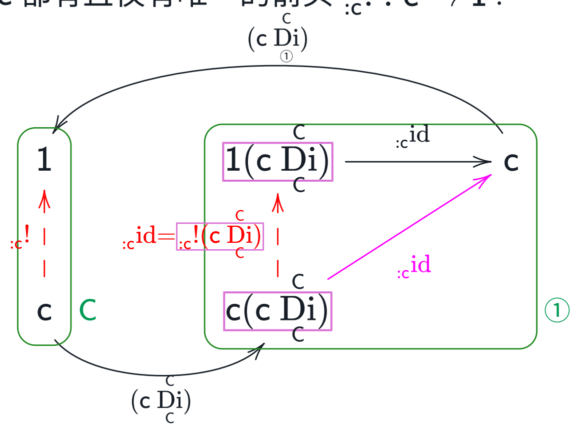
01 始对象和终对象

$\LaTeX$ Definitions are here.

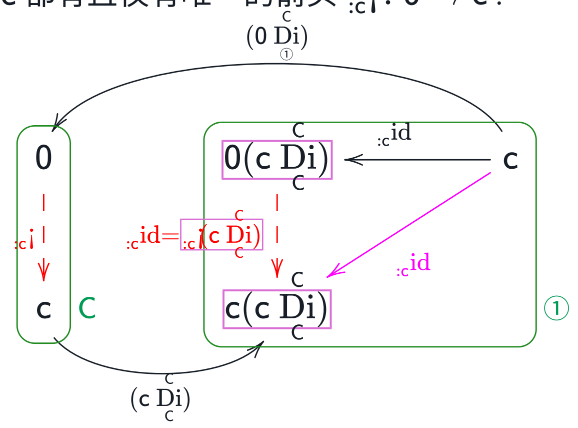
泛性质

范畴由对象及其间箭头构成。本文重点分析**余积闭范畴** C。首先给出如下定义：

- 1 为**终对象**当且仅当对任意 C 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 $_{:\mathsf{c}}! : \mathsf{c} \xrightarrow{\mathsf{C}} 1$：



- 0 为**始对象**当且仅当对任意 C 中对象 c 都有且仅有唯一的箭头 $_{:\mathsf{c}}¡ : 0 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}$：



> ⓘ **Note**
>
> - $\underset{\textcircled{1}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\textcircled{1} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C})$
> $\mathsf{c} \longmapsto$ 常值函子
> $\mathsf{c}\,\underset{\textcircled{1}}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}} : (\textcircled{1} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C})$
> $1 \longmapsto \mathsf{c}$
> $f \longmapsto {}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}$
>   ① 为仅含单个函子的范畴，1 为其中的对象；仅含有单个对象的范畴可以被等价地视作为 ①。

若范畴 C 中真的含有 0 和 1 分别作为始对象和终对象 则根据上述信息可知

- 形如 $1 \xrightarrow{\mathsf{C}} 1$ 的箭头只有一个，即 $_{:1}\mathrm{id}$；
- 形如 $0 \xrightarrow{\mathsf{C}} 0$ 的箭头只有一个，即 $_{:0}\mathrm{id}$；

元素与全局元素

对任意对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_1', \mathrm{etc}$，$\mathsf{c}_2, \mathsf{c}_2', \mathrm{etc}$，$\mathsf{c}_3$ 及任意的映射 i 我们进行如下的规定：

- i 为 c_2 的**元素**当且仅当 $i\,\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{tar}} = \mathsf{c}_2$；
- i 为 c_1 的**全局元素**当且仅当 $i\,\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{tar}} = \mathsf{c}_1$ 且 $i\,\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{src}} = 1$
- i 不存在仅当 $i\,\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{tar}} = 0$。

> ⓘ **Note**
>
> 其他范畴中刚才的断言未必成立。

02-03 范畴当中的箭头

LaTeX Definitions are here.

沿用上一节提到的自由变量。我们规定：

- $c_1 \overset{C}{\to} c_2 =$
  所有从 c_1 射向 c_2 的箭头构成的集。

> ⓘ **Note**
>
> 上述断言仅对于**局部小范畴**成立，
> 其他范畴里 $c_1 \overset{C}{\to} c_2$ 未必构成集。

范畴 C 中特定的箭头可以进行复合运算：

- $\begin{aligned} \overset{C}{\circ} : (c_1 \overset{C}{\to} c_2) \times (c_2 \overset{C}{\to} c_3) &\overset{\mathrm{Set}}{\longrightarrow} (c_1 \overset{C}{\to} c_3) \\ (i_1 \quad . \quad i_2) &\longmapsto (i_1 \overset{C}{\circ} i_2) \end{aligned}$

如果我们还知道箭头 f_1，i，f_2 分别属于
$c_1' \overset{C}{\to} c_1$，$c_1 \overset{C}{\to} c_2$，$c_2 \overset{C}{\to} c_2'$ 那么便可知

- $(f_1 \overset{C}{\circ} i) \overset{C}{\circ} f_2 = f_1 \overset{C}{\circ} (i \overset{C}{\circ} f_2)$，
  即箭头复合运算具有**结合律**。

另外固定住一侧实参便可获得新的函数：

- $\begin{aligned} (f_1 \overset{C}{\circ} \_) : (c_1 \overset{C}{\to} \_) &\xrightarrow{C \overset{\mathrm{Cat}}{\longrightarrow} \mathrm{Set}} (c_1' \overset{C}{\to} \_) \\ i &\longmapsto (f_1 \overset{C}{\circ} i) \end{aligned}$
  称作**前复合**。下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[ddrr, bend left, "i : c_1 \overset{C}{\longrightarrow} c_2"] & \bullet \arrow[dd, dashed, "c_2^{(f_1 \overset{C}{\circ} _)}"] & \\
 & & c_2 \arrow[loop right, "{}_{:c_2}\mathrm{id}"] \\
c_1' \arrow[uu, "f_1"] \arrow[urr, bend right, "(f_1 \overset{C}{\circ} i) : c_1' \overset{C}{\longrightarrow} c_2"'] & \bullet &
\end{tikzcd}$$

- $\begin{aligned} (\_ \overset{C}{\circ} f_2) : (\_ \overset{C}{\to} c_2) &\xrightarrow{C \overset{\mathrm{Cat}}{\longrightarrow} \mathrm{Set}} (\_ \overset{C}{\to} c_2') \\ i &\longmapsto (i \overset{C}{\circ} f_1) \end{aligned}$
  称作**后复合**。 下图有助于形象理解：

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dd, dashed, "c_1^{(_ \overset{C}{\circ} f_2)}"] & c_2 \arrow[dd, "f_2"] \\
c_1 \arrow[loop left, "{}_{:c_1}\mathrm{id}"] \arrow[urr, bend left, "i : c_1 \overset{C}{\longrightarrow} c_2"] \arrow[drr, bend right, "(i \overset{C}{\circ} f_2) : c_1 \overset{C}{\longrightarrow} c_2'"'] & & \\
 & \bullet & c_2'
\end{tikzcd}$$

根据上面的定义不难得出下述结论：

- $(f_1 \overset{C}{\circ} \_) \overset{C \overset{\mathrm{Cat}}{\longrightarrow} \mathrm{Set}}{\circ} (\_ \overset{C}{\circ} f_2) = (\_ \overset{C}{\circ} f_2) \overset{C \overset{\mathrm{Cat}}{\longrightarrow} \mathrm{Set}}{\circ} (f_1 \overset{C}{\circ} \_)$
  复合运算具有**结合律**，即后面提到的**自然性**；
- $(\_ \overset{C}{\circ} i) \overset{C \overset{\mathrm{Cat}}{\longrightarrow} \mathrm{Set}}{\circ} (\_ \overset{C}{\circ} f_2) = (\_ \overset{C}{\circ} (i \overset{C}{\circ} f_2))$
  前复合与复合运算的关系
- $(i \overset{C}{\circ} \_) \overset{C \overset{\mathrm{Cat}}{\longrightarrow} \mathrm{Set}}{\circ} (f_1 \overset{C}{\circ} \_) = ((f_1 \overset{C}{\circ} i) \overset{C}{\circ} \_)$
  后复合与复合运算的关系

箭头对实参的应用

范畴论里函数的应用亦可视作复合。
假如 a_1 为 c_1 的全局元素则可规定

- $c_1 i = c_1 \overset{C}{\circ} i$

恒等箭头

范畴 C 内的每个对象都有恒等映射：

- ${}_{:c_1}\mathrm{id} : c_1 \overset{C}{\to} c_1$
  $c_1 \mapsto c_1$

如此我们便可以得出下述重要等式：

- ${}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{C}{\circ} i = i$
  $= i \overset{C}{\circ} {}_{:c_2}\mathrm{id}$

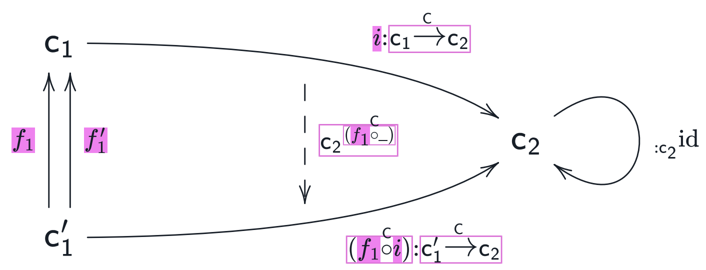
此外还可以得知

- $({}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{C}{\circ} \_) : (c_1 \overset{C}{\to} \_) \xrightarrow{C \overset{\mathrm{Cat}}{\longrightarrow} \mathrm{Set}} (c_1 \overset{C}{\to} \_)$
  为恒等自然变换，可记成是 ${}_{:(c_1 \overset{C}{\to} \_)}\mathrm{id}$；
- $(\_ \overset{C}{\circ} {}_{:c_2}\mathrm{id}) : (\_ \overset{C}{\to} c_2) \xrightarrow{C \overset{\mathrm{Cat}}{\longrightarrow} \mathrm{Set}} (\_ \overset{C}{\to} c_2)$
  为恒等自然变换，可记成是 ${}_{:(\_ \overset{C}{\to} c_2)}\mathrm{id}$。

