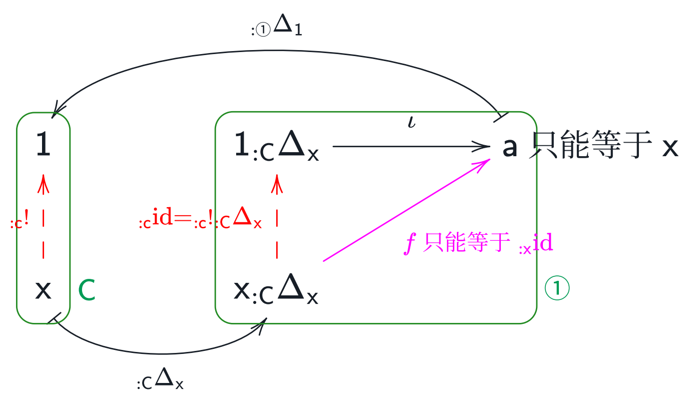
# 章节 01 - 03 基本概念

LaTeX Definitions are here.

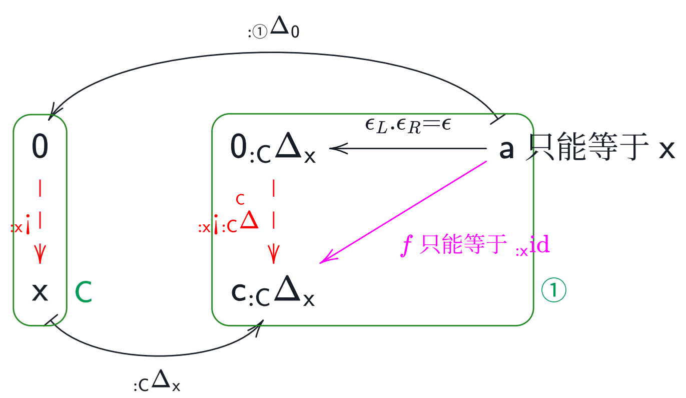
## 始终对象的泛性质

范畴由对象及其间箭头构成。本文重点分析**余积闭范畴** C 。首先给出如下定义：

- 1 为**终对象**当且仅当对任意 C 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 $_{:x}! : x \xrightarrow{C} 1$ ;




- 0 为**始对象**当且仅当对任意 C 中对象 x 都有且仅有唯一的箭头 $_{:x}¡ : 0 \xrightarrow{C} x$ ;




> **Note**
>
> $_{:C}\Delta_x : C \xrightarrow{Cat} ①$ 为常值函子满足 $_{:C}\Delta_x : x \longmapsto 1$ 。 另外还有一点：其他范畴中始终对象不一定存在。

如果范畴 C 中真的含有 0 和 1 分别作为始对象和终对象, 那么根据上述信息可知

- 形如 $1 \xrightarrow{C} 1$ 的箭头只有一个，即 $_{:1}\mathrm{id}$ ;
- 形如 $0 \xrightarrow{C} 0$ 的箭头只有一个，即 $_{:0}\mathrm{id}$ ;

## 元素与全局元素

对任意对象 $a, a_1, a_2, \mathrm{etc}$ , $b, b_1, b_2, \mathrm{etc}$ 以及任意映射 $i$ , 我们进行如下的规定：

- $i$ 为 b 的**元素**当且仅当 $i \; \mathrm{tar} = b$ ;
- $i$ 为 a 的**全局元素**当且仅当 $i \; \mathrm{tar} = a$ 且 $i \; \mathrm{src} = 1$
- $i$ 不存在仅当 $i \; \mathrm{tar} = 0$ 。

> **Note**
>
> 其他范畴中刚才的断言未必成立。

# 箭头构成的集合

这里再给一个定义：

- $a \overset{C}{\to} b =$
  所有从 a 射向 b 的箭头构成的集 。

> **Note**
>
> 上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
> 在其他范畴里 $a \overset{C}{\to} b$ 未必构成集 。

# 箭头的复合运算

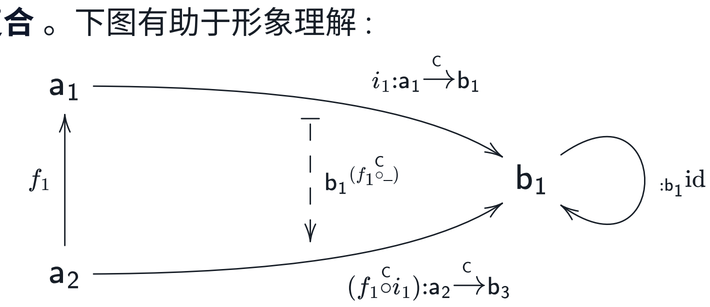
范畴 C 中特定的箭头可以进行复合运算：
对任意 C 中对象 $c_1$ , $c_2$ , $c_3$ 我们都会有
$\overset{C}{\circ} : (c_1 \overset{C}{\to} c_2) \times (c_2 \overset{C}{\to} c_3) \xrightarrow{Set} (c_1 \overset{C}{\to} c_3)$
$\overset{C}{\circ} : ( \quad i_1 \quad . \quad i_2 \quad ) \longmapsto i_1 \overset{C}{\circ} i_2$

若我们还知道箭头 $f_1$ , $i_1$ , $g_1$ 分别属于
$a_2 \overset{C}{\to} a_1$ , $a_1 \overset{C}{\to} b_1$ , $b_1 \overset{C}{\to} b_2$ 那么便有

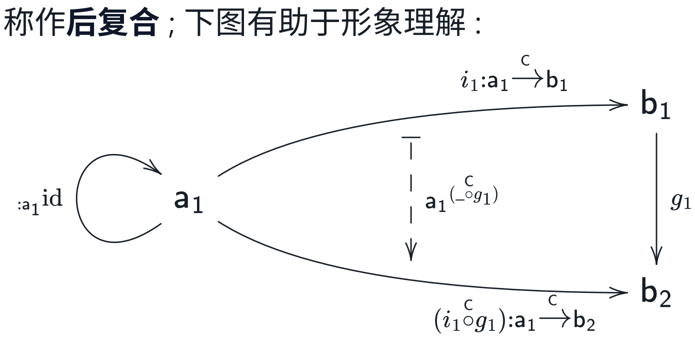
- $(f_1 \overset{C}{\circ} i_1) \overset{C}{\circ} g_1 = f_1 \overset{C}{\circ} (i_1 \overset{C}{\circ} g_1)$
  说明箭头复合运算具有**结合律** 。

另外固定住一侧实参便获可得新的函数：

- $(f_1 \overset{C}{\circ} \_) : (a_1 \overset{C}{\to} \_) \xrightarrow{C \to Set} (a_2 \overset{C}{\to} \_)$
  $(f_1 \overset{C}{\circ} \_) : \quad i_1 \quad \longmapsto \quad f_1 \overset{C}{\circ} i_1$
  称作**前复合** 。下图有助于形象理解：




- $(\_ \overset{C}{\circ} g_1) : (\_ \overset{C}{\to} b_1) \xrightarrow{C \to Set} (\_ \overset{C}{\to} b_2)$
  $(\_ \overset{C}{\circ} g_1) : \quad i_1 \quad \longmapsto \quad i_1 \overset{C}{\circ} g_1$
  称作**后复合**；下图有助于形象理解：




根据上面的定义便不难得出下述结论

- $(f_1 \overset{C}{\circ} \_) \overset{C \to Set}{\circ} (\_ \overset{C}{\circ} g_1) = (\_ \overset{C}{\circ} g_1) \overset{C \to Set}{\circ} (f_1 \overset{C}{\circ} \_)$
  复合运算具有**结合律**，即后面会提到的**自然性**；
- $(\_ \overset{C}{\circ} i_1) \overset{C \to Set}{\circ} (\_ \overset{C}{\circ} g_1) = (\_ \overset{C}{\circ} (i_1 \overset{C}{\circ} g_1))$
  前复合与复合运算的关系
- $(i_1 \overset{C}{\circ} \_) \overset{C \to Set}{\circ} (f_1 \overset{C}{\circ} \_) = ((f_1 \overset{C}{\circ} i_1) \overset{C}{\circ} \_)$
  后复合与复合运算的关系

# 箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合 。
假如 $a_1$ 为 $a_1$ 的全局元素则可规定

- $a_1 i_1 = a_1 \overset{C}{\circ} i_1$

## 恒等箭头

范畴 $\mathsf{C}$ 内的每个对象都有恒等映射：

- ${}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} : \mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{a}_1$
  ${}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} : a_1 \mapsto a_1$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- ${}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1 = i_1$
  $\qquad\qquad = i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}$

此外还可以得知

- $({}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) : (\mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}} (\mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$
  为恒等自然变换，可以记作是 ${}_{:(\mathsf{a}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)}\mathrm{id}$；
- $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}) : (\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{b}_1) \xrightarrow{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}} (\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{b}_1)$
  为恒等自然变换，可以记作是 ${}_{:(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{b}_1)}\mathrm{id}$；

