



浙江工业大学

硕士学位论文

基于策略迭代的马尔可夫跳变系统的最优跟踪控制

作者姓名

指导教师

学科专业

控制科学与工程

学位类型

工学硕士

培养类别

全日制学术型硕士

所在学院

信息工程学院

提交日期:

2024 年 月

Policy Iteration Based Optimal Tracking Control for Markov Jump Systems

Dissertation Submitted to
Zhejiang University of Technology
in partial fulfillment of the requirement
for the degree of
Master of Engineering



by

Dissertation Supervisor:

浙江工业大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所提交的学位论文是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的研究成果。除文中已经加以标注引用的内容外，本论文不包含其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果，也不含为获得浙江工业大学或其它教育机构的学位证书而使用过的材料。对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人承担本声明的法律责任。

作者签名：

日期： 2024 年 月

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权浙江工业大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于： 1、保密☐，在一年解密后适用本授权书。

2、保密☐，在二年解密后适用本授权书。

3、保密☐，在三年解密后适用本授权书。

4、不保密☐.

(请在以上相应方框内打“√”)

作者签名：

日期： 2024 年 月

导师签名：

日期： 2024 年 月

中图分类号 TP390

学校代码 10337

UDC 004

密级 公开

研究生类别 全日制学术型硕士研究生



浙江工业大学

硕士学位论文

基于策略迭代的马尔可夫跳变系统的最优跟踪控制

Policy Iteration Based Optimal Tracking Control for Markov
Jump Systems

作者姓名

第一导师

学位类型 工学硕士

第二导师

学科专业 控制科学与工程

培养单位 信息工程学院

研究方向 马尔可夫跳变系统跟踪控制

答辩日期: 2024 年 月 日

基于策略迭代的马尔可夫跳变系统的最优跟踪控制

摘 要

马尔可夫跳变系统(Markov Jump System, MJS)同时具备马尔可夫过程和切换系统的特征, 其模态切换服从于马尔可夫过程, 在刻画具有元器件损坏、网络传输延迟、功率切换等结构或参数突变的随机系统时具有突出优势。与此同时, 最优跟踪控制通过设计给定性能指标下的最优跟踪控制器, 从而可实现系统状态或输出与目标信号的一致性, 被广泛应用于无人机编队、雷达追踪等领域, 成为备受关注的研究热点。

然而, MJS 的最优跟踪控制研究仍面临两个关键挑战: 其一, 参考系统的不稳定性将导致无限时域下二次型性能指标无法收敛, 使得最优控制问题无解; 其二, MJS 的最优跟踪控制问题对应的 Riccati 方程求解依赖于模态转移概率, 但转移概率通常难以准确获取导致最优控制问题难以求解。为此, 本文将针对参考系统不稳定、转移概率未知等难点, 研究无限时域下的 MJS 最优跟踪控制问题, 主要工作和创新点如下:

(1) 针对 MJS 的最优线性二次型跟踪控制问题, 基于被控系统与参考系统构造跟踪误差系统, 设计无限时域下的二次型性能指标, 通过引入衰减因子解决了参考系统不稳定时二次型性能指标无法收敛的问题, 进而通过动态规划得到耦合代数 Riccati 方程及线性二次型跟踪控制器, 并分析了耦合代数 Riccati 方程镇定解的存在性与闭环系统的稳定性。此外, 针对耦合代数 Riccati 方程难以获得解析解的问题, 基于策略迭代方法, 设计转移概率已知时耦合代数 Riccati 方程的迭代求解算法, 利用镇定控制器进行迭代实现算法的二次收敛, 并给出了算法的收敛性证明。进一步考虑转移概率未知的情况, 挖掘系统模态序列中所蕴含的转移概率信息, 迭代求解最优控制器。直流电机的仿真实验验证了所提方法的有效性。

(2) 针对受扰情况下 MJS 的 H_∞ 最优跟踪控制问题, 设计 H_∞ 滤波器解决了系统状态无法直接测量的问题。针对 H_∞ 滤波与 H_∞ 跟踪控制问题, 基于博弈论思想设计滤波误差系统与跟踪误差系统的二次型性能指标, 并分别建立估计问题与控制问题的博弈耦合代数 Riccati 方程。在此基础上, 利用能镇定性和可探测性导出博弈耦合代数 Riccati 方程镇定解存在的充要条件, 并利用 Lyapunov 方程给出闭环系统的稳定性判定条件。进一步设计了转移概率已知与未知时博弈耦合代数 Riccati 方程的迭代求解算法, 在策略迭代框架下使用镇定控制器以及镇

定滤波器迭代求解 Riccati 方程, 利用 Newton-Kantorovich 定理证明转移概率已知时的算法收敛性。直流电机的仿真实验验证了所提方法的有效性。

关键词: 马尔可夫跳变系统, 线性二次型最优跟踪控制, H_∞ 跟踪控制, 策略迭代, 未知转移概率

POLICY ITERATION BASED OPTIMAL TRACKING CONTROL FOR MARKOV JUMP SYSTEMS

ABSTRACT

Markov Jump System (MJS) is characterized by both Markov jumpings and switching system, and its mode switching obeys the Markov process, which is an outstanding advantage when portraying stochastic systems with component damage, network transmission delay, power switching, and other structural or parameter mutations. Meanwhile, optimal tracking control, by designing an optimal tracking controller under given performance indicators, can achieve consistency between the system state or output and the target signal. It is widely used in fields such as unmanned aerial vehicle formation and radar tracking, and has become a hot research topic.

However, the optimal tracking control of MJSs still faces two key challenges. Firstly, the instability of the reference system will cause the quadratic cost to fail to converge in the infinite horizon, which makes the optimal control problem unsolvable. Secondly, the mode transmission probability is usually difficult to be accurately obtained, which makes the optimal control problem be difficult to be solved, since the solution of the Riccati equation corresponding to the optimal tracking control problem of MJSs relies on the mode transmission probability. Consequently, in this paper, the optimal tracking control problem of MJSs under infinite horizon is investigated taking into consideration the unstable reference system and unknown transmission probability. The main works and innovations are as follows:

(1) For the linear quadratic tracking control problem of MJSs, the tracking error system is firstly constructed based on the controlled system and the reference system. The quadratic cost under the infinite horizon is designed, where a decay factor is introduced to solve the problem that the quadratic cost cannot converge when the reference system is unstable. Then a group of coupled algebraic Riccati equations and a linear quadratic tracking controller are obtained through dynamic programming. The existence of the stabilizing solution of the coupled algebraic Riccati equation as well as the stability of the closed-loop system are further analyzed. To address the difficulty in obtaining analytical solutions for the coupled algebraic Riccati equation, an iterative algorithm for solving the coupled algebraic Riccati equation is designed based on the policy iteration method with known transmission probability, which can achieve the quadratic convergence with an initial stabilizing controller. A proof of the convergence

of the algorithm is further presented. Moreover, in the case of completely unknown transmission probability, the optimal controller is solved iteratively by mining the transmission probability information embedded in the system mode sequence. Simulation experiments on a DC motor verify the effectiveness of the proposed method.

(2) For the H_∞ tracking control problem of MJSs disturbed by noises, an H_∞ filter is firstly designed to estimate the system state since it cannot be measured directly. For the H_∞ filtering and H_∞ tracking control problems, quadratic costs of the filtering error system and the tracking error system are both designed based on game theory. Then the game coupled algebraic Riccati equations are established for the estimation problem and control problem, respectively. On this basis, sufficient conditions for the existence of a stabilizing solution of the game coupled algebraic Riccati equation are derived in terms of stabilizability and detectability, and the stability condition of the closed-loop system is also given based on the Lyapunov equation. Furthermore, iterative algorithms for solving the game coupled algebraic Riccati equation are proposed under both cases that transmission probabilities are known or unknown, where the Riccati equations are solved iteratively by using an initial stabilizing controller as well as an initial stabilizing filter under a policy iteration framework. The convergence of the algorithm with known transmission probabilities is further proved by using the Newton-Kantorovich theorem. Finally, the effectiveness of the proposed methods are validated by some simulation experiments on a DC motor.

KEY WORDS: Markov jump system, linear quadratic optimal tracking control, H_∞ tracking control, policy iteration, unknown transmission probability

目 录

摘 要	I
ABSTRACT	III
目 录	V
插图清单	VII
表格清单	VII
符号说明	VIII
第一章 绪 论	1
1.1 课题背景及研究意义	1
1.2 国内外研究现状及趋势	2
1.2.1 马尔可夫跳变系统最优控制	2
1.2.2 马尔可夫跳变系统 H_∞ 控制	3
1.2.3 马尔可夫跳变系统 H_∞ 滤波	4
1.3 本文研究内容	5
1.4 本文组织框架	6
第二章 马尔可夫跳变系统描述及基础知识	8
2.1 引言	8
2.2 系统描述	8
2.3 基本定义与常用引理	9
2.4 总结	11
第三章 无限时域下马尔可夫跳变系统的线性二次型最优跟踪控制	12
3.1 引言	12
3.2 马尔可夫跳变系统的 LQT 控制问题描述	12
3.3 马尔可夫跳变系统的 LQT 控制器设计	14
3.3.1 基于动态规划求解 LQT 控制问题	14
3.3.2 CARE 镇定解的存在性与系统稳定性	17
3.4 基于策略迭代求解 CARE	18
3.4.1 转移概率已知时的 CARE 求解	18
3.4.2 转移概率未知时的 CARE 求解	21
3.5 直流电机仿真	23
3.6 总结	27

第四章 受扰马尔可夫跳变系统的 H_∞ 最优跟踪控制	28
4.1 引言	28
4.2 马尔可夫跳变系统的 H_∞ 跟踪控制问题描述	28
4.3 马尔可夫跳变系统的 H_∞ 跟踪控制器设计	31
4.3.1 基于动态规划求解 H_∞ 跟踪控制问题	31
4.3.2 马尔可夫跳变系统 H_∞ 滤波器设计	35
4.3.3 GCARE 镇定解的存在性与系统稳定性	36
4.4 基于策略迭代求解 GCARE	40
4.4.1 转移概率已知时的 GCARE 求解	40
4.4.2 转移概率未知时的 GCARE 求解	45
4.5 直流电机仿真	46
4.6 总结	53
第五章 总结与展望	54
5.1 总结	54
5.2 展望	54
参考文献	56
致 谢	60
作者简介	61
1 作者简历	61
2 攻读硕士学位期间发表的学术论文	61
3 参与的科研项目及获奖情况	61
4 发明专利	61

插图清单

图 1-1 马尔可夫跳变系统示意图	1
图 1-2 论文结构	7
图 3-1 算法 3.1 解矩阵收敛过程	25
图 3-2 算法 3.1 控制器收敛过程	25
图 3-3 算法 3.2 解矩阵收敛过程	26
图 3-4 算法 3.2 控制器收敛过程	26
图 3-5 LQT 跟踪控制器作用下的跟踪控制过程	27
图 4-1 算法 4.1 解矩阵收敛过程	48
图 4-2 算法 4.1 控制器收敛过程	48
图 4-3 算法 4.2 解矩阵收敛过程	49
图 4-4 算法 4.2 控制器收敛过程	49
图 4-5 基于真实状态的 H_{∞} 跟踪控制过程	50
图 4-6 H_{∞} 滤波器估计误差	52
图 4-7 基于状态估计的 H_{∞} 跟踪控制过程	52

表格清单

表 3-1 Kleinman 算法求解 CARE	20
表 3-2 TD(λ)算法求解 CARE	22
表 3-3 模态参数	23
表 4-1 Kleinman 算法求解 GCARE	44
表 4-2 TD(λ) 算法求解 GCARE	46

符号说明

MJS	——	马尔可夫跳变系统(Markov Jump System);
LQR	——	线性二次型调节器(Linear Quadratic Regulator);
LQT	——	线性二次型跟踪(Linear Quadratic Tracker);
CARE	——	耦合代数 Riccati 方程(Coupled Algebraic Riccatic Equation);
GCARE	——	博弈耦合代数 Riccati 方程(Game Coupled Algebraic Riccatic Equation);
\mathbb{R}^n	——	n 维实欧氏空间;
$\mathbb{R}^{n \times m}$	——	$n \times m$ 维实欧氏空间;
\mathbf{I}	——	合适维度的单位阵;
$\mathbf{0}$	——	合适维度的零矩阵;
$X > \mathbf{0}$	——	对称正定矩阵 X ;
$X \geq \mathbf{0}$	——	对称半正定矩阵 X ;
X^\top	——	矩阵 X 的转置;
X^{-1}	——	矩阵 X 的逆;
$\mathbb{E}\{\cdot\}$	——	数学期望;
$\Pr\{\cdot\}$	——	事件 \cdot 发生的概率;
\triangleq	——	定义为;
$\ \cdot\ $	——	向量或矩阵范数;
$\ x\ _Q^2$	——	$x^\top Qx$;
\otimes	——	克罗内克积;
$r(\cdot)$	——	算子 \cdot 的谱半径;

第一章 绪 论

1.1 课题背景及研究意义

马尔可夫跳变系统(Markov Jump System, MJS)是一种具有多个模态的特殊混杂系统,其同时具备马尔可夫过程和切换系统的特征^[1]。区别于一般切换系统的给定模态切换策略,MJS的模态转移服从于马尔可夫过程^[2],其示意图如图 1-1 所示。因此,在建模具有元器件损坏、网络传输延迟、功率切换等结构或参数突变的随机系统时,马尔可夫跳变模型具有突出优势^[3],已被广泛应用于无人机编队协同作战^[4-5]、雷达追踪^[6]、水下机器人跟踪作业^[7]等工程实践中。不同于一般系统,MJS的控制或滤波问题需要考虑系统模态并处理模态之间的转移关系,特别是当模态转移概率等模型信息未知时,已有的控制或算法将不再适用。因此,MJS的控制或滤波问题极具挑战性,已成为备受关注的研究热点。

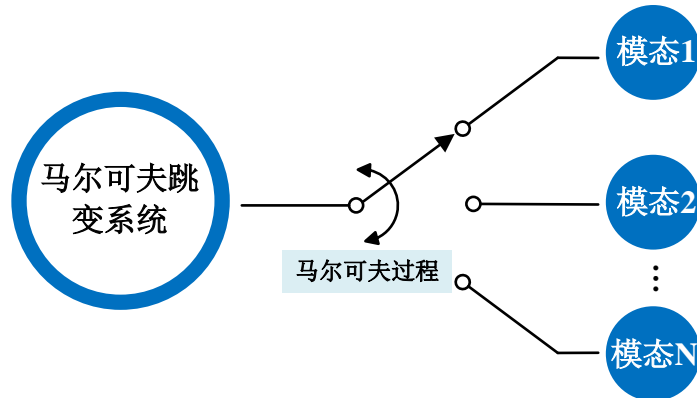


图 1-1 马尔可夫跳变系统示意图

Figure 1-1. Schematic diagram of Markov jump system

线性二次型跟踪(Linear Quadratic Tracker, LQT)控制或 H_∞ 跟踪控制常被用于设计二次型性能指标下的最优跟踪控制器,以使得系统状态或输出实现对参考轨迹的精准跟踪^[8]。然而,实际工程实践中被跟踪系统通常是不稳定的,这意味着无限时域下二次型性能指标可能无法收敛,从而导致最优控制问题无法求解。与此同时,鉴于 MJS 的特殊性,其最优控制问题对应的 Riccati 方程通常不存在解析解,并且没有成熟通用的求解工具,亟需设计数值求解算法。此外,随着被控系统规模的扩大和复杂性的增加,建立精确的数学模型愈发困难^[10]。模态转移概率是 MJS 不可或缺模型信息之一,MJS 的最优控制问题求解往往依赖于模态转移概率等模型信息。一旦系统转移概率未知,已有的 Riccati 方程求解算法将不再适用,因而需要设计转移概率未知下的 Riccati 方程求解算法。在此情形下,如何直

接通过系统运行数据进行控制器或滤波器设计受到控制领域专家学者的广泛关注。综上所述,研究参考系统不稳定、转移概率未知时无限时域下的 MJS 最优跟踪控制问题具有十分重要的理论意义和实践价值。

1.2 国内外研究现状及趋势

在众多专家学者的深入研究下, MJS 的许多基本问题已经得到解决,如稳定性与镇定控制^[11-12],最优控制^[13-14],能控性与能观性分析^[15-16],状态估计^[19-20],参数估计^[21-22],模型降阶^[23-24]等。值得注意的是,巴西学者 Costa 分别针对离散时间和连续时间 MJS 开展了系统性研究^[25-26],国内的张立宪教授基于线性矩阵不等式方法深入研究了转移概率部分未知下 MJS 的控制问题并出版了相关专著^[27]。下面将着重介绍现有 MJS 研究中关于最优控制、 H_∞ 控制、 H_∞ 滤波等问题的研究现状。

1.2.1 马尔可夫跳变系统最优控制

最优控制是现代控制理论与应用中最基本的工具之一。最优控制问题可通过变分法、极大值原理、动态规划等数学方法得到代数 Riccati 方程,从而根据代数 Riccati 方程的解设计出满足预设性能指标的反馈控制器^[28]。如: Swarder^[13]首次研究有限时域下连续 MJS 的线性二次型调节器(Linear Quadratic Regulator, LQR)问题,基于极大值原理导出了耦合代数 Riccati 方程(Coupled Algebraic Riccati Equation, CARE),并提出了适用于 MJS 的模态相关 LQR 控制器。Blair 等^[14]将离散 MJS 的 LQR 问题推广到无限时域下,利用动态规划给出了 CARE 及其 LQR 控制器。虽然文献[13]与[14]给出了 LQR 问题对应的 CARE,但未考虑 CARE 镇定解的存在性问题。Chizeck 等^[15-16]提出了弱能控性与能观性、绝对能控性与能观性的概念,并基于能控性与能观性给出了 CARE 镇定解存在的充要条件。

系统实际运行时可能存在过程噪声、量测噪声、时滞等各种随机因素,进而严重影响系统控制性能。Ji 等^[17]首次研究 MJS 的线性二次型高斯问题,针对系统存在加性高斯白噪声的情况,在有限时域下利用分离原理分别设计最优控制器和最优滤波器,而在无限时域下则给出了稳态控制器和次优滤波器。Costa 等^[18]将结果推广到广义加性白噪声情形下,提出了适用于广义加性白噪声的分离原理并设计出最优控制器和最优滤波器。Matei 等^[29]针对一步时滞下离散 MJS 的最优控制问题,在有限时域下导出了 CARE 以及最优控制器,但在无限时域下仅给出了线性矩阵不等式求解方法,其结果具有一定的保守性。Zhang 等^[30]将一步时滞扩展为有界时变时滞,同时考虑转移概率部分未知情形,进而以线性矩阵不等式的形式给出控制器设计方法。Zabala 等^[31]针对系统状态和控制输入受约束时的

LQR 问题, 利用模态探测器获取模态信息, 并通过线性矩阵不等式求解反馈控制器。

注意到上述最优控制问题求解基于已知转移概率才能实现, 然而受成本或系统本身限制, 完整精确的转移概率通常难以获得。目前, 一种解决思路是估计转移概率, 如: Balenzuela 等^[21]采用期望极小极大算法估计转移概率并用于控制器设计; 而对于具有不确定转移概率分布的非齐次 MJS, Tzortzis 等^[32]引入总变化距离衡量模态转移过程的不确定性, 通过动态规划导出了鲁棒最优控制器。另一种则是引入数据驱动控制方法进行控制器或滤波器设计, 如: Costa 等^[33]利用已有模态序列, 设计了离线 TD(λ)算法求解转移概率完全未知时的 CARE, 并获取按转移概率加权的解矩阵从而实现控制器设计。Beirigo 等^[34]将文献[33]提出的离线求解算法转化为在线求解算法, 实现实时求解, 提高求解效率。随着强化学习的深入研究探索, Lewis 等^[35-36]结合强化学习提出的无模型近似动态规划作为一种数据驱动方法已被应用到 MJS 的理论研究中。Zhang 等^[37]研究参数部分未知及转移概率完全未知时 LQT 问题, 利用积分强化学习求解 CARE 得到 LQT 控制器, 但参数矩阵完全未知的问题仍未解决。Wang 等^[38]针对模糊非线性 MJS, 基于积分强化学习设计系统参数未知的非脆弱输出反馈跟踪控制器求解算法, 求解模糊随机耦合代数 Riccati 方程得到跟踪控制器。

从上述分析可知, 已有的 MJS 最优控制器设计集中在镇定控制上, 对于跟踪控制的研究较少且被跟踪对象都为稳定系统, 具有一定的局限性。与此同时, 大部分工作是基于线性矩阵不等式进行求解, 其控制器的存在性难以保证, 并且具有一定的保守性。因此, 如何在无限时域下跟踪不稳定系统, 基于 Riccati 方程给出解的存在性以及稳定性判据, 并设计转移概率未知时的控制器求解算法具有重要意义。

1.2.2 马尔可夫跳变系统 H_∞ 控制

若系统存在受到噪声干扰时, 可通过线性二次型高斯控制等方法求解控制器。然而, 线性二次型高斯控制依赖于受控对象的数学模型, 其模型摄动鲁棒性较差, 且噪声统计特性未知时难以应用。 H_∞ 控制克服了噪声统计特性未知的难题, 只要扰动信号能量有界, 即可通过频域法、多项式法、状态空间法等手段求解 H_∞ 控制问题得到 H_∞ 控制器, 使得系统具有较好的鲁棒性^[39]。如: Fragoso 等^[40]针对离散 MJS 的 H_∞ 控制问题, 利用动态规划导出了博弈耦合代数 Riccati 方程(Game Coupled Algebraic Riccatic Equation, GCARE)和对应的 H_∞ 控制器, 并给出了 L_2 增益趋于无穷时 GCARE 将退化为 CARE 的理论证明, 但没有解决 GCARE 解的存在性、稳定性以及求解问题。Costa 等^[41]给出了 GCARE 具有唯一镇定解的充要条

件，证明在任意能量有界噪声下闭环系统都满足预设的 L_2 增益，且在最坏噪声下闭环系统随机稳定，同时设计了迭代求解算法用于 GCARE 迭代求解。

在设计 H_∞ 控制器时，除系统噪声扰动等随机因素外，同样需要考虑转移概率未知或具有不确定性的情况。如：Shi 等^[42]针对系统转移概率未知且系统参数具有有界时变不确定性的鲁棒 H_∞ 控制问题，以线性矩阵不等式的形式给出了鲁棒控制器，但结果具有一定的保守性。当转移概率处于有界凸集内时，Costa 等^[43]针对混合 H_2/H_∞ 控制问题，给出了线性矩阵不等式用于求解混合 H_2/H_∞ 控制器，但其建模时只考虑定常噪声增益矩阵，存在一定局限性。Huang 等^[44]进一步将该结果扩展到系统具有多模态噪声增益的情形，研究带有乘性噪声的混合 H_2/H_∞ 控制问题，分别给出了 GCARE 与线性矩阵不等式用于求解混合 H_2/H_∞ 控制器。Luan 等^[45]将转移概率不确定性量化为高斯概率密度函数，利用线性矩阵不等式导出了 H_∞ 控制器存在的充分条件。Fang 等^[48]将潮汐发电机建模为连续 MJS，通过子系统变换将 MJS 解耦，使用积分强化学习求解转移概率和系统动态参数未知时的 GCARE 和 H_∞ 控制器，给出了算法收敛性证明。Chen 等^[46-47]将转移概率未知时在线 CARE 迭代求解算法推广到转移概率未知时 MJS 与半马尔可夫跳变系统的 GCARE 求解中，效果显著。

前述控制方法都在研究镇定控制问题，镇定控制问题实际上可以视为跟踪控制问题的一个特例，显然跟踪控制是更具一般性也更有挑战性的控制问题^[49]。如：Boukas 等^[50]首次研究无限时域下连续 MJS 的 H_∞ 跟踪问题，利用线性矩阵不等式求解 H_∞ 跟踪控制器。Wang 等^[51]研究具有多源不确定性、未知转移概率、未知非线性的严格反馈 MJS 的自适应模糊跟踪问题，在执行器存在不可预测的故障时利用线性矩阵不等式给出了 H_∞ 跟踪控制器。Tian 等^[52]研究参考系统存在未知有界能量输入的 H_∞ 跟踪问题，在模态已知或未知情况下分别利用线性矩阵不等式给出了模态依赖以及模态非依赖的 H_∞ 跟踪控制器。

目前，MJS 的 H_∞ 跟踪控制问题中主要是利用线性矩阵不等式求解 H_∞ 跟踪控制器，控制器的存在性难以保证，此外控制器的控制性能也无法保证是最优的。与此同时，被跟踪对象主要是稳定的自治系统，其问题本身具有一定的局限性。为此，本文拟利用 Riccati 方程设计 H_∞ 跟踪控制器实现对不稳定定常系统的跟踪控制，为 MJS 跟踪控制问题提供新的研究思路。

1.2.3 马尔可夫跳变系统 H_∞ 滤波

前述控制方法都假设系统状态已知，并利用系统状态设计状态反馈控制器。然而，系统状态往往无法精确获取或无法直接测量，解决方法是设计输出反馈控制器^[38]，或设计滤波算法估计系统状态^[19-20]。关于 MJS 的状态估计问题已有大量的理论研究成果，目前主要有卡尔曼滤波和 H_∞ 滤波两类状态估计方法，其中关于

MJS 的卡尔曼滤波在过去十几年间已经被深入讨论研究^[19-20]。 H_∞ 滤波是一种经典的鲁棒状态估计方法，可用于噪声统计特性未知时的 H_∞ 滤波器设计，使得在任意噪声干扰下系统估计误差都满足期望的 L_2 增益^[53]，已被广泛应用于无刷直流电机参数辨识^[54]、锂电池荷电状态估算^[55]等工程实践中。如：Souza 等^[56-57]首次研究 MJS 的 H_∞ 滤波问题，利用线性矩阵不等式分别设计了连续和离散 MJS 的模态相关滤波器。Souza 等^[58]进一步研究系统具有有界参数不确定性的情形，利用线性矩阵不等式设计了鲁棒 H_∞ 滤波器。Xu 等^[59]针对带有有界时变不确定性以及有界时变时滞的 H_∞ 滤波问题，利用线性矩阵不等式给出了鲁棒 H_∞ 滤波器。目标系统与滤波器的模态可能是异步的，针对这种情况，Fang 等^[60]通过隐马尔可夫模型设计异步 H_∞ 滤波器，证明了滤波误差系统在给定的 L_2 增益下是随机稳定的，利用线性矩阵不等式设计了鲁棒异步 H_∞ 滤波器求解算法。

在求解 H_∞ 滤波问题时，同样需要考虑未知转移概率的情形。如：对于系统模态信息未知且转移概率具有多面体不确定性的情况，Souza 等^[61-62]结合模态相关 Lyapunov 函数给出了模态非依赖的鲁棒 H_∞ 滤波器，但转移概率未知的问题仍未解决。Zhang 等^[63]针对转移概率未知的 H_∞ 滤波问题，利用线性矩阵不等式给出了估计误差系统的有界实引理，并设计出模态相关的全阶滤波器，此外给出了 H_∞ 滤波器的存在性定理。Li 等^[64]针对转移概率部分未知的 H_2 和 H_∞ 滤波，引入额外矩阵变量使 Lyapunov 矩阵与滤波器参数解耦，利用线性矩阵不等式给出了滤波器求解算法，从而降低滤波器保守性，提高计算速度。Oliveira 等^[65-66]针对转移概率和检测器的检测概率未知的情形，进行系统模态信息估计，利用线性矩阵不等式给出了 H_∞ 滤波器以及混合 H_2/H_∞ 滤波器存在的充要条件。Li 等^[67]针对转移概率部分未知以及模态信息部分未知的情形，引入隐马尔可夫模型用于设计隐马尔可夫 H_∞ 滤波器，利用隐马尔可夫和 Lyapunov 函数给出了 L_2 增益的性能分析，通过线性矩阵不等式给出了隐马尔可夫 H_∞ 滤波器设计算法。

综上所述，目前 MJS 的 H_∞ 滤波问题研究已经较为深入，但大部分求解方法都是基于线性矩阵不等式，利用 Riccati 方程进行滤波问题求解仍未得到很好的解决。为此，本文拟利用 Riccati 方程进行 H_∞ 滤波器求解，设计转移概率未知的 H_∞ 滤波器求解算法。

1.3 本文研究内容

通过查阅国内外相关文献，深入分析 MJS 的 LQT 控制、 H_∞ 控制、 H_∞ 滤波等控制估计方法，进而根据 MJS 的跟踪控制现状和亟需解决的问题，本文将主要研

究无限时域下离散 MJS 中存在未知转移概率的不稳定系统跟踪控制问题。为此，本文主要研究内容如下：

(1) 针对 MJS 的 LQT 控制问题，首先，基于被控系统与参考系统构造跟踪误差系统，引入衰减因子确保无限时域下 LQT 问题的二次型性能指标可收敛，进而保证最优控制问题可解，从而实现对不稳定系统的跟踪控制。然后，将二次型性能指标转化为极小化问题，通过动态规划求解极小化问题得到 CARE 及 LQT 控制器，进而导出 CARE 镇定解的存在性与线性二次型跟踪控制器作用下闭环系统的稳定性判定。在此基础上，利用策略迭代与初始镇定控制器，设计转移概率已知与未知下 CARE 迭代求解算法，并给出算法的收敛性证明。最后，通过数值仿真验证所提方法的有效性；