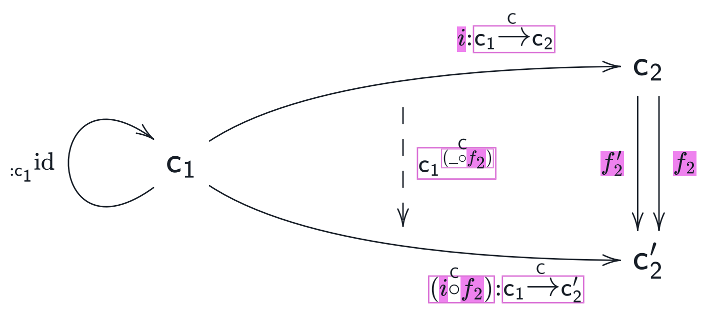
单满态以及同构

接下来给出单 / 满态和同构的定义。

- i 为**单态**当且仅当对任意 c_1'
  若有 $f_1, f_1' : c_1' \overset{C}{\to} c_1$ 满足 $f_1 \overset{C}{\circ} i = f_1' \overset{C}{\circ} i$
  则有 $f_1 = f_1'$。详情见下图：



- i 为**满态**当且仅当对任意 c_2'
  若有 $f_2, f_2' : c_2 \overset{C}{\to} c_2'$ 满足 $i \overset{C}{\circ} f_2 = i \overset{C}{\circ} f_2'$
  则有 $f_2 = f_2'$。详情见下图：



- i 为**同构**当且仅当存在 $i' : c_2 \overset{C}{\to} c_1$
  使得 $i \overset{C}{\circ} i' = {}_{:c_1}\mathrm{id}$ 且 $i' \overset{C}{\circ} i = {}_{:c_2}\mathrm{id}$。
  此时 c_1, c_2 间的关系可记作 $c_1 \cong c_2$。

若还知道 $i = i_1$ 且 $i_2 : c_2 \overset{C}{\to} c_3$ 则有

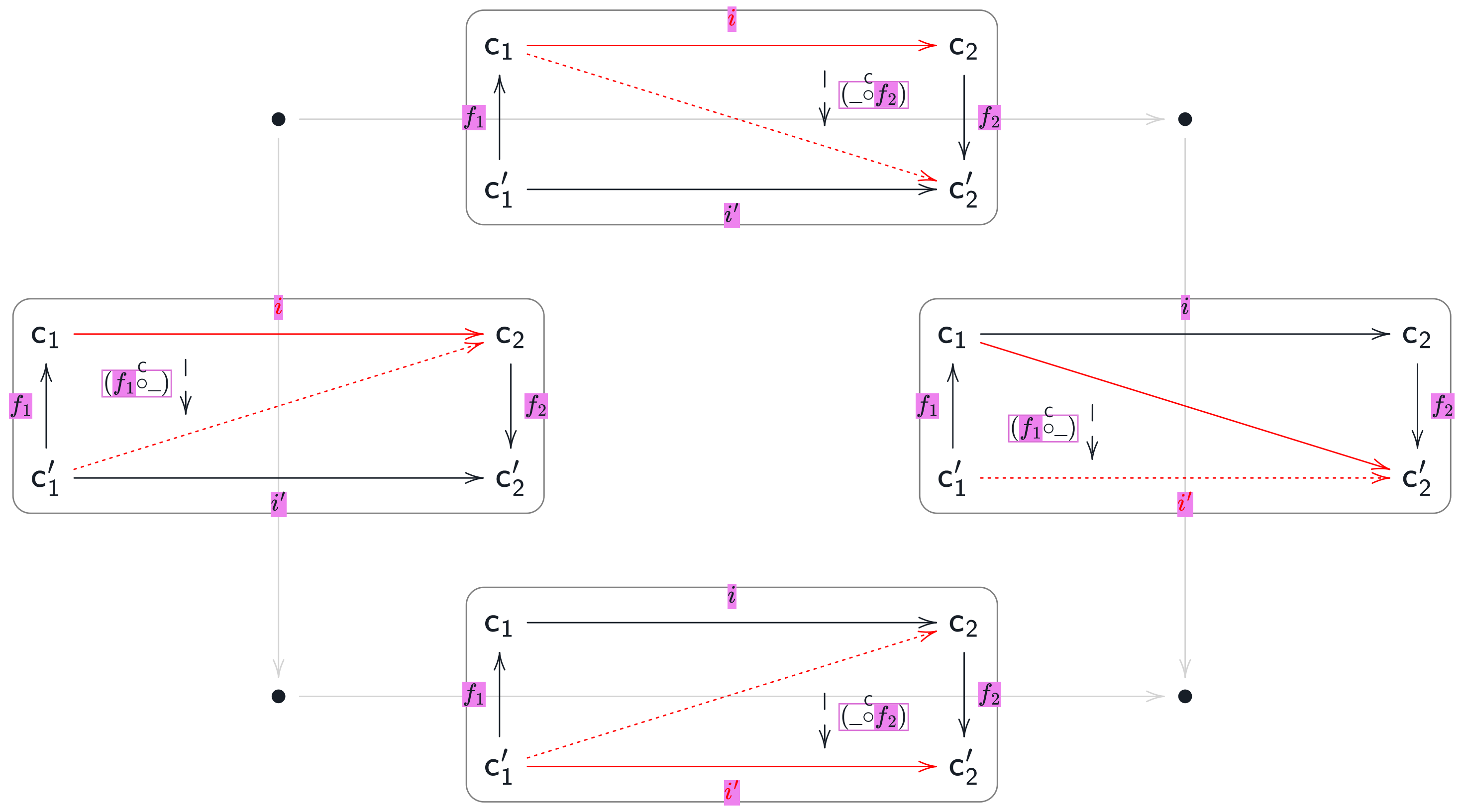
- 若 i_1，i_2 为单态 / 满态 / 同构
  则 $i_1 \overset{C}{\circ} i_2$ 为单态 / 满态 / 同构；
- 若 $i_1 \overset{C}{\circ} i_2$ 为同构
  且 i_1，i_2 中有一个为同构
  则 i_1，i_2 两者皆构成同构。

不仅如此我们还可以得出下述结论：

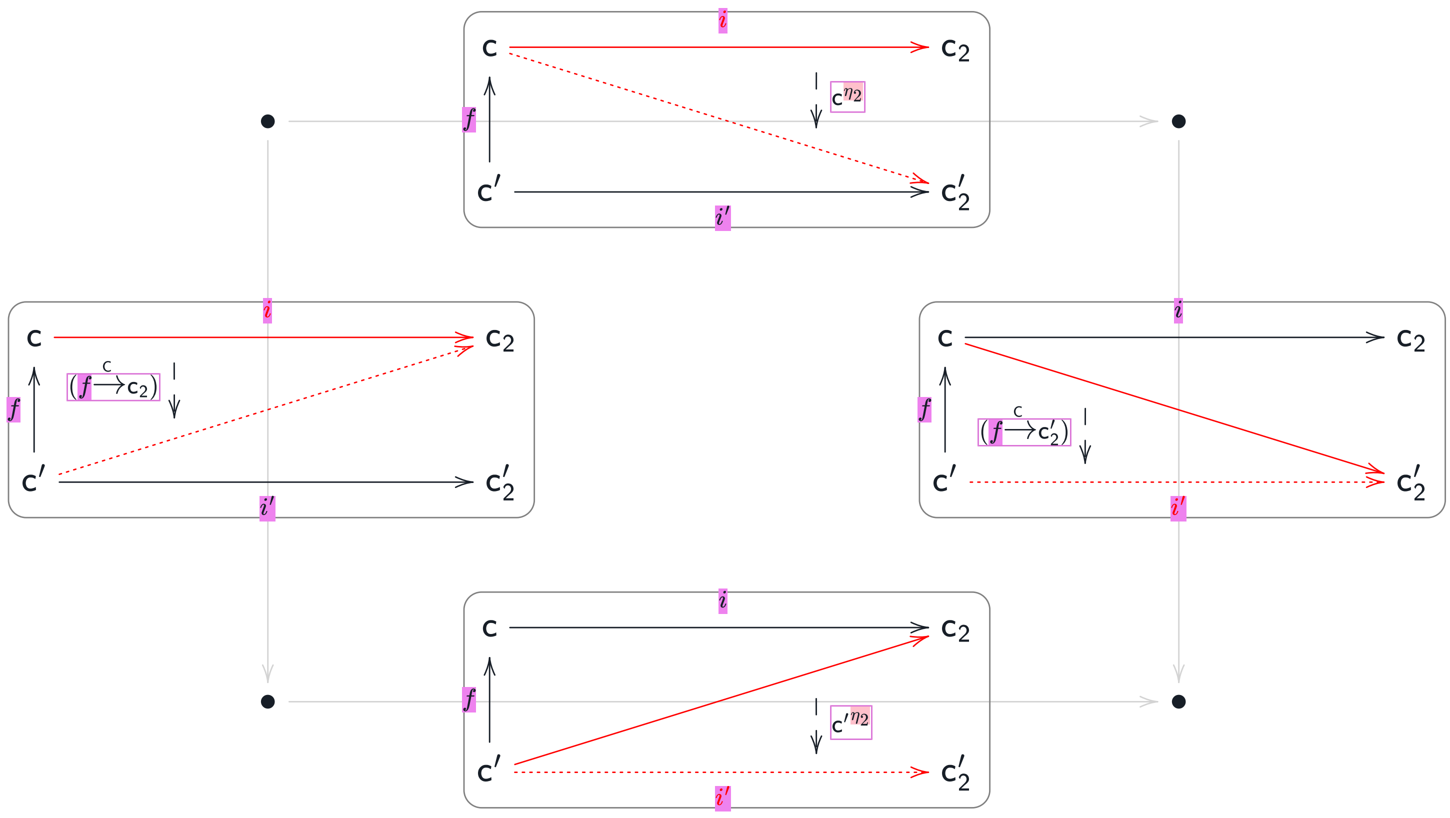
- c_1 为单态，
  由 ${}_{:c_1}!$ 的唯一性可知；
- ${}_{:0}! = {}_{:1}¡$ 为同构，
  因为 $0 \overset{C}{\to} 0 = \{{}_{:0}\mathrm{id}\}$
  并且 $1 \overset{C}{\to} 1 = \{{}_{:1}\mathrm{id}\}$

