Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Dr. Marco Hülsmann

Numerische Mathematik 1
Übungsblatt 5, WS 2019/20
– Musterlösungen –

Aufgabe 1 (Pivotisierung)

Betrachten Sie das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren einmal mit und einmal ohne Spaltenpivotisierung mit vierstelliger Gleitkommaarithmetik!

Musterlösung:

Ohne Pivotisierung, d.h. mit diagonaler Pivotwahl, subtrahiert man das 20000-fache der ersten von der zweiten Zeile und man erhält die Gleichung $19999x_2 = 20000$, was bei vierstelliger Gleitkommaartihmetik zur Lösung $x = (-1, 1.0001)^T$ führt.
Bei Spaltenpivotwahl wählt man in der ersten Spalte die 2 als Pivotelement und vertauscht zunächst die erste und zweite Zeile. Dann subtrahiert man das $5 \cdot 10^{-5}$-fache der ersten von der zweiten Zeile und erhält bei vierstelliger Genauigkeit die Gleichung $0.9999x_2 = 1$, also $x_2 = 1.0001$ und somit $x_1 = -0.5001$, was schon sehr nahe an der tatsächlichen Lösung $x = (-0.499975..., 0.99995...)^T$ liegt.

Aufgabe 2 (Rechenaufwand der LR-Zerlegung)

a) Zeigen Sie, daß der Rechenaufwand für die Gauß-Elimination zur Bestimmung der LR-Zerlegung einer $n \times n$-Matrix gegeben ist durch

- $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$ Punktoperationen
- $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ Strichoperationen

b) Wieviele Punkt- bzw. Strichoperationen sind bei der Lösung eines Linearen Gleichungssystems für das anschließende Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen erforderlich?

c) In welcher Größenordnung liegt der Rechenaufwand zur Bestimmung der Inversen A^{-1} einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Musterlösung:

a) Die Matrizen $L = (\ell_{ik})_{i,k=1,\dots,n}$ und $R = (r_{ik})_{i,k=1,\dots,n}$ errechnen sich gemäß

$$\begin{aligned} r_{ik} &= a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{ij} r_{jk},\ 1 \le i \le k \le n \\ \ell_{ik} &= \frac{1}{r_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{ij} r_{jk} \right),\ 1 \le k < i \le n \end{aligned}$$

Für ℓ_{2k} benötigt man nur eine Division, für ℓ_{3k} benötigt man 2 Divisionen usw., und für ℓ_{nk} benötigt man $n-1$ Divisionen, also zur Berechnung von L sind insgesamt

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \nu$$

Divisionen erforderlich. Weiterhin benötigt man für $i,k \le 2$ die Multiplikation ℓ_{21}, r_{12} und für $i,k \le 3$ die Multiplikationen $\ell_{21}r_{13}, \ell_{31}r_{12}, \ell_{31}r_{13}$ und $\ell_{32}r_{23}$, also vier. Für $k = 4$ benötigt man neun Multiplikationen usw., und für $k = n$ braucht man $(n-1)^2$, also insgesamt

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^2$$

Multiplikationen. Weiterhin benötigt man genauso viele Subtraktionen, also ergibt sich insgesamt für die LR-Zerlegung ein Rechenaufwand von

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^2 + \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu &= \frac{1}{6}(n-1)n(2(n-1)+1) + \frac{1}{2}(n-1)n \\ &= \frac{1}{6}(n^2-n)(2n-1) + \frac{1}{2}(n^2-n) \\ &= \frac{1}{6}(2n^3 - 2n^2 - n^2 + n) + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \\ &= \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \\ &= \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n \end{aligned}$$

Punktoperationen und

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^2 = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Strichoperationen.

b) Zur Lösung des LGS $Ax = (LR)x = b$ sind für das Vorwärtseinsetzen die Formel

$$y_i = \frac{1}{\ell_{ii}} \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} y_k \right), \ i = 1, ..., n$$

und für das Rückwärtseinsetzen die Formel

$$x_i = \frac{1}{r_{ii}} \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ik} x_k \right), \ i = n, n-1, ..., 1$$

zu verwenden. Es ergeben sich sowohl für das Vorwärts- als auch für das Rückwärtseinsetzen

- $\sum_{\nu=1}^{n-1} \nu = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ Multiplikationen und Subtraktionen
- n Divisionen

c) Die Inverse A^{-1} ergibt sich, indem für A eine LR-Zerlegung durchgeführt wird und anschließend die Spaltenvektoren der Einheitsmatrix als rechte Seite b eingesetzt werden. Dies liefert einen Aufwand von $\mathcal{O}(n^3)$ für die LR-Zerlegung, $n \cdot \mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(n^3)$ für Vorwärts- bzw. Rückwärtseinsetzen, also insgesamt einen Aufwand von $\mathcal{O}(n^3)$, wobei die Konstante mit $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ wesentlich höher ist als bei der Gauß-Elimination $\left(\frac{1}{3}\right)$.

Aufgabe 3 (Cholesky-Zerlegung)

Schreiben Sie ein Computerprogramm zur Berechnung der Cholesky-Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und zur anschließenden Lösung eines Linearen Gleichungssystems $Ax = b$! Verwenden Sie dabei bereits implementierte Funktionen! Führen Sie zunächst eine Fehlerbehandlung durch, d.h., testen Sie, ob

- A quadratisch ist
- b ein Spaltenvektor der Länge n ist
- A symmetrisch und positiv definit ist

Testen Sie Ihr Programm für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und auch für eine nicht symmetrische und nicht positive Matrix!

Musterlösung:

Ein *octave*-Programm ist in der Datei `Cholesky.m` implementiert. Es ruft die Folgenden Subskripte auf:

- `Fehlerbehandlung.m` für die Fehlerbehandlung
- `ErwKoeffMatrix.m` zur Erstellung der erweiterten Koeffizientenmatrix
- `CholeskyZerlegung.m` zur Durchführung der Cholesky-Zerlegung
- `Vorwaertseinsetzen.m` zur Lösung des Linearen Gleichungssystems $Ly = b$
- `Rueckwaertseinsetzen.m` (bereits implementiert!) zur Lösung des Linearen Gleichungssystems $L^T x = y$

Für die angegebene Matrix A erhält man

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Als Beispiel für eine nicht symmetrische und nicht positiv definite Matrix wurde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

genommen. Das Programm gibt die entsprechenden Fehlermeldungen aus.