Exercice 1

Une ferme d'élevage biologique produit et commercialise de la « crème bio ». Ell peut en produire entre 0 et 300 litres par semaine. Cette production est vendue dans sa totalité. Le coût total de fabrication est modélisé par la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $\mathrm{I} =]0\,;\,3]$ par

$$f(x) = 10x^2 - 20x \ln x.$$

Lorsque x représente le nombre de centaines de litres de crème, $f(x)$ est le coût total de fabrication en centaines d'euros. La recette, en centaines d'euros, est donnée par une fonction r définie sur le même intervalle I.

Partie A

La courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f et la droite D représentative de la fonction linéaire r sont données en **annexe**.

1) Répondre aux questions suivantes par lecture graphique et sans justification.

- **a)** Donner le prix de vente en euros de 100 litres de crème.
- **b)** Donner l'expression de $r(x)$ en fonction de x.
- **c)** Combien l'artisan doit-il produire au minimum de litres de crème pour que l'entreprise dégage un bénéfice ?

2) On admet que $\displaystyle\int_1^3 20x \ln x \,\mathrm{d}x = 90 \ln 3 - 40$.

- **a)** En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.
- **b)** En déduire, pour une production comprise entre 100 et 300 litres, la valeur moyenne (arrondie à l'euro) du coût total de production.

Partie B

On note $B(x)$ le bénéfice réalisé par l'artisan pour la vente de x centaines de litres de crème produits. D'après les données précédentes, pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,3]$, on a :

$$B(x) = -10x^2 + 10x + 20x \ln x$$

où $B(x)$ est exprimé en centaines d'euros.

1) On note B' la fonction dérivée de la fonction B. Montrer que, pour tout nombre x de l'intervalle $[1\,;\,3]$, on a : $B'(x) = -20x + 20 \ln x + 30$.

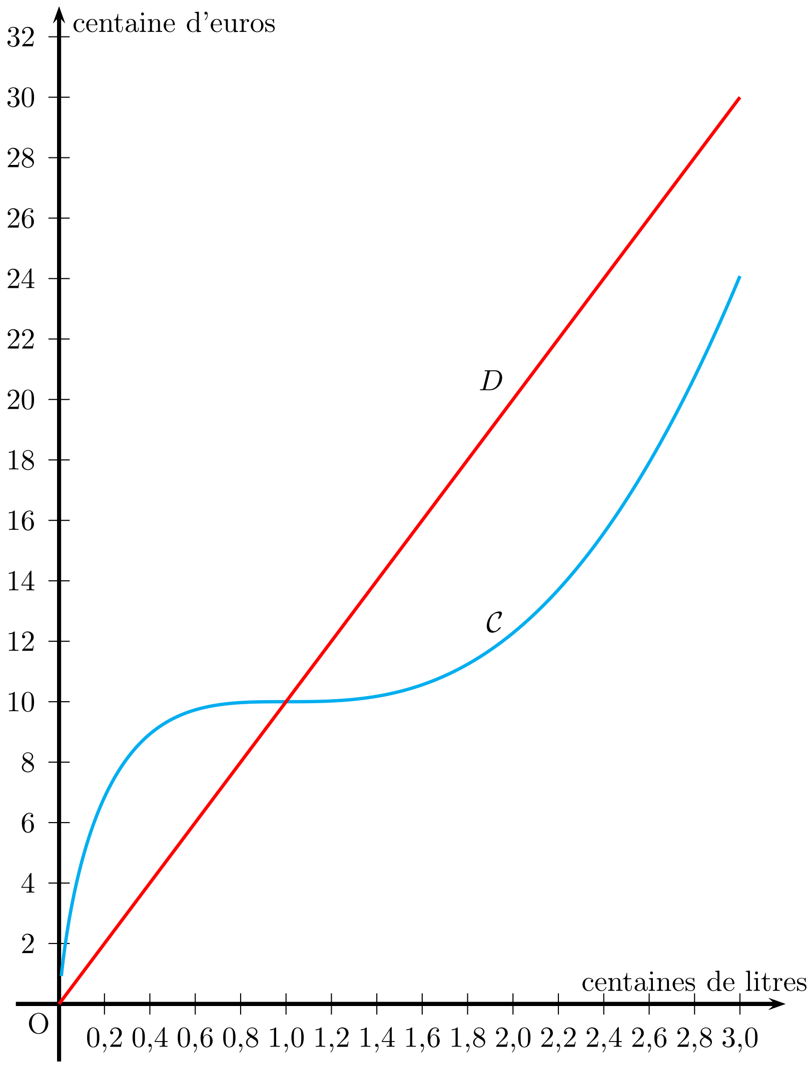
2) On donne le tableau de variation de la fonction dérivée B' sur l'intervalle $[1\,;\,3]$.

x	1		3
$B'(x)$	$B'(1)$	$\searrow$	$B'(3)$

- **a)** Montrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;\,3]$, Donner une valeur approchée de α à 10^{-2}.
- **b)** En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\,3]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction B sur ce même intervalle.

3) L'artisan a décidé de maintenir sa production dans les mêmes conditions s'il peut atteindre un bénéfice d'au moins 850 euros. Est-ce envisageable ?

ANNEXE



centaine d'euros
32
30
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
O
0,2 0,4 0,6 0,8 1,0 1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 2,2 2,4 2,6 2,8 3,0
centaines de litres
D
$\mathcal{C}$