{b}, \mathsf{b}_1, \mathsf{b}_2, \mathrm{etc}$ 以及任意映射 ϕ，我们进行如下的规定：

- ϕ 为 b 的**元素**当且仅当 $\phi : \mathsf{a} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{b}$；
- ϕ 为 a 的**全局元素**当且仅当 $\phi : 1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{a}$；
- ϕ 不存在可通过 $\phi : \mathsf{b} \xrightarrow{\mathcal{C}} 0$ 得出。

> ⓘ **Note**
>
> 其他范畴中刚才的断言未必成立。

箭头构成的集合

这里再给一个定义：

- $\mathsf{a} \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b} =$
  所有从 a 射向 b 的箭头构成的集。

> **Note**
>
> 上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
> 在其他范畴里 $\mathsf{a} \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}$ 未必构成集。

箭头的复合运算

范畴 $\mathcal{C}$ 中特定的箭头可以进行复合运算：

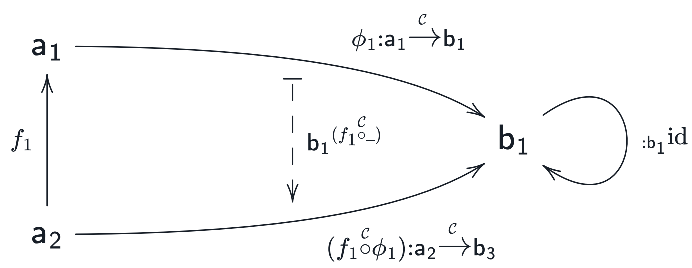
$$\begin{aligned} \overset{\mathcal{C}}{\circ} &: (\mathsf{a}_2 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{a}_1) \times (\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_1) \overset{\mathcal{S}et}{\longrightarrow} (\mathsf{a}_2 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_1) \\ \overset{\mathcal{C}}{\circ} &: (\quad f_1 \quad . \quad \phi_1 \quad) \longmapsto \quad f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1 \end{aligned}$$

若我们还知道箭头 f_1，ϕ_1，g_1 分别属于
$\mathsf{a}_2 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{a}_1$，$\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_1$，$\mathsf{b}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_2$ 那么便有

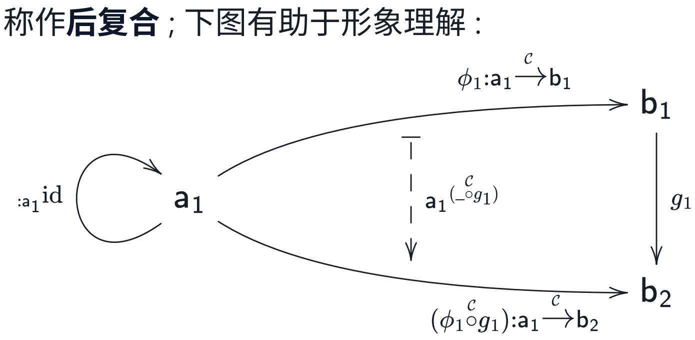
- $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1) \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1 = f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1)$
  说明箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便获可得新的函数：

- $\begin{aligned} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) &: (\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \_) \overset{\mathcal{C}\to\mathcal{S}et}{\longrightarrow} (\mathsf{a}_2 \overset{\mathcal{C}}{\to} \_) \\ (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) &: \quad \phi_1 \quad \longmapsto \quad f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1 \end{aligned}$
  称作**前复合**。下图有助于形象理解：



- $\begin{aligned} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) &: (\_ \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_1) \overset{\mathcal{C}\to\mathcal{S}et}{\longrightarrow} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_2) \\ (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) &: \quad \phi_1 \quad \longmapsto \quad \phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1 \end{aligned}$
  称作**后复合**；下图有助于形象理解：



根据上面的定义便不难得出下述结论

- $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) \overset{\mathcal{C}\to\mathcal{S}et}{\circ} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) = (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) \overset{\mathcal{C}\to\mathcal{S}et}{\circ} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)$
  复合运算具有**结合律**，即后面会提到的**自然性**；
- $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1) \overset{\mathcal{C}\to\mathcal{S}et}{\circ} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) = (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1))$
  前复合与复合运算的关系
- $(\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) \overset{\mathcal{C}\to\mathcal{S}et}{\circ} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) = ((f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1) \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)$
  后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。
假如 a_1 为 a_1 的全局元素则可规定

- $a_1 \phi_1 = a_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1$

恒等箭头

范畴 $\mathcal{C}$ 内的每个对象都有恒等映射：

- ${}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} : \mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{a}_1$
  ${}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} : a_1 \mapsto a_1$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- ${}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1 = \phi_1$
  $= \phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}$