(2) 针对受扰情况下 MJS 的 H_∞ 跟踪控制问题，首先设计 H_∞ 滤波器估计被控系统与参考系统的系统状态用于状态反馈控制。其次，构造滤波误差系统与跟踪误差系统并引入衰减因子设计二次型性能指标，确保二次型性能指标可收敛。再次，将二次型性能指标转化为极小极大问题，进而求解极小极大问题得到 GCARE。然后，基于能镇定性和可探测性导出 GCARE 镇定解存在的充要条件，并利用 Lyapunov 方程分析 H_∞ 滤波器和 H_∞ 跟踪控制器作用下闭环系统的稳定性。进一步，利用策略迭代与初始镇定控制器，设计转移概率已知与未知下 GCARE 迭代求解算法，并给出了算法的收敛性证明。最后，利用仿真实验验证所提方法的有效性。

1.4 本文组织框架

本文主要研究无限时域下离散 MJS 中存在未知转移概率的不稳定系统跟踪控制问题，论文结构如图 1-2 所示。

本文第一章为绪论，介绍本文的研究背景及研究意义，总结 MJS 最优控制的研究现状，概述本文主要研究内容并介绍本文的组织结构。第二章介绍 MJS 的基本理论，给出研究对象和研究问题，为后续工作提供知识基础。第三章研究无限时域下 MJS 的 LQT 问题，给出了 CARE 镇定解的存在性与 LQT 控制器作用下闭环系统的稳定性证明，设计转移概率已知与未知下的 CARE 迭代求解算法。第四章在第二章的基础上引入噪声扰动，针对无限时域下 MJS 的 H_∞ 跟踪控制问题，给出 GCARE 镇定解存在的充要条件，导出 H_∞ 跟踪控制器和 H_∞ 滤波器作用下闭环系统的稳定性证明，并设计转移概率已知或未知下的 GCARE 迭代求解算法。第五章对全文研究工作和研究成果进行总结，并指出有待进一步研究的问题。

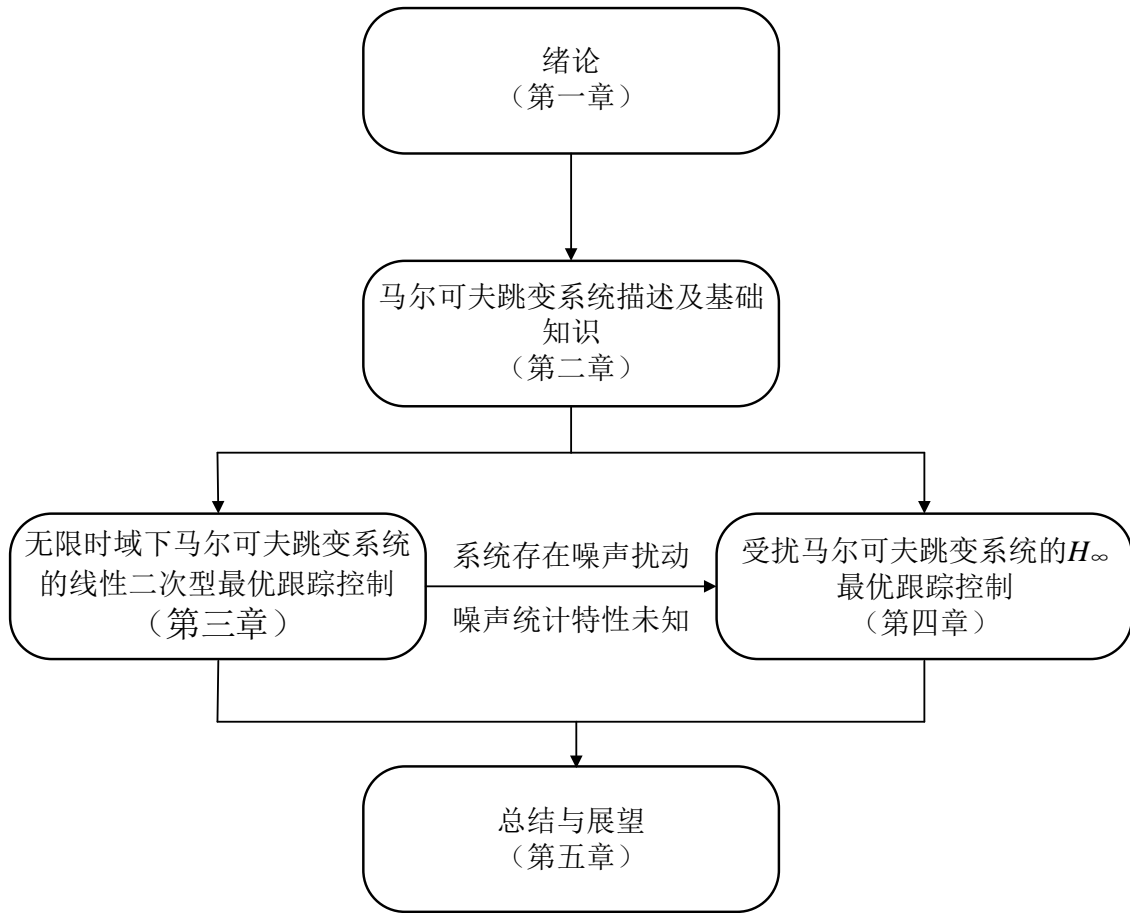


图 1-2 论文结构

Figure 1-2. The organization chart of this dissertation

第二章 马尔可夫跳变系统描述及基础知识

2.1 引言

本章将给出无限时域下 MJS 跟踪控制问题框架，包括被控系统和参考系统等研究对象。同时，介绍 MJS 的基本理论和常用定理引理，如 MJS 的随机稳定性、 L_2 增益、Fréchet 导数、Gâteaux 导数、稳定性判据、CARE 镇定解、Newton-Kantorovich 定理等，便于后续研究。

2.2 系统描述

本文研究对象为离散时间 MJS，其状态空间方程为：

$$\mathcal{M}_{op} = \begin{cases} x_{k+1} = A_{\varpi_k} x_k + B_{\varpi_k} u_k + F_{\varpi_k} w_k \\ y_k = E_{\varpi_k} x_k + G_{\varpi_k} w_k \\ z_k = C_{\varpi_k} x_k + D_{\varpi_k} u_k + H_{\varpi_k} w_k \end{cases} \quad (2-1)$$

其中， $x_k \in \mathbb{R}^n$ 为被控系统状态， $u_k \in \mathbb{R}^m$ 为被控系统控制输入， $w_k \in \mathbb{R}^p$ 为被控系统扰动噪声， $y_k \in \mathbb{R}^l$ 为被控系统量测输出， $z_k \in \mathbb{R}^q$ 为被控系统控制输出。 $\{\varpi_k, k \geq 0\}$ 是一个在有限集合 $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ 内取值的离散马尔可夫过程，用于描述系统模态转移，其模态转移服从以下条件概率：

$$\Pr\{\varpi_{k+1} = j | \varpi_k = i\} = \pi_{ij} \quad (2-2)$$

对于任意的 $i, j \in \mathcal{N}$ ，有 $0 \leq \pi_{ij} \leq 1$ 且 $\sum_{j=1}^N \pi_{ij} = 1$ ，可定义转移概率矩阵为：

$$\Pi \triangleq \begin{bmatrix} \pi_{11} & \cdots & \pi_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{N1} & \cdots & \pi_{NN} \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

当系统模态 $\varpi_k = i$ 时，定义模态依赖矩阵为 $(\cdot)_i \triangleq (\cdot)_{\varpi_k=i}$ 。 A_i 、 B_i 、 C_i 、 D_i 、 E_i 、 F_i 、 G_i 、 H_i 是合适维度的实矩阵，且 C_i 是行满秩的。此外噪声增益矩阵满足 $G_i G_i^\top > \mathbf{0}$ 以保证 G_i 行满秩，目的是使得量测输出的每一个分量都包含噪声。

注 2.1: 在 MJS(2-1) 中只有一种噪声，即 w_k 作为被控系统扰动噪声包括过程噪声和量测噪声。实际上这种建模形式与系统具有不同测量和过程噪声的情况是等价的。若考虑不同的过程噪声和测量噪声，则 MJS 可建模为：

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_{\varpi_k} x_k + B_{\varpi_k} u_k + F_{\varpi_k} w_k \\ y_k = E_{\varpi_k} x_k + G_{\varpi_k} v_k \\ z_k = C_{\varpi_k} x_k + D_{\varpi_k} u_k + H_{\varpi_k} r_k \end{cases} \quad (2-4)$$

其中, w_k 、 v_k 、 r_k 分别表征过程噪声、量测噪声、输出噪声等不同的系统扰动。

定义增广噪声向量 $\omega_k \triangleq [w_k^\top \ v_k^\top \ r_k^\top]^\top$, 则相应的噪声增益变为 $F_i^{(1)} \triangleq [F_i \ 0 \ 0]$, $G_i^{(1)} \triangleq [0 \ G_i \ 0]$, $H_i^{(1)} \triangleq [0 \ 0 \ H_i]$, 此时(2-4)可等价于:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_{\varpi_k} x_k + B_{\varpi_k} u_k + F_{\varpi_k}^{(1)} \omega_k \\ y_k = E_{\varpi_k} x_k + G_{\varpi_k}^{(1)} \omega_k \\ z_k = C_{\varpi_k} x_k + D_{\varpi_k} u_k + H_{\varpi_k}^{(1)} \omega_k \end{cases} \quad (2-5)$$

注意到, (2-5)与(2-1)为同一个系统。不失一般性, 本文选择(2-1)的形式进行讨论。

本文选取的参考系统为线性定常离散系统, 其状态空间方程为:

$$\mathcal{M}_{ref} = \begin{cases} \hat{x}_{k+1} = \hat{A} \hat{x}_k + \hat{F} \hat{w}_k \\ \hat{y}_k = \hat{E} \hat{x}_k + \hat{G} \hat{w}_k \\ \hat{z}_k = \hat{C} \hat{x}_k \end{cases} \quad (2-6)$$

其中, $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^r$ 为参考系统状态, $\hat{w}_k \in \mathbb{R}^s$ 为参考系统未知随机输入, $\hat{z}_k \in \mathbb{R}^q$ 为参考系统控制输出, $\hat{y}_k \in \mathbb{R}^l$ 为参考系统量测输出。此外, \hat{A} 、 \hat{C} 、 \hat{E} 、 \hat{F} 、 \hat{G} 是已知的实矩阵, 注意到, 不要求 \hat{A} 是稳定矩阵, 即系统(2-6)可能是不稳定系统, 噪声增益矩阵满足 $\hat{G} \hat{G}^\top > 0$, 目的是保证量测输出的每个分量都包含噪声。

2.3 基本定义与常用引理

下面提出一些基本的数学概念以及引理便于后续理论推导。

定义 2.1 (随机稳定)^[25]: 对于马尔可夫跳变系统 \mathcal{M}_{op} , 若 $u_k \equiv 0$ 且 $w_k \equiv 0$ 时, 对于任意的初始状态 (x_0, ϖ_0) 有:

$$\mathbb{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|_2^2 \middle| x_0, \varpi_0 \right\} < \infty \quad (2-7)$$

那么马尔可夫跳变系统 \mathcal{M}_{op} 被称为是随机稳定的。

定义 2.2 (L_2 增益): 对于给定的 $\theta > 0$, 若 $u_k \equiv 0$ 时, 对于任意的能量有界噪声 w_k , 满足:

$$\sup_w \frac{\mathbb{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \|z_k\|_2^2 \middle| x_0 = 0, \varpi_0 \right\}}{\sum_{k=0}^{\infty} \|w_k\|_2^2} \leq \theta^2 \quad (2-8)$$

那么马尔可夫跳变系统 \mathcal{M}_{op} 有小于等于 θ 的 L_2 增益。

定义 2.3 (Fréchet 导数)^[68]: 令 $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{Y}$ 是从线性空间 \mathbb{X} 上的开集 \mathbb{D} 到另一个线性空间 \mathbb{Y} 的映射。对于 $\forall x \in \mathbb{D}$ ，若存在线性有界映射 $g: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ 使得下式成立：

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\|f(x + \Delta x) - f(x) - g(\Delta x)\|}{\|\Delta x\|} = 0 \quad (2-9)$$

其中， $(x + \Delta x)$ 在 x 的邻域内。那么 f 在 x 处是 Fréchet 可微的， g 被称为 f 在 x 处的 Fréchet 导数。

定义 2.4 (Gâteaux 导数)^[68]: 令 $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{Y}$ 是从线性空间 \mathbb{X} 上的开集 \mathbb{D} 到另一个线性空间 \mathbb{Y} 的映射。对于 $\forall x \in \mathbb{D}$ ，若存在线性有界映射 $g: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ 使得下式成立：

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\|f(x + \lambda \Delta x) - f(x) - \lambda g(\Delta x)\|}{\lambda} = 0 \quad (2-10)$$

其中， $(x + \Delta x)$ 在 x 的邻域内。那么 f 在 x 处是 Gâteaux 可微的， g 被称为 f 在 x 处的 Gâteaux 导数。

注 2.2: 若 f 在 x 处是 Fréchet 可微的，则 f 在 x 处也是 Gâteaux 可微的，且 Fréchet 导数和 Gâteaux 导数相等。

引理 2.1^[25]: 马尔可夫跳变系统 \mathcal{M}_{op} 是随机稳定的当且仅当对于任意的半正定矩阵序列 $Q = (Q_1, \dots, Q_N)$ ，下列耦合 Lyapunov 方程存在唯一镇定解 $P = (P_1, \dots, P_N)$ ：

$$A_i^\top \mathcal{E}_i(P) A_i - P_i = -Q_i \quad (2-11)$$

其中， $\mathcal{E}_i(P) = \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j$ ， $P_j \geq 0$ ， $i \in \mathcal{N}$ 。此外，(2-10)的解为：

$$P_i = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_i^k(A, Q) \quad (2-12)$$

其中，算子 $\mathcal{L}_i(A, Q)$ 可以用更一般的形式 $\mathcal{L}_i(\Gamma, \bullet)$ 表示，定义为：

$$\mathcal{L}_i(\Gamma, \bullet) \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{ij} \Gamma_i^\top (\bullet)_j \Gamma_i \quad (2-13)$$

Γ 表示系统闭环矩阵， (\bullet) 表征任意的矩阵序列。

引理 2.2^[25]: 马尔可夫跳变系统 \mathcal{M}_{op} 是随机稳定的当且仅当算子(2-12)的谱半径满足 $r(\mathcal{L}) < 1$ ，其中 Γ 为对应的系统闭环矩阵。

定义 2.5 (CARE)^[25]: 定义 CARE 为：

$$P_i = A_i^\top \mathcal{E}_i(P) A_i + Q_i - A_i^\top \mathcal{E}_i(P) B_i \left(R_i + B_i^\top \mathcal{E}_i(P) B_i \right)^{-1} B_i^\top \mathcal{E}_i(P) A_i \quad (2-14)$$

若 P 满足 CARE(2-14) 且 $r(\mathcal{L}) < 1$, 则称 P 为 CARE(2-8) 的镇定解。算子 $\mathcal{L}_i(\Gamma, \bullet)$ 中 $\Gamma_i = \gamma^{1/2}(\tilde{A}_i + \tilde{B}_i S_{i,u})$, $S_{i,u}$ 为:

$$S_{i,u} = -\left(R_i + \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{B}_i\right)^{-1} \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) A_i \quad (2-15)$$

引理 2.3 (CARE 镇定解存在充要条件)^[25]: CARE(2-14) 存在唯一镇定解当且仅当 (A, B, Π) 能镇定, $(\Pi, (Q)^{1/2}, A)$ 可探测。

注 2.3: 对于 MJS 的能镇定性与可探测性, 文献[25]的 P57 给出了定义以及判定方法。

引理 2.4 (Newton-Kantorovich 定理)^[68]: 令 $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ 是从 Banach 空间 \mathbb{X} 到另一个 Banach 空间 \mathbb{Y} 的映射。令 $x_0 \in \mathbb{X}$, f 在 x_0 处的 Fréchet 导数 $\dot{f}(x_0)$ 存在且可逆, 定义:

$$\begin{cases} \xi_0 \triangleq \|\dot{f}(x_0)^{-1}\| \\ \eta_0 \triangleq \|\dot{f}(x_0)^{-1} f(x_0)\| \\ \mathbb{Z}(x_0, 2\eta_0) \triangleq \{x \in \mathbb{X} : \|x - x_0\| \leq 2\eta_0\} \\ \sigma \triangleq 2 \sup \left\{ \|\dot{f}(x) - \dot{f}(v)\| / \|x - v\| : x, v \in \mathbb{Z}(x_0, 2\eta_0), x \neq v \right\} \\ \rho_0 \triangleq \xi_0 \eta_0 \sigma \end{cases} \quad (2-16)$$

若 f 在 $\mathbb{Z}(x_0, 2\eta_0)$ 内二阶 Fréchet 可微, 且 $0 < \rho_0 \leq 0.5$, 则 f 在 $\mathbb{Z}(x_0, 2\eta_0)$ 存在零点。

定义 $\rho_0^* = (1 - \sqrt{1 - 2\rho_0}) / \rho_0$, 有 $\mathbb{Z}(x_0, \rho_0^* \eta_0) \subset \mathbb{Z}(x_0, 2\eta_0)$, 则始于 x_0 的牛顿迭代:

$$x_{k+1} = x_k - \dot{f}(x_k)^{-1} f(x_k) \quad (2-17)$$

将二次收敛于 f 的零点 x^* , 且 x^* 和牛顿迭代序列 $\{x_0, x_1, \dots\}$ 在空间 $\mathbb{Z}(x_0, \rho_0^* \eta_0)$ 内, 此外 x^* 在 $\mathbb{Z}(x_0, 2\eta_0)$ 内具有唯一解。

2.4 总结

本章构建了无限时域下马尔可夫跳变系统最优跟踪控制问题框架, 介绍被控系统和参考系统的数学模型, 并给出了各参数的定义。与此同时, 介绍了 MJS 的随机稳定性、 L_2 增益、Fréchet 导数、Gâteaux 导数、稳定性判据、CARE 镇定解、Newton-Kantorovich 定理等, 便于后续研究。

第三章 无限时域下马尔可夫跳变系统的线性二次型最优跟踪控制

3.1 引言

目前, 关于 MJS 的 LQT 控制研究集中于跟踪稳定自治系统, 忽视了对不稳定系统的跟踪控制。然而, 参考系统的不稳定性会导致无限时域下二次型性能指标无法收敛, 从而导致 LQT 控制问题无法求解。此外, 与线性矩阵不等式相比, LQT 控制问题对应的 CARE 没有成熟通用的求解工具, 并且通常不存在解析解。特别地, CARE 的求解依赖于系统转移概率, 一旦系统转移概率未知, 已有的 Riccati 方程求解算法将不再适用。

本章研究系统状态可获得时, 无限时域下 MJS 的 LQT 问题。首先在二次型性能指标中引入衰减因子使得二次型性能指标收敛, 保证最优控制问题可解, 实现对不稳定系统的跟踪控制。其次, 将二次型性能指标转化为等价的极小化问题, 利用动态规划递推求解该极小化问题导出 CARE 以及对应的 LQT 控制器。再次, 在给定衰减因子下, 结合衰减跟踪误差系统讨论 CARE 解的存在性以及 LQT 控制器作用下闭环系统的稳定性, 给出 CARE 唯一镇定解存在的充要条件和稳定性证明。然后, 基于策略迭代与初始镇定解, 设计转移概率已知与未知下的 CARE 迭代求解算法, 导出算法的收敛性证明。最后, 在一个受随机故障影响的直流电机模型上对所提算法进行模拟仿真验证。

3.2 马尔可夫跳变系统的 LQT 控制问题描述

针对无限时域下 MJS 的 LQT 跟踪控制问题, 假设状态变量 x_k 和模态变量 ϖ_k 已知, 并令系统噪声为 0, 故无需考虑状态估计问题。基于以上假设, 本章将设计 LQT 跟踪控制器, 使得在控制输入 $u = \{u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots\}$ 的作用下, 被控系统(2-1)的输出 z_k 实现对参考系统(2-6)的输出 \hat{z}_k 的跟踪控制。首先, 定义增广状态 $\tilde{x}_k \triangleq \begin{bmatrix} x_k^\top & \hat{x}_k^\top \end{bmatrix}^\top$ 和跟踪误差 $\tilde{z}_k \triangleq z_k - \hat{z}_k$, 构造跟踪误差系统 $\mathcal{M}_{te}^{(1)}$:

$$\mathcal{M}_{te}^{(1)} = \begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}_{\varpi_k} \tilde{x}_k + \tilde{B}_{\varpi_k} u_k \\ \tilde{z}_k = \tilde{C}_{\varpi_k} \tilde{x}_k + D_{\varpi_k} u_k \end{cases} \quad (3-1)$$

其中,

$$\tilde{A}_i \triangleq \begin{bmatrix} A_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{A} \end{bmatrix} \quad \tilde{B}_i \triangleq \begin{bmatrix} B_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \tilde{C}_i \triangleq [C_i \quad -\hat{C}] \quad (3-2)$$

针对跟踪误差系统(3-1), 假设 k_0 时刻系统模态为 ϖ_{k_0} , 系统状态为 \tilde{x}_{k_0} , 系统控制输入为 u_{k_0} , 设计如下二次型性能指标:

$$\begin{aligned} J(\tilde{x}_{k_0}, u_{k_0}, \varpi_{k_0}) &\triangleq \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma^{k-k_0} \left(\|\tilde{z}_k\|_{Q_{\varpi_k}}^2 + \|u_k\|_{R_{\varpi_k}}^2 \right) \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma^{k-k_0} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ u_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \tilde{C}_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} \tilde{C}_{\varpi_k} & \tilde{C}_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} D_{\varpi_k} \\ D_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} \tilde{C}_{\varpi_k} & D_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} D_{\varpi_k} + R_{\varpi_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ u_k \end{bmatrix} \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma^{k-k_0} \|\chi_k\|_{\Psi_{\varpi_k}^{(1)}}^2 \right\} \end{aligned} \quad (3-3)$$

由于难以保证 D_i 是行满秩的, 故(3-3)中引入加权项 $\sum_{k=k_0}^{\infty} \|u_k\|_{R_{\varpi_k}}^2$ 对控制输入进行约束, 其中 $R_i > \mathbf{0}$ 。注意到, 参考系统的不稳定性会导致加权项 $\sum_{k=k_0}^{\infty} \|u_k\|_{R_{\varpi_k}}^2$ 发散, 因而引入衰减因子 γ 以保证性能指标的收敛和最优控制问题的可解。此外, $Q_i \geq \mathbf{0}$, $\chi_k \triangleq [\tilde{x}_k^\top \quad u_k^\top]^\top$,

$$\Psi_i^{(1)} \triangleq \begin{bmatrix} \Psi_{i1,1}^{(1)} & \Psi_{i1,2}^{(1)} \\ \Psi_{i2,1}^{(1)} & \Psi_{i2,2}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_i^\top Q_i \tilde{C}_i & \tilde{C}_i^\top Q_i D_i \\ D_i^\top Q_i \tilde{C}_i & D_i^\top Q_i D_i + R_i \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3-4)$$

衰减因子 γ 的引入不可避免的影响跟踪性能, 且难以保证跟踪误差 \tilde{z}_k 随时间趋于 0。定义衰减增广状态为 $\bar{x}_k \triangleq \gamma^{k/2} \tilde{x}_k$, 衰减控制输入为 $\bar{u}_k \triangleq \gamma^{k/2} u_k$, 衰减跟踪误差为 $\bar{z}_k \triangleq \gamma^{k/2} \tilde{z}_k$, 得到衰减跟踪误差系统 $\mathcal{M}_{dte}^{(1)}$ 为:

$$\mathcal{M}_{dte}^{(1)} = \begin{cases} \bar{x}_{k+1} = \sqrt{\gamma} (\tilde{A}_{\varpi_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\varpi_k} \bar{u}_k) \\ \bar{z}_k = \tilde{C}_{\varpi_k} \bar{x}_k + D_{\varpi_k} \bar{u}_k \end{cases} \quad (3-5)$$

定义 $\bar{\chi}_k \triangleq [\bar{x}_k^\top \quad \bar{u}_k^\top]^\top$, 将性能指标(3-3)改写为:

$$\begin{aligned} J(\bar{x}_{k_0}, \bar{u}_{k_0}, \varpi_{k_0}) &= \gamma^{-k_0} \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\|\bar{z}_k\|_{Q_{\varpi_k}}^2 + \|\bar{u}_k\|_{R_{\varpi_k}}^2 \right) \right\} \\ &= \gamma^{-k_0} \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\bar{\chi}_k\|_{\Psi_{\varpi_k}^{(1)}}^2 \right\} \end{aligned} \quad (3-6)$$

后续将分析在 LQT 控制器作用下, 衰减跟踪误差系统(3-5)的稳定性以及性能指标(3-6)的实现。

3.3 马尔可夫跳变系统的 LQT 控制器设计

3.3.1 基于动态规划求解 LQT 控制问题

针对二次型性能指标(3-3)，假设 k_0 时刻系统 $\mathcal{M}_{te}^{(1)}$ 状态为 \tilde{x}_{k_0} ，模态为 $\varpi_{k_0} = i$ ，将性能指标(3-3)转化为极小化问题：

$$\begin{aligned} J(\tilde{x}_{k_0}, \varpi_{k_0} = i) &\triangleq \min_u J(\tilde{x}_{k_0}, u_{k_0}, \varpi_{k_0} = i) \\ &= \min_u \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma^{k-k_0} \|\chi_k\|_{\Psi_{\varpi_k}^{(1)}}^2 \right\} \end{aligned} \quad (3-7)$$

定理 3.1 (CARE)^[25]: 极小化问题(3-7)对应的控制律为 $u_k = S_{\varpi_k, u} \tilde{x}_k$ ，LQT 控制器增益 $S_{i, u}$ 为：

$$S_{i, u} = - \left(D_i^\top Q_i D_i + R_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{B}_i \right)^{-1} \left(D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \right) \quad (3-8)$$

其中， P 是 CARE(3-9)的唯一镇定解：

$$\begin{aligned} P_i &= \gamma \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i + \tilde{C}_i^\top Q_i \tilde{C}_i - \left(D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \right)^\top \\ &\quad \times \left(D_i^\top Q_i D_i + R_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{B}_i \right)^{-1} \left(D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \right) \end{aligned} \quad (3-9)$$

证明：由文献[69]可知，若极小化问题(3-7)有解，则 $J(\tilde{x}_k, \varpi_k)$ 可写为关于 \tilde{x}_k 的二次型函数：

$$J(\tilde{x}_k, \varpi_k) = \|\tilde{x}_k\|_{P_{\varpi_k}^{(k)}}^2 \quad (3-10)$$

其中，

$$P^{(k)} = (P_1^{(k)}, \dots, P_N^{(k)}), P_i^{(k)} \geq 0 \quad (3-11)$$

将极小化问题(3-7)转化为递推形式，得到 Bellman 方程为：

$$\begin{aligned} J(\tilde{x}_{k_0}, i) &= \min_u \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma^{k-k_0} \|\chi_k\|_{\Psi_{\varpi_k}^{(1)}}^2 \right\} \\ &= \|\chi_{k_0}\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 + \min_u \gamma \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \gamma^{k-k_0-1} \|\chi_k\|_{\Psi_{\varpi_k}^{(1)}}^2 \right\} \\ &= \|\chi_{k_0}\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 + \gamma \mathbb{E} \left[J(\tilde{x}_{k_0+1}, \varpi_{k_0+1}) \right] \end{aligned} \quad (3-12)$$

考虑 $\mathbb{E}[J(\tilde{x}_{k_0+1}, \varpi_{k_0+1})]$ 的二次型形式并结合系统状态空间方程得：

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\left[J\left(\tilde{x}_{k_0+1}, \varpi_{k_0+1}\right)\right] &= \mathbb{E}\left\{\left\|\tilde{x}_{k_0+1}\right\|_{P_{\varpi_{k_0+1}}^{(k_0+1)}}^2\right\} \\
 &= \sum_{j=1}^N \pi_{ij} \left\|\tilde{A}_i \tilde{x}_{k_0} + \tilde{B}_i u_{k_0}\right\|_{P_j^{(k_0+1)}}^2 \\
 &= \left\|\tilde{A}_i \tilde{x}_{k_0} + \tilde{B}_i u_{k_0}\right\|_{\mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)})}^2 \\
 &= \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ u_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{A}_i & \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{B}_i \\ \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{A}_i & \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{B}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ u_k \end{bmatrix} \\
 &= \left\|\chi_{k_0}\right\|_{\Psi_i^{(2,k_0)}}^2
 \end{aligned} \tag{3-13}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 \Psi_{\varpi_k}^{(2,k)} &\triangleq \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{A}_{\varpi_k} & \tilde{A}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{B}_{\varpi_k} \\ \tilde{B}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{A}_{\varpi_k} & \tilde{B}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{B}_{\varpi_k} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\varpi_k} & \tilde{B}_{\varpi_k} \end{bmatrix}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\varpi_k} & \tilde{B}_{\varpi_k} \end{bmatrix} \\
 &\geq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{3-14}$$

将(3-13)代入(3-12)中, 得到:

$$J\left(\tilde{x}_{k_0}, i\right)=\left\|\chi_{k_0}\right\|_{\Psi_i^{(1)}}^2+\gamma\left\|\chi_{k_0}\right\|_{\Psi_i^{(2,k_0)}}^2=\left\|\chi_{k_0}\right\|_{\Psi_i^{(3,k_0)}}^2 \tag{3-15}$$

