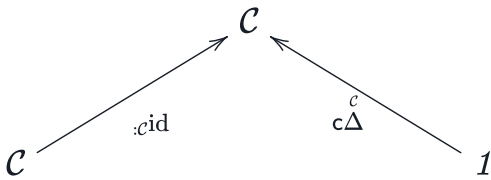
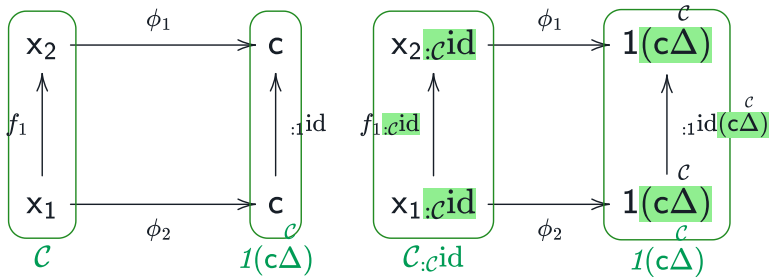


章节 08 函子

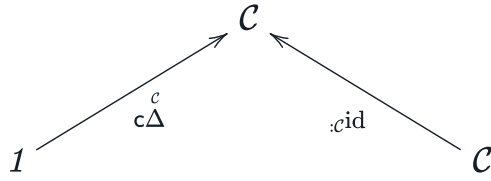
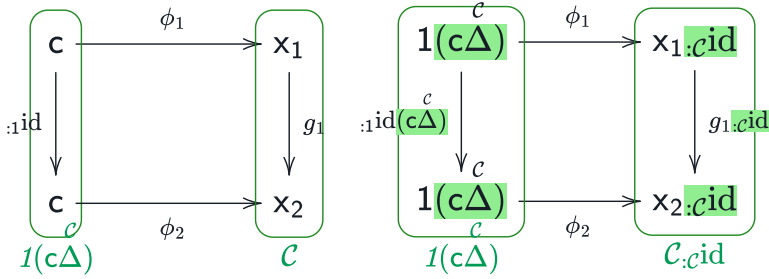
L^AT_EX Definitions are here.

先规定几种特殊的范畴：

- **离散范畴**：只有对象不含箭头 (恒等箭头除外) 的范畴。
- *Set*：**集合范畴**，为局部小范畴，满足
 - *Set* 中对象可以是任意集合
 - *Set* 中箭头便是集合间映射。
- \mathcal{C}^{op} ：**反范畴**，满足
 - \mathcal{C}^{op} 中对象皆形如 \mathbf{c} ， \mathbf{c} 为任意 \mathcal{C} 中的对象；
 - \mathcal{C}^{op} 中箭头皆形如 $\phi^{\text{op}} : \mathbf{c}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}^{\text{op}}} \mathbf{c}_1$ ， $\phi : \mathbf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{c}_2$ 可为任意 \mathcal{C} 中的箭头。
- $\mathcal{C} \times^{\text{Cat}} \mathcal{D}$ ：**积范畴**，满足
 - $\mathcal{C} \times^{\text{Cat}} \mathcal{D}$ 中对象皆形如 $\mathbf{c} . \mathbf{d}$ ， \mathbf{c}, \mathbf{d} 为任意 \mathcal{C}, \mathcal{D} 中的对象；
 - $\mathcal{C} \times^{\text{Cat}} \mathcal{D}$ 中箭头皆形如 $\phi . \psi$ ， ϕ, ψ 为任意 \mathcal{C}, \mathcal{D} 中的箭头。
- \mathcal{C}/\mathbf{c} ：**俯范畴**，这里 \mathbf{c} 为任意 \mathcal{C} 中对象；满足
 - \mathcal{C}/\mathbf{c} 中对象皆形如 $\cancel{\mathbf{x}} . \cancel{1} . \phi$ ，其中 \mathbf{x} 和 $\phi : \mathbf{x} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{c}$ 分别为 \mathcal{C} 中对象和箭头；
 - \mathbf{c}/\mathcal{C} 中箭头皆形如 $\cancel{f_1} . \cancel{.id}$ 且满足下述交换图，其中 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 为 \mathcal{C} 中对象且 $\phi_1, \phi_2, f_1, .id$ 皆为 \mathcal{C} 中箭头；



- \mathbf{c}/\mathcal{C} ：**仰范畴**，这里 \mathbf{c} 为任意 \mathcal{C} 中对象；
 - \mathbf{c}/\mathcal{C} 中对象皆形如 $\cancel{1} . \cancel{\mathbf{x}} . \phi$ ，其中 \mathbf{x} 和 $\phi : \mathbf{c} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{x}$ 分别为 \mathcal{C} 中对象和箭头；
 - \mathcal{C}/\mathbf{c} 中箭头皆形如 $\cancel{.id} . \cancel{g_1}$ 且满足下述交换图，其中 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 为 \mathcal{C} 中对象且 $\phi_1, \phi_2, .id, g_1$ 皆为 \mathcal{C} 中箭头；



考虑范畴 \mathcal{C} 和 \mathcal{D} ，现提供函子定义：

- $\Phi : \mathcal{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathcal{D}$ 为范畴当且仅当
 - 对任意 \mathcal{C} 中对象 \mathbf{c}
 $\mathbf{c}\Phi$ 为 \mathcal{D} 中对象且
 $.id\Phi = ._{\mathbf{c}\Phi}id$ ；
 - 对任意 \mathcal{C} 中箭头 $\phi_1 : \mathbf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{c}_2$ 和 $\phi_2 : \mathbf{c}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{c}_3$ ，
始终都有等式 $(\phi_1 \circ^{\mathcal{C}} \phi_2)\Phi = \phi_1\Phi \circ^{\mathcal{D}} \phi_2\Phi$ 成立。

假如 \mathcal{C}, \mathcal{D} 皆为**局部小范畴**，并且
刚才的 Φ 确实构成一个函子， 则

- Φ 是**忠实的**当且仅当对任意 \mathcal{C} 中对象 \mathbf{c}_1 和 \mathbf{c}_2
 $(\mathbf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbf{c}_2)$ 与 $(\mathbf{c}_1\Phi \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbf{c}_2\Phi)$ 之间始终存在单射；