同构与自然性

下图即为自然性对应的形象解释 。
后面会将自然性进行进一步推广 。



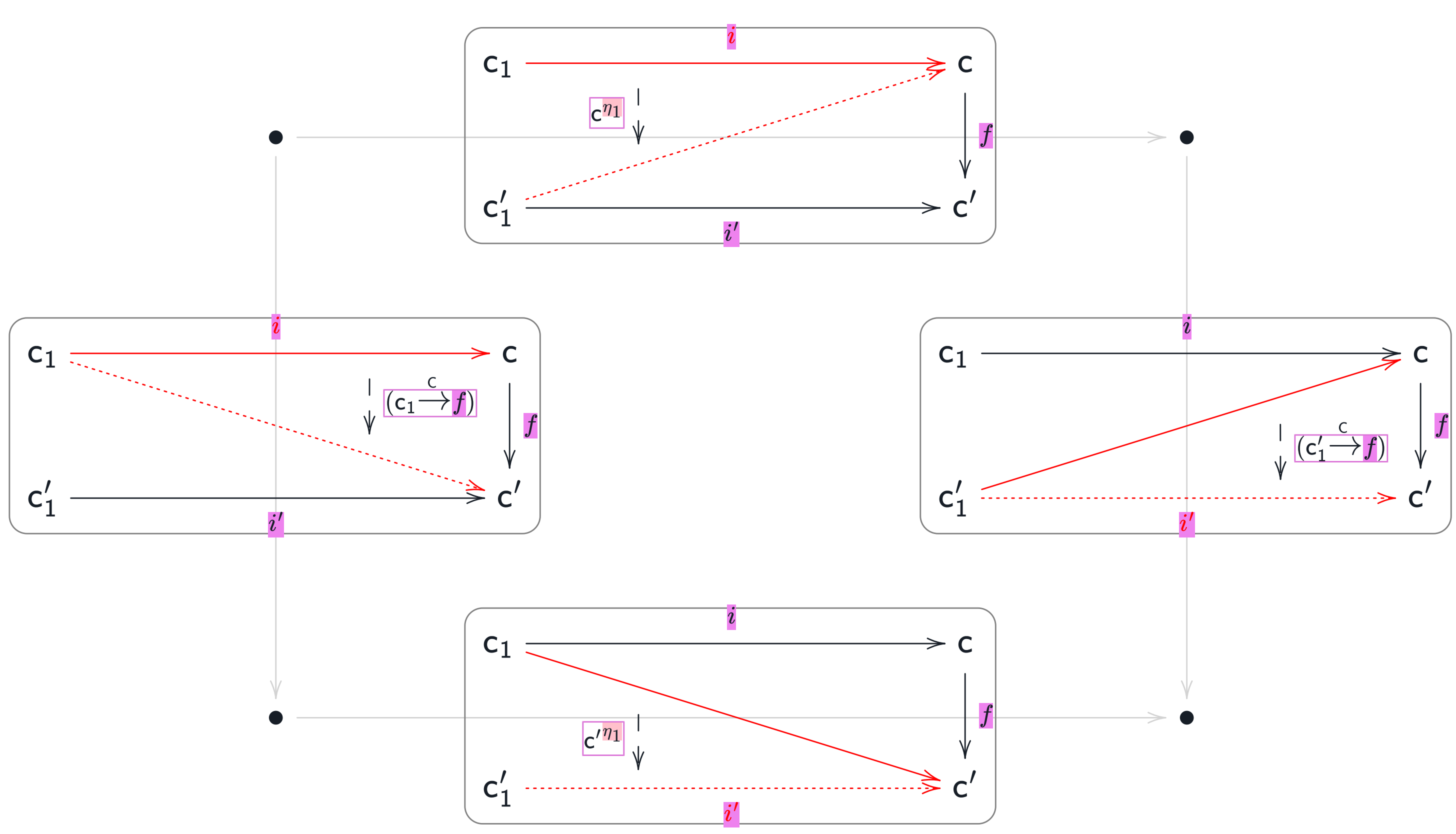
现提供自然变换 η_2 满足自然性 —— 即对
任意 C 中对象 c, c' 以及
任意 C 中映射 $f : (c' \xrightarrow{C} c)$
都有 $(f \xrightarrow{C} c_2) \overset{Set}{\circ} c'^{\eta_2} = c^{\eta_2} \overset{Set}{\circ} (f \xrightarrow{C} c_2')$:



那么我们便会有下述结论 :

- $c_2 \overset{C}{\cong} c_2'$ 当且仅当对任意 C 中的对象 c
  c^{η_2} 都是同构 。此时称 η_2 为**自然同构** 。

现提供自然变换 η_1 满足自然性 —— 即对
任意 C 中对象 c, c' 以及
任意 C 中映射 $f : c \xrightarrow{C} c'$
都有 $(c_1 \xrightarrow{C} f) \overset{Set}{\circ} c'^{\eta_1} = c^{\eta_1} \overset{Set}{\circ} (c_1' \xrightarrow{C} f)$:



那么我们便会有下述结论 :

- $c_1 \overset{C}{\cong} c_1'$ 当且仅当对任意 C 中的对象 c
  c^{η_1} 都是同构 。此时称 η_1 为**自然同构** 。

上一页的第一条定理若用交换图表示则应为

Set

$$
\begin{tikzcd}
c\overset{C}{\to}c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f\overset{C}{\to}c_2"'] & c\overset{C}{\to}c_2' \arrow[d, "f\overset{C}{\to}c_2'"] \\
c'\overset{C}{\to}c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c'\overset{C}{\to}c_2'
\end{tikzcd}
$$

$C\overset{C}{\to}c_2$ $\quad$ $C\overset{C}{\to}c_2'$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧 将 c 换成 c_2 ：

$$
\begin{tikzcd}
c_2\overset{C}{\to}c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f\overset{C}{\to}c_2"'] & c_2\overset{C}{\to}c_2' \arrow[d, "f\overset{C}{\to}c_2'"] \\
c'\overset{C}{\to}c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c'\overset{C}{\to}c_2'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:c_2}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f\overset{C}{\to}c_2"'] & {}_{:c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2}) \arrow[d, "f\overset{C}{\to}c_2' = c_2'^{\overset{C}{(f\circ\_)}}"] \\
f \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & f\overset{C}{\circ}\mathrm{etc}
\end{tikzcd}
$$

为了方便就用 etc 表示 ${}_{:c_2}\mathrm{id}(c^{\eta_2})$ 。由上图
知 $f(c'^{\eta_2}) = (f\overset{C}{\circ}\mathrm{etc})$ 右图底部和右侧箭头，
故 $c'^{\eta_2} = c'\overset{C}{\to}\mathrm{etc}$ 注意到箭头 $f : c'\overset{C}{\to}c$ ；
而 $c'^{\eta_2} = c'\overset{C}{\to}\mathrm{etc} = c'^{\overset{C}{(\_\circ\mathrm{etc})}}$ 始终是同构
故 $\mathrm{etc} : c_2\overset{C}{\to}c_2'$ 也是同构 。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在**米田嵌入**处会详细介绍。

上一页的第二条定理若用交换图表示则应为

Set

$$
\begin{tikzcd}
c_1\overset{C}{\to}c \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1\overset{C}{\to}f"'] & c_1'\overset{C}{\to}c \arrow[d, "c_1'\overset{C}{\to}f"] \\
c_1\overset{C}{\to}c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c_1'\overset{C}{\to}c'
\end{tikzcd}
$$

$c_1\overset{C}{\to}C$ $\quad$ $c_1'\overset{C}{\to}C$

$\Rightarrow$ 易证，$\Leftarrow$ 用到了米田技巧 将 c 换成 c_1 ：

$$
\begin{tikzcd}
c_1\overset{C}{\to}c_1 \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1\overset{C}{\to}f"'] & c_1'\overset{C}{\to}c_1 \arrow[d, "c_1'\overset{C}{\to}f"] \\
c_1\overset{C}{\to}c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c_1'\overset{C}{\to}c'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{:c_1}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1\overset{C}{\to}f"'] & {}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1}) \arrow[d, "c_1'\overset{C}{\to}f = c_1'^{\overset{C}{(\_\circ f)}}"] \\
f \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & \mathrm{etc}\overset{C}{\circ}f
\end{tikzcd}
$$

为了方便就用 etc 表示 ${}_{:c_1}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 。由上图
知 $f(c'^{\eta_1}) = (\mathrm{etc}\overset{C}{\circ}f)$ 右图底部和右侧箭头，
故 $c'^{\eta_1} = \mathrm{etc}\overset{C}{\to}c'$ 注意到箭头 $f : c\overset{C}{\to}c'$;
而 $c'^{\eta_1} = \mathrm{etc}\overset{C}{\to}c' = c'^{\overset{C}{(\mathrm{etc}\circ\_)}}$ 始终是同构
故 $\mathrm{etc} : c_1\overset{C}{\to}c_1'$ 也是同构 。

> 高亮部分省去了部分推理过程，
> 具体在**米田嵌入**处会详细介绍。

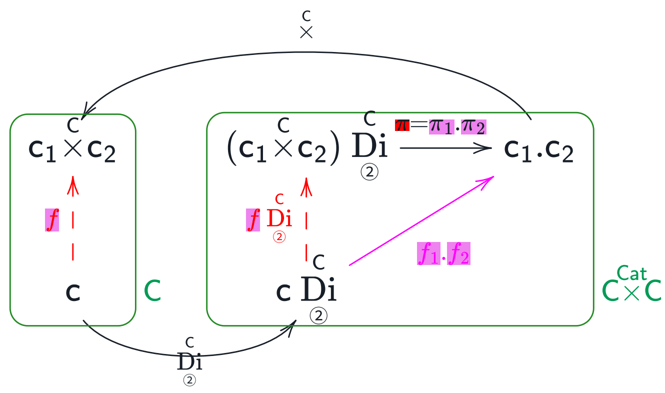
04-05 类型的和与积

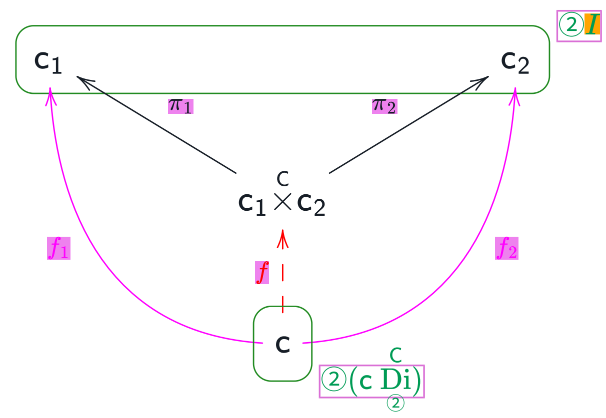
LaTeX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times}:(\mathsf{C}\overset{\mathsf{Cat}}{\times}\mathsf{C})\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{C}$ 在范畴 C 中有如下性质：

