02-03 范畴当中的箭头

LaTeX Definitions are here.

沿用上一节提到的自由变量。我们规定：

- $c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2 =$
  所有从 c_1 射向 c_2 的箭头构成的集。

> **Note**
>
> 上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
> 其他范畴里 $c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2$ 未必构成集。

范畴 $\mathcal{C}$ 中特定的箭头可以进行复合运算：

- $\begin{array}{rccc} \overset{\mathcal{C}}{\circ} : & (c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2) \overset{\mathsf{Set}}{\times} (c_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_3) & \xrightarrow{\mathsf{Set}} & (c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_3) \\ & (j_1 , j_2) & \longmapsto & (j_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} j_2) \end{array}$

如果我们还知道箭头 f_1，j，f_2 分别属于
$c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_1'$，$c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2$，$c_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2'$ 那么便可知

- $(f_1^{op} \overset{\mathcal{C}}{\circ} j) \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2 = f_1^{op} \overset{\mathcal{C}}{\circ} (j \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2)$，
  即箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便可获得新的函数：

- $\begin{array}{rccc} (f_1^{op} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) : & (c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) & \xrightarrow{\mathcal{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} & (c_1' \xrightarrow{\mathcal{C}} \_) \\ & j & \longmapsto & (f_1^{op} \overset{\mathcal{C}}{\circ} j) \end{array}$
  称作**前复合**。下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[rrd, bend left, "j : c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2"] & & \\
 \arrow[r, phantom, "c_2^{(f_1^{op} \overset{\mathcal{C}}{\circ} _)}"] & & c_2 \arrow[loop right, "{}_{c_2}\mathrm{id}"] \\
c_1' \arrow[uu, "f_1^{op}"] \arrow[rru, bend right, "(f_1^{op} \overset{\mathcal{C}}{\circ} j) : c_1' \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

- $\begin{array}{rccc} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) : & (\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2) & \xrightarrow{\mathcal{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} & (\_ \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2') \\ & j & \longmapsto & (j \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) \end{array}$
  称作**后复合**。 下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd}
 & & c_2 \arrow[d, "f_2"] \\
c_1 \arrow[loop left, "{}_{c_1}\mathrm{id}"] \arrow[rru, bend left, "j : c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2"] \arrow[rr, phantom, "c_1^{(_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2)}"] \arrow[rrd, bend right, "(j \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) : c_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} c_2'"'] & & \\
 & & c_2'
\end{tikzcd}$$

根据上面的定义不难得出下述结论：

- $(f_1^{op} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) \overset{???}{\circ} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) = (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) \overset{???}{\circ} (f_1^{op} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)$
  复合运算具有**结合律**，即后面提到的**自然性**；
- $(\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} j) \overset{\mathcal{C}^{op} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2) = (\_ \overset{\mathcal{C}}{\circ} (j \overset{\mathcal{C}}{\circ} f_2))$
  前复合与复合运算的关系
- $(j \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) \overset{\mathcal{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (f_1^{op} \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_) = ((f_1^{op} \overset{\mathcal{C}}{\circ} j) \overset{\mathcal{C}}{\circ} \_)$
  后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。
假如 a_1 为 c_1 的全局元素则可规定

- $c_1 j = c_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} j$

恒等箭头

范畴 C 内的每个对象都有恒等映射：

- ${}_{:c_1}\mathrm{id} : c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_1$
  $c_1 \mapsto c_1$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- ${}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\circ} j = j$
  $= j \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:c_2}\mathrm{id}$

此外还可以得知

- $({}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_) : (c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$
  为恒等自然变换，可记成是 ${}_{:(c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)}^{\mathsf{Cat}}\mathrm{id}$；
- $(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:c_2}\mathrm{id}) : (\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2) \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{} \mathsf{Set}} (\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2)$
  为恒等自然变换，可记成是 ${}_{:(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2)}\mathrm{id}$ 。

