08-09 函子和自然变换

LaTeX Definitions are here.

一些特殊的范畴

现在规定几种特殊的范畴。

- **离散范畴**：只有对象不含箭头（恒等箭头除外）的范畴。
- Set：**所有集合构成的范畴**，为局部小范畴，满足
    - Set 中对象为任意集合；
    - Set 中箭头为集合间映射。
- Cat：**所有范畴构成的范畴**，满足
    - Cat 中任何对象都构成一个范畴；
    - Cat 中任何箭头都构成一个函子。

若 C，D 为 Cat 中对象，则：

- $\boxed{C^{\mathrm{op}}}$：**反范畴**，满足
    - $\boxed{C^{\mathrm{op}}}$ 中对象皆形如 c，
      c 为任意 C 中的对象；
    - $\boxed{C^{\mathrm{op}}}$ 中箭头皆形如 $\boxed{i^{\mathrm{op}}} : \boxed{c_2 \xrightarrow{\boxed{C^{\mathrm{op}}}} c_1}$，
      $i : \boxed{c_1 \xrightarrow{C} c_2}$ 可为任意 C 中的箭头。
- $\boxed{C \overset{\mathrm{Cat}}{\times} D}$：**积范畴**，满足
    - $\boxed{C \overset{\mathrm{Cat}}{\times} D}$ 中对象皆形如 $\boxed{c\ .\ d}$，
      c，d 分别为任意 C，D 中的对象；
    - $\boxed{C \overset{\mathrm{Cat}}{\times} D}$ 中箭头皆形如 $\boxed{i\ .\ j}$，
      i，j 分别为任意 C，D 中的箭头。
- $\boxed{C \xrightarrow{\mathrm{Cat}} D}$：**所有 C 到 D 的函子的范畴**，满足
    - $\boxed{C \xrightarrow{\mathrm{Cat}} D}$ 中任何对象
      都是 C 到 D 的函子；
    - $\boxed{C \xrightarrow{\mathrm{Cat}} D}$ 中任何箭头
      都是函子间自然变换。
- C/c：**俯范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
    - C/c_2 中对象皆形如 $\boxed{\cancel{\boxed{c\ .\ 1}\ .}\ \boxed{i}}$，其中 c 和
      $i : \boxed{c \xrightarrow{C} c_2}$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
    - c_2/C 中箭头皆形如 $\boxed{f}\ \cancel{\boxed{:_{c_2}\mathrm{id}}}$ 且满足下述交换图，其中
      c，c′ 为 C 中任意对象且 f，i，i' 为 C 中任意箭头；

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & c_2 \arrow[d, ":_{c_2}\mathrm{id}"] \\
c' \arrow[r, "i'"'] & c_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c :_C \mathrm{Id} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f :_C \mathrm{Id}"'] & 1 (c_2 \overset{C}{\underset{①}{\mathrm{Di}}}) \arrow[d, ":_1 \mathrm{id} (c_2 \overset{C}{\underset{①}{\mathrm{Di}}})"] \\
c' :_C \mathrm{Id} \arrow[r, "i'"'] & 1 (c_2 \overset{C}{\underset{①}{\mathrm{Di}}})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C & \\
C \arrow[ur, ":_C \mathrm{Id}"] & & ① \arrow[ul, "(c_2 \overset{C}{\underset{②}{\mathrm{Di}}})"']
\end{tikzcd}$$

C　①$(c_2 \overset{C}{\underset{①}{\mathrm{Di}}})$　　C $:_C\mathrm{Id}$　①$(c_2 \overset{C}{\underset{①}{\mathrm{Di}}})$

- c_1/C：**仰范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
    - c_1/C 中对象皆形如 $\boxed{\cancel{\boxed{1\ .\ c}\ .}\ \boxed{i}}$，其中 c 和
      $i : \boxed{c_1 \xrightarrow{C} c}$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
    - C/c_1 中箭头皆形如 $\cancel{\boxed{:_{c_1}\mathrm{id}\ .}}\ \boxed{f}$ 且满足下述交换图，其中
      c，c′ 为 C 中任意对象且 f，i，i' 为 C 中任意箭头；

$$\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[r, "i"] & c \\
c_1 \arrow[u, ":_{c_1}\mathrm{id}"] \arrow[r, "i'"'] & c' \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 (c_1 \overset{C}{\underset{①}{\mathrm{Di}}}) \arrow[r, "i"] & c :_C \mathrm{Id} \\
1 (c_1 \overset{C}{\underset{①}{\mathrm{Di}}}) \arrow[u, ":_1 \mathrm{id} (c_1 \overset{C}{\underset{①}{\mathrm{Di}}})"] \arrow[r, "i'"'] & c' :_C \mathrm{Id} \arrow[u, "f :_C \mathrm{Id}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C & \\
① \arrow[ur, "(c_1 \overset{C}{\underset{①}{\mathrm{Di}}})"] & & C \arrow[ul, ":_C \mathrm{Id}"']
\end{tikzcd}$$