其中,

$$\Psi_{\varpi_k}^{(3,k)} \triangleq \Psi_{\varpi_k}^{(1)} + \gamma \Psi_{\varpi_k}^{(2,k)} = \begin{bmatrix} \Psi_{\varpi_k|1,1}^{(3,k)} & \Psi_{\varpi_k|1,2}^{(3,k)} \\ \Psi_{\varpi_k|2,1}^{(3,k)} & \Psi_{\varpi_k|2,2}^{(3,k)} \end{bmatrix} \tag{3-16}$$

以及,

$$\begin{cases} \Psi_{\varpi_k|1,1}^{(3,k)} \triangleq \tilde{C}_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} \tilde{C}_{\varpi_k} + \gamma \tilde{A}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{A}_{\varpi_k} \geq \mathbf{0} \\ \Psi_{\varpi_k|1,2}^{(3,k)} = \left(\Psi_{\varpi_k|2,1}^{(3,k)}\right)^\top \triangleq \tilde{C}_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} D_{\varpi_k} + \gamma \tilde{A}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{B}_{\varpi_k} \\ \Psi_{\varpi_k|2,2}^{(3,k)} \triangleq D_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} D_{\var�_k} + R_{\varpi_k} + \gamma \tilde{B}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{B}_{\varpi_k} > \mathbf{0} \end{cases} \tag{3-17}$$

注意到, 极小化问题(3-7)被转化为仅与 u_{k_0} 有关的无约束优化问题(3-15)。

令 $J(\tilde{x}_{k_0}, i)$ 对 u_{k_0} 偏导数为 0, 求解使得 $J(\tilde{x}_{k_0}, i)$ 最小的 u_{k_0} :

$$\frac{\partial J\left(\tilde{x}_{k_0}, i\right)}{\partial u_{k_0}}=2 \tilde{x}_{k_0}^\top \Psi_{i|1,2}^{(3,k_0)}+2 u_{k_0}^\top \Psi_{i|2,2}^{(3,k_0)}=\mathbf{0} \tag{3-18}$$

其中, $\Psi_{i|2,2}^{(3,k_0)} = D_i^\top Q_i D_i + R_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{B}_i > \mathbf{0}$ 为可逆矩阵, 计算 u_{k_0} 得到:

$$u_{k_0} = -\left(\Psi_{i|2,2}^{(3,k_0)}\right)^{-1} \Psi_{i|2,1}^{(3,k_0)} \tilde{x}_{k_0} = S_{i,u}^{(k_0)} \tilde{x}_{k_0}. \tag{3-19}$$

计算 $J(\tilde{x}_{k_0}, i)$ 对 u_{k_0} 的二阶偏导数得到:

$$\frac{\partial^2 J(\tilde{x}_{k_0}, i)}{\partial u_{k_0}^2} = \Psi_{i|2,2}^{(3,k_0)} > \mathbf{0} \quad (3-20)$$

因此(3-19)求得的 $u_{k_0} = S_{i,u}^{(k_0)} \tilde{x}_{k_0}$ 为极小化问题(3-7)的极小值, $S_{i,u}^{(k_0)}$ 为 k_0 时刻的 LQT 控制器增益。

定义 $S_i^{(k)} \triangleq [I \quad S_{i,u}^{(k)\top}]^\top$, 将 $\chi_k = [\tilde{x}_k^\top \quad u_k^\top]^\top = S_i^{(k)} \tilde{x}_k$ 代入(3-7)中, 可得:

$$J(\tilde{x}_{k_0}, i) = \|\chi_{k_0}\|_{\Psi_i^{(3,k_0)}}^2 = \|S_i^{(k_0)} \tilde{x}_{k_0}\|_{\Psi_i^{(3,k_0)}}^2 \quad (3-21)$$

(3-21)与(3-10)是等价的:

$$\|S_i^{(k_0)} \tilde{x}_{k_0}\|_{\Psi_i^{(3,k_0)}}^2 = \|\tilde{x}_{k_0}\|_{P_i^{(k_0)}}^2 \Leftrightarrow \tilde{x}_{k_0}^\top \left\{ \|S_i^{(k_0)}\|_{\Psi_{\varpi_{k_0}}^{(3,k_0)}}^2 - P_i^{(k_0)} \right\} \tilde{x}_{k_0} = \mathbf{0} \quad (3-22)$$

由于假设的 \tilde{x}_{k_0} 是任意的, 因此(3-22)对任意的 \tilde{x}_{k_0} 都成立, 可得:

$$\|S_i^{(k_0)}\|_{\Psi_{\varpi_{k_0}}^{(3,k_0)}}^2 - P_i^{(k_0)} = \mathbf{0} \quad (3-23)$$

上式为 k_0 时刻的耦合差分 Riccati 方程, 利用相同的推导可以得到对应 $k = k_0, \dots, \infty$ 各个时刻的耦合差分 Riccati 方程。随着 $k \rightarrow \infty$, 解矩阵 $P_i^{(k)}$ 收敛, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} P_i^{(k)} = P_i$, 耦合差分 Riccati 方程将变为 CARE:

$$\|S_i\|_{\Psi_i^{(3)}}^2 - P_i = \mathbf{0} \quad (3-24)$$

此时 LQT 控制器为:

$$u_k = -(\Psi_{\varpi_k|2,2}^{(3)})^{-1} \Psi_{\varpi_k|2,1}^{(3)} \tilde{x}_{k_0} = S_{\varpi_k,u} \tilde{x}_k \quad (3-25)$$

将 $\Psi_{\varpi_k}^{(3,k)} = \Psi_{\varpi_k}^{(1)} + \gamma \Psi_{\varpi_k}^{(2,k)}$ 变为 $\Psi_i^{(3)} = \Psi_i^{(1)} + \gamma \Psi_i^{(2)}$, 并代入(3-24)中可得:

$$\begin{aligned} P_i &= \|S_i\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 + \|S_i\|_{\gamma \Psi_i^{(2)}}^2 \\ &= \|S_i\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 + \gamma [I \quad S_{i,u}^\top] [\tilde{A}_i \quad \tilde{B}_i]^\top E_i(P) [\tilde{A}_i \quad \tilde{B}_i] [I \quad S_{i,u}^\top]^\top \\ &= \gamma \|\tilde{A}_i + \tilde{B}_i S_{i,u}\|_{\mathcal{E}_i(P)}^2 + \|S_i\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 \end{aligned} \quad (3-26)$$

上式为 CARE 的闭环控制器形式, 其中 $\tilde{A}_i + \tilde{B}_i S_{i,u}$ 为跟踪误差系统 $M_{te}^{(1)}$ 引入反馈控制律 $u_k = S_{\varpi_k,u} \tilde{x}_k$ 后的闭环控制器。注意到, (3-26)的结构类似于引理 2.1 中的耦合 Lyapunov 方程, 因此该形式可用于闭环系统的稳定性分析。

将 $S_{i,u}^{(k_0)} = -(\Psi_{i|2,2}^{(3,k_0)})^{-1} \Psi_{i|2,1}^{(3,k_0)}$ 变为 $S_{i,u} = -(\Psi_{i|2,2}^{(3)})^{-1} \Psi_{i|2,1}^{(3)}$, 将 $S_i = [I \quad S_{i,u}^\top]^\top$ 代入(3-24)可得:

$$\begin{aligned}
 P_i &= \left\| \begin{bmatrix} I & -\Psi_{i1,2}^{(3)} \left(\Psi_{i2,2}^{(3)} \right)^{-1} \end{bmatrix}^\top \right\|_{\Psi_i^{(3)}}^2 \\
 &= \begin{bmatrix} I & -\Psi_{i1,2}^{(3)} \left(\Psi_{i2,2}^{(3)} \right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{i1,1}^{(3)} & \Psi_{i1,2}^{(3)} \\ \Psi_{i2,1}^{(3)} & \Psi_{i2,2}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\Psi_{i1,2}^{(3)} \left(\Psi_{i2,2}^{(3)} \right)^{-1} \end{bmatrix}^\top \\
 &= \begin{bmatrix} \Psi_{i1,1}^{(3)} - \Psi_{i1,2}^{(3)} \left(\Psi_{i2,2}^{(3)} \right)^{-1} \Psi_{i2,1}^{(3)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\left(\Psi_{i2,2}^{(3)} \right)^{-1} \Psi_{i2,1}^{(3)} \end{bmatrix}^\top \\
 &= \Psi_{i1,1}^{(3)} - \Psi_{i1,2}^{(3)} \left(\Psi_{i2,2}^{(3)} \right)^{-1} \Psi_{i2,1}^{(3)}
 \end{aligned} \tag{3-27}$$

将(3-17)中的具体表达式代入(3-27)中得到:

$$\begin{aligned}
 P_i &= \Psi_{i1,1}^{(3)} - \Psi_{i1,2}^{(3)} \left(\Psi_{i2,2}^{(3)} \right)^{-1} \Psi_{i2,1}^{(3)} \\
 &= \gamma \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i + \tilde{C}_i^\top Q_i \tilde{C}_i - \left(D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \right)^\top \\
 &\quad \times \left(D_i^\top Q_i D_i + R_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{B}_i \right)^{-1} \left(D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \right)
 \end{aligned} \tag{3-28}$$

(3-28)就是所求的 CARE(3-9)，式中只有系统参数与权重矩阵，可用于解矩阵 P 的理论分析与求解。证毕。

3.3.2 CARE 镇定解的存在性与系统稳定性

本小节讨论 CARE(3-9)镇定解的存在性与闭环系统的稳定性问题。由引理 2.3 可知，若 P 满足 CARE(3-9)且 $r(\mathcal{L}) < 1$ ，则 P 为 CARE(3-9)的镇定解，对应算子 $\mathbb{L}_i(\Gamma, \bullet)$ 中 $\Gamma_i = \gamma^{1/2}(\tilde{A}_i + \tilde{B}_i S_{i,u})$ ，且 LQT 控制器 $S_{i,u}$ 满足(3-27)。则由引理 2.4 可知，CARE(3-9)存在唯一镇定解当且仅当 $(\gamma^{1/2} \tilde{A}, \gamma^{1/2} \tilde{B}, \Pi)$ 能镇定， $(\Pi, (\gamma Q)^{1/2} \tilde{C}, \gamma^{1/2} \tilde{A})$ 可探测。

注 3.1: 注意到，对于给定的被控系统 with 参考系统，除系统参数以外， $(\gamma^{1/2} \tilde{A}, \gamma^{1/2} \tilde{B}, \Pi)$ 是否能镇定只与衰减因子 γ 有关， $(\Pi, (\gamma Q)^{1/2} \tilde{C}, \gamma^{1/2} \tilde{A})$ 是否可探测只与衰减因子 γ 以及权重矩阵 Q 有关。这为本文选取衰减因子 γ 以及权重矩阵 Q 提供依据。

下面讨论 LQT 控制器作用下闭环系统的稳定性问题。出于跟踪不稳定系统的目的，衰减因子 γ 被引入二次型性能指标中，这不可避免的对跟踪误差系统 $\mathcal{M}_{te}^{(1)}$ 的稳定性产生影响，本文转而分析衰减跟踪误差系统 $\mathcal{M}_{de}^{(1)}$ 的稳定性。

定理 3.2 (系统稳定性): 在 CARE(3-9)的镇定解对应的反馈控制律 $u_k = S_{\varpi_k, u} \tilde{x}_k$ 作用下，衰减跟踪误差系统 $\mathcal{M}_{de}^{(1)}$ 是随机稳定的。

证明: 在 LQT 控制器 $u_k = S_{\varpi_k, u} \tilde{x}_k$ 作用下闭环系统为:

$$\mathcal{M}_{dte}^{(1)} = \begin{cases} \bar{x}_{k+1} = \sqrt{\gamma} (\tilde{A}_{\bar{\sigma}_k} + \tilde{B}_{\bar{\sigma}_k} S_{\bar{\sigma}_k, u}) \bar{x}_k \\ \bar{z}_k = (\tilde{C}_{\bar{\sigma}_k} + D_{\bar{\sigma}_k} S_{\bar{\sigma}_k, u}) \bar{x}_k \end{cases} \quad (3-29)$$

若 $\tilde{C}_i + D_i S_{i,u} \neq \mathbf{0}$ ，那么 \bar{x}_k 收敛等价于 \bar{z}_k 收敛。将 CARE 的唯一镇定解 P 作为 Lyapunov 函数中的二次型矩阵，可得到系统(3-29)对应的耦合 Lyapunov 方程为：

$$\gamma \|\tilde{A}_i + \tilde{B}_i S_{i,u}\|_{\mathcal{E}_i(P)}^2 - P_i = -\|S_i\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 \quad (3-30)$$

由于 $\Psi_{i1,1}^{(3)} = \tilde{C}_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \geq \mathbf{0}$ ，所以引理 2.1 成立，因此在镇定解对应的反馈控制律 $u_k = S_{\bar{\sigma}_k, u} \bar{x}_k$ 作用下，衰减跟踪误差系统 $\mathcal{M}_{dte}^{(1)}$ 是随机稳定的。证毕。

3.4 基于策略迭代求解 CARE

由前文可得 LQT 问题对应的 CARE 及其控制器解析形式，但面对(3-9)这样复杂的代数方程，难以获得其解析解 P ，因而无法得到 LQT 控制器。同时考虑到实际 MJS 的模态转移概率难以获取的问题，本节将研究转移概率已知和未知两种情况下的 CARE 的数值求解问题。

3.4.1 转移概率已知时的 CARE 求解

对于 Riccati 方程的数值求解问题，文献[70]提出一种基于镇定控制器的迭代求解算法，即 Kleinman 迭代算法。Kleinman 迭代算法利用镇定控制器进行初始迭代就能实现二次收敛，其迭代过程简单，收敛速度快，求解精度高。本文参考文献[70]，设计适用于 CARE(3-9)的 Kleinman 迭代求解算法。

定理 3.3 (Kleinman 算法)^[70]: CARE(3-9)存在唯一镇定解 P 时，给定镇定控制器 $S_u^{(l)} = (S_{1,u}^{(l)}, \dots, S_{N,u}^{(l)})$ ，若 $P^{(l)} = (P_1^{(l)}, \dots, P_N^{(l)})$ 是下列耦合 Lyapunov 方程的唯一镇定解：

$$\begin{bmatrix} \|\Gamma_1^{(l)}\|_{\mathcal{E}_1(P^{(l)})}^2 - P_1^{(l)} + \|S_1^{(l)}\|_{\Psi_1^{(1)}}^2 \\ \vdots \\ \|\Gamma_N^{(l)}\|_{\mathcal{E}_N(P^{(l)})}^2 - P_N^{(l)} + \|S_N^{(l)}\|_{\Psi_N^{(1)}}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3-31)$$

其中， $\Gamma_i^{(l)} = \gamma^{1/2} (\tilde{A}_i + \tilde{B}_i S_{i,u}^{(l)})$ ， $S_i^{(l)} = [I \quad S_{i,u}^{(l)\top}]^\top$ 。基于 $P^{(l)}$ 进一步给出：

$$S_{i,u}^{(l+1)} = -\left(D_i^\top Q_i D_i + R_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(l)}) \tilde{B}_i\right)^{-1} \left(D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(l)}) \tilde{A}_i\right) \quad (3-32)$$

若选择镇定控制器 $S_u^{(0)}$ 进行初始迭代，则 $\lim_{l \rightarrow \infty} P^{(l)} = P$ 。

证明：对于初始镇定控制器 $S_u^{(0)}$ ，求解(3-31)得到 $P^{(0)}$ ，将 $P^{(0)}$ 代入(3-32)得到 $S_u^{(1)}$ 。首先，尝试证明 $S_u^{(1)}$ 也是镇定控制器。已知：

$$\|\Gamma_i^{(0)}\|_{\mathbb{E}_i(P^{(0)})}^2 - P_i^{(0)} + \|S_i^{(0)}\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 = 0 \quad (3-33)$$

显然 $\Gamma_i^{(1)} - \Gamma_i^{(0)} = \gamma^{1/2} \tilde{B}_i (S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)})$ ，可得：

$$\begin{aligned} \|\Gamma_i^{(1)}\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 &= \|\Gamma_i^{(0)} + \gamma^{1/2} \tilde{B}_i (S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)})\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 \\ &= \|\Gamma_i^{(0)}\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 + \gamma^{1/2} (S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)})^\top \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(0)}) \Gamma_i^{(0)} \\ &\quad + \gamma^{1/2} \Gamma_i^{(0)\top} \mathcal{E}_i(P^{(0)}) \tilde{B}_i (S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)}) + \|\gamma^{1/2} \tilde{B}_i (S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)})\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 \end{aligned} \quad (3-34)$$

对于(3-31)，考虑 $l=0$ 得，代入 $\gamma^{1/2} \tilde{A}_i = \Gamma_i^{(l)} - \gamma^{1/2} \tilde{B}_i S_{i,u}^{(l)}$ ，得到：

$$\begin{aligned} & (D_i^\top Q_i D_i + R_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(0)}) \tilde{B}_i) S_{i,u}^{(1)} \\ &= - (D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(0)}) \tilde{A}_i) \\ &= - (D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma^{1/2} \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(0)}) (\Gamma_i^{(0)} - \gamma^{1/2} \tilde{B}_i S_{i,u}^{(0)})) \\ &= - (D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma^{1/2} \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(0)}) \Gamma_i^{(0)} - \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(0)}) \tilde{B}_i S_{i,u}^{(0)}) \end{aligned} \quad (3-35)$$

将(3-35)移项并整理，得：

$$\begin{aligned} & \gamma^{1/2} \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(0)}) \Gamma_i^{(0)} \\ &= \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(0)}) \tilde{B}_i S_{i,u}^{(0)} - (D_i^\top Q_i D_i + R_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(0)}) \tilde{B}_i) S_{i,u}^{(1)} - D_i^\top Q_i \tilde{C}_i \\ &= - (\gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(0)}) \tilde{B}_i (S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)})) + (D_i^\top Q_i D_i + R_i) S_{i,u}^{(1)} + D_i^\top Q_i \tilde{C}_i \end{aligned} \quad (3-36)$$

将(3-36)代入(3-34)可以得到：

$$\begin{aligned} \|\Gamma_i^{(1)}\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 &= \|\Gamma_i^{(0)}\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 - \|S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)}\|_{\gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(0)}) \tilde{B}_i + D_i^\top Q_i D_i + R_i}^2 \\ &\quad - (S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)})^\top ((D_i^\top Q_i D_i + R_i) S_{i,u}^{(0)} + D_i^\top Q_i \tilde{C}_i) \\ &\quad - ((D_i^\top Q_i D_i + R_i) S_{i,u}^{(1)} + D_i^\top Q_i \tilde{C}_i)^\top (S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)}) \\ &= \|\Gamma_i^{(0)}\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 - \|S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)}\|_{\Psi_{i2,2}^{(3,0)}}^2 \\ &\quad + \|S_{i,u}^{(0)}\|_{D_i^\top Q_i D_i + R_i}^2 + (S_{i,u}^{(0)})^\top D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + (D_i^\top Q_i \tilde{C}_i)^\top S_{i,u}^{(0)} \\ &\quad - \|S_{i,u}^{(1)}\|_{D_i^\top Q_i D_i + R_i}^2 - (S_{i,u}^{(1)})^\top D_i^\top Q_i \tilde{C}_i - (D_i^\top Q_i \tilde{C}_i)^\top S_{i,u}^{(1)} \\ &= \|\Gamma_i^{(0)}\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 - \|S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)}\|_{\Psi_{i2,2}^{(3,0)}}^2 + \|S_i^{(0)}\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 - \|S_i^{(1)}\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 \end{aligned} \quad (3-37)$$

将 $l=0$ 和 $l=1$ 的项分别移到等式两边，并同时减去 $P_i^{(0)}$ 构造出(3-33)的形式，得到：

$$\begin{aligned}
 & \left\| \Gamma_i^{(0)} \right\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 - P_i^{(0)} + \left\| S_i^{(0)} \right\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 \\
 &= \left\| \Gamma_i^{(1)} \right\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 - P_i^{(0)} + \left\| S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)} \right\|_{\Psi_{i2,2}^{(3,0)}}^2 + \left\| S_i^{(1)} \right\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 \\
 &= \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{3-38}$$

其中,

$$\left\| S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)} \right\|_{\Psi_{i2,2}^{(3,0)}}^2 + \left\| S_i^{(1)} \right\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 \geq \mathbf{0} \tag{3-39}$$

且 $P^{(0)}$ 为半正定矩阵, 则由引理 2.1 可知 $\Gamma_i^{(1)}$ 是镇定矩阵, 因此 $S_u^{(1)}$ 是镇定控制器, 则可通过(3-31)进一步求出 $P^{(1)}$ 。接下来证明 $P_i^{(0)} - P_i^{(1)} \geq \mathbf{0}$, 结合(3-25)与(3-32)构造 $P_i^{(0)} - P_i^{(1)}$ 得到:

$$\begin{aligned}
 P_i^{(0)} - P_i^{(1)} &= \left\| \Gamma_i^{(0)} \right\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 + \left\| S_i^{(0)} \right\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 - \left\| \Gamma_i^{(1)} \right\|_{\mathcal{E}_i(P^{(1)})}^2 - \left\| S_i^{(1)} \right\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 \\
 &= \left\| \Gamma_i^{(1)} \right\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 + \left\| S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)} \right\|_{\Psi_{i2,2}^{(3,0)}}^2 - \left\| \Gamma_i^{(1)} \right\|_{\mathcal{E}_i(P^{(1)})}^2 \\
 &= \left\| \Gamma_i^{(1)} \right\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)} - P^{(1)})}^2 + \left\| S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)} \right\|_{\Psi_{i2,2}^{(3,0)}}^2
 \end{aligned} \tag{3-40}$$

其中,

$$\left\| S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)} \right\|_{\Psi_{i2,2}^{(3,0)}}^2 \geq \mathbf{0} \tag{3-41}$$

由于 $S_u^{(1)}$ 是镇定控制器, 因此 $\Gamma^{(1)}$ 是镇定矩阵, 由引理 2.1 可知 $P_i^{(0)} - P_i^{(1)} \geq \mathbf{0}$ 。同理, 对于 $l=1,2,\dots$, 重复前述论证, 可以证明 $\{P^{(l)}, l=1,2,\dots\}$ 是一个单调递减的有界序列且下界为 P , 因此 $\lim_{l \rightarrow \infty} P^{(l)} = P$ 。证毕。

下面给出定理 3.3 Kleinman 算法的伪代码:

表 3-1 Kleinman 算法求解 CARE

Table 3-1. Kleinman algorithm for solving CARE

算法 3.1 Kleinman 算法迭代求解 CARE

输入: 系统参数矩阵、权重矩阵 Q 和 R 、衰减因子 γ 、收敛阈值 ε 、初始解矩阵 $P^{(0)}$ 、镇定控制器 $S_u^{(0)}$

输出: 唯一镇定解 P^* 、LQT 控制器 S_u^*

1. 定义 $l=0$;
2. 对于给定的控制器 $S_u^{(l)}$, 基于(3-31)求解 $P^{(l)}$;
3. 利用 $P^{(l)}$, 使用(3-32)得到 $S_u^{(l+1)}$;
4. 判断是否 $\|P^{(l)} - P^{(l+1)}\| \leq \varepsilon$, 是则进入步骤 6, 否则进入步骤 5;
5. 令 $l=l+1$, 返回步骤 1;
6. 输出唯一镇定解 $P^* = P^{(l)}$, LQT 控制器 $S_u^* = S_u^{(l)}$;

注 3.2: 算法 3.1 中, 初始输入所需的镇定控制器 $S_u^{(0)}$ 可利用文献[72]提出的线性矩阵不等式算法求解获得。此外, 步骤 2 中使用引理 2.1 中的(2-11)以及(2-12)求解 $P^{(l)}$ 。

3.4.2 转移概率未知时的 CARE 求解

根据定理 3.3, 本文提出一种利用策略迭代和初始镇定控制器进行迭代求解 CARE(3-9)的 Kleinman 算法, 该算法能收敛到 CARE(3-9)的唯一镇定解 P^* 。然而, Kleinman 算法的求解需要转移概率, 但是精确转移概率的获取, 意味着复杂的数学建模以及高昂的工程成本, 这在许多实际场景中是不能接受甚至无法实现的。文献[33]提出一种 TD(λ)算法用于求解转移概率未知时的 CARE, 其核心思想在于求解 $\mathcal{E}(P) = (\mathcal{E}_1(P), \dots, \mathcal{E}_N(P))$ 而不是 $P = (P_1, \dots, P_N)$, 从而克服转移概率未知的困难。受文献[33]的启发, 本小节提出 TD(λ)算法用于求解未知转移概率下的 CARE(3-9)。定义 $\mathcal{E}^{(l)} = \mathcal{E}(P^{(l)})$, 若 CARE(3-9)存在唯一镇定解 P , P 对应的 $\mathcal{E}(P)$ 可表示为 \mathcal{E} 。

CARE(3-9)存在唯一镇定解 P 时, 给定解矩阵 $\mathcal{E}^{(l)} = (\mathcal{E}_1^{(l)}, \dots, \mathcal{E}_N^{(l)})$ 与镇定控制器 $S_u^{(l)} = (S_{1,u}^{(l)}, \dots, S_{N,u}^{(l)})$, 使用(3-9)迭代求解 $\mathcal{E}_i^{(l+1)}$:

$$\mathcal{E}_i^{(l+1)} = \mathcal{E}_i^{(l)} + \mu_l \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathcal{T}_i(l, k, \mathcal{E}^{(l)}) \quad (3-42)$$

其中, l 代表第 l 幕, k 表示每幕中的第 k 步, λ 是给定的超参数用于指定回报权重, μ 是迭代步长满足:

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \mu_l = \infty \\ \sum_{l=0}^{\infty} \mu_l^2 < \infty \end{cases} \quad (3-43)$$

此外时序差分 $\mathcal{T}_i(l, k, \mathcal{E}^{(l)})$ 定义为:

$$\mathcal{T}_i(l, k, \mathcal{E}^{(l)}) = \Lambda_i^{(l,k)\top} \left\{ \left\| \Gamma_{\varpi_{l,k+1}}^{(l)} \right\|_{\mathcal{E}^{(l)}}^2 - \mathcal{E}_{\varpi_{l,k}}^{(l)} + \left\| S_{\varpi_{l,k+1}}^{(l)} \right\|_{\Psi_{\varpi_{l,k+1}}^{(l)}}^2 \right\} \Lambda_i^{(l,k)} \quad (3-44)$$

其中, $\varpi_{l,k}$ 表示第 l 幕第 k 步的模式, $\Gamma_i^{(l)} = \gamma^{1/2} (\tilde{A}_i + \tilde{B}_i S_{i,u}^{(l)})$, $S_i^{(l)} = [I \quad S_{i,u}^{(l)\top}]^\top$,

$$\Lambda_i^{(l,k)} = \begin{cases} I, & k = 0 \\ \Gamma_{\varpi_{l,k}}^{(l)} \Lambda_i^{(l,k-1)}, & k > 0 \end{cases} \quad (3-45)$$

基于 $S_u^{(l)}$ 与 $\mathcal{E}_i^{(l)}$ 求解得到 $\mathcal{E}_i^{(l+1)}$ 后, 利用 $\mathcal{E}_i^{(l+1)}$ 进一步给出 $S_u^{(l+1)}$:

$$S_{i,u}^{(l+1)} = - \left(D_i^\top Q_i D_i + R_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i^{(l+1)} \tilde{B}_i \right)^{-1} \left(D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i^{(l+1)} \tilde{A}_i \right) \quad (3-46)$$

若选择镇定控制器 $S_u^{(0)}$ 进行初始迭代, 则 $\lim_{l \rightarrow \infty} \mathcal{E}^{(l)} = \mathcal{E}$ 。

定义 $\mathbf{E} = \{0, 1, \dots, \mathbf{e}\}$ 表示 \mathbf{e} 幕训练数据, $\mathbf{S} = \{0, 1, \dots, \mathbf{s}\}$ 表示每一幕的 \mathbf{s} 步, 假设本文具有数量充足的模态序列 $\mathbf{M} = \{\varpi_{l,k} \in \mathcal{N}, (l, k) \in \mathbf{E} \times \mathbf{S}\}$ 。表 3-2 给出了 TD(λ) 算法的伪代码。

注 3.3: 算法 3.2 中, 初始输入所需的镇定控制器 $S_u^{(0)}$ 同样利用文献[72]提出的线性矩阵不等式算法求解获得。算法 3.2 的收敛过程中, 回报权重 λ 影响非常大, 关于如何选取合适的回报权重 λ 以实现期望的收敛效果, 文献[33]给出如下选取准则。若给定的回报权重 λ 与镇定的闭环控制器 Γ 满足:

$$\lambda^2 \|\Gamma \otimes \Gamma\|_{\max} < 1 \quad (3-47)$$

其中, \otimes 为克罗内克积,

$$\|\Gamma\|_{\max} = \max \left\{ \sqrt{\text{tr}(\|\Gamma_i\|_2)}; i \in \mathcal{N} \right\} \quad (3-48)$$

则有:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \mathcal{E}^{(l)} = \mathcal{E} \quad (3-49)$$

引理 3.2 给出算法 3.2 收敛的充分条件, 即只要本文选取满足条件(3-47)的回报权重 λ , 算法 3.2 就能收敛。注意到, 引理 3.2 只是一个充分条件, 并不是必要条件, 也就是说即使选取回报权重 λ 不满足条件(3-47), 算法 3.2 也可能收敛。

