$\LaTeX$ Definitions are here.

伴随函子的 unit 与 counit

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[loop above, "{}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id}"] \arrow[rr, bend right, "R"'] && \mathsf{D} \arrow[loop above, "{}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id}"] \arrow[ll, bend right, "L"']
\end{tikzcd}
$$

伴随函子 : 对任意 c 和 d 有 $\boxed{(\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R) \overset{\mathsf{Set}}{\cong} (\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c})}$ 。如此

- 不难看出这其实蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_2 , 见下：

$$\phi_2 : (\_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \_R) \xrightarrow{(\mathsf{D}\times\mathsf{C})\to\mathsf{Set}} (\_L \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$$
$$(\_\,.\,\mathsf{c})^{\phi_2} : (\_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R) \xrightarrow{\mathsf{D}\to\mathsf{Set}} (\_L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c})$$
$$(\mathsf{d}\,.\,\_)^{\phi_2} : (\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \_R) \xrightarrow{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}} (\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$$

套用反变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{(\_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R) \xrightarrow[\mathsf{Cat}]{\mathsf{D}^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Set}} (\_L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}RL \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c})}_{\text{一堆元素}}$$

由反变米田引理的证明可知 : 对每个左侧集合中的自然同构 $(\_\,.\,\mathsf{c})^{\phi_2}$
右侧集合中都有一个箭头与之对应 , 即 $:_{\mathsf{c}R}\mathrm{id}(\mathsf{c}R\,.\,\mathsf{c})^{\phi_2} = \mathsf{c}^{\varepsilon}$ 。如此

- ε 构成自然变换 。

考虑任意 $f^{\mathrm{op}} : \mathsf{c}' \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{c}R \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R \arrow[r, "(\mathsf{c}R.\mathsf{c})^{\phi_2}"] \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}R \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R"'] & \mathsf{c}RL \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c} \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}RL \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}"] \\
\mathsf{c}'R \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R \arrow[r, dashed, "(\mathsf{c}'R.\mathsf{c})^{\phi_2}"] & \mathsf{c}'RL \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c} \\
\mathsf{c}'R \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}'R \arrow[r, "(\mathsf{c}'R.\mathsf{c}')^{\phi_2}"'] \arrow[u, "\mathsf{c}'R \xrightarrow{\mathsf{D}} f^{\mathrm{op}}R"] & \mathsf{c}'RL \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}' \arrow[u, "\mathsf{c}'RL \xrightarrow{\mathsf{C}} f^{\mathrm{op}}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
:_{\mathsf{c}R}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{c}R.\mathsf{c})^{\phi_2}"] \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}R \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R"'] & :_{\mathsf{c}R}\mathrm{id}(\mathsf{c}R.\mathsf{c})^{\phi_2} = \mathsf{c}^{\varepsilon} \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}RL \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c} = \mathsf{c}^{(f^{\mathrm{op}}RL \,\circ\, _)}"] \\
f^{\mathrm{op}}R \arrow[r, mapsto, dashed, "(\mathsf{c}'R.\mathsf{c})^{\phi_2}"] & f^{\mathrm{op}}RL \overset{\mathsf{C}}{\circ} \mathsf{c}^{\varepsilon} = \mathsf{c}'^{\varepsilon} \overset{\mathsf{D}}{\circ} f^{\mathrm{op}} \\
:_{\mathsf{c}'R}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{c}'R.\mathsf{c}')^{\phi_2}"'] \arrow[u, "\mathsf{c}'R \xrightarrow{\mathsf{D}} f^{\mathrm{op}}R"] & :_{\mathsf{c}'R}\mathrm{id}(\mathsf{c}'R.\mathsf{c}')^{\phi_2} = \mathsf{c}'^{\varepsilon} \arrow[u, "\mathsf{c}'RL \xrightarrow{\mathsf{D}} f^{\mathrm{op}} = (\mathsf{c}'RL)^{(_ \overset{\mathsf{D}}{\circ} f^{\mathrm{op}})}"']
\end{tikzcd}$$

上方右图的第二行的第二个节点说明了一切 。这两张图
其实就是反变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果 。

- 不难看出这其实蕴含着一个二元的自然同构 ϕ_1 , 见下：

$$\phi_1 : (\_L \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \xrightarrow{(\mathsf{D}\times\mathsf{C})\to\mathsf{Set}} (\_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \_R)$$
$$(\_\,.\,\mathsf{c})^{\phi_1} : (\_L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}) \xrightarrow{\mathsf{D}\to\mathsf{Set}} (\_ \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R)$$
$$(\mathsf{d}\,.\,\_)^{\phi_1} : (\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}} (\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \_R)$$

套用协变米田引理我们便可获得

$$\underbrace{((\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \xrightarrow[\mathsf{Cat}]{\mathsf{C}\to\mathsf{Set}} (\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \_R))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{Set}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{d}LR)}_{\text{一堆元素}}$$