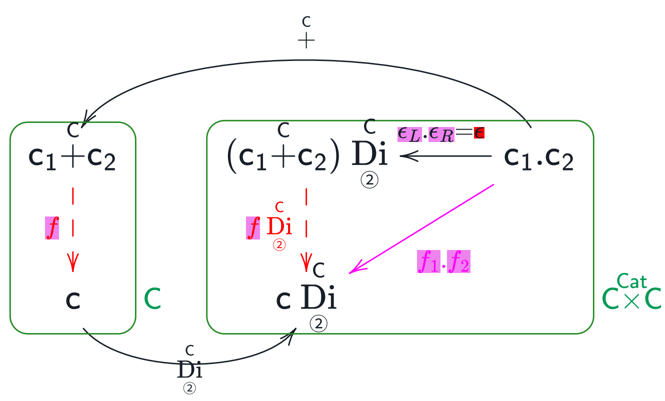
- $(c\xrightarrow{\mathsf{C}}c_1)\overset{\mathsf{Set}}{\times}(c\xrightarrow{\mathsf{C}}c_2)\overset{\mathsf{Set}}{\cong}c\xrightarrow{\mathsf{C}}(c_1\overset{\mathsf{C}}{\times}c_2)$
  —— c 为任意 C 中对象。此即为积的
  泛性质，亦为**指数对乘法的分配律** 。

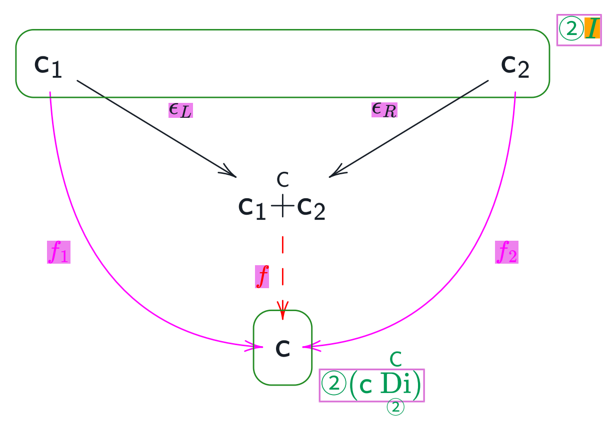




默认函子 $\overset{\mathsf{C}}{+}:(\mathsf{C}\overset{\mathsf{Cat}}{\times}\mathsf{C})\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{C}$ 在范畴 C 中有如下性质：

- $(c_1\xrightarrow{\mathsf{C}}c)\overset{\mathsf{Set}}{\times}(c_2\xrightarrow{\mathsf{C}}c)\overset{\mathsf{Set}}{\cong}(c_1\overset{\mathsf{C}}{+}c_2)\xrightarrow{\mathsf{C}}c$
  —— c 为任意 C 中对象。此即为和的
  泛性质，亦为**指数对加法的分配律** 。





ⓘ **Note**

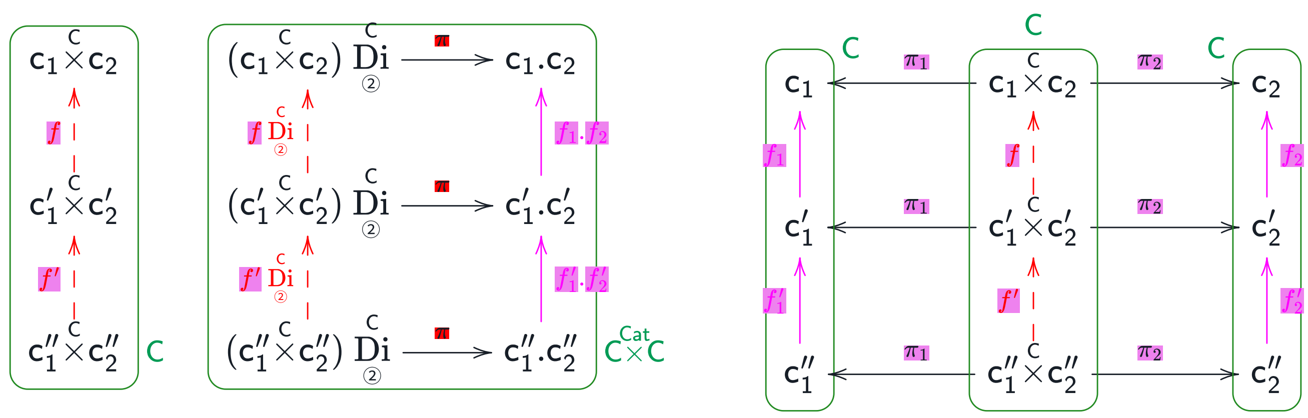
在上面的插图中

- $\underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}:\mathsf{C}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}(\mathsf{C}\overset{\mathsf{Cat}}{\times}\mathsf{C})$ 为对角函子满足
  $c\longmapsto(c\,.\,c)$
- $\underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}:\mathsf{C}\xrightarrow{\mathsf{Cat}}(②\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{C})$
  $c\longmapsto$ 常值函子
  $c\,\underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}:\quad ②\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{C}$
  $1\longmapsto c$
  $2\longmapsto c$
  $f\longmapsto {}_{:c}\mathrm{id}$
  即为对角函子的第二种等价的定义 。
  ② 为仅含两个对象的范畴，在此则
  作为一个指标范畴 。1 和 2 分别为
  其中的对象 。
- $I:②\xrightarrow{\mathsf{Cat}}\mathsf{C}$ 为函子，满足
  $1\longmapsto c_1$
  $2\longmapsto c_2$
- 不难看出上图中
  $\pi: I\xrightarrow{\mathsf{Cat}}(c_1\overset{\mathsf{C}}{\times}c_2)\,\underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}$
  $\epsilon:(c_1\overset{\mathsf{C}}{+}c_2)\,\underset{②}{\overset{\mathsf{C}}{\mathrm{Di}}}\xrightarrow{\mathsf{Cat}} I$
  都构成自然变换

函子性

如何证明 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : ({}_{:c'_1}\mathrm{id} \,.\, {}_{:c'_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(c'_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} c'_2)}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : (f'_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1 \,.\, f'_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \longmapsto (f' \overset{\mathsf{C}}{\circ} f)$
  —— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 保持**箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：

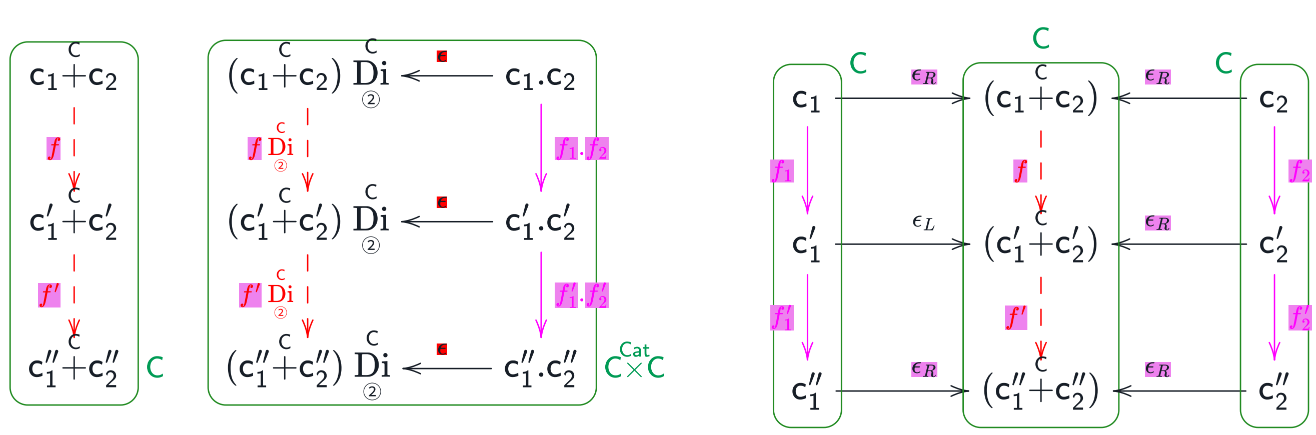


另外我们规定 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{\mathsf{C}}{\times} : (f_1 \,.\, c_2) \longmapsto (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\times} {}_{:c_2}\mathrm{id})$
  $\overset{\mathsf{C}}{\times} : (c_1 \,.\, f_2) \longmapsto ({}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{\times} f_2)$

如何证明 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ 构成函子呢？请看

- $\overset{\mathsf{C}}{+} : ({}_{:c_1}\mathrm{id} \,.\, {}_{:c_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(c_1 \overset{\mathsf{C}}{+} c_2)}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ 保持**恒等箭头**；
- $\overset{\mathsf{C}}{+} : (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f'_1 \,.\, f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f'_2) \longmapsto (f \overset{\mathsf{C}}{\circ} f')$
  —— 即函子 $\overset{\mathsf{C}}{\times}$ 保持**箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明的过程：



另外我们规定 $\overset{\mathsf{C}}{+}$ 在实参分别为
箭头和对象时的输出结果如下：

- $\overset{\mathsf{C}}{+} : (f_1 \,.\, c_2) \longmapsto (f_1 \overset{\mathsf{C}}{+} {}_{:c_2}\mathrm{id})$
  $\overset{\mathsf{C}}{+} : (c_1 \,.\, f_2) \longmapsto ({}_{:c_1}\mathrm{id} \overset{\mathsf{C}}{+} f_2)$

运算性质

对于函子 $\overset{C}{\times}$ 我们不难得知

- $c_1 \overset{C}{\times} 1 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{\times} 1 \overset{C}{\cong} c_1$
  —— 乘法具有**幺元 1** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \,.\, _{:c}!$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{\times} 1) \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & c_1.1 \\
c \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_1._{:c}!"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_1 \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "_{:c_1}\mathrm{id}._{:c_1}!"] & c_1.1 \\
c \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f' \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_1._{:c}!"'] &
\end{tikzcd}$$