## 单满态以及同构

接下来给出单 / 满态和同构的定义。

- $i_1$ 为**单态**当且仅当对任意 $\mathsf{a}_2$ 若有 $f_1, f_1' : \mathsf{a}_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{a}_1$
  满足 $f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1 = f_1' \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1$ 则有 $f_1 = f_1'$。详情见下图：

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{a}_1 \arrow[rrd, bend left, "i_1:\mathsf{a}_1\xrightarrow{\mathsf{C}}\mathsf{b}_1"] & \arrow[dd, dashed, mapsto, "\mathsf{b}_1{}^{(f_1\overset{\mathsf{C}}{\circ}\_)}"] & \\
 & & \mathsf{b}_1 \arrow[loop right, "{}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}"] \\
\mathsf{a}_2 \arrow[uu, shift left, "f_1"] \arrow[uu, shift right, "f_1'"'] \arrow[rru, bend right, "(f_1\overset{\mathsf{C}}{\circ}i_1):\mathsf{a}_2\xrightarrow{\mathsf{C}}\mathsf{b}_3"'] & &
\end{tikzcd}
$$

- $i_1$ 为**满态**当且仅当对任意 $\mathsf{b}_2$ 若有 $g_1, g_1' : \mathsf{b}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{b}_2$
  满足 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1 = i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1'$ 则有 $g_1 = g_1'$。详情见下图：

$$
\begin{tikzcd}
 & \arrow[dd, dashed, mapsto, "\mathsf{a}_1{}^{(\_\overset{\mathsf{C}}{\circ}g_1)}"] & \mathsf{b}_1 \arrow[dd, shift right, "g_1'"'] \arrow[dd, shift left, "g_1"] \\
\mathsf{a}_1 \arrow[loop left, "{}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id}"] \arrow[rru, bend left, "i_1:\mathsf{a}_1\xrightarrow{\mathsf{C}}\mathsf{b}_1"] \arrow[rrd, bend right, "(i_1\overset{\mathsf{C}}{\circ}g_1):\mathsf{a}_1\xrightarrow{\mathsf{C}}\mathsf{b}_2"'] & & \\
 & & \mathsf{b}_2
\end{tikzcd}
$$

- $i_1$ 为**同构**当且仅当存在 $i_1' : \mathsf{b}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{a}_1$
  使 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1' = {}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id}$ 且 $i_1' \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_1 = {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}$。
  此时 $\mathsf{a}_1$，$\mathsf{b}_1$ 间的关系可记作 $\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\cong} \mathsf{b}_1$

若还提供 $j_1 : \mathsf{b}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_1$ 则不难得知

- 若 $i_1$，$j_1$ 为单态
  则 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} j_1$ 为单态；
- 若 $i_1$，$j_1$ 为满态
  则 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} j_1$ 为满态；
- 若 $i_1$，$j_1$ 为同构
  则 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} j_1$ 为同构；
- 若 $i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} j_1$ 为同构
  且 $i_1$，$j_1$ 其中一个为同构
  则 $i_1$，$j_1$ 两者皆构成同构。

此外我们还可以得出下述结论：

- $a_1$ 为单态，由
  ! 的唯一性可知。
- ${}_{:0}! = {}_{:1}¡$为同构 —— 这是因为
  $0 \xrightarrow{\mathsf{C}} 0 = \{{}_{:0}\mathrm{id}\}$，$1 \xrightarrow{\mathsf{C}} 1 = \{{}_{:1}\mathrm{id}\}$

# 同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释 。
后面会将自然性进行进一步推广 。

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, dashed] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \arrow[dl, phantom, "\downarrow (\_ \overset{c}{\circ} g_1)"] \\
a_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "i_2"'] & b_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, phantom, "(f_1 \overset{c}{\circ} \_) \downarrow"] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "i_2"'] \arrow[ur, dashed] & b_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr] \arrow[dr, phantom, "(f_1 \overset{c}{\circ} \_) \downarrow"'] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, dashed, "i_2"'] & b_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "i_1"] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \arrow[dl, phantom, "\downarrow (\_ \overset{c}{\circ} g_1)"] \\
a_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "i_2"'] \arrow[ur, dashed] & b_2
\end{tikzcd}
$$

若提供自然变换 $\beta$ 满足自然性 —— 即对任意
C 中对象 $x_1$, $x_2$ 及任意 C 中映射 $f_1 : x_2 \overset{C}{\to} x_1$
都会有 $(f_1 \overset{C}{\to} b_1) \overset{\text{Set}}{\circ} {x_2}^{\beta} = {x_1}^{\beta} \overset{\text{Set}}{\circ} (f_1 \overset{C}{\to} b_2)$
（即下图自西向南走向操作结果同自北向东）:

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, dotted] \arrow[dr, phantom, near end, "\downarrow {x_1}^{\beta}"'] & b_1 \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "i_2"'] & b_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, phantom, near start, "(f_1 \overset{C}{\to} b_1) \downarrow"] & b_1 \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "i_2"'] \arrow[ur, dotted] & b_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr] & b_1 \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, dotted, "i_2"'] \arrow[ur, phantom, near start, "(f_1 \overset{C}{\to} b_2) \downarrow"] & b_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "i_1"] & b_1 \\
x_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur] \arrow[r, dotted, "i_2"'] \arrow[ur, phantom, near end, "\downarrow {x_2}^{\beta}"'] & b_2
\end{tikzcd}$$

那么我们便会有下述结论:

- $b_1 \cong b_2$ 当且仅当对任意 C 中对象 $x$
  $x^{\beta}$ 都是同构。此时称 $\beta$ 为**自然同构**。

---

若提供自然变换 $\alpha$ 满足自然性 —— 即对任意
C 中对象 $x_1$, $x_2$ 及任意 C 中映射 $g_1 : x_1 \overset{C}{\to} x_2$
都会有 $(a_1 \overset{C}{\to} g_1) \overset{\text{Set}}{\circ} {x_2}^{\alpha} = {x_1}^{\alpha} \overset{\text{Set}}{\circ} (a_2 \overset{C}{\to} g_1)$
（即下图自西向南走向操作结果同自北向东）:

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "i_1"] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[ur, dotted] \arrow[ur, phantom, near start, "{x_1}^{\alpha} \downarrow"] \arrow[r, "i_2"'] & x_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, dotted] \arrow[dr, phantom, near end, "\downarrow (a_1 \overset{C}{\to} g_1)"] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[r, "i_2"'] & x_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "i_1"] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[ur] \arrow[ur, phantom, near end, "\downarrow (a_2 \overset{C}{\to} g_1)"'] \arrow[r, dotted, "i_2"'] & x_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr] \arrow[dr, phantom, near start, "{x_2}^{\alpha} \downarrow"'] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \\
a_2 \arrow[r, dotted, "i_2"'] & x_2
\end{tikzcd}$$

那么我们便会有下述结论:

- $a_1 \cong a_2$ 当且仅当对任意 C 中对象 $x$
  $x^{\alpha}$ 都是同构。此时称 $\alpha$ 为**自然同构**。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为

$$
\begin{tikzcd}
x_1 \xrightarrow{C} b_1 \arrow[r, "x_1^{\beta}"] \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{C} b_1"'] & x_1 \xrightarrow{C} b_2 \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{C} b_2"] \\
x_2 \xrightarrow{C} b_1 \arrow[r, "x_2^{\beta}"'] & x_2 \xrightarrow{C} b_2 \\
C \xrightarrow{C} b_1 & C \xrightarrow{C} b_2
\end{tikzcd}
\quad \mathsf{Set}
$$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧（考虑特殊情况）

$$
\begin{tikzcd}
b_1 \xrightarrow{C} b_1 \arrow[r, "b_1^{\beta}"] \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{C} b_1"'] & b_1 \xrightarrow{C} b_2 \arrow[d, "f_1 \xrightarrow{C} b_2"] \\
x_2 \xrightarrow{C} b_1 \arrow[r, "x_2^{\beta}"'] & x_2 \xrightarrow{C} b_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
:_{b_1}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "b_1^{\beta}"] \arrow[d, mapsto, "f_1 \xrightarrow{C} b_1"'] & :_{b_1}\mathrm{id}(b_1^{\beta}) \arrow[d, mapsto, "f_1 \xrightarrow{C} b_2"] \\
f_1 \arrow[r, mapsto, "x_2^{\beta}"'] & f_1 \circ (\mathrm{etc})
\end{tikzcd}
$$

