04-05 极限与余极限

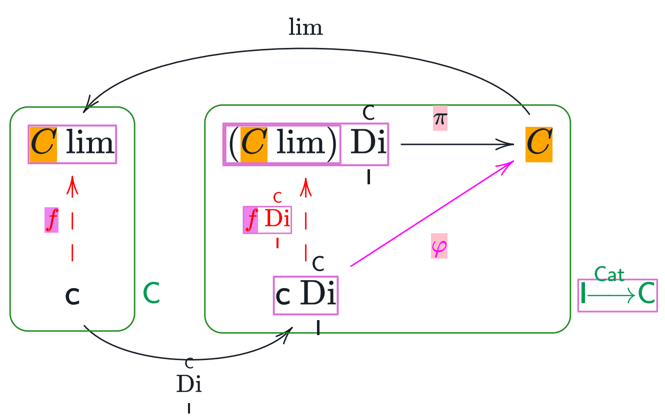
$\LaTeX$ Definitions are here.

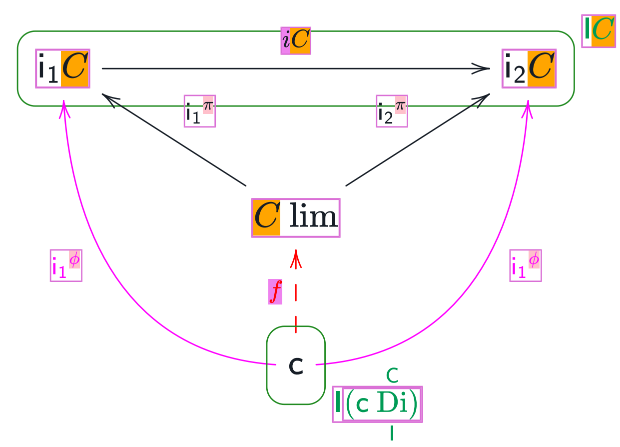
若提供函子 $C : \mathsf{I} \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{C}$, 其中的 I 为小范畴 (
即 $\mathsf{I}\ \mathrm{Obj}$ 能与 Set 中某个对象建立双射) 则

泛性质

默认函子 $\lim : (\mathsf{I} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}) \xrightarrow{??} \mathsf{C}$ 在范畴 C 中有如下性质 :

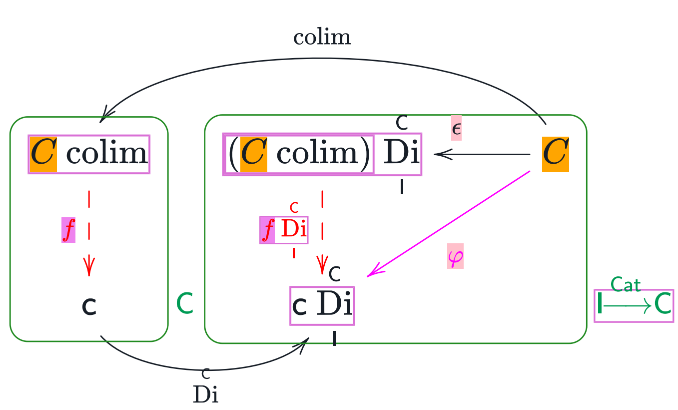
- $(c\,\mathrm{Di}^{\mathsf{C}}_{\mathsf{I}} \xrightarrow{\mathsf{I} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}} C) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (c \xrightarrow{\mathsf{C}} C\,\lim)$
  —— i 为 I 中任意对象 。此即为
  极限的**泛性质** 。

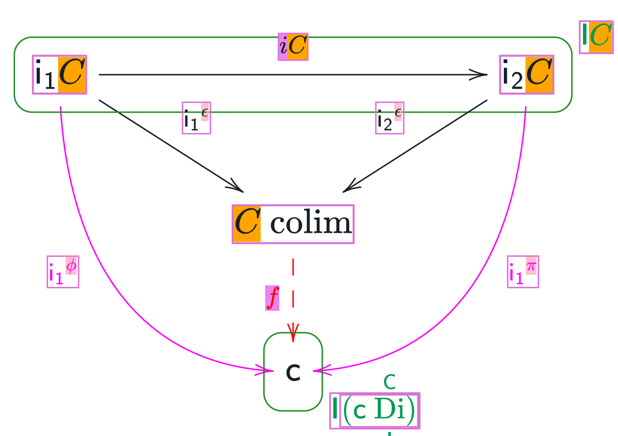




默认函子 $\mathrm{colim} : (\mathsf{I} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}) \xrightarrow{??} \mathsf{C}$ 在范畴 C 中有如下性质 :

- $(C \xrightarrow{\mathsf{I} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}} c\,\mathrm{Di}^{\mathsf{C}}_{\mathsf{I}}) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (C\,\mathrm{colim} \xrightarrow{\mathsf{C}} c)$
  —— i 为 I 中任意对象 。此即为
  余极限的**泛性质** 。





Note

在上面的插图中

- $\mathrm{Di}^{\mathsf{C}}_{\mathsf{I}} : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \overbrace{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathrm{etc} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C}}^{\mathsf{I}\text{个}}$ 为对角函子满足
  $c \longmapsto c \overset{\mathsf{Cat}}{\times} c \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathrm{etc} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} c$
- $\mathrm{Di}^{\mathsf{C}}_{\mathsf{I}} : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{I} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C})$
  $c \longmapsto$ 常值函子
  $c\,\mathrm{Di}^{\mathsf{C}}_{\mathsf{I}} : \mathsf{I} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}$
  $i \longmapsto c$
  $f \longmapsto {}_{:c}\mathrm{id}$
  即为对角函子的第二种等价的定义 。
  I 为仅含两个对象的范畴 , 在此则
  作为一个指标范畴 。1 和 2 分别为
  其中的对象 。
- $C : \mathsf{I} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}$ 为函子 , 满足
  $i \longmapsto c_i$
- 不难看出上图中
  $\pi : (C\,\lim)\,\mathrm{Di}^{\mathsf{C}}_{\mathsf{I}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} C$
  $\epsilon : C \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (C\,\mathrm{colim})\,\mathrm{Di}^{\mathsf{C}}_{\mathsf{I}}$
  都构成自然变换 。$1^{\pi} . 2^{\pi}$ 和 $1^{\epsilon} . 2^{\epsilon}$ 可分别视作是 π 和 ϵ 。