Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 2x - x\ln(x)$.

1) a) Calculer la valeur exacte de $f(3\mathrm{e})$. En donner une valeur approchée au millième.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - x\ln(x) \quad \text{et} \quad x = 3\mathrm{e} \\ f(3\mathrm{e}) &= 2\times 3\mathrm{e} - 3\mathrm{e}\ln 3\mathrm{e} \\ &= \boxed{6\mathrm{e} - 3\mathrm{e}\ln 3\mathrm{e}} \\ &= 3\mathrm{e}\,(2-\ln 3\mathrm{e}) \\ &= 3\mathrm{e}\,(2-\ln 3 - \ln \mathrm{e}) \\ &= \boxed{3\mathrm{e}\,(1-\ln 3)} \\ &\approx -0,804 \quad \text{à } 10^{-3}\text{près} \end{aligned}$$

Remarque : le premier résultat encadré constitue une réponse correcte avec valeur exacte. J'ai poursuivi le calcul pour proposer une écriture réduite du résultat mais rien ne l'impose.

b) Résoudre sur $]0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \iff 2x - x\ln x = 0$$

On peut résoudre cette équation de 2 façons puisque x est un nombre réel strictement positif. Cela permet de diviser par x.

Méthode 1 :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff 2x - x\ln x = 0 \\ &\iff 2x = x\ln x && \text{on divise chaque membre par le nombre } x \neq 0 \\ &\iff 2 = \ln x && \text{on applique la fonction exponentielle} \\ &\iff \mathrm{e}^2 = x \end{aligned}$$

Méthode 2 :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff 2x - x\ln x = 0 && \text{le nombre } x \text{ est un facteur commun} \\ &\iff x\,(2-\ln x) = 0 && \text{on factorise par le nombre } x \\ &\iff x = 0 \ \text{ ou } \ 2-\ln x = 0 && \text{règle du produit nul} \\ &\iff x = 0 \ \text{ ou } \ 2 = \ln x \\ &\iff x = 0 \ \text{ ou } \ \mathrm{e}^2 = x \end{aligned}$$

Comme $x > 0$, l'équation admet une solution unique : $\boxed{S = \left\{\mathrm{e}^2\right\}}$.

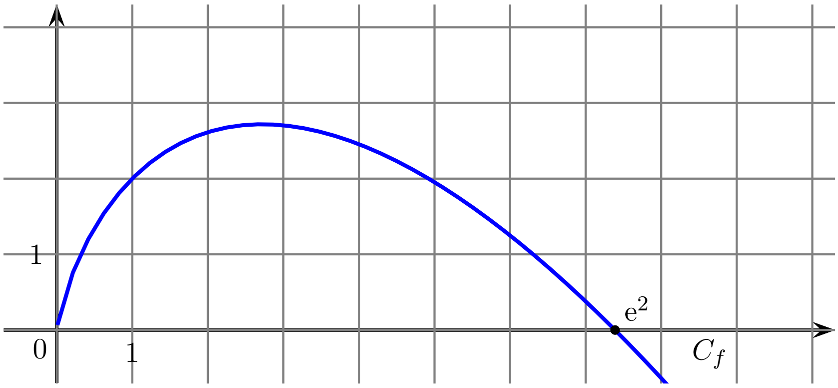
c) La fonction f est une somme donc sa dérivée est la somme des dérivées de chaque terme. Néanmoins, le second terme $x\ln x$ est un produit donc on pose :

$$\begin{aligned} u(x) &= x \quad \text{donc} \quad u'(x) = 1 \\ v(x) &= \ln x \quad \text{donc} \quad v'(x) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

On a $f(x) = 2x - u(x)v(x)$ donc $f'(x) = 2 - (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \left(1\times\ln x + x\times\frac{1}{x}\right) \\ &= 2 - (\ln x + 1) \\ &= 2 - \ln x - 1 \\ &= \boxed{1-\ln x} \end{aligned}$$

Remarque : si on trace la courbe de la fonction f, on peut vérifier certains résultats.