为了方便就用 $(\mathrm{etc})$ 表示 $:_{b_1}\mathrm{id}(b_1^{\beta})$。 由上图可知 $f_1(x_2{}^{\beta}) = f_1 \overset{C}{\circ} (\mathrm{etc})$，故 $x_2{}^{\beta} = x_2 \xrightarrow{C} (\mathrm{etc})$；而 $x_2{}^{\beta} = x_2 \xrightarrow{C} (\mathrm{etc}) = x_2{}^{(\_ \overset{C}{\circ} (\mathrm{etc}))}$ 是同构，从而知 $((\mathrm{etc}) \circ \_)$ 是同构，$(\mathrm{etc}) : b_1 \xrightarrow{C} b_2$ 也是。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在米田嵌入处会详细介绍。

---

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \xrightarrow{C} x_1 \arrow[r, "x_1^{\alpha}"] \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{C} g_1"'] & a_2 \xrightarrow{C} x_1 \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{C} g_1"] \\
a_1 \xrightarrow{C} x_2 \arrow[r, "x_2^{\alpha}"'] & a_2 \xrightarrow{C} x_2 \\
a_1 \xrightarrow{C} C & a_2 \xrightarrow{C} C
\end{tikzcd}
\quad \mathsf{Set}
$$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧（考虑特殊情况）

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \xrightarrow{C} a_1 \arrow[r, "x_1^{\alpha}"] \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{C} g_1"'] & a_2 \xrightarrow{C} a_1 \arrow[d, "a_1 \xrightarrow{C} g_1"] \\
a_1 \xrightarrow{C} x_2 \arrow[r, "x_2^{\alpha}"'] & a_2 \xrightarrow{C} x_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
:_{b_1}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "x_1^{\alpha}"] \arrow[d, mapsto, "a_1 \xrightarrow{C} g_1"'] & :_{a_1}\mathrm{id}(a_1^{\alpha}) \arrow[d, mapsto, "a_1 \xrightarrow{C} g_1"] \\
g_1 \arrow[r, mapsto, "x_2^{\alpha}"'] & (\mathrm{etc}) \circ g_1
\end{tikzcd}
$$

为了方便就用 $(\mathrm{etc})$ 表示 $:_{a_1}\mathrm{id}(a_1^{\alpha})$。 由上图可知 $g_1(x_2{}^{\alpha}) = (\mathrm{etc}) \overset{C}{\circ} g_1$，故 $x_2{}^{\alpha} = (\mathrm{etc}) \xrightarrow{C} x_2$；而 $x_2{}^{\alpha} = (\mathrm{etc}) \xrightarrow{C} x_2 = x_2{}^{((\mathrm{etc}) \overset{C}{\circ} \_)}$ 是同构，从而知 $(\_ \overset{C}{\circ} (\mathrm{etc}))$ 是同构，$(\mathrm{etc}) : a_1 \xrightarrow{C} a_2$ 也是。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在米田嵌入处会详细介绍。

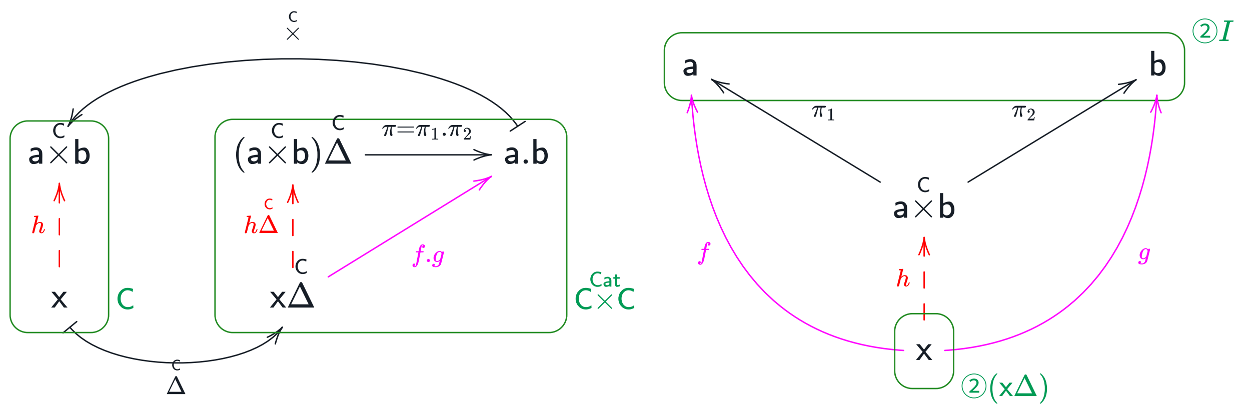
# 章节 04 - 05 类型的积与和

LaTeX Definitions are here.

## 泛性质

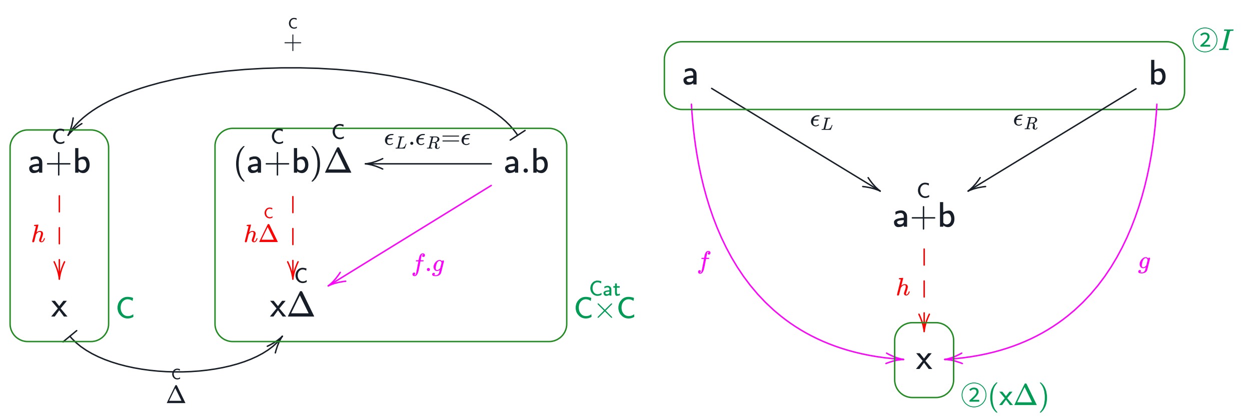
默认函子 $\overset{C}{\times} : C \overset{Cat}{\times} C \overset{Cat}{\longrightarrow} C$ 在范畴 C 中有下述性质：

- $(x \overset{C}{\to} a) \overset{Set}{\times} (x \overset{C}{\to} b) \cong (x \overset{C}{\to} (a \overset{C}{\times} b))$，x 为任意 C 中对象。
  —— **泛性质**，指数对乘法的分配律。下图便于形象理解：




默认函子 $\overset{C}{+} : C \overset{Cat}{\times} C \overset{Cat}{\longrightarrow} C$ 在范畴 C 中有下述性质：

- $(a \overset{C}{\to} x) \overset{Set}{\times} (b \overset{C}{\to} x) \cong ((a \overset{C}{+} b) \overset{C}{\to} x)$，x 为任意 C 中对象。
  —— **泛性质**，指数对加法的分配律。下图便于形象理解：

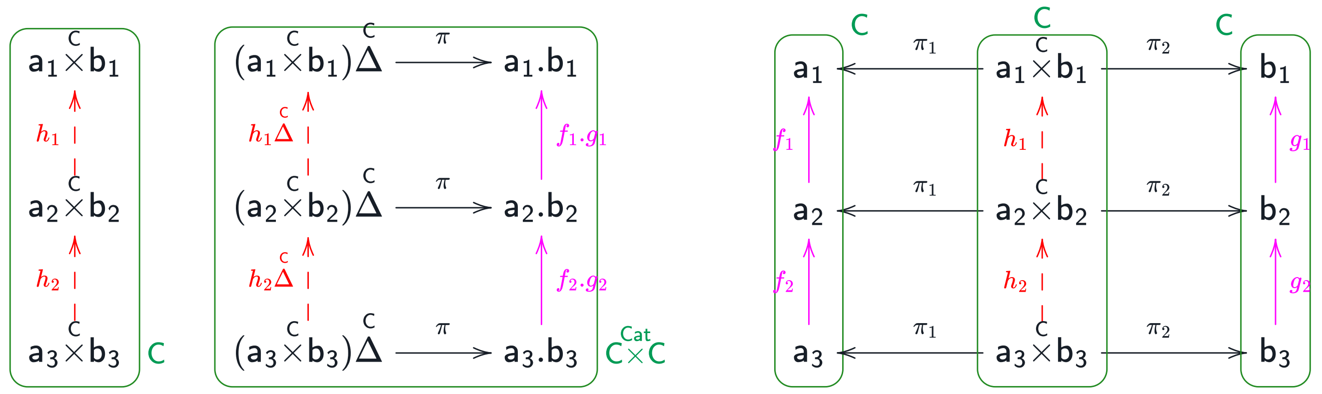



> ⓘ **Note**
>
> 在上面的插图中：
>
> - $\overset{C}{\Delta} : C \overset{Cat}{\longrightarrow} C \overset{Cat}{\times} C$ 为对角函子，满足
>   $\overset{C}{\Delta} : c \longmapsto c \,.\, c$
> - $I : ② \overset{Cat}{\longrightarrow} C$ 为函子，满足
>   $I : 1 \longmapsto a$
>   $\quad 2 \longmapsto b$
>   ② 为只有两个对象的范畴，
>   1 和 2 分别为其中的对象。
>   这里 ② 充当一个指标范畴。

