Correction Exercice 1

Partie A

1) Lecture graphique et sans justification :

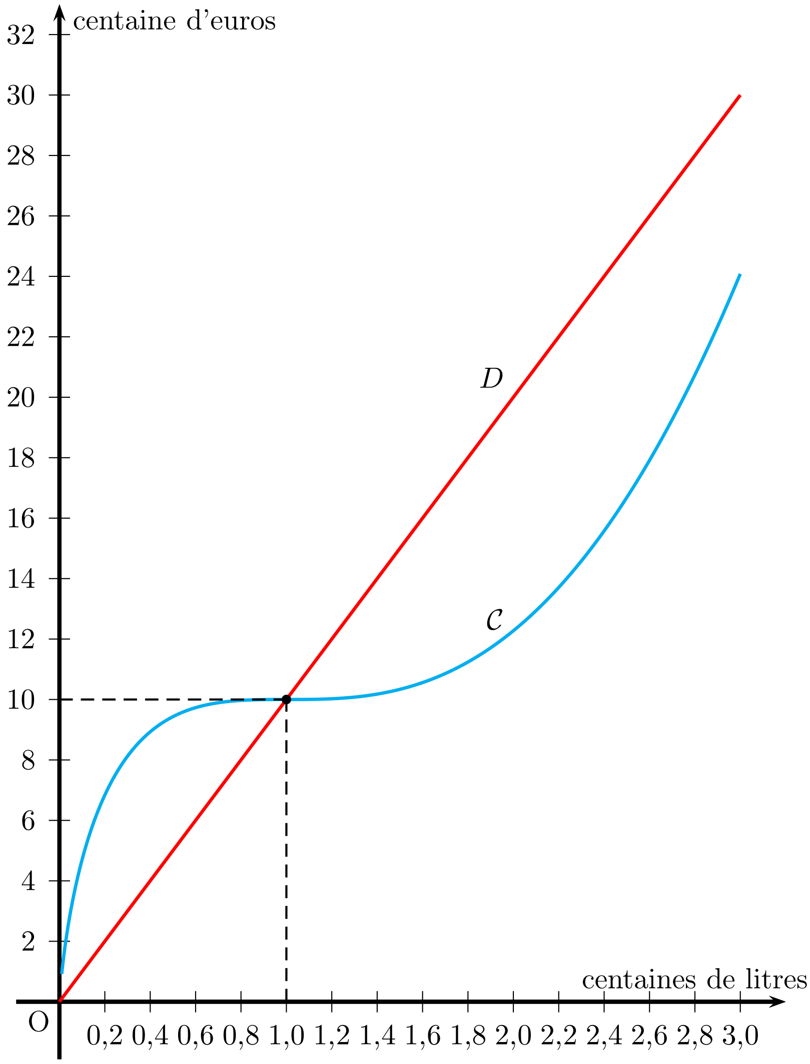
a) La droite D passe par le point de coordonnées $(1\,;10)$; 1 représente 100 litres et 10 représentent 1 000 euros. Donc la vente de 100 litres de crème rapporte 1 000 euros.

b) La droite D passe par l'origine donc représente une fonction linéaire r avec $r(x) = ax$.

Cette droite passe par le point de coordonnées $(1\,;10)$ donc $r(1) = 10 \iff a = 10$.

Donc $r(x) = 10x$.

c) Pour que l'entreprise réalise un bénéfice, il faut que la droite D représentant la recette soit au dessus de la courbe $\mathcal{C}$ représentant le coût ; la droite et la courbe se coupent au point d'abscisse 1. Il faut donc que $x > 1$ pour réaliser un bénéfice, donc que l'artisan produise au moins 100 litres de crème.



2) On admet que $\displaystyle\int_1^3 20x\ln x\,\mathrm{d}x = 90\ln 3 - 40$.

a) $\displaystyle\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^3 \left(10x^2 - 20x\ln x\right)\mathrm{d}x = \int_1^3 10x^2\mathrm{d}x - \int_1^3 20x\ln x\mathrm{d}x$

La fonction $x \longmapsto 10x^2$ a pour primitive $x \longmapsto 10\dfrac{x^3}{3}$ donc

$\displaystyle\int_1^3 10x^2\mathrm{d}x = \left[10\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \left(10\times\frac{27}{3}\right) - \left(10\times\frac{1}{3}\right) = \frac{260}{3}$

$\displaystyle\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \frac{260}{3} - (90\ln 3 - 40) = \frac{260}{3} - 90\ln 3 + 40 = \frac{380}{3} - 90\ln 3$

b) La valeur moyenne de la fonction f entre 1 et 3 est $\displaystyle\frac{1}{3-1}\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x \approx 13,90$.

Donc pour une production comprise entre 100 et 300 litres, la valeur moyenne du coût total de production est égale à 1 390 euros.

Partie B

On note $B(x)$ le bénéfice réalisé par l'artisan pour la vente de x centaines de litres de crème produits. D'après les données précédentes, pour tout x de l'intervalle $[1~;~3]$, on a : $B(x) = -10x^2 + 10x + 20x\ln x$ où $B(x)$ est exprimé en centaines d'euros.

1) On note B' la fonction dérivée de la fonction B ; $B(x) = -10x^2 + 10x + 20x\ln x$ donc
$B'(x) = -20x + 10 + 20\left(1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x}\right) = -20x + 10 + 20\ln x + 20 = -20x + 20\ln x + 30$.

2) On donne le tableau de variation de la fonction dérivée B' sur l'intervalle $[1~;~3]$:

x	1		3
$B'(x)$	$B'(1)$	$\searrow$	$B'(3)$

a) $B'(1) = 10 > 0$ et $B'(3) \approx -8 < 0$ donc $B'(1) > 0 > B'(3)$.
On complète le tableau de variations de B' sur $[1\,;3]$:

x	1		α		3
$B'(x)$	$B'(1)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$B'(3)$

D'après ce tableau de variations, on peut dire que l'équation $B'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1\,;3]$.

$$\left.\begin{array}{l} B'(2) \approx 3,9 > 0 \\ B'(3) \approx -8 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \in [2\,;3]$$

$$\left.\begin{array}{l} B'(2,3) \approx 0,7 > 0 \\ B'(2,4) \approx -0,5 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \in [2,3\,;2,4]$$

$$\left.\begin{array}{l} B'(2,35) \approx 0,09 > 0 \\ B'(2,36) \approx -0,03 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \in [2,35\,;2,36]$$

Donc $\alpha \approx 2,35$.

b) D'après la question précédente :
- $B'(x) > 0$ sur $[1\,;\alpha[$;
- $B'(\alpha) = 0$;
- $B'(x) < 0$ sur $]\alpha\,;3]$.

S'il n'y a aucune production, il n'y a pas de bénéfice donc $B(1) = 0$; $B(3) \approx 5,92$.
D'où le tableau de variations de la fonction B sur $[1\,;3]$:

x	1		α		3
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	0	$\nearrow$	$B(\alpha)$	$\searrow$	$5,92$

3) Le bénéfice maximum est obtenu pour $x = \alpha$ avec $\alpha \in [2,35\,;2,36]$.
À la calculatrice on obtient $B(2,35) \approx 8{,}432\,5$ et $B(2,36) \approx 8{,}432\,8$, correspondant respectivement à des bénéfices de 843,25 € et de 843,28 €.
Il ne semble donc pas envisageable d'atteindre un bénéfice d'au moins 850 €.