Hochschule Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Dr. Marco Hülsmann

Numerische Mathematik 1

Übungsblatt 11, WS 2019/20

– Musterlösungen –

Aufgabe 1 (Modifiziertes Newton-Verfahren)

Programmieren Sie das folgende modifizierte Newton-Verfahren zur Lösung quadratischer Gleichungssysteme:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k Df(x^{(k)})^{-1} f(x^{(k)}),\ x^{(k)} \in \mathbb{R}^n,\ k = 0, 1, 2, ...,$$

wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Funktion ist. Dabei soll in jeder Iteration die Schrittweite $\alpha_k \in \mathbb{R}$ so gewählt werden, daß

$$||f(x^{(0)})|| \geq ||f(x^{(1)})|| \geq ||f(x^{(2)})|| \geq ||f(x^{(3)})|| \geq ...$$

Es soll also monotone Konvergenz entstehen. Vergleichen Sie dieses Verfahren mit dem Newton-Verfahren aus der Vorlesung hinsichtlich Konvergenzgeschwindigkeit und Rechenaufwand anhand des Beispiels aus Aufgabe 1 von Übungsblatt 10!

Musterlösung:

Das Verfahren ist in `newton_sws.py` implementiert.

Das Newton-Verfahren ist ohne Schrittweitensteuerung divergent. Teilweise entstehen aufgrund der Potenzbildungen Exponentenüberläufe.
Erst mit Schrittweitensteuerung kann Konvergenz erzielt werden. Dabei kann es vorkommen, daß die Schrittweite so klein wird, daß numerisch keine Verbesserungen mehr erzielt werden können und die Iteration stagniert. Bei Startwerten, die weiter von der Lösung entfernt liegen, konvergiert das Verfahren gegen eine andere Lösung.

Im allgemeinen kann durch eine Schrittweitensteuerung Konvergenz gewissermaßen erzwungen und das Verfahren gezielter zur Lösung geführt werden. Dadurch kann allerdings langsamere Konvergenz resultieren, und der Rechenaufwand steigt ebenfalls durch die Schrittweitensteuerung.

Aufgabe 2* **(Konvergenzsätze zum Newton-Verfahren)**

Finden Sie die wesentlichen Elemente im Beweis des Satzes von Newton-Mysovskhik oder alternativ im Beweis des Satzes von Newton-Kantorovich aus dem Stoer-Bulirsch!