# 函子性

如何证明 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : ({}_{:\mathsf{a}_2}\mathrm{id} \;.\; {}_{:\mathsf{b}_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:\mathsf{a}_2 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{b}_2}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ **保持恒等箭头**；
- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : (f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1 \;.\; g_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) \mapsto h_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} h_1$
  —— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ **保持箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：

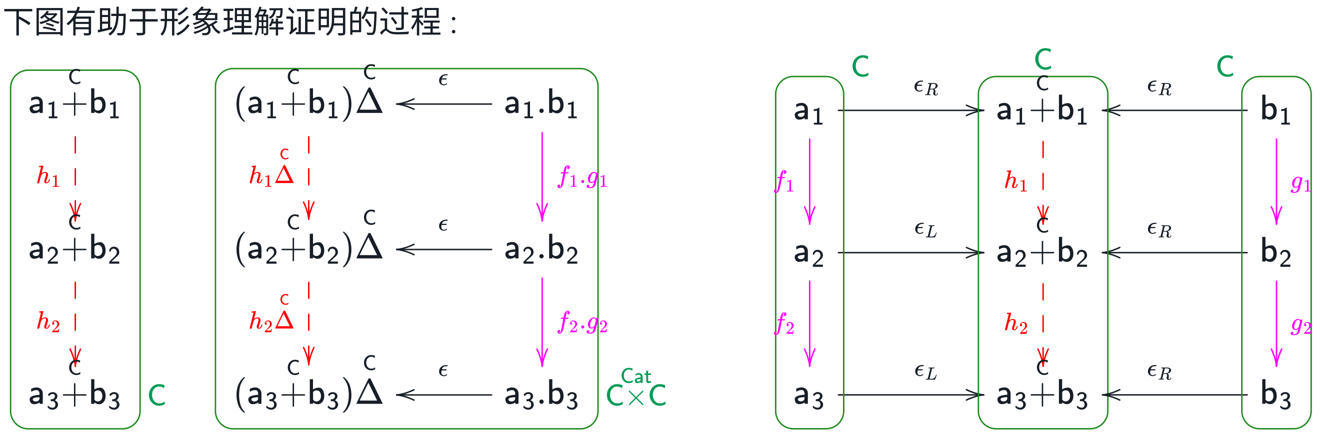


另外规定 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 在实参分别为箭头和对象时的输出：

- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : (f_1 \;.\; \mathsf{b}_1) \longmapsto f_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}$
  $\overset{\mathsf{C}}{\times} : (\mathsf{a}_1 \;.\; g_1) \longmapsto {}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\times} g_1$

如何证明 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathsf{C}}{+} : ({}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \;.\; {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{b}_1}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ **保持恒等箭头**；
- $\overset{\mathsf{C}}{+} : (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2 \;.\; g_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_2) \mapsto h_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} h_2$
  —— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ **保持箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：



同理规定 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ 在实参分别为箭头和对象时的输出：

- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : (f_1 \;.\; \mathsf{b}_1) \longmapsto f_1 \overset{\mathsf{C}}{+} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}$
  $\overset{\mathsf{C}}{\times} : (\mathsf{a}_1 \;.\; g_1) \longmapsto {}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{+} g_1$

## 运算性质

对于函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 我们不难得知

- $\mathsf{a} \overset{\mathsf{C}}{\times} 1 \cong 1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{a} \cong \mathsf{a}$ —— 乘法有**幺元** 1 。
  下图便于理解证明：$(f, g)$ 决定 $h$ , $h'$ 。

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{a}\overset{\mathsf{C}}{\times}1)\overset{\mathsf{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & \mathsf{a}.1 \\
\mathsf{x}\overset{\mathsf{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h\overset{\mathsf{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, "f.g=f._{:\mathsf{x}}!"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{a}\overset{\mathsf{C}}{\Delta} \arrow[r, "{:_\mathsf{a}}\mathrm{id}.{:_\mathsf{a}}!"] & \mathsf{a}.1 \\
\mathsf{x}\overset{\mathsf{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "f\overset{\mathsf{C}}{\Delta}=h'\overset{\mathsf{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, "f.g=f._{:\mathsf{x}}!"']
\end{tikzcd}$$

- $\mathsf{a} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{b} \cong \mathsf{b} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{a}$ —— 乘法运算有**交换律** 。
  下图便于理解证明：$(f, g)$ 决定 $h$ , $h'$ 。

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{a}\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{b})\overset{\mathsf{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & \mathsf{a}.\mathsf{b} \\
\mathsf{x}\overset{\mathsf{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h\overset{\mathsf{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, "f.g"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathsf{b}\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{a})\overset{\mathsf{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & \mathsf{b}.\mathsf{a} \\
\mathsf{x}\overset{\mathsf{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h'\overset{\mathsf{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, "g.f"']
\end{tikzcd}$$

- $(\mathsf{a} \times \mathsf{b}) \times \mathsf{c} \cong \mathsf{a} \times (\mathsf{b} \times \mathsf{c})$ —— 乘法运算具有**结合律** 。
  下图有助于形象理解证明：$(f_{\mathsf{ax}}, f_{\mathsf{bx}}, f_{\mathsf{cx}})$ 决定 $h$ , $h'$ 。

$$\begin{tikzcd}
((\mathsf{a}\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{b})\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{c})\overset{\mathsf{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi"] & (\mathsf{a}\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{b}).\mathsf{c} \arrow[r, "\pi.{:_\mathsf{c}}\mathrm{id}"] & (\mathsf{a}.\mathsf{b}).\mathsf{c} \\
\mathsf{x}\overset{\mathsf{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h\overset{\mathsf{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, dotted, "j.f_{\mathsf{cx}}"] \arrow[urr, "(f_a.f_b).f_{\mathsf{cx}}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathsf{a}\overset{\mathsf{C}}{\times}(\mathsf{b}\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{c}))\overset{\mathsf{C}}{\Delta} \arrow[r, "\pi"] & \mathsf{a}.(\mathsf{b}\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{c}) \arrow[r, "{:_\mathsf{a}}\mathrm{id}.\pi"] & \mathsf{a}.(\mathsf{b}.\mathsf{c}) \\
\mathsf{x}\overset{\mathsf{C}}{\Delta} \arrow[u, dashed, "h'\overset{\mathsf{C}}{\Delta}"] \arrow[ur, dotted, "f_{\mathsf{ax}}.j'"] \arrow[urr, "f_a.(f_b.f_c)"']
\end{tikzcd}$$

对于函子 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ 我们不难得知

- $\mathsf{a} \overset{\mathsf{C}}{+} 0 \cong 0 \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{a} \cong \mathsf{a}$ —— 加法有**幺元** 0 。
  下图有助于理解：$(f, g)$ 决定 $h$ , $h'$ 。

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{a}\overset{\mathsf{C}}{+}0)\overset{\mathsf{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h\overset{\mathsf{C}}{\Delta}"'] & \mathsf{a}.0 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f.g=f._{:\backslash\mathrm{ob}x}¡"] \\
\mathsf{x}\overset{\mathsf{C}}{\Delta}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{a}\overset{\mathsf{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "f=h'\overset{\mathsf{C}}{\Delta}"'] & \mathsf{a}.0 \arrow[l, "{:_\mathsf{a}}\mathrm{id}.{:_\mathsf{a}}¡"'] \arrow[dl, "f.g=f._{:\mathsf{x}}¡"] \\
\mathsf{x}\overset{\mathsf{C}}{\Delta}
\end{tikzcd}$$

- $\mathsf{a} \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{b} \cong \mathsf{b} \overset{\mathsf{C}}{+} \mathsf{a}$ —— 加法运算有**交换律** 。
  下图有助于理解：$(f, g)$ 决定 $h$ , $h'$ 。

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{a}\overset{\mathsf{C}}{+}\mathsf{b})\overset{\mathsf{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h\overset{\mathsf{C}}{\Delta}"'] & \mathsf{a}.\mathsf{b} \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f.g"] \\
\mathsf{x}\overset{\mathsf{C}}{\Delta}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathsf{b}\overset{\mathsf{C}}{+}\mathsf{a})\overset{\mathsf{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h'\overset{\mathsf{C}}{\Delta}"'] & \mathsf{b}.\mathsf{a} \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "g.f"] \\
\mathsf{x}\overset{\mathsf{C}}{\Delta}
\end{tikzcd}$$

