10 伴随函子

LaTeX Definitions are here.

若有函子 L : $\boxed{\mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}}$
以及函子 R : $\boxed{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}}$, 即

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[loop above, "{}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id}"] \arrow[rr, bend right, "R"'] & & \mathsf{D} \arrow[loop above, "{}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id}"] \arrow[ll, bend right, "L"']
\end{tikzcd}$$

伴随函子的第一种定义

那么规定

- $L \dashv R$ 当且仅当
  函子 $\boxed{(\_L \overset{\mathsf{C}}{\to} \_)}$ 和 $\boxed{(\_ \overset{\mathsf{D}}{\to} \_R)}$
  间存在着一个二元的**自然同构** 。

假如确实有 $L \dashv R$, 那么不难得知

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_2 , 见下 :

$$\phi_2 : (\_ \xrightarrow{D} \_R) \xrightarrow{(D\times C)\to Set} (\_L \xrightarrow{C} \_)$$
$$(\_ \,.\, c)^{\phi_2} : (\_ \xrightarrow{D} cR) \xrightarrow{D\to Set} (\_L \xrightarrow{C} c)$$
$$(d \,.\, \_)^{\phi_2} : (d \xrightarrow{D} \_R) \xrightarrow{C\to Set} (dL \xrightarrow{C} \_)$$

套用反变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{\left((\_ \xrightarrow{D} cR) \xrightarrow[]{\overset{Cat}{D^{op}\to Set}} (\_L \xrightarrow{C} c)\right)}_{一堆自然变换} \overset{Set}{\cong} \underbrace{(cRL \xrightarrow{C} c)}_{一堆元素}$$

由反变米田引理的证明可知 : 对每个左侧集合中的自然同构 $(\_ \,.\, c)^{\phi_2}$
右侧集合中都有一个箭头与之对应 , 即 ${}_{:cR}\mathrm{id}(cR \,.\, c)^{\phi_2} = c^{\varepsilon}$ 。如此

- $\varepsilon : R \circ L \xrightarrow{\overset{Cat}{C\to C}} {}_{:C}\mathrm{Id}$ 构成自然变换 。

> 考虑任意 $f^{op} : c' \xrightarrow{C} c$:
>
> $$\begin{tikzcd}
cR \xrightarrow{D} cR \arrow[r, "(cR.c)^{\phi_2}"] \arrow[d, "f^{op}R \xrightarrow{D} cR"'] & cRL \xrightarrow{C} c \arrow[d, "f^{op}RL \xrightarrow{C} c"] \\
c'R \xrightarrow{D} cR \arrow[r, dashed, "(c'R.c)^{\phi_2}"] & c'RL \xrightarrow{C} c \\
c'R \xrightarrow{D} c'R \arrow[r, "(c'R.c')^{\phi_2}"'] \arrow[u, "c'R \xrightarrow{D} f^{op}R"] & c'RL \xrightarrow{C} c' \arrow[u, "c'RL \xrightarrow{C} f^{op}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:cR}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(cR.c)^{\phi_2}"] \arrow[d, mapsto, "f^{op}R \xrightarrow{D} cR"'] & {}_{:cR}\mathrm{id}(cR.c)^{\phi_2} = c^{\varepsilon} \arrow[d, mapsto, "f^{op}RL \xrightarrow{C} c = c^{(f^{op}RL \overset{C}{\circ} _)}"] \\
f^{op}R \arrow[r, mapsto, "(c'R.c)^{\phi_2}"] & f^{op}RL \overset{C}{\circ} c^{\varepsilon} = c'^{\varepsilon} \overset{C}{\circ} f^{op} \\
{}_{:c'R}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(c'R.c')^{\phi_2}"'] \arrow[u, mapsto, "c'R \xrightarrow{D} f^{op}R"] & {}_{:c'R}\mathrm{id}(c'R.c')^{\phi_2} = c'^{\varepsilon} \arrow[u, mapsto, "c'RL \xrightarrow{C} f^{op} = (c'RL)^{(_ \overset{C}{\circ} f^{op})}"']
\end{tikzcd}$$
>
> 上方右图的第二行的第二个节点说明了一切 。这两张图
> 其实就是反变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果 。

- 这里蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_1 , 见下 :

$$\phi_1 : (\_L \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{(D\times C)\to Set} (\_ \xrightarrow{D} \_R)$$
$$(\_ \,.\, c)^{\phi_1} : (\_L \xrightarrow{C} c) \xrightarrow{D\to Set} (\_ \xrightarrow{D} cR)$$
$$(d \,.\, \_)^{\phi_1} : (dL \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow{C\to Set} (d \xrightarrow{D} \_R)$$

