Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Dr. Marco Hülsmann

Numerische Mathematik 1

Übungsblatt 4, WS 2019/20
– Musterlösungen –

Aufgabe 1 (Konditionsabschätzungen)

Betrachten Sie das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Nehmen Sie an, daß die Koeffizienten der Matrix A exakt vorliegen. Wie groß darf der relative Fehler in der Maximumsnorm bei der rechten Seite sein, damit der relative Fehler in der Maximumsnorm in der Lösung kleiner als 10^{-2} ist?

Musterlösung:

Sei x die Lösung des LGS. Nach Vorlesung gilt die Abschätzung

$$\frac{||\Delta x||_\infty}{||x||_\infty} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{||\Delta b||_\infty}{||b||_\infty}$$

wobei

$$\mathrm{cond}(A) = ||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty$$

Falls der relative Fehler der rechten Seite $\frac{||\Delta b||_\infty}{||b||_\infty}$ so ist, daß

$$\mathrm{cond}(A)\frac{||\Delta b||_\infty}{||b||_\infty} < 10^{-2}$$

so ist der relative Fehler in der Lösung ebenfalls $< 10^{-2}$. Es gilt weiterhin $||A||_\infty = 3$,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und damit $||A^{-1}||_\infty = 3$. Weiterhin gilt

$$\operatorname{cond}(A) = 3 \cdot 3 = 9$$

und somit

$$\operatorname{cond}(A)\frac{||\Delta b||_\infty}{||b||_\infty} < 10^{-2} \;\Leftrightarrow\; \frac{||\Delta b||_\infty}{||b||_\infty} < \frac{1}{900}$$

Aufgabe 2 (Skalierung und Kondition)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär mit

$$\forall_{i=,1\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 1 \; (*)$$

(i) Zeigen Sie, daß für jede Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:

$$\operatorname{cond}(A) \leq \operatorname{cond}(DA)$$

Verwenden Sie die Zeilensummennorm!

(ii) Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär. Geben Sie eine reguläre Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ an, so daß $C := DB$ die Eigenschaft $(*)$ erfüllt.

Musterlösung:

(i) Sei $D := (\operatorname{diag}(d_1, ..., d_n))$ eine reguläre Diagonalmatrix. Es gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{cond}(DA) &= ||DA||_\infty ||A^{-1}D^{-1}||_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |d_i a_{ij}| \right\} ||A^{-1}D^{-1}||_\infty \\ &= \max_{i=1,\ldots,n} \left\{ |d_i| \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\} ||A^{-1}D^{-1}||_\infty \overset{(*)}{=} \max_{i=1,\ldots,n} \{|d_i|\} ||A^{-1}D^{-1}||_\infty \end{aligned}$$

Seien $(b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ die Einträge von A^{-1}. Dann folgt weiterhin:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cond}(DA) &= \max_{i=1,\ldots,n}\{|d_i|\}\max_{i=1,\ldots,n}\left\{\sum_{j=1}^n \frac{1}{|d_i|}|b_{ij}|\right\}\\
&\geq \max_{i=1,\ldots,n}\{|d_i|\}\max_{i=1,\ldots,n}\left\{\sum_{j=1}^n \min_{k=1,\ldots,n}\left\{\frac{1}{|d_k|}\right\}|b_{ij}|\right\}\\
&= \max_{i=1,\ldots,n}\{|d_i|\}\max_{i=1,\ldots,n}\left\{\frac{1}{\max_{k=1,\ldots,n}|d_k|}\sum_{j=1}^n |b_{ij}|\right\}\\
&= \max_{i=1,\ldots,n}\left\{\sum_{j=1}^n |b_{ij}|\right\} = ||A^{-1}|| \overset{(*)}{=} \mathrm{cond}(A)
\end{aligned}$$

(ii) Wähle D so, daß

$$\forall_{i=1,\ldots,n}\, d_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^n |b_{ij}|}$$