表 3-2 TD(λ)算法求解 CARE
Table 3-2. TD(λ) algorithm for solving CARE

算法 3.2 TD(λ) 算法
输入: 系统参数矩阵、权重矩阵 Q 和 R 、衰减因子 γ 、初始解矩阵 $\mathcal{E}^{(0)}$ 、镇定控制器 $S_u^{(0)}$ 、模态序列 \mathbf{M} 、回报权重 λ 、迭代步长 μ
输出: 唯一镇定解 \mathcal{E}^* 、LQT 控制器 $S_u^{*,TD}$
1. 定义 $l = 0$;
2. 定义 $k = 0$;
3. 基于给定的 $\mathcal{E}^{(l)}$ 与 $S_u^{(l)}$, 使用(3-38)计算时序差分 $\mathcal{T}_i(l, k, \mathcal{E}^{(l)})$;
4. 判断 k 是否小于 \mathbf{s} , 是则进入步骤 5, 否则进入步骤 6;
5. 令 $k = k + 1$, 返回步骤 3;
6. 利用步骤 3 计算的时序差分 $\mathcal{T}_i(l, k, \mathcal{E}^{(l)})$, 基于(3-42)求解 $\mathcal{E}^{(l+1)}$;
7. 利用 $\mathcal{E}^{(l+1)}$, 使用(3-46)得到 $S_u^{(l+1)}$;
8. 判断 l 是否小于 \mathbf{e} , 是则进入步骤 9, 否则进入步骤 10;
9. 令 $l = l + 1$, 返回步骤 2;
10. 输出唯一镇定解 $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}^{(l)}$, LQT 控制器 $S_u^{*,TD} = S_u^{(l)}$;

3.5 直流电机仿真

本章针对无限时域下 MJS 的 LQT 问题，利用策略迭代与初始镇定控制器设计转移概率已知与未知下的 CARE 迭代求解算法。本小节将在一个直流电机模型^[73]上进行仿真实验，并验证本文所提理论与方法的正确性与有效性。

所考虑的直流电机受随机故障影响，电机功率在 3 个功率模态之间随机突变^[73]，因此可用马尔可夫跳变模型描述该直流电机。3 个功率模态分别为 1-low、2-medium、3-high，各模态具体参数如下：

$$A_i = \begin{bmatrix} \alpha_{i1,1} & \alpha_{i1,2} & 0 \\ \alpha_{i2,1} & \alpha_{i2,2} & 0 \\ \alpha_{i3,1} & 0 & \alpha_{i3,3} \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} \beta_{i1} \\ \beta_{i2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_i = \begin{bmatrix} \varphi_{i1} \\ \varphi_{i2} \\ \varphi_{i3} \end{bmatrix}^\top, \quad D_i = \phi_i \quad (3-50)$$

模态依赖参数的具体值在表 3-3 中给出，各模态之间的转移概率矩阵为：

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 & 0.00 \\ 0.36 & 0.60 & 0.04 \\ 0.10 & 0.10 & 0.80 \end{bmatrix} \quad (3-51)$$

表 3-3 模态参数

Table 3-3. Parameters of model

模态参数	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$\alpha_{i1,1}$	-0.4799	-1.6026	0.6439
$\alpha_{i1,2}$	5.1546	9.1632	0.9178
$\alpha_{i2,1}$	-3.8162	-0.5918	-0.5056
$\alpha_{i2,2}$	14.4732	3.0317	2.4811
$\alpha_{i3,1}$	0.1399	0.0740	0.3865
$\alpha_{i3,3}$	-0.9925	-0.4338	0.0982
β_{i1}	5.8705	10.2851	0.7874
β_{i2}	15.5010	2.2282	1.5302
φ_{i1}	1.0230	0.9800	1.0000
φ_{i2}	2.1100	2.0500	2.0000
φ_{i3}	0.9500	1.1000	1.0500
ϕ_i	1.0000	0.5000	-0.5000

参考系统 \mathcal{M}_{ref} 参数如下：

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.991 & -0.113 & 0.078 \\ 0.117 & 0.992 & -0.056 \\ -0.071 & 0.064 & 0.095 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 1 \quad 1] \quad (3-52)$$

设置权重矩阵 $Q = 10I$ ， $R = 0.5I$ ，衰减因子 $\gamma = 0.99$ ，选取初始镇定控制器 $S_u^{(0)}$ 为：

$$\begin{aligned} S_{1,u}^{(0)} &= [0.250 \quad -0.850 \quad 0.050 \quad 0.050 \quad 0.050 \quad 0.050] \\ S_{2,u}^{(0)} &= [0.201 \quad -1.502 \quad 0.100 \quad 0.100 \quad 0.000 \quad 0.100] \\ S_{3,u}^{(0)} &= [0.100 \quad -0.998 \quad 0.100 \quad 0.100 \quad 0.100 \quad 0.100] \end{aligned} \quad (3-53)$$

首先，基于以上参数，使用算法 3.1 求解 CARE(3-9)，图 3-1 与图 3-2 给出了 $P^{(l)}$ 与 $S_u^{(l)}$ 的收敛过程，注意到，控制器 $S_u^{(l)}$ 的收敛速度较快，在第三次迭代就已经平稳，解矩阵 $P^{(l)}$ 经过 5 次迭代后才逐渐收敛。限于篇幅，算法收敛时解矩阵 P^* 的值不进行展示，控制器 S_u^* 的值为：

$$\begin{aligned} S_{1,u}^* &= [0.1960 \quad -0.9205 \quad 0.0323 \quad 0.0390 \quad 0.0356 \quad 0.0383] \\ S_{2,u}^* &= [0.1705 \quad -0.9859 \quad 0.0239 \quad 0.0686 \quad 0.0626 \quad 0.0700] \\ S_{3,u}^* &= [0.0814 \quad -1.4814 \quad 0.0026 \quad 0.2122 \quad 0.1886 \quad 0.2075] \end{aligned} \quad (3-54)$$

接下来使用算法 3.2 求解转移概率未知下的 CARE(3-9)，具体参数为：迭代幕数 $e = 50$ ，每幕步数 $s = 100$ ，回报权重 $\lambda = 0.1$ ，迭代步长 $\mu = 1/l$ ，初始解矩阵 $\mathcal{E}^{(0)} = \mathbf{0}$ ，镇定控制器 $S_u^{(0)}$ 与 (3-53) 相同。此外，提出性能指标 (3-55) 衡量算法 3.2 的收敛精度：

$$\begin{cases} \Delta_i^{(l)} = \log \left(1 + \frac{\|\mathcal{E}_i^* - \mathcal{E}_i^{(l)}\|_2^2}{\|\mathcal{E}_i^*\|_2^2} \right) \\ \delta_i^{(l)} = \log \left(1 + \frac{\|S_{i,u}^* - S_{i,u}^{(l)}\|_2^2}{\|S_{i,u}^*\|_2^2} \right) \end{cases} \quad (3-55)$$

其中， \mathcal{E}^* 表示算法 3.2 应该收敛到的解矩阵， S_u^* 表示算法 3.2 应该收敛到的 LQT 控制器，仿真时使用算法 3.1 获取的结果代替。图 3-3 与图 3-4 给出了 $\mathcal{E}^{(l)}$ 与 $S_u^{(l)}$ 的收敛过程，注意到，控制器 $S_u^{(l)}$ 的收敛速度较快，在第三次迭代就已经平稳，解矩阵 $\mathcal{E}^{(l)}$ 经过 6 次迭代后才逐渐收敛。限于篇幅，算法收敛时解矩阵 \mathcal{E}^* 的值不进行展示，控制器 $S_u^{*,TD}$ 的值为：

$$\begin{aligned} S_{1,u}^{*,TD} &= [0.1955 \quad -0.9205 \quad 0.0353 \quad 0.0387 \quad 0.0354 \quad 0.0382] \\ S_{2,u}^{*,TD} &= [0.1706 \quad -0.9893 \quad 0.0271 \quad 0.0713 \quad 0.0646 \quad 0.0702] \\ S_{3,u}^{*,TD} &= [0.0740 \quad -1.4749 \quad 0.0034 \quad 0.2133 \quad 0.1895 \quad 0.2097] \end{aligned} \quad (3-56)$$

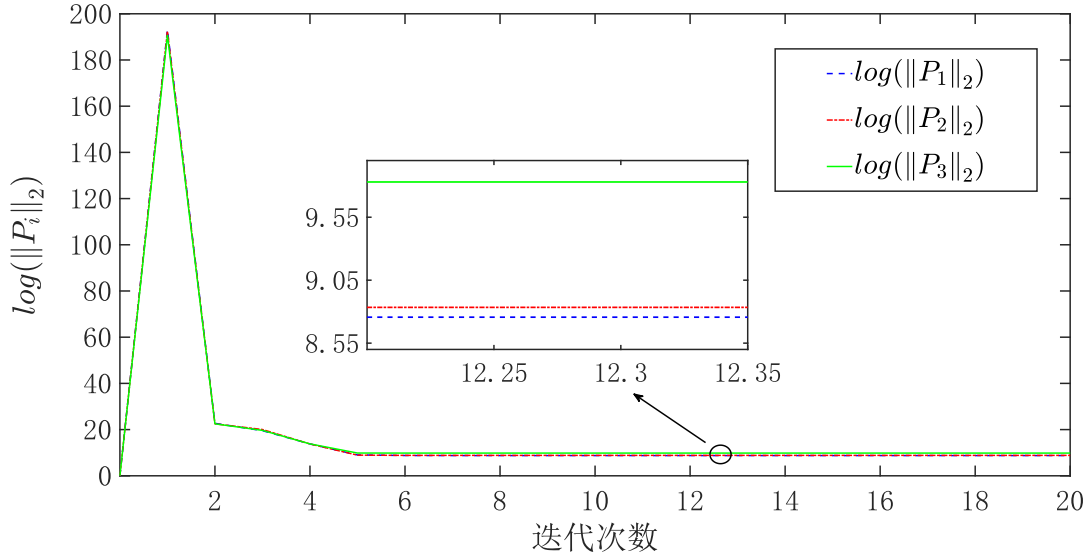


图 3-1 算法 3.1 解矩阵收敛过程

Figure 3-1. Solution matrix convergence process of Algorithm 3.1

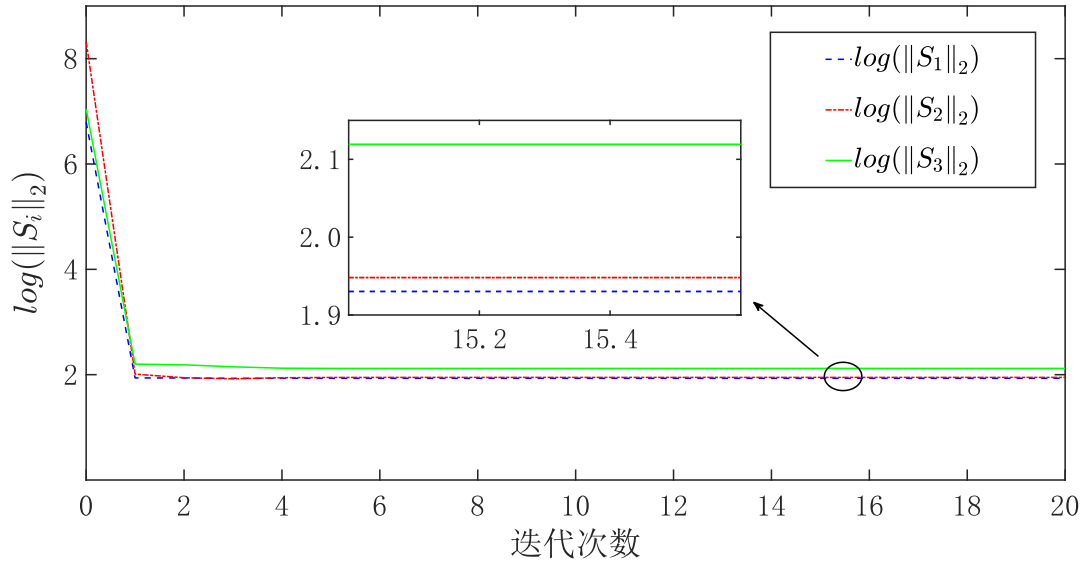


图 3-2 算法 3.1 控制器收敛过程

Figure 3-2. Controller convergence process of Algorithm 3.1

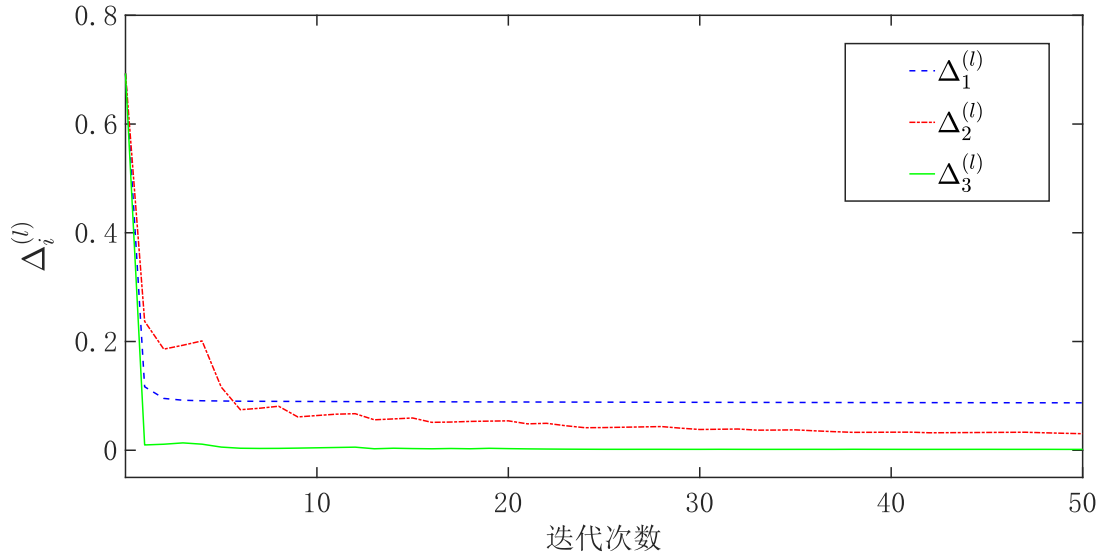


图 3-3 算法 3.2 解矩阵收敛过程

Figure 3-3. Solution matrix convergence process of Algorithm 3.2

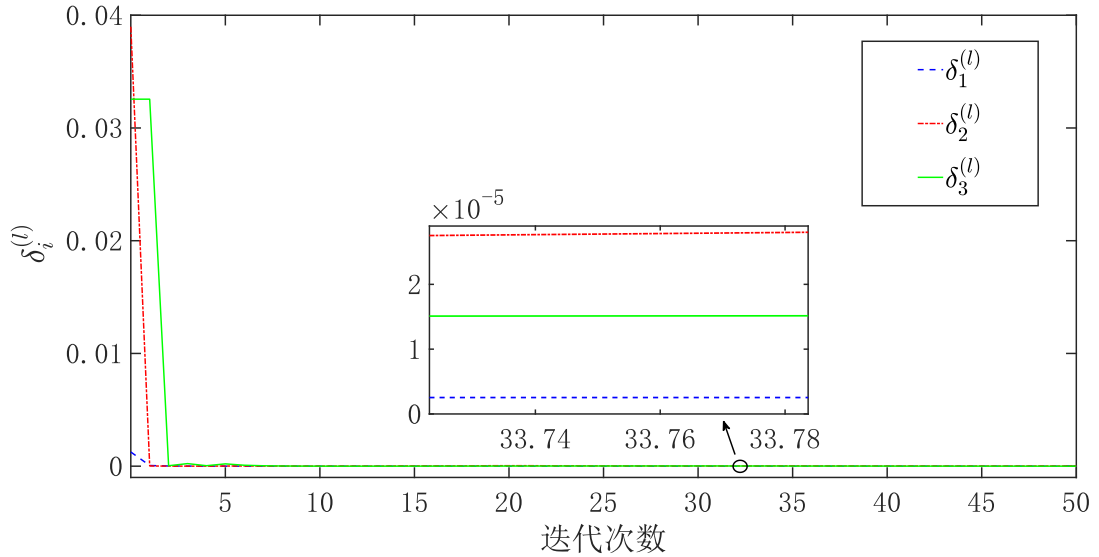


图 3-4 算法 3.2 控制器收敛过程

Figure 3-4. Controller convergence process of Algorithm 3.2

分别得到算法 3.1 以及算法 3.2 对应的控制器(3-54)以及(3-56)后, 使用数值仿真验证控制器的跟踪控制效果。初始状态选为 $\tilde{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 0 \ 0]^T$, 图 3-5 展示了在控制器(3-54)以及(3-56)下的跟踪控制效果, 可以发现跟踪控制效果良好且两个控制器的控制效果相近, 这说明本文提出的 CARE 及其求解算法是有效的。

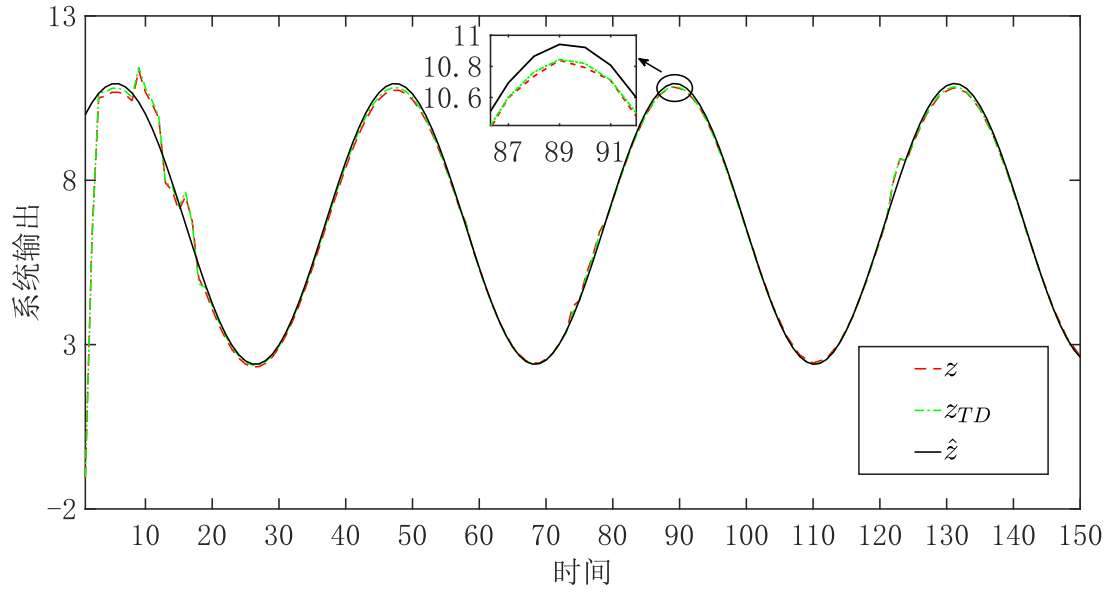


图 3-5 LQT 跟踪控制器作用下的跟踪控制过程

Figure 3-5. Tracking control process under the action of LQT tracking controller

3.6 总结

本章针对无限时域下 MJS 的 LQT 问题，给出了 CARE 镇定解的存在性与 LQT 控制器作用下闭环系统的稳定性证明，设计转移概率已知与未知下的 CARE 迭代求解算法。具体地，首先在二次型性能指标中引入衰减因子使得二次型性能指标收敛，保证最优控制问题可解，从而实现了对不稳定系统的跟踪控制。其次，将二次型性能指标转化为等价的极小化问题，利用动态规划递推求解该极小化问题导出了 CARE 以及对应的 LQT 控制器。再次，在给定衰减因子下，结合衰减跟踪误差系统讨论 CARE 镇定解的存在性以及 LQT 控制器作用下闭环系统的稳定性，给出了 CARE 唯一镇定解存在的充要条件和稳定性证明。然后，基于策略迭代与初始镇定控制器，设计转移概率已知与未知下的 CARE 迭代求解算法，导出了算法的收敛性证明。最后，利用受随机故障影响的直流电机模型验证了所提算法的有效性。

第四章 受扰马尔可夫跳变系统的 H_∞ 最优跟踪控制

4.1 引言

上一章针对系统状态已知时无限时域下 MJS 的 LQT 问题设计 LQT 控制器求解算法，实现了对不稳定系统的最优跟踪控制。然而，系统实际运行时可能存在过程噪声、量测噪声等各种随机因素，严重影响系统控制性能，需要使用 H_∞ 控制等鲁棒控制算法设计鲁棒控制器。同时，系统状态已知的假设是相当理想的，一旦系统状态未知，状态反馈控制器将无法使用，则需要设计状态估计算法获取系统状态。

本章针对受扰情况下 MJS 的 H_∞ 跟踪控制问题，首先设计 H_∞ 滤波器估计被控系统参考系统的系统状态，以解决系统状态无法直接测量的难题。接着，针对滤波误差系统与跟踪误差系统分别引入衰减因子设计二次型性能指标，确保二次型性能指标可收敛，进而求解二次型性能指标得到 GCARE。此外，基于能镇定性和可探测性导出 GCARE 镇定解存在的充要条件，并利用 Lyapunov 方程给出 H_∞ 滤波器和 H_∞ 跟踪控制器作用下闭环系统的稳定性判定。随后，利用策略迭代与初始镇定控制器，设计转移概率已知与未知下 GCARE 迭代求解算法，并给出算法的收敛性证明。最后，在受随机故障影响的直流电机模型上进行仿真实验验证所提方法的有效性。

4.2 马尔可夫跳变系统的 H_∞ 跟踪控制问题描述

针对无限时域下 MJS 的 H_∞ 跟踪控制问题，假设状态变量 x_k 未知，系统存在噪声扰动，故需要考虑状态估计问题。定义 $\tilde{x}_k \triangleq [x_k^\top \quad \hat{x}_k^\top]^\top$ ， $\tilde{w}_k \triangleq [w_k^\top \quad \hat{w}_k^\top]^\top$ ， $\tilde{y}_k \triangleq [y_k^\top \quad \hat{y}_k^\top]^\top$ ，构造跟踪误差系统 $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$ ：

$$\mathcal{M}_{te}^{(2)} = \begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}_{\sigma_k} \tilde{x}_k + \tilde{B}_{\sigma_k} u_k + \tilde{F}_{\sigma_k} \tilde{w}_k \\ \tilde{z}_k = \tilde{C}_{\sigma_k} \tilde{x}_k + D_{\sigma_k} u_k + \tilde{H}_{\sigma_k} \tilde{w}_k \\ \tilde{y}_k = \tilde{E}_{\sigma_k} \tilde{x}_k + \tilde{G}_{\sigma_k} \tilde{w}_k \end{cases} \quad (4-1)$$

其中，

$$\begin{aligned}\tilde{A}_i &\triangleq \begin{bmatrix} A_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{A} \end{bmatrix} & \tilde{B}_i &\triangleq \begin{bmatrix} B_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \tilde{F}_i &\triangleq \begin{bmatrix} F_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{F} \end{bmatrix} & \tilde{C}_i &\triangleq [C_i \quad -\hat{C}] \\ \tilde{H}_i &\triangleq [H_i \quad \mathbf{0}] & \tilde{E}_i &\triangleq \begin{bmatrix} E_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{E} \end{bmatrix} & \tilde{G}_i &\triangleq \begin{bmatrix} G_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{G} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4-2)$$

由于状态变量 x_k 未知且参考系统的状态 \hat{x}_k 无法获得，因此跟踪误差系统 $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$ 的状态也是未知的，需要通过状态估计获得。针对跟踪误差系统 $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$ ，考虑具有如下结构的离散马尔可夫跳变 H_∞ 滤波器 \mathcal{M}_{esti} 用于系统状态估计：

$$\mathcal{M}_{esti} = \begin{cases} \hat{x}_{k+1} = \tilde{A}_{\varpi_k} \hat{x}_k + \tilde{B}_{\varpi_k} u_k + L_{\varpi_k} (\tilde{y}_k - \hat{y}_k) \\ \hat{y}_k = \tilde{E}_{\varpi_k} \hat{x}_k \end{cases} \quad (4-3)$$

其中， \hat{x}_k 为估计的跟踪误差系统 $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$ 状态， \hat{y}_k 为估计的跟踪误差系统 $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$ 量测输出， $L = (L_1, \dots, L_N)$ 为需要被确定的 H_∞ 滤波器增益。定义状态估计误差为 $\tilde{x}_k \triangleq \tilde{x}_k - \hat{x}_k$ ，量测新息为 $\tilde{y}_k \triangleq \tilde{y}_k - \hat{y}_k$ ，结合 $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$ 与 \mathcal{M}_{esti} 可构造估计误差系统为：

$$\mathcal{M}_{ee} = \begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}_{\varpi_k} \tilde{x}_k + \tilde{F}_{\varpi_k} \tilde{w}_k - L_{\varpi_k} \tilde{y}_k \\ \tilde{y}_k = \tilde{E}_{\varpi_k} \tilde{x}_k + \tilde{G}_{\varpi_k} \tilde{w}_k \end{cases} \quad (4-4)$$

基于以上假设，本章将设计 H_∞ 滤波器增益 L 使得 H_∞ 滤波器 \mathcal{M}_{esti} 在噪声序列 $\tilde{w} = \{\tilde{w}_{k_0}, \tilde{w}_{k_0+1}, \dots\}$ 下满足 L_2 增益 \mathcal{G} ，提出如下性能指标：

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, \tilde{w}_{k_0}, \varpi_{k_0}) &\triangleq \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\|\tilde{x}_k\|_2^2 - \mathcal{G}^2 \|\tilde{w}_k\|_2^2 \right) \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{w}_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathcal{G}^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{w}_k \end{bmatrix} \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\mathcal{X}_k\|_{\Phi_{\varpi_k}^{(1)}}^2 \right\}\end{aligned}\quad (4-5)$$

其中 $\mathcal{X}_k \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{x}_k^\top & \tilde{w}_k^\top \end{bmatrix}^\top$ ，

$$\Phi_i^{(1)} \triangleq \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathcal{G}^2 I \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

利用 H_∞ 滤波器获取估计状态 \hat{x}_k 后，可设计 H_∞ 跟踪控制器，使得在控制输入 $u = \{u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots\}$ 的作用下跟踪误差系统稳定，即跟踪误差 \tilde{z}_k 随时间趋于 0。同时，对于任意噪声序列 $\tilde{w} = \{\tilde{w}_{k_0}, \tilde{w}_{k_0+1}, \dots\}$ ，跟踪误差 \tilde{z}_k 与 $\tilde{w} = \{\tilde{w}_{k_0}, \tilde{w}_{k_0+1}, \dots\}$ 之间满足期望的 L_2 增益 θ 。与 LQT 控制类似，本章引入加权项 $\sum_{k=k_0}^{\infty} \|u_k\|_{R_{\varpi_k}}^2$ 对控制输入进行约束，引入衰减因子 γ 以保证控制输入能量的有限和优化问题的可解，提出性能指标如下：

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, u_{k_0}, \tilde{w}_{k_0}, \varpi_{k_0}) \\
 & \triangleq \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma^{k-k_0} \left(\|\tilde{z}_k\|_{Q_{\varpi_k}}^2 + \|u_k\|_{R_{\varpi_k}}^2 - \theta^2 \|\tilde{w}_k\|_2^2 \right) \right\} \\
 & = \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma^{k-k_0} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ u_k \\ \tilde{w}_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \tilde{C}_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} \tilde{C}_{\varpi_k} & \tilde{C}_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} D_{\varpi_k} & \tilde{C}_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} \tilde{H}_{\varpi_k} \\ D_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} \tilde{C}_{\varpi_k} & D_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} D_{\varpi_k} + R_{\varpi_k} & D_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} \tilde{H}_{\varpi_k} \\ \tilde{H}_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} \tilde{C}_{\varpi_k} & \tilde{H}_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} D_{\varpi_k} & \tilde{H}_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} \tilde{H}_{\varpi_k} - \theta^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ u_k \\ \tilde{w}_k \end{bmatrix} \right\} \quad (4-7) \\
 & = \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma^{k-k_0} \|X_k\|_{Y_{\varpi_k}^{(1)}}^2 \right\}
 \end{aligned}$$

其中, $X_k \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{x}_k^\top & u_k^\top & \tilde{w}_k^\top \end{bmatrix}^\top$,

$$Y_i^{(1)} \triangleq \begin{bmatrix} Y_{i|1,1}^{(1)} & Y_{i|1,2}^{(1)} & Y_{i|1,3}^{(1)} \\ Y_{i|2,1}^{(1)} & Y_{i|2,2}^{(1)} & Y_{i|2,3}^{(1)} \\ Y_{i|3,1}^{(1)} & Y_{i|3,2}^{(1)} & Y_{i|3,3}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_i^\top Q_i \tilde{C}_i & \tilde{C}_i^\top Q_i D_i & \tilde{C}_i^\top Q_i \tilde{H}_i \\ D_i^\top Q_i \tilde{C}_i & D_i^\top Q_i D_i + R_i & D_i^\top Q_i \tilde{H}_i \\ \tilde{H}_i^\top Q_i \tilde{C}_i & \tilde{H}_i^\top Q_i D_i & \tilde{H}_i^\top Q_i \tilde{H}_i - \theta^2 I \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

将跟踪误差系统 $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$ 与 H_∞ 滤波器 \mathcal{M}_{esti} 的状态增广可得到闭环系统如下:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{k+1} \\ \hat{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\varpi_k} & \tilde{B}_{\varpi_k} K_{\varpi_k, u} \\ L_{\varpi_k} \tilde{E}_{\varpi_k} & \tilde{A}_{\varpi_k} + \tilde{B}_{\varpi_k} K_{\varpi_k, u} - L_{\varpi_k} \tilde{E}_{\varpi_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \hat{x}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{F}_{\varpi_k} \\ L_{\varpi_k} \tilde{G}_{\varpi_k} \end{bmatrix} \tilde{w}_k \quad (4-9)$$

