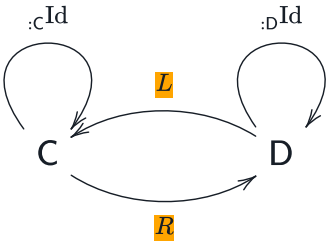


伴随函子的 unit 与 counit



伴随函子：对任意 c 和 d 有 $(d \xrightarrow{D} c \textcolor{brown}{R}) \cong^{\text{Set}} (\textcolor{brown}{d} \xrightarrow{L} c)$ 。如此

- 不难看出这其实蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_2 ，见下：

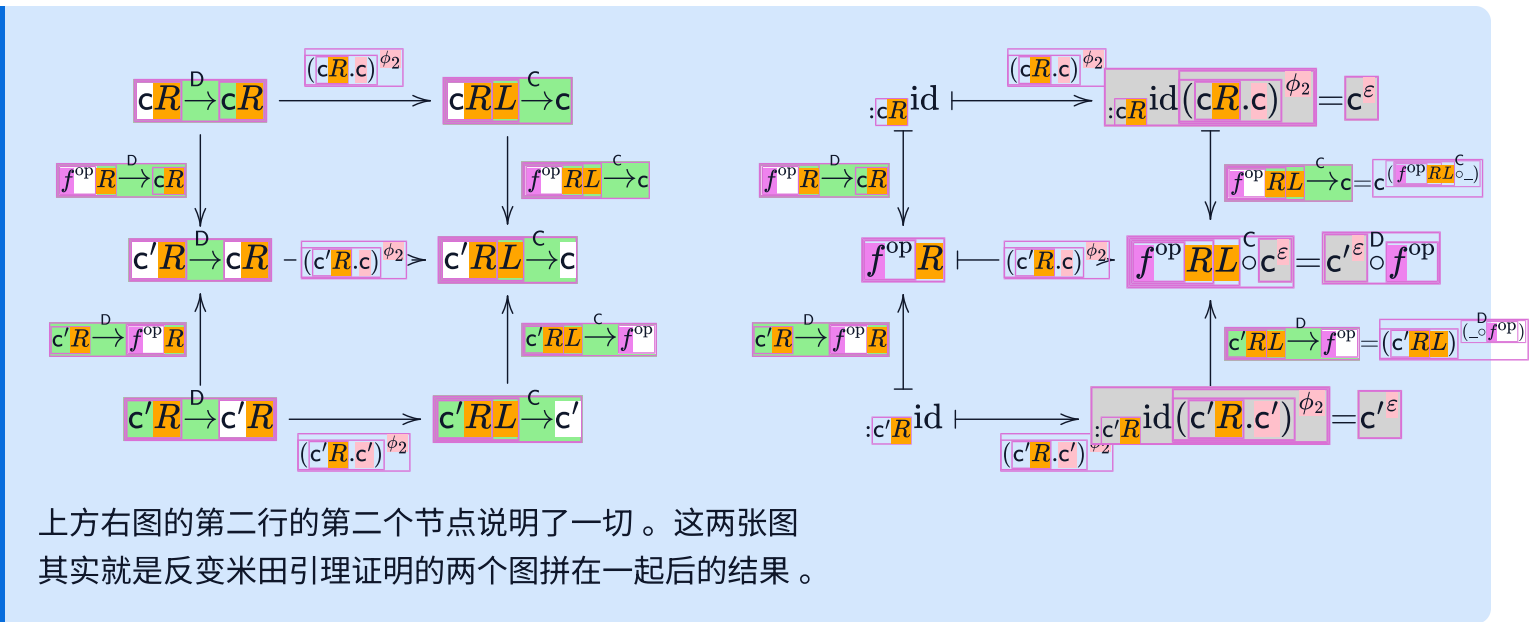
$$\begin{aligned}\phi_2 &: \left(_ \xrightarrow{D} _ \mathbf{R} \right) \xrightarrow{(\mathbf{D} \times \mathbf{C}) \xrightarrow{\text{Set}}} \left(_ \mathbf{L} \xrightarrow{C} _ \right) \\ (_ \cdot \mathbf{c})^{\phi_2} &: \left(_ \xrightarrow{D} \mathbf{cR} \right) \xrightarrow{D \xrightarrow{\text{Set}}} \left(_ \mathbf{L} \xrightarrow{C} \mathbf{c} \right) \\ (\mathbf{d} \cdot _)^{\phi_2} &: \left(\mathbf{d} \xrightarrow{D} _ \mathbf{R} \right) \xrightarrow{C \xrightarrow{\text{Set}}} \left(\mathbf{dL} \xrightarrow{C} _ \right)\end{aligned}$$

套用反变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{\left(_ \xrightarrow{D} \mathbf{cR} \right) \xrightarrow{D^{\text{op}} \xrightarrow{\text{Cat}}} \left(_ \mathbf{L} \xrightarrow{C} \mathbf{c} \right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\left(\mathbf{cRL} \xrightarrow{C} \mathbf{c} \right)}_{\text{一堆元素}}$$