- $(\mathsf{a} + \mathsf{b}) + \mathsf{c} \cong \mathsf{a} + (\mathsf{b} + \mathsf{c})$ —— 加法运算具有**结合律** 。
  下图有助于形象理解证明：$(f_{\mathsf{ax}}, f_{\mathsf{bx}}, f_{\mathsf{cx}})$ 决定 $h$ , $h'$ 。

$$\begin{tikzcd}
((\mathsf{a}\overset{\mathsf{C}}{+}\mathsf{b})\overset{\mathsf{C}}{+}\mathsf{c})\overset{\mathsf{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h\overset{\mathsf{C}}{\Delta}"'] & (\mathsf{a}\overset{\mathsf{C}}{+}\mathsf{b}).\mathsf{c} \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "j.f_c"] & (\mathsf{a}.\mathsf{b}).\mathsf{c} \arrow[l, "\epsilon.{:_\mathsf{c}}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "(f_a.f_b).f_c"] \\
\mathsf{x}\overset{\mathsf{C}}{\Delta}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathsf{a}\overset{\mathsf{C}}{+}(\mathsf{b}\overset{\mathsf{C}}{+}\mathsf{c}))\overset{\mathsf{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h'\overset{\mathsf{C}}{\Delta}"'] & \mathsf{a}.(\mathsf{b}\overset{\mathsf{C}}{+}\mathsf{c}) \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "f_a.j'."] & \mathsf{a}.(\mathsf{b}.\mathsf{c}) \arrow[l, "{:_\mathsf{a}}\mathrm{id}.\epsilon"'] \arrow[dll, "f_a.(f_b.f_c)"] \\
\mathsf{x}\overset{\mathsf{C}}{\Delta}
\end{tikzcd}$$

# 幺半范畴

像刚才这样对象运算具有**单位元**以及**结合律**的范畴称作**幺半范畴**；

若上述范畴还具有**交换律**则称作**对称幺半范畴**；

很明显我们的范畴 C 是典型的**对称幺半范畴** 。

# 幺半群

什么是幺半群呢？有两种定义方式：

- **幺半群** M 是个范畴，其只含一个对象 m；
  其中的复合运算正好有单位元以及结合律 。
- 对象 m 属于幺半范畴 C，满足下述交换图：

$$
\begin{tikzcd}
1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[r, "u \overset{\mathsf{C}}{\otimes}_{:\mathsf{m}} \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\text{左单位元 } u_l"'] & \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[d, "p"', "\text{运算结果唯一}"] & \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} 1 \arrow[l, "{}_{:\mathsf{m}}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\otimes} u"'] \arrow[dl, "u_r \text{ 右单位元}"] \\
& \mathsf{m} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m}) \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[rr, "\text{结合律 } a"] \arrow[d, "\text{先算左侧括号 } p \overset{\mathsf{C}}{\otimes}_{:\mathsf{m}} \mathrm{id}"'] & & \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} (\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m}) \arrow[d, "{}_{:\mathsf{m}}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\otimes} p \text{ 先算右侧括号}"] \\
\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[r, "\text{再算最后结果 } p"'] & \mathsf{m} & \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \arrow[l, "p \text{ 再算最后结果}"]
\end{tikzcd}
$$

  其中

  - $u$ ：$1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{m}$ 其实就是 m 里面的幺元
  - $u_l$：$1 \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{m}$ 表示 $u$ 构成左幺元
  - $u_r$：$\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} 1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{m}$ 表示 $u$ 构成右幺元
  - $p$ ：$\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{m}$ 即为 m 中的二元运算
  - $a$ ：$(\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m}) \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} (\mathsf{m} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{m})$ 表示 m 具有结合律

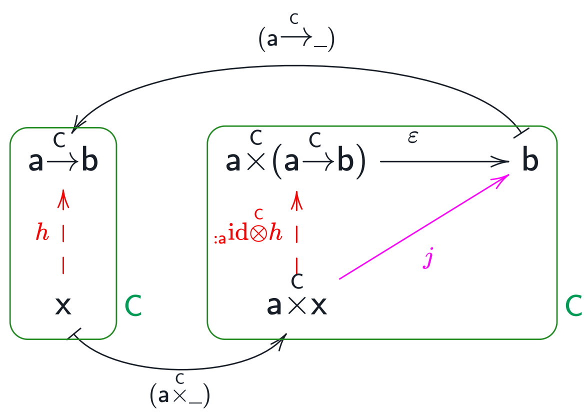
# 章节 06 类型的幂

LaTeX Definitions are here.

## 泛性质

默认函子 $\overset{C}{\to} : C \overset{\text{Cat}}{\times} C \overset{\text{Cat}}{\longrightarrow} C$ 在范畴 C 中有下述性质：

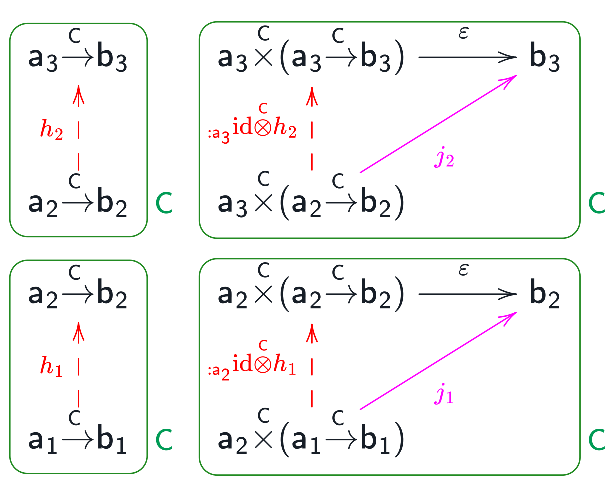
- $\underline{(a \overset{C}{\times} x) \overset{C}{\to} b} \cong \underline{x \overset{C}{\to} (a \overset{C}{\to} b)} \cong \underline{a \overset{C}{\to} (x \overset{C}{\to} b)}$ , x 为任意 C 中对象
  —— **泛性质**，指数与加乘法运算间的关系 。 下图便于理解证明：

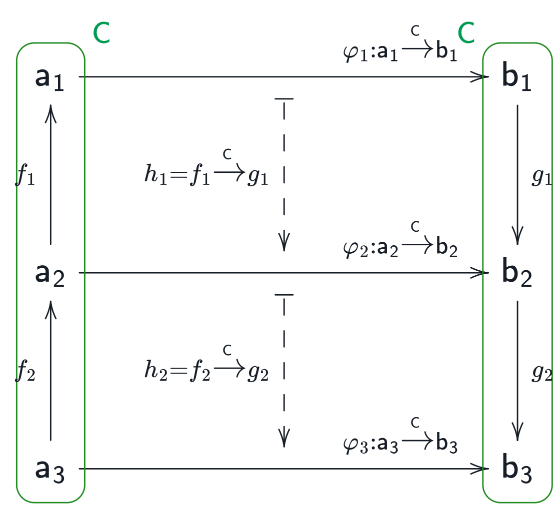



## 函子性

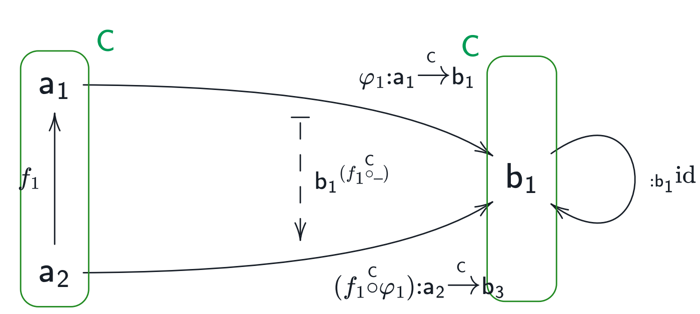
如何证明 $\overset{C}{\to}$ 构成函子呢？请看

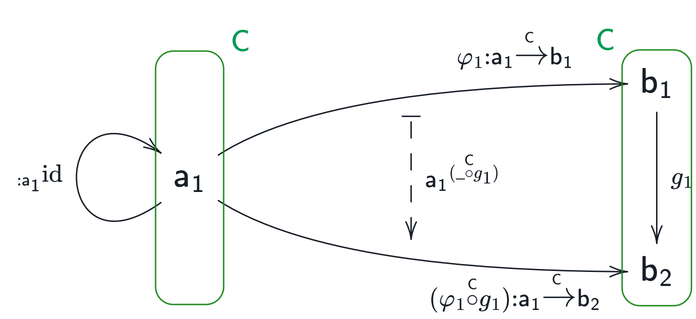
- $\overset{C}{\to} : ({:_{a_1}}\mathrm{id} \underset{C}{.} {:_{b_1}}\mathrm{id}) \longmapsto {:_{(a_1 \overset{C}{\to} b_1)}}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{C}{\to}$ 能**保持恒等箭头**；
- $\overset{C}{\to} : (f_2 \overset{C}{\circ} f_1 \underset{C}{.} g_1 \overset{C}{\circ} g_2) \longmapsto h_1 \overset{C}{\circ} h_2$
  —— 即函子 $\overset{C}{\to}$ **保持箭头复合运算** 。
  下图有助于形象理解证明过程：




