章节 08 - 09 函子与自然变换

LaTeX Definitions are here.

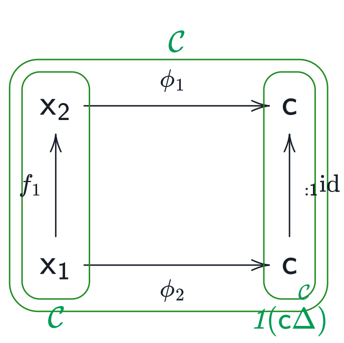
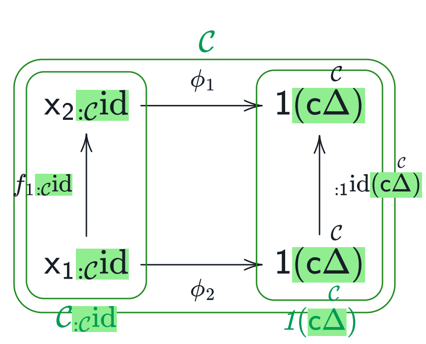
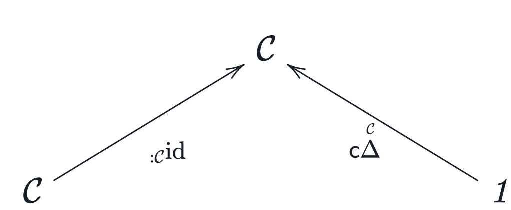
一些特殊的范畴

现在规定几种特殊的范畴。

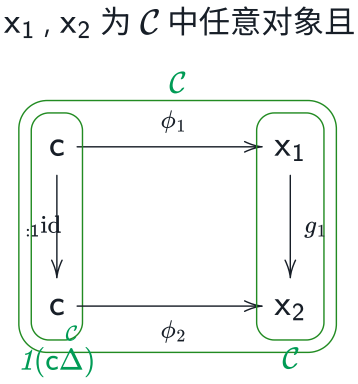
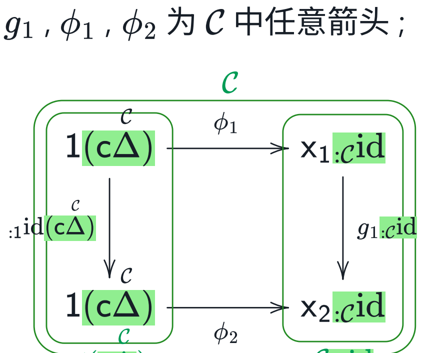
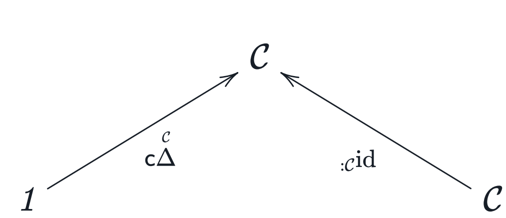
- **离散范畴**：只有对象不含箭头（恒等箭头除外）的范畴。
- $\mathcal{S}et$：**所有集合构成的范畴**，为局部小范畴，满足
  - $\mathcal{S}et$ 中对象为任意集合；
  - $\mathcal{S}et$ 中箭头为集合间映射。
- $\mathcal{C}at$：**所有范畴构成的范畴**，满足
  - $\mathcal{C}at$ 中任何对象都构成一个范畴；
  - $\mathcal{C}at$ 中任何箭头都构成一个函子。

若 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{C}at$ 中对象，则：

- $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$：**反范畴**，满足
  - $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中对象皆形如 c，
    c 为任意 $\mathcal{C}$ 中的对象；
  - $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中箭头皆形如 $\phi^{\mathrm{op}} : \mathsf{c}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \mathsf{c}_1$，
    $\phi : \mathsf{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}_2$ 可为任意 $\mathcal{C}$ 中的箭头。
- $\mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{D}$：**积范畴**，满足
  - $\mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{D}$ 中对象皆形如 $\mathsf{c}\ .\ \mathsf{d}$，
    c，d 为任意 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$ 中的对象；
  - $\mathcal{C} \overset{\mathcal{C}at}{\times} \mathcal{D}$ 中箭头皆形如 $\phi\ .\ \psi$，
    ϕ，ψ 为任意 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$ 中的箭头。
- $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$：**所有 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的函子的范畴**，满足
  - $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$ 中任何对象
    都是 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的函子；
  - $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$ 中任何箭头
    都是函子间自然变换。
- $\mathcal{C}/\mathsf{c}$：**俯范畴**，这里 c 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象；满足
  - $\mathcal{C}/\mathsf{c}$ 中对象皆形如 $\cancel{\mathsf{x}\ .\ 1}\ .\ \phi$，其中 x
    和 $\phi : \mathsf{x} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{c}$ 分别为 $\mathcal{C}$ 中任意的对象和箭头；
  - $\mathsf{c}/\mathcal{C}$ 中箭头皆形如 $f_1\ \cancel{.\ {}_{:1}\mathrm{id}}$ 且满足下述交换图，其中
    x_1，x_2 为 $\mathcal{C}$ 中任意对象且 f_1，ϕ_1，ϕ_2 为 $\mathcal{C}$ 中任意箭头；