套用协变米田引理我们便可获得

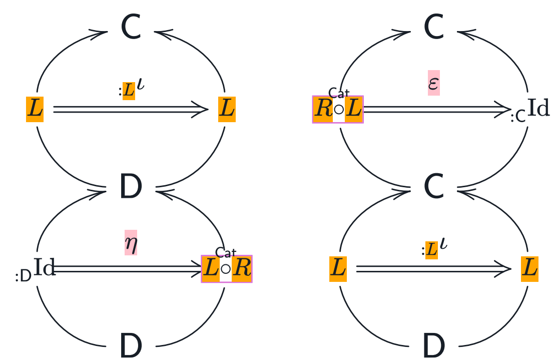
$$\underbrace{\left((dL \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow[]{\overset{Cat}{C\to Set}} (d \xrightarrow{D} \_R)\right)}_{一堆自然变换} \overset{Set}{\cong} \underbrace{(d \xrightarrow{D} dLR)}_{一堆元素}$$

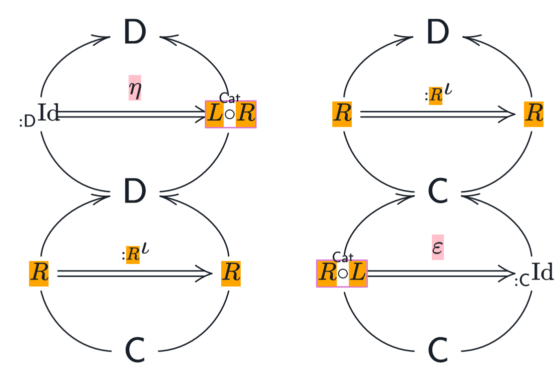
由协变米田引理的证明可知 : 对每个左侧集合中的自然同构 $(d \,.\, \_)^{\phi_1}$
右侧集合中都有一个箭头与之对应 , 即 ${}_{:dL}\mathrm{id}(d \,.\, dL)^{\phi_1} = d^{\eta}$ 。如此 。

- $\eta : {}_{:D}\mathrm{Id} \xrightarrow{\overset{Cat}{D\to D}} L \overset{Cat}{\circ} R$ 构成自然变换 。

> 考虑任意 $g : d \xrightarrow{D} d'$:
>
> $$\begin{tikzcd}
dL \xrightarrow{C} dL \arrow[r, "(d.dL)^{\phi_1}"] \arrow[d, "dL \xrightarrow{C} gL"'] & d \xrightarrow{D} dLR \arrow[d, "d \xrightarrow{D} gLR"] \\
dL \xrightarrow{C} d'L \arrow[r, dashed, "(d.d'L)^{\phi_1}"] & d \xrightarrow{D} d'LR \\
d'L \xrightarrow{C} d'L \arrow[r, "(d'.d'L)^{\phi_1}"'] \arrow[u, "gL \xrightarrow{C} d'L"] & d' \xrightarrow{D} d'LR \arrow[u, "g \xrightarrow{D} d'LR"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:dL}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(d.dL)^{\phi_1}"] \arrow[d, mapsto, "dL \xrightarrow{C} gL"'] & {}_{:dL}\mathrm{id}(d.dL)^{\phi_1} = d^{\eta} \arrow[d, mapsto, "d \xrightarrow{D} gLR = d^{(_ \circ gLR)}"] \\
gL \arrow[r, mapsto, "(d.d'L)^{\phi_1}"] & d^{\eta} \overset{D}{\circ} gLR = g \overset{D}{\circ} d'^{\eta} \\
{}_{:d'L}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(d'.d'L)^{\phi_1}"'] \arrow[u, mapsto, "gL \xrightarrow{C} d'L"] & {}_{:d'L}\mathrm{id}(d'.d'L)^{\phi_1} = d'^{\eta} \arrow[u, mapsto, "g \xrightarrow{D} d'LR = (d'LR)^{(g \circ _)}"']
\end{tikzcd}$$
>
> 上方右图的第二行的第二个节点说明了一切 。这两张图
> 其实就是协变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果 。

