

章节 01 - 03 基本概念

L^AT_EX Definitions are here.

始对象与终对象

范畴由对象及其间箭头构成。本文重点分析**余积闭范畴** \mathcal{C} 。首先给出如下定义：

- 0 为**始对象**当且仅当对任意 \mathcal{C} 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 $!_c: 0 \xrightarrow{\mathcal{C}} c$;
- 1 为**终对象**当且仅当对任意 \mathcal{C} 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 $!_c: c \xrightarrow{\mathcal{C}} 1$;

i

Note

其他范畴中始终对象不一定存在。

范畴 \mathcal{C} 中我们假设其含 0 和 1 分别作为始对象和终对象，那么由上述信息可知

- 形如 $0 \xrightarrow{\mathcal{C}} 0$ 的箭头只有一个，即 $!_0id$;
- 形如 $1 \xrightarrow{\mathcal{C}} 1$ 的箭头只有一个，即 $!_1id$;

元素与全局元素

对任意对象 a, a_1, a_2, etc , b, b_1, b_2, etc 以及任意映射 ϕ ，我们进行如下的规定：

- ϕ 为 b 的**元素**当且仅当 $\phi: a \xrightarrow{\mathcal{C}} b$;
- ϕ 为 a 的**全局元素**当且仅当 $\phi: 1 \xrightarrow{\mathcal{C}} a$;
- ϕ 不存在可通过 $\phi: b \xrightarrow{\mathcal{C}} 0$ 得出。

i

Note

其他范畴中刚才的断言未必成立。

箭头构成的集合

这里再给一个定义：

- $\mathbf{a} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b} =$
所有从 \mathbf{a} 射向 \mathbf{b} 的箭头构成的集。

Note

上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
在其他范畴里 $\mathbf{a} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}$ 未必构成集。

箭头的复合运算

范畴 \mathcal{C} 中特定的箭头可以进行复合运算：

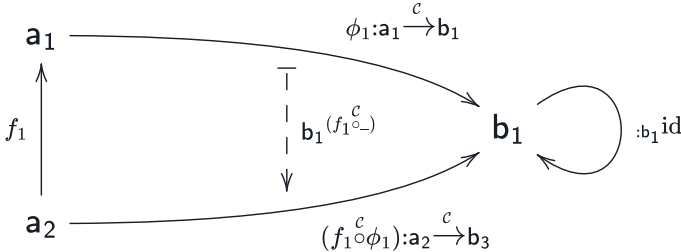
$$\begin{aligned} \overset{\mathcal{C}}{\circ} &: (\mathbf{a}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{a}_1) \times (\mathbf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1) \xrightarrow{Set} (\mathbf{a}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1) \\ \overset{\mathcal{C}}{\circ} &: \left(\begin{array}{c} f_1 \\ \phi_1 \end{array} \right) \mapsto f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1 \end{aligned}$$

若我们还知道箭头 f_1, ϕ_1, g_1 分别属于
 $\mathbf{a}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_2$ 那么便有

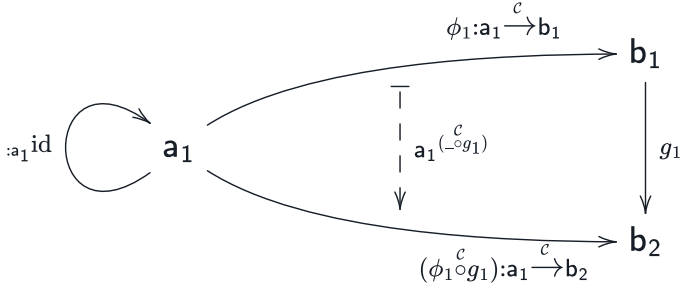
- $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1) \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1 = f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1)$
说明箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便获可得新的函数：

- $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} _): (\mathbf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} _) \xrightarrow{\mathcal{C} \rightarrow Set} (\mathbf{a}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} _)$
 $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} _): \phi_1 \mapsto f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1$
称作**前复合**。下图有助于形象理解：



- $(_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1): (_ \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1) \xrightarrow{\mathcal{C} \rightarrow Set} (_ \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_2)$
 $(_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1): \phi_1 \mapsto \phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1$
称作**后复合**；下图有助于形象理解：



根据上面的定义便不难得出下述结论

- $(f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) \overset{\mathcal{C} \rightarrow Set}{\circ} (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) = (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) \overset{\mathcal{C} \rightarrow Set}{\circ} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)$
复合运算具有**结合律**，即后面会提到的**自然性**；
- $(_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1) \overset{\mathcal{C} \rightarrow Set}{\circ} (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1) = (_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} (\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_1))$
前复合与复合运算的关系
- $(\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) \overset{\mathcal{C} \rightarrow Set}{\circ} (f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} _) = ((f_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1) \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)$
后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。

假如 a_1 为 \mathbf{a}_1 的全局元素则可规定

- $a_1 \phi_1 = a_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_1$

恒等箭头

范畴 \mathcal{C} 内的每个对象都有恒等映射：

- $\text{id} : \mathbf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{a}_1$
 $\text{id} : a_1 \mapsto a_1$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- $\text{id} \circ \phi_1 = \phi_1$
 $= \phi_1 \circ \text{id}$

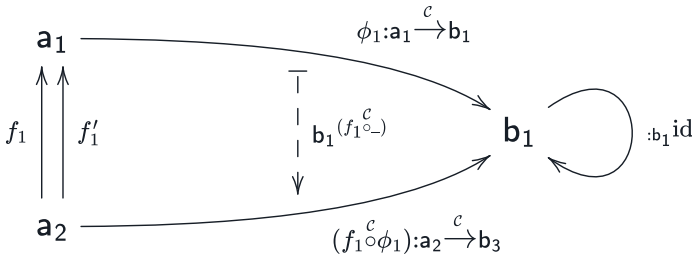
此外还可以得知

- $(\text{id} \circ _) : (\mathbf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} _) \xrightarrow{\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}} (\mathbf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} _)$
为恒等自然变换，可以记作是 (id) ；
- $(_ \circ \text{id}) : (_ \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1) \xrightarrow{\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}} (_ \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1)$
为恒等自然变换，可以记作是 $(_)$ ；

单态

在范畴论里我们也可以定义单态：

- ϕ_1 为**单态**当且仅当对任意 \mathbf{a}_2 若有 $f_1, f'_1 : \mathbf{a}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{a}_1$
满足 $f_1 \circ \phi_1 = f'_1 \circ \phi_1$ 则有 $f_1 = f'_1$ 。详情见下图：