- $\mathsf{c}/\mathcal{C}$：**仰范畴**，这里 c 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象；满足
  - $\mathsf{c}/\mathcal{C}$ 中对象皆形如 $\cancel{1\ .\ \mathsf{x}}\ .\ \phi$，其中 x
    和 $\phi : \mathsf{c} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathsf{x}$ 分别为 $\mathcal{C}$ 中对象和箭头；
  - $\mathcal{C}/\mathsf{c}$ 中箭头皆形如 $\cancel{{}_{:\mathcal{C}}\mathrm{id}\ .}\ g_1$ 且满足下述交换图，其中
    x_1，x_2 为 $\mathcal{C}$ 中任意对象且 g_1，ϕ_1，ϕ_2 为 $\mathcal{C}$ 中任意箭头；

函子

接下来我们来提供函子的正式定义：

- $P : \mathcal{C} \xrightarrow{Cat} \mathcal{D}$ 为范畴当且仅当
  - 对任意 $\mathcal{C}$ 中对象 c，cP 为 $\mathcal{D}$ 中对象且 $_{:\mathrm{c}}\mathrm{id}P = {}_{:\mathrm{c}P}\mathrm{id}$；
  - 对任意 $\mathcal{C}$ 中箭头 $\phi_1 : \mathrm{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathrm{c}_2$ 和 $\phi_2 : \mathrm{c}_2 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathrm{c}_3$，始终都有等式 $(\phi_1 \overset{\mathcal{C}}{\circ} \phi_2)P = \phi_1 P \overset{\mathcal{D}}{\circ} \phi_2 P$ 成立。

函子的复合运算

假如刚才的 P 确实构成一个函子
且 $Q : \mathcal{D} \xrightarrow{Cat} \mathcal{E}$ 也构成函子，那么

- $P \overset{Cat}{\circ} Q : \mathcal{C} \xrightarrow{Cat} \mathcal{E}$
  也构成一个函子。

恒等函子

对于函子我们也有恒等映射，即：

- $$\begin{aligned} {}_{:\mathcal{C}}\mathrm{id} \overset{Cat}{\circ} P &= P \\ &= P \overset{Cat}{\circ} {}_{:\mathcal{D}}\mathrm{id} \end{aligned}$$

忠实，完全和本质满函子

若 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$，$\mathcal{E}$ 皆为**局部小范畴**，则

- P 是**忠实的**当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 c_1，c_2
  $(\mathrm{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathrm{c}_2)$ 与 $(\mathrm{c}_1 P \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{c}_2 P)$ 之间始终存在单射；
- P 是**完全的**当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 c_1，c_2
  $(\mathrm{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathrm{c}_2)$ 与 $(\mathrm{c}_1 P \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{c}_2 P)$ 之间始终存在满射；
- P 是**完全忠实的**当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 c_1，c_2
  $(\mathrm{c}_1 \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathrm{c}_2)$ 与 $(\mathrm{c}_1 P \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{c}_2 P)$ 之间始终存在双射。

> **Note**
>
> 刚才提到的“单／满／双射”
> 针对的都是范畴的箭头部分。

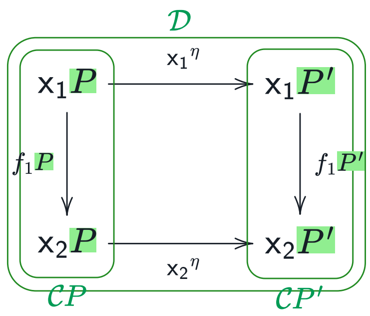
- P 是**本质满的**当且仅当对任意 $\mathcal{D}$ 中对象 d
  都存在 $\mathcal{C}$ 中对象 c 使 c$P \xrightarrow{\mathcal{D}}$ d 之间有双射。

