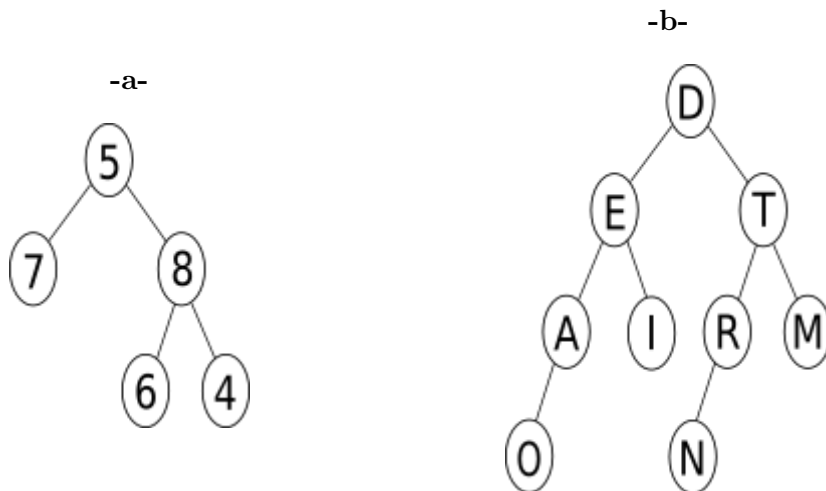


Les deux représentations ci-dessous sont des **arbres binaires**.



Ces structures de données sont hiérarchiques et se composent des éléments suivants :

- Le nœud initial appelé **racine**, placé en haut sur la représentation.
- Les nœuds internes reliés entre eux par des arêtes.
- Les nœuds terminaux appelés **feuilles** de l'arbre.
- Deux nœuds d'un arbre sont reliés entre eux par un **unique chemin**.

1 Généalogie d'un arbre

Le vocabulaire de la généalogie est souvent utilisé pour hiérarchiser les nœuds d'un arbre.

- Un nœud x est le père d'un nœud y si celui-ci est un successeur de x .
- Deux nœuds sont frères s'ils ont le même père.
- Les ancêtres d'un nœud x sont tous les nœuds situés sur le chemin reliant la racine au nœud x .
- Un nœud y est appelé descendant d'un nœud x si x est un ancêtre de y .

- 1) Quels sont les nœuds racine de chaque arbre ?
- 2) Quels sont les ancêtres du nœud de valeur 6 ? et du nœud de valeur N ?
- 3) Quels sont les descendants du nœud de valeur E ?

2 Mesurer un arbre

Un arbre binaire peut être mesuré. On utilise plusieurs indicateurs comme la **taille**, la **profondeur**, le **niveau** et la **hauteur**.

- 1) La **taille** est le nombre de nœuds d'un arbre. Quelles sont les tailles de chaque arbre binaire ci-dessus ?
- 2) La **profondeur d'un nœud** est égale à la longueur du chemin reliant la racine de l'arbre à ce nœud, c'est à dire le nombre d'arêtes entre la racine et le nœud.

On suppose la racine de profondeur 0.

- a) Quelle est la profondeur du nœud de valeur 8 dans l'arbre **a** ?
 - b) Quelle est la profondeur du nœud de valeur A dans l'arbre **b** ?
- 3) Le **niveau d'un nœud** est l'ensemble des nœuds de l'arbre de même profondeur.
 - a) Quel est le niveau du nœud de valeur 8 dans l'arbre **a** ?
 - b) Quels sont les nœuds de niveau 2 dans l'arbre **b** ?
 - 4) La **hauteur** de l'arbre est la profondeur maximale d'une de ses feuilles.
Donner la hauteur de chaque arbre.
 - 5) La **hauteur d'un nœud** est la hauteur du sous-arbre dont ce nœud est la racine.
Quelle est la hauteur du nœud de valeur 6 et la hauteur du nœud de valeur T ?

3 Des mesures encadrées

Dans cette partie, on laisse de côté nos 2 arbres **a** et **b**. On va représenter des arbres binaires répondant à certaines caractéristiques. Les valeurs n'ont pas d'importance ici et peuvent être choisies au hasard.

- 1) Représenter dans chaque cas un arbre binaire de taille $n = 6$ tel que :
 - a) sa hauteur est $h = 3$
 - b) de hauteur maximale
 - c) de hauteur minimale
- 2) On suppose la taille n de l'arbre fixée.
 - a) Quelle est la hauteur maximale de l'arbre ? On précisera la forme de l'arbre dans ce cas.
 - b) Quelle est la hauteur minimale de l'arbre ? On précisera la forme de l'arbre dans ce cas.
 - c) En déduire un encadrement de la hauteur h de l'arbre en fonction de la taille n .
- 3) Représenter dans chaque cas un arbre binaire de hauteur $h = 3$ tel que :
 - a) sa taille est $n = 5$
 - b) de taille maximale
 - c) de taille minimale
- 4) On suppose la hauteur h de l'arbre fixée.
 - a) Quelle est la taille minimale de l'arbre ? On précisera la forme de l'arbre dans ce cas.
 - b) Quelle est la taille maximale de l'arbre ? On précisera la forme de l'arbre dans ce cas.
 - c) En déduire un encadrement de la taille n de l'arbre en fonction de la hauteur h .
- 5)
 - a) Quelles sont les tailles possibles pour un arbre de hauteur $h = 8$?
 - b) Quelles sont les hauteurs possibles pour un arbre de taille $n = 25$?

4 Structure récursive d'un arbre binaire

La structure hiérarchique d'un arbre binaire est récursive :

- **cas de base** : un nœud unique r ne possédant pas de fils ;
- **récurrence** : un nœud racine avec au moins un sous-arbre non vide, sous-arbre gauche et/ou sous-arbre droit.

On convient de noter ces arbres en respectant les règles suivantes :

- un arbre est noté : nœud(valeur, arbre gauche, arbre droit)
- un arbre vide est noté : \emptyset ou None
- une feuille est notée : nœud(valeur, \emptyset , \emptyset) ou nœud(valeur)

- 1) Quels sont les nœuds de l'arbre correspondant au cas de base de la définition récursive ?
- 2) Donner la notation récursive de l'arbre **a**.
- 3) Donner la notation récursive de l'arbre **b**.
- 4) Représenter l'arbre binaire dont on donne la définition récursive suivante :
nœud(7, nœud(9, nœud(1), nœud(2)), nœud(4, nœud(6), nœud(5 , nœud(8), nœud(3))))

5 Arbres binaires en Python

L'arbre binaire n'est pas une structure de donnée native en Python. Comment représenter, construire une telle structure de donnée ? Proposer des pistes de réflexion et les appliquer aux deux arbres proposés en début d'activité.