对上式进行线性变换可得:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{k+1} \\ \tilde{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\varpi_k} + \tilde{B}_{\varpi_k} K_{\varpi_k} & -\tilde{B}_{\varpi_k} K_{\varpi_k} \\ \mathbf{0} & \tilde{A}_{\varpi_k} - L_{\varpi_k} \tilde{E}_{\varpi_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{x}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{F}_{\varpi_k} \\ \tilde{F}_{\varpi_k} - L_{\varpi_k} \tilde{G}_{\varpi_k} \end{bmatrix} \tilde{w}_k \quad (4-10)$$

由式(4-10)以及 MJS 分离原理可知状态估计误差 \tilde{x}_k 的收敛只与 H_∞ 滤波器增益 L_i 有关, 跟踪误差 \tilde{x}_k 的收敛只与 H_∞ 跟踪控制器增益 K_i 有关。估计误差系统的稳定性可通过引理 2.1 进行证明, 然而, 由于引入衰减因子 γ , 跟踪误差系统中的跟踪误差 \tilde{z}_k 难以保证一定随时间趋于 0。定义衰减增广状态为 $\bar{x}_k \triangleq \gamma^{k/2} \tilde{x}_k$, 衰减控制输入为 $\bar{u}_k \triangleq \gamma^{k/2} u_k$, 衰减过程噪声为 $\bar{w}_k \triangleq \gamma^{k/2} \tilde{w}_k$, 衰减跟踪误差为 $\bar{z}_k \triangleq \gamma^{k/2} \tilde{z}_k$, 有衰减跟踪误差系统为:

$$\mathcal{M}_{dte}^{(2)} = \begin{cases} \bar{x}_{k+1} = \sqrt{\gamma} \left(\tilde{A}_{\varpi_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\varpi_k} \bar{u}_k + \tilde{F}_{\varpi_k} \bar{w}_k \right) \\ \bar{z}_k = \tilde{C}_{\varpi_k} \bar{x}_k + D_{\varpi_k} \bar{u}_k + \tilde{H}_{\varpi_k} \bar{w}_k \end{cases} \quad (4-11)$$

定义 $\bar{X}_k \triangleq \begin{bmatrix} \bar{x}_k^\top & \bar{u}_k^\top & \bar{w}_k^\top \end{bmatrix}^\top$, 性能指标(4-7)改写为等价形式:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}(\bar{x}_{k_0}, \bar{u}_{k_0}, \bar{w}_{k_0}, \varpi_{k_0}) & = \gamma^{-k_0} \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\|\bar{z}_k\|_{Q_{\varpi_k}}^2 + \|\bar{u}_k\|_{R_{\varpi_k}}^2 - \theta^2 \|\bar{w}_k\|_2^2 \right) \right\} \\
 & = \gamma^{-k_0} \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\bar{X}_k\|_{Y_{\varpi_k}^{(1)}}^2 \right\} \quad (4-12)
 \end{aligned}$$

4.3 马尔可夫跳变系统的 H_∞ 跟踪控制器设计

4.3.1 基于动态规划求解 H_∞ 跟踪控制问题

针对性能指标(4-7), 假设 k_0 时刻 $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$ 的状态为 \tilde{x}_{k_0} , 模态为 $\varpi_{k_0} = i$ 。性能指标(4-7)中包含噪声序列 $\tilde{w} = \{\tilde{w}_{k_0}, \tilde{w}_{k_0+1}, \dots\}$, 但无法判断 $\tilde{w} = \{\tilde{w}_{k_0}, \tilde{w}_{k_0+1}, \dots\}$ 对 $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$ 跟踪性能的影响。基于博弈论的思想, 假设系统处于使得性能指标(4-7)尽可能大的随机噪声扰动 $\tilde{w} = \{\tilde{w}_{k_0}, \tilde{w}_{k_0+1}, \dots\}$ 之下, 本小节将寻找使得性能指标(4-7)尽可能小的控制输入 $u = \{u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots\}$, 也即求解下列极小极大问题:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, \varpi_{k_0} = i) &\triangleq \min_u \max_{\tilde{w}} \mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, u_{k_0}, \tilde{w}_{k_0}, \varpi_{k_0} = i) \\ &= \min_u \max_{\tilde{w}} \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma^{k-k_0} \|X_k\|_{\Upsilon_k^{(1)}}^2 \right\} \end{aligned} \quad (4-13)$$

定理 4.1 (控制 GCARE)^[25]: 满足极小极大问题(4-13)的 H_∞ 跟踪控制器与噪声扰动为 $u_k = K_{\varpi_k, u} \tilde{x}_k$ 以及 $\tilde{w}_k = K_{\varpi_k, \tilde{w}} \tilde{x}_k$, 其具体形式为:

$$\begin{cases} K_{i,u} = \left\{ \Upsilon_{i2,2}^{(3)} - \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \left(\Upsilon_{i3,3}^{(3)} \right)^{-1} \Upsilon_{i3,2}^{(3)} \right\}^{-1} \left\{ \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \left(\Upsilon_{i3,3}^{(3)} \right)^{-1} \Upsilon_{i3,1}^{(3)} - \Upsilon_{i2,1}^{(3)} \right\} \\ K_{i,\tilde{w}} = \left\{ \Upsilon_{i3,3}^{(3)} - \Upsilon_{i3,2}^{(3)} \left(\Upsilon_{i2,2}^{(3)} \right)^{-1} \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \right\}^{-1} \left\{ \Upsilon_{i3,2}^{(3)} \left(\Upsilon_{i2,2}^{(3)} \right)^{-1} \Upsilon_{i2,1}^{(3)} - \Upsilon_{i3,1}^{(3)} \right\} \end{cases} \quad (4-14)$$

其中, P 是 GCARE(4-15)的唯一镇定解:

$$\begin{aligned} P_i &= \gamma \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i + \tilde{C}_i^\top Q_i \tilde{C}_i - \begin{bmatrix} D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \\ \tilde{H}_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \end{bmatrix}^\top \\ &\times \begin{bmatrix} D_i^\top Q_i D_i + R_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{B}_i & D_i^\top Q_i \tilde{H}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{F}_i \\ \tilde{H}_i^\top Q_i D_i + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{B}_i & \tilde{H}_i^\top Q_i \tilde{H}_i - \theta^2 I + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{F}_i \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \\ \tilde{H}_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-15)$$

证明: 由文献[69]知, 若极小极大问题(4-13)有解, 则 $\mathcal{J}(\tilde{x}_k, \varpi_k)$ 可写为关于 \tilde{x}_k 的二次型函数:

$$\mathcal{J}(\tilde{x}_k, \varpi_k) = \|\tilde{x}_k\|_{P^{(k)}_{\varpi_k}}^2 \quad (4-16)$$

其中,

$$P^{(k)} \triangleq \begin{bmatrix} P_1^{(k)} & \dots & P_N^{(k)} \end{bmatrix}^\top, P_i^{(k)} \geq 0 \quad (4-17)$$

(4-17)中的 $P^{(k)}$ 以增广矩阵而不是矩阵序列的形式给出, 其本质上是相同的。将极小极大问题(4-13)写为递推的形式, 得到 Bellman 方程:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i) &= \min_u \max_{\tilde{w}} \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma^{k-k_0} \|X_k\|_{\Upsilon_k^{(1)}}^2 \right\} \\
 &= \|X_{k_0}\|_{\Upsilon_i^{(1)}}^2 + \min_u \max_{\tilde{w}} \gamma \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \gamma^{k-k_0-1} \|X_k\|_{\Upsilon_{\varpi_k}^{(1)}}^2 \right\} \\
 &= \|X_{k_0}\|_{\Upsilon_i^{(1)}}^2 + \gamma \mathbb{E} \left[\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0+1}, \varpi_{k_0+1}) \right]
 \end{aligned} \tag{4-18}$$

结合系统状态空间方程并考虑 $\mathbb{E}[\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0+1}, \varpi_{k_0+1})]$ 的二次型形式可得：

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} \left[\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0+1}, \varpi_{k_0+1}) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \left\| \tilde{x}_{k_0+1} \right\|_{P_{\varpi_{k_0+1}}^{(k_0+1)}}^2 \right\} \\
 &= \sum_{j=1}^N \pi_{ij} \left\| \tilde{A}_i \tilde{x}_{k_0} + \tilde{B}_i u_{k_0} + \tilde{F}_i \tilde{w}_{k_0} \right\|_{P_j^{(k_0+1)}}^2 \\
 &= \left\| \tilde{A}_i \tilde{x}_{k_0} + \tilde{B}_i u_{k_0} + \tilde{F}_i \tilde{w}_{k_0} \right\|_{\mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)})}^2 \\
 &= \begin{bmatrix} \tilde{x}_{k_0} \\ u_{k_0} \\ \tilde{w}_{k_0} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{A}_i & \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{B}_i & \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{F}_i \\ \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{A}_i & \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{B}_i & \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{F}_i \\ \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{A}_i & \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{B}_i & \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{F}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{k_0} \\ u_{k_0} \\ \tilde{w}_{k_0} \end{bmatrix} \\
 &= \|X_{k_0}\|_{\Upsilon_i^{(2, k_0)}}^2
 \end{aligned} \tag{4-19}$$

其中，

$$\begin{aligned}
 \Upsilon_{\varpi_k}^{(2, k)} &\triangleq \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{A}_{\varpi_k} & \tilde{A}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{B}_{\varpi_k} & \tilde{A}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{F}_{\varpi_k} \\ \tilde{B}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{A}_{\varpi_k} & \tilde{B}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{B}_{\varpi_k} & \tilde{B}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{F}_{\varpi_k} \\ \tilde{F}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{A}_{\varpi_k} & \tilde{F}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{B}_{\varpi_k} & \tilde{F}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{F}_{\varpi_k} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\varpi_k} & \tilde{B}_{\varpi_k} & \tilde{F}_{\varpi_k} \end{bmatrix}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\varpi_k} & \tilde{B}_{\varpi_k} & \tilde{F}_{\varpi_k} \end{bmatrix} \\
 &\geq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{4-20}$$

将(4-19)代入(4-18)中可得：

$$\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i) = \|X_{k_0}\|_{\Upsilon_i^{(1)}}^2 + \gamma \|X_{k_0}\|_{\Upsilon_i^{(2, k_0)}}^2 = \|X_{k_0}\|_{\Upsilon_i^{(3, k_0)}}^2 \tag{4-21}$$

其中，

$$\Upsilon_{\varpi_k}^{(3, k)} \triangleq \Upsilon_{\varpi_k}^{(1)} + \gamma \Upsilon_{\varpi_k}^{(2, k)} = \begin{bmatrix} \Upsilon_{\varpi_k|1,1}^{(3, k+1)} & \Upsilon_{\varpi_k|1,2}^{(3, k+1)} & \Upsilon_{\varpi_k|1,3}^{(3, k+1)} \\ \Upsilon_{\varpi_k|2,1}^{(3, k+1)} & \Upsilon_{\varpi_k|2,2}^{(3, k+1)} & \Upsilon_{\varpi_k|2,3}^{(3, k+1)} \\ \Upsilon_{\varpi_k|3,1}^{(3, k+1)} & \Upsilon_{\varpi_k|3,2}^{(3, k+1)} & \Upsilon_{\varpi_k|3,3}^{(3, k+1)} \end{bmatrix} \tag{4-22}$$

以及，

$$\begin{cases} \Upsilon_{\sigma_k|1,1}^{(3,k)} \triangleq \tilde{C}_{\sigma_k}^\top \mathcal{Q}_{\sigma_k} \tilde{C}_{\sigma_k} + \gamma \tilde{A}_{\sigma_k}^\top \mathbb{E}_{\sigma_k} (P^{(k+1)}) \tilde{A}_{\sigma_k} \geq \mathbf{0} \\ \Upsilon_{\sigma_k|1,2}^{(3,k)} = (\Upsilon_{\sigma_k|2,1}^{(3,k)})^\top \triangleq \tilde{C}_{\sigma_k}^\top \mathcal{Q}_{\sigma_k} D_{\sigma_k} + \gamma \tilde{A}_{\sigma_k}^\top \mathbb{E}_{\sigma_k} (P^{(k+1)}) \tilde{B}_{\sigma_k} \\ \Upsilon_{\sigma_k|1,3}^{(3,k)} = (\Upsilon_{\sigma_k|3,1}^{(3,k)})^\top \triangleq \tilde{C}_{\sigma_k}^\top \mathcal{Q}_{\sigma_k} \tilde{H}_{\sigma_k} + \gamma \tilde{A}_{\sigma_k}^\top \mathbb{E}_{\sigma_k} (P^{(k+1)}) \tilde{F}_{\sigma_k} \\ \Upsilon_{\sigma_k|2,2}^{(3,k)} \triangleq D_{\sigma_k}^\top \mathcal{Q}_{\sigma_k} D_{\sigma_k} + R_{\sigma_k} + \gamma \tilde{B}_{\sigma_k}^\top \mathbb{E}_{\sigma_k} (P^{(k+1)}) \tilde{B}_{\sigma_k} > \mathbf{0} \\ \Upsilon_{\sigma_k|2,3}^{(3,k)} = (\Upsilon_{\sigma_k|3,2}^{(3,k+1)})^\top \triangleq D_{\sigma_k}^\top \mathcal{Q}_{\sigma_k} \tilde{H}_{\sigma_k} + \gamma \tilde{B}_{\sigma_k}^\top \mathbb{E}_{\sigma_k} (P^{(k+1)}) \tilde{F}_{\sigma_k} \\ \Upsilon_{\sigma_k|3,3}^{(3,k)} \triangleq \tilde{H}_{\sigma_k}^\top \mathcal{Q}_{\sigma_k} \tilde{H}_{\sigma_k} - \theta^2 I + \gamma \tilde{F}_{\sigma_k}^\top \mathbb{E}_{\sigma_k} (P^{(k+1)}) \tilde{F}_{\sigma_k} \end{cases} \quad (4-23)$$

注意到，关于控制律 $u = \{u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots\}$ 以及噪声序列 $\tilde{w} = \{\tilde{w}_{k_0}, \tilde{w}_{k_0+1}, \dots\}$ 的极小极大问题(4-13)转化为仅与 u_{k_0} 和 \tilde{w}_{k_0} 有关的无约束优化问题(4-21)。

令 $\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i)$ 对 u_{k_0} 偏导数为 0，可得：

$$\frac{\partial \mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i)}{\partial u_{k_0}} = \tilde{x}_{k_0}^\top \Upsilon_{i|1,2}^{(3,k_0)} + u_{k_0}^\top \Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)} + \tilde{w}_{k_0}^\top \Upsilon_{i|3,2}^{(3,k_0)} = \mathbf{0} \quad (4-24)$$

令 $\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i)$ 对 \tilde{w}_{k_0} 偏导数为 0，可得：

$$\frac{\partial \mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i)}{\partial \tilde{w}_{k_0}} = \tilde{x}_{k_0}^\top \Upsilon_{i|1,3}^{(3,k_0)} + u_{k_0}^\top \Upsilon_{i|2,3}^{(3,k_0)} + \tilde{w}_{k_0}^\top \Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)} = \mathbf{0} \quad (4-25)$$

其中， $\Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)} > \mathbf{0}$ 是可逆矩阵，然而 $\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)} = \tilde{H}_i^\top \mathcal{Q}_i \tilde{H}_i - \theta^2 I + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{F}_i$ 是否可逆与预设的 L_2 增益 θ 有关，因此无法直接判断，此处暂时假设 $\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)}$ 是可逆的。

联立(4-24)与(4-25)可得：

$$\begin{cases} \Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)} u_{k_0} + \Upsilon_{i|2,3}^{(3,k_0)} \tilde{w}_{k_0} = -\Upsilon_{i|2,1}^{(3,k_0)} \tilde{x}_{k_0} \\ \Upsilon_{i|3,2}^{(3,k_0)} u_{k_0} + \Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)} \tilde{w}_{k_0} = -\Upsilon_{i|3,1}^{(3,k_0)} \tilde{x}_{k_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{k_0} = -(\Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)})^{-1} (\Upsilon_{i|2,1}^{(3,k_0)} \tilde{x}_{k_0} + \Upsilon_{i|2,3}^{(3,k_0)} \tilde{w}_{k_0}) \\ \tilde{w}_{k_0} = -(\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)})^{-1} (\Upsilon_{i|3,1}^{(3,k_0)} \tilde{x}_{k_0} + \Upsilon_{i|3,2}^{(3,k_0)} u_{k_0}) \end{cases} \quad (4-26)$$

解得：

$$\begin{cases} u_{k_0} = \left\{ \Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)} - \Upsilon_{i|2,3}^{(3,k_0)} (\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)})^{-1} \Upsilon_{i|3,2}^{(3,k_0)} \right\}^{-1} \left\{ \Upsilon_{i|2,3}^{(3,k_0)} (\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)})^{-1} \Upsilon_{i|3,1}^{(3,k_0)} - \Upsilon_{i|2,1}^{(3,k_0)} \right\} \tilde{x}_{k_0} \\ \quad = K_{i,u}^{(k_0)} \tilde{x}_{k_0} \\ \tilde{w}_{k_0} = \left\{ \Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)} - \Upsilon_{i|3,2}^{(3,k_0)} (\Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)})^{-1} \Upsilon_{i|2,3}^{(3,k_0)} \right\}^{-1} \left\{ \Upsilon_{i|3,2}^{(3,k_0)} (\Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)})^{-1} \Upsilon_{i|2,1}^{(3,k_0)} - \Upsilon_{i|3,1}^{(3,k_0)} \right\} \tilde{x}_{k_0} \\ \quad = K_{i,\tilde{w}}^{(k_0)} \tilde{x}_{k_0} \end{cases} \quad (4-27)$$

此外，考虑 $\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i)$ 对 u_{k_0} 和 \tilde{w}_{k_0} 的二阶偏导数有：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i)}{\partial u_{k_0}^2} = \Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)} = D_i^\top D_i + R_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{B}_i > \mathbf{0} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i)}{\partial \tilde{w}_{k_0}^2} = \Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)} = \tilde{H}_i^\top \tilde{H}_i - \theta^2 I + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{F}_i \end{cases} \quad (4-28)$$

由于 $\Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)} > \mathbf{0}$ ，因此(4-25)求得的 u_{k_0} 为极小极大问题(4-13)的极小值。若(4-13)求得的 \tilde{w}_{k_0} 为极小极大问题(4-13)的极小值，则要求 $\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)}$ 是负定的，即 $\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)} < \mathbf{0}$ 。由于预设的 L_2 增益 θ ， $\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)}$ 的正定性无法判定，暂时假设 $\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)} < \mathbf{0}$ 。注意到，假设 $\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)} < \mathbf{0}$ 意味着 $\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)}$ 是可逆矩阵。

定义 $K_i^{(k)} = [I \quad K_{i,u}^{(k)\top} \quad K_{i,\tilde{w}}^{(k)\top}]^\top$ ，将 $X_k = [\tilde{x}_k^\top \quad u_k^\top \quad \tilde{w}_k^\top]^\top = K_i^{(k)} \tilde{x}_k$ 代入(4-19)中可得：

$$\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i) = \|X_{k_0}\|_{\Upsilon_i^{(3,k_0)}}^2 = \|K_i^{(k_0)} \tilde{x}_{k_0}\|_{\Upsilon_i^{(3,k_0)}}^2 = \mathbf{0} \quad (4-29)$$

(4-27)与(4-14)是等价的，即：

$$\|K_i^{(k_0)} \tilde{x}_{k_0}\|_{\Upsilon_i^{(3,k_0)}}^2 = \|\tilde{x}_{k_0}\|_{P_i^{(k_0)}}^2 \Leftrightarrow \tilde{x}_{k_0}^\top \left\{ \|K_i^{(k_0)}\|_{\Upsilon_i^{(3,k_0)}}^2 - P_i^{(k_0)} \right\} \tilde{x}_{k_0} = \mathbf{0} \quad (4-30)$$

(4-28)对任意的 \tilde{x}_{k_0} 都成立，可得：

$$\|K_i^{(k_0)}\|_{\Upsilon_i^{(3,k_0)}}^2 - P_i^{(k_0)} = \mathbf{0} \quad (4-31)$$

(4-17)为 k_0 时刻的博弈耦合差分 Riccati 方程，利用相同的推导得到对应 $k = k_0, \dots, \infty$ 各个时刻的博弈耦合差分 Riccati 方程。随着 $k \rightarrow \infty$ ，解矩阵 $P_i^{(k)}$ 收敛，即 $\lim_{k \rightarrow \infty} P_i^{(k)} = P_i$ ，博弈耦合差分 Riccati 方程变为 GCARE：

$$\|K_i\|_{\Upsilon_i^{(3)}}^2 - P_i = \mathbf{0} \quad (4-32)$$

给出此时的 H_∞ 控制器以及最坏噪声增益：

$$\begin{cases} K_{i,u} = \left\{ \Upsilon_{i|2,2}^{(3)} - \Upsilon_{i|2,3}^{(3)} \left(\Upsilon_{i|3,3}^{(3)} \right)^{-1} \Upsilon_{i|3,2}^{(3)} \right\}^{-1} \left\{ \Upsilon_{i|2,3}^{(3)} \left(\Upsilon_{i|3,3}^{(3)} \right)^{-1} \Upsilon_{i|3,1}^{(3)} - \Upsilon_{i|2,1}^{(3)} \right\} \\ K_{i,\tilde{w}} = \left\{ \Upsilon_{i|3,3}^{(3)} - \Upsilon_{i|3,2}^{(3)} \left(\Upsilon_{i|2,2}^{(3)} \right)^{-1} \Upsilon_{i|2,3}^{(3)} \right\}^{-1} \left\{ \Upsilon_{i|3,2}^{(3)} \left(\Upsilon_{i|2,2}^{(3)} \right)^{-1} \Upsilon_{i|2,1}^{(3)} - \Upsilon_{i|3,1}^{(3)} \right\} \end{cases} \quad (4-33)$$

将(4-32)中的 $\Upsilon_{\sigma_k}^{(3,k)} = \Upsilon_{\sigma_k}^{(1)} + \gamma \Upsilon_{\sigma_k}^{(2,k)}$ 变为 $\Upsilon_i^{(3)} = \Upsilon_i^{(1)} + \gamma \Upsilon_i^{(2)}$ ，可得：

$$P_i = \|K_i\|_{\Upsilon_i^{(1)}}^2 + \|K_i\|_{\gamma \Upsilon_i^{(2)}}^2 = \gamma \|\tilde{A}_i + \tilde{B}_i K_{i,u} + \tilde{F}_i K_{i,\tilde{w}}\|_{\mathcal{E}_i(P)}^2 + \|K_i\|_{\Upsilon_i^{(1)}}^2 \quad (4-34)$$

(4-34)是 GCARE 的闭环控制器形式，其中 $\tilde{A}_i + \tilde{B}_i K_{i,u} + \tilde{F}_i K_{i,\tilde{w}}$ 为闭环控制器。注意到，(4-34)的结构类似于引理 2.1 中的耦合 Lyapunov 方程，因此该形式可以用于闭环系统的稳定性分析。

考察 $\begin{bmatrix} K_{i,u}^\top & K_{i,\tilde{w}}^\top \end{bmatrix}^\top$, 将(4-24)化为增广矩阵的形式, 得:

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{i|2,2}^{(3)} & \Upsilon_{i|2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i|3,2}^{(3)} & \Upsilon_{i|3,3}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{i,u} \\ K_{i,\tilde{w}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Upsilon_{i|2,1}^{(3)} \\ \Upsilon_{i|3,1}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (4-35)$$

由于 $\Upsilon_{i|2,2}^{(3)}$ 与 $\Upsilon_{i|3,3}^{(3)}$ 可逆, 得到:

$$\begin{bmatrix} K_{i,u} \\ K_{i,\tilde{w}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Upsilon_{i|2,2}^{(3)} & \Upsilon_{i|2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i|3,2}^{(3)} & \Upsilon_{i|3,3}^{(3)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Upsilon_{i|2,1}^{(3)} \\ \Upsilon_{i|3,1}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (4-36)$$

将 $K_i^{(k)} = \begin{bmatrix} I & K_{i,u}^{(k)\top} & K_{i,\tilde{w}}^{(k)\top} \end{bmatrix}^\top$ 以及(4-34)代入(4-30)中, 得到:

$$\begin{aligned} P_i &= \left\| \begin{bmatrix} I & K_{i,u}^\top & K_{i,\tilde{w}}^\top \end{bmatrix}^\top \right\|_{\Upsilon_i^{(3)}}^2 \\ &= \begin{bmatrix} I & K_{i,u}^\top & K_{i,\tilde{w}}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Upsilon_{i|1,1}^{(3)} & \Upsilon_{i|1,2}^{(3)} & \Upsilon_{i|1,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i|2,1}^{(3)} & \Upsilon_{i|2,2}^{(3)} & \Upsilon_{i|2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i|3,1}^{(3)} & \Upsilon_{i|3,2}^{(3)} & \Upsilon_{i|3,3}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & K_{i,u}^\top & K_{i,\tilde{w}}^\top \end{bmatrix}^\top \\ &= \Upsilon_{i|1,1}^{(3)} - \begin{bmatrix} \Upsilon_{i|2,1}^{(3)} \\ \Upsilon_{i|3,1}^{(3)} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Upsilon_{i|2,2}^{(3)} & \Upsilon_{i|2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i|3,2}^{(3)} & \Upsilon_{i|3,3}^{(3)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Upsilon_{i|2,1}^{(3)} \\ \Upsilon_{i|3,1}^{(3)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-37)$$

将(4-21)中的具体表达式代入(4-35)中, 得到:

$$\begin{aligned} P_i &= \Upsilon_{i|1,1}^{(3)} - \begin{bmatrix} \Upsilon_{i|2,1}^{(3)} \\ \Upsilon_{i|3,1}^{(3)} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Upsilon_{i|2,2}^{(3)} & \Upsilon_{i|2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i|3,2}^{(3)} & \Upsilon_{i|3,3}^{(3)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Upsilon_{i|2,1}^{(3)} \\ \Upsilon_{i|3,1}^{(3)} \end{bmatrix} \\ &= \gamma \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i + \tilde{C}_i^\top Q_i \tilde{C}_i - \begin{bmatrix} D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \\ \tilde{H}_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \end{bmatrix}^\top \\ &\quad \times \begin{bmatrix} D_i^\top Q_i D_i + R_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{B}_i & D_i^\top Q_i \tilde{H}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{F}_i \\ \tilde{H}_i^\top Q_i D_i + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{B}_i & \tilde{H}_i^\top Q_i \tilde{H}_i - \theta^2 I + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{F}_i \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \\ \tilde{H}_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-38)$$

(4-36)中只有系统参数与权重矩阵, 可用于解矩阵 P 的理论分析与求解。证毕。

4.3.2 马尔可夫跳变系统 H_∞ 滤波器设计

针对性能指标(4-5), 假设 k_0 时刻 \mathcal{M}_{ee} 的状态为 \tilde{x}_{k_0} , 模态为 $\varpi_{k_0} = i$ 。将性能指标(4-5)转化为下列极小极大问题:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\tilde{x}_k, \varpi_{k_0} = i) &\triangleq \min_{\tilde{x}} \max_{\tilde{w}} \mathcal{J}(\tilde{x}_k, \tilde{w}_{k_0}, \varpi_{k_0} = i) \\ &= \min_{\tilde{x}} \max_{\tilde{w}} \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\mathcal{X}_k\|_{\Phi_k^{(1)}}^2 \right\} \end{aligned} \quad (4-39)$$

由于极小极大问题(4-39)的求解过程与定理 4.1 类似, 且文献[57]已经给出类似问题的解, 因此不赘述极小极大问题(4-39)的求解过程, 仅仅给出相应结论。

定义:

$$\Phi_i^{(2)} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{F}_i \tilde{F}_i^\top & \tilde{F}_i \tilde{G}_i^\top & \mathbf{0} \\ \tilde{G}_i \tilde{F}_i^\top & \tilde{G}_i \tilde{G}_i^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -g^2 I \end{bmatrix} \quad (4-40)$$

以及:

$$\begin{aligned} \Phi_i^{(3)} &\triangleq \begin{bmatrix} \tilde{A}_i \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i^\top + \tilde{F}_i \tilde{F}_i^\top & \tilde{F}_i \tilde{G}_i^\top + \tilde{A}_i \mathcal{E}_i(P) \tilde{E}_i^\top & \tilde{A}_i \mathcal{E}_i(P) \\ \tilde{G}_i \tilde{F}_i^\top + \tilde{E}_i \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i^\top & \tilde{G}_i \tilde{G}_i^\top + \tilde{E}_i \mathcal{E}_i(P) \tilde{E}_i^\top & \tilde{E}_i \mathcal{E}_i(P) \\ \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i^\top & \mathcal{E}_i(P) \tilde{E}_i^\top & \mathcal{E}_i(P) - g^2 I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_{i1,1}^{(3)} & \Phi_{i1,2}^{(3)} & \Phi_{i1,3}^{(3)} \\ \Phi_{i2,1}^{(3)} & \Phi_{i2,2}^{(3)} & \Phi_{i2,3}^{(3)} \\ \Phi_{i3,1}^{(3)} & \Phi_{i3,2}^{(3)} & \Phi_{i3,3}^{(3)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-41)$$

