13 Intégrale d'une fonction continue

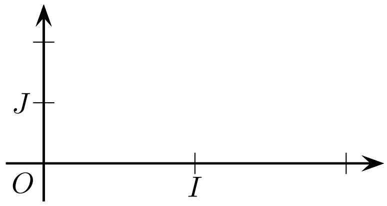
1 Aire sous une courbe

Définition

Dans un repère orthogonal (O, I, J), on appelle **unité d'aire** l'aire du rectangle de côtés $[OI]$ et $[OJ]$.

Ex : sur le repère ci-contre, on a $OI = 2$ cm et $OJ = 0,8$ cm.

Donc 1 unité d'aire vaut : $2 \times 0,8 = 1,6\text{cm}^2$



Définition

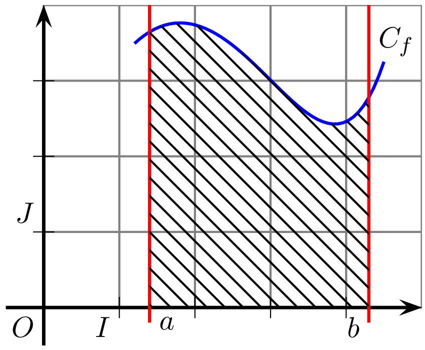
Soit f une fonction définie, **continue et positive** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; I, J)$.

On appelle **intégrale de f entre a et b** l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Cette aire est notée : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

- Le nombre a est appelé **borne inférieure** de l'intégrale;
- Le nombre b est appelé **borne supérieure** de l'intégrale;
- La variable x est dite muette et peut être remplacée par toute autre variable : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$



Exemple 1

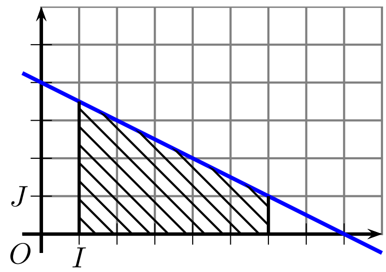
Soit $f(x) = -\dfrac{x}{2} + 4$, définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\int_1^6 f(x)dx$.

Le domaine est délimité par la courbe représentant la fonction affine f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 6$.

Le domaine est un trapèze dont l'aire se calcule :

$A = \dfrac{(3,5+1) \times 5}{2} = \dfrac{4,5 \times 5}{2} = \dfrac{22,5}{2} = 11,25$ u.a.

Donc : $\displaystyle\int_1^6 f(x)dx = 11,25$



Propriétés

Soit f une fonction définie, continue et positive sur $[a\ ;\ b]$ alors :

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0 \quad \text{et pour tout réel } c \in [a\ ;\ b] : \int_c^c f(x)dx = 0$$

Propriétés

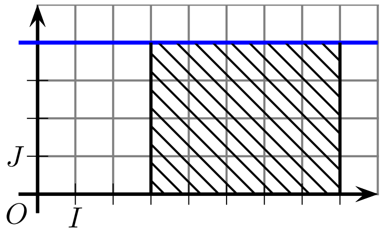
Soit k un réel positif et f la fonction constante définie sur $[a\ ;\ b]$ par $f(x) = k$. Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b k dx = k(b-a)$$

Exemple 2

Soit $f(x) = 4$, définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $\int_3^8 f(x)dx$.

$$\int_3^8 f(x)dx = 4 \times (8-3) = 4 \times 5 = 20$$

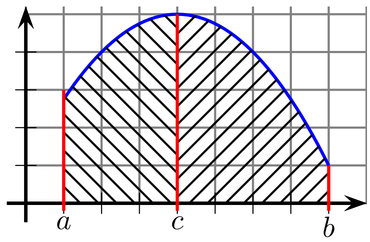


Propriétés

1) Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. Pour tout nombre réel c de $[a;b]$:

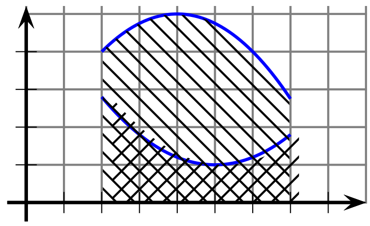
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Cette égalité est appelée relation de Chasles.



2) Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$, telles que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout réel x de $[a;b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$



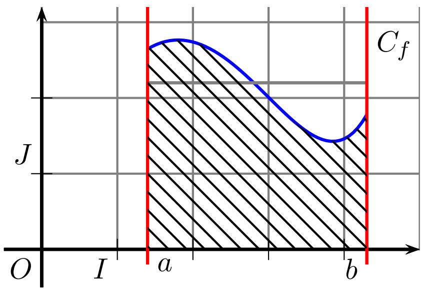
2 Valeur moyenne d'une fonction continue

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
La **valeur moyenne** de f sur $[a;b]$ est le nombre réel m défini par :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Si la fonction est positive, l'aire sous la courbe C_f est l'aire du rectangle de base $[a;b]$ et de hauteur la valeur moyenne m.



Propriété

Si le nombre réel m est la **valeur moyenne** d'une fonction f sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors :

$$m(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

Exemple 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 4$ sur $\mathbb{R}$.

La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$ est :

Soit m la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$:

$$m = \frac{1}{4-0}\int_0^4 f(x)\mathrm{dx} = \frac{1}{4}\int_0^4 \frac{x^2}{2} - 2x + 4\mathrm{dx} \approx \frac{1}{4} \times 10,67 \approx 2,67$$