一、填空题（每空 2 分，共 20 分）

1、矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ 的条件数 $Cond(A)_2=$ __①__.

2、在空间 $L^2[0,1]$ 中定义内积 $(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$，若 $f(x)=x,\ g(x)=\sin x$，内积 $(f,g)=$ __②__，诱导的范数 $\|f\|=$ __③__.

3、以区间 $[a,b]$ 上 7 个互异插值节点构造的牛顿—柯特斯公式的代数精度为 __④__ 次.

4、已知 $f(x)=47.2x^7+23x^4+64x^2+36x-18$，其差商 $f[2^0,2^1,\cdots,2^7]=$ __⑤__.

5、用龙贝格算法求积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的近似值时，由复合梯形法半分前后的 T_n 和 T_{2n} 作线性组合可得到辛普森值 $S_n=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n$，而由 S_n 和 S_{2n} 的线性组合得到科特斯积分值 $C_n=$ __⑥__，进一步由 C_n 和 C_{2n} 的线性组合即得到龙贝格积分值 $R_n=$ __⑦__.

6、下列三个矩阵中哪一个存在唯一的 LU 分解（其中 L 为单位下三角矩阵，U 为上三角矩阵）__⑧__ （A）$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 4 & 6 & 7\end{bmatrix}$，（B）$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 6 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$，（C）$\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 2 & 5 & 15\\ 6 & 15 & 46\end{bmatrix}$

7、求积分 $\int_{-1}^1 f(x)dx$ 的二点 Gauss 公式是 __⑨__ .

8、当 c 的取值是 __⑩__ 时，迭代公式 $x_{k+1}=x_k+c(x_k^2-3)$ 产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛于 $\sqrt{3}$.

二、（10 分）在非空实数集合 R^1 中，$\forall x,y\in R^1$，若定义 $\rho(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$，验证 R^1 按 $\rho(x,y)$ 构成距离空间.

三、（10 分）设函数 $f(x)=x^4-3x^3+x^2-10$，写出 $f(x)$ 以 $x_0=0,\ x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$ 为插值节点的三次插值多项式 $P_3(x)$，并给出插值余项表达式。

四、（10 分）求参数 $a,b,c,$，使得积分 $\int_0^1\left[e^x-\left(ax^2+bx+c\right)\right]^2dx$ 取最小值.

五、（10 分）证明不存在 $A_k, x_k (k=0,1,\cdots,n)$, 使求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$ 的代数精度超过 $2n+1$ 次.

六、（10 分）（1）设 $f(x) \in C[-1,1]$，利用三次勒让德多项式 $P_3(x) = \frac{1}{2^3 \cdot 3!} \frac{d^3}{dx^3}[(x^2-1)^3]$ 的三个根 x_1, x_2, x_3 为求积节点，试构造权函数 $\rho(x)=1$ 的插值型求积公式，并确定它的代数精度.

七、（10 分）试用追赶法解下列三对角方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 2 & 4 & 1 & \\ & 3 & 6 & 1 \\ & & 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix}$$

八、（10 分）已知线性方程组 $\begin{cases} 20x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 24 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 - 3x_2 + 15x_3 = 30 \end{cases}$

试问雅可比迭代法是否收敛？若收敛，当取 $x^{(0)} = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 时需要迭代多少次，才能保证各分量的误差绝对值小于 10^{-5} ？（$\ln 3 \approx 1.1$, $\ln 10 \approx 2.3$）

九、（10 分）在线性方程组 Ax=b 中，$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$.

证明 （1）当 $-0.5 < a < 1$ 时高斯-塞德尔迭代法收敛；

（2）雅可比迭代法只在 $-0.5 < a < 0.5$ 时才收敛。