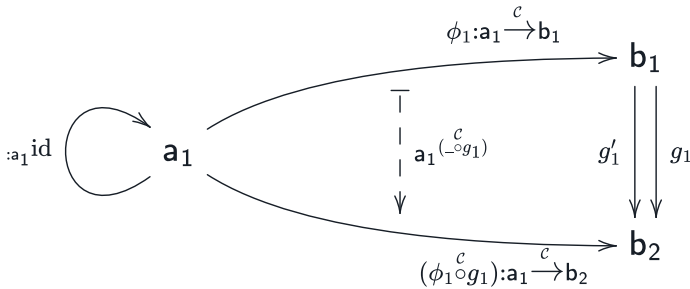
结合终对象的性质我们不难得知

- a_1 为单态 —— 由 $!$ 的唯一性可得知。

满态

在范畴论里我们也可以定义满态：

- ϕ_1 为**满态**当且仅当对任意 \mathbf{b}_2 若有 $g_1, g'_1 : \mathbf{b}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_2$
满足 $\phi_1 \circ g_1 = \phi_1 \circ g'_1$ 则有 $g_1 = g'_1$ 。详情见下图：



同构

在范畴论里我们也可以定义同构：

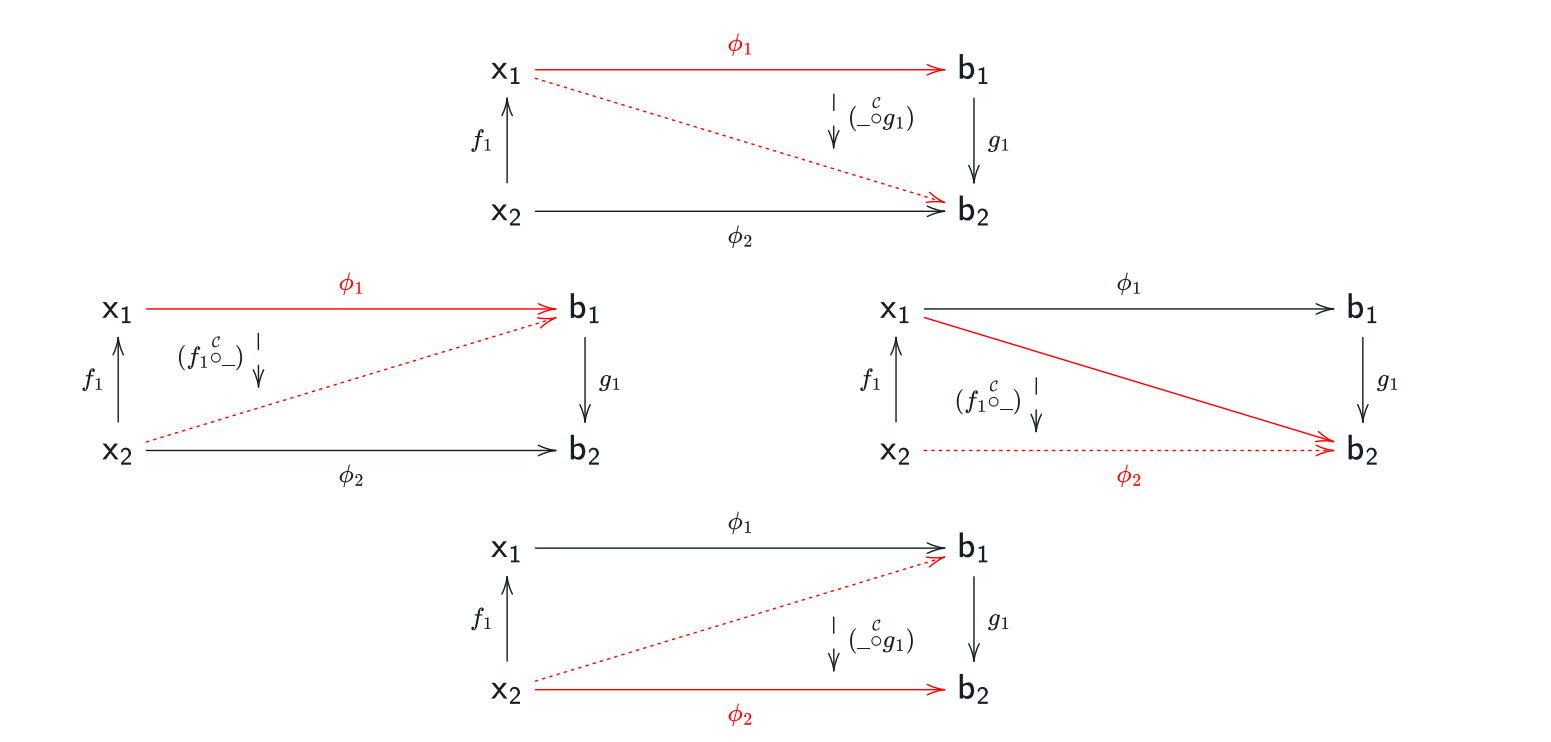
- ϕ_1 为**同构**当且仅当存在 $\psi_1 : \mathbf{b}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{a}_1$
使 $\phi_1 \circ \psi_1 = \text{id}$ 且 $\psi_1 \circ \phi_1 = \text{id}$ 。

