

反协变米田引理

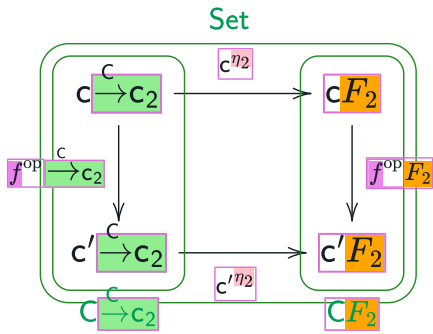
若知 $F_2 : \mathbf{C}^{\text{op}} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{Set}$ 则

反变米田引理的陈述如下：

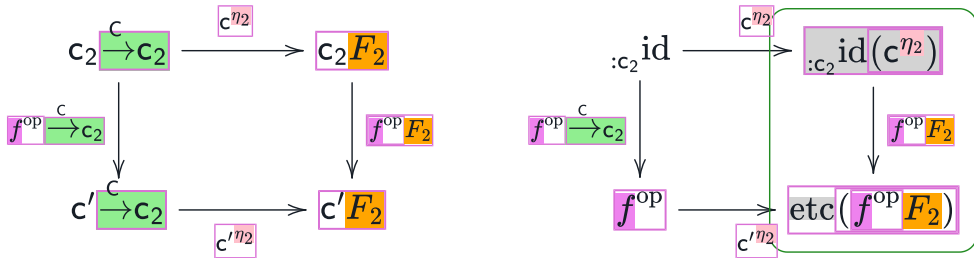
- $$\underbrace{\left(\left(\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{c}_2 \right) \xrightarrow{\mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}} F_2 \right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\left(\mathbf{c}_2 F_2 \right)}_{\text{一堆元素}}$$

反变米田引理的证明如下：

1. \Leftarrow ：考虑任意 $(\mathbf{c}_2 F_2)$ 中的 etc ：根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_2} ，于是便可构建一个完整的 η_2 。易知 η_2 是一个自然变换。



2. \Rightarrow ：考虑任意等式左侧的 η_1 ：若上述交换图成立则可对任意 η_1 指派 $\text{etc} = \text{id}(c^{\eta_1})$ 为 $\mathbf{c}_2 F_2$ 中与之对应的元素；



为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！

c_2 唯一地确定了 η_2 ，反之 η_2 也唯一确定了 c_2 。

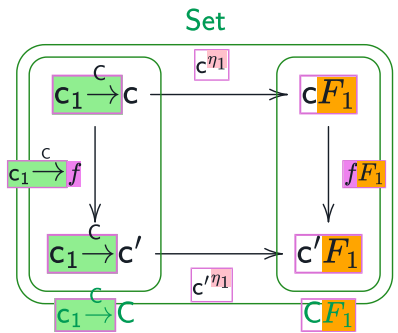
若还知 $F_1 : \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathbf{Set}$ 则

协变米田引理的陈述如下：

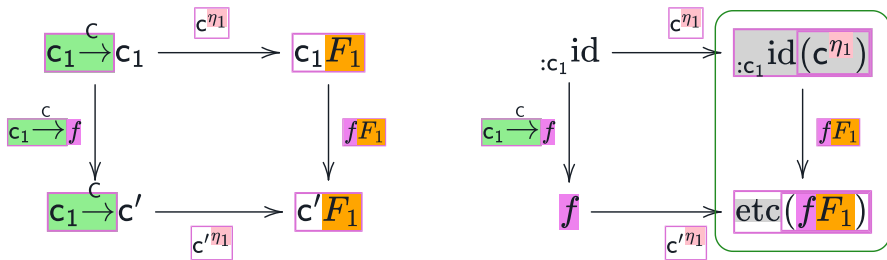
- $$\underbrace{\left(\left(\mathbf{c}_1 \rightarrow _ \right) \xrightarrow{\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}} F_1 \right)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{\left(\mathbf{c}_1 F_1 \right)}_{\text{一堆元素}}$$

协变米田引理的证明如下：

1. \Leftarrow ：考虑任意 $(\mathbf{c}_1 F_1)$ 中的 etc ：根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_1} ，于是便可构建一个完整的 η_1 。易知 η_1 是一个自然变换。



2. \Rightarrow ：考虑任意等式左侧的 η_1 ：若上述交换图成立则可对任意 η_1 指派 $\text{etc} = \text{id}(c^{\eta_1})$ 为 $\mathbf{c}_1 F_1$ 中与之对应的元素；



为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！

c_1 唯一地确定了 η_1 ，反之 η_1 也唯一确定了 c_1 。

可表和余可表函子的泛性质

接下来定义一个重要的概念：

- F_2 为**可表函子**当且仅当
存在 C^{op} 中对象 c_2 使得
 $(_ \xrightarrow{c} c_2) = c_2 \bowtie _ \cong F_2$ 成立 ,
即 $c_2 \bowtie$ 与 F_2 间存在自然同构。
此时称 F_2 可由对象 c_2 **表出**。

