Exercice 2

Les parties A et B ne sont pas indépendantes

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[1\,;\,11]$ par

$$f(x) = -0,5x^2 + 2x + 15\ln x.$$

1) Montrer que $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 15}{x}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

2) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,11]$. On donnera les valeurs exactes des éléments du tableau.

3) **a)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;\,11]$.

b) Donner une valeur approchée de α à 0,01 près.

c) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x dans l'intervalle $[1\,;\,11]$.

4) **a)** On considère la fonction F définie sur $[1\,;\,11]$ par

$$F(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 15x + 15x\ln x.$$

Montrer que F est une primitive de la fonction f

b) Calculer $\displaystyle\int_1^{11} f(x)\,\mathrm{d}x$. On donnera le résultat exact puis sa valeur arrondie au centième.

c) En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,11]$. (On donnera la valeur arrondie au centième.)

Partie B

Une société fabrique et vend des chaises de jardin. La capacité de production mensuelle est comprise entre 100 et 1 100 chaises.

Le bénéfice mensuel réalisé par la société est modélisé par la fonction f définie dans la partie A, où x représente le nombre de centaines de chaises de jardin produites et vendues et $f(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros.

On précise qu'un bénéfice peut être positif ou négatif, ce qui correspond, dans ce deuxième cas, à une perte.

1) Quelles quantités de chaises la société doit-elle produire et vendre pour obtenir un bénéfice mensuel positif ?

2) Déterminer le nombre de chaises que la société doit produire et vendre pour obtenir un bénéfice mensuel maximal.