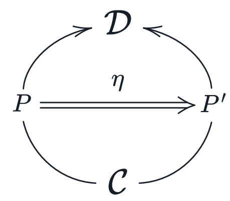
> **Tip**
>
> 不难发现
>
> - 忠实函子的复合是忠实函子
> - 完全函子的复合是完全函子
> - 完全忠实函子的复合是完全忠实函子
> - 若两个函子中有一个是完全忠实函子，
>   且它们的复合也是一个完全忠实函子，
>   则剩下的那个函子也是完全忠实函子。
> - 本质满函子的复合是本质满函子

自然变换

如果还知道 $P' : \mathcal{C} \xrightarrow{Cat} \mathcal{D}$ 为函子，那么

- $\eta : P \xrightarrow{\overset{Cat}{\mathcal{C}\to\mathcal{D}}} P'$ 为自然变换当且仅当对任意
  $\mathcal{C}$ 中对象 x_1，x_2 始终都会有下述交换图成立：

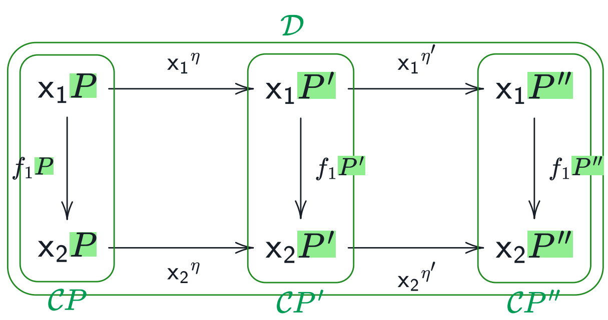


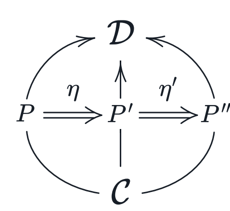


自然变换的复合

若已知 $\eta : P \xrightarrow{\overset{Cat}{\mathcal{C}\to\mathcal{D}}} P'$ 构成自然变换且
还知道 $\eta' : P' \xrightarrow{\overset{Cat}{\mathcal{C}\to\mathcal{D}}} P''$ 为自然变换则

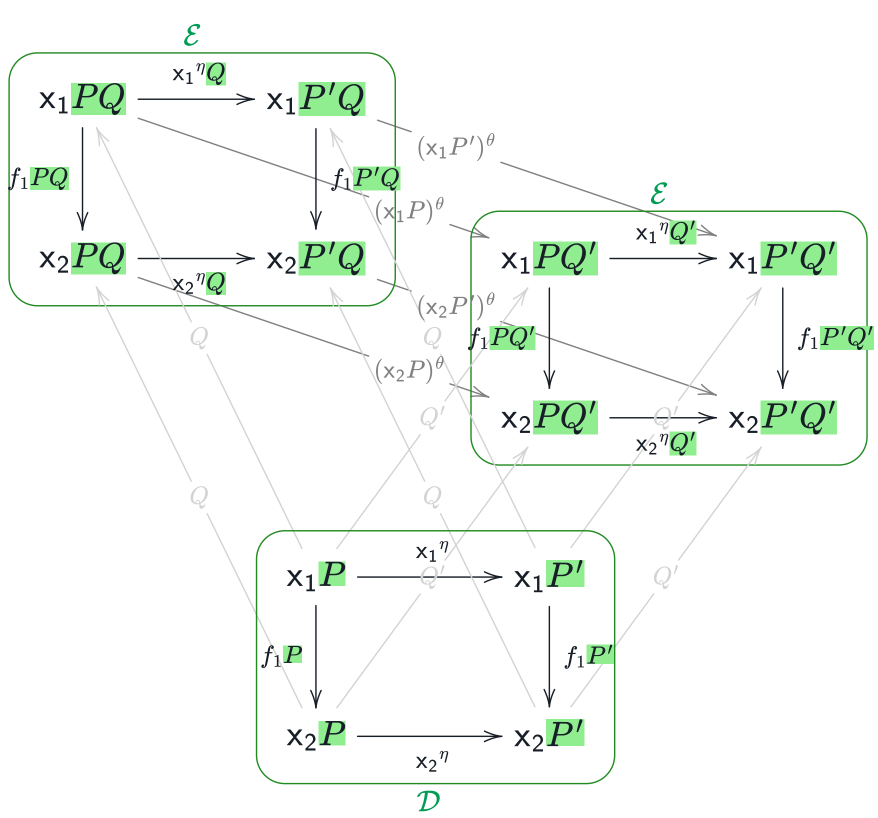
- $\eta \overset{\overset{Cat}{\mathcal{C}\to\mathcal{D}}}{\circ} \eta' : P \xrightarrow{\overset{Cat}{\mathcal{C}\to\mathcal{D}}} P'$ 为自然变换，
  称作 η 和 η' 的**纵复合**。

