08-09 函子和自然变换

LaTeX Definitions are here.

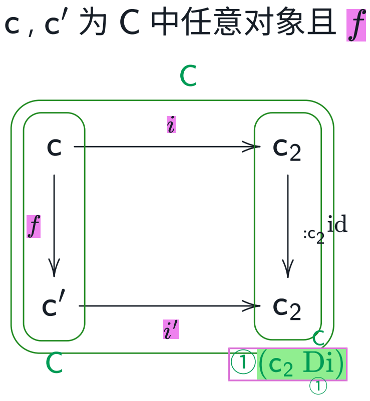
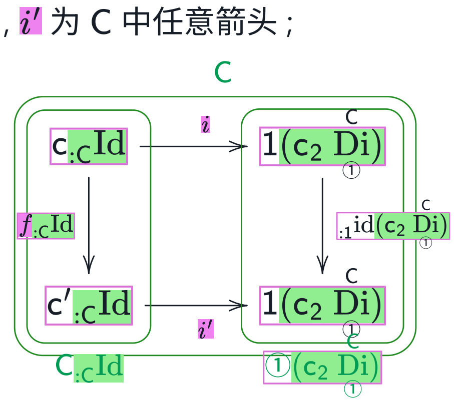
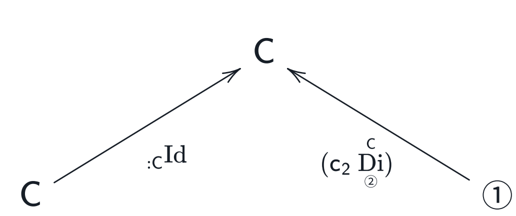
一些特殊的范畴

现在规定几种特殊的范畴。

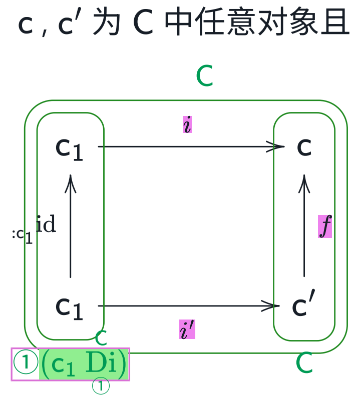
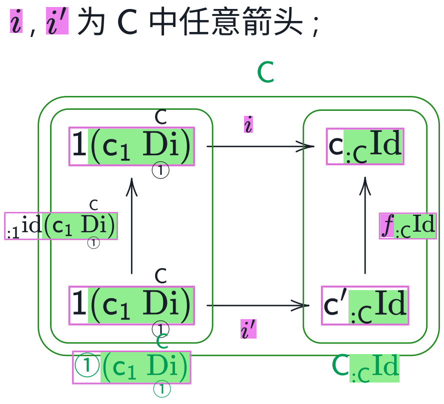
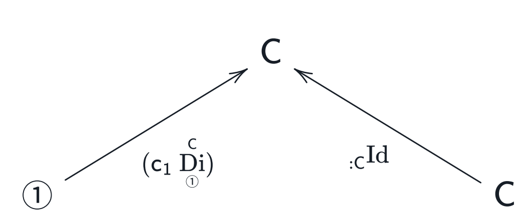
- **离散范畴**：只有对象不含箭头（恒等箭头除外）的范畴。
- Set：**所有集合构成的范畴**，为局部小范畴，满足
  - Set 中对象为任意集合；
  - Set 中箭头为集合间映射。
- Cat：**所有范畴构成的范畴**，满足
  - Cat 中任何对象都构成一个范畴；
  - Cat 中任何箭头都构成一个函子。

若 C，D 为 Cat 中对象，则：

- C^{op}：**反范畴**，满足
  - C^{op} 中对象皆形如 c，
c 为任意 C 中的对象；
  - C^{op} 中箭头皆形如 $i^{op} : c_2 \xrightarrow{C^{op}} c_1$，
$i : c_1 \xrightarrow{C} c_2$ 可为任意 C 中的箭头。
- $C \overset{Cat}{\times} D$：**积范畴**，满足
  - $C \overset{Cat}{\times} D$ 中对象皆形如 $c\,.\,d$，
c，d 分别为任意 C，D 中的对象；
  - $C \overset{Cat}{\times} D$ 中箭头皆形如 $i\,.\,j$，
i，j 分别为任意 C，D 中的箭头。
- $C \xrightarrow{Cat} D$：**所有 C 到 D 的函子的范畴**，满足
  - $C \xrightarrow{Cat} D$ 中任何对象
都是 C 到 D 的函子；
  - $C \xrightarrow{Cat} D$ 中任何箭头
都是函子间自然变换。
- C/c：**俯范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
  - C/c_2 中对象皆形如 $\cancel{c\,.\,1}\,.\,i$，其中 c 和
$i : c \xrightarrow{C} c_2$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
  - c_2/C 中箭头皆形如 $f\,\cancel{.\,{}_{:c_2}\mathrm{id}}$ 且满足下述交换图，其中
c，c′ 为 C 中任意对象且 f，i，i' 为 C 中任意箭头；

- c_1/C：**仰范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
  - c_1/C 中对象皆形如 $\cancel{1\,.\,c}\,.\,i$，其中 c 和
$i : c_1 \xrightarrow{C} c$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
  - C/c_1 中箭头皆形如 $\cancel{{}_{:c_1}\mathrm{id}\,.}\,f$ 且满足下述交换图，其中
c，c′ 为 C 中任意对象且 f，i，i' 为 C 中任意箭头；

函子

接下来我们来提供函子的正式定义：

- $F : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为**函子**当且仅当
  - 对任意 C 中对象 c，cF 为
    D 中对象且 ${}_{:c}\mathrm{id}F = {}_{:cF}\mathrm{id}$；
  - 对任意 C 中箭头 $i_1 : c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2$ 和 $i_2 : c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_3$，
    始终都有等式 $(i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2)F = i_1F \overset{\mathsf{D}}{\circ} i_2F$ 成立。

函子的复合运算

若已确信 $F : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为函子并
且还知道 $G : \mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$ 为函子则

- $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$
  也构成一个函子。

恒等函子

对于函子我们也有恒等映射，即：

- ${}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id} \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} F = F$
  $= F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id}$

忠实，完全和本质满函子

若 C，D，E 皆为**局部小范畴**，则

- F 是**忠实的**当且仅当对任意 C 中的对象 c_1, c_2，
  $c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2$ 与 $c_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} c_2F$ 之间始终都存在单射；
- F 是**完全的**当且仅当对任意 C 中的对象 c_1, c_2，
  $c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2$ 与 $c_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} c_2F$ 之间始终都存在满射；
- F 是**完全忠实的**当且仅当任意 C 中对象 c_1, c_2，
  $c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2$ 与 $c_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} c_2F$ 之间始终都存在双射。

> ⓘ **Note**
>
> 刚才提到的“单 / 满 / 双射”
> 针对的都是范畴的箭头部分。

- F 是**本质满的**当且仅当对任意 D 中对象 d
  都存在 C 中对象 c 使 $cF \xrightarrow{\mathsf{D}} d$ 之间有双射。

根据刚才的信息我们不难得知

- 若 F, G 为忠实函子
  则 $G \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为忠实函子；
- 若 F, G 为完全函子
  则 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为完全函子；
- 若 F, G 为完全忠实函子
  则 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为完全忠实函子；
- 若 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为完全忠实函子
  且知道 G 为完全忠实函子
  则可知 F 为完全忠实函子；
- 若 F, G 为本质满函子
  则 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为本质满函子。