- $c_1 \overset{C}{\times} c_2 \overset{C}{\cong} c_2 \overset{C}{\times} c_1$
  —— 乘法具有**交换律** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \,.\, f_2$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{\times} c_2) \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & c_1.c_2 \\
c \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_1.f_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_2 \overset{C}{\times} c_1) \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi=\pi_1.\pi_2"] & c_2.c_1 \\
c \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f' \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, "f_2.f_1"'] &
\end{tikzcd}$$

- $(c_1 \overset{C}{\times} c_2) \overset{C}{\times} c_3 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{\times} (c_2 \overset{C}{\times} c_3)$
  —— 乘法具有**结合律** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $(f_1 \,.\, f_2) \,.\, f_3$ 唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
((c_1 \overset{C}{\times} c_2) \overset{C}{\times} c_3) \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi"] & (c_1 \overset{C}{\times} c_2).c_3 \arrow[r, "\pi._{:c_3}\mathrm{id}"] & (c_1.c_2).c_3 \\
c_3 \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, dotted, "j.f_3"] \arrow[urr, "(f_1.f_2).f_3"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{\times} (c_2 \overset{C}{\times} c_3)) \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[r, "\pi"] & c_1.(c_2 \overset{C}{\times} c_3) \arrow[r, "_{:c_1}\mathrm{id}.\pi"] & c_1.(c_2.c_3) \\
c_3 \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[u, dashed, "f \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"] \arrow[ur, dotted, "f_1.j"] \arrow[urr, "f_1.(f_2.f_3)"'] & &
\end{tikzcd}$$

对于函子 $\overset{C}{+}$ 我们不难得知

- $c_1 \overset{C}{+} 0 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{+} 1 \overset{C}{\cong} c_1$
  —— 加法具有**幺元 0** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \,.\, _{:c}¡$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{+} 0) \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.0 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f_1._{:c}¡"] \\
c \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_1 \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f' \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.0 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f_1._{:c}¡"] \\
c \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}$$

- $c_1 \overset{C}{+} c_2 \overset{C}{\cong} c_2 \overset{C}{+} c_1$
  —— 加法具有**交换律** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $f_1 \,.\, f_2$ 能唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{+} c_2) \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.c_2 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f_1.f_2"] \\
c \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_2 \overset{C}{+} c_1) \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f' \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & c_2.c_1 \arrow[l, "\epsilon_L.\epsilon_R=\epsilon"'] \arrow[dl, "f_2.f_1"] \\
c \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} &
\end{tikzcd}$$

- $(c_1 \overset{C}{+} c_2) \overset{C}{+} c_3 \overset{C}{\cong} c_1 \overset{C}{+} (c_2 \overset{C}{+} c_3)$
  —— 加法具有**结合律** 。
  下图有助于理解证明目标，即 $(f_1 \,.\, f_2) \,.\, f_3$ 唯一决定 f 和 f' 。

$$\begin{tikzcd}
((c_1 \overset{C}{+} c_2) \overset{C}{+} c_3) \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & (c_1 \overset{C}{+} c_2).c_3 \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "j.f_3"] & (c_1.c_2).c_3 \arrow[l, "\epsilon._{:c_3}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "(f_1.f_2).f_3"] \\
c \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(c_1 \overset{C}{+} (c_2 \overset{C}{+} c_3)) \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} \arrow[d, dashed, "f \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}}"'] & c_1.(c_2 \overset{C}{+} c_3) \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, dotted, "f_1.j"] & c_1.(c_2.c_3) \arrow[l, "\epsilon._{:c_3}\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "f_1.(f_2.f_3)"] \\
c \underset{\textcircled{2}}{\overset{C}{\mathrm{Di}}} & &
\end{tikzcd}$$

幺半范畴

像刚才这样对象运算具有**单位元**以及**结合律**的范畴称作**幺半范畴**；

若上述范畴还具有**交换律**则称作**对称幺半范畴**；

很明显我们的范畴 C 是典型的**对称幺半范畴** 。

幺半群

什么是幺半群呢？有两种定义方式：

- **幺半群** M 是个范畴，其只含一个对象 m；
  其中的复合运算正好有单位元以及结合律 。
- 对象 m 属于幺半范畴 C，满足下述交换图：

$$
\begin{tikzcd}
1 \overset{C}{\times} m \arrow[r, "u \overset{C}{\otimes} {:_m}\mathrm{id}"] \arrow[dr, "左单位元\ u_l"'] & m \overset{C}{\times} m \arrow[d, "p"', "运算结果唯一"] & m \overset{C}{\times} 1 \arrow[l, "{:_m}\mathrm{id} \overset{C}{\otimes} u"'] \arrow[dl, "u_r\ 右单位元"] \\
 & m &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(m \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\times} m \arrow[rr, "结合律\ a"] \arrow[d, "先算左侧括号\ p \overset{C}{\otimes} {:_m}\mathrm{id}"'] & & m \overset{C}{\times} (m \overset{C}{\times} m) \arrow[d, "{:_m}\mathrm{id} \overset{C}{\otimes} p\ 先算右侧括号"] \\
m \overset{C}{\times} m \arrow[r, "再算最终结果\ p"'] & m & m \overset{C}{\times} m \arrow[l, "p\ 果结终最算再"]
\end{tikzcd}
$$

  其中

  - u ：$1 \xrightarrow{C} m$ 其实就是 m 里面的幺元
  - u_l：$(1 \overset{C}{\times} m) \xrightarrow{C} m$ 表示 u 构成左幺元
  - u_r：$(m \overset{C}{\times} 1) \xrightarrow{C} m$ 表示 u 构成右幺元
  - p ：$(m \overset{C}{\times} m) \xrightarrow{C} m$ 即为 m 中的二元运算
  - a ：$(m \overset{C}{\times} m) \overset{C}{\times} m \xrightarrow{C} m \overset{C}{\times} (m \overset{C}{\times} m)$ 表示 m 具有结合律

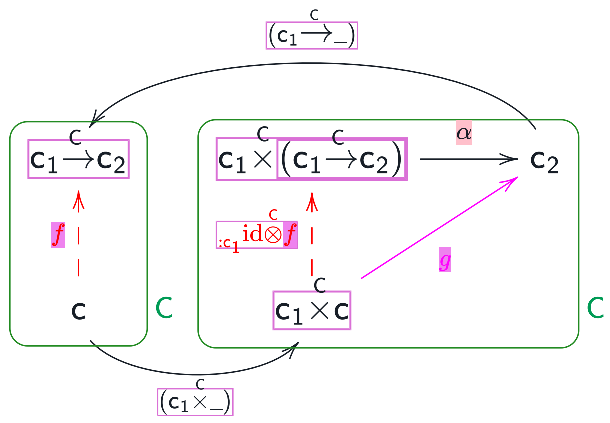
06 类型的幂

LaTeX Definitions are here.

泛性质

默认函子 $\overset{C}{\to}$: $(C \overset{Cat}{\times} C) \overset{Cat}{\longrightarrow} C$ 在范畴 C 中有下述性质：

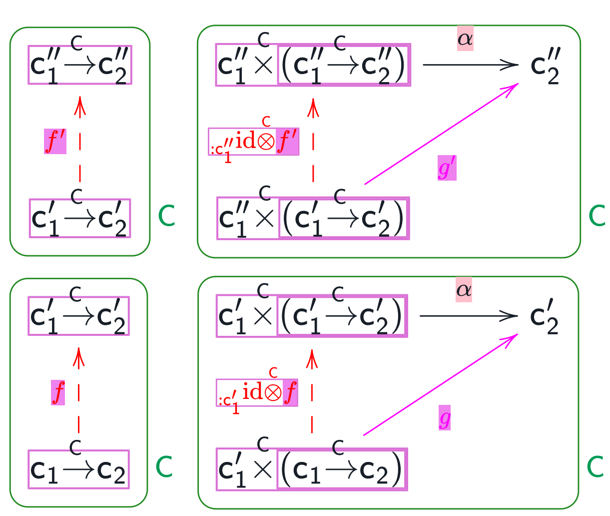
- $(c_1 \overset{C}{\times} c) \overset{C}{\to} c_2 \overset{Set}{\cong} c \overset{C}{\to} (c_1 \overset{C}{\to} c_2) \overset{Set}{\cong} c_1 \overset{C}{\to} (c \overset{C}{\to} c_2)$
  —— c 为任意 C 中对象。此即为幂的泛性质，亦表示了**指数加乘法之间的运算关系**。