此外还可以得知

- $({}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) : (\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \_) \xrightarrow{\mathcal{C} \to \mathcal{S}et} (\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \_)$
  为恒等自然变换，可以记作是 ${}_{:(\mathsf{a}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \_)}\mathrm{id}$；
- $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}) : (\_ \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_1) \xrightarrow{\mathcal{C} \to \mathcal{S}et} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_1)$
  为恒等自然变换，可以记作是 ${}_{:(\_ \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_1)}\mathrm{id}$；

单态

在范畴论里我们也可以定义单态：

- ϕ_1 为**单态**当且仅当对任意 a_2 若有 $f_1, f_1' : \mathsf{a}_2 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{a}_1$
  满足 $f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1 = f_1' \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1$ 则有 $f_1 = f_1'$。详情见下图：

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{a}_1 \arrow[drr, bend left, "\phi_1 : \mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{b}_1"] & {} \arrow[dd, dashed, mapsto, "\mathsf{b}_1^{(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)}"] & \\
& & \mathsf{b}_1 \arrow[loop right, "{}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}"] \\
\mathsf{a}_2 \arrow[uu, shift left, "f_1"] \arrow[uu, shift right, "f_1'"'] \arrow[urr, bend right, "(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1) : \mathsf{a}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{b}_3"'] & {} &
\end{tikzcd}$$

结合终对象的性质我们不难得知

- a_1 为单态 —— 由
  ! 的唯一性可得知。

满态

在范畴论里我们也可以定义满态；

- ϕ_1 为**满态**当且仅当对任意 b_2 若有 $g_1, g_1' : \mathsf{b}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{b}_2$
  满足 $\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1 = \phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1'$ 则有 $g_1 = g_1'$。详情见下图：

$$\begin{tikzcd}
& {} \arrow[dd, dashed, mapsto, "\mathsf{a}_1^{(_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1)}"] & \mathsf{b}_1 \arrow[dd, shift right, "g_1'"'] \arrow[dd, shift left, "g_1"] \\
\mathsf{a}_1 \arrow[loop left, "{}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id}"] \arrow[urr, bend left, "\phi_1 : \mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{b}_1"] \arrow[drr, bend right, "(\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) : \mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{b}_2"'] & & \\
& {} & \mathsf{b}_2
\end{tikzcd}$$

同构

在范畴论里我们也可以定义同构：

- ϕ_1 为**同构**当且仅当存在 $\psi_1 : \mathsf{b}_1 \overset{\mathcal{C}}{\to} \mathsf{a}_1$
  使 $\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \psi_1 = {}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id}$ 且 $\psi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1 = {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}$。

结合始终对象的性质便不难得知

- ${}_{:0}! = {}_{:1}¡$ 为同构 —— 这是因为
  $0 \overset{\mathcal{C}}{\to} 0 = \{{}_{:0}\mathrm{id}\}$，$1 \overset{\mathcal{C}}{\to} 1 = \{{}_{:1}\mathrm{id}\}$

同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释 。
后面会将自然性进行进一步推广 。

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[dr, dotted, "\downarrow\,(\_\overset{c}{\circ} g_1)"] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "\phi_2"'] & b_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "\phi_1"] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur, dotted, "(f_1\overset{c}{\circ}\_)\,\downarrow"] \arrow[r, "\phi_2"'] & b_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[dr, "(f_1\overset{c}{\circ}\_)\,\downarrow"'] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, dotted, "\phi_2"'] & b_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "\phi_1"] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur, dotted, "\downarrow\,(\_\overset{c}{\circ} g_1)"'] \arrow[r, "\phi_2"'] & b_2
\end{tikzcd}
$$

若提供自然变换 β 满足自然性 —— 即对任意
$\mathcal{C}$ 中对象 x_1 , x_2 及任意 $\mathcal{C}$ 中映射 $f_1 : x_2 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} x_1$
都会有 $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} b_1) \overset{\mathcal{S}et}{\circ} {x_2}^{\beta} = {x_1}^{\beta} \overset{\mathcal{S}et}{\circ} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} b_2)$
(即下图自西向南走向操作结果同自北向东) :

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[dr, dashed] & b_1 \arrow[d, phantom, "{x_1}^{\beta}"] \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "\phi_2"'] & b_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, phantom, "(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} b_1)"] & b_1 \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\phi_2"'] & b_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} b_2)"] & b_1 \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, dashed, "\phi_2"'] & b_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "\phi_1"] & b_1 \arrow[d, phantom, "{x_2}^{\beta}"] \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur] \arrow[r, dashed, "\phi_2"'] & b_2
\end{tikzcd}$$