定理 4.2 (估计 GCARE)^[25]: 满足极小极大问题(4-39)的 H_∞ 滤波器增益 $L_{\sigma_k, \tilde{y}}$ 与噪声扰动增益 $L_{\sigma_k, \tilde{w}}$ 为:

$$\begin{cases} L_{i, \tilde{y}} = \left\{ \Phi_{i1,3}^{(2)} \left(\Phi_{i3,3}^{(2)} \right)^{-1} \Phi_{i3,2}^{(2)} - \Phi_{i1,2}^{(2)} \right\} \left\{ \Phi_{i2,2}^{(2)} - \Phi_{i2,3}^{(2)} \left(\Phi_{i3,3}^{(2)} \right)^{-1} \Phi_{i3,2}^{(2)} \right\}^{-1} \\ L_{i, \tilde{w}} = \left\{ \Phi_{i1,2}^{(2)} \left(\Phi_{i2,2}^{(2)} \right)^{-1} \Phi_{i2,3}^{(2)} - \Phi_{i1,3}^{(2)} \right\} \left\{ \Phi_{i3,3}^{(2)} - \Phi_{i3,2}^{(2)} \left(\Phi_{i2,2}^{(2)} \right)^{-1} \Phi_{i2,3}^{(2)} \right\}^{-1} \end{cases} \quad (4-42)$$

其中, P 是 GCARE(4-43)的唯一镇定解:

$$\begin{aligned} P_i &= \Phi_{i1,1}^{(2)} - \begin{bmatrix} \Phi_{i2,1}^{(2)} \\ \Phi_{i3,1}^{(2)} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Phi_{i2,2}^{(2)} & \Phi_{i2,3}^{(2)} \\ \Phi_{i3,2}^{(2)} & \Phi_{i3,3}^{(2)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Phi_{i2,1}^{(2)} \\ \Phi_{i3,1}^{(2)} \end{bmatrix} \\ &= \tilde{A}_i \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i^\top + \tilde{F}_i \tilde{F}_i^\top - \begin{bmatrix} \tilde{G}_i \tilde{F}_i^\top + \tilde{E}_i \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i^\top \\ \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i^\top \end{bmatrix}^\top \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \tilde{G}_i \tilde{G}_i^\top + \tilde{E}_i \mathcal{E}_i(P) \tilde{E}_i^\top & \tilde{E}_i \mathcal{E}_i(P) \\ \mathcal{E}_i(P) \tilde{E}_i^\top & \mathcal{E}_i(P) - g^2 I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{G}_i \tilde{F}_i^\top + \tilde{E}_i \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i^\top \\ \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i^\top \end{bmatrix} \\ &= \left\| \tilde{A}_i + L_{i, \tilde{y}} \tilde{E}_i + L_{i, \tilde{w}} \right\|_{\mathcal{E}_i(P)}^2 + \left\| L_i \right\|_{\Phi_i^{(3)}}^2 \end{aligned} \quad (4-43)$$

4.3.3 GCARE 镇定解的存在性与系统稳定性

本小节讨论 GCARE(4-15)以及(4-43)镇定解的存在性与稳定性问题。由于 GCARE(4-15)和(4-43)在结构上是类似的, 因此本章分析(4-15)镇定解的存在性与稳定性问题。关于 GCARE(4-15)具有唯一镇定解的充要条件, 文献[41]的 Theorem

给出类似的结论，本章将其改造为适合(4-15)的结果。GCARE(4-15)存在唯一镇定解当且仅当 $(\gamma^{1/2}\tilde{A}, \gamma^{1/2}\tilde{B}, \Pi)$ 能镇定， $(\Pi, (\gamma Q)^{1/2}\tilde{C}, \gamma^{1/2}\tilde{A})$ 可探测且该镇定解 P 满足：

$$\Upsilon_{i3,3}^{(3)} = \tilde{H}_i^\top Q_i \tilde{H}_i - \theta^2 I + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{F}_i < \mathbf{0} \quad (4-44)$$

注 4.1: 对于给定的被控系统 with 参考系统， $(\gamma^{1/2}\tilde{A}, \gamma^{1/2}\tilde{B}, \Pi)$ 是否能镇定只与衰减因子 γ 有关， $(\Pi, (\gamma Q)^{1/2}\tilde{C}, \gamma^{1/2}\tilde{A})$ 是否可探测只与衰减因子 γ 以及权重矩阵 Q 有关。这为本章选取衰减因子 γ 以及权重矩阵 Q 提供依据。注意到，前文中提出的 $\Upsilon_{i3,3}^{(3)} < \mathbf{0}$ 的假设是必需的，若不满足该假设，极小极大问题(4-13)是无解的，后续的推导过程也就没有意义。

若 GCARE(4-15)有唯一镇定解，在该镇定解对应的反馈控制律 $u_k = K_{\sigma_k, u} \tilde{x}_k$ 作用下，本章讨论跟踪误差系统 $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$ 的稳定性。出于跟踪不稳定系统的目的，本章在二次型性能指标引入衰减因子 γ ，这不可避免的对跟踪误差系统 $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$ 的稳定性产生影响，本章转而分析衰减跟踪误差系统 $\mathcal{M}_{dte}^{(2)}$ 的稳定性。

定理 4.3 (系统稳定性): 在 GCARE(4-15)的镇定解对应的反馈控制律 $u_k = K_{\sigma_k, u} \tilde{x}_k$ 作用下，衰减跟踪误差系统 $\mathcal{M}_{dte}^{(2)}$ 是随机稳定的。

证明: 在镇定解对应的反馈控制律 $u_k = K_{\sigma_k, u} \tilde{x}_k$ 作用下闭环系统为：

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = \sqrt{\gamma} (\tilde{A}_{\sigma_k} + \tilde{B}_{\sigma_k} K_{\sigma_k, u}) \bar{x}_k + \sqrt{\gamma} \tilde{F}_{\sigma_k} \bar{w}_k \\ \bar{z}_k = (\tilde{C}_{\sigma_k} + D_{\sigma_k} K_{\sigma_k, u}) \bar{x}_k + \tilde{H}_{\sigma_k} \bar{w}_k \end{cases} \quad (4-45)$$

由于 $\bar{w}_k \equiv 0$ ，若 $\tilde{C}_{\sigma_k} + D_{\sigma_k} K_{\sigma_k, u} \neq \mathbf{0}$ ，那么 \bar{x}_k 收敛等价于 \bar{z}_k 收敛。将 GCARE(4-15)的唯一镇定解 P 作为 Lyapunov 函数中的二次型矩阵，可以得到系统(4-45)对应的耦合 Lyapunov 方程为：

$$\begin{aligned} \gamma \|\tilde{A}_i + \tilde{B}_i K_{i, u}\|_{\mathcal{E}_i(P)}^2 - P_i &= K_i^\top \left\{ \gamma \left\| \begin{bmatrix} \tilde{A}_i & \tilde{B}_i & 0 \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{E}_i(P)}^2 - \Upsilon_i^{(3)} \right\} K_i \\ &= - \begin{bmatrix} I \\ K_{i, u} \\ K_{i, \tilde{w}} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Upsilon_{i1,1}^{(1)} & \Upsilon_{i1,2}^{(1)} & \Upsilon_{i1,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i2,1}^{(1)} & \Upsilon_{i2,2}^{(1)} & \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} & \Upsilon_{i3,2}^{(3)} & \Upsilon_{i3,3}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ K_{i, u} \\ K_{i, \tilde{w}} \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} I \\ K_{i, u} \\ K_{i, \tilde{w}} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Upsilon_{i1,1}^{(1)} & \Upsilon_{i1,2}^{(1)} & 0 \\ \Upsilon_{i2,1}^{(1)} & \Upsilon_{i2,2}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & -\Upsilon_{i3,3}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ K_{i, u} \\ K_{i, \tilde{w}} \end{bmatrix} \\ &= -\|K_i\|_{\Upsilon_i^{(4)}}^2 \end{aligned} \quad (4-46)$$

其中, $\Upsilon_i^{(4)} \geq \mathbf{0}$, 则由引理 2.1 可知, 在镇定解对应的反馈控制律 $u_k = K_{\varpi_k, u} \tilde{x}_k$ 作用下衰减跟踪误差系统 $\mathcal{M}_{de}^{(2)}$ 是随机稳定的。关于(4-46)的推导, (4-46)的第一个等式需要代入(4-29)。第三个等式具体细节如下:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} I \\ K_{i,u} \\ K_{i,\tilde{w}} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Upsilon_{i1,3}^{(3)} \\ 0 & 0 & \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} & \Upsilon_{i3,2}^{(3)} & 2\Upsilon_{i3,3}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ K_{i,u} \\ K_{i,\tilde{w}} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} I \\ K_{i,u} \\ K_{i,\tilde{w}} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Upsilon_{i1,3}^{(3)} K_{i,\tilde{w}} \\ \Upsilon_{i2,3}^{(3)} K_{i,\tilde{w}} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} + \Upsilon_{i3,2}^{(3)} K_{i,u} + 2\Upsilon_{i3,3}^{(3)} K_{i,\tilde{w}} \end{bmatrix} \\
 &= \Upsilon_{i1,3}^{(3)} K_{i,\tilde{w}} + K_{i,u}^\top \Upsilon_{i2,3}^{(3)} K_{i,\tilde{w}} + K_{i,\tilde{w}}^\top \left\{ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} + \Upsilon_{i3,2}^{(3)} K_{i,u} + 2\Upsilon_{i3,3}^{(3)} K_{i,\tilde{w}} \right\} \\
 &= \Upsilon_{i1,3}^{(3)} K_{i,\tilde{w}} - \left(\Upsilon_{i2,1}^{(3,k_0)} + \Upsilon_{i2,3}^{(3,k_0)} K_{i,\tilde{w}} \right)^\top \left(\Upsilon_{i2,2}^{(3,k_0)} \right)^{-1} \Upsilon_{i2,3}^{(3,k_0)} K_{i,\tilde{w}} \\
 &\quad + K_{i,\tilde{w}}^\top \left\{ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} - \Upsilon_{i3,2}^{(3)} \left(\Upsilon_{i2,2}^{(3,k_0)} \right)^{-1} \left(\Upsilon_{i2,1}^{(3,k_0)} + \Upsilon_{i2,3}^{(3,k_0)} K_{i,\tilde{w}} \right) + 2\Upsilon_{i3,3}^{(3)} K_{i,\tilde{w}} \right\} \\
 &= \left\{ \Upsilon_{i1,3}^{(3)} - \Upsilon_{i1,2}^{(3)} \left(\Upsilon_{i2,2}^{(3)} \right)^{-1} \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \right\} K_{i,\tilde{w}} + K_{i,\tilde{w}}^\top \left\{ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} - \Upsilon_{i3,2}^{(3)} \left(\Upsilon_{i2,2}^{(3)} \right)^{-1} \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \right\} \\
 &\quad + 2K_{i,\tilde{w}}^\top \left\{ \Upsilon_{i3,3}^{(3)} - \Upsilon_{i3,2}^{(3)} \left(\Upsilon_{i2,2}^{(3)} \right)^{-1} \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \right\} K_{i,\tilde{w}} \\
 &= \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{4-47}$$

证毕。

下面证明若 GCARE(4-15)有唯一镇定解存在, 在该镇定解对应的反馈控制律 $u_k = K_{\varpi_k, u} \tilde{x}_k$ 作用下, 衰减跟踪误差系统 $\mathcal{M}_{de}^{(2)}$ 满足预设的 L_2 增益。

定理 4.4 (L_2 增益): 在 GCARE(4-15)的镇定解对应的反馈控制律 $u_k = K_{\varpi_k, u} \tilde{x}_k$ 作用下, 衰减跟踪误差系统 $\mathcal{M}_{de}^{(2)}$ 满足预设的 L_2 增益。

证明: 令 k 时刻系统模态为 ϖ_k , 结合闭环系统(4-45), 考虑 $k+1$ 时刻:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left\{ \left\| \bar{x}_{k+1} \right\|_{P_{\varpi_{k+1}}}^2 \right\} &= \gamma \mathbb{E} \left\{ \left\| \left(\tilde{A}_{\varpi_k} + \tilde{B}_{\varpi_k} K_{\varpi_k, u} \right) \bar{x}_k + \tilde{F}_{\varpi_k} \bar{w}_k \right\|_{P_{\varpi_{k+1}}}^2 \right\} \\
 &= \gamma \mathbb{E} \left\{ \left\| \tilde{A}_{\varpi_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\varpi_k} \bar{u}_k + \tilde{F}_{\varpi_k} \bar{w}_k \right\|_{\mathcal{E}_{\varpi_k}(P)}^2 \right\} \\
 &= \gamma \mathbb{E} \left\{ \left\| \tilde{A}_{\varpi_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\varpi_k} \bar{u}_k \right\|_{\mathcal{E}_{\varpi_k}(P)}^2 + \bar{w}_k^\top \tilde{F}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P) \left(\tilde{A}_{\varpi_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\varpi_k} \bar{u}_k \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\tilde{A}_{\varpi_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\varpi_k} \bar{u}_k + \tilde{F}_{\varpi_k} \bar{w}_k \right)^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P) \tilde{F}_{\varpi_k} \bar{w}_k \right\}
 \end{aligned} \tag{4-48}$$

其中, P 为 GCARE(4-15)的唯一镇定解, 代入(4-48)中得:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left\{ \|\bar{x}_{k+1}\|_{P_{\sigma_{k+1}}}^2 \right\} \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \|\bar{x}_k\|_{P_{\sigma_k}}^2 - \|K_{\sigma_k} \bar{x}_k\|_{Y_{\sigma_k}^{(4)}}^2 + \gamma \bar{w}_k^\top \tilde{F}_{\sigma_k}^\top \mathcal{E}_{\sigma_k}(P) (\tilde{A}_{\sigma_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\sigma_k} \bar{u}_k) \right. \\
 & \quad \left. + \gamma (\tilde{A}_{\sigma_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\sigma_k} \bar{u}_k + \tilde{F}_{\sigma_k} \bar{w}_k)^\top \mathcal{E}_{\sigma_k}(P) \tilde{F}_{\sigma_k} \bar{w}_k \right\} \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \|\bar{x}_k\|_{P_{\sigma_k}}^2 - \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ K_{\sigma_k, \bar{w}} \bar{x}_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Upsilon_{\sigma_k|1,1}^{(1)} & \Upsilon_{\sigma_k|1,2}^{(1)} & \Upsilon_{\sigma_k|1,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{\sigma_k|2,1}^{(1)} & \Upsilon_{\sigma_k|2,2}^{(1)} & \Upsilon_{\sigma_k|2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{\sigma_k|3,1}^{(3)} & \Upsilon_{\sigma_k|3,2}^{(3)} & \Upsilon_{\sigma_k|3,3}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ K_{\sigma_k, \bar{w}} \bar{x}_k \end{bmatrix} \right. \\
 & \quad \left. + \gamma \bar{w}_k^\top \tilde{F}_{\sigma_k}^\top \mathcal{E}_{\sigma_k}(P) (\tilde{A}_{\sigma_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\sigma_k} \bar{u}_k) + \gamma (\tilde{A}_{\sigma_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\sigma_k} \bar{u}_k + \tilde{F}_{\sigma_k} \bar{w}_k)^\top \mathcal{E}_{\sigma_k}(P) \tilde{F}_{\sigma_k} \bar{w}_k \right\} \quad (4-49) \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \|\bar{x}_k\|_{P_{\sigma_k}}^2 + \|K_{\sigma_k, \bar{w}} \bar{x}_k - \bar{w}_k\|_{Y_{\sigma_k|3,3}^{(3)}}^2 - \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Upsilon_{\sigma_k|1,1}^{(1)} & \Upsilon_{\sigma_k|1,2}^{(1)} & \Upsilon_{\sigma_k|1,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{\sigma_k|2,1}^{(1)} & \Upsilon_{\sigma_k|2,2}^{(1)} & \Upsilon_{\sigma_k|2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{\sigma_k|3,1}^{(3)} & \Upsilon_{\sigma_k|3,2}^{(3)} & \Upsilon_{\sigma_k|3,3}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \end{bmatrix} \right. \\
 & \quad \left. + \gamma \bar{w}_k^\top \tilde{F}_{\sigma_k}^\top \mathcal{E}_{\sigma_k}(P) (\tilde{A}_{\sigma_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\sigma_k} \bar{u}_k) + \gamma (\tilde{A}_{\sigma_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\sigma_k} \bar{u}_k + \tilde{F}_{\sigma_k} \bar{w}_k)^\top \mathcal{E}_{\sigma_k}(P) \tilde{F}_{\sigma_k} \bar{w}_k \right\} \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \|\bar{x}_k\|_{P_{\sigma_k}}^2 + \|K_{\sigma_k, \bar{w}} \bar{x}_k - \bar{w}_k\|_{Y_{\sigma_k|3,3}^{(3)}}^2 - \|\bar{x}_k\|_{Y_{\sigma_k}^{(1)}}^2 \right\} \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \|\bar{x}_k\|_{P_{\sigma_k}}^2 + \|\nu_k\|_{Y_{\sigma_k|3,3}^{(3)}}^2 - \|\bar{z}_k\|_{Q_{\sigma_k}}^2 - \|\bar{u}_k\|_{R_{\sigma_k}}^2 + \theta^2 \|\bar{w}_k\|_2^2 \right\}
 \end{aligned}$$

其中, $\nu_k = K_{\sigma_k, \bar{w}} \bar{x}_k - \bar{w}_k$, 由于在反馈控制律 $u_k = K_{\sigma_k, u} \tilde{x}_k$ 下系统(4-45)闭环稳定, 即:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \|\bar{x}_k\|_{P_{\sigma_k}}^2 \mid \bar{x}_{k_0}, \sigma_{k_0} \right\} = 0 \quad (4-50)$$

且系统处于零初始条件下, 则:

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0}^{\kappa} \mathbb{E} \left\{ \|\bar{x}_{k+1}\|_{P_{\sigma_{k+1}}}^2 - \|\bar{x}_k\|_{P_{\sigma_k}}^2 \right\} = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \|\bar{x}_{\kappa}\|_{P_{\sigma_{\kappa}}}^2 - \|\bar{x}_{k_0}\|_{P_{\sigma_{k_0}}}^2 \right\} = 0 \quad (4-51)$$

则将(4-49)代入(4-51)中得:

$$\mathbb{E} \left\{ \sum_{k_0}^{\infty} (\|\bar{z}_k\|_{Q_{\sigma_k}}^2 + \|\bar{u}_k\|_{R_{\sigma_k}}^2) \right\} = \mathbb{E} \left\{ \sum_{k_0}^{\infty} (\theta^2 \|\bar{w}_k\|_2^2 - \|\nu_k\|_{Y_{\sigma_k|3,3}^{(3)}}^2) \right\} \leq \theta^2 \sum_{k_0}^{\infty} \|\bar{w}_k\|_2^2 \quad (4-52)$$

(4-37)中第二个等式到第三个等式的关键在于:

$$\begin{aligned}
 & \left\| K_{\sigma_k, \tilde{w}} \bar{x}_k - \bar{w}_k \right\|_{\Upsilon_{\sigma_k|3,3}^{(3)}}^2 - \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Upsilon_{\sigma_k|1,1}^{(1)} & \Upsilon_{\sigma_k|1,2}^{(1)} & \Upsilon_{\sigma_k|1,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{\sigma_k|2,1}^{(1)} & \Upsilon_{\sigma_k|2,2}^{(1)} & \Upsilon_{\sigma_k|2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{\sigma_k|3,1}^{(3)} & \Upsilon_{\sigma_k|3,2}^{(3)} & \Upsilon_{\sigma_k|3,3}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ K_{\sigma_k, \tilde{w}} \bar{x}_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Upsilon_{\sigma_k|1,1}^{(1)} & \Upsilon_{\sigma_k|1,2}^{(1)} & \Upsilon_{\sigma_k|1,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{\sigma_k|2,1}^{(1)} & \Upsilon_{\sigma_k|2,2}^{(1)} & \Upsilon_{\sigma_k|2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{\sigma_k|3,1}^{(3)} & \Upsilon_{\sigma_k|3,2}^{(3)} & \Upsilon_{\sigma_k|3,3}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ K_{\sigma_k, \tilde{w}} \bar{x}_k \end{bmatrix} \\
 & = -\bar{x}_k^\top K_{\sigma_k, \tilde{w}}^\top \Upsilon_{\sigma_k|3,3}^{(3)} \bar{w}_k - \bar{w}_k^\top \Upsilon_{\sigma_k|3,3}^{(3)} K_{\sigma_k, \tilde{w}} \bar{x}_k \\
 & - \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Upsilon_{\sigma_k|1,3}^{(3)} \\ 0 & 0 & \Upsilon_{\sigma_k|2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{\sigma_k|3,1}^{(3)} & \Upsilon_{\sigma_k|3,2}^{(3)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \end{bmatrix} \\
 & = \left(\Upsilon_{\sigma_k|3,1}^{(3)} \bar{x}_k + \Upsilon_{\sigma_k|3,2}^{(3)} \bar{u}_k \right) \Upsilon_{\sigma_k|3,3}^{(3)} \bar{w}_k + \bar{w}_k^\top \left(\Upsilon_{\sigma_k|3,1}^{(3)} \bar{x}_k + \Upsilon_{\sigma_k|3,2}^{(3)} \bar{u}_k \right) \\
 & - \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Upsilon_{\sigma_k|1,3}^{(3)} \\ 0 & 0 & \Upsilon_{\sigma_k|2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{\sigma_k|3,1}^{(3)} & \Upsilon_{\sigma_k|3,2}^{(3)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \end{bmatrix} \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{4-53}$$

证毕。

4.4 基于策略迭代求解 GCARE

本小节讨论 GCARE(4-15)以及(4-43)唯一镇定解的求解问题，由于 GCARE(4-15)和(4-43)在结构上是类似的，因此本章主要分析转移概率已知和未知两种情况下(4-15)唯一镇定解的求解问题。

4.4.1 转移概率已知时的 GCARE 求解

在本章的第 3.3 小节中提出 Kleinman 迭代算法用于迭代求解 CARE(3-9)。对于 GCARE(4-15)，Kleinman 迭代算法依然适用，但是其收敛性难以证明。本小节尝试使用 Newton-Kantorovich 定理证明 Kleinman 迭代算法的收敛性。

定理 4.5 (Kleinman 算法): GCARE(4-15)存在唯一镇定解 P 时，给定镇定控制器 $K_u^{(l)} = (K_{1,u}^{(l)}, \dots, K_{N,u}^{(l)})$ 与 $K_{\tilde{w}}^{(l)} = (K_{1,\tilde{w}}^{(l)}, \dots, K_{N,\tilde{w}}^{(l)})$ ，若 $P^{(l)} = (P_1^{(l)}, \dots, P_N^{(l)})$ 是下列耦合 Lyapunov 方程的唯一镇定解：

$$\begin{bmatrix} \gamma \|\Gamma_1^{(l)}\|_{\mathcal{E}_1(P^{(l)})}^2 - P_1^{(l)} + \|K_1^{(l)}\|_{\Gamma_1^{(1)}}^2 \\ \vdots \\ \gamma \|\Gamma_N^{(l)}\|_{\mathcal{E}_N(P^{(l)})}^2 - P_N^{(l)} + \|K_N^{(l)}\|_{\Gamma_N^{(1)}}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4-54)$$

其中 $\Gamma_i^{(l)} = \gamma^{1/2}(\tilde{A}_i + \tilde{B}_i K_{i,u}^{(l)} + \tilde{F}_i K_{i,\tilde{w}}^{(l)})$, $K_i^{(l)} = [I \quad K_{i,u}^{(l)\top} \quad K_{i,\tilde{w}}^{(l)\top}]^\top$ 。基于 $P^{(l)}$ 进一步给出:

$$\begin{bmatrix} K_{i,u}^{(l+1)} \\ K_{i,\tilde{w}}^{(l+1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,2}^{(3,l)} & \Upsilon_{i2,3}^{(3,l)} \\ \Upsilon_{i3,2}^{(3,l)} & \Upsilon_{i3,3}^{(3,l)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,1}^{(3,l)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3,l)} \end{bmatrix} \quad (4-55)$$

若选择镇定控制器 $K_u^{(l)} = (K_{1,u}^{(l)}, \dots, K_{N,u}^{(l)})$ 与 $K_{\tilde{w}}^{(l)} = (K_{1,\tilde{w}}^{(l)}, \dots, K_{N,\tilde{w}}^{(l)})$ 进行初始迭代, 则 $\lim_{l \rightarrow \infty} P^{(l)} = P$ 。

证明: 将 GCARE(4-26)定义为等价的非线性算子:

$$\mathcal{F}(P) = [\mathcal{F}_1(P) \quad \mathcal{F}_2(P) \quad \dots \quad \mathcal{F}_N(P)]^\top \quad (4-56)$$

其中,

$$\mathcal{F}_i(P) = \Upsilon_{i1,1}^{(3)} - P_i - \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,1}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,2}^{(3)} & \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,2}^{(3)} & \Upsilon_{i3,3}^{(3)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,1}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (4-57)$$

$\mathcal{F}(P)$ 的零点就是 GCARE(4-15)的解。定义牛顿迭代序列为:

$$P^{(l+1)} = P^{(l)} - \left\{ \dot{\mathcal{F}}(P^{(l)}) \right\}^{-1} \mathcal{F}(P^{(l)}) \quad (4-58)$$

其中, $\dot{\mathcal{F}}(P^{(l)})$ 为 \mathcal{F} 在 $P^{(l)}$ 处的 Fréchet 导数。下面证明基于 $P^{(l)}$ 的牛顿迭代(4-58)与 Kleinman 迭代(4-54)~(4-55)等价。牛顿迭代(4-58)在 $\dot{\mathcal{F}}(P^{(l)})$ 可逆时等价于对(4-59)求解 $P^{(l+1)}$:

$$\dot{\mathcal{F}}(P^{(l)})P^{(l+1)} - \dot{\mathcal{F}}(P^{(l)})P^{(l)} + \mathcal{F}(P^{(l)}) = \mathbf{0} \quad (4-59)$$

Fréchet 导数通常难以直接计算, 下面引入 Gâteaux 导数便于 Fréchet 导数的计算。

\mathcal{F} 在 P 处的 Gâteaux 导数 $\dot{\mathcal{F}}_G(P)$ 满足:

$$\mathcal{F}(P + \alpha \mathcal{V}) = \mathcal{F}(P) + \alpha \dot{\mathcal{F}}_G(P) \mathcal{V} + o(\alpha), \|\mathcal{V}\| = 1 \quad (4-60)$$

其中, α 为零点某个邻域内的任意实数, $o(\alpha)$ 为 α 的高阶无穷小, 则 \mathcal{F} 在 P 处的 Gâteaux 导数可直接通过下式表达:

$$\dot{\mathcal{F}}_G(P) \mathcal{V} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(P + \alpha \mathcal{V}) - \mathcal{F}(P)}{\alpha} \quad (4-61)$$

关于 Fréchet 导数与 Gâteaux 导数的关系为: 若 \mathcal{F} 在 P 的某个邻域内 Gâteaux 导数存在, 且 \mathcal{F} 在 P 处的 Gâteaux 导数 $\dot{\mathcal{F}}_G(P)$ 连续, 那么 \mathcal{F} 在 P 处的 Gâteaux 导数

$\dot{\mathcal{F}}_G(P)$ 等于 \mathcal{F} 在 P 处的 Fréchet 导数 $\dot{\mathcal{F}}(P)$ ，后续推导将 Fréchet 导数与 Gâteaux 导数都表示为 $\dot{\mathcal{F}}(P)$ 。考察 $\dot{\mathcal{F}}(P)$ 及其 Gâteaux 导数 $\dot{\mathcal{F}}(P)$ ，对于增量 $\alpha\mathcal{V}$ 有：

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{F}_i(P + \alpha\mathcal{V}) \\
 &= \tilde{C}_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(P + \alpha\mathcal{V}) \tilde{A}_i - (P_i + \alpha\mathcal{V}_i) - \left\{ \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,1}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} \end{bmatrix} + \alpha\gamma \begin{bmatrix} \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(\mathcal{V}) \tilde{A}_i \\ \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(\mathcal{V}) \tilde{A}_i \end{bmatrix} \right\}^\top \\
 & \times \left\{ \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,2}^{(3)} & \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,2}^{(3)} & \Upsilon_{i3,3}^{(3)} \end{bmatrix} + \alpha\gamma \left\| \begin{bmatrix} \tilde{B}_i & \tilde{F}_i \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{E}_i(\mathcal{V})}^2 \right\}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,1}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} \end{bmatrix} + \alpha\gamma \begin{bmatrix} \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(\mathcal{V}) \tilde{A}_i \\ \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(\mathcal{V}) \tilde{A}_i \end{bmatrix} \right\} \\
 &= \Upsilon_{i1,1}^{(3)} - P_i + \alpha\gamma \left\| \tilde{A}_i \right\|_{\mathcal{E}_i(\mathcal{V})}^2 - \alpha\mathcal{V}_i - \left\| \mathcal{G}_{i,1}(\alpha, P, \mathcal{V}) \right\|_{\{\mathcal{G}_{i,2}(\alpha, P, \mathcal{V})\}^{-1}}^2
 \end{aligned} \tag{4-62}$$

其中，

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{i,1}(\alpha, P, \mathcal{V}) = \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,1}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} \end{bmatrix} + \alpha\gamma \begin{bmatrix} \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(\mathcal{V}) \tilde{A}_i \\ \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(\mathcal{V}) \tilde{A}_i \end{bmatrix} \\ \mathcal{G}_{i,2}(\alpha, P, \mathcal{V}) = \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,2}^{(3)} & \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,2}^{(3)} & \Upsilon_{i3,3}^{(3)} \end{bmatrix} + \alpha\gamma \left\| \begin{bmatrix} \tilde{B}_i & \tilde{F}_i \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{E}_i(\mathcal{V})}^2 \end{cases} \tag{4-63}$$