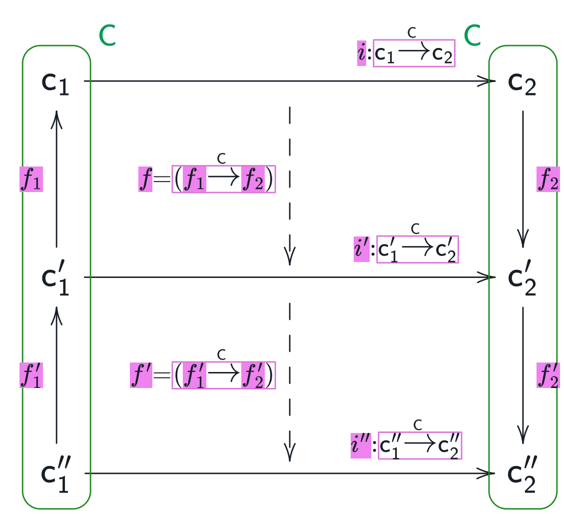


函子性

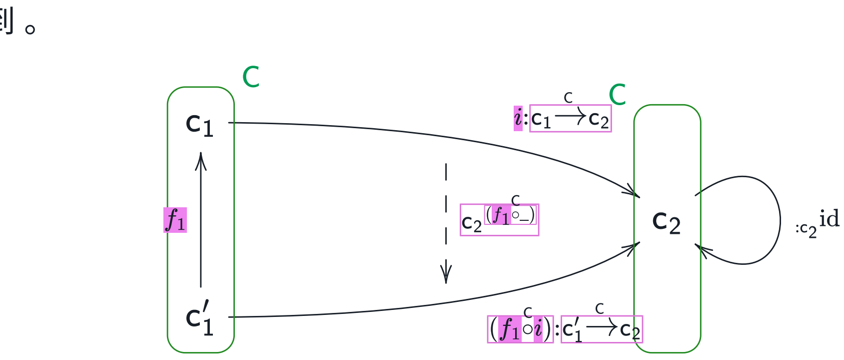
如何证明 $\overset{C}{\to}$ 构成函子呢？请看

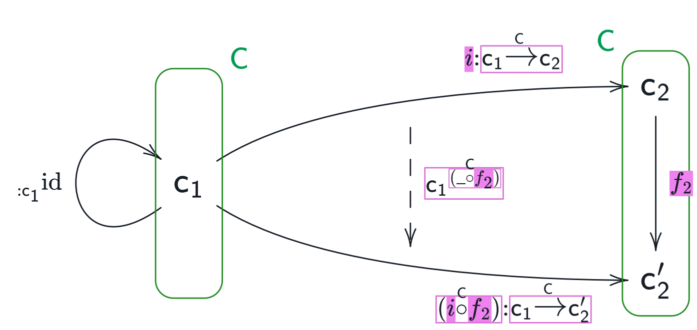
- $\overset{C}{\to} : ({}_{:c_1}\mathrm{id} \,.\, {}_{:c_2}\mathrm{id}) \longmapsto {}_{:(c_1 \overset{C}{\to} c_2)}\mathrm{id}$
  —— 即函子 $\overset{C}{\to}$ 能**保持恒等箭头**；
- $\overset{C}{\to} : (f_1' \overset{C}{\circ} f_1 \,.\, f_2 \overset{C}{\circ} f_2') \longmapsto (f \overset{C}{\circ} f')$
  —— 即函子 $\overset{C}{\to}$ **保持箭头复合运算**。
  下图有助于形象理解证明过程：





下图 自上到下分别为图 1 和图 2 后面会用到。





范畴 C 内任意两对象 c_1 和 c_2 间的箭头构成一个集合 $\boxed{c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2}$，
说明 $\xrightarrow{\mathsf{C}}$ 只能将两个对象打到一个集合；下面使 $\xrightarrow{\mathsf{C}}$ 升级为函子：
若还知道箭头 $f_1 : \boxed{c_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} c_1}$ 以及 $f_2 : \boxed{c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2'}$，则规定

- $\boxed{(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2)} : \boxed{\boxed{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \cancel{\mathsf{C}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}$ 为函子且
  $\boxed{(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2)} : c \longmapsto \boxed{(c \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2)}$ 且对任意 $f : \boxed{c' \xrightarrow{\mathsf{C}} c}$ 有
  $\boxed{(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2)} : f \longmapsto \boxed{(f \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2)} = \boxed{(f \xrightarrow{\mathsf{C}} {}_{:c_2}\mathrm{id})} = \boxed{c_2^{\boxed{(f \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}}}$

  图 1 有助于理解。

  $\boxed{(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2)} : \boxed{\boxed{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \cancel{\mathsf{C}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}$，
  $\boxed{(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2)} : c \longmapsto \boxed{(c \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2)} = \boxed{({}_{:c}\mathrm{id} \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2)} = \boxed{c_2^{\boxed{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)}}}$ 且对任意 $f : \boxed{c' \xrightarrow{\mathsf{C}} c}$ 有
  $\boxed{(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2)} : f \longmapsto \boxed{(f \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2)} = \boxed{\boxed{(f \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)} \boxed{\overset{\mathsf{C} \xrightarrow{} \mathsf{Set}}{\circ}} \boxed{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)}} = \boxed{\boxed{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)} \boxed{\overset{\mathsf{C} \xrightarrow{} \mathsf{Set}}{\circ}} \boxed{(f \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}}$

  图 2 有助于理解。

  > **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - よ : $\boxed{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \boxed{(\boxed{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})}}$
  > $c_2 \longmapsto \boxed{(c_2 \xrightarrow{\boxed{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}} \_)} = \boxed{(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2)}$ 构成一个函子
  > $f_2 \longmapsto \boxed{(f_2 \xrightarrow{\boxed{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}} \_)} = \boxed{(\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2)} = \boxed{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)}$ 构成一个函子间映射，即自然变换
  >
  >   该函子称作是**米田嵌入**。

- $\boxed{(c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)} : \boxed{\cancel{\boxed{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}$ 为函子且
  $\boxed{(c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)} : c \longmapsto \boxed{(c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c)}$，且对任意 $f : \boxed{c \xrightarrow{\mathsf{C}} c'}$ 有
  $\boxed{(c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)} : f \longmapsto \boxed{(c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} f)} = \boxed{({}_{:c_1}\mathrm{id} \xrightarrow{\mathsf{C}} f)} = \boxed{c_1^{\boxed{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f)}}}$

  图 2 有助于理解。

  $\boxed{(f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)} : \boxed{\cancel{\boxed{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}$，
  $\boxed{(f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)} : c \longmapsto \boxed{(f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c)} = \boxed{(f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} {}_{:c}\mathrm{id})} = \boxed{c^{\boxed{(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}}}$ 且对任意 $f : \boxed{c \xrightarrow{\mathsf{C}} c'}$ 有
  $\boxed{(f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)} : f \longmapsto \boxed{(f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} f)} = \boxed{\boxed{(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)} \boxed{\overset{\mathsf{C} \xrightarrow{} \mathsf{Set}}{\circ}} \boxed{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f)}} = \boxed{\boxed{(\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f)} \boxed{\overset{\mathsf{C} \xrightarrow{} \mathsf{Set}}{\circ}} \boxed{(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}}$

  图 1 有助于理解。

  > **Note**
  >
  > 不难看出
  >
  > - 尤 : $\boxed{\boxed{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \boxed{(\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})}}$
  > $c_1 \longmapsto \boxed{(c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)}$ 构成一个函子
  > $f_1 \longmapsto \boxed{(f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)} = \boxed{(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)}$ 构成一个函子间映射，即自然变换
  >
  >   该函子戏称为**尤达嵌入**。

积闭范畴

这里插个题外话：

若范畴包含终对象，所有类型的积以及指数，则可将其称作**积闭范畴**；

若范畴包含始对象，所有类型的和，则可将其称作是**余积闭范畴**；

若范畴满足上述条件，则可称作**双积闭范畴**。

很明显我们讨论的范畴 C 就是**双积闭范畴**。

07 递归类型

LaTeX Definitions are here.

08-09 函子和自然变换

LaTeX Definitions are here.

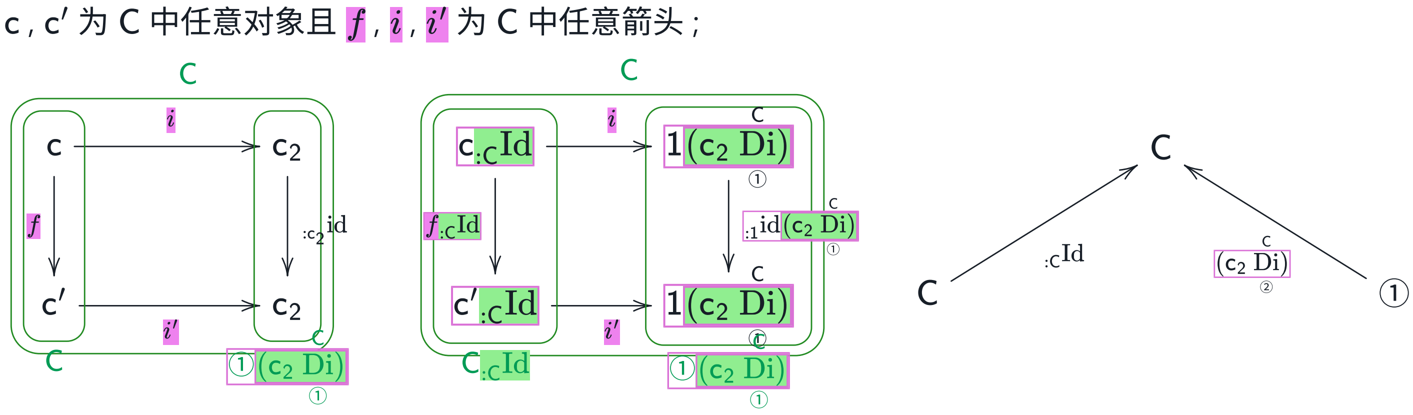
一些特殊的范畴

现在规定几种特殊的范畴。

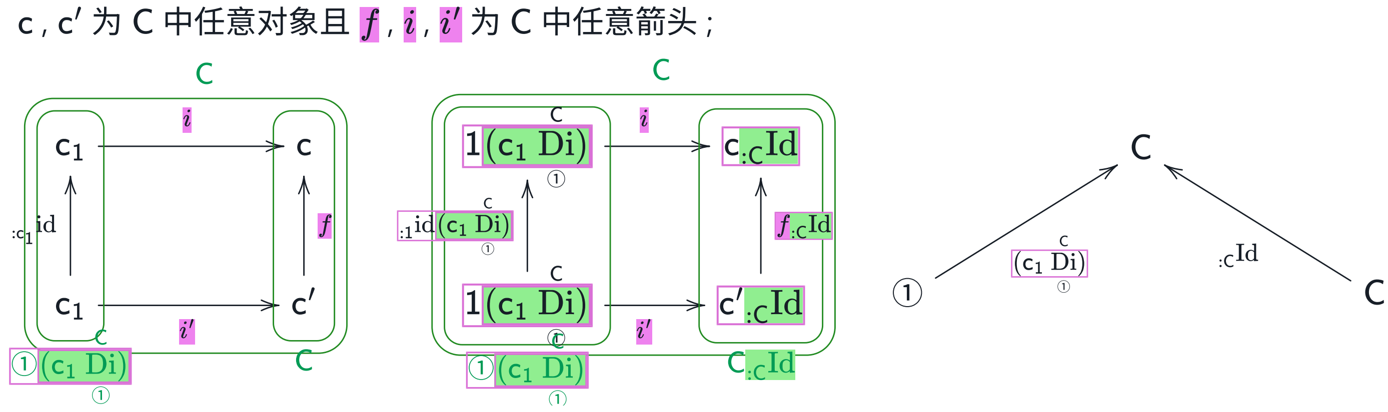
- **离散范畴**：只有对象不含箭头（恒等箭头除外）的范畴。
- Set：**所有集合构成的范畴**，为局部小范畴，满足
  - Set 中对象为任意集合；
  - Set 中箭头为集合间映射。
- Cat：**所有范畴构成的范畴**，满足
  - Cat 中任何对象都构成一个范畴；
  - Cat 中任何箭头都构成一个函子。