结合始终对象的性质便不难得知

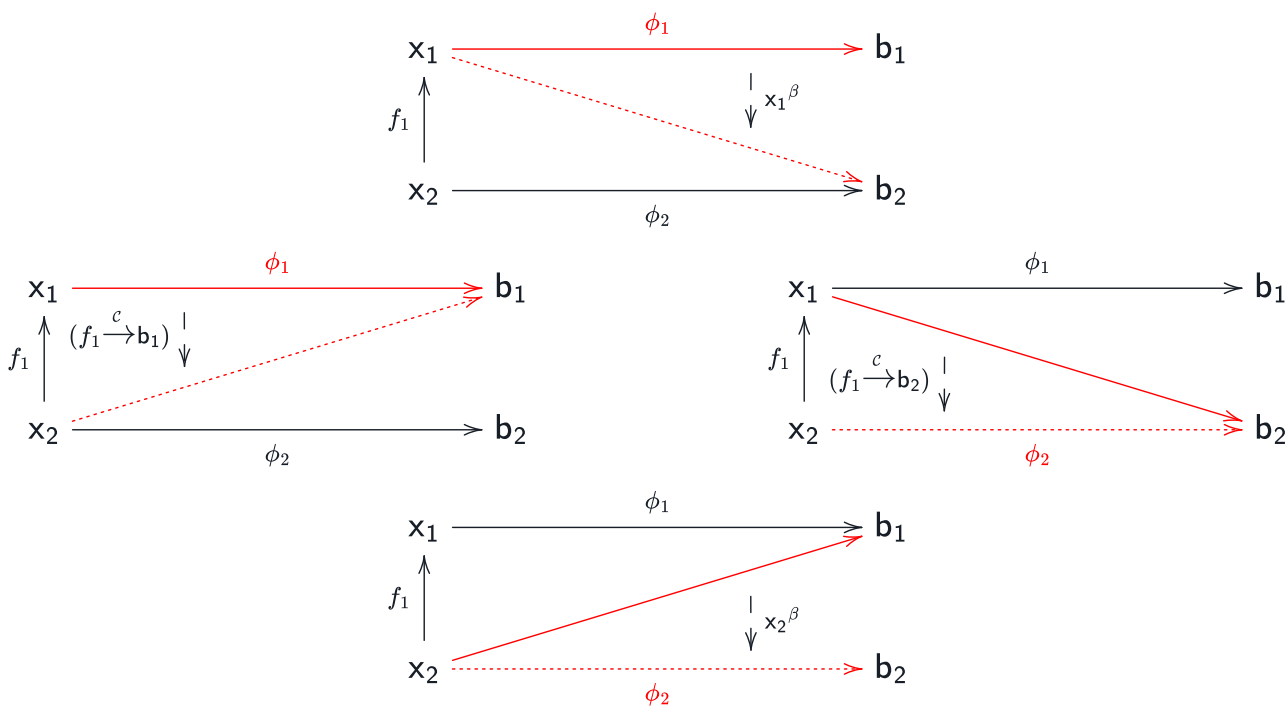
- $0! = 1!$ 为同构 —— 这是因为 $0 \xrightarrow{\mathcal{C}} 0 = \{\text{id}\}, 1 \xrightarrow{\mathcal{C}} 1 = \{\text{id}\}$

自然变换的性质

下图即为自然性对应的形象解释。
后面会将自然性进行进一步推广。



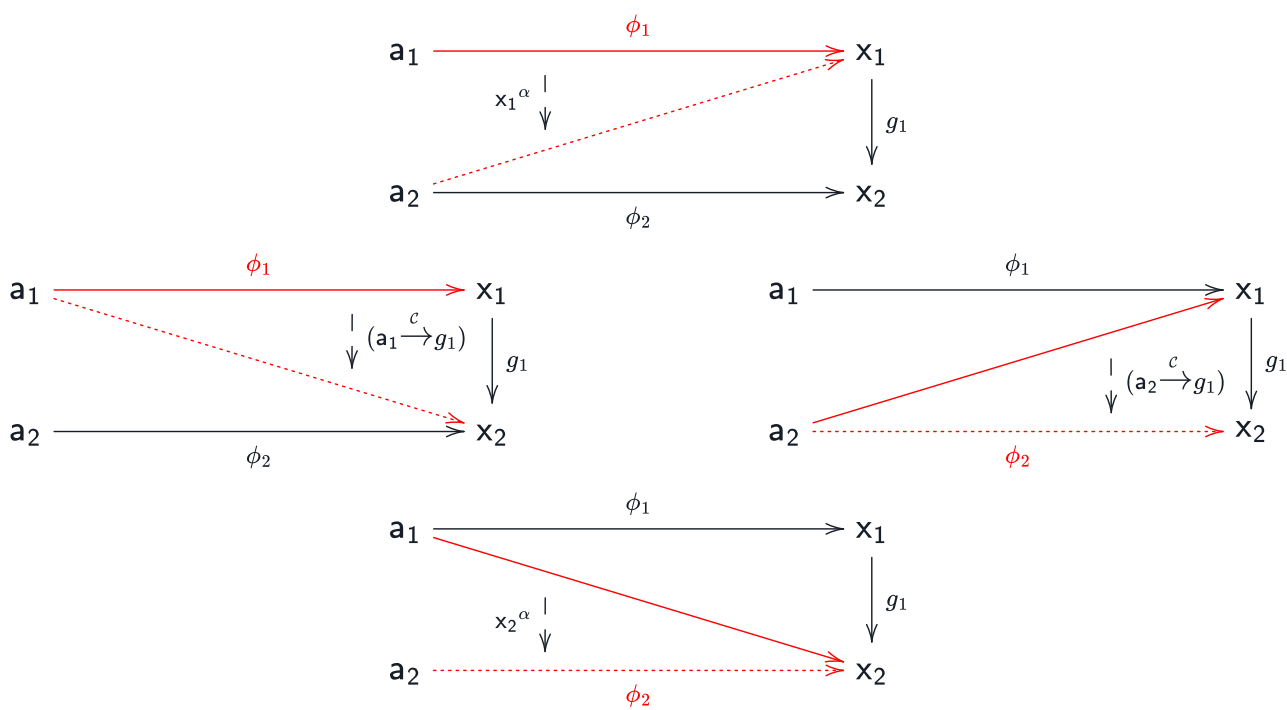
若提供自然变换 β 满足自然性 —— 即对任意 \mathcal{C} 中对象 x_1, x_2 及任意 \mathcal{C} 中映射 $f_1: x_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} x_1$ 都会有 $(f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_1) \circ_{Set} x_2^\beta = x_1^\beta \circ_{Set} (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} b_2)$ (即下图自西向南走向操作结果同自北向东):



那么我们便会有下述结论：

- $b_1 \cong b_2$ 当且仅当对任意 \mathcal{C} 中对象 x x^β 都是同构。此时称 β 为**自然同构**。

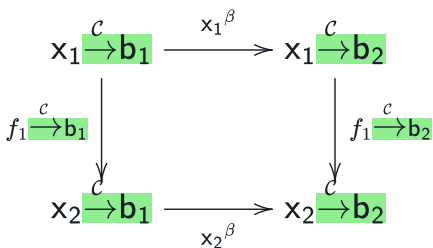
若提供自然变换 α 满足自然性 —— 即对任意 \mathcal{C} 中对象 x_1, x_2 以任意 \mathcal{C} 中映射 $g_1: x_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} x_2$ 都会有 $(a_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) \circ_{Set} x_2^\alpha = x_1^\alpha \circ_{Set} (a_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1)$ (即下图自西向南走向操作结果同自北向东):



