Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Dr. Marco Hülsmann

Numerische Mathematik 1
Übungsblatt 7, WS 2019/20
– Musterlösungen –

Aufgabe 1 (Relaxationsparameter des SOR-Verfahrens)

a) Zeigen Sie, daß für die Iterationsmatrix $B(\omega)$ des SOR-Verfahrens gilt:

$$\begin{aligned} B(\omega) &= -(D+\omega C_1)^{-1} D D^{-1}(\omega C_2 - (1-\omega)D) \\ &= (I+\omega D^{-1}C_1)^{-1}((1-\omega)I - \omega D^{-1}C_2) \end{aligned}$$

b) Beweisen Sie mithilfe der zweiten Identität aus **a)**, daß gilt

$$\rho(B(\omega)) \geq |\omega - 1|,$$

also $\rho(B(\omega)) \geq 1$ für $\omega \notin (0,2)$.

Musterlösung:

a) Die Iterationsvorschrift des SOR-Verfahrens lautet

$$x^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1,j<i}^{n} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=1,j>i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) + (1-\omega) x_i^{(k)},\ i = 1,...,n,\ k = 0,1,...$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= \omega D^{-1}(b - C_1 x^{(k+1)} - C_2 x^{(k)}) + (1-\omega)x^{(k)} \\ \Rightarrow\ x^{(k+1)} + \omega D^{-1} C_1 x^{(k+1)} &= -\omega D^{-1} C_2 x^{(k)} + (1-\omega)x^{(k)} + \omega D^{-1} b \ \mid \cdot D \\ \Rightarrow\ (D+\omega C_1)x^{(k+1)} &= -\omega C_2 x^{(k)} + (1-\omega) D x^{(k)} + \omega b \\ \Rightarrow\ (D+\omega C_1)x^{(k+1)} &= ((1-\omega)D - \omega C_2)x^{(k)} + \omega b \\ \Rightarrow\ x^{(k+1)} &= -(D+\omega C_1)^{-1}(\omega C_2 - (1-\omega D))x^{(k)} + (D+\omega C_1)^{-1}\omega b \end{aligned}$$

Also gilt für die Iterationsmatrix:

$$\begin{aligned} B(\omega) &= -(D+\omega C_1)^{-1}(\omega C_2 - (1-\omega D)) = -(D+\omega C_1)^{-1} D D^{-1}(\omega C_2 - (1-\omega D)) \\ &= -(D^{-1}(D+\omega C_1))^{-1}(\omega D^{-1} C_2 - (1-\omega) I) = (I+\omega D^{-1} C_1)^{-1}((1-\omega) I - \omega D^{-1} C_2) \end{aligned}$$

b) Die Matrizen $D^{-1}C_1$ und $D^{-1}C_2$ sind echte Dreiecksmatrizen, d.h. mit Nullen auf der Diagonalen. Somit gilt $\det(I+\omega D^{-1}C_1) = 1$ und $\det((1-\omega)I - \omega D^{-1}C_2) = (1-\omega)^n$. Insgesamt gilt also

$$\det(B(\omega)) = 1 \cdot (1-\omega)^n$$

Für die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ von $B(\omega)$ muß also gelten

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(B(\omega)) = (1-\omega)^n$$

also

$$|1-\omega| = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n |\lambda_i|} \le \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|} = \sqrt[n]{\left(\max_{1\le i\le n} |\lambda_i|\right)^n} = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i| = \rho(B(\omega))$$

Aufgabe 2 (Methode des steilsten Abstiegs)

Bei der Methode des steilsten Abstiegs minimiert man die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle - \langle b, x\rangle$$

anstatt das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen. Die Iterationsvorschrift ist gegeben durch

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^{(k)} r^{(k)},\ k = 0, 1, 2, ...$$

wobei $r^{(k)} := b - Ax^{(k)}$ das sogenannte *Residuum* der k-ten Iteration ist und $\alpha^{(k)} \in \mathbb{R}$ in jeder Iteration so gewählt wird, daß

$$\frac{\partial}{\partial x^{(k)}} f(x^{(k+1)}) = 0$$

Es sei weiterhin $e^{(k)} := x^{(k)} - x^*$ der *Fehler* in der k-ten Iteration.

a) Zeigen Sie, daß das Verfahren stets in Richtung des steilsten Abstiegs von f geht, welcher durch den negativen Gradienten gegeben ist, also daß gilt

$$r^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$$

b) Zeigen Sie, daß

$$\alpha^{(k)} = \frac{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle}{\langle r^{(k)}, Ar^{(k)} \rangle}$$

c) Zeigen Sie, daß

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha^{(k)} Ar^{(k)}$$

daß heißt, die Matrix-Vektor-Multikplikation $Ax^{(k)}$ zur Berechnung des Residuums kann eingespart werden ($Ar^{(k)}$ muß wegen **b)** sowieso berechnet werden).

Musterlösung:

a) Es gilt

$$r^{(k)} \quad = \quad b - Ax^{(k)} = Ax^* - Ax^{(k)} = A(x^* - x^{(k)}) = -Ae^{(k)}$$

Wegen

$$\nabla f(x) = Ax - b$$

gilt

$$\nabla f(x^{(k)}) = Ax^{(k)} - b = Ax^{(k)} - Ax^* = Ae^{(k)}$$

also

$$r^{(k)} = -Ae^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$$

b) Es muß gelten (siehe Aufgabenstellung):

$$\frac{\partial}{\partial x^{(k)}} f(x^{(k+1)}) = 0$$

also nach Definition der Richtungsableitung

$$\langle \nabla f(x^{(k+1)}), r^{(k)} \rangle = \langle Ax^{(k+1)} - b, r^{(k)} \rangle = 0$$

und somit

$$\begin{aligned} & \langle A(x^{(k)} + \alpha^{(k)} r^{(k)}) - b, r^{(k)} \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \langle Ax^{(k)} r^{(k)} \rangle + \alpha^{(k)} \langle r^{(k)}, Ar^{(k)} \rangle - \langle b, r^{(k)} \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha^{(k)} \langle r^{(k)}, Ar^{(k)} \rangle + \langle Ax^{(k)} - b, r^{(k)} \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha^{(k)} = \tfrac{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle}{\langle r^{(k)}, Ar^{(k)} \rangle} \end{aligned}$$

c) Es gilt

$$b - Ax^{(k+1)} \quad = \quad b - A(x^{(k)} + \alpha^{(k)} r^{(k)}) = b - Ax^{(k)} - \alpha^{(k)} Ar^{(k)} = r^{(k)} - \alpha^{(k)} Ar^{(k)}$$