Hochschule Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Dr. Marco Hülsmann

Numerische Mathematik 1
Übungsblatt 8, WS 2019/20
– Musterlösungen –

Aufgabe 1 (Methode der konjugierten Gradienten: Orthogonalität)

Zeigen Sie, daß bei der Methode der konjugierten Gradienten das Residuum $r^{(k+1)}$ auf den Suchrichtungen $d^{(0)}, ..., d^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}_0$, orthogonal ist, also daß gilt

$$r^{(k+1)} \perp \mathcal{K}_{k+1} = D_{k+1} = \operatorname{Span}(d^{(0)}, ..., d^{(k)})$$

Musterlösung:

Wegen

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha^{(k)} A d^{(k)}$$

folgt rekursiv

$$\begin{aligned} r^{(k+1)} &= r^{(k-1)} - (\alpha^{(k-1)} A d^{(k-1)} + \alpha^{(k)} A d^{(k)}) \\ &= r^{(k-2)} - (\alpha^{(k-2)} A d^{(k-2)} + \alpha^{(k-1)} A d^{(k-1)} + \alpha^{(k)} A d^{(k)}) = ... = r^{(0)} - \sum_{\ell=0}^{k} \alpha^{(\ell)} A d^{(\ell)} \quad (*) \end{aligned}$$

folgt für alle $0 \leq j \leq k$, da die Suchrichtungen A-orthogonal zueinander sind:

$$\begin{aligned} \langle r^{(k+1)}, d^{(j)} \rangle &= \langle r^{(0)}, d^{(j)} \rangle - \sum_{\ell=0}^{k} \alpha^{(\ell)} \langle A d^{(k)}, d^{(j)} \rangle \\ &= \langle r^{(0)}, d^{(j)} \rangle - \alpha^{(j)} \langle A d^{(j)}, d^{(j)} \rangle = \langle r^{(0)}, d^{(j)} \rangle - \frac{\langle r^{(j)}, d^{(j)} \rangle}{\langle d^{(j)}, A d^{(j)} \rangle} \langle A d^{(j)}, d^{(j)} \rangle \\ &= \langle r^{(0)} - r^{(j)}, d^{(j)} \rangle \overset{(*)}{=} \sum_{\ell=0}^{j-1} \alpha^{(\ell)} \langle A d^{(\ell)}, d^{(j)} \rangle = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Methode der konjugierten Gradienten als direkter Löser)

Wenden Sie die Methode der konjugierten Gradienten auf das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

an! Verwenden Sie als Startvektor $x^{(0)} = (1, 0, 0)^T$. Nach wie vielen Iterationen wird die exakte Lösung erreicht?

Musterlösung:

Das Verfahren, welches in `cg.py` implementiert ist, konvergiert nach drei Iterationen gegen die exakte Lösung $x^* = (-7, 24, 8)$.