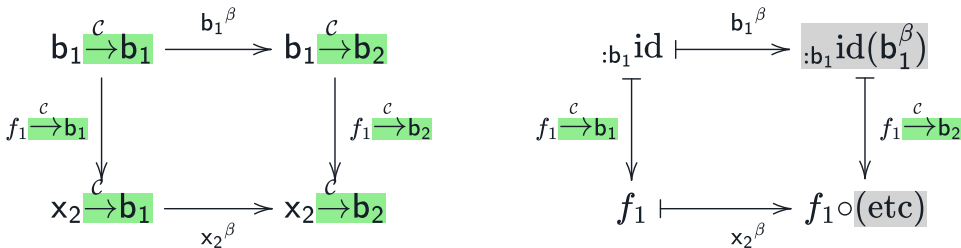
那么我们便会有下述结论：

- $a_1 \cong a_2$ 当且仅当对任意 \mathcal{C} 中对象 x x^α 都是同构。此时称 α 为**自然同构**。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为



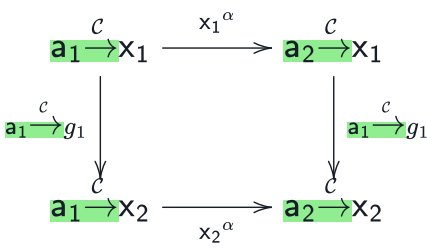
⇒ 易证 , ⇐ 用到了米田技巧 (考虑特殊情况)



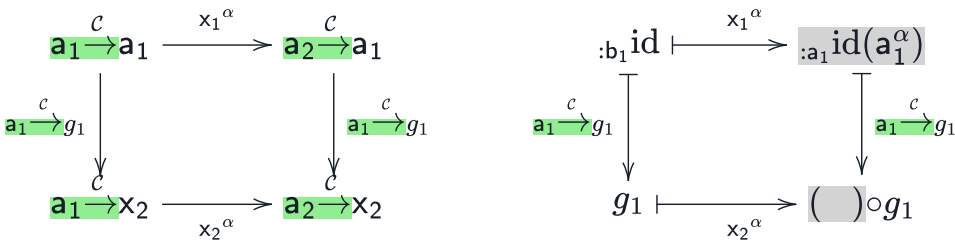
为了方便就用 (etc) 表示 $:_{b_1} \text{id}(b_1^\beta)$ 。由上图可知 $f_1(x_2^\beta) = f_1 \circ^c (etc)$, 故 $x_2^\beta = x_2 \xrightarrow{c} (etc)$; 而 $x_2^\beta = x_2 \xrightarrow{c} (etc) = x_2 \circ^{(c \circ (etc))}$ 是同构 , 从而知 $((etc) \circ _)$ 是同构 , $(etc) : b_1 \xrightarrow{c} b_2$ 也是 。

高亮部分省去了部分推理过程 , 具体在米田嵌入处会详细介绍 。

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为



⇒ 易证 , ⇐ 用到了米田技巧 (考虑特殊情况)



为了方便就用 (etc) 表示 $:_{a_1} \text{id}(a_1^\alpha)$ 。由上图可知 $g_1(x_2^\alpha) = (etc) \circ^c g_1$, 故 $x_2^\alpha = (etc) \xrightarrow{c} x_2$; 而 $x_2^\alpha = (etc) \xrightarrow{c} x_2 = x_2 \circ^{((etc) \circ _)}$ 是同构 , 从而知 $(_ \circ^c (etc))$ 是同构 , $(etc) : a_1 \xrightarrow{c} a_2$ 也是 。

高亮部分省去了部分推理过程 , 具体在米田嵌入处会详细介绍 。

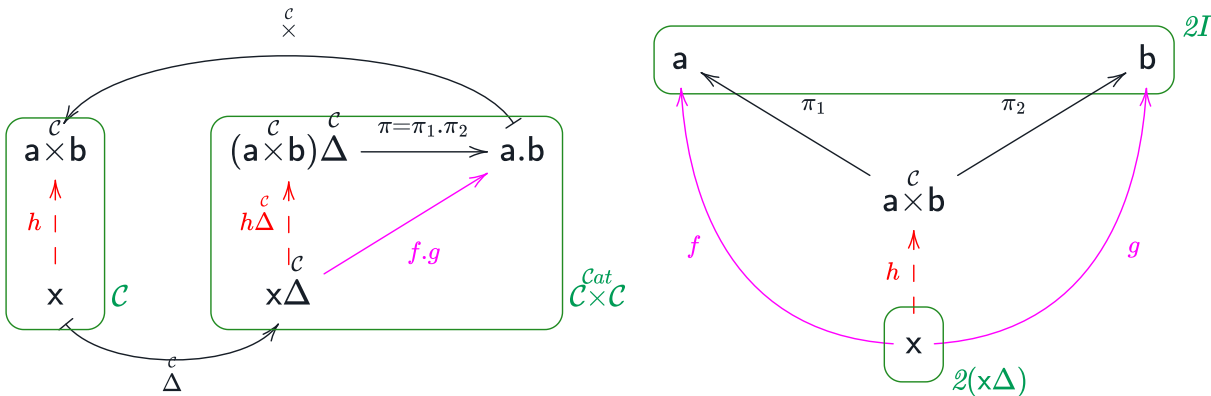
章节 04 - 05 类型的积与和

L^AT_EX Definitions are here.