求 $\mathcal{G}_{i,1}(\alpha, P, \mathcal{V})$ 与 $\mathcal{G}_{i,2}(\alpha, P, \mathcal{V})$ 在 $\alpha=0$ 时的值以及对 α 的偏导数，有：

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{i,1}(0, P, \mathcal{V}) = \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,1}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} \end{bmatrix} \\ \mathcal{G}_{i,2}(0, P, \mathcal{V}) = \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,2}^{(3)} & \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,2}^{(3)} & \Upsilon_{i3,3}^{(3)} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{4-64}$$

以及，

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \mathcal{G}_{i,1}(\alpha, P, \mathcal{V})}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathcal{G}_{i,1}(\alpha, P, \mathcal{V}) - \mathcal{G}_{i,1}(0, P, \mathcal{V})}{\alpha} = \gamma \begin{bmatrix} \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(\mathcal{V}) \tilde{A}_i \\ \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(\mathcal{V}) \tilde{A}_i \end{bmatrix} \\ \left. \frac{\partial \mathcal{G}_{i,2}(\alpha, P, \mathcal{V})}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathcal{G}_{i,2}(\alpha, P, \mathcal{V}) - \mathcal{G}_{i,2}(0, P, \mathcal{V})}{\alpha} = \left\| \begin{bmatrix} \tilde{B}_i & \tilde{F}_i \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{E}_i(\mathcal{V})}^2 \end{cases} \tag{4-65}$$

$\{\mathcal{G}_{i,2}(\alpha, P, \mathcal{V})\}^{-1}$ 对 α 的偏导数为：

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{\partial \{\mathcal{G}_{i,2}(\alpha, P, \mathcal{V})\}^{-1}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \\
 &= -\{\mathcal{G}_{i,2}^\top(0, P, \mathcal{V})\}^{-1} \left. \frac{\partial \mathcal{G}_{i,2}(\alpha, P, \mathcal{V})}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \{\mathcal{G}_{i,2}(0, P, \mathcal{V})\}^{-1} \\
 &= -\left\| \{\mathcal{G}_{i,2}(0, P, \mathcal{V})\}^{-1} \right\|_{\left. \frac{\partial \mathcal{G}_{i,2}(\alpha, P, \mathcal{V})}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}}^2
 \end{aligned} \tag{4-66}$$

计算 $\dot{\mathcal{F}}_i(P)\mathcal{V}$ 得到：

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{F}}_i(P)\mathcal{V} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}_i(P + \alpha\mathcal{V}) - \mathcal{F}_i(P)}{\alpha} \\
 &= \gamma \left\| \tilde{A}_i \right\|_{\mathcal{E}_i(\mathcal{V})}^2 - \mathcal{V}_i - \frac{\partial \left\| \mathcal{G}_{i,1}(\alpha, P, \mathcal{V}) \right\|_{\{\mathcal{G}_{i,2}(\alpha, P, \mathcal{V})\}^{-1}}^2}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \\
 &= \gamma \left\| \tilde{A}_i \right\|_{\mathcal{E}_i(\mathcal{V})}^2 - \mathcal{V}_i - \frac{d\mathcal{G}_{i,1}^\top(\alpha, P, \mathcal{V})}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \mathcal{G}_{i,2}^{-1}(0, P, \mathcal{V}) \mathcal{G}_{i,1}(0, P, \mathcal{V}) \\
 &\quad + \left\| \mathcal{G}_{i,2}^{-1}(0, P, \mathcal{V}) \mathcal{G}_{i,1}(0, P, \mathcal{V}) \right\|_{\frac{\partial \mathcal{G}_{i,2}(\alpha, P, \mathcal{V})}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}}^2 \\
 &\quad - \mathcal{G}_{i,1}^\top(0, P, \mathcal{V}) \mathcal{G}_{i,2}^{-1}(0, P, \mathcal{V}) \frac{d\mathcal{G}_{i,1}(\alpha, P, \mathcal{V})}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}
 \end{aligned} \tag{4-67}$$

同时,

$$\begin{bmatrix} K_{i,u} \\ K_{i,\tilde{w}} \end{bmatrix} = -\{\mathcal{G}_{i,2}(0, P, \mathcal{V})\}^{-1} \mathcal{G}_{i,1}(0, P, \mathcal{V}) \tag{4-68}$$

将代入(4-62)~(4-66)以及(4-68)代入(4-67)得:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{F}}_i(P)\mathcal{V} &= \gamma \left\| \tilde{A}_i \right\|_{\mathcal{E}_i(\mathcal{V})}^2 + \gamma \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(\mathcal{V}) (\tilde{B}_i K_{i,u} + \tilde{F}_i K_{i,\tilde{w}}) \\
 &\quad + \gamma (\tilde{B}_i K_{i,u} + \tilde{F}_i K_{i,\tilde{w}})^\top \mathcal{E}_i(\mathcal{V}) \tilde{A}_i + \gamma \left\| \tilde{B}_i K_{i,u} + \tilde{F}_i K_{i,\tilde{w}} \right\|_{\mathcal{E}_i(\mathcal{V})}^2 - \mathcal{V}_i \\
 &= \left\| \Gamma_i \right\|_{\mathcal{E}_i(\mathcal{V})}^2 - \mathcal{V}_i
 \end{aligned} \tag{4-69}$$

其中, $\Gamma_i = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i K_{i,u} + \tilde{F}_i K_{i,\tilde{w}}$ 。对于 $\dot{\mathcal{F}}(P)$ 有:

$$\dot{\mathcal{F}}(P)\mathcal{V} = \begin{bmatrix} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}_1(P + \alpha\mathcal{V}) - \mathcal{F}_1(P)}{\alpha} \\ \vdots \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}_N(P + \alpha\mathcal{V}) - \mathcal{F}_N(P)}{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{F}}_1(P)\mathcal{V} \\ \vdots \\ \dot{\mathcal{F}}_N(P)\mathcal{V} \end{bmatrix} \tag{4-70}$$

将 $P^{(l)}$ 作为自变量, 将 $P^{(l)}$ 以及 $P^{(l+1)}$ 作为增量矩阵 \mathcal{V} 代入(4-70)中得:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\mathcal{F}}(P^{(l)})P^{(l)} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{F}}_1(P^{(l)})P^{(l)} \\ \vdots \\ \dot{\mathcal{F}}_N(P^{(l)})P^{(l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\| \Gamma_1^{(l+1)} \right\|_{\mathcal{E}_1(P^{(l)})}^2 - P_1^{(l)} \\ \vdots \\ \left\| \Gamma_N^{(l+1)} \right\|_{\mathcal{E}_N(P^{(l)})}^2 - P_N^{(l)} \end{bmatrix} \\ \dot{\mathcal{F}}(P^{(l)})P^{(l+1)} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{F}}_1(P^{(l)})P^{(l+1)} \\ \vdots \\ \dot{\mathcal{F}}_N(P^{(l)})P^{(l+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\| \Gamma_1^{(l+1)} \right\|_{\mathcal{E}_1(P^{(l+1)})}^2 - P_1^{(l+1)} \\ \vdots \\ \left\| \Gamma_N^{(l+1)} \right\|_{\mathcal{E}_N(P^{(l+1)})}^2 - P_N^{(l+1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \tag{4-71}$$

(4-57)中代入 $P^{(l)}$ 并转化为形如(4-32)的 GCARE 闭环控制器形式, 即:

$$\mathcal{F}_i(P^{(l)}) = \left\| \Gamma_i^{(l+1)} \right\|_{\mathcal{E}_i(P^{(l)})}^2 - P_i^{(l)} + \left\| K_i^{(l+1)} \right\|_{\Upsilon_i^{(1)}}^2 \quad (4-72)$$

由 $\mathcal{F}(P) = [\mathcal{F}_1(P) \quad \mathcal{F}_2(P) \quad \cdots \quad \mathcal{F}_N(P)]^\top$ 得:

$$\mathcal{F}(P^{(l)}) = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1(P^{(l)}) \\ \vdots \\ \mathcal{F}_N(P^{(l)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\| \Gamma_1^{(l+1)} \right\|_{\mathcal{E}_1(P^{(l)})}^2 - P_1^{(l)} + \left\| K_1^{(l+1)} \right\|_{\Upsilon_1^{(1)}}^2 \\ \vdots \\ \left\| \Gamma_N^{(l+1)} \right\|_{\mathcal{E}_N(P^{(l)})}^2 - P_N^{(l)} + \left\| K_N^{(l+1)} \right\|_{\Upsilon_N^{(1)}}^2 \end{bmatrix} \quad (4-73)$$

将(4-71)以及(4-73)代入(4-59)中得:

$$\begin{aligned} & \dot{\mathcal{F}}(P^{(l)})P^{(l+1)} - \dot{\mathcal{F}}(P^{(l)})P^{(l)} + \mathcal{F}(P^{(l)}) \\ &= \begin{bmatrix} \left\| \Gamma_1^{(l+1)} \right\|_{\mathcal{E}_1(P^{(l+1)})}^2 - P_1^{(l+1)} + \left\| K_1^{(l+1)} \right\|_{\Upsilon_1^{(1)}}^2 \\ \vdots \\ \left\| \Gamma_N^{(l+1)} \right\|_{\mathcal{E}_N(P^{(l+1)})}^2 - P_N^{(l+1)} + \left\| K_N^{(l+1)} \right\|_{\Upsilon_N^{(1)}}^2 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4-74)$$

因此基于 $P^{(l)}$ 的牛顿迭代(4-58)与 Kleinman 迭代(4-54)~(4-55)等价, 区别在于一个基于解矩阵 $P^{(l)}$ 进行迭代, 一个基于镇定控制器进行迭代。只需选取满足引理 2.3 Newton-Kantorovich 定理的解矩阵进行初始迭代, 就可保证牛顿迭代序列 $\{P^{(l)}, l=0,1,2,\dots\}$ 收敛到 GCARE(4-15)的唯一镇定解。同时, 文献[71]指出, 镇定控制器所对应的解矩阵 $P^{(l)}$ 满足 Newton-Kantorovich 定理。因此选择镇定控制器 $K_u^{(l)} = (K_{1,u}^{(l)}, \dots, K_{N,u}^{(l)})$ 与 $K_w^{(l)} = (K_{1,w}^{(l)}, \dots, K_{N,w}^{(l)})$ 进行初始迭代, 则 $\lim_{l \rightarrow \infty} P^{(l)} = P$ 。证毕。

下面给出定理 4.3 Kleinman 算法的伪代码:

表 4-1 Kleinman 算法求解 GCARE

Table 4-1. Kleinman algorithm for solving CARE

算法 4.1 Kleinman 算法求解 GCARE
输入: 权重矩阵 Q 、 R 、衰减因子 γ 、收敛阈值 ε 、初始解矩阵 $P^{(0)}$ 、镇定控制器 $K_u^{(0)}$ 、初始噪声增益 $K_w^{(0)}$
输出: 近似镇定解 P^* 、 H_∞ 控制器 K_u^* 、最坏噪声 K_w^*
1. 定义 $l=0$;
2. 对于给定的控制器 $K_u^{(l)}$ 、 $K_w^{(l)}$, 基于(4-54)求解 $P^{(l)}$;
3. 利用 $P^{(l)}$, 使用(4-55)得到 $K_u^{(l+1)}$ 、 $K_w^{(l+1)}$;
4. 判断是否 $\ P^{(l)} - P^{(l+1)}\ \leq \varepsilon$, 是则进入步骤 6, 否则进入步骤 5;
5. 令 $l=l+1$, 返回步骤 1;
6. 输出近似镇定解 $P^* = P^{(l)}$, $K_u^* = K_u^{(l)}$, $K_w^* = K_w^{(l)}$;

注 4.2: 算法 4.1 中, 初始输入所需的镇定控制器 $K_u^{(0)}$ 利用文献[72]提出的线性矩阵不等式算法求解获得, $K_w^{(0)}$ 选取零矩阵即可。此外, 步骤 2 中(4-22)的解 $P^{(l)}$ 使用引理 2.1 中的(2-11)以及(2-12)获得。

4.4.2 转移概率未知时的 GCARE 求解

根据定理 4.5, 本文提出一种基于初始镇定控制器进行迭代求解 CARE (4-25) 的 Kleinman 算法, 该算法能收敛到 CARE (4-15)的唯一镇定解 P^* 。然而, Kleinman 算法的求解需要转移概率, 为了摆脱这样一个理想的假设, 本章将尝试在转移概率未知的情况下求解 CARE (4-15)。文献[33]提出一种 TD(λ)算法用于求解转移概率未知时的 GCARE, 其核心思想在于求解 $\mathcal{E}(P) = (\mathcal{E}_1(P), \dots, \mathcal{E}_N(P))$ 而不是 $P = (P_1, \dots, P_N)$, 从而克服转移概率未知的困难。受文献[33]的启发, 本章提出 TD(λ)算法用于求解未知转移概率时的 GCARE (4-15)。定义 $\mathcal{E}^{(l)} = \mathcal{E}(P^{(l)})$, 若 GCARE(4-15)存在唯一镇定解 P , P 对应的 $\mathcal{E}(P)$ 可表示为 \mathcal{E} 。

GCARE(4-15)存在唯一镇定解 P 时, 给定解矩阵 $\mathcal{E}^{(l)} = (\mathcal{E}_1^{(l)}, \dots, \mathcal{E}_N^{(l)})$ 与镇定控制器选择镇定控制器 $K_u^{(l)} = (K_{1,u}^{(l)}, \dots, K_{N,u}^{(l)})$ 与 $K_w^{(l)} = (K_{1,w}^{(l)}, \dots, K_{N,w}^{(l)})$, 使用(4-75)迭代求解 $\mathcal{E}_i^{(l+1)}$:

$$\mathcal{E}_i^{(l+1)} = \mathcal{E}_i^{(l)} + \mu_l \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathcal{T}_i(l, k, \mathcal{E}^{(l)}) \quad (4-75)$$

其中, l 代表第 l 幕, k 表示每幕中的第 k 步, 超参数 λ 表示回报权重, μ 为迭代步长满足:

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \mu_l = \infty \\ \sum_{l=0}^{\infty} \mu_l^2 < \infty \end{cases} \quad (4-76)$$

定义时序差分 $\mathcal{T}_i(l, k, \mathcal{E}^{(l)})$ 为:

$$\mathcal{T}_i(l, k, \mathcal{E}^{(l)}) = \left(\Lambda_i^{(l,k)} \right)^{\top} \left\{ \left\| \Gamma_{\varpi_{l,k+1}}^{(l)} \right\|_{\mathcal{E}_{\varpi_{l,k+1}}^{(l)}}^2 - \mathcal{E}_{\varpi_{l,k}}^{(l)} + \left\| K_{\varpi_{l,k+1}}^{(l)} \right\|_{Y_{\varpi_{l,k+1}}^{(1)}}^2 \right\} \Lambda_i^{(l,k)} \quad (4-77)$$

其中, $\varpi_{l,k}$ 表示第 l 幕第 k 步的模式, 增广控制器 $K_i^{(l)} = \begin{bmatrix} I & K_{i,u}^{(l)\top} & K_{i,w}^{(l)\top} \end{bmatrix}^{\top}$, 闭环控制器 $\Gamma_i^{(l)} = \gamma^{1/2} (\tilde{A}_i + \tilde{B}_i K_{i,u}^{(l)} + \tilde{F}_i K_{i,w}^{(l)})$,

$$\Lambda_i^{(l,k)} = \begin{cases} I & , k = 0 \\ \Gamma_{\varpi_{l,k}}^{(l)} \Lambda_i^{(l,k-1)} & , k > 0 \end{cases} \quad (4-78)$$

基于 $K_{i,u}^{(l)}$ 、 $K_{i,w}^{(l)}$ 与 $\mathcal{E}_i^{(l)}$ 求解得到 $\mathcal{E}_i^{(l+1)}$ 后, 利用 $\mathcal{E}_i^{(l+1)}$ 进一步给出:

$$\begin{bmatrix} K_{i,u}^{(l+1)} \\ K_{i,\tilde{w}}^{(l+1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,2}^{(3,l+1)} & \Upsilon_{i2,3}^{(3,l+1)} \\ \Upsilon_{i3,2}^{(3,l+1)} & \Upsilon_{i3,3}^{(3,l+1)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,1}^{(3,l+1)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3,l+1)} \end{bmatrix} \quad (4-79)$$

若选择镇定控制器 $K_u^{(0)}$ 与 $K_{\tilde{w}}^{(0)}$ 进行初始迭代, 则 $\lim_{l \rightarrow \infty} \mathcal{E}^{(l)} = \mathcal{E}$ 。

定义 $\mathbf{E} = \{0, 1, \dots, \mathbf{e}\}$ 表示 \mathbf{e} 幕训练数据, $\mathbf{S} = \{0, 1, \dots, \mathbf{s}\}$ 表示每一幕的 \mathbf{s} 步, 假设具有数量充足的模态序列 $\mathbf{M} = \{\varpi_{l,k} \in \mathcal{N}, (l, k) \in \mathbf{E} \times \mathbf{S}\}$ 。下面给出 $\text{TD}(\lambda)$ 算法的伪代码:

表 4-2 $\text{TD}(\lambda)$ 算法求解 GCARE

Table 4-2. $\text{TD}(\lambda)$ algorithm for solving GCARE

算法 4.2 $\text{TD}(\lambda)$ 算法求解 GCARE
<p>输入: 系统参数矩阵、权重矩阵 Q 和 R、衰减因子 γ、初始解矩阵 $\mathcal{E}^{(0)}$、镇定控制器 $K_u^{(0)}$、初始噪声增益 $K_{\tilde{w}}^{(0)}$、模态序列 \mathbf{M}、回报权重 λ、迭代步长 μ</p> <p>输出: 近似镇定解 \mathcal{E}^*、H_∞ 控制器 K_u^*、最坏噪声 $K_{\tilde{w}}^*$</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 定义 $l = 0$; 2. 定义 $k = 0$; 3. 基于给定的 $\mathcal{E}^{(l)}$ 与 $K_u^{(l)}$、$K_{\tilde{w}}^{(l)}$, 使用(4-77)计算时序差分 $\mathcal{T}_i(l, k, \mathcal{E}^{(l)})$; 4. 判断 k 是否小于 \mathbf{s}, 是则进入步骤 5, 否则进入步骤 6; 5. 令 $k = k + 1$, 返回步骤 3; 6. 利用步骤 3 计算的时序差分 $\mathcal{T}_i(l, k, \mathcal{E}^{(l)})$, 基于(4-63)求解 $\mathcal{E}^{(l+1)}$; 7. 利用 $\mathcal{E}^{(l+1)}$, 使用(4-79)得到 $S_u^{(l+1)}$; 8. 判断 l 是否小于 \mathbf{e}, 是则进入步骤 9, 否则进入步骤 10; 9. 令 $l = l + 1$, 返回步骤 2; 10. 输出近似镇定解 $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}^{(l)}$, $K_u^* = K_u^{(l)}$, $K_{\tilde{w}}^* = K_{\tilde{w}}^{(l)}$;

注 4.3: 算法 4.2 中, 初始输入所需的镇定控制器 $K_u^{(0)}$ 利用文献[72]提出的线性矩阵不等式算法求解获得, $K_{\tilde{w}}^{(0)}$ 选取零矩阵即可。

4.5 直流电机仿真

对于前文所提的无限时域下 MJS 的 H_∞ 跟踪控制问题求解算法, 采用第三章提出的直流电机模型^[73]进行仿真, 验证本章提出理论的正确性与有效性。仿真使用的部分系统参数与第三章相同, 其余参数设置为:

$$\begin{aligned}
 E_i &= \begin{bmatrix} 2.00 & 0 & 0 \\ 0 & 1.05 & 0 \end{bmatrix}, \\
 F_i &= \begin{bmatrix} 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 G_i &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.60 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 H_i &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.10 \ 0.15]
 \end{aligned}$$

参考系统参数为:

$$\begin{aligned}
 \hat{E} &= \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 \hat{F} &= \begin{bmatrix} 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 \hat{G} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

设置权重矩阵 $Q = 10I$, $R = 0.5I$, 衰减因子 $\gamma = 0.99$, 滤波 L_2 增益 $\vartheta = 15$, 控制 L_2 增益 $\theta = 22.35$, 选取初始噪声增益 $K_w^{(0)} = \mathbf{0}$, 初始镇定控制器 $K_u^{(0)}$ 为:

$$\begin{aligned}
 K_{1,u}^{(0)} &= [0.231 \ -0.850 \ 0.050 \ 0.050 \ 0.050 \ 0.050] \\
 K_{2,u}^{(0)} &= [0.201 \ -1.502 \ 0.100 \ 0.050 \ 0.000 \ 0.100] \\
 K_{3,u}^{(0)} &= [0.100 \ -0.998 \ 0.100 \ 0.150 \ 0.130 \ 0.120]
 \end{aligned} \tag{4-80}$$

首先, 基于以上参数, 执行算法4.1求解GCARE(4-15), 图4-1与图4-2给出 $P^{(l)}$ 与 $K_u^{(l)}$ 的收敛过程。注意到, 算法4.1经过5次迭代后, 解矩阵 $P^{(l)}$ 和控制器 $K_u^{(l)}$ 收敛。此处限于篇幅不展示解矩阵 P^* 的值, 控制器 K_u^* 的值为:

$$\begin{aligned}
 K_{1,u}^* &= [0.1960 \ -0.9205 \ 0.0321 \ 0.0390 \ 0.0357 \ 0.0383] \\
 K_{2,u}^* &= [0.1706 \ -0.9860 \ 0.0237 \ 0.0686 \ 0.0621 \ 0.0697] \\
 K_{3,u}^* &= [0.0804 \ -1.4825 \ 0.0021 \ 0.2128 \ 0.1893 \ 0.2082]
 \end{aligned} \tag{4-81}$$

转移概率未知时, 使用以下参数进行算法 4.2 的迭代求解: 迭代幕数 $\mathbf{e} = 50$, 每幕步数 $\mathbf{s} = 100$, 回报权重 $\lambda = 0.10$, 迭代步长 $\mu = 1/l$, 初始解矩阵 $\mathcal{E}^{(0)} = \mathbf{0}$ 、镇定控制器 $K_u^{(0)}$ 与(4-80)相同。图 4-3 与图 4-4 给出 \mathcal{E}^* 与 $K_u^{*,TD}$ 的收敛过程, 注意到, 算法 4.2 经过 25 次迭代后, 解矩阵和控制器收敛, 其中解矩阵 \mathcal{E}^* 的值限于篇幅, 没有展示, 控制器 $K_u^{*,TD}$ 的值为:

$$\begin{aligned} K_{1,u}^{*,TD} &= [0.1977 \quad -0.9211 \quad 0.0348 \quad 0.0377 \quad 0.0345 \quad 0.0370] \\ K_{2,u}^{*,TD} &= [0.1714 \quad -0.9914 \quad 0.0261 \quad 0.0703 \quad 0.0638 \quad 0.0691] \\ K_{3,u}^{*,TD} &= [0.0904 \quad -1.4905 \quad 0.0009 \quad 0.2091 \quad 0.1864 \quad 0.2049] \end{aligned} \quad (4-82)$$

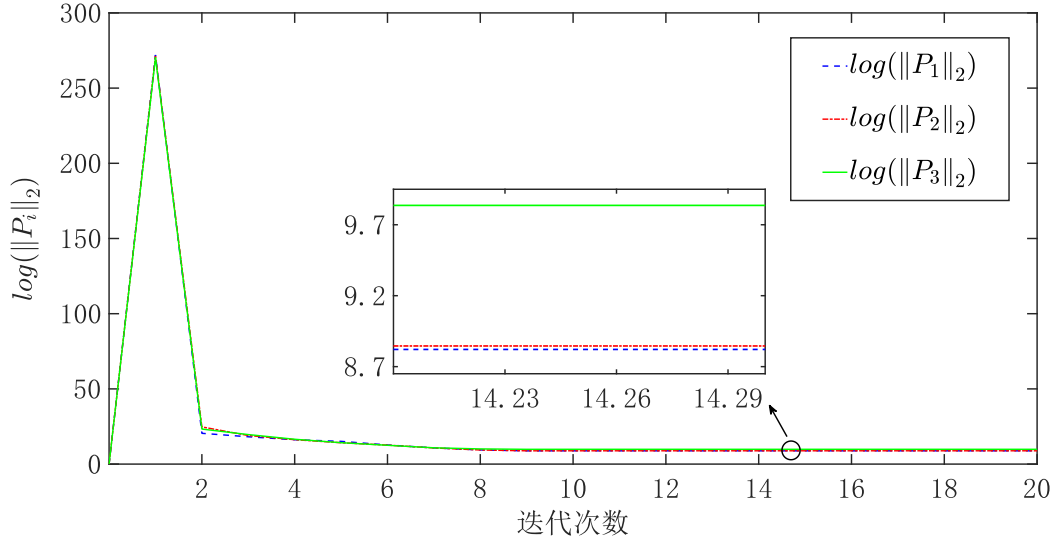


图 4-1 算法 4.1 解矩阵收敛过程

Figure 4-1. Solution matrix convergence process of Algorithm 4.1

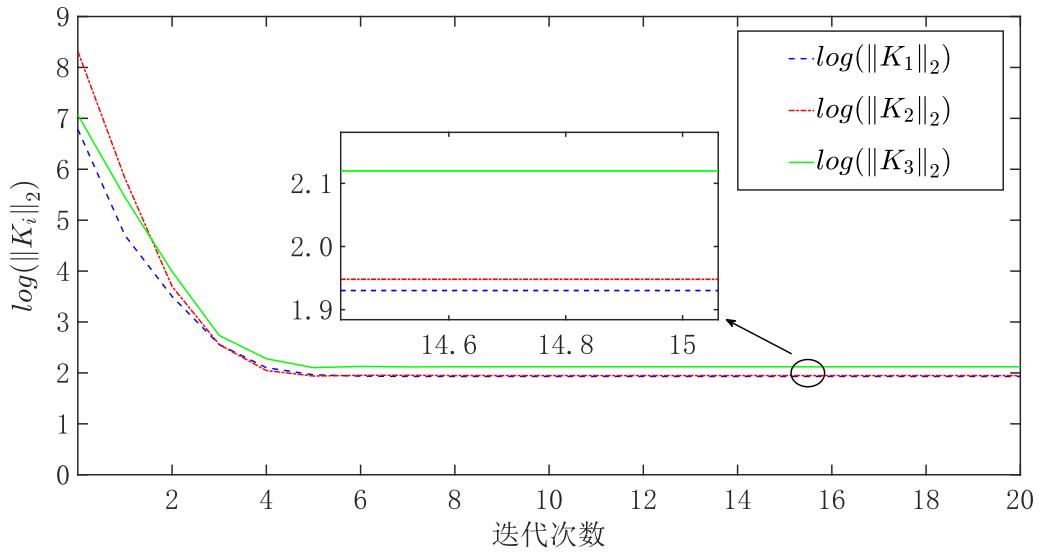


图 4-2 算法 4.1 控制器收敛过程

Figure 4-2. Controller convergence process of Algorithm 4.1

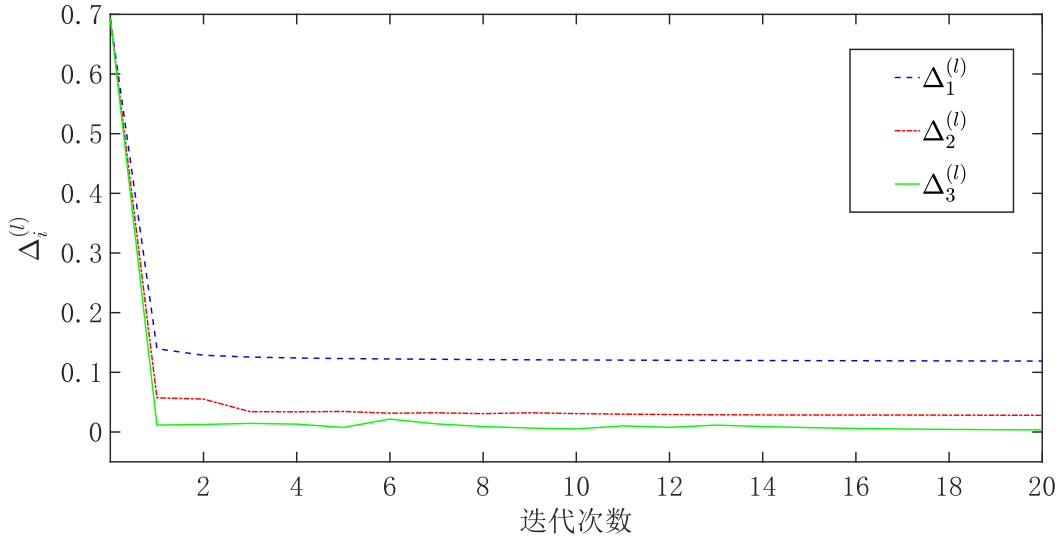


图 4-3 算法 4.2 解矩阵收敛过程

Figure 4-3. Solution matrix convergence process of Algorithm 4.2

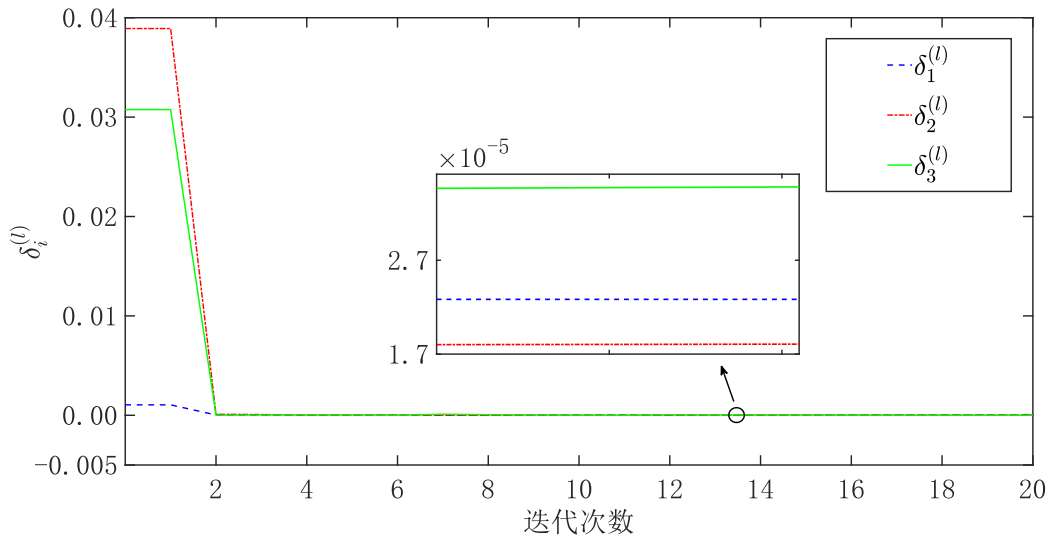
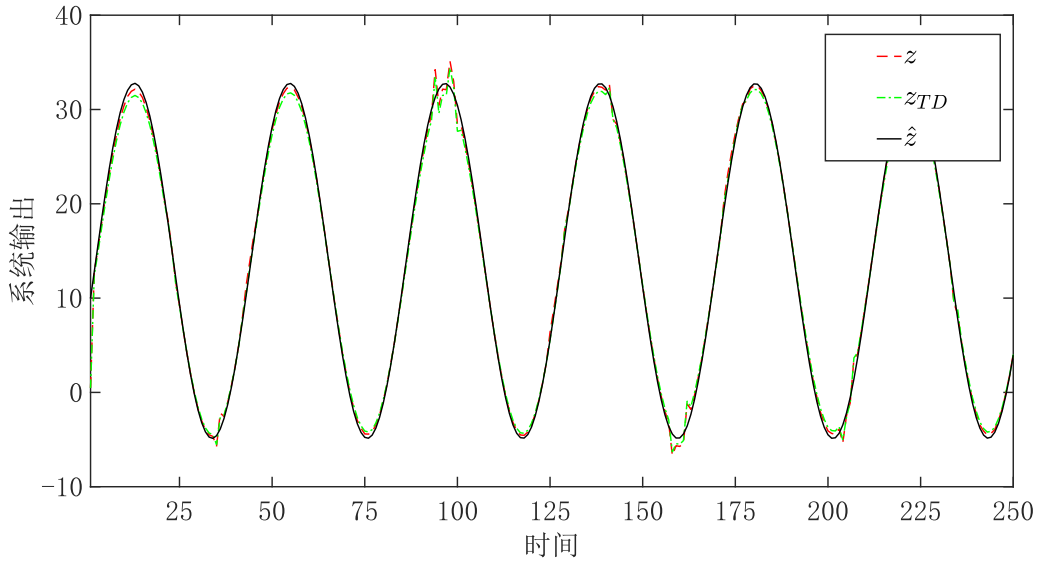