若 C，D 为 Cat 中对象，则：

- $\boxed{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$：**反范畴**，满足
  - $\boxed{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$ 中对象皆形如 c，
    c 为任意 C 中的对象；
  - $\boxed{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$ 中箭头皆形如 $\boxed{i^{\mathrm{op}}}:\boxed{c_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} c_1}$，
    $i : \boxed{c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2}$ 可为任意 C 中的箭头。
- $\boxed{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{D}}$：**积范畴**，满足
  - $\boxed{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{D}}$ 中对象皆形如 $\boxed{c\,.\,d}$，
    c，d 分别为任意 C，D 中的对象；
  - $\boxed{\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\times} \mathsf{D}}$ 中箭头皆形如 $\boxed{i\,.\,j}$，
    i，j 分别为任意 C，D 中的箭头。
- $\boxed{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}}$：**所有 C 到 D 的函子的范畴**，满足
  - $\boxed{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}}$ 中任何对象
    都是 C 到 D 的函子；
  - $\boxed{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}}$ 中任何箭头
    都是函子间自然变换。
- C/c：**俯范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
  - C/c_2 中对象皆形如 $\boxed{\cancel{c\,.\,1}\,.\,i}$，其中 c 和
    $i : \boxed{c \xrightarrow{\mathsf{C}} c_2}$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
  - c_2/C 中箭头皆形如 $f\,\cancel{{}_{:c_2}\mathrm{id}}$ 且满足下述交换图，其中
    c，c′ 为 C 中任意对象且 f，i，i' 为 C 中任意箭头；



- c_1/C：**仰范畴**，这里 c 为任意 C 中对象；满足
  - c_1/C 中对象皆形如 $\boxed{\cancel{1\,.\,c}\,.\,i}$，其中 c 和
    $i : \boxed{c_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} c}$ 分别为 C 中任意的对象和箭头；
  - C/c_1 中箭头皆形如 $\boxed{\cancel{{}_{:c_1}\mathrm{id}\,.}}\,f$ 且满足下述交换图，其中
    c，c′ 为 C 中任意对象且 f，i，i' 为 C 中任意箭头；



函子

接下来我们来提供函子的正式定义：

- $F : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为**函子**当且仅当
  - 对任意 C 中对象 c，$\mathsf{c}F$ 为 D 中对象且 ${}_{:\mathsf{c}}\mathrm{id}F = {}_{:\mathsf{c}F}\mathrm{id}$；
  - 对任意 C 中箭头 $i_1 : \mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 和 $i_2 : \mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_3$，始终都有等式 $(i_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} i_2)F = i_1F \overset{\mathsf{D}}{\circ} i_2F$ 成立。

若已确信 $F : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 为函子且
还知 C 中有对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$
以及 C 中有箭头 $i : \mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 则

- 若 i 为单态 / 满态 / 同构
  则 iF 为单态 / 满态 / 同构；
- 若 iF 为同构
  则 i 为同构。

> ⓘ **Note**
>
> 不难发现函子具有保持
> 对象 / 态射性质的能力。

函子的复合运算

若还知道 $G : \mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$ 为函子则

- $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{E}$
  也构成一个函子。

恒等函子

对于函子我们也有恒等映射，即：

- ${}_{:\mathsf{C}}\mathrm{Id} \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} F = F$
  $= F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{Id}$

忠实，完全和本质满函子

若 C，D，E 皆为**局部小范畴**，则

- F 是**忠实的**当且仅当对任意 C 中的对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$，
  $\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 与 $\mathsf{c}_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}_2F$ 之间始终都存在单射；
- F 是**完全的**当且仅当对任意 C 中的对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$，
  $\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 与 $\mathsf{c}_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}_2F$ 之间始终都存在满射；
- F 是**完全忠实的**当且仅当任意 C 中对象 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2$，
  $\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2$ 与 $\mathsf{c}_1F \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{c}_2F$ 之间始终都存在双射。

> ⓘ **Note**
>
> 刚才提到的 " 单 / 满 / 双射 "
> 针对的都是范畴的箭头部分。

- F 是**本质满的**当且仅当对任意 D 中对象 d
  都存在 C 中对象 c 使 $\mathsf{c}F \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{d}$ 之间有双射。

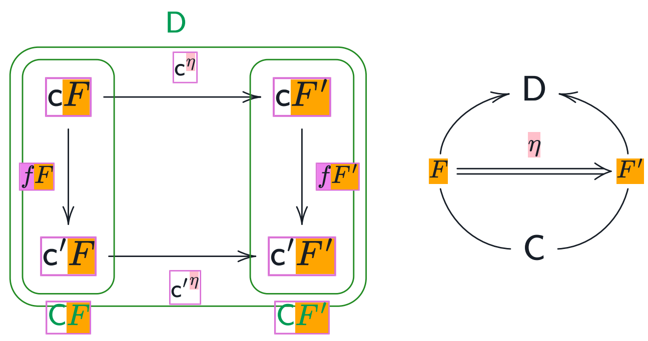
根据刚才的信息我们不难得知

- 若 F, G 为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满函子
  则 $G \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为忠实 / 完全 / 完全忠实 / 本质满 函子；
- 若 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} G$ 为完全忠实函子
  且知道 G 为完全忠实函子
  则可知 F 为完全忠实函子；

自然变换

如果还知道 F' : $\mathsf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathsf{D}$ 为函子 , 那么

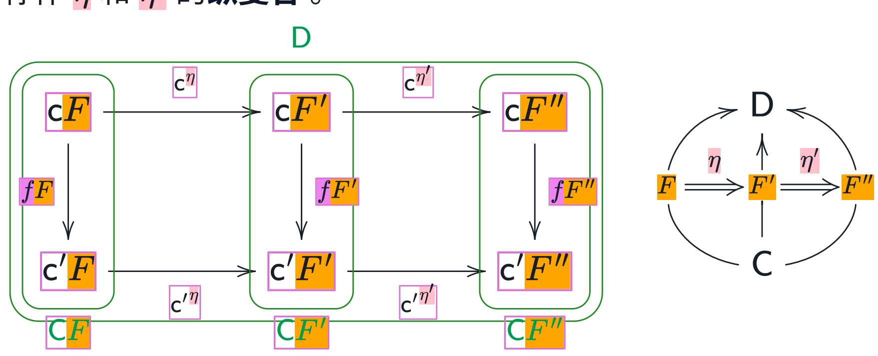
- η : $F \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathsf{D}} F'$ 为自然变换当且仅当对任意 C 中对象 c , c' 始终都会有下述交换图成立 :



自然变换的复合

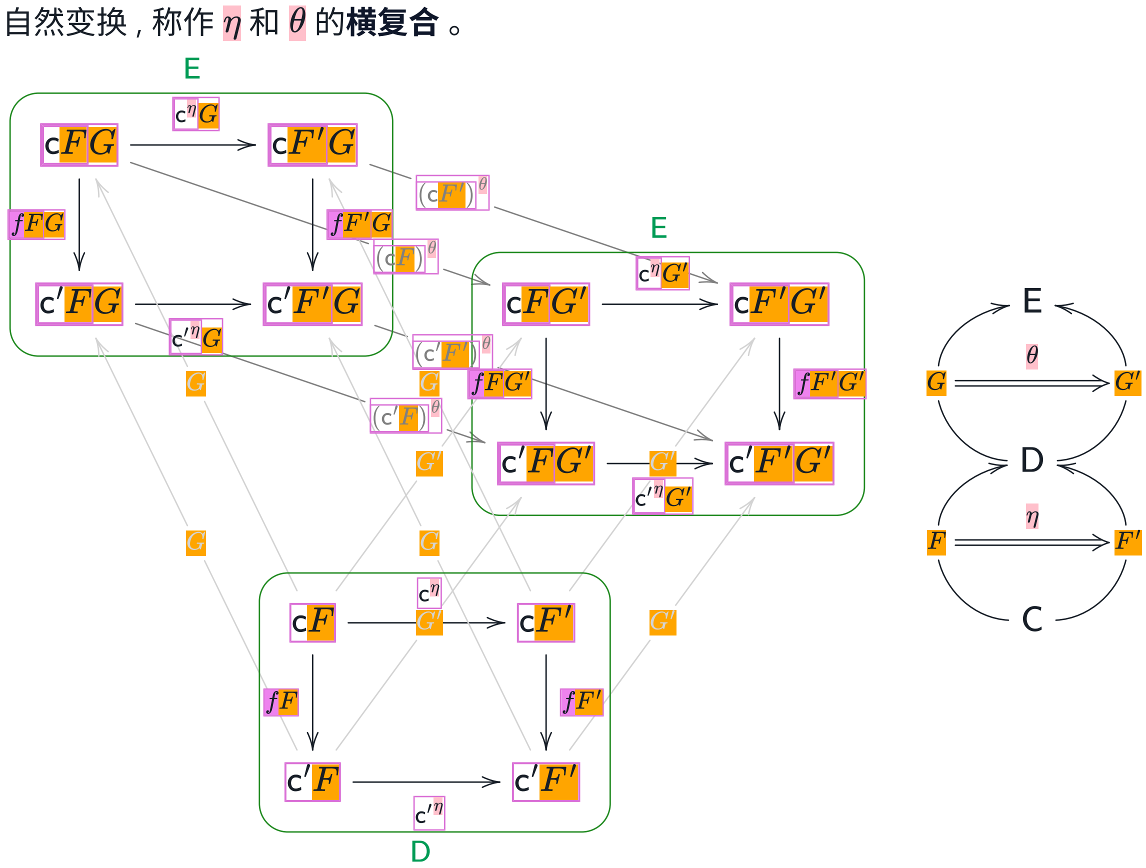
若已知 η : $F \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathsf{D}} F'$ 构成自然变换且
还知道 η' : $F' \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathsf{D}} F''$ 为自然变换则

- $\eta \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathsf{D}}{\circ} \eta'$: $F \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathsf{D}} F''$ 为自然变换 ,
称作 η 和 η' 的**纵复合** 。