由协变米田引理的证明可知 : 对每个左侧集合中的自然同构 $(\mathsf{d}\,.\,\_)^{\phi_1}$
右侧集合中都有一个箭头与之对应 , 即 $:_{\mathsf{d}L}\mathrm{id}(\mathsf{d}\,.\,\mathsf{d}L)^{\phi_1} = \mathsf{d}^{\eta}$ 。如此 。

- η 构成自然变换 。

考虑任意 $g : \mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{d}'$:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{d}L \arrow[r, "(\mathsf{d}.\mathsf{d}L)^{\phi_1}"] \arrow[d, "\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} gL"'] & \mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{d}LR \arrow[d, "\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} gLR"] \\
\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{d}'L \arrow[r, dashed, "(\mathsf{d}.\mathsf{d}'L)^{\phi_1}"] & \mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{d}'LR \\
\mathsf{d}'L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{d}'L \arrow[r, "(\mathsf{d}'.\mathsf{d}'L)^{\phi_1}"'] \arrow[u, "gL \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{d}'L"] & \mathsf{d}' \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{d}'LR \arrow[u, "g \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{d}'LR"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
:_{\mathsf{d}L}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{d}.\mathsf{d}L)^{\phi_1}"] \arrow[d, "\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} gL"'] & :_{\mathsf{d}L}\mathrm{id}(\mathsf{d}.\mathsf{d}L)^{\phi_1} = \mathsf{d}^{\eta} \arrow[d, "\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} gLR = \mathsf{d}^{(_ \overset{\mathsf{D}}{\circ} gLR)}"] \\
gL \arrow[r, mapsto, dashed, "(\mathsf{d}.\mathsf{d}'L)^{\phi_1}"] & \mathsf{d}^{\eta} \overset{\mathsf{D}}{\circ} gLR = g \overset{\mathsf{D}}{\circ} \mathsf{d}'^{\eta} \\
:_{\mathsf{d}'L}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{d}'.\mathsf{d}'L)^{\phi_1}"'] \arrow[u, "gL \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{d}'L"] & :_{\mathsf{d}'L}\mathrm{id}(\mathsf{d}'.\mathsf{d}'L)^{\phi_1} = \mathsf{d}'^{\eta} \arrow[u, "g \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{d}'LR = \mathsf{d}'LR^{(g \overset{\mathsf{D}}{\circ} _)}"']
\end{tikzcd}$$

上方右图的第二行的第二个节点说明了一切 。这两张图
其实就是协变米田引理证明的两个图拼在一起后的结果 。

同样，给定自然同构 ε , η , 我们也可以推出自然同构 ϕ_2 和 ϕ_1 。

考虑任意 f^{op} : $\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}R$:

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{c}R \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R \arrow[r, "(\mathsf{c}R.\mathsf{c})^{\phi_2}"] \arrow[d, "f^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R"'] & \mathsf{c}RL \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c} \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}"] \\
\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R \arrow[r, "(\mathsf{d}.\mathsf{c})^{\phi_2}"'] & \mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
:_{\mathsf{c}R}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{c}R.\mathsf{c})^{\phi_2}"] \arrow[d, mapsto, "f^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R"'] & \mathsf{c}^{\varepsilon} \arrow[d, mapsto, "f^{\mathrm{op}}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c} = \mathsf{c}^{(f^{\mathrm{op}}L \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}"] \\
f^{\mathrm{op}}R \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{d}.\mathsf{c})^{\phi_2}"'] & f^{\mathrm{op}}L \overset{\mathsf{C}}{\circ} \mathsf{c}^{\varepsilon}
\end{tikzcd}
$$

于是我们可以根据上图定义 $(\mathsf{d}\,.\,\mathsf{c})^{\phi_2}$ 。

考虑任意 g : $\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}$:

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{d}L \arrow[r, "(\mathsf{d}.\mathsf{d}L)^{\phi_1}"] \arrow[d, "\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} g"'] & \mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{d}LR \arrow[d, "\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} gR"] \\
\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c} \arrow[r, "(\mathsf{d}.\mathsf{c})^{\phi_1}"'] & \mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}R
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
:_{\mathsf{d}L}\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{d}.\mathsf{d}L)^{\phi_1}"] \arrow[d, mapsto, "\mathsf{d}L \xrightarrow{\mathsf{C}} g"'] & \mathsf{d}^{\eta} \arrow[d, mapsto, "\mathsf{d} \xrightarrow{\mathsf{D}} gR = \mathsf{d}^{(\_ \overset{\mathsf{D}}{\circ} gR)}"] \\
g \arrow[r, mapsto, "(\mathsf{d}.\mathsf{c})^{\phi_1}"'] & \mathsf{d}^{\eta} \overset{\mathsf{D}}{\circ} gR
\end{tikzcd}
$$

于是我们可以根据上图定义 $(\mathsf{d}\,.\,\mathsf{c})^{\phi_1}$ 。

但是这里面怎么体现了用到了 ε 和 η 为自然变换的性质呢？