LaTeX Definitions are here.

伴随函子的 unit 与 counit

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[loop above, "{}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id}"] \arrow[rr, bend right, "R"'] & & \mathsf{D} \arrow[loop above, "{}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id}"] \arrow[ll, bend right, "L"']
\end{tikzcd}$$

伴随函子 : 对任意 c 和 d 有 $(\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c})$ 。如此

- 不难看出这其实蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_2，见下：

$$\begin{aligned}
\phi_2 &: (_ \overset{\mathsf{D}}{\to} _R) \xrightarrow{(\mathsf{D}\times\mathsf{C})\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{Set}} (_L \overset{\mathsf{C}}{\to} _) \\
(_\,.\,\mathsf{c})^{\phi_2} &: (_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R) \xrightarrow{\mathsf{D}\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{Set}} (_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \\
(\mathsf{d}\,.\,_)^{\phi_2} &: (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} _R) \xrightarrow{\mathsf{C}\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{Set}} (\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} _)
\end{aligned}$$

套用反变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{(\_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R \xrightarrow{\mathsf{D}^{\mathrm{op}}\overset{\mathsf{Cat}}{\to}\mathsf{Set}} (\_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}RL \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c})}_{\text{一堆元素}}$$

由反变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(\_\,.\,\mathsf{c})^{\phi_2}$
右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 $:_{\mathsf{c}R}\mathrm{id}(\mathsf{c}R\,.\,\mathsf{c})^{\phi_2} = \mathsf{c}^{\varepsilon}$ 。如此

- ε 构成自然变换。

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{c}R \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R \arrow[r, "(\mathsf{c}R.\mathsf{c})^{\phi_2}"] \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}R \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R"'] & \mathsf{c}RL \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c} \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}RL \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}"] \\
\mathsf{c}'R \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R \arrow[r, dashed, "(\mathsf{c}'R.\mathsf{c})^{\phi_2}"] & \mathsf{c}'RL \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c} \\
\mathsf{c}'R \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}'R \arrow[r, "(\mathsf{c}'R.\mathsf{c}')^{\phi_2}"'] \arrow[u, "\mathsf{c}'R \overset{\mathsf{D}}{\to} f^{\mathrm{op}}R"] & \mathsf{c}'RL \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}' \arrow[u, "\mathsf{c}'RL \overset{\mathsf{C}}{\to} f^{\mathrm{op}}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
:_{\mathsf{c}R}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{c}R.\mathsf{c})^{\phi_2}"] \arrow[d, mapsto, "f^{\mathrm{op}}R \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R"'] & :_{\mathsf{c}R}\mathrm{id}(\mathsf{c}R.\mathsf{c})^{\phi_2} = \mathsf{c}^{\varepsilon} \arrow[d, mapsto, "f^{\mathrm{op}}RL \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c} = \mathsf{c}^{(f^{\mathrm{op}}RL \overset{\mathsf{C}}{\circ} _)}"] \\
f^{\mathrm{op}}R \arrow[r, mapsto, dashed, "(\mathsf{c}'R.\mathsf{c})^{\phi_2}"] & f^{\mathrm{op}}RL \overset{\mathsf{C}}{\circ} \mathsf{c}^{\varepsilon} = \mathsf{c}'^{\varepsilon} \overset{\mathsf{D}}{\circ} f^{\mathrm{op}} \\
:_{\mathsf{c}'R}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{c}'R.\mathsf{c}')^{\phi_2}"'] \arrow[u, mapsto, "\mathsf{c}'R \overset{\mathsf{D}}{\to} f^{\mathrm{op}}R"] & :_{\mathsf{c}'R}\mathrm{id}(\mathsf{c}'R.\mathsf{c}')^{\phi_2} = \mathsf{c}'^{\varepsilon} \arrow[u, mapsto, "\mathsf{c}'RL \overset{\mathsf{D}}{\to} f^{\mathrm{op}} = (\mathsf{c}'RL)^{(_ \overset{\mathsf{D}}{\circ} f^{\mathrm{op}})}"']
\end{tikzcd}$$