积与和的泛性质

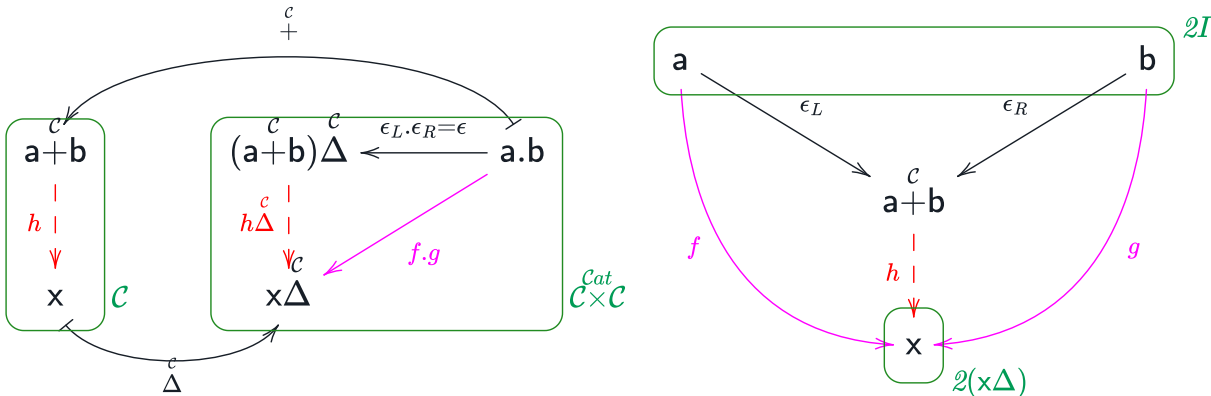
默认函子 $\times : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{C}$ 在范畴 \mathcal{C} 中有下述性质：

- $(x \xrightarrow{\mathcal{C}} a) \times (x \xrightarrow{\mathcal{C}} b) \cong (x \xrightarrow{\mathcal{C}} (a \times b))$, x 为任意 \mathcal{C} 中对象。
—— **泛性质** , 指数对乘法的分配律 。 下图便于形象理解：



默认函子 $+$: $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{C}$ 在范畴 \mathcal{C} 中有下述性质：

- $(a \xrightarrow{\mathcal{C}} x) \times (b \xrightarrow{\mathcal{C}} x) \cong ((a + b) \xrightarrow{\mathcal{C}} x)$, x 为任意 \mathcal{C} 中对象。
—— **泛性质** , 指数对加法的分配律 。 下图便于形象理解：



Note

在上面的插图中：

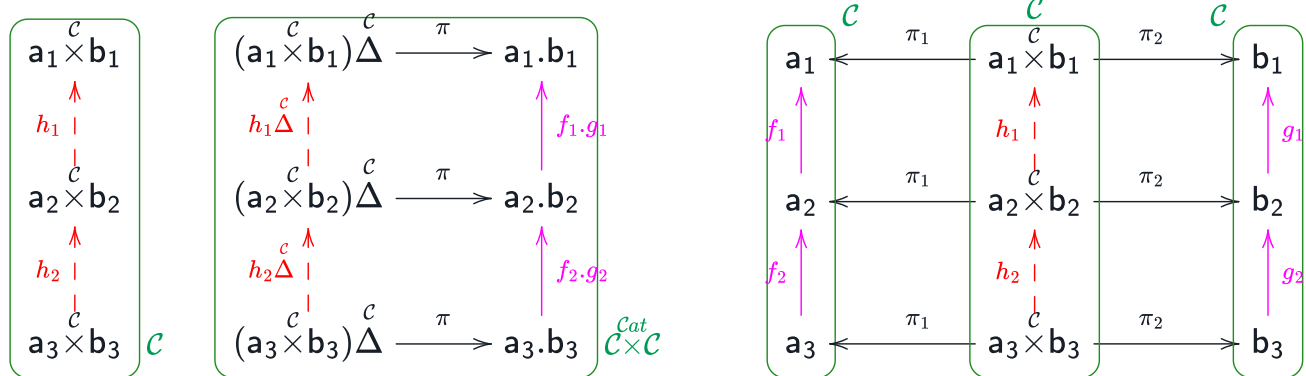
- $\Delta : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ 为对角函子 , 满足 $\Delta : c \mapsto c \cdot c$
- $I : \mathcal{2} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{C}$ 为函子 , 满足 $I : 1 \mapsto a$ $2 \mapsto b$ $\mathcal{2}$ 为只有两个对象的范畴 , 1 和 2 分别为其中的对象 。 这里 $\mathcal{2}$ 充当一个指标范畴 。

积与和的函子性

如何证明 \times^c 构成函子呢？请看

- $\times : ({}_a \text{id} : {}_b \text{id}) \mapsto {}_a \times {}_b \text{id}$
 —— 即函子 \times **保持恒等箭头**；
- $\times : (f_2 \circ f_1 : g_2 \circ g_1) \mapsto h_2 \circ h_1$
 —— 即函子 \times **保持箭头复合运算**。

下图有助于形象理解证明的过程：



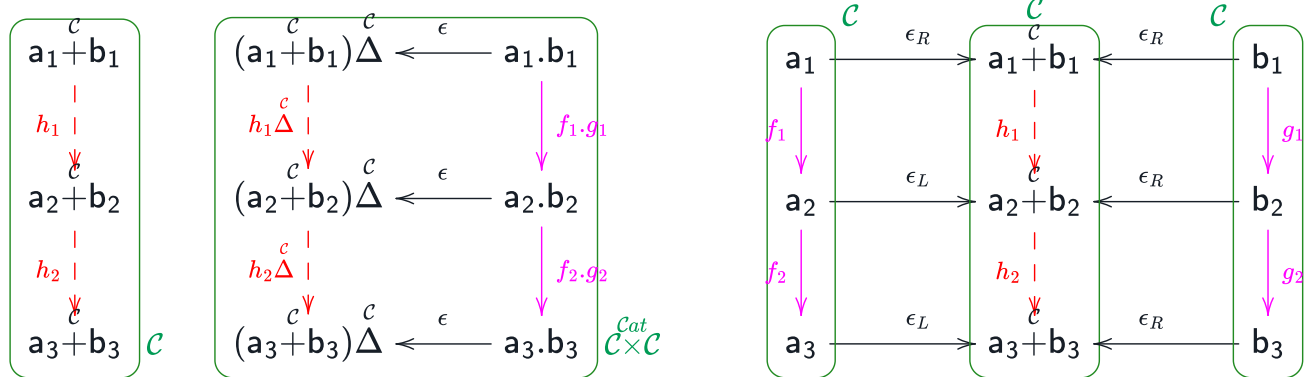
另外规定 $\overset{c}{\times}$ 在实参分别为箭头和对象时的输出：

- $\overset{c}{\times} : (f_1 \cdot \mathbf{b}_1) \longmapsto f_1 \overset{c}{\times} \mathbf{b}_1 \text{id}$
 $\overset{c}{\times} : (\mathbf{a}_1 \cdot g_1) \longmapsto \mathbf{a}_1 \text{id} \overset{c}{\times} g_1$