①$(c_1 \overset{C}{\underset{①}{\mathrm{Di}}})$　C　　①$(c_1 \overset{C}{\underset{①}{\mathrm{Di}}})$　C $:_C\mathrm{Id}$

函子

接下来我们来提供函子的正式定义：

- $F : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为**函子**当且仅当
  - 对任意 C 中对象 c，$\mathsf{c}F$ 为
    D 中对象且 ${}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}F = {}_{:\mathsf{c}F}\mathrm{id}$；
  - 对任意 C 中箭头 $i_1 : \mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 和 $i_2 : \mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_3$，
    始终都有等式 $(i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2)F = i_1F \overset{\mathsf{D}}{\circ} i_2F$ 成立。

若已确信 $F : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为函子且
还知 C 中有对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$
以及 C 中有箭头 $i : \mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 则

- 若 i 为单态 / 满态 / 同构
  则 iF 为单态 / 满态 / 同构；
- 若 iF 为同构
  则 i 为同构。

> ⓘ **Note**
>
> 不难发现函子具有保持
> 对象 / 态射性质的能力。

函子的复合运算

若还知道 $G : \mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$ 为函子则

- $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$
  也构成一个函子。

恒等函子

对于函子我们也有恒等映射，即：

- $${}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id} \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} F = F = F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id}$$

忠实，完全和本质满函子

若 C，D，E 皆为**局部小范畴**，则

- F 是**忠实的**当且仅当对任意 C 中的对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$，
  $\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 与 $\mathsf{c}_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}_2F$ 之间始终都存在单射；
- F 是**完全的**当且仅当对任意 C 中的对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$，
  $\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 与 $\mathsf{c}_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}_2F$ 之间始终都存在满射；
- F 是**完全忠实的**当且仅当任意 C 中对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$，
  $\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 与 $\mathsf{c}_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}_2F$ 之间始终都存在双射。

> ⓘ **Note**
>
> 刚才提到的“单 / 满 / 双射”
> 针对的都是范畴的箭头部分。

- F 是**本质满的**当且仅当对任意 D 中对象 d
  都存在 C 中对象 c 使 $\mathsf{c}F \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{d}$ 之间有双射。

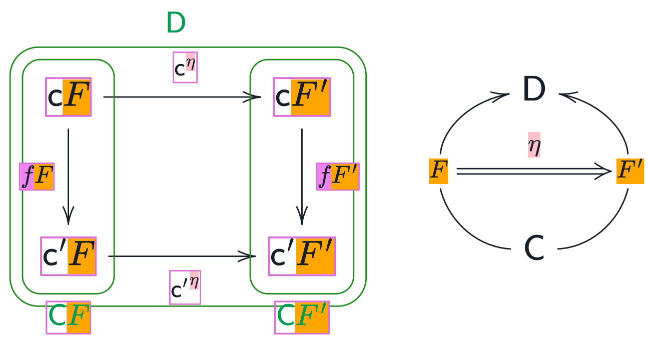
根据刚才的信息我们不难得知

- 若 F，G 为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满函子
  则 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满 函子；
- 若 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为完全忠实函子
  且知道 G 为完全忠实函子
  则可知 F 为完全忠实函子；

自然变换

如果还知道 F' : $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{D}$ 为函子，那么

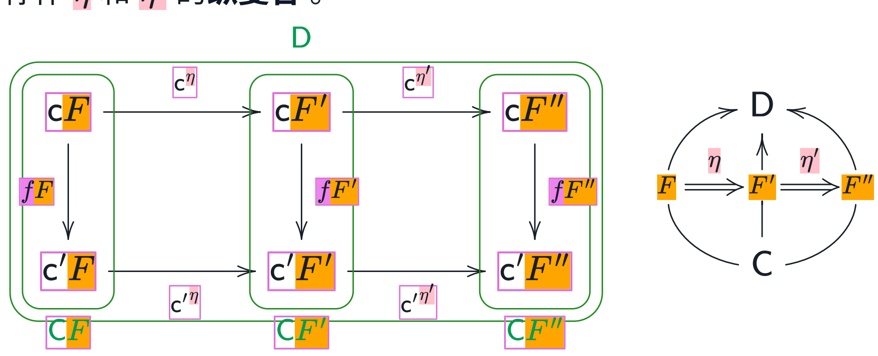
- $\eta : F \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{D}} F'$ 为自然变换当且仅当对任意 C 中对象 c，c′ 始终都会有下述交换图成立：



