Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Dr. Marco Hülsmann

Numerische Mathematik 1

Übungsblatt 13, WS 2019/20

– Musterlösungen –

Aufgabe 1 (Eigenschaften von Pseudoinversen)

Zeigen Sie, daß für die Pseudoinverse A^+ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ folgendes gilt:

a) A^+A und AA^+ sind symmetrisch

b) $AA^+A = A$ und $A^+AA^+ = A^+$

Musterlösung:

a) Nach Definition der Pseudoinversen gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$A^+Ax = A^+(Ax) = f(\bar{P}(Ax)) = f(Ax) = Px$$

Denn $\bar{P}$ ist die Projektion in das Bild von A, also gilt $\bar{P}(Ax) = Ax$, und P projiziert x direkt auf $\ker(A)^\perp$. Im Beweis von Lemma 5.1 wurde gezeigt, daß $f(y) = Px$ für $y = Ax$, also gilt $f(Ax) = Px$. Also folgt $A^+A = P$, und da Projektionsmatrizen symmetrisch sind, ist A^+A ebenfalls symmetrisch. Ebenso folgt aus der Definition der Pseudoinversen und von f für $y \in \mathbb{R}^m$:

$$AA^+y = A(f(\bar{P}(y))) = \bar{P}y$$

also $AA^+ = \bar{P} = \bar{P}^T$, da $\bar{P}$ ebenfalls eine orthogonale Projektion ist. Also ist auch AA^+ symmetrisch.

b) Aus dem Beweis von **a)** folgt direkt für $x \in \mathbb{R}^n$:

$$AA^+Ax = (AA^+)Ax = \bar{P}Ax = Ax$$

also $AA^+A = A$. Letzteres gilt, da $\bar{P}$ die Projektion in den Bildraum von A ist. Weiterhin gilt für $y \in \mathbb{R}^m$:

$$A^+AA^+y = (A^+A)A^+y = PA^+y = A^+y$$

also $A^+AA^+ = A^+$. Letzteres gilt, da P die Projektion in $\ker(A)^\perp$.

Aufgabe 2 (Berechnung von Pseudoinversen)

Bestimmen Sie die Pseudoinversen der folgenden Matrizen, und bestimmen Sie eine Ausgleichslösung des Linearen Gleichungssystems $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Musterlösung:

a) Suche gemäß Aufgabe 1 b) eine 2×2-Matrix $A^+ = \begin{pmatrix} a_{11}^+ & a_{12}^+ \\ a_{21}^+ & a_{22}^+ \end{pmatrix}$ mit

$$AA^+A = A,\ A^+AA^+ = A^+$$

Also muß gelten:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}^+ & a_{12}^+ \\ a_{21}^+ & a_{22}^+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a_{11}^+ \\ 0 & a_{21}^+ \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a_{21}^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also muß gelten $a_{21}^+ = 1$. Weiterhin muß daher gelten

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{11}^+ & a_{12}^+ \\ 1 & a_{22}^+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}^+ & a_{12}^+ \\ 1 & a_{22}^+ \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11}^+ & a_{12}^+ \\ 1 & a_{22}^+ \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}^+ & a_{12}^+ \\ 1 & a_{22}^+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a_{22}^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11}^+ & a_{12}^+ \\ 1 & a_{22}^+ \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}^+ & a_{11}^+a_{22}^+ \\ 1 & a_{22}^+ \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11}^+ & a_{12}^+ \\ 1 & a_{22}^+ \end{pmatrix} \quad (*)
\end{aligned}$$

Also gilt $A^+ = \begin{pmatrix} a_{11}^+ & a_{11}^+ a_{22}^+ \\ 1 & a_{22}^+ \end{pmatrix}$. Weiterhin gilt

$$AA^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^+ & a_{11}^+ a_{22}^+ \\ 1 & a_{22}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{22}^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgrund der Symmetrie von AA^+ muß daher $a_{22}^+ = 0$ gelten, also gilt auch $a_{11}^+ a_{22}^+ = 0$ und wegen $(*)$ auch $a_{12}^+ = 0$. Bleibt nur noch a_{11}^+ zu bestimmen. Es gilt

$$A^+A = \begin{pmatrix} a_{11}^+ & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{11}^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da auch A^+A symmetrisch ist, muß $a_{11}^+ = 0$ gelten, also lautet die Pseudoinverse von A:

$$A^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die vier Eigenschaften der Pseudoinversen aus Aufgabe 1 legen diese also eindeutig fest. Die Ausgleichslösung des LGS lautet

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist nicht invertierbar, allerdings $AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Somit lautet die Formel für die Pseudoinverse

$$A^+ = A^T(AA^T)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Ausgleichslösung des LGS lautet

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$