



## Numerische Mathematik 1

### Übungsblatt 4, WS 2019/20

#### Aufgabe 1 (Konditionsabschätzungen)

Betrachten Sie das Lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Nehmen Sie an, daß die Koeffizienten der Matrix  $A$  exakt vorliegen. Wie groß darf der relative Fehler in der Maximumsnorm bei der rechten Seite sein, damit der relative Fehler in der Maximumsnorm in der Lösung kleiner als  $10^{-2}$  ist?

#### Aufgabe 2 (Skalierung und Kondition)

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  regulär mit

$$\forall_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = 1 \quad (*)$$

(i) Zeigen Sie, daß für jede Diagonalmatrix  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt:

$$\text{cond}(A) \leq \text{cond}(DA)$$

Verwenden Sie die Zeilensummennorm!

(ii) Sei  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  regulär. Geben Sie eine reguläre Diagonalmatrix  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  an, so daß  $C := DB$  die Eigenschaft  $(*)$  erfüllt.

#### Aufgabe 3 (Gaußsches Eliminationsverfahren)

Programmieren Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren mit diagonalen Pivotwahl! Implementieren Sie dabei neben dem Hauptprogramm für die Elimination die folgenden Teilprogramme, jeweils als separat aufrufbare Funktionen:

- Erstellung der erweiterten Koeffizientenmatrix
- Rückwärtseinsetzen
- Konfiguration (Definition der Matrix und der rechten Seite)

Lösen Sie mit Ihrem Programm die folgenden Linearen Gleichungssysteme  $Ax = b$ :

(i)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

#### Aufgabe 4\* (Konditionsabschätzungen, freiwillige Hausübung!)

Zeigen Sie, daß bei Störungen  $\Delta A$  und  $\Delta b$ , wobei  $\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$  ist, die folgenden Konditionsabschätzungen gelten:

$$(i) \quad \|\Delta x\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} (\|\Delta b\| + \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| \cdot \|b\|)$$

$$(ii) \quad \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left( \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right) \text{ für } b \neq 0$$

**Die Übungsaufgaben werden in der Übung am Donnerstag, 31. Oktober 2019, besprochen.**