那么我们便会有下述结论 :

- $b_1 \cong b_2$ 当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中对象 x
  x^{β} 都是同构 。此时称 β 为**自然同构** 。

若提供自然变换 α 满足自然性 —— 即对任意
$\mathcal{C}$ 中对象 x_1 , x_2 及任意 $\mathcal{C}$ 中映射 $g_1 : x_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} x_2$
都会有 $(a_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} g_1) \overset{\mathcal{S}et}{\circ} {x_2}^{\alpha} = {x_1}^{\alpha} \overset{\mathcal{S}et}{\circ} (a_2 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} g_1)$
(即下图自西向南走向操作结果同自北向东) :

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, phantom, "{x_1}^{\alpha}"] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\phi_2"'] & x_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[dr, dashed] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \arrow[d, phantom, "(a_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} g_1)"'] \\
a_2 \arrow[r, "\phi_2"'] & x_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "\phi_1"] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \arrow[d, phantom, "(a_2 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} g_1)"'] \\
a_2 \arrow[ur] \arrow[r, dashed, "\phi_2"'] & x_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "{x_2}^{\alpha}"] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[r, dashed, "\phi_2"'] & x_2
\end{tikzcd}$$

那么我们便会有下述结论 :

- $a_1 \cong a_2$ 当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中对象 x
  x^{α} 都是同构 。此时称 α 为**自然同构** 。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为

$\mathcal{S}et$

$$\begin{tikzcd} x_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1 \arrow[r, "x_1^\beta"] \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1"'] & x_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2 \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2"] \\ x_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1 \arrow[r, "x_2^\beta"'] & x_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2 \end{tikzcd}$$

$\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1$ $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧（考虑特殊情况）

$$\begin{tikzcd} b_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1 \arrow[r, "b_1^\beta"] \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1"'] & b_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2 \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2"] \\ x_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1 \arrow[r, "x_2^\beta"'] & x_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} :_{b_1}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "b_1^\beta"] \arrow[d, mapsto, "f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1"'] & :_{b_1}\mathrm{id}(b_1^\beta) \arrow[d, mapsto, "f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2"] \\ f_1 \arrow[r, mapsto, "x_2^\beta"'] & f_1 \circ (\mathrm{etc}) \end{tikzcd}$$

为了方便就用 (etc) 表示 $:_{b_1}\mathrm{id}(b_1^\beta)$。 由上图可知 $f_1(x_2^\beta) = f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\mathrm{etc})$，故 $x_2^\beta = x_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} (\mathrm{etc})$；而 $x_2^\beta = x_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} (\mathrm{etc}) = x_2^{(_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\mathrm{etc}))}$是同构，从而知 $((\mathrm{etc}) \circ \_)$ 是同构，$(\mathrm{etc}) : b_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2$ 也是。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在米田嵌入处会详细介绍。

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为

$\mathcal{S}et$

$$\begin{tikzcd} a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} x_1 \arrow[r, "x_1^\alpha"] \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1"'] & a_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} x_1 \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1"] \\ a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} x_2 \arrow[r, "x_2^\alpha"'] & a_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} x_2 \end{tikzcd}$$

$a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{C}$ $a_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{C}$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧（考虑特殊情况）

$$\begin{tikzcd} a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} a_1 \arrow[r, "x_1^\alpha"] \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1"'] & a_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} a_1 \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1"] \\ a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} x_2 \arrow[r, "x_2^\alpha"'] & a_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} x_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} :_{b_1}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "x_1^\alpha"] \arrow[d, mapsto, "a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1"'] & :_{a_1}\mathrm{id}(a_1^\alpha) \arrow[d, mapsto, "a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1"] \\ g_1 \arrow[r, mapsto, "x_2^\alpha"'] & (\mathrm{etc}) \circ g_1 \end{tikzcd}$$

为了方便就用 (etc) 表示 $:_{a_1}\mathrm{id}(a_1^\alpha)$。 由上图可知 $g_1(x_2^\alpha) = (\mathrm{etc}) \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1$，故 $x_2^\alpha = (\mathrm{etc}) \xrightarrow{\mathcal{C}} x_2$；而 $x_2^\alpha = (\mathrm{etc}) \xrightarrow{\mathcal{C}} x_2 = x_2^{((\mathrm{etc}) \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)}$是同构，从而知 $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\mathrm{etc}))$ 是同构，$(\mathrm{etc}) : a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} a_2$ 也是。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在米田嵌入处会详细介绍。