单满态以及同构

接下来给出单 / 满态和同构的定义 。

- j 为**单态**当且仅当对任意 c_1'
  若有 $f_1, f_1' : c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_1'$ 满足 ${f_1}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} j = {f_1'}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} j$
  则有 ${f_1}^{\mathrm{op}} = {f_1'}^{\mathrm{op}}$ 。详情见下图：

$$\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[rrd, bend left, "j:c_1\xrightarrow{\mathsf{C}}c_2"] & \arrow[dd, dashed, "c_2^{({f_1}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} _)}"] & \\
& & c_2 \arrow[loop right, "{}_{:c_2}\mathrm{id}"] \\
c_1' \arrow[uu, shift right, "{f_1}^{\mathrm{op}}"'] \arrow[uu, shift left, "{f_1'}^{\mathrm{op}}"] \arrow[rru, bend right, "({f_1}^{\mathrm{op}} \overset{\mathsf{C}}{\circ} j):c_1'\xrightarrow{\mathsf{C}}c_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

- j 为**满态**当且仅当对任意 c_2'
  若有 $f_2, f_2' : c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2'$ 满足 $j \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2 = j \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2'$
  则有 $f_2 = f_2'$ 。详情见下图：

$$\begin{tikzcd}
& \arrow[dd, dashed, "c_1^{(_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)}"] & c_2 \arrow[dd, shift right, "f_2'"'] \arrow[dd, shift left, "f_2"] \\
c_1 \arrow[loop left, "{}_{:c_1}\mathrm{id}"] \arrow[rru, bend left, "j:c_1\xrightarrow{\mathsf{C}}c_2"] \arrow[rrd, bend right, "(j \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2):c_1\xrightarrow{\mathsf{C}}c_2'"'] & & \\
& & c_2'
\end{tikzcd}$$

- i 为**同构**当且仅当存在 $j' : c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_1$
  使得 $j \overset{\mathsf{C}}{\circ} j' = {}_{:c_1}\mathrm{id}$ 且 $j' \overset{\mathsf{C}}{\circ} j = {}_{:c_2}\mathrm{id}$ 。
  此时 c_1, c_2 间的关系可记作 $c_1 \cong c_2$ 。

若还知道 $j = j_1$ 且 $j_2 : c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_3$ 则有