对于前面的 ε 和 η 我们有下述交换图成立：

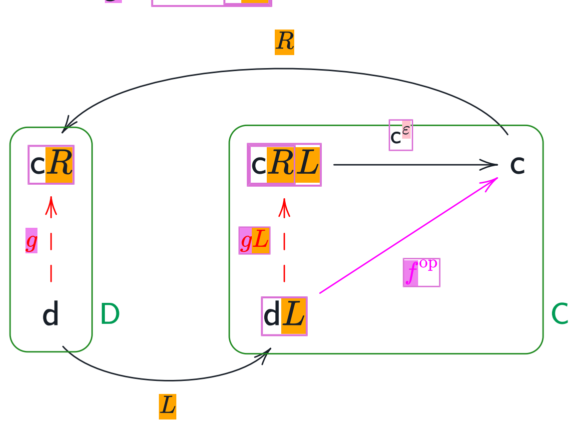
- $$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\eta \overset{???}{\circ} {:}L^{\iota}"] \arrow[dr, "{:}L^{\iota}"'] & L \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} R \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} L \arrow[d, "{:}L^{\iota} \overset{???}{\circ} \varepsilon"] \\ & L \end{tikzcd}$$
  

- $$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "{:}R^{\iota} \overset{???}{\circ} \eta"] \arrow[dr, "{:}R^{\iota}"'] & R \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} L \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} R \arrow[d, "\varepsilon \overset{???}{\circ} {:}R^{\iota}"] \\ & R \end{tikzcd}$$
  

伴随函子的第二种定义

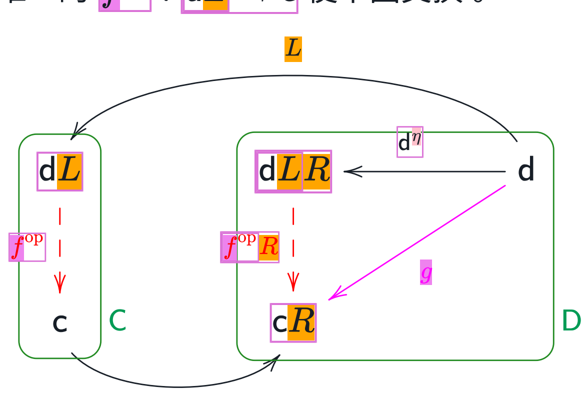
假设我们不知道 L 和 R 构成一对伴随函子并且有自然变换 $\varepsilon : R \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} L \xrightarrow{\mathsf{C} \to \mathsf{C}} {:}_{\mathsf{C}}\mathrm{Id}$ 和 $\eta : {:}_{\mathsf{D}}\mathrm{Id} \xrightarrow{\mathsf{D} \to \mathsf{D}} L \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} R$ 能同时满足上页开头的两幅交换图，那么

- 对任意 C 中对象 c
  及任意 D 中对象 d
  及任意 $f^{\mathrm{op}} : dL \overset{\mathsf{C}}{\to} c$ 始终存在
  唯一的 $g : d \overset{\mathsf{D}}{\to} cR$ 使下图交换 。

  如此有 $(dL \overset{\mathsf{C}}{\to} c) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (d \overset{\mathsf{D}}{\to} cR)$，
  即 $L \dashv R$。

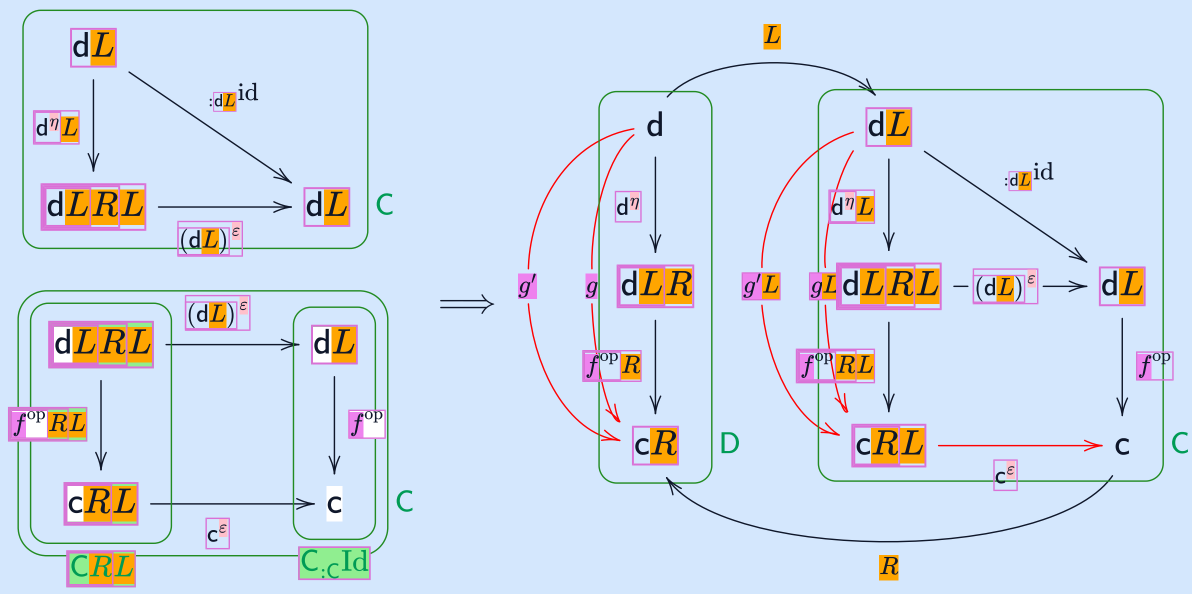
- 对任意 C 中对象 c
  及任意 D 中对象 d
  及任意 $g : d \overset{\mathsf{D}}{\to} cR$ 始终都会存在
  唯一的 $f^{\mathrm{op}} : dL \overset{\mathsf{C}}{\to} c$ 使下图交换 。

