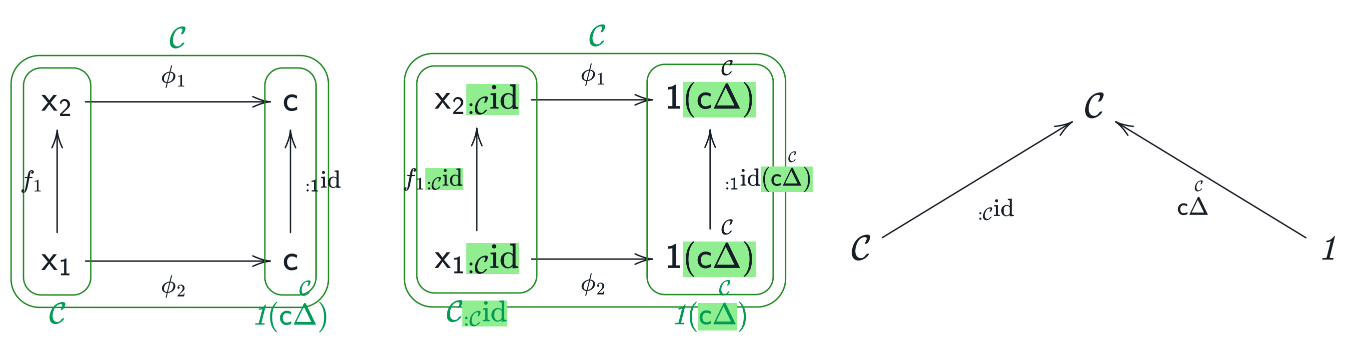
章节 08 函子

LaTeX Definitions are here.

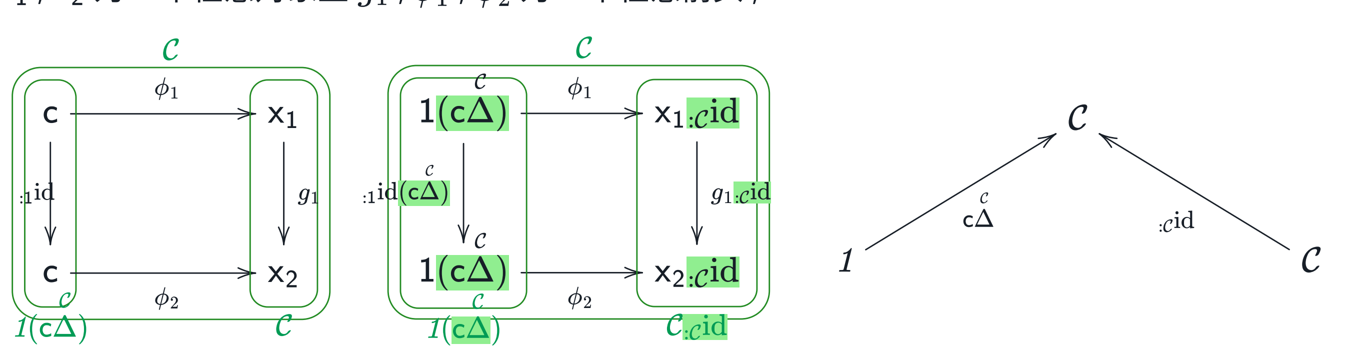
一些特殊的范畴

先规定几种特殊的范畴：

- **离散范畴**：只有对象不含箭头（恒等箭头除外）的范畴。
- $\mathcal{S}et$：**集合范畴**，为局部小范畴，满足
  - $\mathcal{S}et$ 中对象可以是任意集合
  - $\mathcal{S}et$ 中箭头便是集合间映射。
- $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$：**反范畴**，满足
  - $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中对象皆形如 c，
    c 为任意 $\mathcal{C}$ 中的对象；
  - $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中箭头皆形如 $\phi^{\mathrm{op}} : \mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}_1$，
    $\phi : \mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_2$ 可为任意 $\mathcal{C}$ 中的箭头。
- $\mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{D}$：**积范畴**，满足
  - $\mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{D}$ 中对象皆形如 $\mathsf{c} \,.\, \mathsf{d}$，
    c，d 为任意 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$ 中的对象；
  - $\mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{D}$ 中箭头皆形如 $\phi \,.\, \psi$，
    ϕ，ψ 为任意 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$ 中的箭头。
- $\mathcal{C}/\mathsf{c}$：**俯范畴**，这里 c 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象；满足
  - $\mathcal{C}/\mathsf{c}$ 中对象皆形如 $\cancel{\mathsf{x} \,.\, 1 \,.}\, \phi$，其中 x
    和 $\phi : \mathsf{x} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}$ 分别为 $\mathcal{C}$ 中任意的对象和箭头；
  - $\mathsf{c}/\mathcal{C}$ 中箭头皆形如 $f_1 \cancel{\,.\, :_{\mathcal{C}}\mathrm{id}}$ 且满足下述交换图，其中
    x_1，x_2 为 $\mathcal{C}$ 中任意对象且 f_1，ϕ_1，ϕ_2 为 $\mathcal{C}$ 中任意箭头；