下图（自上到下分别为图 1 和图 2）后面会用到 。



范畴 $\mathsf{C}$ 内任意两对象 $\mathsf{a}_1$ 和 $\mathsf{b}_1$ 间的箭头构成一个集合 $\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1$，
说明 $\overset{\mathsf{C}}{\to}$ 只能将两个对象打到一个集合。下面使 $\overset{\mathsf{C}}{\to}$ 升级为函子：
若还知道箭头 $f_1 : \mathsf{a}_2 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{a}_1$ 以及 $g_1 : \mathsf{b}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_2$，则规定

- $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1) : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \cancel{\overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C}} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}$ 为函子且
  $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1) : \mathsf{a}_1 \longmapsto (\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1)$，并且有
  $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1) : f_1 \longmapsto (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}) = \mathsf{b}_1{}^{(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}$

  图 1 有助于理解。

  $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} g_1) : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \cancel{\overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C}} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}$，
  $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} g_1) : \mathsf{a}_1 \longmapsto (\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} g_1) = ({}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\to} g_1) = \mathsf{a}_1{}^{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1)}$
  $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} g_1) : f_1 \longmapsto (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} g_1) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C} \to \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) \overset{\mathsf{C} \to \mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$

  图 2 有助于理解。

  > **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - $\text{よ} : \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} (\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set})$
  >   $\mathsf{b}_1 \longmapsto (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1)$ 　　构成一个函子,称作预层
  >   $g_1 \longmapsto (\_ \overset{\mathsf{C}}{\to} g_1) = (\_ \circ g_1)$ 　　构成一个函子间映射,即自然变换
  >
  >   该函子称作是**米田嵌入**。

- $(\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) : \cancel{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\times}} \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}$ 为函子且
  $(\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) : \mathsf{b}_1 \longmapsto (\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1)$，并且有
  $(\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) : g_1 \longmapsto (\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} g_1) = ({}_{:\mathsf{a}_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\to} g_1) = \mathsf{a}_1{}^{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1)}$

  图 2 有助于理解。

  $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) : \cancel{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\times}} \mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set}$，
  $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) : \mathsf{b}_1 \longmapsto (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \mathsf{b}_1) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} {}_{:\mathsf{b}_1}\mathrm{id}) = \mathsf{b}_1{}^{(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}$
  $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) : g_1 \longmapsto (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} g_1) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) \overset{\mathsf{C} \to \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_1) \overset{\mathsf{C} \to \mathsf{Set}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$

  图 1 有助于理解。

  > **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - $\text{尤} : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} (\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\longrightarrow} \mathsf{Set})$
  >   $\mathsf{a}_1 \longmapsto (\mathsf{a}_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)$ 　　构成一个函子
  >   $f_1 \longmapsto (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\to} \_) = (f_1 \circ \_)$ 　　构成一个函子间映射,即自然变换
  >
  >   该函子戏称为**尤达嵌入**。

## 积闭范畴

这里插个题外话：

若范畴包含终对象，所有类型的积以及指数，则可将其称作**积闭范畴**；

若范畴包含始对象，所有类型的和，则可将其称作是**余积闭范畴**；

若范畴满足上述条件，则可称作**双积闭范畴**。

很明显我们讨论的范畴 $\mathsf{C}$ 就是**双积闭范畴**。

# 章节 07 递归类型

LaTeX Definitions are here.

## 泛性质

默认对象 N 在范畴 C 中有下述性质：

- $(1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{x}) \overset{\mathsf{Cat}}{\times} (\mathsf{x} \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{x}) \cong (\mathsf{N} \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{x})$ , x 为任意 C 中对象
  —— **泛性质** 。`rec` 即对应的同构（上式从左至右）。

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{N} \arrow[d, dashed, "h"'] \\
\mathsf{x}
\end{tikzcd}
\ \mathsf{C}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{N}\overset{\mathsf{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h\overset{\mathsf{C}}{\Delta}"'] & 1.\mathsf{N} \arrow[l, "\eta=\eta_i.\eta_s"'] \arrow[d, dashed, ":_1\mathrm{id}.h"] \\
\mathsf{x}\overset{\mathsf{C}}{\Delta} & 1.\mathsf{x} \arrow[l, "i.s"]
\end{tikzcd}
\ \mathsf{C}\overset{\mathsf{Cat}}{\times}\mathsf{C}
\qquad
\mathsf{C}\overset{\mathsf{Cat}}{\times}\mathsf{C}\
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\eta_i=0"] \arrow[dr, "i"'] & \mathsf{N} \arrow[d, dashed, "h"'] & \mathsf{N} \arrow[l, "\eta_s=\mathtt{succ}"'] \arrow[d, dashed, "h"'] \\
 & \mathsf{x} & \mathsf{x} \arrow[l, "s"]
\end{tikzcd}
\ \mathsf{C}
$$

默认函子 [_] : $\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}$ 在范畴 C 中有下述性质：

- $(1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{x}) \overset{\mathsf{Cat}}{\times} ((\mathsf{x} \overset{\mathsf{C}}{\times} \mathsf{b}) \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{x}) \cong ([\mathsf{b}] \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{x})$ , x 为任意 C 中对象
  —— **泛性质** 。`foldr` 即对应的同构（上述等式从左至右）。

$$
\begin{tikzcd}
[\mathsf{b}] \arrow[d, dashed, "h"'] \\
\mathsf{x}
\end{tikzcd}
\ \mathsf{C}
\qquad
\begin{tikzcd}
[\mathsf{b}]\overset{\mathsf{C}}{\Delta} \arrow[d, dashed, "h\overset{\mathsf{C}}{\Delta}"'] & 1.[\mathsf{b}]\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{b} \arrow[l, "\kappa=\kappa_i.\kappa_s"'] \arrow[d, dashed, ":_1\mathrm{id}.h\overset{\mathsf{C}}{\otimes}:_{\mathsf{b}}\mathrm{id}"] \\
\mathsf{x}\overset{\mathsf{C}}{\Delta} & 1.\mathsf{x}\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{b} \arrow[l, "i.s"]
\end{tikzcd}
\ \mathsf{C}\overset{\mathsf{Cat}}{\times}\mathsf{C}
\qquad
\mathsf{C}\overset{\mathsf{Cat}}{\times}\mathsf{C}\
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\kappa_i=\texttt{[]}"] \arrow[dr, "i"'] & [\mathsf{b}] \arrow[d, dashed, "h"'] & [\mathsf{b}]\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{b} \arrow[l, "\kappa_s=\texttt{(:)}"'] \arrow[d, dashed, "h\overset{\mathsf{C}}{\otimes}:_{\mathsf{b}}\mathrm{id}"] \\
 & \mathsf{x} & \mathsf{x}\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{b} \arrow[l, "s"]
\end{tikzcd}
\ \mathsf{C}
$$

## 函子性

如何证明 [_] 构成函子呢？请看

- [_] : $:_{\mathsf{b}_1}\mathrm{id} \longmapsto :_{[\mathsf{b}_1]}\mathrm{id}$
  —— **[_] 保持恒等箭头**；
- [_] : $(g_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} g_2) \longmapsto (h_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} h_2)$
  —— **[_] 保持箭头复合运算** 。
  下图便于形象理解证明过程 。

$$
\begin{tikzcd}
[\mathsf{b}_1] \arrow[dd, dashed, "h_1"'] \\
\\
[\mathsf{b}_2] \arrow[dd, dashed, "h_2"'] \\
\\
[\mathsf{b}_3]
\end{tikzcd}
\ \mathsf{C}
\qquad
\begin{tikzcd}
[\mathsf{b}_1]\overset{\mathsf{C}}{\Delta} \arrow[dd, dashed, "h_1\overset{\mathsf{C}}{\Delta}"'] & 1.[\mathsf{b}_1]\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{b}_1 \arrow[l, "\kappa"'] \arrow[d, dashed, ":_1\mathrm{id}.h_1\overset{\mathsf{C}}{\otimes}:_{\mathsf{b}_1}\mathrm{id}"] \\
 & 1.[\mathsf{b}_2]\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{b}_1 \arrow[d, ":_1\mathrm{id}.g_1\overset{\mathsf{C}}{\otimes}:_{[\mathsf{b}_2]}\mathrm{id}"] \\
[\mathsf{b}_2]\overset{\mathsf{C}}{\Delta} \arrow[dd, dashed, "h_2\overset{\mathsf{C}}{\Delta}"'] & 1.[\mathsf{b}_2]\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{b}_2 \arrow[l, "\kappa"'] \arrow[d, dashed, ":_1\mathrm{id}.h_2\overset{\mathsf{C}}{\otimes}:_{\mathsf{b}_2}\mathrm{id}"] \\
 & 1.[\mathsf{b}_3]\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{b}_2 \arrow[d, ":_1\mathrm{id}.g_2\overset{\mathsf{C}}{\otimes}:_{[\mathsf{b}_3]}\mathrm{id}"] \\
[\mathsf{b}_3]\overset{\mathsf{C}}{\Delta} & 1.[\mathsf{b}_3]\overset{\mathsf{C}}{\times}\mathsf{b}_3 \arrow[l, "\kappa"']
\end{tikzcd}
\ \mathsf{C}\overset{\mathsf{Cat}}{\times}\mathsf{C}
$$

# 章节 08 - 09 函子与自然变换

LaTeX Definitions are here.