2) La fonction F définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x)=\dfrac{5}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x^2\ln(x)$ est une primitive de f si elle vérifie $F'(x)=f(x)$.
La fonction F est une somme d'un carré et d'un produit. On pose :

$$U(x)=x^2 \quad \text{donc} \quad U'(x)=2x$$
$$V(x)=\ln x \quad \text{donc} \quad V'(x)=\frac{1}{x}$$

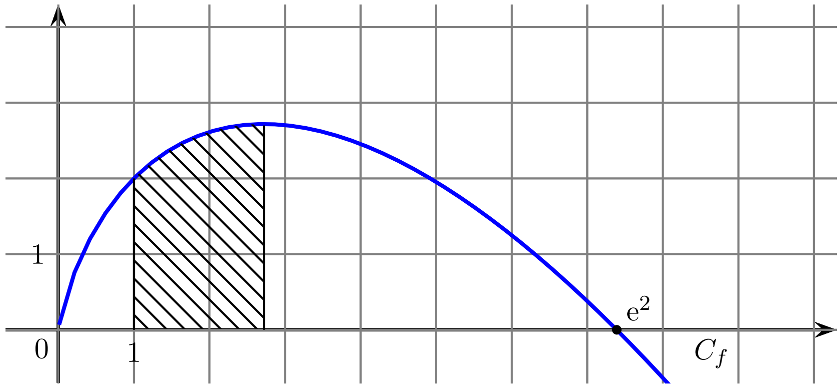
On a $F(x)=\dfrac{5}{4}x^2-\dfrac{1}{2}U(x)V(x)$ donc $F'(x)=\dfrac{5}{4}\times 2x-\dfrac{1}{2}\left(U'(x)V(x)+U(x)V'(x)\right)$.

$$\begin{aligned}
F'(x)&=\frac{5}{4}\times 2x-\frac{1}{2}\left(2x\times\ln x+x^2\times\frac{1}{x}\right)\\
F'(x)&=\frac{5\times 2x}{4}-\frac{1}{2}\left(2x\ln x+\frac{x^2}{x}\right)\\
F'(x)&=\frac{10x}{4}-\frac{1}{2}\left(2x\ln x+x\right)\\
F'(x)&=2,5x-\frac{1}{2}\times 2x\ln x-\frac{1}{2}\times x\\
F'(x)&=2,5x-x\ln x-0,5x\\
F'(x)&=2x-x\ln x\\
F'(x)&=f(x)
\end{aligned}$$

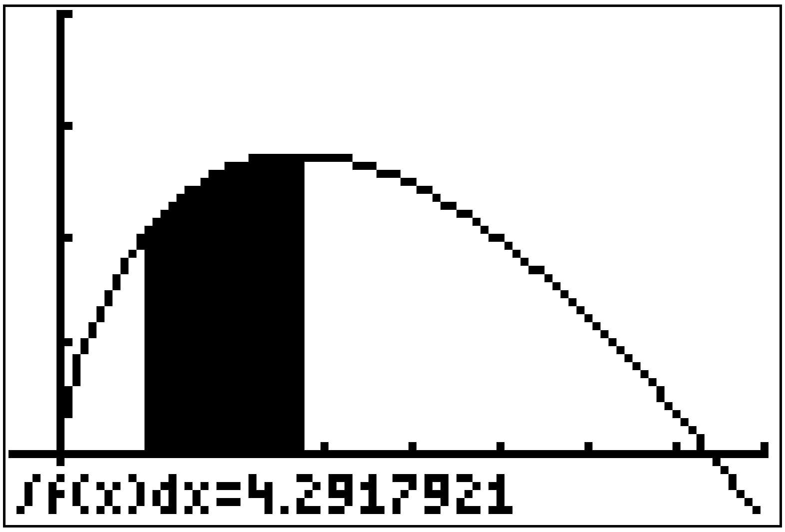
3) Comme $F(x)=\dfrac{5}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x^2\ln(x)$ est une primitive de $f(x)=2x-x\ln x$:

$$\begin{aligned}
\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x=[F(x)]_1^{\mathrm{e}}&=F(\mathrm{e})-F(1)\\
&=\left(\frac{5}{4}\times\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}\times\mathrm{e}^2\times\ln\mathrm{e}\right)-\left(\frac{5}{4}\times 1^2-\frac{1}{2}\times 1^2\times\ln 1\right)\\
&=\left(\frac{5}{4}\times\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}\times\mathrm{e}^2\times 1\right)-\left(\frac{5}{4}\times 1-\frac{1}{2}\times\times 0\right)\\
&=\left(\frac{5\mathrm{e}^2}{4}-\frac{\mathrm{e}^2}{2}\right)-\left(\frac{5}{4}\right)\\
&=\left(\frac{5\mathrm{e}^2}{4}-\frac{2\mathrm{e}^2}{4}\right)-\left(\frac{5}{4}\right)\\
&=\frac{3\mathrm{e}^2}{4}-\frac{5}{4}\\
&=\boxed{\frac{3\mathrm{e}^2-5}{4}}\\
&\approx 4,29
\end{aligned}$$

Remarque : l'intégrale calculée donne l'aire du domaine hachuré délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
Graphiquement, on vérifie que l'aire est proche de 4 u.a.



Avec la calculatrice, on vérifie notre valeur :



Exercice 3

Soit f et F les fonctions définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$ et $F(x) = x\ln(x) - x$.

1) F est une primitive de la fonction f si $F'(x) = f(x)$.
On pose $U(x) = x$ donc $U'(x) = 1$
et $V(x) = \ln x$ donc $V'(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\begin{aligned} F'(x) &= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln x + 1 - 1 \\ F'(x) &= \ln x \end{aligned}$$

Une primitive de la fonction $\ln x$ est la fonction $F(x) = x\ln x - x$.

2) Les primitives sont définies à une constante près. Donc toutes les primitives de la fonction $f(x) = \ln x$ sont de la forme $F(x) = x\ln x - x + k$.
Parmi toutes ces primitives, il y en une qui s'annule pour $x = 1$:

$$F(1) = 0 \Longleftrightarrow 1\ln 1 - 1 + k = 0 \Longleftrightarrow -1 + k = 0 \Longleftrightarrow k = 1$$

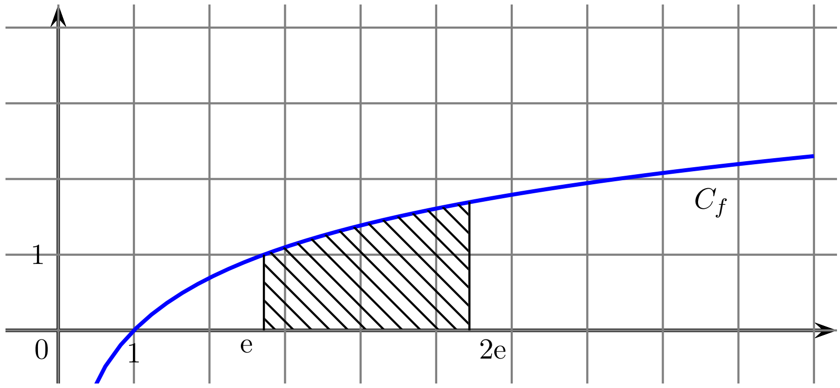
La primitive qui s'annule pour $x = 1$ est donc $F(x) = x\ln x - x + 1$.