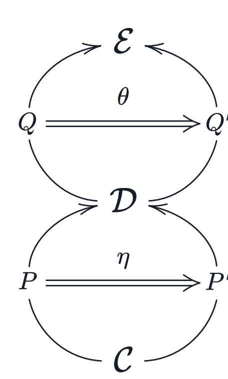




如果还知道 $Q' : \mathcal{D} \xrightarrow{Cat} \mathcal{E}$ 也是个函子
以及自然变换 $\theta : Q \xrightarrow{\overset{Cat}{\mathcal{D}\to\mathcal{E}}} Q'$，则有

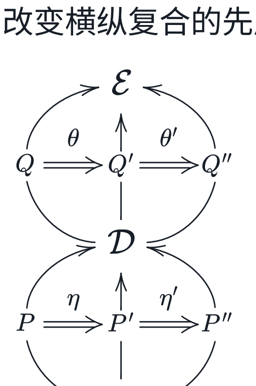
- $\eta \circ \theta : P \overset{Cat}{\circ} Q \xrightarrow{\overset{Cat}{\mathcal{C}\to\mathcal{E}}} P' \overset{Cat}{\circ} Q'$ 为自然变换，
  称作 η 和 θ 的**横复合**。





若 $\theta' : Q' \xrightarrow{\overset{Cat}{\mathcal{D}\to\mathcal{E}}} Q''$ 为自然变换则

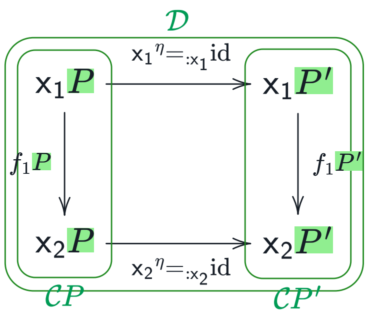
- $(\eta \circ \theta) \overset{\overset{Cat}{\mathcal{C}\to\mathcal{E}}}{\circ} (\eta' \circ \theta') = (\eta \overset{\overset{Cat}{\mathcal{C}\to\mathcal{D}}}{\circ} \eta') \circ (\theta \overset{\overset{Cat}{\mathcal{D}\to\mathcal{E}}}{\circ} \theta')$，
  改变横纵复合的先后顺序也不会影响最终结果。

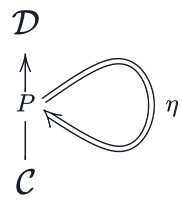


恒等自然变换

同样对于自然变换也有恒等映射。

- ${}_{:P}\mathrm{id} : P \xrightarrow{\overset{\mathcal{C}at}{\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}}} P$ 为恒等自然变换当且仅当对范畴 $\mathcal{C}$ 中任意对象 x 有下述交换图成立：





自然同构

在范畴论中我们更关心的是自然同构。

- $\eta : P \xrightarrow{\overset{\mathcal{C}at}{\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}}} P'$ 为**自然同构**当且仅当 x^{η} 总是同构，这里 x 为任意 $\mathcal{C}$ 中对象。

- 函子 $P : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$，
  函子 $Q : \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}at} \mathcal{D}$，
  函子的复合：$P \circ Q$
- 自然变换 $\eta_1 : P_1 \xrightarrow{\mathcal{C}at} Q_1$，
  自然变换 $\eta_2 : P_1 \xrightarrow{\mathcal{C}at} Q_1$，
  自然变换 $\theta_1 : Q_1 \xrightarrow{\mathcal{C}at} R_1$
  自然变换的纵复合：$\eta_1 \circ_{\mathrm{v}} \eta_2$，
  自然变换的横复合：$\eta_1 \circ_{\mathrm{h}} \theta_1$，