Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Dr. Marco Hülsmann

Numerische Mathematik 1

Übungsblatt 1, WS 2019/20

– Musterlösungen –

Aufgabe 1 (Approximation von π)

Bekanntermaßen ist π der Umfang eines Kreises mit dem Radius $r = \frac{1}{2}$.

a) Berechnen Sie den Umfang des in diesen Kreis einbeschriebenen Quadrats!

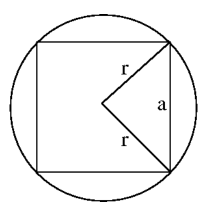
b) Stellen Sie eine Rekursionsformel für den Umfang eines in den Kreis einbeschriebenen regelmäßigen 2^n-Ecks auf ($n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$).

c) Eine explizite Formel für den Umfang eines in den Kreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks ($n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$) ist gegeben durch $U_n = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Zeigen Sie, daß $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \pi$ gilt, und finden Sie eine obere Schranke für den absoluten Fehler $|U_n - \pi|$. **Tipp:** Taylorentwicklung!

d) Die Zahl π kann also mithilfe des Umfangs eines der regelmäßigen Polygone approximiert werden. Berechnen Sie mithilfe eines Computerprogramms und der Rekursionsformel aus **b)** einige Näherungen für π.

Musterlösung:

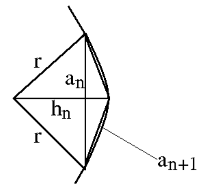
a)



Nach Pythagoras ist $a = r\sqrt{2}$, also für $r = \frac{1}{2}$ gilt $a = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Somit gilt für den Umfang

$$U = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \approx 2.8284$$

b) Wir beschreiben für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ein 2^n-Eck in den Kreis ein und nehmen an, wir hätten die Außenseite a_n des Polygons bereits berechnet. Betrachte dazu ein Teildreieck im 2^n-Eck:



Nach Pythagoras ergibt sich

$$h_n = \sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}$$

sowie die Seite a_{n+1} des in den Kreis einbeschriebenen 2^{n+1}-Ecks rekursiv als

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2}{4} + (r - h_n)^2}$$

Der Umfang eines 2^n-Ecks ergibt sich dann als $U_n = 2^n a_n$.

c) Betrachte zunächst die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$. Nach der Regel von de l'Hospital gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \left(= \left(\frac{0}{0}\right)\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \pi \cdot \lim_{x\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) = \pi \cdot \cos(0) = \pi \cdot 1 = \pi \end{aligned}$$

Also gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi$$

Die Taylorentwicklung der Sinusfunktion lautet

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ... = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - ...$$

Für $0 < x < 1$ gilt somit sicherlich

$$|\sin(x) - x| \leq \frac{x^3}{6}$$

also auch für $n > 4 \left(\Rightarrow \frac{\pi}{n} < 1\right)$

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) - \frac{\pi}{n}\right| \leq \frac{\pi^3}{6n^3}$$

und somit

$$\left|n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) - \pi\right| \leq \frac{\pi^3}{6n^2}$$

Betrachte wieder 2^n-Ecke, ersetze also n durch 2^n. Dann gilt:

$$|U_n - \pi| \leq \frac{\pi^3}{6 \cdot 4^n} < 10^{-10},\ n \geq 18$$

d) Mithilfe des *python*-Programms `pi.py` wurde berechnet:

$$\begin{aligned}
U_2 &\approx 2.8284271247461903 \\
U_3 &\approx 3.06146745892 \\
U_4 &\approx 3.12144515226 \\
U_5 &\approx 3.13654849055 \\
U_6 &\approx 3.14033115695 \\
U_7 &\approx 3.14127725093 \\
U_8 &\approx 3.14151380114 \\
U_9 &\approx 3.14157294037 \\
U_{10} &\approx 3.14158772528 \\
U_{11} &\approx 3.14159142151 \\
U_{12} &\approx 3.14159234557 \\
U_{13} &\approx 3.14159257658 \\
U_{14} &\approx 3.14159263434 \\
U_{15} &\approx 3.14159264878 \\
U_{16} &\approx 3.14159265239 \\
U_{17} &\approx 3.14159265329 \\
U_{18} &\approx 3.14159265351 \\
U_{19} &\approx 3.14159265357
\end{aligned}$$