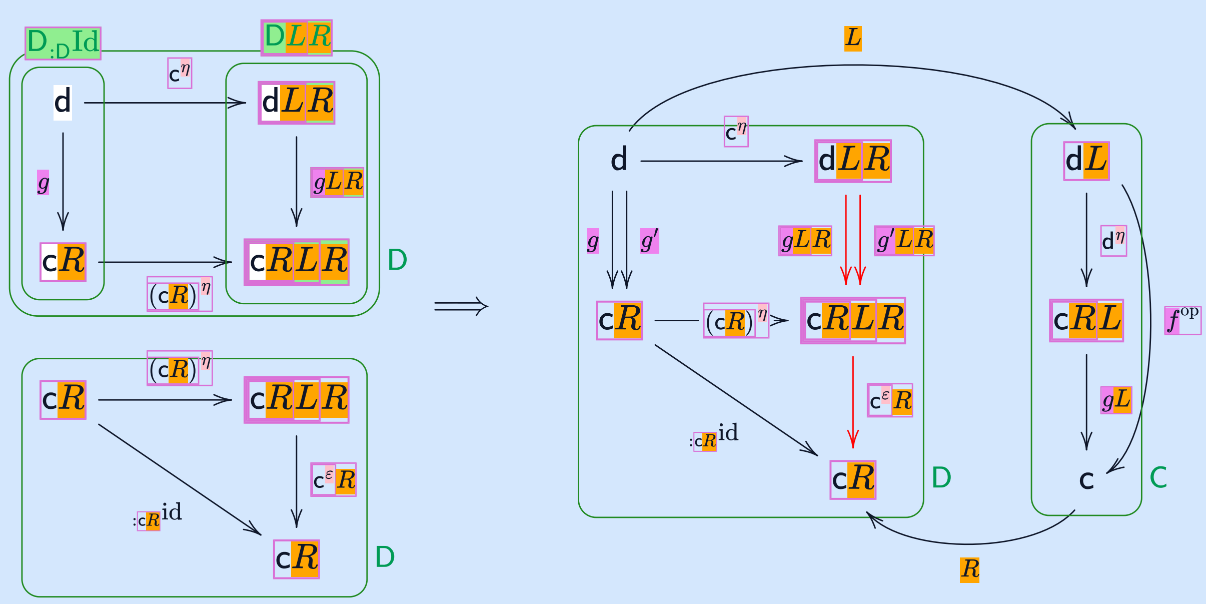
  如此有 $(dL \overset{\mathsf{C}}{\to} c) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (d \overset{\mathsf{D}}{\to} cR)$，
  即 $L \dashv R$。

现证明上页的头两条定理。

下方左图上半部分即为上页第一幅图，而
下方左图下半部分可由 ε 为自然变换得出；
将两个图拼在一起即可获得下方右图：



为何 g 唯一呢？若 g' 亦满足上图 —— 即上方右图中
右侧的两条 L 形走向的红色路径的复合结果是一致的，
则下方右图中的两条红色路径的复合结果也是一致的；
如此根据下方右图即可得知 $g = g'$ 。



另一侧同理，这里不再赘述。