LaTeX Definitions are here.

伴随函子的 unit 与 counit

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[loop above, ":_{\mathsf{C}}\mathrm{Id}"] \arrow[rr, bend right, "R"'] & & \mathsf{D} \arrow[loop above, ":_{\mathsf{D}}\mathrm{Id}"] \arrow[ll, bend right, "L"']
\end{tikzcd}
$$

伴随函子 : 对任意 c 和 d 有 $(\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c})$ 。如此

不难看出这其实蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_2 , 见下 :

$$
\begin{aligned}
\phi_2 &: (\_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \_R) \xrightarrow{\overset{\mathsf{C}}{(\mathsf{D}\times\mathsf{C})} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{Set}} (\_L \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \\
(\_ \,.\, \mathsf{c})^{\phi_2} &: (\_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R) \xrightarrow{\mathsf{D} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{Set}} (\_L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}) \\
(\mathsf{d} \,.\, \_)^{\phi_2} &: (\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \_R) \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{Set}} (\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)
\end{aligned}
$$

套用反变米田引理我们便可获得

$$
\underbrace{(\_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{D}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}}} (\_L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}RL \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c})}_{\text{一堆元素}}
$$

由反变米田引理的证明可知 : 对每个左侧集合中的自然同构 $(\_ \,.\, \mathsf{c})^{\phi_2}$
都会有一个右侧集合中的箭头与之相对应 , 即 $:_{\mathsf{c}R}\mathrm{id}(\mathsf{c}R \,.\, \mathsf{c})^{\phi_2} = \mathsf{c}^{\varepsilon}$ 。
为何 ε 构成自然变换呢 ? 下方右图第二行的第二个节点说明了一切 。
这两张图这其实就是反变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果 。

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{c}R \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R \arrow[r, "(\mathsf{c}R.\mathsf{c})^{\phi_2}"] \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}R \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R"'] & \mathsf{c}RL \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c} \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}RL \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}"] \\
\mathsf{c}'R \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R \arrow[r, dashed, "(\mathsf{c}'R.\mathsf{c})^{\phi_2}"] & \mathsf{c}'RL \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c} \\
\mathsf{c}'R \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}'R \arrow[r, "(\mathsf{c}'R.\mathsf{c}')^{\phi_2}"'] \arrow[u, "\mathsf{c}'R \xrightarrow{\mathsf{D}} f^{\mathrm{op}}R"] & \mathsf{c}'RL \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}' \arrow[u, "\mathsf{c}'RL \xrightarrow{\mathsf{C}} f^{\mathrm{op}}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
:_{\mathsf{c}R}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{c}R.\mathsf{c})^{\phi_2}"] \arrow[d, mapsto, "f^{\mathrm{op}}R \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R"'] & :_{\mathsf{c}R}\mathrm{id}(\mathsf{c}R.\mathsf{c})^{\phi_2} = \mathsf{c}^{\varepsilon} \arrow[d, mapsto, "f^{\mathrm{op}}RL \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c} = \mathsf{c}^{(f^{\mathrm{op}}RL \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}"] \\
f^{\mathrm{op}}R \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{c}'R.\mathsf{c})^{\phi_2}"] & f^{\mathrm{op}}RL \overset{\mathsf{C}}{\circ} \mathsf{c}^{\varepsilon} = \mathsf{c}'^{\varepsilon} \overset{\mathsf{D}}{\circ} f^{\mathrm{op}} \\
:_{\mathsf{c}'R}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{c}'R.\mathsf{c}')^{\phi_2}"'] \arrow[u, mapsto, "\mathsf{c}'R \xrightarrow{\mathsf{D}} f^{\mathrm{op}}R"] & :_{\mathsf{c}'R}\mathrm{id}(\mathsf{c}'R.\mathsf{c}')^{\phi_2} = \mathsf{c}'^{\varepsilon} \arrow[u, mapsto, "\mathsf{c}'RL \xrightarrow{\mathsf{D}} f^{\mathrm{op}} = (\mathsf{c}'RL)^{(\_ \overset{\mathsf{D}}{\circ} f^{\mathrm{op}})}"']
\end{tikzcd}
$$

不难看出这其实蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_1 , 见下 :

$$
\begin{aligned}
\phi_1 &: (\_L \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \xrightarrow{\overset{\mathsf{C}}{(\mathsf{D}\times\mathsf{C})} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{Set}} (\_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \_R) \\
(\_ \,.\, \mathsf{c})^{\phi_1} &: (\_L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}) \xrightarrow{\mathsf{D} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{Set}} (\_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R) \\
(\mathsf{d} \,.\, \_)^{\phi_1} &: (\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{Set}} (\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \_R)
\end{aligned}
$$

套用协变米田引理我们便可获得

$$
\underbrace{((\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C} \to \mathsf{Set}}} (\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \_R))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{d}LR)}_{\text{一堆元素}}
$$

由协变米田引理的证明可知 : 对每个左侧集合中的自然同构 $(\mathsf{d} \,.\, \_)^{\phi_1}$
都会有一个右侧集合中的箭头与之相对应 , 即 $:_{\mathsf{d}L}\mathrm{id}(\mathsf{d} \,.\, \mathsf{d}L)^{\phi_1} = \mathsf{d}^{\eta}$ 。
为何 η 构成自然变换呢 ? 下方右图第二行的第二个节点说明了一切 。
这两张图这其实就是协变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果 。

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{d}L \arrow[r, "(\mathsf{d}.\mathsf{d}L)^{\phi_1}"] \arrow[d, "\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} gL"'] & \mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{d}LR \arrow[d, "\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} gLR"] \\
\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{d}'L \arrow[r, dashed, "(\mathsf{d}.\mathsf{d}'L)^{\phi_1}"] & \mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{d}'LR \\
\mathsf{d}'L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{d}'L \arrow[r, "(\mathsf{d}'.\mathsf{d}'L)^{\phi_1}"'] \arrow[u, "gL \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{d}'L"] & \mathsf{d}' \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{d}'LR \arrow[u, "g \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{d}'LR"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{:_{\mathsf{d}L}}\,\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{d}.\mathsf{d}L)^{\phi_1}"] \arrow[d, "\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} gL"'] & {:_{\mathsf{d}L}}\,\mathrm{id}(\mathsf{d}.\mathsf{d}L)^{\phi_1} = \mathsf{d}^{\eta} \arrow[d, "\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} gLR = \mathsf{d}^{(\_\overset{\mathsf{D}}{\circ} gLR)}"] \\
gL \arrow[r, dashed, "(\mathsf{d}.\mathsf{d}'L)^{\phi_1}"] & \mathsf{d}^{\eta} \overset{\mathsf{D}}{\circ} gLR = g \overset{\mathsf{D}}{\circ} \mathsf{d}'^{\eta} \\
{:_{\mathsf{d}'L}}\,\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{d}'.\mathsf{d}'L)^{\phi_1}"'] \arrow[u, "gL \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{d}'L"] & {:_{\mathsf{d}'L}}\,\mathrm{id}(\mathsf{d}'.\mathsf{d}'L)^{\phi_1} = \mathsf{d}'^{\eta} \arrow[u, "g \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{d}'LR = \mathsf{d}'LR^{(g \overset{\mathsf{D}}{\circ} \_)}"']
\end{tikzcd}
$$