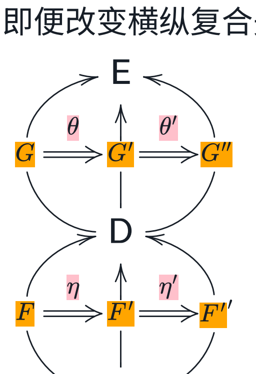
如果还知道 G' : $\mathsf{D} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathsf{E}$ 也是个函子
及自然变换 θ : $G \xrightarrow{\mathsf{D} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathsf{E}} G'$ 那么便有

- $\eta \circ \theta$: $F \overset{\text{Cat}}{\circ} G \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathsf{E}} F' \overset{\text{Cat}}{\circ} G'$ 为
自然变换 , 称作 η 和 θ 的**横复合** 。



若 θ' : $G \xrightarrow{\mathsf{D} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathsf{E}} G'$ 为自然变换则

- $(\eta \circ \theta) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathsf{E}}{\circ} (\eta' \circ \theta') = (\eta \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathsf{D}}{\circ} \eta') \circ (\theta \overset{\mathsf{D} \xrightarrow{\text{Cat}} \mathsf{E}}{\circ} \theta')$,
即便改变横纵复合先后顺序也不影响最终结果 。



恒等自然变换

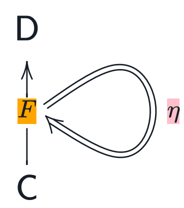
同样对于自然变换也有恒等映射。

- ${}_{:F}\iota : F \xrightarrow[\mathsf{C}\to\mathsf{D}]{\mathsf{Cat}} F$ 为恒等自然变换当且仅当
  对范畴 C 中任意对象 c 都有下述交换图成立：

$$\begin{tikzcd} \mathsf{c}F \arrow[r, "\mathsf{c}^{\eta} = {}_{:(\mathsf{c}F)}\mathrm{id}"] \arrow[d, "fF"'] & \mathsf{c}F \arrow[d, "fF"] \\ \mathsf{c}'F \arrow[r, "\mathsf{c}'^{\eta} = {}_{:(\mathsf{c}'F)}\mathrm{id}"'] & \mathsf{c}'F \end{tikzcd}$$

D

$\mathsf{C}F$ $\mathsf{C}F$



自然同构

自然同构与你想象中的同构不太像。

- $\eta : F \xrightarrow[\mathsf{C}\to\mathsf{D}]{\mathsf{Cat}} F'$ 为**自然同构**当且仅当
  c^{η} 总是同构，这里 c 为任意 C 中对象。

  此时 F，F' 的关系可用 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\underset{\mathsf{C}\to\mathsf{D}}{\cong}} F'$ 表示

范畴等价的定义

我们用自然同构来定义范畴的等价。

- $\mathsf{C} \overset{\mathsf{Cat}}{\cong} \mathsf{D}$ 当且仅当
  存在函子 $F : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{D}$ 及 $F' : \mathsf{D} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{C}$
  使 $F \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} F' \underset{\mathsf{C}\to\mathsf{C}}{\overset{\mathsf{Cat}}{\cong}} {}_{:\mathsf{C}}\mathrm{id}$ 并且有 $F' \overset{\mathsf{Cat}}{\circ} F \underset{\mathsf{D}\to\mathsf{D}}{\overset{\mathsf{Cat}}{\cong}} {}_{:\mathsf{D}}\mathrm{id}$。

米田引理

反变米田引理的陈述如下：

- $\underbrace{((\_ \xrightarrow{C} c_2) \xrightarrow[C \to \mathrm{Set}]{\mathrm{Cat}} F)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(c_2 F)}_{\text{一堆元素}}$

反变米田引理的证明如下：

1. $\Leftarrow$: 考虑任意 $(c_2 F)$ 中的 etc : 根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图
   我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_2} ，于是便可构建一个完整的 η_2 。
   易知 η_2 是一个自然变换 。

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Set} & \\
c \xrightarrow{C} c_2 \arrow[rr, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & & cF \arrow[d, "fF"] \\
c' \xrightarrow{C} c_2 \arrow[rr, "c'^{\eta_2}"'] & & c'F \\
C \xrightarrow{C} c_2 & & CF
\end{tikzcd}$$

2. $\Rightarrow$: 考虑任意等式左侧的 η_1 : 若上述交换图成立
   则可对任意 η_1 指派 $\mathrm{etc} = {:_{c_1}}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 为 $c_2 F$ 中与之对应的元素；

$$\begin{tikzcd}
c_2 \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & c_2 F \arrow[d, "fF"] & {:_{c_2}}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_2}"] \arrow[d, "f \xrightarrow{C} c_2"'] & {:_{c_2}}\mathrm{id}(c^{\eta_2}) \arrow[d, "fF"] \\
c' \xrightarrow{C} c_2 \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & c'F & f \arrow[r, "c'^{\eta_2}"'] & \mathrm{etc}(fF)
\end{tikzcd}$$

为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
c_2 唯一地确定了 η_2 ，反之 η_2 页唯一确定了 c_2 。

协变米田引理的陈述如下：

- $\underbrace{((c_1 \xrightarrow{C} \_) \xrightarrow[C \to \mathrm{Set}]{\mathrm{Cat}} F)}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(c_1 F)}_{\text{一堆元素}}$

协变米田引理的证明如下：

1. $\Leftarrow$: 考虑任意 $(c_1 F)$ 中的 etc : 根据 etc 及其所对应的上方右侧的交换图
   我们可为每个对象 c' 定义其所对应的 c'^{η_1} ，于是便可构建一个完整的 η_1 。
   易知 η_1 是一个自然变换 。

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Set} & \\
c_1 \xrightarrow{C} c \arrow[rr, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & & cF \arrow[d, "fF"] \\
c_1 \xrightarrow{C} c' \arrow[rr, "c'^{\eta_1}"'] & & c'F \\
c_1 \xrightarrow{C} C & & CF
\end{tikzcd}$$

2. $\Rightarrow$: 考虑任意等式左侧的 η_1 : 若上述交换图成立
   则可对任意 η_1 指派 $\mathrm{etc} = {:_{c_1}}\mathrm{id}(c^{\eta_1})$ 为 $c_1 F$ 中与之对应的元素；

$$\begin{tikzcd}
c_1 \xrightarrow{C} c_1 \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & c_1 F \arrow[d, "fF"] & {:_{c_1}}\mathrm{id} \arrow[r, "c^{\eta_1}"] \arrow[d, "c_1 \xrightarrow{C} f"'] & {:_{c_1}}\mathrm{id}(c^{\eta_1}) \arrow[d, "fF"] \\
c_1 \xrightarrow{C} c' \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & c'F & f \arrow[r, "c'^{\eta_1}"'] & \mathrm{etc}(fF)
\end{tikzcd}$$

为何构成同构呢？因为 1 和 2 的自然变换表达式本质上是一样的！
c_1 唯一地确定了 η_1 ，反之 η_1 页唯一确定了 c_1 。

米田嵌入

根据前面的内容我们可知

- $よ : \mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})$

  $\mathsf{c}_2 \longmapsto (\mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) = (\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2)$　　构成一个函子，称作预层

  $f_2 \longmapsto (f_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) = (\_ \xrightarrow{\mathsf{C}} f_2) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2)$　　构成一个函子间映射，即自然变换

  构成一个完全忠实函子，该函子称作是**米田嵌入**。

证明如下：

- $よ$ 是函子，因为
  - $_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}よ = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{c}_2}\mathrm{id}) = {}_{:(\mathsf{c}_2よ)}\mathrm{id}$
  - $(f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')よ = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (f_2 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_2')$,

  由于函子具有保持对象 / 映射性质的能力，
  故便可知 $f_2よ$ 为同构当且仅当 f_2 为同构。
- $よ$ 是完全忠实的，因为
  将协变米田引理中的 c_1 / C / F
  分别换成 c_2 / C^{op} / $(\mathsf{c}_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_)$
  即可获得下述公式：

  $$\underbrace{((\mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (\mathsf{c}_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \_))}_{\text{预层范畴的 hom-set}} \cong \underbrace{(\mathsf{c}_2' \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}_2)}_{\mathsf{C}\text{ 的 hom-set}}$$

  也就是

  $$\underbrace{((\mathsf{c}_2よ) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (\mathsf{c}_2'よ))}_{\text{一堆自然变换}} \overset{\mathsf{C}}{\cong} \underbrace{(\mathsf{c}_2(\mathsf{c}_2'よ))}_{\text{一堆元素}}$$

> ⓘ **Note**
>
> 问题来了：既然 $よ$ 是完全忠实的，那么是否意味着
> 如果 $f_2 : \mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_2'$ 是同构则上式左侧部分与之对应
> 的自然变换一定就是自然同构呢？

根据前面的内容我们可知

- $尤 : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} (\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Set}} \mathsf{Set})$

  $\mathsf{c}_1 \longmapsto (\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$　　构成一个函子

  $f_1 \longmapsto (f_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) = (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} \_)$　　构成一个函子间映射，即自然变换

  构成一个完全忠实函子，该函子称作是**尤达嵌入**。

证明如下：

- $尤$ 是函子，因为
  - $_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}尤 = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} {}_{:\mathsf{c}_1}\mathrm{id}) = {}_{:(\mathsf{c}_1尤)}\mathrm{id}$
  - $(f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1')尤 = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} (f_1 \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1')) = (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1) \overset{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}}{\circ} (\_ \overset{\mathsf{C}}{\circ} f_1')$,
- $尤$ 是完全且忠实的，因为
  将协变米田引理中的 F
  换成 $(\mathsf{c}_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} \_)$
  即可获得下述公式：

  $$\underbrace{((\mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathsf{C}} \_) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (\mathsf{c}_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} \_))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(\mathsf{c}_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_1)}_{\text{一堆元素}}$$

  也就是

  $$\underbrace{((\mathsf{c}_1尤) \xrightarrow{\mathsf{C} \xrightarrow{\mathsf{Cat}} \mathsf{Set}} (\mathsf{c}_1'尤))}_{\text{一堆自然变换}} \cong \underbrace{(\mathsf{c}_1(\mathsf{c}_1'尤))}_{\text{一堆元素}}$$

> ⓘ **Note**
>
> 问题来了：既然 $尤$ 是完全忠实的，那么是否意味着
> 如果 $f_1 : \mathsf{c}_1' \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{c}_1$ 是同构则上式左侧部分与之对应
> 的自然变换一定就是自然同构呢？