自然变换的复合

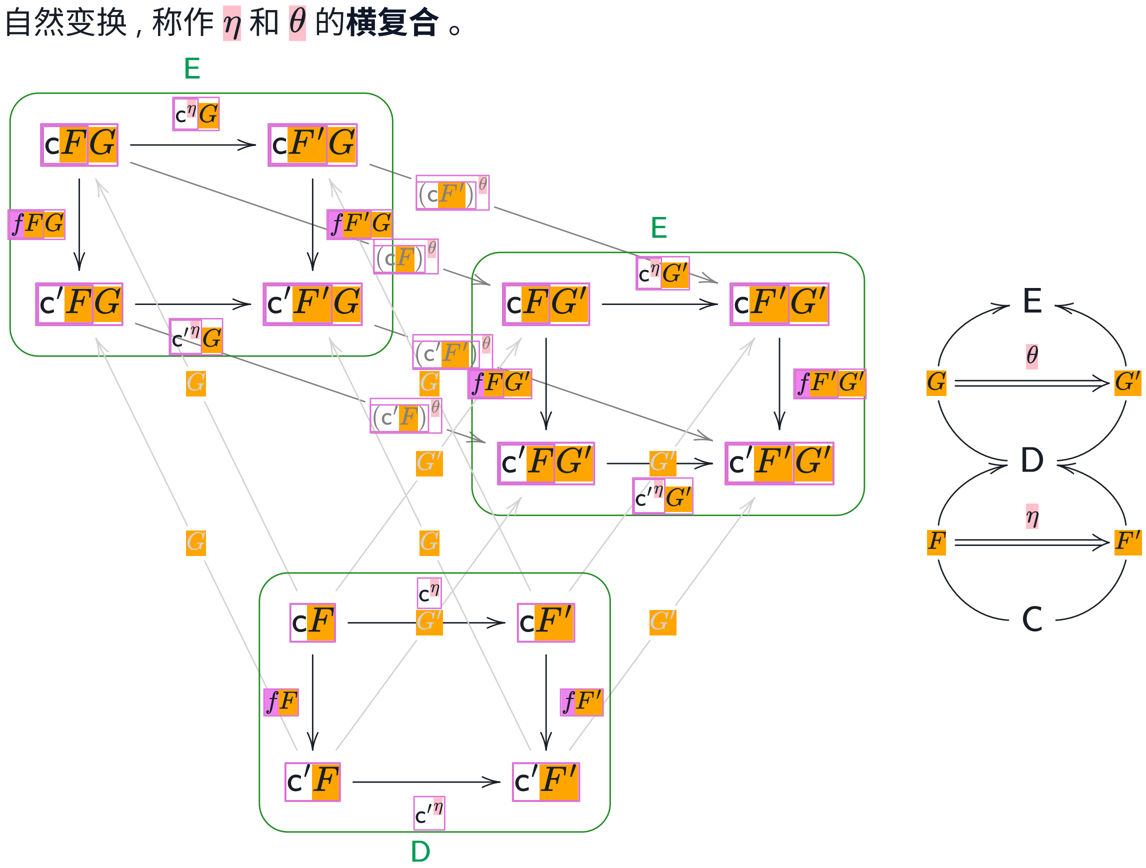
若已知 $\eta : F \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{D}} F'$ 构成自然变换且
还知道 $\eta' : F' \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{D}} F''$ 为自然变换则

- $\eta \overset{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{D}}{\circ} \eta' : F \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{D}} F''$ 为自然变换，称作 η 和 η' 的**纵复合**。



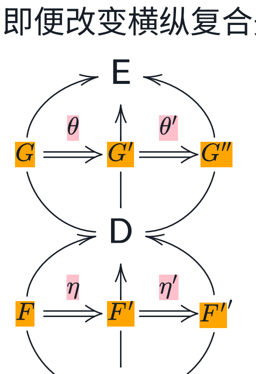
如果还知道 G' : $\mathsf{D} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{E}$ 也是个函子
及自然变换 $\theta : G \xrightarrow{\mathsf{D} \overset{\mathsf{Cat}}{\Longrightarrow} \mathsf{E}} G'$ 那么便有