如何证明 $\overset{c}{+}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{c}{+} : (:_{a_1} \text{id} . :_{b_2} \text{id}) \mapsto :_{a_1 + b_1} \text{id}$
—— 即函子 + 保持恒等箭头；
- $\overset{c}{+} : (f_1 \overset{c}{\circ} f_2 . g_1 \overset{c}{\circ} g_2) \mapsto h_1 \overset{c}{\circ} h_2$
—— 即函子 + 保持箭头复合运算。

下图有助于形象理解证明的过程：



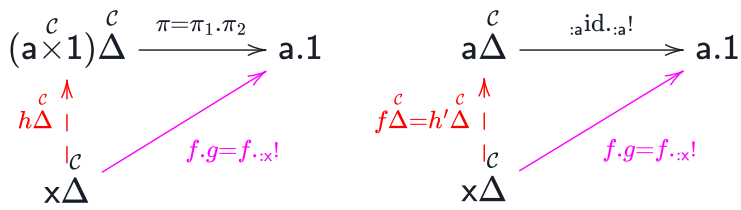
同理规定 $\overset{c}{+}$ 在实参分别为箭头和对象时的输出：

- $\overset{c}{\times} : (f_1 \cdot \mathbf{b}_1) \longmapsto f_1 \overset{c}{+} \mathbf{b}_1 \text{id}$
 $\overset{c}{\times} : (\mathbf{a}_1 \cdot g_1) \longmapsto \mathbf{a}_1 \text{id} \overset{c}{+} g_1$

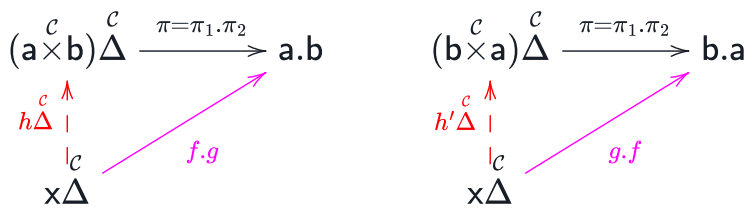
积与和的运算性质

对于函子 $\times^{\mathcal{C}}$ 我们不难得知

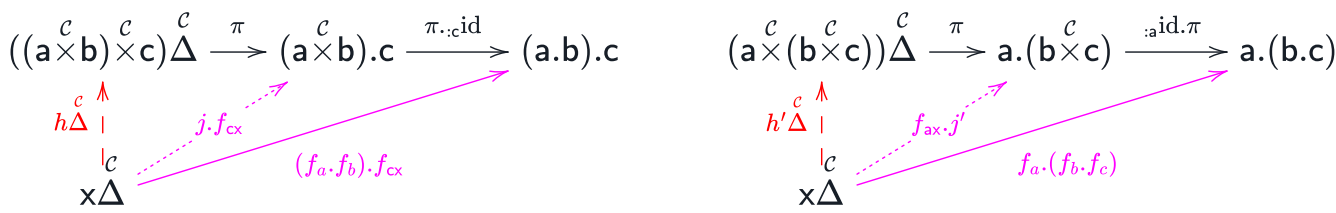
- $\mathbf{a} \times^{\mathcal{C}} \mathbf{1} \cong \mathbf{1} \times^{\mathcal{C}} \mathbf{a} \cong \mathbf{a}$ —— 乘法有**么元 1**。
下图便于理解证明： (f, g) 决定 h, h' 。



- $\mathbf{a} \times^{\mathcal{C}} \mathbf{b} \cong \mathbf{b} \times^{\mathcal{C}} \mathbf{a}$ —— 乘法运算有**交换律**。
下图便于理解证明： (f, g) 决定 h, h' 。

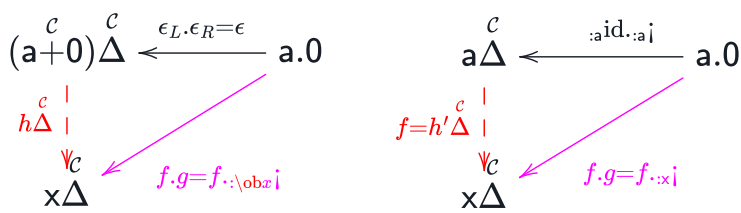


- $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \cong \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ —— 乘法运算具有**结合律**。
下图有助于形象理解证明： (f_{ax}, f_{bx}, f_{cx}) 决定 h, h' 。

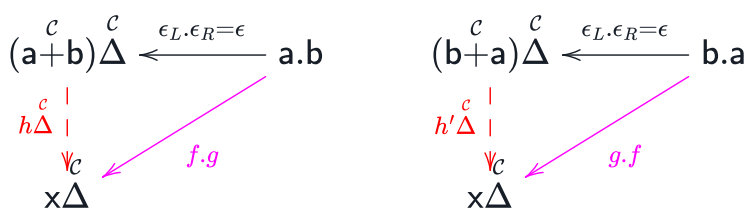


对于函子 $+\mathcal{C}$ 我们不难得知

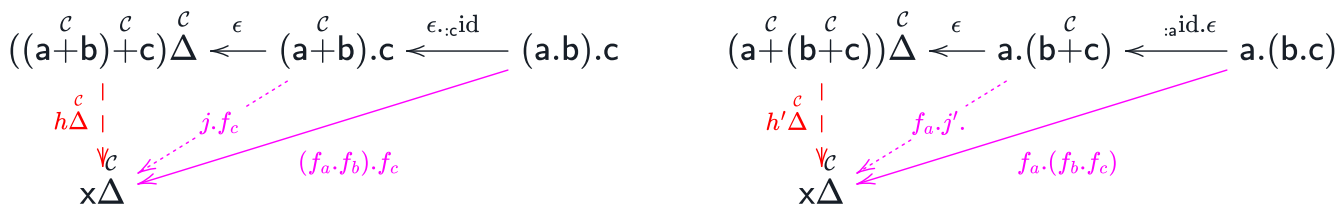
- $\mathbf{a} + \mathbf{0} \cong \mathbf{0} + \mathbf{a} \cong \mathbf{a}$ —— 加法有**么元 0**。
下图有助于理解： (f, g) 决定 h, h' 。



- $\mathbf{a} + \mathbf{b} \cong \mathbf{b} + \mathbf{a}$ —— 加法运算有**交换律**。
下图有助于理解： (f, g) 决定 h, h' 。



- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} \cong \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ —— 加法运算具有**结合律**。
下图有助于形象理解证明： (f_{ax}, f_{bx}, f_{cx}) 决定 h, h' 。



