Exercices 14

Exercice 1

Déterminer dans chaque cas une primitive F de la fonction f puis calculer l'intégrale donnée.

1) $f(x) = 2x$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)dx$

2) $f(x) = -x + 7$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{1}^{5} f(x)dx$

3) $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)dx$

4) $f(x) = x^3 - x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$

5) $f(x) = \mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$

6) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $\displaystyle\int_{1}^{10} f(x)dx$

7) $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} f(x)dx$

8) $f(x) = x - \mathrm{e}^{0,5x-1}$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{2}^{4} f(x)dx$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 2x - x\ln(x)$.

1) **a)** Calculer la valeur exacte de $f(3e)$. En donner une valeur approchée au millième.

b) Résoudre sur $]0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$.

c) Calculer la fonction dérivée f'.

2) Montrer que la fonction F définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = \dfrac{5}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x^2\ln(x)$ est une primitive de f.

3) Calculer la valeur exacte, puis approchée au centième, de $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} f(x)dx$

Exercice 3

Soit f et F les fonctions définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$ et $F(x) = x\ln(x) - x$.

1) Montrer que F est une primitive de la fonction f.

2) En déduire la primitive de f telle que $F(1) = 0$.

3) Calculer $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} \ln(x)dx$.

4) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ 7]$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $[0,5\ ;\ 10]$ par $f(x) = -x^2 - 4x + 15 + 6\ln(x)$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1) Vérifier que $f'(x) = \dfrac{-2x^2 - 4x + 6}{x}$.

2) Étudier le signe de la fonction f' sur $[0{,}5\,;\,10]$, en déduire le tableau de variations de f sur $[0{,}5\,;\,10]$.

3) On considère la fonction F définie et dérivable sur $[0,5\ ;\ 10]$ telle que $F(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 9x + 6x\ln(x)$.
Montrer que F est une primitive de f sur $[0,5\ ;\ 10]$.

4) Calculer $I = \displaystyle\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$. En donner la valeur exacte, puis une valeur approchée au millième.

5) En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$: en donner une valeur approchée au millième.