14 Primitive et intégrale

1 Primitive d'une fonction f

Définition

Une primitive d'une fonction f continue sur $[a\ ;\ b]$ est une fonction F, dérivable sur $[a\ ;\ b]$, telle que la dérivée de F est f. Donc pour tout réel x de $[a\ ;\ b]$: $F'(x) = f(x)$.

Une fonction continue admet plusieurs primitives qui se différencient par la valeur de la constante.

Exemple 1

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3$ admet comme primitives $F(x) = 3x$, $F(x) = 3x + 1$, $F(x) = 3x - 2$.

La fonction f admet comme primitive toute fonction de la forme $F(x) = 3x + k$ où k est un nombre réel constant.

Primitives des fonctions usuelles (à constante près)

Fonction f	Primitive F de f
$f(x) = a$	$F(x) = ax$
$f(x) = x$	$F(x) = \dfrac{x^2}{2}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \dfrac{x^3}{3}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ où $n \in \mathbb{N}$

Fonction f	Primitive F de f
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = \dfrac{-1}{x}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x$
$f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$	$F(x) = \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b}$ où $(a \neq 0)$

Exemple 2

1) $f(x) = x^3$ admet comme primitive $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$ ou $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + 1$ ou $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2$

2) $f(x) = \mathrm{e}^{0,5x+1}$ admet comme primitive $F(x) = \dfrac{1}{0,5}\mathrm{e}^{0,5x+1} = 2\mathrm{e}^{0,5x+1}$ ou $F(x) = 2\mathrm{e}^{0,5x+1} + 3$

3) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x+1}$ admet comme primitive $F(x) = \dfrac{1}{-2}\mathrm{e}^{-2x+1} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x+1}$ ou $F(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x+1} - 4$

Propriétés

Soit u et v deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ admettant comme primitives respectives U et V.

- Une primitive de la fonction $f = ku$ où k est un nombre réel est la fonction $F = kU$.
- Une primitive de la fonction $f = u + v$ est la fonction $F = U + V$.

Exemple 3

1) $f(x) = \dfrac{4}{x} = 4 \times \dfrac{1}{x} = 4u(x)$

Or une primitive de $u(x) = \dfrac{1}{x}$ est $U(x) = \ln(x)$

Donc $F(x) = 4U(x) = 4\ln(x)$

2) $g(x) = x + \mathrm{e}^{-x+1} = u(x) + v(x)$

Or une primitive de $u(x) = x$ est $U(x) = \dfrac{x^2}{2}$ et une primitive de $v(x) = \mathrm{e}^{-x+1}$ est $V(x) = \dfrac{1}{-1}\mathrm{e}^{-x+1} = -\mathrm{e}^{-x+1}$

Donc $G(x) = U(x) + V(x) = \dfrac{x^2}{2} - \mathrm{e}^{-x+1}$

2 Intégrale d'une fonction f continue sur $[a\ ;\ b]$

Théorème

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ admettant comme primitive F, alors :

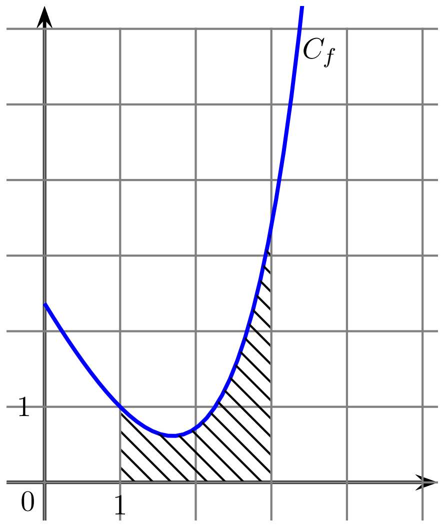
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x-1} - 2x + 2$.

Soit F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \mathrm{e}^{x-1} - x^2 + 2x + 1$ une primitive de f.

$$\begin{aligned}\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_1^3 = F(3) - F(1)&\\ &= \left(\mathrm{e}^{3-1} - 3^2 + 2\times 3 + 1\right) - \left(\mathrm{e}^{1-1} - 1^2 + 2\times 1 + 1\right)\\ &= \left(\mathrm{e}^2 - 9 + 6 + 1\right) - \left(\mathrm{e}^0 - 1 + 2 + 1\right)\\ &= \left(\mathrm{e}^2 - 2\right) - 3\\ &= \mathrm{e}^2 - 5 \ \text{ qui est une valeur exacte}\\ &\approx 2,39 \ \text{ qui est une valeur approchée à } 10^{-2} \text{ près}\end{aligned}$$



Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ admettant des primitives F et G.

1) $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ avec $k \in \mathbb{R}$.

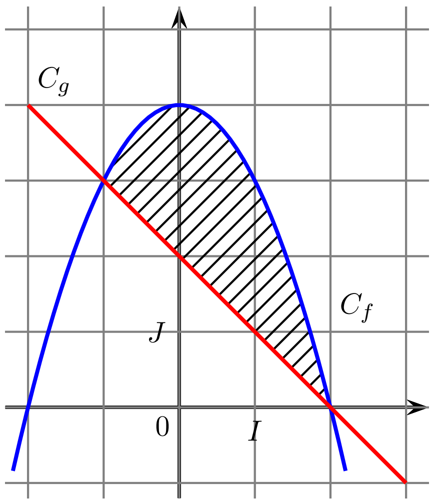
2) $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Exemple 5 : Aire d'un domaine délimité par 2 courbes

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = -x + 2$.

L'aire du domaine délimité par les 2 courbes est égal à :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x - \int_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 \left(f(x) - g(x)\right)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^2 \left(4 - x^2 - (-x+2)\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^2 \left(-x^2 + x + 2\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$



Soit H une primitive de $h(x) = -x^2 + x + 2$. On a $H(x) = -\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 2x$.

Donc

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \left(-x^2 + x + 2\right)\mathrm{d}x = [H(x)]_{-1}^2 = H(2) - H(-1)&\\ &= \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2\times 2\right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2\times(-1)\right)\\ &= \left(\frac{-8}{3} + \frac{4}{2} + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{10}{3} - \frac{-7}{3} = \frac{27}{6} = 4,5\end{aligned}$$