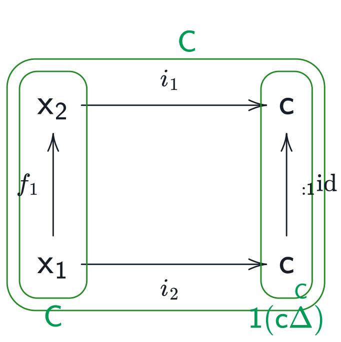
## 一些特殊的范畴

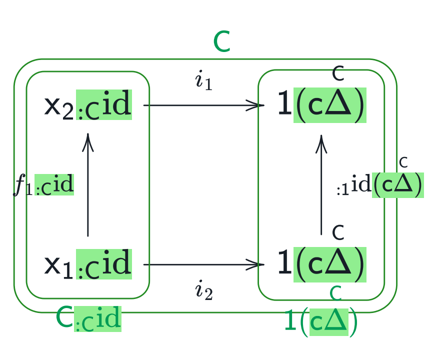
现在规定几种特殊的范畴。

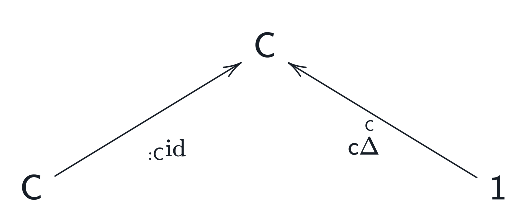
- **离散范畴**：只有对象不含箭头（恒等箭头除外）的范畴。
- Set：**所有集合构成的范畴**，为局部小范畴，满足
  - Set 中对象为任意集合；
  - Set 中箭头为集合间映射。
- Cat：**所有范畴构成的范畴**，满足
  - Cat 中任何对象都构成一个范畴；
  - Cat 中任何箭头都构成一个函子。

若 C，D 为 Cat 中对象，则：

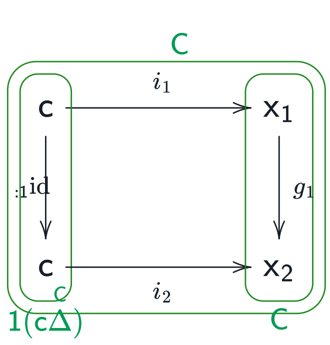
- $C^{op}$：**反范畴**，满足
  - $C^{op}$ 中对象皆形如 c，<br>c 为任意 C 中的对象；
  - $C^{op}$ 中箭头皆形如 $i^{op} : c_2 \xrightarrow{C^{op}} c_1$，<br>$i : c_1 \xrightarrow{C} c_2$ 可为任意 C 中的箭头。
- $C \overset{Cat}{\times} D$：**积范畴**，满足
  - $C \overset{Cat}{\times} D$ 中对象皆形如 c . d，<br>c，d 分别为任意 C，D 中的对象；
  - $C \overset{Cat}{\times} D$ 中箭头皆形如 $i . j$，<br>$i$，$j$ 分别为任意 C，D 中的箭头。
- $C \xrightarrow{Cat} D$：**所有 C 到 D 的函子的范畴**，满足
  - $C \xrightarrow{Cat} D$ 中任何对象<br>都是 C 到 D 的函子；
  - $C \xrightarrow{Cat} D$ 中任何箭头<br>都是函子间自然变换。
- C/c：**俯范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
  - C/c 中对象皆形如 $\cancel{x . 1} . i$，其中 x 和<br>$i : x \xrightarrow{C} c$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
  - c/C 中箭头皆形如 $f_1 \cancel{. :_c id}$ 且满足下述交换图，其中<br>$x_1$，$x_2$ 为 C 中任意对象且 $f_1$，$i_1$，$i_2$ 为 C 中任意箭头；

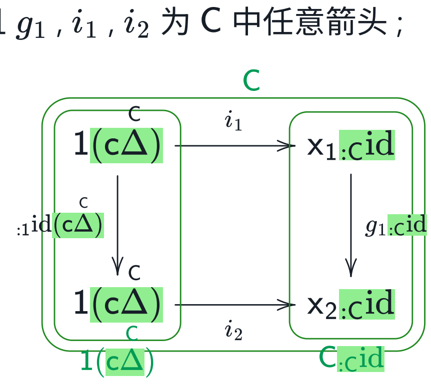


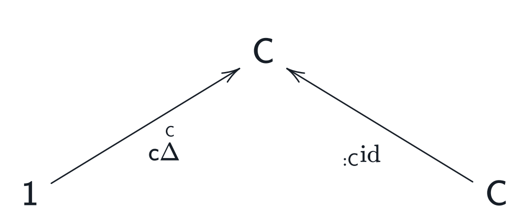




- c/C：**仰范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
  - c/C 中对象皆形如 $\cancel{1 . x} . i$，其中 x 和<br>$i : c \xrightarrow{C} x$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
  - C/c 中箭头皆形如 $\cancel{:_c id} .\ g_1$ 且满足下述交换图，其中<br>$x_1$，$x_2$ 为 C 中任意对象且 $g_1$，$i_1$，$i_2$ 为 C 中任意箭头；



## 函子

接下来我们来提供函子的正式定义：

- $P_1$ : C $\xrightarrow{\text{Cat}}$ D 为**函子**当且仅当
  - 对任意 C 中对象 c，c$P_1$ 为 D 中对象且 $_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}P_1 = {}_{:\mathsf{c}P_1}\mathrm{id}$；
  - 对任意 C 中箭头 $i_1$ : $\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 和 $i_2$ : $\mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_3$，始终都有等式 $(i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2)P_1 = i_1P_1 \overset{\mathsf{D}}{\circ} i_2P_1$ 成立。

## 函子的复合运算

若知道 $P_1$ : C $\xrightarrow{\text{Cat}}$ D 构成函子且
还知道 $Q_1$ : D $\xrightarrow{\text{Cat}}$ E 为函子，则

- $P_1 \overset{\text{Cat}}{\circ} Q_1$ : C $\xrightarrow{\text{Cat}}$ E
  也构成一个函子。

## 恒等函子

对于函子我们也有恒等映射，即：

- $_{:\mathsf{C}}\mathrm{id} \overset{\text{Cat}}{\circ} P_1 = P_1$
  $= P_1 \overset{\text{Cat}}{\circ} {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{id}$

## 忠实，完全和本质满函子

若 C，D，E 皆为**局部小范畴**，则

- $P_1$ 是**忠实的**当且仅当对任意 C 中的对象 $\mathsf{c}_1$，$\mathsf{c}_2$
  $(\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2)$ 与 $(\mathsf{c}_1P_1 \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}_2P_1)$ 之间始终存在单射；
- $P_1$ 是**完全的**当且仅当对任意 C 中的对象 $\mathsf{c}_1$，$\mathsf{c}_2$
  $(\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2)$ 与 $(\mathsf{c}_1P_1 \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}_2P_1)$ 之间始终存在满射；
- $P_1$ 是**完全忠实的**当且仅当任意 C 中对象 $\mathsf{c}_1$，$\mathsf{c}_2$
  $(\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2)$ 与 $(\mathsf{c}_1P_1 \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}_2P_1)$ 之间始终存在双射。

> **Note**
>
> 刚才提到的 “ 单 / 满 / 双射 ”
> 针对的都是范畴的箭头部分。

- $P_1$ 是**本质满的**当且仅当对任意 D 中对象 d
  都存在 C 中对象 c 使 c$P_1 \xrightarrow{\mathsf{D}}$ d 之间有双射。