3)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} \ln(x)\mathrm{d}x &= F(2\mathrm{e}) - F(\mathrm{e}) \\
&= (2\mathrm{e}\ln 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e} + 1) - (\mathrm{e}\ln \mathrm{e} - \mathrm{e} + 1) \\
&= 2\mathrm{e}\ln 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e} + 1 - (\mathrm{e} - \mathrm{e} + 1) \\
&= 2\mathrm{e}\ln 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e} && \text{on peut factoriser par } 2\mathrm{e} \\
&= 2\mathrm{e}\,(\ln 2\mathrm{e} - 1) && \text{on utilise la relation } \ln(ab) = \ln a + \ln b \\
&= 2\mathrm{e}\,(\ln 2 + \ln \mathrm{e} - 1) && \text{on a donc : } \ln 2\mathrm{e} = \ln 2 + \ln \mathrm{e} \\
&= 2\mathrm{e}\,(\ln 2 + 1 - 1) && \text{on rappelle que } \ln \mathrm{e} = 1 \\
&= \boxed{2\mathrm{e}\ln 2} \\
&\approx 3,768
\end{aligned}$$

Remarque : l'intégrale calculée donne l'aire du domaine hachuré délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \mathrm{e}$ et $x = 2\mathrm{e}$.

Graphiquement, on vérifie que l'aire est comprise entre 3 et 4 u.a.



4) Valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ 7]$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{7-1}\int_1^7 \ln(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{6}\,(F(7) - F(1)) \\
&= \frac{1}{6}\,((7\ln 7 - 7) - (1\ln 1 - 1)) \\
&= \frac{1}{6}\,(7\ln 7 - 7 + 1) \\
&= \frac{1}{6}\,(7\ln 7 - 6) \\
&= \frac{7\ln 7 - 6}{6} \\
&\approx 1,27
\end{aligned}$$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $[0,5\ ;\ 10]$ par $f(x) = -x^2 - 4x + 15 + 6\ln(x)$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1) La fonction f est une somme dont chaque terme est dérivable directement. Donc :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -2x - 4 + 0 + 6 \times \frac{1}{x} \\
&= -2x - 4 + \frac{6}{x} && \text{on réduit au même dénominateur} \\
&= \frac{-2x \times x}{x} - \frac{4x}{x} + \frac{6}{x} \\
&= \boxed{\frac{-2x^2 - 4x + 6}{x}}
\end{aligned}$$

On a bien vérifié que $f'(x) = \dfrac{-2x^2 - 4x + 6}{x}$.

2) La fonction dérivée f' est un quotient. On peut dresser un tableau de signes mais cela n'est pas vraiment nécessaire puisque le dénominateur qui est égal à x est toujours positif.
En conséquence, la dérivée f' est du même signe que le numérateur $-2x^2 - 4x + 6$ qui est un trinôme du second degré où $a = -2$, $b = -4$ et $c = 6$.

Calcul du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times (-2) \times 6 = 16 + 48 = 64$
Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet 2 racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{64}}{2 \times (-2)} = \frac{4 - 8}{-4} = 1$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{64}}{2 \times (-2)} = \frac{4 + 8}{-4} = -3$$

Sur $\mathbb{R}$, le trinôme est du signe contraire de a, donc **positif**, sur l'intervalle $[-3\ ;\ 1]$ (entre ses racines) et le trinôme est négatif sur $]-\infty\ ; -3[\cup]1\ ;\ +\infty[$.

