

## 关于切换系统的一个例子

孙振东 郑大钟

(清华大学自动化系, 北京 100084)

**摘要** 对切换线性系统, 本文给出一个例子, 该系统在任意给定的初始点及切换策略下其状态轨线均渐近稳定, 但它不是一致指数稳定的. 本文的工作表明, 一些最简单的切换系统也可以表现出复杂的系统行为.

**关键词** 切换线性系统, 一致指数稳定, 一致渐近稳定.

### 1 引言

考虑切换线性系统

$$\dot{x}(t) = A_{\alpha(x,t)}x(t), \quad (1)$$

这里  $x \in \mathbb{R}^n$ , 切换策略(函数)  $\alpha(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ ,  $\alpha(x, \cdot)$  是左连续的.

定义时间序列

$$t_0 = 0, t_i = \inf\{t : t > t_{i-1}, \alpha(\cdot, t^-) \neq \alpha(\cdot, t)\}, i = 1, 2, \dots,$$

$\{t_i\}$  称为系统的切换点. 为避免抖动, 我们要求  $T_{min}^{\alpha} = \inf\{t_i - t_{i-1}\} > 0$ .

切换线性系统(1)由连续时间过程和离散时间切换事件及其相互作用所组成的复杂动态系统, 是一类特定的混杂系统. 切换系统可以看作是多模型系统或变结构系统的推广, 这类系统有着广泛的工程背景, 参见文献[1-3].

本文讨论系统(1)在所有切换策略下均稳定所需满足的条件. 这个问题除了其自身的理论背景和应用价值外, 还与时变系统的稳定性问题密切相关: 若系统(1)在任意切换策略下一致指数稳定, 则时变系统

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad A(t) \in co(A_1, \dots, A_m)$$

亦一致指数稳定. 其中  $co(A_1, \dots, A_m)$  是  $A_1, \dots, A_m$  的凸闭包.

对系统(1), 可定义多种稳定性. 这里我们感兴趣的是一致渐近稳定和一致指数稳定. 为明晰起见, 这里给出具体定义.

定义1. 系统(1)称为是一致渐近稳定的, 若对任给的初始值  $x(0) = x_0$  及任意切换策略  $\alpha(x, t)$ , 均有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

定义 2. 系统 (1) 称为是一致指数稳定的, 若存在正数  $c$  及  $\lambda$ , 对任给的初始值  $x(0) = x_0$  及任意切换策略  $\alpha(x, t)$ , 均有

$$\|x(t)\| \leq ce^{-\lambda t} \|x_0\|, \quad t > 0.$$

Martin 和 Dayawansa [4] 证明, 系统 (1) 是一致指数稳定的充要条件是矩阵  $A_1, \dots, A_m$  存在共同的 Lyapunov 函数. 该文指出, 对系统 (1), 一个尚未解决的基本的问题是: 一致渐近稳定与一致指数稳定是等价的吗? 本文将致力于解答这个问题.

## 2 主要结果

考虑系统

$$\dot{x}(t) = A_{\alpha(x,t)} x(t), \quad (2)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

下面我们将证明, 系统 (2) 一致渐近稳定, 但非一致指数稳定. 为此, 先给出一个引理.

引理 1. 设系统 (1) 一致指数稳定, 则矩阵集  $co(A_1, \dots, A_m)$  中每个元素均渐近稳定.

证明. 由文献 [4], 矩阵  $A_1, \dots, A_m$  存在一个共同的 Lyapunov 函数  $V(x)$ . 任取  $B \in co(A_1, \dots, A_m)$ , 易知  $V(x)$  亦是矩阵  $B$  的 Lyapunov 函数.

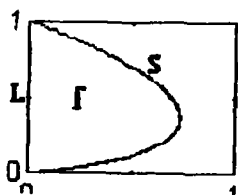
注意到  $A_1 + A_2$  稳定但非渐近稳定. 由引理 1, 系统 (2) 不是一致指数稳定的.

为证系统 (2) 一致渐近稳定, 可根据初始状态的位置分情形讨论. 为简单计, 不妨假定初始时间  $t_0 = 0$ .

情形 1.  $x(0)$  在开的第一象限. 即  $x_{i0} = x_i(0) > 0, i = 1, 2$ . 取  $\bar{x}_{10} = 0, \bar{x}_{20} = e^{\frac{x_{10}}{2x_{20}}} x_{20}$ . 考虑平面闭区域  $\Gamma$  (见下图). 其边界由闭线段  $L$  (端点为  $(0, 0)$  及  $(0, \bar{x}_{20})$ ) 及开曲线  $S$  构成, 其中  $S$  由参数方程

$$\begin{cases} x_1(t) = 2te^{-t}\bar{x}_{20} \\ x_2(t) = e^{-t}\bar{x}_{20} \end{cases} \quad 0 < t < +\infty$$

确定.



因矩阵  $A_1$  稳定,  $\Gamma$  是紧集. 注意到若  $y_0 \in \Gamma$ , 则方程  $\dot{x} = A_1 x$ ,  $x(0) = y_0$  的解的轨迹 ( $t \geq 0$ ) 仍在  $\Gamma$  上. 下面证明,  $\forall y_0 \in \Gamma$ , 方程  $\dot{x} = A_2 x$ ,  $x(0) = y_0$  解的轨迹  $x(t)$ ,  $t \geq 0$  仍在  $\Gamma$  上. 为此, 只需考虑  $y_0 \in S$  的情形. 此时, 存在  $t_1 > 0$ , 使得

$$\begin{cases} y_{10} = 2t_1 e^{-t_1} \bar{x}_{20} \\ y_{20} = e^{-t_1} \bar{x}_{20} \end{cases}$$

