

Structure de données

GRAPHES

Yannick CHISTEL

Lycée Dumont d'Urville - CAEN

6 avril 2021

Définitions

Un **graphe** est un ensemble de **sommets** reliés par des **arcs** ou des arêtes.

Deux sommets reliés par un arc sont **adjacents**.

On appelle **chemin** un sous ensemble de sommets reliés par des arcs.

Lorsque les arcs sont munis d'un **sens** de parcours, on dit que le graphe est **orienté**.

Lorsque les arcs sont munis d'un **poids** (valeur numérique), on dit que le graphe est **pondéré**.

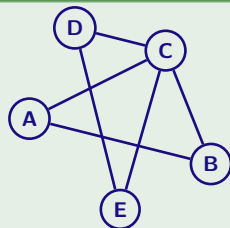
Exemple

Le **graphe G** ci-contre est constitué des sommets A, B, C, D, E .

Les sommets sont reliés par des arcs ; il y en a 7.

Le sommet A est relié aux sommets B et C . On dit que A est **adjacent** aux sommets B et C .

Les sommets A et E sont reliés par le chemin $A - C - E$.



Définition

Soit G un graphe possédant n sommets.

La **matrice d'adjacence** d'un graphe G est un tableau carré de dimension n défini par :

- Chaque ligne et chaque colonne représente un sommet ;
- Si deux sommets sont adjacents, la valeur à l'intersection des lignes et des colonnes représentant les sommets est égale à 1 ;
- Lorsque les sommets ne sont pas adjacents, la valeur à l'intersection des colonnes et des lignes représentant les sommets est égale à 0.
- La matrice est notée entre 2 parenthèses englobant toutes les lignes.

Un graphe peut être défini par sa matrice d'adjacence.

Si le graphe n'est pas orienté, la matrice est symétrique par rapport à sa diagonale.

Exemple

La matrice d'adjacence du graphe G ci-contre est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

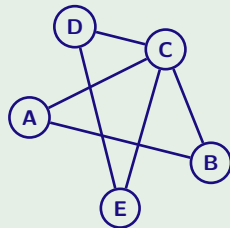
La matrice est de dimension 5 puisque le graphe a 5 sommets ;

La première ligne et la première colonne représente le sommet A ;

La seconde ligne et la seconde colonne représente le sommet B ;
etc.

Les sommets A et B sont adjacents :

- La matrice contient la valeur 1 à l'intersection de la première ligne (A) et de la deuxième colonne (B).
- La matrice contient la valeur 1 à l'intersection de la deuxième ligne (B) et de la première colonne (A).



Interface d'un graphe

Définition

L'interface d'un graphe peut varier selon les besoins. On peut définir un graphe :

- Soit par sa matrice d'adjacence composée de valeurs booléennes (**True**, **False** ou 0, 1) ;
- Soit par un dictionnaire d'adjacence contenant les sommets en **clefs** et les sommets adjacents comme **valeurs**.

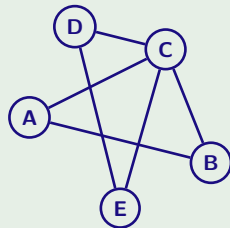
Exemple

On reprend le graphe G ci-contre :

- ① On peut représenter ce graphe par sa matrice d'adjacence :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- ② On peut le représenter par un dictionnaire d'adjacence :

$$G = \begin{cases} "A" : \{ "B", "C" \}, \\ "B" : \{ "A", "C" \}, \\ "C" : \{ "A", "B", "D", "E" \}, \\ "D" : \{ "C", "E" \}, \\ "E" : \{ "C", "D" \} \end{cases}$$


Méthodes, fonctions de l'interface

Lorsque la structure est choisie, les méthodes ou fonctions qui s'appliquent doivent permettre :

- 1 d'ajouter un sommet au graphe ;
- 2 d'ajouter des arcs entre les sommets du graphe ;
- 3 de vérifier si un sommet appartient au graphe ;
- 4 de vérifier si arc entre deux sommets existe ;
- 5 de renvoyer la liste des voisins adjacents à un sommet ;

D'autres méthodes ou fonctions pourront s'ajouter à l'interface, comme par exemple :

- 1 de supprimer un sommet au graphe ;
- 2 de supprimer des arcs entre les sommets du graphe ;
- 3 de renvoyer le nombre de sommets du graphe ;
- 4 de renvoyer le nombre d'arcs du graphe ;
- 5 de représenter, afficher un graphe sous une forme bien définie.

Type de donnée

L'implémentation en Python dépend du choix : matriciel ou dictionnaire.
On peut construire une **classe** dans chaque cas avec des attributs différents selon la représentation :

- 1 Dans une représentation de la matrice d'adjacence, les valeurs de la matrice peuvent être réunies dans une liste Python ;
- 2 Dans un dictionnaire d'adjacence, les clefs seront les sommets du graphe et les sommets adjacents seront rassemblés dans un ensemble de type **set** en Python.