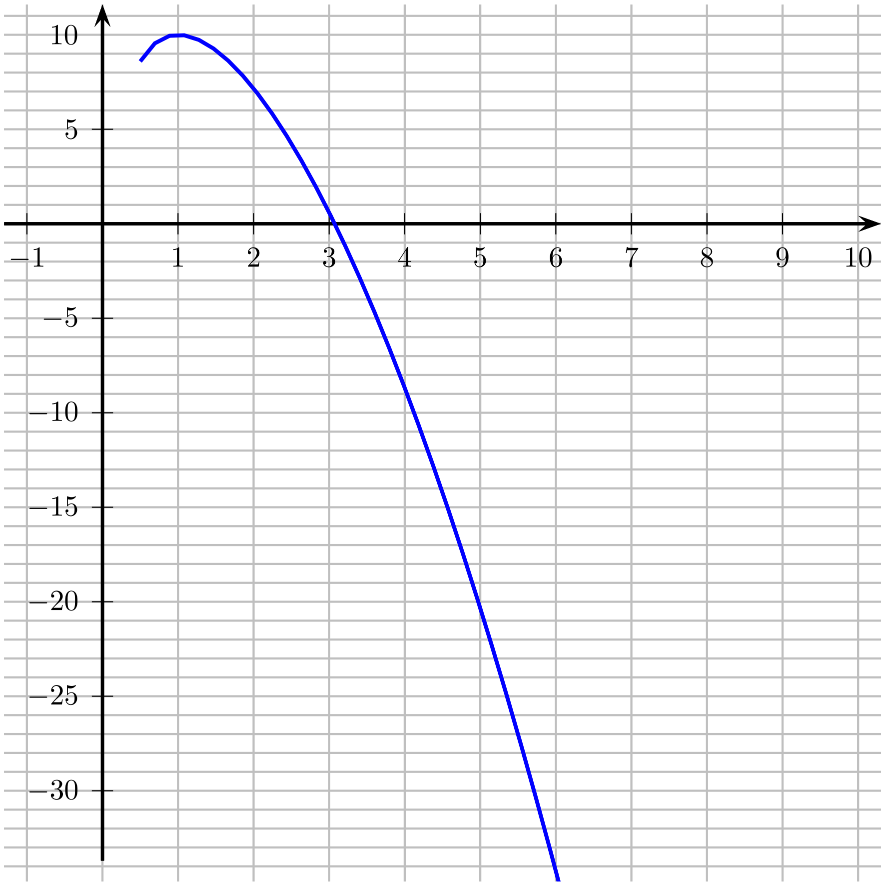
Donc sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 10]$, la dérivée f' est **positive** sur $[0,5\ ;\ 1]$ et **négative** sur $[1\ ;\ 10]$.

Tableau de variations de f sur [0,5 ; 10] :

x	0,5		1		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$8,59$	$\nearrow$	10	$\searrow$	$-111,2$

Remarque : Ci-dessous la représentation graphique de la fonction f :

- On vérifie les variations : croissante sur $[0,5\ ;\ 1]$ et décroissante sur $[1\ ;\ 10]$
- La dérivée s'annule en $x = 1$ puisque la courbe change de variation.



3) On considère la fonction F définie et dérivable sur $[0,5\ ;\ 10]$ telle que $F(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 9x + 6x\ln(x)$.
F est une primitive de f sur $[0,5\ ;\ 10]$ si $F'(x) = f(x)$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\frac{1}{3} \times 3x^2 - 2 \times 2x + 9 \times 1 + (6x\ln(x))' \\ &= -x^2 - 4x + 9 + (6x\ln(x))' \end{aligned}$$

Il reste à dériver le produit $6x\ln(x)$. On pose :

$$\begin{aligned} & U(x) = 6x \quad \text{donc} \quad U'(x) = 6 \\ & V(x) = \ln x \quad \text{donc} \quad V'(x) = \frac{1}{x} \\ \text{donc} \quad & (6x\ln(x))' = 6\ln x + 6x \times \frac{1}{x} \\ & 6x\ln(x))' = 6\ln x + \frac{6x}{x} \\ & 6x\ln(x))' = 6\ln x + 6 \end{aligned}$$