Zum Vergleich:

$$\pi \approx 3.1415926535897931$$

Aufgabe 2 (Rundung)

a)

(i) Gegeben seien die Zahlen $x = 0.3721448693$ und $y = 0.3720214371$. Berechnen und bewerten Sie den relativen Fehler zwischen der Differenz $x - y$, die durch einen Rechner mit 5 Stellen Genauigkeit berechnet wird, im Vergleich zu der Differenz, die durch einen Rechner mit 10 Stellen Genauigkeit berechnet wird!

(ii) Versuchen Sie durch Einsetzen von kleinen Werten, den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

zu berechnen. Was passiert da und warum?

b) Was ist bei der Auswertung der folgenden Terme numerisch gesehen problematisch? Wie kann man jeweils dem Problem entgegenwirken?

(i) $\sqrt{x^2+1} - 1$

(ii) $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ (Lösen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q, q \neq 0$, mit pq-Formel)

(iii) $\frac{1-\cos(x)}{x}$

Musterlösung:

a)

(i) Bei dem Rechner mit 5 Stellen Genauigkeit gilt

$$rd(x) = 0.37214,\ rd(y) = 0.37202$$

Subtraktion liefert

$$rd(rd(x) - rd(y)) = rd(0.37214 - 0.37202) = 0.00012$$

Bei dem Rechner mit 10 Stellen Genauigkeit gilt

$$rd(rd(x) - rd(y)) = rd(0.3721448693 - 0.3720214371) = 0.0001234322$$

Also gilt für den relativen Fehler der Differenz:

$$\frac{|0.00012 - 0.0001234322|}{|0.0001234322|} = \frac{0.0000034322}{0.0001234322} \approx 3 \cdot 10^{-2}$$

Dieser Fehler ist relativ groß verglichen mit den relativen Fehlern $rd(x)$ und $rd(y)$ auf dem 5-Stellen-Rechner, die nach Vorlesung jeweils durch $5 \cdot 10^{-5}$ beschränkt sind.

(ii) Nach de l'Hospital gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Setzt man jedoch kleine Werte für x ein, so tritt im Zähler Auslöschung auf. Die Division durch x ist somit irrelevant, und das numerische Ergebnis lautet 0, nicht 1.

b)

(i) Für $x \approx 0$ gilt $\sqrt{x^2+1} \approx 1$, und es besteht die Gefahr der Auslöschung. Man kann dem mithilfe der 3. binomischen Formel entgegenwirken, indem man den Termin folgendermaßen umschreibt:

$$\sqrt{x^2+1} - 1 = \left(\sqrt{x^2+1} - 1\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

(ii) Hier kann für $|q| << 1$ Auslöschung auftreten. Um dies zu vermeiden, kann man zunächst eine Lösung

$$x_1 := -\frac{p}{2} - \operatorname{sign}(p)\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

berechnen.
Die andere Lösung ergibt sich nach dem Satz von Vieta $(p = -(x_1 + x_2),\ q = x_1 x_2)$ als

$$x_2 := \frac{q}{x_1}$$

Beachte, daß 0 für $q \neq 0$ keine Lösung sein kann. Daher gilt auf jeden Fall $x_1 \neq 0$.

(iii) Für $x \approx 0$ gilt $\cos(x) - 1 \approx 0$, und es besteht im Zähler wieder das Problem der Auslöschung.
Um dem entgegenzuwirken, verwendet man die Taylorreihe für den Kosinus. Dann verschwindet die 1 im Zähler, und wenn man den Bruch dann durch x kürzt, erhält man ein numerisch gutartiges Polynom.
In diesem Fall ist die Auslöschung aber im Gegensatz zu Aufgabe **a)** (ii) nicht so schlimm, da hier tatsächlich

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$$