么半范畴

像刚才这样对象运算具有**单位元**以及**结合律**的范畴称作**么半范畴**；

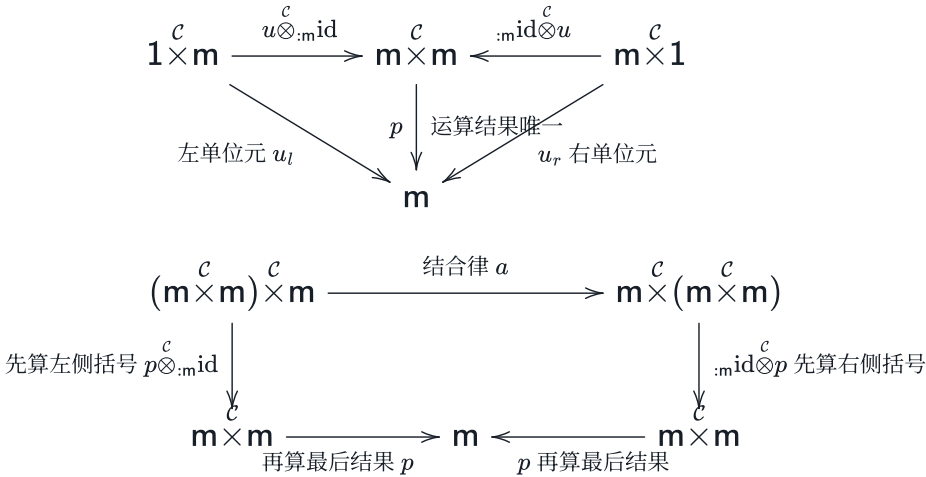
若上述范畴还具有**交换律**则称作**对称么半范畴**；

很明显我们的范畴 \mathcal{C} 是典型的**对称么半范畴**。

么半群

什么是么半群呢？有两种定义方式：

- **么半群** \mathcal{M} 是个范畴，其只含一个对象 m ；其中的复合运算正好有单位元以及结合律。
- 对象 m 属于么半范畴 \mathcal{C} ，满足下述交换图：



其中

- $u : 1 \xrightarrow{\mathcal{C}} m$ 其实就是 m 里面的么元
- $u_l : 1 \times m \xrightarrow{\mathcal{C}} m$ 表示 u 构成左么元
- $u_r : m \times 1 \xrightarrow{\mathcal{C}} m$ 表示 u 构成右么元
- $p : m \times m \xrightarrow{\mathcal{C}} m$ 即为 m 中的二元运算
- $a : (m \times m) \times m \xrightarrow{\mathcal{C}} m \times (m \times m)$ 表示 m 具有结合律

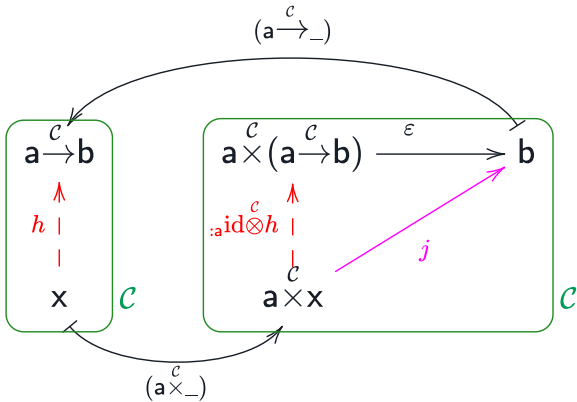
章节 06 类型的指数

L^AT_EX Definitions are here.

指数的泛性质

默认函子 $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \overset{Cat}{\longrightarrow} \mathcal{C}$ 在范畴 \mathcal{C} 中有下述性质：

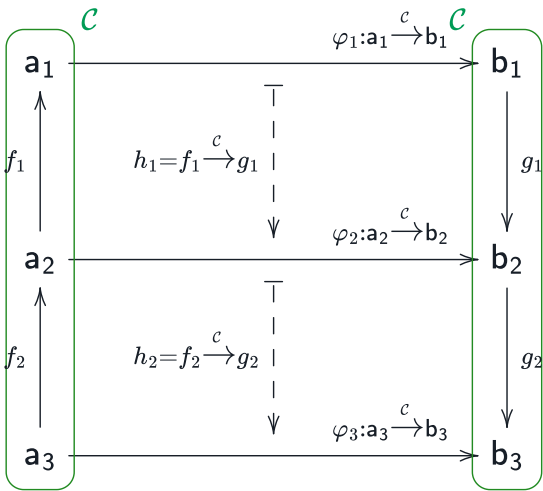
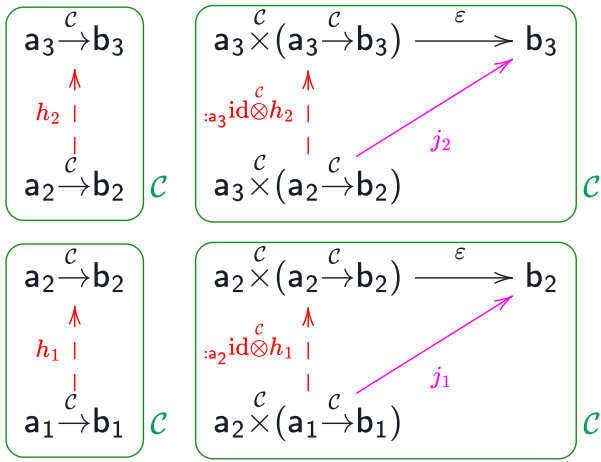
- $\underline{(a \overset{\mathcal{C}}{\times} x) \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} b \cong x \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} (a \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} b) \cong a \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} (x \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} b)}$, x 为任意 \mathcal{C} 中对象
—— **泛性质** , 指数与加乘法运算间的关系 。 下图便于理解证明：



