Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Dr. Marco Hülsmann

Numerische Mathematik 1
Übungsblatt 14, WS 2019/20
– Musterlösungen –

Aufgabe 1 (Householder-Spiegelungen)

Sei n der Normalenvektor einer Spiegelungsebene. Die Householder-Spiegelung ist gegeben durch die Matrix $H = E_m - 2nn^T$. Zeigen Sie:

a) Die Matrix $P = E_m - nn^T$ beschreibt tatsächlich eine Projektion auf die Spiegelungsebene. Daher ist H auch tatsächlich eine Spiegelungsmatrix.

b) H ist orthogonal.

Musterlösung:

a) Um den Vektor x orthogonal auf die Ebene zu projizieren, wähle $\lambda \in \mathbb{R}$ so, daß $\langle n, x - \lambda n\rangle$ = 0. Dies ist wegen $\langle n, n\rangle = 1$ genau dann der Fall, wenn $\lambda = \langle n, x\rangle$. Es gilt

$$Px = (E_m - nn^T)x = x - n(n^T x) = x - n\langle n, x\rangle = x - \lambda n$$

also ist Px tatsächlich die orthogonale Projektion von x auf die Ebene.

b) Es gilt

$$\begin{aligned} H^T H &= (E_m - nn^T)^T(E_m - nn^T) = E_m^T E_m - 2nn^T E_m - E_m^T \cdot 2nn^T + (2nn^T)^T \cdot 2nn^T \\ &= E_m - 4nn^T E_m + 4n \underbrace{n^T n}_{=1} n^T = E_m \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (QR-Zerlegung)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix und LR eine Cholesky-Zerlegung von A^TA. Zeigen Sie, daß QR mit $Q = A(L^T)^{-1}$ eine QR-Zerlegung von A ist. Bestimmen Sie damit die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Musterlösung:

Es gilt

$$QR = A(L^T)^{-1}L^T = A$$

da $A^TA = LR = LL^T$, also $R = L^T$. Beachte, daß nur eine Choslesky-Zerlegung von A^TA in Betracht kommt, da diese stets positiv definit ist, und A nicht notwendigerweise.

Es gilt

$$A^TA = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Cholesky-Zerlegung ist gegeben durch $A^TA = LL^T$ mit

$$L = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Die QR-Zerlegung von A ist somit gegeben durch

$$R = L^T = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

und

$$Q = A(L^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{3\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$