同理我们也有如下对偶概念：

- F_1 为**余可表函子**当且仅当
存在 C 中对象 c_1 使得
 $(c_1 \xrightarrow{c} _) = c_1 \lrcorner _ \cong F_1$ 成立。
即 $c_1 \lrcorner$ 与 F_1 间存在自然同构。
此时称 F_1 可由对象 c_1 **余可表出**。

米田和尤达嵌入

根据前面的内容我们可知

- よ : $C \xrightarrow{Cat} ((C^{op} \xrightarrow{Set} Set))$
 $c_2 \mapsto (c_2 \xrightarrow{C^{op}} _) = (_ \xrightarrow{C} c_2)$ 构成一个函子，称作预层
 $f_2 \mapsto (f_2 \xrightarrow{C^{op}} _) = (_ \xrightarrow{C} f_2) = (_ \circ f_2)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
构成一个完全忠实函子，该函子称作是**米田嵌入**。

证明如下：

- よ 是函子，因为
 - $_{:c_2} id \text{よ} = (_ \circ_{:c_2} id) = _{:(c_2 \text{よ})} id$
 - $(f_2 \circ f'_2) \text{よ} = (_ \circ (f_2 \circ f'_2)) = (_ \circ f_2) \circ_{\xrightarrow{Cat} Set} (_ \circ f'_2) = f_2 \text{よ} \circ f'_2 \text{よ} ,$

由于函子具有保持对象 / 映射性质的能力，
故便可知 $f_2 \text{よ}$ 为同构当且仅当 f_2 为同构。

- よ 是完全忠实的，因为
将反变米田引理中的 F_2
换成 $(c_2 \xrightarrow{C^{op}} _)$
即可获得下述公式：

$$(((c_2 \xrightarrow{C^{op}} _) \xrightarrow{C^{op} \rightarrow Set} (c'_2 \xrightarrow{C^{op}} _))) \cong_{Set} (c'_2 \xrightarrow{C^{op}} c_2)$$

预层范畴的 hom-set

$$C \text{ 的 hom-set}$$

也就是

$$(((c_2 \text{よ}) \xrightarrow{Cat} Set) \xrightarrow{Set} (c'_2 \text{よ})) \cong_{Set} (c'_2 \xrightarrow{C^{op}} c_2) = (c_2 (c'_2 \text{よ}))$$

一堆自然变换

$$C \text{ 的 hom-set}$$

$$\text{一堆元素}$$

Note

由于函子能够保持态射的性质，
对任意左侧集合中的自然同构
右侧集合也会有同构与之对应，反之亦然。
这也就证明了前面自然同构相关定理省略的部分。

根据前面的内容我们可知

- 尤 : $C^{op} \xrightarrow{Cat} (C \xrightarrow{Set} Set)$
 $c_1 \mapsto (c_1 \xrightarrow{C} _)$ 构成一个函子
 $f_1^{op} \mapsto (f_1^{op} \xrightarrow{C} _) = (f_1^{op} \circ _)$ 构成一个函子间映射，即自然变换
构成一个完全忠实函子，该函子称作是**尤达嵌入**。

证明如下：

- 尤 是函子，因为
 - $_{:c_1} id \text{尤} = (_ \circ_{:c_1} id) = _{:(c_1 \text{尤})} id$
 - $(f_1 \circ f'_1) \text{尤} = ((f_1 \circ f'_1) \xrightarrow{C^{op}} _) = (f_1^{op} \circ _) \xrightarrow{Cat} Set (f'_1^{op} \circ _) ,$

- 尤 是完全且忠实的，因为
将协变米田引理中的 F_1
换成 $(c_1 \xrightarrow{C} _)$
即可获得下述公式：

$$(((c_1 \xrightarrow{C} _) \xrightarrow{C \rightarrow Set} (c'_1 \xrightarrow{C} _))) \cong_{Set} (c'_1 \xrightarrow{C} c_1)$$

一堆自然变换

$$\text{一堆元素}$$

也就是

$$(((c_1 \text{尤}) \xrightarrow{Cat} Set) \xrightarrow{Set} (c'_1 \text{尤})) \cong_{Set} (c'_1 \xrightarrow{C} c_1) = (c_1 (c'_1 \text{尤}))$$

一堆自然变换

$$\text{一堆元素}$$

$$\text{一堆元素}$$

Note

由于函子能够保持态射的性质，
对任意左侧集合中的自然同构
右侧集合也会有同构与之对应，反之亦然。
这也就证明了前面自然同构相关定理省略的部分。