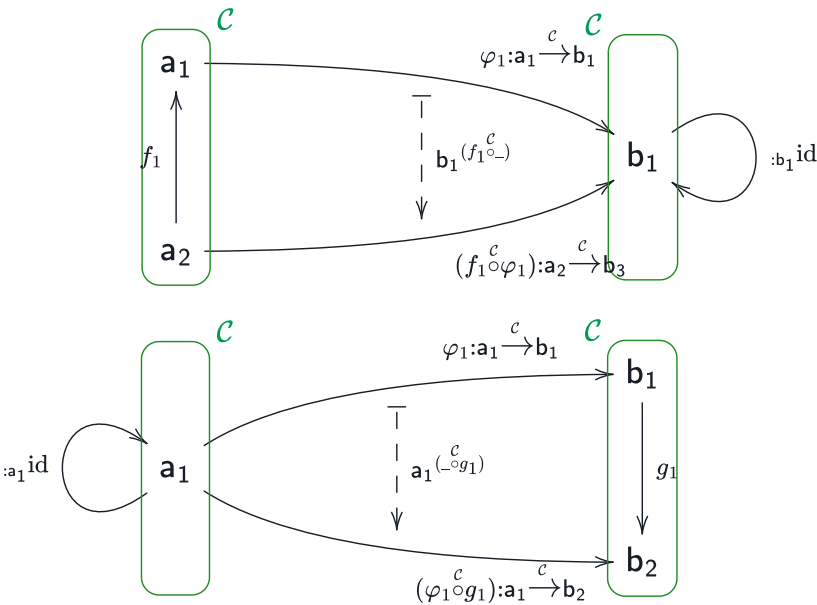
指数的函子性

如何证明 $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} : (:_{a_1} \text{id} \cdot :_{b_1} \text{id}) \longmapsto :_{(a_1 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} b_1)} \text{id}$
—— 即函子 $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow}$ 能**保持恒等箭头**；
 - $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} : (f_2 \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_1 \cdot g_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} g_2) \longmapsto h_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} h_2$
—— 即函子 $\overset{\mathcal{C}}{\rightarrow}$ **保持箭头复合运算**。
- 下图有助于形象理解证明过程：



下图 (自上到下分别为图 1 和图 2) 后面会用到。



范畴 \mathcal{C} 内任意两对象 \mathbf{a}_1 和 \mathbf{b}_1 间的箭头构成一个集合 $\mathbf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1$,
说明 $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ 只能将两个对象打到一个集合。下面使 $\xrightarrow{\mathcal{C}}$ 升级为函子：
若还知道箭头 $f_1 : \mathbf{a}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{a}_1$ 以及 $g_1 : \mathbf{b}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_2$, 则规定

- $(\xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{S}et$ 为函子且
 $(\xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1) : \mathbf{a}_1 \longmapsto (\mathbf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1)$, 并且有
 $(\xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1) : f_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{b}_1) = (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \cdot_{\mathbf{b}_1} \text{id}) = \mathbf{b}_1^{(f_1 \circ _)}$

图 1 有助于理解。

$$\begin{aligned} &(\xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{S}et \\ &(\xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) : \mathbf{a}_1 \longmapsto (\mathbf{a}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) = (\cdot_{\mathbf{a}_1} \text{id} \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) = \mathbf{a}_1^{(_ \circ g_1)} \\ &(\xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) : f_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} g_1) = (f_1 \circ _) \xrightarrow{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et} (_ \circ g_1) = (_ \circ g_1)^{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et} (f_1 \circ _) \end{aligned}$$

图 2 有助于理解。

<

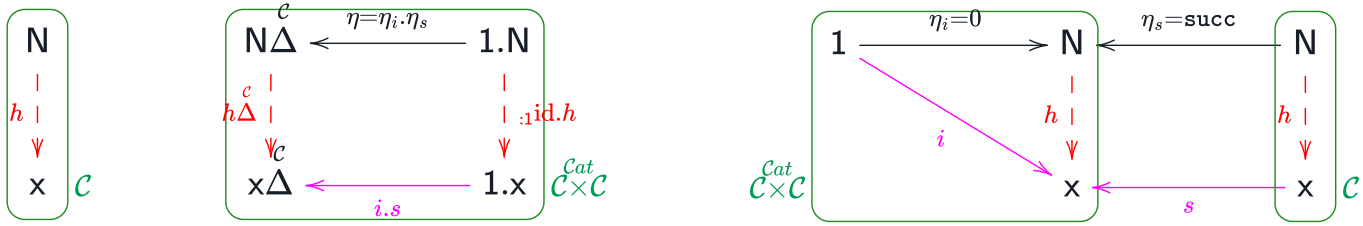
章节 07 递归类型

L^AT_EX Definitions are here.

自然数与列表的泛性质

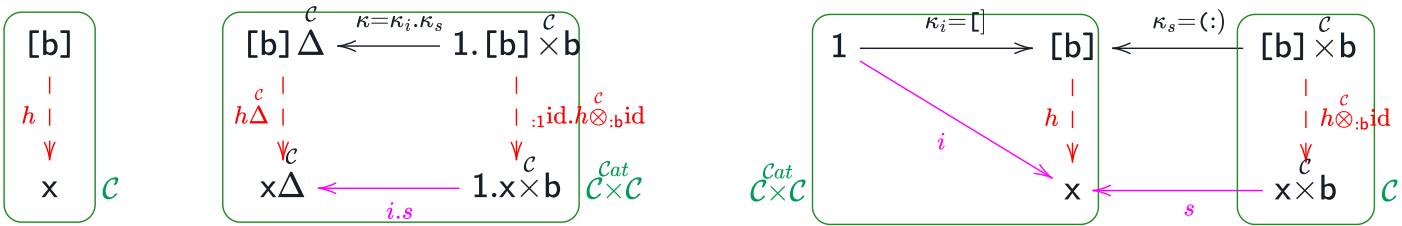
默认对象 N 在范畴 \mathcal{C} 中有下述性质：

- $(1 \xrightarrow{\mathcal{C}} x) \times^{Cat} (x \xrightarrow{\mathcal{C}} x) \cong (N \xrightarrow{\mathcal{C}} x)$, x 为任意 \mathcal{C} 中对象
—— **泛性质**。`rec` 即对应的同构 (上式从左至右)。



默认函子 $[_] : \mathcal{C} \xrightarrow{Cat} \mathcal{C}$ 在范畴 \mathcal{C} 中有下述性质：

- $(1 \xrightarrow{\mathcal{C}} x) \times^{Cat} ((x \times b) \xrightarrow{\mathcal{C}} x) \cong ([b] \xrightarrow{\mathcal{C}} x)$, x 为任意 \mathcal{C} 中对象
—— **泛性质**。`foldr` 即对应的同构 (上述等式从左至右)。



列表的函子性

如何证明 $[]$ 构成函子呢？请看

- $[] : :b_1 \text{ id} \mapsto :[b_1] \text{ id}$
—— $[]$ **保持恒等箭头**；
- $[] : (g_1 \circ g_2) \mapsto (h_1 \circ h_2)$
—— $[]$ **保持箭头复合运算**。

下图便于形象理解证明过程。