- $\eta \circ \theta : F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{E}} F' \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G'$ 为自然变换，称作 η 和 θ 的**横复合**。



若 $\theta' : G \xrightarrow{\mathsf{D} \overset{\mathsf{Cat}}{\Longrightarrow} \mathsf{E}} G'$ 为自然变换则

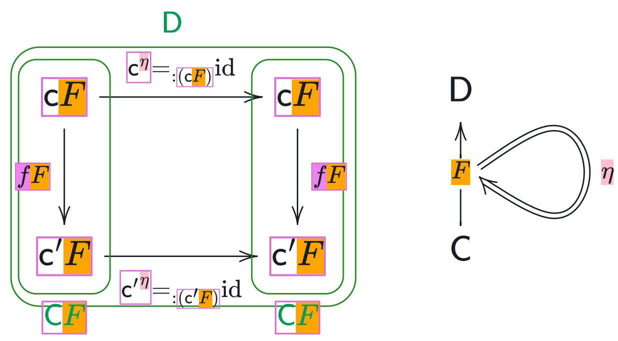
- $(\eta \circ \theta) \overset{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{E}}{\circ} (\eta' \circ \theta') = (\eta \overset{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{D}}{\circ} \eta') \circ (\theta \overset{\mathsf{D} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{E}}{\circ} \theta')$，即便改变横纵复合先后顺序也不影响最终结果。



恒等自然变换

同样对于自然变换也有恒等映射。

- ${}_{:F}\iota : F \xrightarrow{\mathrm{C} \xrightarrow{\mathrm{Cat}} \mathrm{D}} F$ 为恒等自然变换当且仅当
  对范畴 C 中任意对象 c 都有下述交换图成立：



自然同构

自然同构与你想象中的同构不太像。

- $\eta : F \xrightarrow{\mathrm{C} \xrightarrow{\mathrm{Cat}} \mathrm{D}} F'$ 为**自然同构**当且仅当
  c^{η} 总是同构，这里 c 为任意 C 中对象。

  此时 F，F' 的关系可用 $F \underset{\mathrm{C} \xrightarrow{\mathrm{Cat}} \mathrm{D}}{\cong} F'$ 表示

范畴等价的定义

我们用自然同构来定义范畴的等价。

- $\mathrm{C} \overset{\mathrm{Cat}}{\cong} \mathrm{D}$ 当且仅当
  存在函子 $F : \mathrm{C} \xrightarrow{\mathrm{Cat}} \mathrm{D}$ 及 $F' : \mathrm{D} \xrightarrow{\mathrm{Cat}} \mathrm{C}$
  使 $F \overset{\mathrm{Cat}}{\circ} F' \underset{\mathrm{C} \xrightarrow{\mathrm{Cat}} \mathrm{C}}{\cong} {}_{:\mathrm{C}}\mathrm{id}$ 并且有 $F' \overset{\mathrm{Cat}}{\circ} F \underset{\mathrm{D} \xrightarrow{\mathrm{Cat}} \mathrm{D}}{\cong} {}_{:\mathrm{D}}\mathrm{id}$。

米田引理

假如知道 $F : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{Set}$ 则

反变米田引理的陈述如下：

- $\underbrace{((\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2) \xrightarrow{\mathsf{C}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{Set}} F)}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(c_2 F)}_{\text{一堆元素}}$

反变米田引理的证明如下：

1. $\Leftarrow$: 考虑任意 $(c_2 F)$ 中的 etc : 根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图
   我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_2}，于是便可构建一个完整的 η_2 。
   易知 η_2 是一个自然变换 。

Set

$$\begin{tikzcd}
c \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2"'] & cF \arrow[d, "fF"] \\
c' \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c'F
\end{tikzcd}$$

$\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2$ $\quad$ $\mathsf{C}F$

2. $\Rightarrow$: 考虑任意等式左侧的 η_1 : 若上述交换图成立
   则可对任意 η_1 指派 $\mathrm{etc} = {:_{c_1}}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 为 $c_2 F$ 中与之对应的元素；

$$\begin{tikzcd}
c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2"'] & c_2 F \arrow[d, "fF"] \\
c' \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c'F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{:_{c_2}}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2"'] & {:_{c_2}}\mathrm{id}(c^{\eta_2}) \arrow[d, "fF"] \\
f \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & \mathrm{etc}(fF)
\end{tikzcd}$$

为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
c_2 唯一地确定了 η_2，反之 η_2 也唯一确定了 c_2 。

协变米田引理的陈述如下：

- $\underbrace{((c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{Set}} F)}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(c_1 F)}_{\text{一堆元素}}$