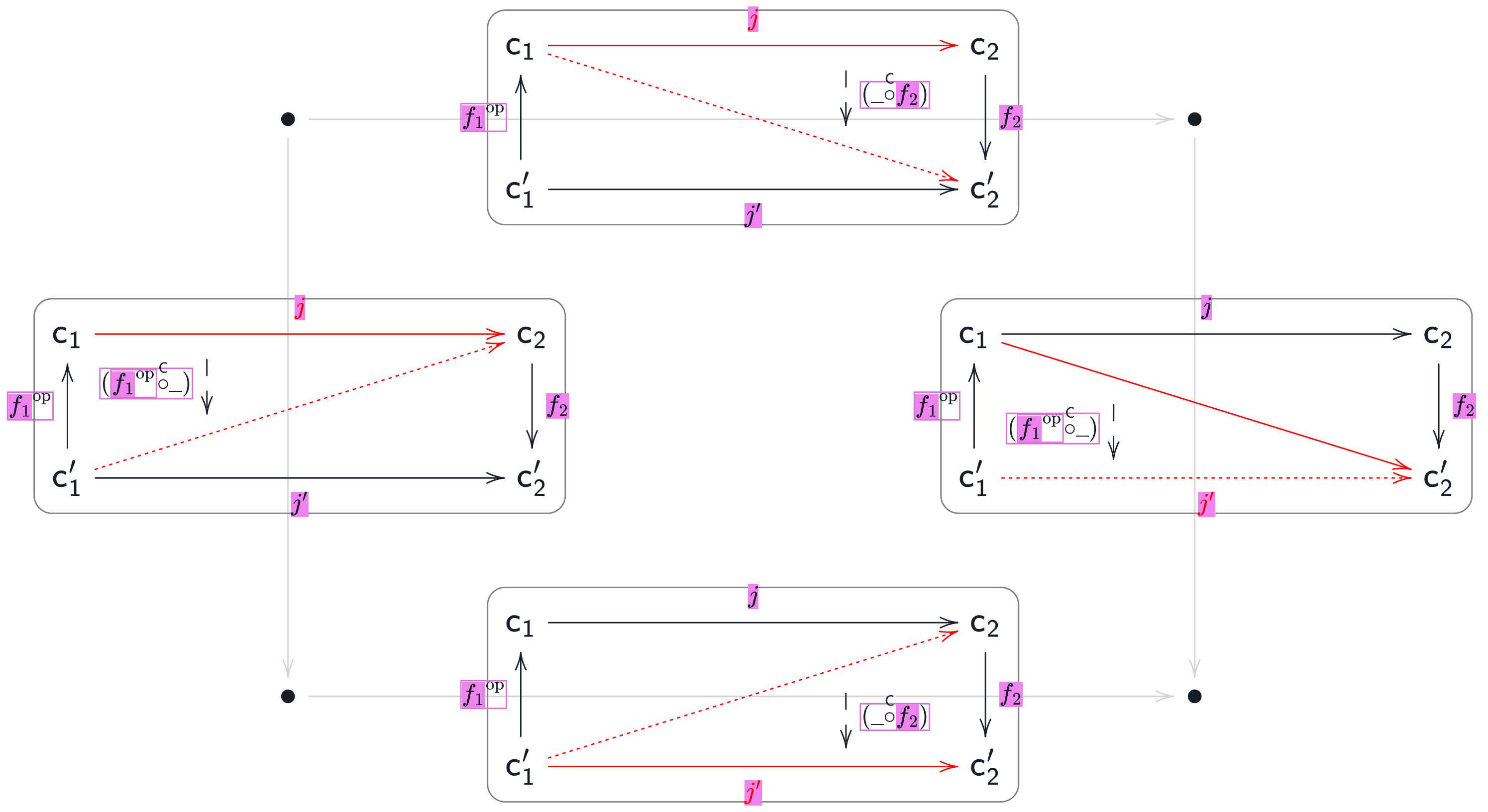
- 若 j_1 , j_2 为单态 / 满态 / 同构
  则 $j_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} j_2$ 为单态 / 满态 / 同构；
- 若 $j_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} j_2$ 为同构
  且 j_1 , j_2 中有一个为同构
  则 j_1 , j_2 两者皆构成同构 。