Dann gilt

$$\sum_{j=1}^n |c_{ij}| = \sum_{j=1}^n |d_i||b_{ij}| = |d_i|\sum_{j=1}^n |b_{ij}| = 1$$

Aufgabe 3 (Gaußsches Eliminationsverfahren)

Programmieren Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren mit diagonaler Pivotwahl! Implementieren Sie dabei neben dem Hauptprogramm für die Elimination die folgenden Teilprogramme, jeweils als separat aufrufbare Funktionen:

- Erstellung der erweiterten Koeffizientenmatrix
- Rückwärtseinsetzen
- Konfiguration (Definition der Matrix und der rechten Seite)

Lösen Sie mit Ihrem Programm die folgenden Linearen Gleichungssysteme $Ax = b$:

(i)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4* (Konditionsabschätzungen, freiwillige Hausübung!)

Zeigen Sie, daß bei Störungen ΔA und Δb, wobei $||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A|| < 1$ ist, die folgenden Konditionsabschätzungen gelten:

(i) $||\Delta x|| \leq \dfrac{||A^{-1}||}{1 - ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A||} \left(||\Delta b|| + ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A|| \cdot ||b||\right)$

(ii) $\dfrac{||\Delta x||}{||x||} \leq \dfrac{\mathrm{cond}(A)}{1 - \mathrm{cond}(A)\frac{||\Delta A||}{||A||}} \left(\dfrac{||\Delta A||}{||A||} + \dfrac{||\Delta b||}{||b||}\right)$ für $b \neq 0$

Musterlösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}
(A + \Delta A)(x + \Delta x) &= b + \Delta b \\
\Leftrightarrow\ Ax + \Delta A x + A\Delta x + \Delta A \Delta x &= b + \Delta b \\
\Leftrightarrow\ A\Delta x &= -\Delta A x - \Delta A \Delta x \underbrace{-Ax + b}_{=0} + \Delta b \\
\Leftrightarrow\ \Delta x &= -A^{-1}\Delta A x - A^{-1}\Delta A \Delta x + A^{-1}\Delta b
\end{aligned}$$

(i) Für den absoluten Fehler ergibt sich dadurch:

$$\begin{aligned}
||\Delta x|| &\leq ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A|| \cdot ||x|| + ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A|| \cdot ||\Delta x|| \\
&+ ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta b|| \\
\Leftrightarrow\ (1 - ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A||)||\Delta x|| &\leq ||A^{-1}|| \cdot (||\Delta A|| \cdot ||x|| + ||\Delta b||)
\end{aligned}$$

Also folgt zunächst, da $||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A|| < 1$:

$$||\Delta x|| \leq \frac{||A^{-1}||}{1 - ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A||} (||\Delta b|| + ||\Delta A|| \cdot ||x||)$$

und wegen $||x|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||b||$ die gewünschte Ungleichung

$$||\Delta x|| \leq \frac{||A^{-1}||}{1 - ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A||} \left(||\Delta b|| + ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A|| \cdot ||b||\right)$$

(ii) Für den relativen Fehler ergibt sich dann direkt

$$\begin{aligned}
\frac{||\Delta x||}{||x||} &\leq \frac{||A^{-1}||}{1 - ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A||} \left(\frac{||\Delta b||}{||x||} + ||\Delta A||\right) \\
&= \frac{||A^{-1}|| \cdot ||A||}{1 - ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A||} \left(\frac{||\Delta b||}{||A|| \cdot ||x||} + \frac{||\Delta A||}{||A||}\right)
\end{aligned}$$

und wegen $\frac{1}{||A|| \cdot ||x||} \leq \frac{1}{||b||}$ die gewünschte Ungleichung

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq \frac{\mathrm{cond}(A)}{1 - \mathrm{cond}(A)\frac{||\Delta A||}{||A||}} \left(\frac{||\Delta A||}{||A||} + \frac{||\Delta b||}{||b||}\right)$$