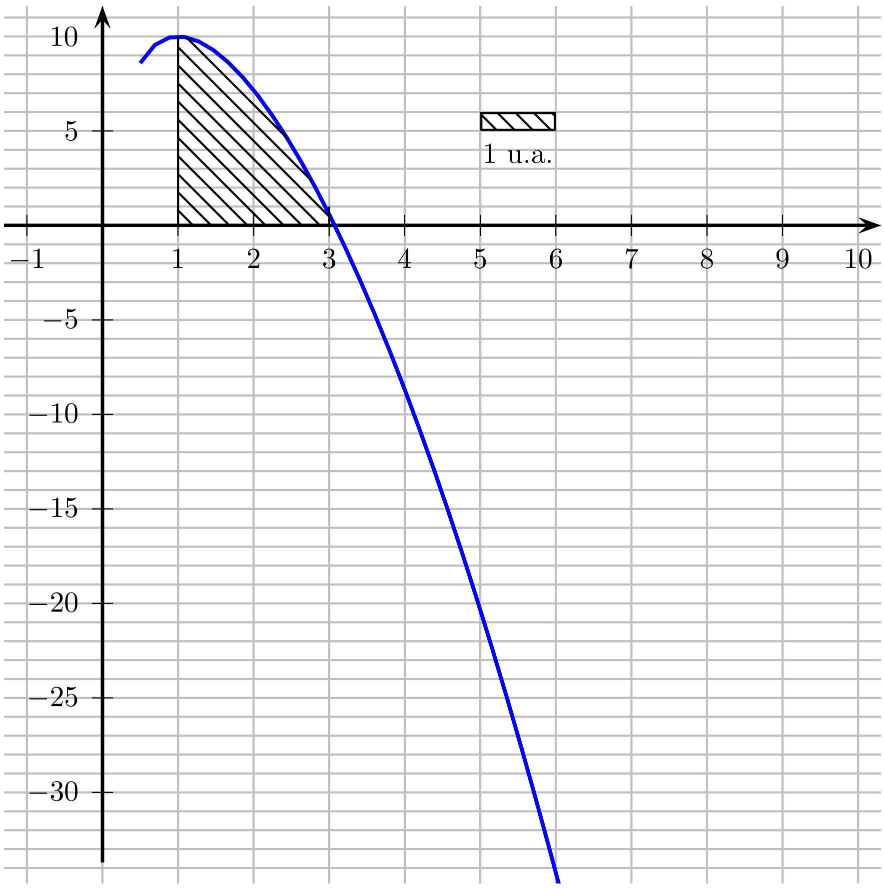
On en déduit la dérivé F' :

$$\begin{aligned} F'(x) &= -x^2 - 4x + 9 + (6x\ln(x))' \\ &= -x^2 - 4x + 9 + 6\ln x + 6 \\ &= -x^2 - 4x + 15 + 6\ln x \\ F'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

4) Valeur exacte, puis une valeur approchée au millième :

$$\begin{aligned}
I = \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x &= [F(x)]_1^3 \\
&= F(3) - F(1) \\
&= \left(-\frac{1}{3} \times 3^3 - 2 \times 3^2 + 9 \times 3 + 6 \times 3 \times \ln(3)\right) - \left(-\frac{1}{3} \times 1^3 - 2 \times 1^2 + 9 \times 1 + 6 \times 1 \times \ln(1)\right) \\
&= (-9 - 18 + 2718 \ln 3) - \left(-\frac{1}{3} - 2 + 9 + 6 \times 1 \times 0\right) \\
&= 18 \ln 3 - \left(-\frac{1}{3} + 7\right) \\
&= 18 \ln 3 - \left(-\frac{1}{3} + \frac{21}{3}\right) \\
&= \boxed{18 \ln 3 - \frac{20}{3}} \\
&\approx 13,108
\end{aligned}$$

Remarque : représentation graphique de l'intégrale :



5) Soit m la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$:

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{3-1}\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x \\
m &= \frac{1}{2} \times \left(18 \ln 3 - \frac{20}{3}\right) \\
m &= \frac{1}{2} \times 18 \ln 3 - \frac{1}{2} \times \frac{20}{3} \\
m &= \boxed{9 \ln 3 - \frac{10}{3}} \\
m &\approx 6,554
\end{aligned}$$