Hochschule Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Dr. Marco Hülsmann

Numerische Mathematik 1
Übungsblatt 7, WS 2019/20

Aufgabe 1 (Relaxationsparameter des SOR-Verfahrens)

a) Zeigen Sie, daß für die Iterationsmatrix $B(\omega)$ des SOR-Verfahrens gilt:

$$\begin{aligned} B(\omega) &= -(D+\omega C_1)^{-1} D D^{-1}(\omega C_2 - (1-\omega)D) \\ &= (I+\omega D^{-1}C_1)^{-1}((1-\omega)I - \omega D^{-1}C_2) \end{aligned}$$

b) Beweisen Sie mithilfe der zweiten Identität aus **a)**, daß gilt

$$\rho(B(\omega)) \geq |\omega - 1|,$$

also $\rho(B(\omega)) \geq 1$ für $\omega \notin (0,2)$.

Aufgabe 2 (Methode des steilsten Abstiegs)

Bei der Methode des steilsten Abstiegs minimiert man die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle - \langle b, x\rangle$$

anstatt das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen. Die Iterationsvorschrift ist gegeben durch

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^{(k)} r^{(k)},\ k = 0, 1, 2, ...$$

wobei $r^{(k)} := b - Ax^{(k)}$ das sogenannte *Residuum* der k-ten Iteration ist und $\alpha^{(k)} \in \mathbb{R}$ in jeder Iteration so gewählt wird, daß

$$\frac{\partial}{\partial x^{(k)}} f(x^{(k+1)}) = 0$$

Es sei weiterhin $e^{(k)} := x^{(k)} - x^*$ der *Fehler* in der k-ten Iteration.

a) Zeigen Sie, daß das Verfahren stets in Richtung des steilsten Abstiegs von f geht, welcher durch den negativen Gradienten gegeben ist, also daß gilt

$$r^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$$

b) Zeigen Sie, daß

$$\alpha^{(k)} = \frac{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle}{\langle r^{(k)}, Ar^{(k)} \rangle}$$

c) Zeigen Sie, daß

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha^{(k)} A r^{(k)}$$

daß heißt, die Matrix-Vektor-Multikplikation $Ax^{(k)}$ zur Berechnung des Residuums kann eingespart werden ($Ar^{(k)}$ muß wegen **b)** sowieso berechnet werden).

Die Übungsaufgaben werden in der Übung am Donnerstag, 21. November 2019, besprochen.