于是有

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t_1 e^{-(t_1+t)} \bar{x}_{20} \\ (1+4t_1 t) e^{-(t_1+t)} \bar{x}_{20} \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

固定  $t > 0$ . 设通过原点及  $x(t)$  的直线与曲线  $S$  的交点为  $\hat{x}$  (易知此交点一定存在). 于是存在  $t_3 > 0$ , 使得

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = 2t_3 e^{-t_3} \bar{x}_{20} \\ \hat{x}_2 = e^{-t_3} \bar{x}_{20} \end{cases}$$

由  $\frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1} = \frac{x_2(t)}{x_1(t)}$ , 得  $t_3 = \frac{t_1}{1+4t_1 t}$ . 进而有

$$\frac{\hat{x}_1}{x_1(t)} = e^{t+t_1-t_3} \frac{t_3}{t_1}. \quad (3)$$

简单的计算表明, 当  $t_1 > \frac{1}{2}$ ,  $t_3 = \frac{1}{2}$ ,  $t = \frac{2t_1-1}{4t_1}$  时式 (3) (视为  $t$  的函数) 达到最小, 其最小值为  $r_{\min} = \frac{1}{2t_1} e^{t_1 - \frac{1}{4t_1}}$ . 而当  $t_1 = \frac{1}{2}$  时  $r_{\min}$  达到最小值 1. 因此, 当  $t > 0$  时, 有  $\hat{x}_1 > x_1(t)$ , 即  $x(t)$  是集  $\Gamma$  的内点.

上述分析表明, 在任何切换策略下, 系统 (2) 的轨迹始终在  $\Gamma$  上. 给定切换函数  $\alpha(\cdot, \cdot)$ , 令  $\tau = \min\{0.4, T_{\min}^{\alpha}\}$ . 定义  $\Gamma_r = r\Gamma = \{rx : x \in \Gamma\}$ ,  $r > 0$ . 注意到若系统切换次数是有限的, 则由  $A_1, A_2$  渐近稳定, 可知  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ . 因此我们只需考虑无穷次切换的情形. 设系统在  $t_i$  点由子系统  $\dot{x} = A_1 x$  切换到子系统  $\dot{x} = A_2 x$  直至  $t_{i+1}$  点. 即  $\alpha(x(t), t) = 1, t < t_i$ ,  $\alpha(x, t) = 2, t_i \leq t < t_{i+1}$ ,  $\alpha(x, t_{i+1}) = 1$ . 因为  $t_{i+1} - t_i \geq \tau$ , 前面的分析表明, 若  $x(t_i) \in \Gamma_r$ , 则  $x(t_{i+1}) \in \Gamma_{\frac{r}{\beta}}$ , 这里

$$\beta = (1 - 2\tau) \exp\left(\frac{1}{2 - 4\tau} - \frac{1}{2}(1 - 2\tau)\right) > 1.$$

由于切换是无穷次的, 因此有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) \in \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta^n} \Gamma = \{0\}.$$

系统一致渐近稳定.

当  $x_0$  在正  $x_1$  轴或正  $x_2$  轴上时, 系统轨线要么沿着坐标轴趋于原点, 要么通过切换进入开的第一象限, 因此可归入上述已讨论的情形.

当  $x_0$  在闭的第三象限时, 在相同的切换函数下, 系统轨迹与初始点为  $-x_0$  (在第一象限) 的系统轨线原点对称, 故而渐近稳定.

情形 2.  $x(0)$  在开的第二象限. 即  $x_1(0) < 0, x_2(0) > 0$ . 在此情形下, 系统轨线要么进入闭的第一象限或闭的第四象限, 要么始终保持在开的第二象限. 由情形 1, 这里仅需考虑后一种可能. 此时, 若  $\alpha(x, t) = 1, t_1 \leq t < t_2$ , 则有

$$0 > x_1(t) = e^{t-t_1}(x_1(t_1) + 2(t-t_1)x_2(t_1)) > e^{t-t_1}x_1(t_1), \quad t_1 \leq t < t_2.$$

由此可知

$$\|x(t)\| \leq e^{-(t-t_1)}\|x(t_1)\|, \quad t_1 \leq t < t_2. \quad (4)$$

类似地, 若  $\alpha(x, t) = 2, t_1 \leq t < t_2$ , (4) 亦成立. 因此,

$$\|x(t)\| \leq e^{-t}\|x_0\|, \quad t \geq 0.$$

系统轨迹指数稳定.

当  $x_0$  在开的第四象限时, 在相同的切换函数下, 系统轨迹与初始点为  $-x_0$  (在第二象限) 的系统轨线原点对称, 故而渐近稳定.

以上我们证明了系统 (2) 一致渐近稳定.

### 3 结束语

本文给出一个例子, 表明对切换线性系统, 一致渐近稳定性不蕴含一致指数稳定性, 从而回答了文 [4] 中提出的一个开问题.

已有的研究表明, 一些形式相当简单的切换线性系统表现出相当复杂的动态行为. 如果再加入控制项, 系统的动态行为更丰富. 判断这类系统的稳定性或反馈镇定是当前挑战性的课题.

## 参考文献

- [1] Dogruel, M., Ozguner, U., Modeling and stability issues in hybrid systems, In: *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 999, Springer, Berlin, 1995, pp. 148–165.
- [2] Chase, C., Serrano, J., Ramadge, P. J., Periodicity and chaos from switched flow systems: contrasting examples of discretely controlled continuous systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **38**, 70–83, 1993.
- [3] Branicky, M. S., Stability of switched and hybrid systems, In: *Proc. 33rd IEEE CDC*, 1994, pp. 3498–3503.
- [4] Martin, C. F., Dayawansa, W. P., On the existence of a Lyapunov function for a family of switching systems, In: *Proc. 35th IEEE CDC*, 1996, pp. 1820–1823.