不仅如此我们还可以得出下述结论：

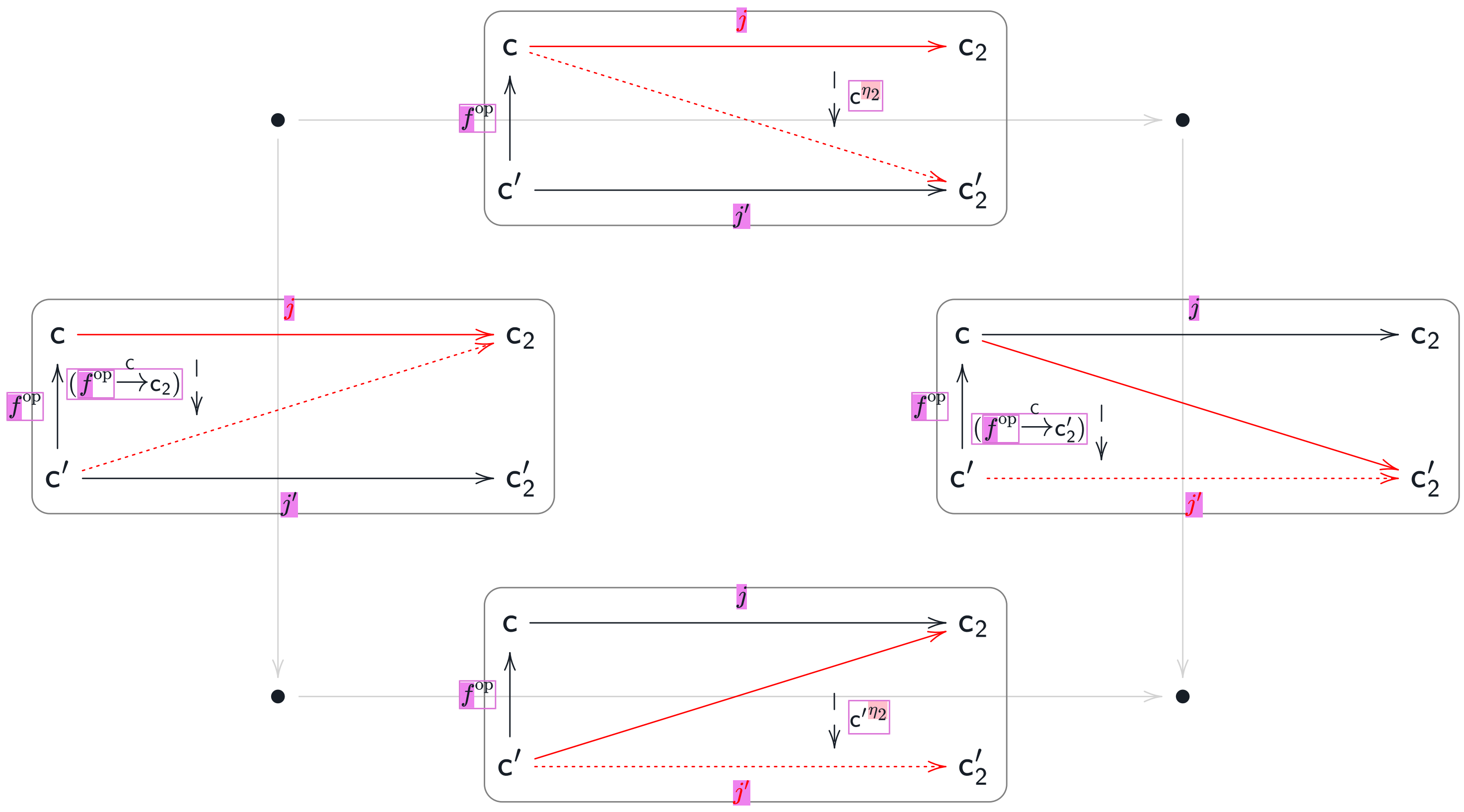
- c_1 为单态，
  由 ${}_{:c_1}!$ 的唯一性可知；
- ${}_{:0}! = {}_{:1}\text{¡}$ 为同构，
  因为 $0 \xrightarrow{\mathsf{C}} 0 = \{{}_{:0}\mathrm{id}\}$
  并且 $1 \xrightarrow{\mathsf{C}} 1 = \{{}_{:1}\mathrm{id}\}$