协变米田引理的证明如下：

1. $\Leftarrow$: 考虑任意 $(c_1 F)$ 中的 etc : 根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图
   我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_1}，于是便可构建一个完整的 η_1 。
   易知 η_1 是一个自然变换 。

Set

$$\begin{tikzcd}
c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} f"'] & cF \arrow[d, "fF"] \\
c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c'F
\end{tikzcd}$$

$c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{C}$ $\quad$ $\mathsf{C}F$

2. $\Rightarrow$: 考虑任意等式左侧的 η_1 : 若上述交换图成立
   则可对任意 η_1 指派 $\mathrm{etc} = {:_{c_1}}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 为 $c_1 F$ 中与之对应的元素；

$$\begin{tikzcd}
c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_1 \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} f"'] & c_1 F \arrow[d, "fF"] \\
c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c'F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{:_{c_1}}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} f"'] & {:_{c_1}}\mathrm{id}(c^{\eta_1}) \arrow[d, "fF"] \\
f \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & \mathrm{etc}(fF)
\end{tikzcd}$$

为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
c_1 唯一地确定了 η_1，反之 η_1 也唯一确定了 c_1 。

米田嵌入

根据前面的内容我们可知

- $よ : \boxed{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \boxed{(\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})}}$
  $\mathsf{c}_2 \longmapsto \boxed{(\mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_)} = \boxed{(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2)}$ 构成一个函子，称作预层
  $f_2 \longmapsto \boxed{(f_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_)} = \boxed{(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2)} = \boxed{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)}$ 构成一个函子间映射，即自然变换
  构成一个完全忠实函子，该函子称作是**米田嵌入**。

证明如下：

- よ 是函子，因为
  - $\boxed{:_{\mathsf{c}_2}\mathrm{id}よ} = \boxed{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} :_{\mathsf{c}_2}\mathrm{id})} = :_{\boxed{(\mathsf{c}_2よ)}}\mathrm{id}$
  - $\boxed{(f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')よ} = \boxed{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2'))} = \boxed{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')}$,

  由于函子具有保持对象 / 映射性质的能力，
  故便可知 $\boxed{f_2よ}$ 为同构当且仅当 f_2 为同构。
- よ 是完全忠实的，因为
  将协变米田引理中的 c_1 / C / F
  分别换成 c_2 / $\boxed{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$ / $(\mathsf{c}_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_)$
  即可获得下述公式：

$$\underbrace{\left((\mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (\mathsf{c}_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_)\right)}_{\text{预层范畴的 hom-set}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}_2)}_{\text{C 的 hom-set}}$$

  也就是

$$\underbrace{\left((\mathsf{c}_2よ) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (\mathsf{c}_2'よ)\right)}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}_2(\mathsf{c}_2'よ))}_{\text{一堆元素}}$$

> ⓘ **Note**
>
> 由于函子能够保持态射的性质，
> 对任意左侧集合中的自然同构
> 右侧集合也会有同构与之对应。
> 这也就证明了前面自然同构相关定理省略的部分。

根据前面的内容我们可知

- $尤 : \boxed{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \boxed{(\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})}}$
  $\mathsf{c}_1 \longmapsto \boxed{(\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)}$ 构成一个函子
  $f_1 \longmapsto \boxed{(f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)} = \boxed{(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}$ 构成一个函子间映射，即自然变换
  构成一个完全忠实函子，该函子称作是**尤达嵌入**。

证明如下：

- 尤 是函子，因为
  - $\boxed{:_{\mathsf{c}_1}\mathrm{id}尤} = \boxed{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} :_{\mathsf{c}_1}\mathrm{id})} = :_{\boxed{(\mathsf{c}_1尤)}}\mathrm{id}$
  - $\boxed{(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1')尤} = \boxed{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1'))} = \boxed{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1')}$,
- 尤 是完全且忠实的，因为
  将协变米田引理中的 F
  换成 $(\mathsf{c}_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$
  即可获得下述公式：

$$\underbrace{\left((\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (\mathsf{c}_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)\right)}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_1)}_{\text{一堆元素}}$$

  也就是

$$\underbrace{\left((\mathsf{c}_1尤) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (\mathsf{c}_1'尤)\right)}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}_1(\mathsf{c}_1'尤))}_{\text{一堆元素}}$$

> ⓘ **Note**
>
> 由于函子能够保持态射的性质，
> 对任意左侧集合中的自然同构
> 右侧集合也会有同构与之对应。
> 这也就证明了前面自然同构相关定理省略的部分。