> 上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图
> 其实就是反变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

- 不难看出这其实蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_1，见下：

$$\begin{aligned}
\phi_1 &: (_L \overset{\mathsf{C}}{\to} _) \xrightarrow{(\mathsf{D}\times\mathsf{C})\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{Set}} (_ \overset{\mathsf{D}}{\to} _R) \\
(_\,.\,\mathsf{c})^{\phi_1} &: (_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{c}) \xrightarrow{\mathsf{D}\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{Set}} (_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{c}R) \\
(\mathsf{d}\,.\,_)^{\phi_1} &: (\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} _) \xrightarrow{\mathsf{C}\overset{\mathsf{C}}{\to}\mathsf{Set}} (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} _R)
\end{aligned}$$

套用协变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{((\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) \xrightarrow{\mathsf{C}\overset{\mathsf{Cat}}{\to}\mathsf{Set}} (\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \_R))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{d}LR)}_{\text{一堆元素}}$$

由协变米田引理的证明可知：对每个左侧集合中的自然同构 $(\mathsf{d}\,.\,\_)^{\phi_1}$
右侧集合中都有一个箭头与之对应，即 $:_{\mathsf{d}L}\mathrm{id}(\mathsf{d}\,.\,\mathsf{d}L)^{\phi_1} = \mathsf{d}^{\eta}$ 。如此。

- η 构成自然变换。

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{d}L \arrow[r, "(\mathsf{d}.\mathsf{d}L)^{\phi_1}"] \arrow[d, "\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} gL"'] & \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{d}LR \arrow[d, "\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} gLR"] \\
\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{d}'L \arrow[r, dashed, "(\mathsf{d}.\mathsf{d}'L)^{\phi_1}"] & \mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{d}'LR \\
\mathsf{d}'L \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{d}'L \arrow[r, "(\mathsf{d}'.\mathsf{d}'L)^{\phi_1}"'] \arrow[u, "gL \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{d}'L"] & \mathsf{d}' \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{d}'LR \arrow[u, "g \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{d}'LR"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
:_{\mathsf{d}L}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{d}.\mathsf{d}L)^{\phi_1}"] \arrow[d, mapsto, "\mathsf{d}L \overset{\mathsf{C}}{\to} gL"'] & :_{\mathsf{d}L}\mathrm{id}(\mathsf{d}.\mathsf{d}L)^{\phi_1} = \mathsf{d}^{\eta} \arrow[d, mapsto, "\mathsf{d} \overset{\mathsf{D}}{\to} gLR = \mathsf{d}^{(_ \overset{\mathsf{D}}{\circ} gLR)}"] \\
gL \arrow[r, mapsto, dashed, "(\mathsf{d}.\mathsf{d}'L)^{\phi_1}"] & \mathsf{d}^{\eta} \overset{\mathsf{D}}{\circ} gLR = g \overset{\mathsf{D}}{\circ} \mathsf{d}'^{\eta} \\
:_{\mathsf{d}'L}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{d}'.\mathsf{d}'L)^{\phi_1}"'] \arrow[u, mapsto, "gL \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{d}'L"] & :_{\mathsf{d}'L}\mathrm{id}(\mathsf{d}'.\mathsf{d}'L)^{\phi_1} = \mathsf{d}'^{\eta} \arrow[u, mapsto, "g \overset{\mathsf{D}}{\to} \mathsf{d}'LR = \mathsf{d}'LR^{(g \overset{\mathsf{D}}{\circ} _)}"']
\end{tikzcd}$$

> 上方右图的第二行的第二个节点说明了一切。这两张图
> 其实就是协变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果。

同样，给定自然同构 ε，η，我们也可以推出自然同构 ϕ_2 和 ϕ_1。