同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释 。
后面会将自然性进行进一步推广 。



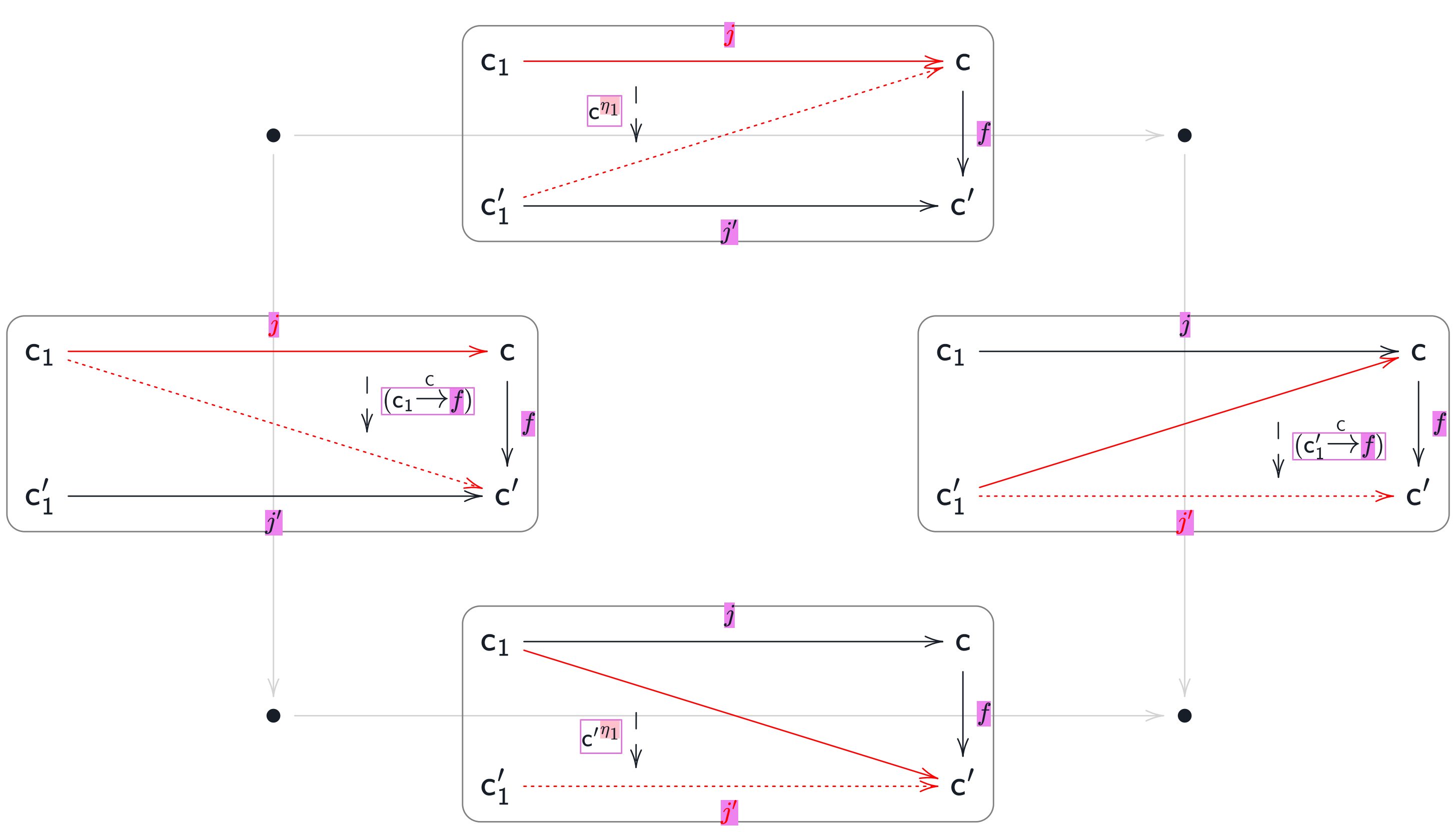
现提供自然变换 η_2 满足自然性 —— 即对
任意 C 中对象 c, c' 以及
任意 C 中映射 $f : c \xrightarrow{C} c'$
都有 $(f^{\mathrm{op}} \xrightarrow{C} c_2) \overset{\mathrm{Set}}{\circ} c'^{\eta_2} = c^{\eta_2} \overset{\mathrm{Set}}{\circ} (f^{\mathrm{op}} \xrightarrow{C} c_2')$:



那么我们便会有下述结论 :

- $c_2 \overset{C}{\cong} c_2'$ 当且仅当对任意 C 中的对象 c
  c^{η_2} 都是同构 。此时称 η_2 为**自然同构** 。

现提供自然变换 η_1 满足自然性 —— 即对
任意 C 中对象 c, c' 以及
任意 C 中映射 $f : c \xrightarrow{C} c'$
都有 $(c_1 \xrightarrow{C} f) \overset{\mathrm{Set}}{\circ} c'^{\eta_1} = c^{\eta_1} \overset{\mathrm{Set}}{\circ} (c_1' \xrightarrow{C} f)$:



那么我们便会有下述结论 :

- $c_1 \overset{C}{\cong} c_1'$ 当且仅当对任意 C 中的对象 c
  c^{η_1} 都是同构 。此时称 η_1 为**自然同构** 。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为

Set

$$
\begin{tikzcd}
c \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f^{op} \xrightarrow{C} c_2"'] & c \xrightarrow{C} c_2' \arrow[d, "f^{op} \xrightarrow{C} c_2'"] \\
c' \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c' \xrightarrow{C} c_2' \\
C \xrightarrow{C} c_2 & C \xrightarrow{C} c_2'
\end{tikzcd}
$$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧 将 c 换成 c_2 ：

$$
\begin{tikzcd}
c_2 \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f^{op} \xrightarrow{C} c_2"'] & c_2 \xrightarrow{C} c_2' \arrow[d, "f^{op} \xrightarrow{C} c_2'"] \\
c' \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c' \xrightarrow{C} c_2'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:c_2}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f^{op} \xrightarrow{C} c_2"'] & {}_{:c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2}) \arrow[d, "f^{op} \xrightarrow{C} c_2' = c_2'^{(f^{op} \overset{C}{\circ} \_)}"] \\
f^{op} \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & f^{op} \overset{C}{\circ} \mathrm{etc}
\end{tikzcd}
$$

为了方便就用 etc 表示 ${}_{:c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2})$ 。由上图
知 $f^{op}(c'^{\eta_2}) = (f^{op} \overset{C}{\circ} \mathrm{etc})$（见右图底部和右侧箭头），
故 $c'^{\eta_2} = c' \xrightarrow{C} \mathrm{etc}$（注意到箭头 $f^{op} : c' \xrightarrow{C} c$）；
而 $c'^{\eta_2} = c' \xrightarrow{C} \mathrm{etc} = c'^{(\_ \overset{C}{\circ} \mathrm{etc})}$ 始终是同构
故 $\mathrm{etc} : c_2 \xrightarrow{C} c_2'$ 也是同构 。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在**米田嵌入**处会详细介绍 。

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为

Set

$$
\begin{tikzcd}
c_1 \xrightarrow{C} c \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & c_1' \xrightarrow{C} c \arrow[d, "c_1' \xrightarrow{C} f"] \\
c_1 \xrightarrow{C} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c_1' \xrightarrow{C} c' \\
c_1 \xrightarrow{C} C & c_1' \xrightarrow{C} C
\end{tikzcd}
$$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧 将 c 换成 c_1 ：

$$
\begin{tikzcd}
c_1 \xrightarrow{C} c_1 \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & c_1' \xrightarrow{C} c_1 \arrow[d, "c_1' \xrightarrow{C} f"] \\
c_1 \xrightarrow{C} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c_1' \xrightarrow{C} c'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:c_1}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1}) \arrow[d, "c_1' \xrightarrow{C} f = c_1'^{(\_ \overset{C}{\circ} f)}"] \\
f \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & \mathrm{etc} \overset{C}{\circ} f
\end{tikzcd}
$$

为了方便就用 etc 表示 ${}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 。由上图
知 $f(c'^{\eta_1}) = (\mathrm{etc} \overset{C}{\circ} f)$（见右图底部和右侧箭头），
故 $c'^{\eta_1} = \mathrm{etc} \xrightarrow{C} c'$（注意到箭头 $f : c \xrightarrow{C} c'$）；
而 $c'^{\eta_1} = \mathrm{etc} \xrightarrow{C} c' = c'^{(\mathrm{etc} \overset{C}{\circ} \_)}$ 始终是同构
故 $\mathrm{etc} : c_1 \xrightarrow{C} c_1'$ 也是同构 。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在**米田嵌入**处会详细介绍 。