- $\mathsf{c}/\mathcal{C}$：**仰范畴**，这里 c 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象；满足
  - $\mathsf{c}/\mathcal{C}$ 中对象皆形如 $\cancel{1 \,.\, \mathsf{x} \,.}\, \phi$，其中 x
    和 $\phi : \mathsf{c} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{x}$ 分别为 $\mathcal{C}$ 中对象和箭头；
  - $\mathcal{C}/\mathsf{c}$ 中箭头皆形如 $\cancel{:_{\mathcal{C}}\mathrm{id} \,.}\, g_1$ 且满足下述交换图，其中
    x_1，x_2 为 $\mathcal{C}$ 中任意对象且 g_1，ϕ_1，ϕ_2 为 $\mathcal{C}$ 中任意箭头；



函子

考虑范畴 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, 现提供函子定义 :

- $P : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$ 为范畴当且仅当
  - 对任意 $\mathcal{C}$ 中对象 c , $\mathsf{c}P$ 为 $\mathcal{D}$ 中对象且 ${}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}P = {}_{:\mathsf{c}P}\mathrm{id}$;
  - 对任意 $\mathcal{C}$ 中箭头 $\phi_1 : \mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_2$ 和 $\phi_2 : \mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_3$, 始终都有等式 $(\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_2)P = \phi_1 P \overset{\mathcal{D}}{\circ} \phi_2 P$ 成立 。

函子的复合

假如刚才的 P 确实构成一个函子
且 $Q : \mathcal{D} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{E}$ 也构成函子 , 那么

- $P \overset{\mathcal{C}at}{\circ} Q : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{E}$
  也构成一个函子 。

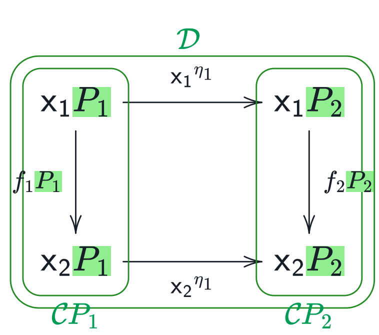
忠实和完全函子

若 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ 皆为**局部小范畴** , 则

- P 是**忠实的**当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 c_1 , c_2 $(\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_2)$ 与 $(\mathsf{c}_1 P \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathsf{c}_2 P)$ 之间始终存在单射 ;
- P 是**完全的**当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 c_1 , c_2 $(\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_2)$ 与 $(\mathsf{c}_1 P \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathsf{c}_2 P)$ 之间始终存在满射 ;
- P 是**完全忠实的**当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 c_1 , c_2 $(\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_2)$ 与 $(\mathsf{c}_1 P \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathsf{c}_2 P)$ 之间始终存在双射 (即集合间同构) 。

> **Note**
>
> 刚才提到的 " 单 / 满 / 双射 "
> 针对的都是范畴的箭头部分 。

若还知道 $P_1, P_2 : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$ 为函子 , 则



- 函子 $P_1 : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$,
  函子 $P_2 : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$,
  函子的复合 : $P_1 \circ P_2$
- 自然变换 $\eta_1 : P_1 \xrightarrow{\mathcal{C}at} Q_1$,
  自然变换 $\eta_2 : P_1 \xrightarrow{\mathcal{C}at} Q_1$,
  自然变换 $\theta_1 : Q_1 \xrightarrow{\mathcal{C}at} R_1$
  自然变换的纵复合 : $\eta_1 \circ_{\mathrm{v}} \eta_2$,
  自然变换的横复合 : $\eta_1 \circ_{\mathrm{h}} \theta_1$,