Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Dr. Marco Hülsmann

Numerische Mathematik 1
Übungsblatt 10, WS 2019/20
– Musterlösungen –

Aufgabe 1 (Newton-Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme)

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung $z^* = (x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^*, y^* \geq 0$.

b) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems zu einem gegebenen Startwert $z^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)}) \in \mathbb{R}^2$.

c) Finden Sie ein $\delta > 0$ und einen Startvektor $z^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ sowie ein $0 < C < 1$, so daß

$$||z^{(k+1)} - z^*||_\infty \leq C||z^{(k)} - z^*||_\infty^2,\ ||z^{(k)} - z^*||_\infty \leq \delta,\ k = 0, 1, ...$$

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Taylor!

Musterlösung:

a) Es muß gelten $x^2 + y^2 - 2 = 0 \ \wedge \ x^2 - y^2 = 0$, also $2x^2 = 2 \ \wedge \ x^2 = y^2$. Daraus folgt, daß $z^* = (1, 1)$ die einzige Lösung in $\mathbb{R}^2_+$ ist.

b) Die Jacobi-Matrix von f und deren Inverse sind gegeben durch

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix},\ Df(x, y)^{-1} = \frac{1}{4xy} \begin{pmatrix} y & y \\ x & -x \end{pmatrix}$$

Die Newton-Iteration ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned}
z^{(k+1)} &= z^{(k)} - Df(z^{(k)})^{-1} f(z^{(k)}) \\
&= \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} - \frac{1}{4x^{(k)}y^{(k)}} \begin{pmatrix} y^{(k)} & y^{(k)} \\ x^{(k)} & -x^{(k)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x^{(k)})^2 + (y^{(k)})^2 - 2 \\ (x^{(k)})^2 - (y^{(k)})^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x^{(k)} + \frac{1}{x^{(k)}} \\ y^{(k)} + \frac{1}{y^{(k)}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

c) Es gelte $||z^{(k)} - z^*||_\infty \leq \delta$ für $\delta > 0$, also $|x^{(k)} - 1| \leq \delta \wedge |y^{(k)} - 1| \leq \delta$. Nach dem Satz von Taylor existiert ein $\xi_x^{(k)} \in [1, x^{(k)}]$ sowie ein $\xi_y^{(k)} \in [1, y^{(k)}]$ mit

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)} - 1 \\ y^{(k+1)} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^{(k)} + \frac{1}{2x^{(k)}} - 1 \\ \frac{1}{2}y^{(k)} + \frac{1}{2y^{(k)}} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2(\xi_x^{(k)})^3}(x^{(k)} - 1)^2 \\ \frac{1}{2(\xi_y^{(k)})^3}(y^{(k)} - 1)^2 \end{pmatrix}$$

und somit

$$||z^{(k+1)} - z^*||_\infty \leq \frac{1}{2(1-\delta)^3} ||z^{(k)} - z^*||_\infty^2$$

Also gilt $C = \frac{1}{2(1-\delta)^3}$. Es gilt $0 < C < 1$ für $0 < \delta < 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Wähle den Startvektor $z^{(0)}$ so, daß $||z^{(0)} - z^*||_\infty \leq \delta$, dann gilt die Abschätzung, und die Konvergenz des Newton-Verfahrens ist quadratisch. Somit hat man zumindest eine Ahnung, wie groß der Konvergenzbereich sein muß, seine Position kennt man jedoch immer noch nicht, da x^* i.a. unbekannt ist.

Aufgabe 2 (Vereinfachtes Newton-Verfahren)

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ 8x_2^3 + 4x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wenden Sie das Newton-Verfahren und das vereinfachte Newton-Verfahren auf dieses Gleichungssystem an mit dem Startvektor $x^{(0)} = (4, 2)^T$, und stellen Sie den Unterschied fest!

Musterlösung:

Die exakte Lösung des Gleichungssystems lautet $x^* = (2, -1)$. Es sind die Nullstellen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ 8x_2^3 + 4x_1 \end{pmatrix} = 0$$

zu bestimmen. Die Jacobi-Matrix von f ist gegeben durch

$$Df(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 24x_2^2 \end{pmatrix}$$

Berechne die ersten vier Iterationen für das Newton-Verfahren (z.B. mit *newton_sws.py*, mit `sws = False` und anderer Funktion f und inverser Jacobi-Matrix):

i	0	1	2	3	4
$x^{(i)}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.909 \\ 1.455 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.302 \\ 1.151 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.051 \\ 1.025 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.0018 \\ 1.0009 \end{pmatrix}$

und die ersten zehn für das vereinfachte Newton-Verfahren (z.B. mit *newton_sws.py*, wobei sichergestellt wird, daß jedesmal dieselbe Jacobi-Matrix verwendet wird):

i	0	1	2	5	10
$x^{(i)}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.909 \\ 1.455 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.614 \\ 1.307 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.258 \\ 1.129 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.0817 \\ 1.041 \end{pmatrix}$

Offensichtlich konvergiert das vereinfachte Newton-Verfahren deutlich langsamer als das Newton-Verfahren.