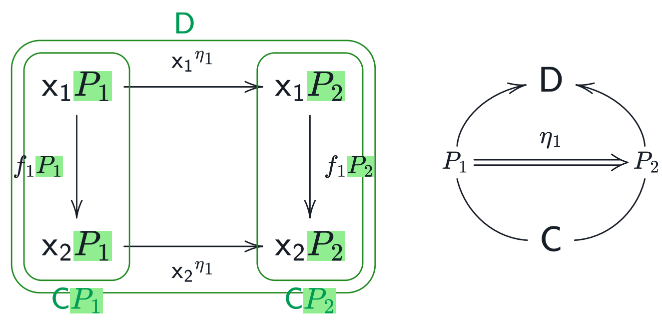
根据刚才的信息我们不难得知

- 若 $P_1$，$Q_1$ 为忠实函子
  则 $P_1 \overset{\text{Cat}}{\circ} Q_1$ 为忠实函子；
- 若 $P_1$，$Q_1$ 为完全函子
  则 $P_1 \overset{\text{Cat}}{\circ} Q_1$ 为完全函子；
- 若 $P_1$，$Q_1$ 为完全忠实函子
  则 $P_1 \overset{\text{Cat}}{\circ} Q_1$ 为完全忠实函子；
- 若 $P_1 \overset{\text{Cat}}{\circ} Q_1$ 为完全忠实函子
  且知道 $Q_1$ 为完全忠实函子
  则可知 $P_1$ 为完全忠实函子；
- 若 $P_1$，$Q_1$ 为本质满函子
  则 $P_1 \overset{\text{Cat}}{\circ} Q_1$ 为本质满函子。

## 自然变换

如果还知道 $P_2 : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为函子 , 那么

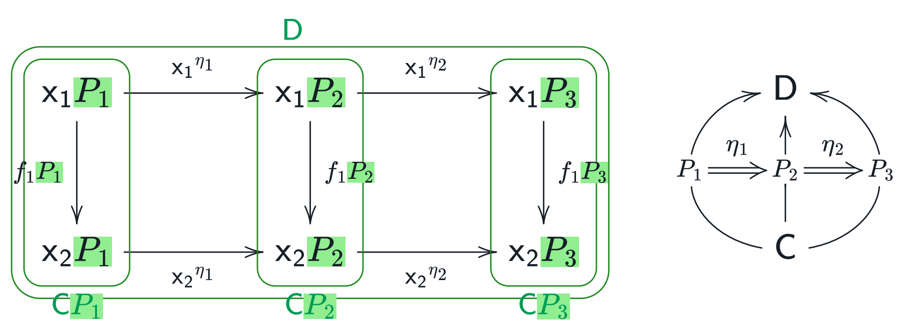
- $\eta_1 : P_1 \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}} P_2$ 为自然变换当且仅当对任意
  C 中对象 $\mathsf{x}_1$ , $\mathsf{x}_2$ 始终都会有下述交换图成立 :



## 自然变换的复合

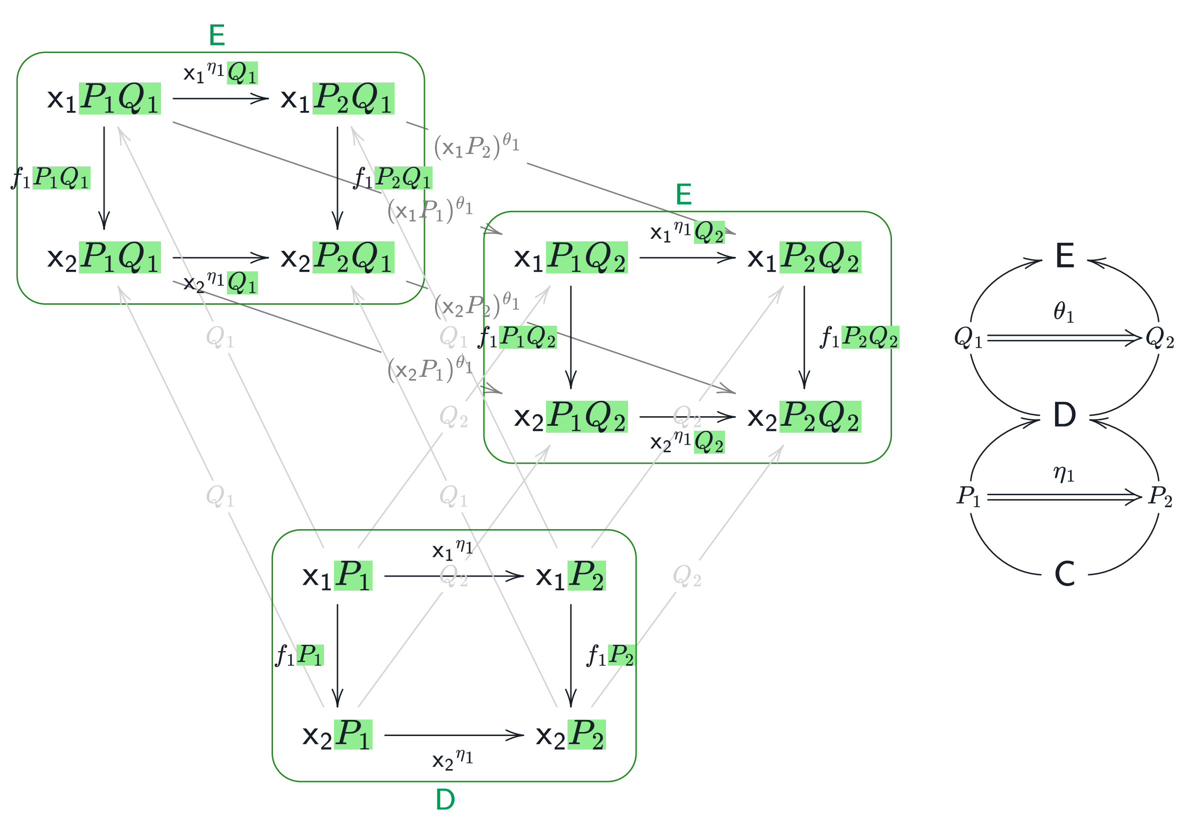
若已知 $\eta_1 : P_1 \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}} P_2$ 构成自然变换且
还知道 $\eta_2 : P_2 \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}} P_3$ 为自然变换则有

- $\eta_1 \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}}{\circ} \eta_2 : P_1 \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}} P_2$ 为自然变换 ,
  称作 $\eta_1$ 和 $\eta_2$ 的**纵复合** 。



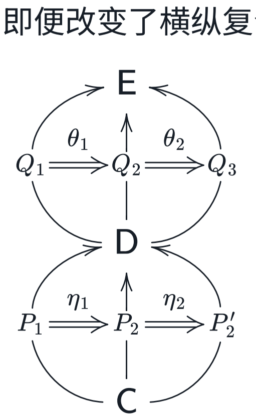
如果还知道 $Q_2 : \mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$ 也是个函子
及自然变换 $\theta_1 : Q_1 \xrightarrow{\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}} Q_2$ , 那么有

- $\eta_1 \circ \theta_1 : P_1 \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} Q_1 \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}} P_2 \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} Q_2$ 为
  自然变换 , 称作 $\eta_1$ 和 $\theta_1$ 的**横复合** 。



若 $\theta_2 : Q_2 \xrightarrow{\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}} Q_3$ 为自然变换则

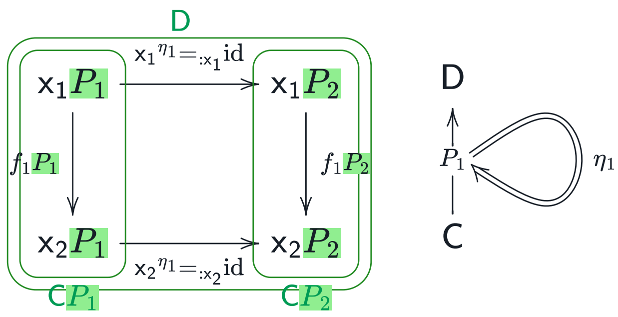
- $(\eta_1 \circ \theta_1) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}}{\circ} (\eta_2 \circ \theta_2) = (\eta_1 \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}}{\circ} \eta_2) \circ (\theta_1 \overset{\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}}{\circ} \theta_2)$ ,
  即便改变了横纵复合的先后顺序也不会影响最终结果 。



## 恒等自然变换

同样对于自然变换也有恒等映射 。

- ${}_{:P_1}\mathrm{id} : P_1 \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{D}}} P_1$ 为恒等自然变换当且仅当
  对范畴 C 中任意对象 x 有下述交换图成立 :




## 自然同构

自然同构与你想象中的同构不太像 。

- $\eta_1 : P_1 \xrightarrow{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{D}}} P_2$ 为**自然同构**当且仅当
  $\mathsf{x}^{\eta_1}$ 总是同构 , 这里 x 为任意 C 中对象 。
  此时 $P_1$ , $P_2$ 的关系可用 $P_1 \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{D}}}{\cong} P_2$ 表示

## 范畴等价的定义

我们用自然同构来定义范畴的等价 。

- $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\cong} \mathsf{D}$ 当且仅当
  存在函子 $P_1 : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 及 $P_1' : \mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}$
  使 $P_1 \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} P_1' \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{C}}}{\cong} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{id}$ 且 $P_1' \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} P_1 \overset{\overset{\mathsf{Cat}}{\mathsf{D}\longrightarrow\mathsf{D}}}{\cong} {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{id}$ 。