由反变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(_ \cdot \mathbf{c})^{\phi_2}$ 右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 $:\mathbf{cR} \text{id}(\mathbf{cR} \cdot \mathbf{c})^{\phi_2} = \mathbf{c}^\varepsilon$ 。如此

- ε 构成自然变换。



- 不难看出这其实蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_1 ，见下：

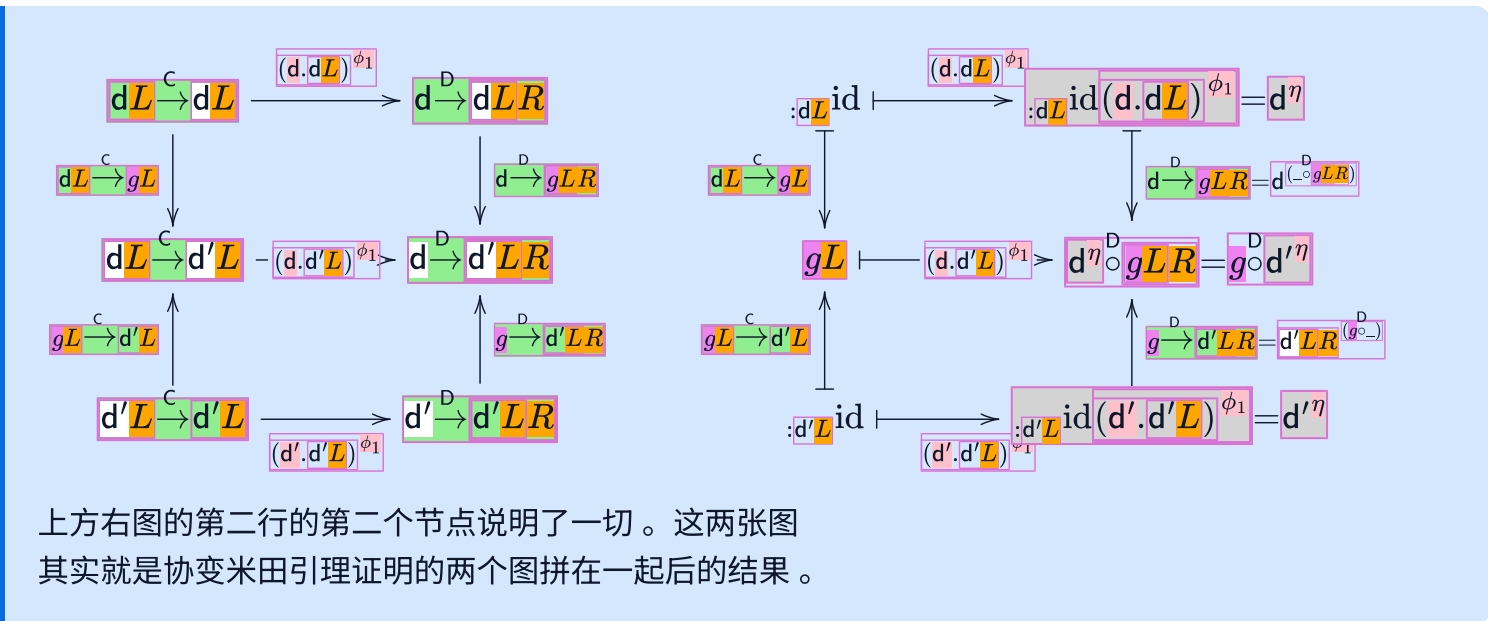
$$\begin{aligned}\phi_1 &: \left(_ \mathbf{L} \xrightarrow{C} _ \right) \xrightarrow{(\mathbf{D} \times \mathbf{C}) \xrightarrow{\text{Set}}} \left(_ \xrightarrow{D} _ \mathbf{R} \right) \\ (_ \cdot \mathbf{c})^{\phi_1} &: \left(_ \mathbf{L} \xrightarrow{C} \mathbf{c} \right) \xrightarrow{D \xrightarrow{\text{Set}}} \left(_ \xrightarrow{D} \mathbf{cR} \right) \\ (\mathbf{d} \cdot _)^{\phi_1} &: \left(\mathbf{dL} \xrightarrow{C} _ \right) \xrightarrow{C \xrightarrow{\text{Set}}} \left(\mathbf{d} \xrightarrow{D} _ \mathbf{R} \right)\end{aligned}$$

套用协变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{\left(\left(\mathbf{dL} \xrightarrow{C} _ \right) \right) \xrightarrow{C^{\text{Cat}} \xrightarrow{\text{Set}}} \left(\mathbf{d} \xrightarrow{D} _ \mathbf{R} \right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\left(\mathbf{d} \xrightarrow{D} \mathbf{dLR} \right)}_{\text{一堆元素}}$$

由协变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(\mathbf{d} \cdot _)^{\phi_1}$ 右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 $:\mathbf{dL} \text{id}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{dL})^{\phi_1} = \mathbf{d}^\eta$ 。如此。

- η 构成自然变换。



同样，给定自然同构 ε, η ，我们也可以推出自然同构 ϕ_2 和 ϕ_1 。