Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Dr. Marco Hülsmann

Numerische Mathematik 1
Übungsblatt 9, WS 2019/20
– Musterlösungen –

Aufgabe 1 (Newton-Verfahren)

a) Beschreiben Sie ein Newton-Verfahren zur approximativen Bestimmung von π!

b) Schreiben Sie ein Computerprogramm zur Nullstellenberechnung mithilfe des Newton-Verfahrens. Verwenden Sie als Toleranz $\tau = 10^{-12}$. Testen Sie Ihr Programm anhand der Funktion

$$f(x) = \sin(x) - 0.5x - 0.1$$

mit den Startwerten $x^{(0)} \in \{0.1, 1, 1000\}$. Konvergiert das Newton-Verfahren? Wenn ja, verifizieren Sie die quadratische Konvergenz!

c) Zeigen Sie, daß das Newton-Verfahren für die Funktion

$$g(x) = \operatorname{sign}(x)\sqrt{|x|}$$

mit einem Startwert $x^{(0)} \neq 0$ divergiert!

Musterlösung:

a) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \sin(x)$. Diese hat π als Nullstelle. Ein Newton-Verfahren zur approximativen Bestimmung von π lautet somit

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\sin(x^{(k)})}{\cos(x^{(k)})},\ k \in \mathbb{N}_0$$

Da sin auf dem Intervall $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ streng monoton fallend ist, wird der Startwert $x^{(0)} := 3$ auf jeden Fall zur Konvergenz führen, denn im rechten Teil des Intervalls ist auch der Kosinus weit genug von der Null weg.

b) Ein *python*-Programm ist in der beigefügten Datei `newton.py` implementiert. Im Falle von $x^{(0)} = 0.1$ ist die Toleranz bereits nach zwei Iterationen unterschritten. Das Verfahren konvergiert gegen die Nullstelle $x^* \approx 0.202773441916$. Die Fehler $|x^{(k)} - x^{(0)}|$ ergeben sich als

```
0.102773441916
0.00142766167394
4.25772400892e-07
```

Die Anzahl an Nullen hinter dem Komma verdoppelt sich mindestens nach jeder Iteration, also kann quadratische Konvergenz verifiziert werden.
Im Falle von $x^{(0)} = 1$ divergiert das Newton-Verfahren, im Falle von $x^{(0)} = 2$ konvergiert es gegen eine andere Nullstelle. Die quadratische Konvergenz ist jedoch auch hier wieder zu beobachten.
Im Falle von $x^{(0)} = 1000$ braucht das Newton-Verfahren sehr lange zur Konvergenz, es scheint zunächst zu divergieren, bis es dann doch irgendwann in den Einzugsbereich der Nullstelle gelangt.

c) Es gilt

$$g(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

und somit

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{-x}}, & x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x > 0 \end{cases}$$

Man beachte, daß g in 0 nicht differenzierbar ist. Für einen Startwert $x^{(0)} \neq 0$ liefert das Newton-Verfahren:

$$x^{(1)} \quad = \quad x^{(0)} - 2\sqrt{(x^{(0)})^2} = x^{(0)} - 2|x^{(0)}| = \begin{cases} -x^{(0)} < 0, & x^{(0)} > 0 \\ 3x^{(0)} < 0, & x^{(0)} < 0 \end{cases}$$

Für $x^{(0)} < 0$ gilt dann:

$$x^{(2)} = 3x^{(0)} + 6\sqrt{(x^{(0)})^2} = -3x^{(0)} > 0$$

d.h., die Konstante vor der Wurzel erhöht sich in jeder Iteration um den Faktor 3. Somit liegt Divergenz vor. Für $x^{(0)} > 0$ gilt

$$x^{(2)} = -x^{(0)} + 2\sqrt{(x^{(0)})^2} = x^{(0)}$$

d.h. das Newton-Verfahren kommt wieder zum Startwert zurück. In beiden Fällen liegt somit Divergenz vor.

Aufgabe 2 (Regula falsi)

Berechnen Sie mithilfe der Regula falsi eine gute Näherung für $\sqrt{2}$. Verwenden Sie hierzu einen Taschenrechner oder ein Computerprogramm!

Musterlösung:

Suche approximativ die Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - 2$. Wähle als Startintervall $[a_0, b_0]$ mit $a_0 = 0$ und $b_0 = 2$. Dann gilt $f(a_0) = -2 < 0$ und $f(b_0) = 2 > 0$. Da f als Polynom stetig ist, liegt nach dem Zwischenwertsatz in dem Intervall eine Nullstelle. Da f auf $[0, 2]$ streng monoton wächst, gibt es nur eine Nullstelle. Berechne iterativ die Nullstellen der Sekanten durch $(a_k, f(a_k))$ und $(b_k, f(x_k))$ gemäß der Formel

$$c_{k+1} = \frac{f(b_k)a_k - f(a_k)b_k}{f(b_k) - f(a_k)},\ k = 0, 1, 2, ...$$

Es gilt für die erste Näherung

$$c_1 = \frac{2 \cdot 0 - (-2) \cdot 2}{2 - (-2)} = 1$$

Wegen $f(c_1) = f(1) = -1 < 0$, setze $a_1 := c_1$ und $b_1 := b_0$. Dann gilt für die zweite Näherung

$$c_2 = \frac{2 \cdot 1 - (-1) \cdot 2}{2 - (-1)} = \frac{4}{3}$$

Wegen $f(c_2) = f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{9} < 0$ setze $a_2 := c_2$ und $b_2 := b_1$. Dann gilt für die dritte Näherung

$$c_3 = \frac{2 \cdot \frac{4}{3} - \left(-\frac{2}{9}\right) \cdot 2}{2 - \left(-\frac{2}{9}\right)} = \frac{7}{5}$$

Wegen $f(c_3) = f\left(\frac{7}{5}\right) = -\frac{1}{25} < 0$ setze $a_3 := c_3$ und $b_3 := b_2$. Dann gilt für die vierte Näherung

$$c_4 = \frac{2 \cdot \frac{7}{5} - \left(-\frac{1}{25}\right) \cdot 2}{2 - \left(-\frac{1}{25}\right)} = \frac{72}{49} > 0$$

Wegen $f\left(\frac{72}{49}\right) = \frac{382}{2401} > 0$ setze $a_4 := a_3$ und $b_4 := c_4$. Dann gilt für die fünfte Näherung

$$c_5 = \frac{\frac{382}{2401} \cdot \frac{7}{5} - \left(-\frac{1}{25}\right) \cdot \frac{72}{49}}{\frac{382}{2401} - \left(-\frac{1}{25}\right)} = \frac{994}{703}$$

Es gilt bereits $f(c_5) < 1 \cdot 10^{-3}$ und $c_5 \approx 1.414 \approx \sqrt{2}$. Damit geben wir uns an dieser Stelle zufrieden!