Correction exercice 2

Partie A

1) f est définie et dérivable sur $[1\,;\,11]$. La fonction est une somme de 3 termes :

$$f'(x) = -0,5 \times 2x + 2 + 15 \times \frac{1}{x} = -x + 2 + \frac{15}{x} = \frac{-x^2 + 2x + 15}{x}$$

2) On cherche dans un premier temps les racines du trinôme : $-x^2 + 2x + 15$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times 15 = 64$$

- Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{64}}{2 \times (-1)} = 5 \quad \text{et : } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{64}}{2 \times (-1)} = -3$$

- $a < 0$, nous en déduisons le tableau de signes de $f'(x)$ et le tableau de variations de f :

x	1		5		11
$-x^2 + 2x + 15$		$+$	0	$-$	
x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$-\frac{5}{2} + 15\ln(5)$	$\searrow$	$-\frac{77}{2} + 15\ln(11)$

$f(1) = \frac{3}{2} = 1,5\,;\ f(5) = -\frac{5}{2} + 15\ln(5) \approx 21,642$ et $f(11) = -\frac{77}{2} + 15\ln(11) \approx -2,53$.

3) **a)** Sur les intervalles :

- $[1\ ;\ 5]$, la fonction f admet un minimum $f(1) = 1,5$, ainsi sur cet intervalle, $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.
- $[5\ ;\ 11]$, la fonction f est strictement décroissante et continue (elle est dérivable) de plus 0 est compris entre $f(5)$ et $f(11)$, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution unique sur cet intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie de la fonction f.

On en déduit que sur l'intervalle $[1\ ;\ 11]$, $f(x) = 0$ admet une solution unique que l'on appellera α.

b) Avec la calculatrice, nous trouvons à 10^{-2} près : $\alpha \approx 10,66$.

c) D'après le tableau de variations de f sur l'intervalle $[1\ ;\ 11]$:

- $f(x) = 0 \iff x = \alpha$.
- $f(x) > 0 \iff x \in [1\ ;\ \alpha[$.
- $f(x) < 0 \iff x \in]\alpha\ ;\ 11]$.

4) **a)** F est une primitive de f si $F' = f$. On dérive F :

$$F'(x) = -\frac{1}{6} \times 3\ x^2 + 2\ x - 15 + 15 \times \ln(x) + 15\ x \times \frac{1}{x} = -0,5\ x^2 + 2\ x - 15 + 15\ \ln(x) + 15 = f(x).$$

Comme $F'(x) = f(x)$, F est bien une primitive de f.

b) Calcul de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_1^{11} f(x)\mathrm{d}x &= [F(x)]_1^{11} = F(11) - F(1)\\ &= -\frac{1595}{6} + 165 \times \ln(11) - \left(-\frac{85}{6}\right)\\ &= \boxed{-\frac{755}{3} + 165\ln 11}\\ &\approx 143,98\end{aligned}$$

c) La valeur moyenne μ de f sur l'intervalle sur $[1\,;\,11]$ vaut à 10^{-2} près :

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{11-1}\int_1^{11} f(x)\mathrm{d}x\\ \mu &\approx \frac{143,98}{10} \approx 14,40 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}\end{aligned}$$

Partie B

1) Il faut que $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [1\ ;\ \alpha]$, et tout cela en centaines de chaises. La quantité de chaises doit donc être comprise entre 100 et 1 066 chaises environ.

2) f admet sont maximum $-\frac{5}{2} + 15\ln 5$ qui est atteint pour $x = 5$.
Pour 500 chaises, le bénéfice mensuel maximal vaut environ 21,642 milliers d'euros.
C'est à dire : 21 642 €.