图 4-4 算法 4.2 控制器收敛过程

Figure 4-4. Controller convergence process of Algorithm 4.2

下面考察在系统状态可获得的情况下，算法 4.1 和算法 4.2 求得的控制(4-83)、(4-84)的控制效果。选取初始状态为 $\tilde{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 20 \ -30 \ 20]^\top$ ，初始状态估计为 $\hat{x}_0 = \mathbf{0}$ ，系统噪声为均值为 0，方差为 0.005 的高斯噪声。图 4-5 展示基于真实状态的状态反馈，在控制器(4-81)、(4-82)作用下的跟踪控制效果，可以发现其能够较好的跟踪参考轨迹且两个控制器的控制效果相近，这说明本文提出的 GCARE 及其求解算法是有效的。

图 4-5 基于真实状态的 H_∞ 跟踪控制过程Figure 4-5. H_∞ tracking control process based on real state

利用算法 4.1 以及 4.2 本文同样可以求得 H_∞ 滤波问题对应的 GCARE(4-43)及其 H_∞ 滤波器，本文不做讨论，仅给出相关结果。选取初始噪声增益 $L_w^{(0)} = \mathbf{0}$ ，初始镇定滤波器 $L_y^{(0)}$ 为：

$$L_{1,y}^{(0)} = \begin{bmatrix} -0.03 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & -13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0 & -0.3 & 0.2 \end{bmatrix}, L_{2,y}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.7 & -8 & 0 & 0 \\ 0.2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0 & -0.3 & 0.2 \end{bmatrix}, L_{3,y}^{(0)} = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.8 & 0 & 0 \\ 0.2 & -2 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0 & -0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \quad (4-83)$$

使用算法 4.1 求解 GCARE(4-43)。算法 4.1 经过 5 次迭代后，解矩阵和滤波器收敛。限于篇幅，本文不展示解矩阵 P^* 的值，滤波器 L_y^* 的值如(4-84)所示。转移概率未知时，本文使用以下参数进行算法 4.2 的迭代求解：迭代幕数 $e=50$ ，每幕步数 $s=100$ ，回报权重 $\lambda=0.10$ ，迭代步长 $\mu=1/l$ 。此外，选取初始解矩阵 $\mathcal{E}^{(0)} = \mathbf{0}$ 、镇定滤波器 $L_y^{(0)}$ 与(4-73)相同。算法 4.2 经过 40 次迭代后，解矩阵和控制器收敛，其中解矩阵 \mathcal{E}^* 的值限于篇幅，本文没有展示，滤波器 $L_y^{*,TD}$ 的值如(4-85)所示。

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{1,\bar{y}}^* = \begin{bmatrix} -0.022 & -4.712 & 0 & 0 \\ 1.111 & -13.185 & 0 & 0 \\ -0.054 & -0.010 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.487 & 0.068 \\ 0 & 0 & -0.034 & -0.425 \\ 0 & 0 & -0.300 & 0.184 \end{bmatrix} \\ L_{2,\bar{y}}^* = \begin{bmatrix} 0.730 & -8.557 & 0 & 0 \\ 0.272 & -2.831 & 0 & 0 \\ -0.037 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.487 & 0.068 \\ 0 & 0 & -0.034 & -0.425 \\ 0 & 0 & -0.300 & 0.184 \end{bmatrix} \\ L_{3,\bar{y}}^* = \begin{bmatrix} -0.342 & -0.826 & 0 & 0 \\ 0.166 & -2.206 & 0 & 0 \\ -0.189 & -0.004 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.487 & 0.068 \\ 0 & 0 & -0.034 & -0.425 \\ 0 & 0 & -0.300 & 0.184 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (4-84)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{1,\bar{y}}^{*,TD} = \begin{bmatrix} -0.289 & -4.532 & 0 & 0 \\ 0.294 & -12.637 & 0 & 0 \\ -0.038 & -0.021 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.461 & 0.052 \\ 0 & 0 & -0.047 & -0.416 \\ 0 & 0 & -0.082 & 0.052 \end{bmatrix} \\ L_{2,\bar{y}}^{*,TD} = \begin{bmatrix} 0.764 & -8.608 & 0 & 0 \\ 0.283 & -2.831 & 0 & 0 \\ -0.040 & 0.002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.461 & 0.052 \\ 0 & 0 & -0.048 & -0.416 \\ 0 & 0 & -0.078 & 0.051 \end{bmatrix} \\ L_{3,\bar{y}}^{*,TD} = \begin{bmatrix} -0.345 & -0.818 & 0 & 0 \\ 0.156 & -2.182 & 0 & 0 \\ -0.188 & -0.005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.460 & 0.052 \\ 0 & 0 & -0.005 & -0.416 \\ 0 & 0 & -0.076 & 0.050 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (4-85)$$

下面考察算法 4.1 和算法 4.2 求得的滤波器(4-86)、(4-87)的估计效果。选取初始状态为 $\tilde{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 20 \ -30 \ 20]^\top$ ，初始状态估计为 $\hat{x}_0 = \mathbf{0}$ ，系统噪声为均值为 0，方差为 0.005 的高斯噪声。图 4-7 展示使用滤波器(4-86)、(4-87)进行状态估计的估计误差，可以发现其估计误差较小且两个滤波器的估计性能相近，这说明本文提出的 GCARE 及其求解算法是有效的。

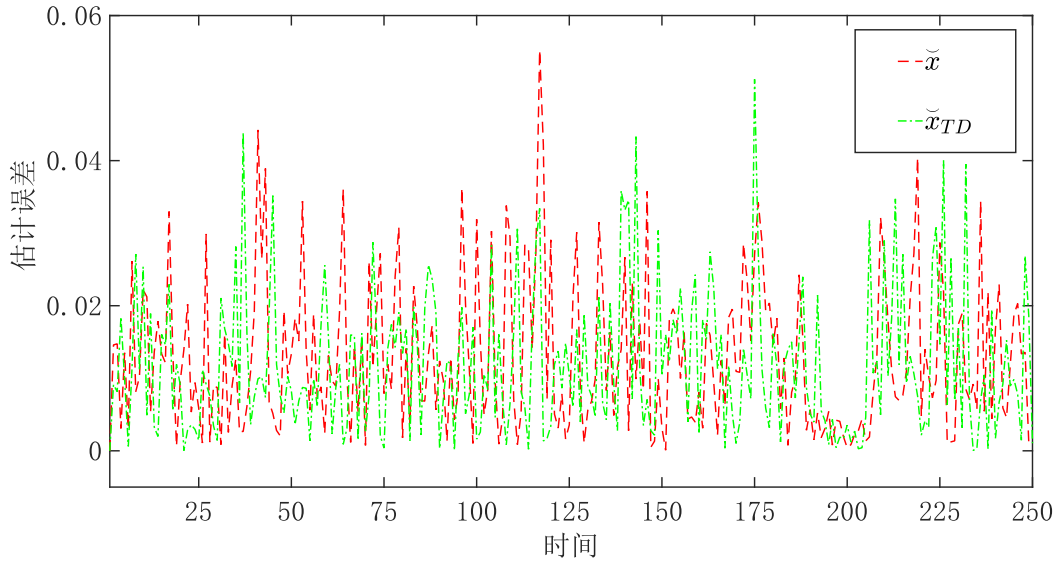


图 4-6 H_∞ 滤波器估计误差

Figure 4-6. H_∞ filter estimation error

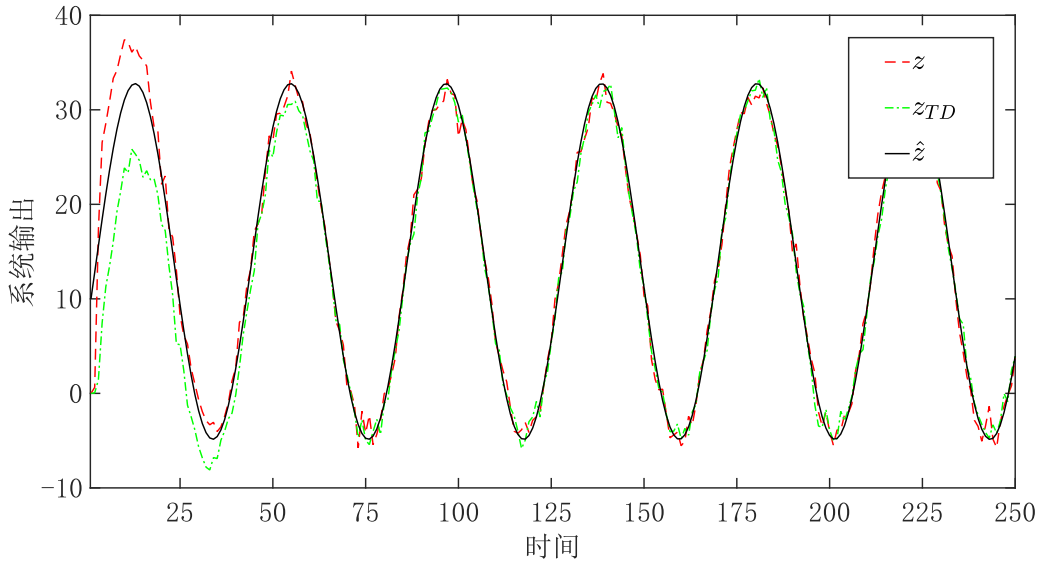


图 4-7 基于状态估计的 H_∞ 跟踪控制过程

Figure 4-7. H_∞ tracking control process based on estimated state

考察算法 4.1 和算法 4.2 求得的控制器(4-83)、(4-84)以及滤波器(4-86)、(4-87)的控制估计效果。选取初始状态为 $\tilde{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 20 \ -30 \ 20]^\top$ ，初始状态估计

为 $\hat{x}_0 = \mathbf{0}$ ，系统噪声为均值为 0，方差为 0.005 的高斯噪声。图 4-7 展示使用滤波器(4-84)、(4-85)进行状态估计并在控制器(4-81)、(4-82)作用下的跟踪控制效果，可以发现其能够较好的跟踪参考轨迹且两个控制器的控制效果相近，这说明本文提出的 GCARE 及其求解算法是有效的。

4.6 总结

本章针对受扰情况下 MJS 的 H_∞ 跟踪控制问题，首先设计 H_∞ 滤波器估计被控系统状态，以解决系统状态无法直接测量的难题。接着，基于被控系统与 H_∞ 滤波器定义构造误差系统，基于被控系统与参考系统构造跟踪误差系统，针对滤波误差系统与跟踪误差系统分别引入衰减因子设计二次型性能指标，确保二次型性能指标可收敛，进而求解二次型性能指标得到 GCARE。此外基于能镇定性和可探测性导出了 GCARE 镇定解存在的充要条件，并利用 Lyapunov 方程给出了 H_∞ 滤波器和 H_∞ 跟踪控制器作用下闭环系统的稳定性判定。随后，利用策略迭代与初始镇定控制器，设计转移概率已知与未知下 GCARE 迭代求解算法，并给出了算法的收敛性证明。最后，通过受随机故障影响的直流电机模型上仿真实验验证所提方法的有效性。

第五章 总结与展望

5.1 总结

本文关注无限时域下 MJS 的状态估计与输出跟踪控制问题, 深入研究 MJS 的 LQT 控制、 H_∞ 控制、 H_∞ 滤波等控制估计方法。针对无限时域下 MJS 的跟踪控制问题, 考虑不同场景, 通过动态规划推导 Riccati 方程及其控制器、滤波器, 同时基于策略迭代设计转移概率已知或未知时 Riccati 方程的迭代求解算法, 并在数值仿真系统上验证所提方法的有效性与优越性。本文主要研究内容如下:

(1) 针对 MJS 的 LQT 问题, 基于被控系统与参考系统构造跟踪误差系统。引入衰减因子设计无限时域下的二次型性能指标, 进而通过动态规划得到 CARE 及 LQT 控制器, 结合给定衰减因子给出了 CARE 解的存在性与 LQT 控制器作用下闭环系统的稳定性证明。然而, 利用策略迭代与初始镇定控制器, 提出了考虑转移概率已知与未知下的 CARE 迭代求解算法, 并给出了算法的收敛性证明。通过数值仿真验证所提方法的有效性。

(2) 针对受扰情况下 MJS 的 H_∞ 跟踪控制问题, 首先设计 H_∞ 滤波器估计被控系统与参考系统的系统状态, 以解决系统状态无法直接测量的难题。接着, 针对滤波误差系统与跟踪误差系统分别引入衰减因子设计二次型性能指标, 进而求解二次型性能指标得到 GCARE。此外基于能镇定性和可探测性导出了 GCARE 镇定解存在的充要条件, 并利用 Lyapunov 方程给出了 H_∞ 滤波器和 H_∞ 跟踪控制器作用下闭环系统的稳定性判定。随后, 利用策略迭代与初始镇定控制器, 设计转移概率已知与未知下 GCARE 迭代求解算法, 并给出了算法的收敛性证明。最后, 在受随机故障影响的直流电机模型上进行仿真实验验证所提方法的有效性。

5.2 展望

本文研究无限时域下 MJS 的最优跟踪控制问题, 包括状态估计与输出跟踪控制问题, 并获得一些研究成果。但仍有不少具有挑战性的问题值得进一步研究和探索, 可从以下几个方面进一步深入研究:

(1) 本文考虑的被控系统只涉及加性噪声扰动, 对于乘性噪声、系统不确定性、时滞、丢包等更复杂情形下的控制问题没有进行深入研究, 系统建模存在局

限性。同时，本文考虑的被控系统是离散线性 MJS，然而实际工程中处理的被控对象大都是连续非线性系统。因此，应当考虑更一般的问题以面对更恶劣更复杂多变的实际工作环境。

(2) 本文处理跟踪控制与状态估计问题的方法主要是 LQT 控制、 H_∞ 控制以及 H_∞ 滤波。目前，已有学者研究混合 H_2/H_∞ 控制、模型预测控制、强化学习、深度学习等新颖的控制理论与控制方法，这为本文的后续工作指引了研究方向。

(3) 本文研究了转移概率未知下的 Riccati 方程求解难题，并设计了 Riccati 方程迭代求解算法，但是未考虑系统参数未知的情形。特别地，参考系统的系统参数是假设已知的，这在实际跟踪控制问题中难以实现。然而，系统参数未知时，Riccati 方程也是无法直接求解的，如何在系统参数未知时设计 Riccati 方程求解算法值得进一步的研究。

参考文献

- [1] 潘素英. Markov 跳变随机混杂系统的动力学分析与控制[D]. 上海大学, 2022.
- [2] 宁泽鹏. 复杂切换动态下线性半 Markov 跳变系统控制[D]. 哈尔滨工业大学, 2021.
- [3] 刘越, 周平. 马尔可夫跳变线性系统最优控制的研究现状与进展[J]. 信息与控制, 2022, 51(1):15.
- [4] 余杨广. 多无人机协同目标跟踪的分布式控制方法研究[D]. 国防科技大学, 2022.
- [5] 韦自强. 无人机编队网络通信受限下的协同控制研究[D]. 南京邮电大学, 2023.
- [6] Joshi S K, Baumgartner S V, Krieger G. Tracking and track management of extended targets in range-Doppler using range-compressed airborne radar data[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2021, 60: 1-20.
- [7] Wang Y, Tang C, Wang S, et al. Target tracking control of a biomimetic underwater vehicle through deep reinforcement learning[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2021, 33(8): 3741-3752.
- [8] 苏宏业, 吴争光, 徐巍华. 鲁棒控制基础理论[M]. 科学出版社, 2021.
- [9] 郑柏浩, 嵇小辅, 朱毅. 不确定离散半马尔可夫跳变系统的有限时间鲁棒 H_∞ 控制[J]. 控制与决策, 2024,39(03):836-844.
- [10] 郑玉卿. 参数未知非线性系统的数据驱动控制研究[D]. 天津大学, 2022.
- [11] Wu X, Shi P, Tang Y, et al. Stability analysis of semi-Markov jump stochastic nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 67(4): 2084-2091.
- [12] Wang B, Zhu Q, Li S. Stability analysis of discrete-time semi-Markov jump linear systems with time delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2023, 68(11): 6758-6765.
- [13] Sworder D. Feedback control of a class of linear systems with jump parameters[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1969, 14(1): 9-14.
- [14] Blair W P, Sworder D. Feedback control of a class of linear discrete systems with jump parameters and quadratic cost criteria[J]. International Journal of Control, 1975, 21(5): 833-841.
- [15] Ji Y, Chizeck H J. Controllability, observability and discrete-time Markovian jump linear quadratic control[J]. International Journal of Control, 1988, 48(2): 481-498.
- [16] Ji Y, Chizeck H J. Controllability, stabilizability, and continuous-time Markovian jump linear quadratic control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1990, 35(7): 777-788.
- [17] Ji Y, Chizeck H J. Jump linear quadratic Gaussian control in continuous time[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, 37 (12): 1884-1892.
- [18] Costa O L V, Tuesta E F. Finite horizon quadratic optimal control and a separation principle for Markovian jump linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(10): 1836-1842.
- [19] Mesquita A R. Parsimonious Bayesian filtering in Markov jump systems with applications to networked nontrol[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 66: 76-88.
- [20] Tao J, Xu M, Chen D, et al. Event-triggered resilient filtering with the interval type uncertainty for Markov jump systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 53: 7834-7843.
- [21] Balenzuela M P, Wills A G, Renton C, et al. Parameter estimation for jump Markov linear

- systems[J]. Automatica, 2022, 135: 109949.
- [22] Balenzuela M P, Wills A G, Renton C, et al. A new smoothing algorithm for jump Markov linear systems[J]. Automatica, 2022, 140: 110218.
- [23] Shen Y, Wu Z G, Shi P, et al. Model reduction of Markovian jump systems with uncertain probabilities[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 65(1): 382-388.
- [24] Shen Y, Wu Z G, Meng D. Nonsynchronous model reduction for uncertain 2-D Markov jump systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 52(10): 10177-10186.
- [25] Costa O L V, Fragoso M D, Marques R P. Discrete-time Markov jump linear systems[M]. Springer Science & Business Media, 2005.
- [26] Costa O L V, Fragoso M D, Todorov M G. Continuous-time Markov jump linear systems[M]. Springer Science & Business Media, 2012.
- [27] Zhang L, Yang T, Shi P, et al. Analysis and Design of Markov Jump Systems with Complex Transition Probabilities[M]. Springer, 2016.
- [28] Thyagarajan T, Kalpana D. Linear and non-linear system theory[M]. CRC Press, 2020.
- [29] Matei I, Martins N C, Baras J S. Optimal linear quadratic regulator for Markovian jump linear systems, in the presence of one time-step delayed mode observations[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2008, 41(2): 8056-8061.
- [30] Zhang L, Boukas E K, Lam J. Analysis and synthesis of Markov jump linear systems with time-varying delays and partially known transition probabilities[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(10): 2458-2464.
- [31] Zabala Y A, Costa O L V. A detector-based approach for the constrained quadratic control of discrete-time Markovian jump linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 65(3): 1211-1217.
- [32] Tzortzis I, Charalambous C D, Hadjicostis C N. Jump LQR systems with unknown transition probabilities[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 66(6): 2693-2708.
- [33] Costa O L V, Aya J C C. Monte Carlo TD (λ)-methods for the optimal control of discrete-time Markovian jump linear systems[J]. Automatica, 2002, 38(2): 217-225.
- [34] Beirigo R L, Todorov M G, Barreto A M S. Online TD (λ) for discrete-time Markov jump linear systems[C]. 2018 IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 2018: 2229-2234.
- [35] Yang Y, Kiumarsi B, Modares H et al. Model-free λ -Policy iteration for discrete-time linear quadratic regulation[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2023, 34: 635-649.
- [36] Kiumarsi B, Lewis F L, Jiang Z P. H_∞ control of linear discrete-time systems: Off-policy reinforcement learning[J]. Automatica, 2017, 78: 144-152.
- [37] Zhang K, Zhang H, Cai Y, et al. Parallel optimal tracking control schemes for mode-dependent control of coupled Markov jump systems via integral RL method[J]. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2019, 17(3): 1332-1342.
- [38] Wang J, Wu J, Cao J, et al. Nonfragile output feedback tracking control for Markov jump fuzzy systems based on integral reinforcement learning scheme[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 53: 4521-4530.
- [39] 赵鸿鹏. 几类切换非线性系统的鲁棒 H_∞ 控制问题研究[D]. 哈尔滨工业大学, 2022.
- [40] Fragoso M D, Val J B R, Pinto D L. Jump linear H_∞ control: the discrete-time case[J]. Control Theory and Advanced Technology, 1995, 10: 1459-1474.
- [41] Costa O L V, Val J B R. Full information H_∞ -control for discrete-time infinite Markov jump

- parameter systems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1996, 202(2): 578-603.
- [42] Shi P, Boukas E K. H_∞ -control for Markovian jump linear systems with parametric uncertainty[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1997, 95: 75-99.
- [43] Costa O L V, Marques R P. Mixed H_2/H_∞ -control of discrete-time Markovian jump linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1998, 43(1): 95-100.
- [44] Huang Y L, Zhang W H, Feng G. Infinite horizon H_2/H_∞ control for stochastic systems with Markovian jumps[J]. Automatica, 2008, 44: 857-863.
- [45] Luan X L, Zhao S Y, Liu. H_∞ control for discrete-time Markov jump systems with uncertain transition probabilities[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(6): 1566-1572.
- [46] Chen Y, Wen J, Luan X, et al. Robust control for Markov jump linear systems with unknown transition probabilities—an online temporal differences approach[J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2020, 42(15): 3043-3051.
- [47] Chen Y, Wen J, Luan X, et al. H_∞ optimal control for semi-Markov jump linear systems via TP-free temporal difference (λ) learning[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2021, 31(14): 6905-6916.
- [48] Fang H Y, Zhang M G, He S P, et al. Solving the zero-sum control problem for tidal turbine system: An online reinforcement learning approach[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2023, 53(12): 7635-7647.
- [49] 马奇, 嵇小辅. 半马尔可夫跳变系统的自适应容错跟踪控制[J/OL]. 控制工程:1-9[2024-03-25]. <https://doi.org/10.14107/j.cnki.kzgc.20230774>.
- [50] Boukas E K. On reference model tracking for Markov jump systems[J]. International Journal of Systems Science, 2009, 40(4): 393-401.
- [51] Wang Z, Yuan Y, Yang H. Adaptive fuzzy tracking control for strict-feedback Markov jumping nonlinear systems with actuator failures and unmodeled dynamics[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 50(1): 126-139.
- [52] Tian G. Tracking control of discrete-time Markovian jump systems[J]. International Journal of Systems Science, 2020, 51(15): 3070-3080.
- [53] 张端金, 王钟堃. 具有丢包的未知转移概率 Markov 跳变系统鲁棒 H_∞ 滤波[J]. 郑州大学学报(工学版), 2021, 42(06): 1-6+41. DOI:10.13705/j.issn.1671-6833.2021.04.007.
- [54] 陈丽娟. 基于自适应 H_∞ 滤波算法的无刷直流电机参数辨识[D]. 南京邮电大学, 2023.
- [55] 刘雨洋. 基于 H_∞ 滤波的锂电池 SOC 与 SOP 联合估计研究[D]. 西南科技大学, 2024. DOI:10.27415/d.cnki.gxngc.2023.000747.
- [56] Souza C E, Fragoso M D. H_∞ filtering for Markovian jump linear systems[C]. 35th IEEE Conference on Decision and Control, 1996, 4: 4814-4818.
- [57] Souza C E, Fragoso M D. H_∞ filtering for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2003, 13(14): 1299-1316.
- [58] Souza C E, Fragoso M D. Robust H_∞ filtering for uncertain Markovian jump linear systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2002, 12(5): 435-446.
- [59] Xu S, Chen T, Lam J. Robust H_∞ filtering for uncertain Markovian jump systems with mode-dependent time delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(5): 900-907.
- [60] Fang M, Dong S L, Wu Z G. Asynchronous H_∞ filtering of continuous-time Markov jump systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2020, 30(2): 685-698.
- [61] Souza C E, A mode-independent H_∞ filter design for discrete-time Markovian jump linear

- systems[C]. 42nd IEEE Conference on Decision and Control, 2003, 3: 2811-2816.
- [62] Souza C E , Trofino A , Barbosa K A. Mode-independent H_∞ filters for Markovian jump linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51: 1837-1841.
- [63] Zhang L, Boukas E K. Mode-dependent H_∞ filtering for discrete-time Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities[J]. Automatica, 2009, 45(6): 1462-1467.
- [64] Li X, Lam J, Gao H, et al. H_∞ and H_2 filtering for linear systems with uncertain Markov transitions[J]. Automatica, 2016, 67: 252-266.
- [65] Oliveira A M, Costa O L V. H_∞ -filtering for Markov jump linear systems with partial information on the jump parameter[J]. IFAC Journal of Systems and Control, 2017, 1: 13-23.
- [66] Oliveira A M, Costa O L V. Mixed H_2/H_∞ filtering for Markov jump linear systems[J]. International Journal of Systems Science, 2018, 49(15): 3023-3036.
- [67] Li F, Zheng W X, Xu S. HMM-based H_∞ filtering for Markov jump systems with partial information and sensor nonlinearities[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2020, 30(16): 6891-6908.
- [68] Cheney E W. Analysis for applied mathematics[M]. New York: Springer, 2001.
- [69] Bertsekas D P. Dynamic Programming and Stochastic Control[M]. Academic Press, 1976.
- [70] Kleinman D. On an iterative technique for Riccati equation computations[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1968, 13(1): 114-115.
- [71] Wu H N, Luo B. Simultaneous policy update algorithms for learning the solution of linear continuous-time H^∞ state feedback control[J]. Information Sciences, 2013, 222: 472-485.
- [72] Zhang L, Boukas E K. Stability and stabilization of Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities[J]. Automatica, 2009, 45(2): 463-468.
- [73] Oliveira R C L F, Vargas A N, do Val J B R, et al. Mode-independent H_2 -control of a DC motor modeled as a Markov jump linear system[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2014, 22(5): 1915-1919.

致 谢

作者简介

1 作者简历

2 攻读硕士学位期间发表的学术论文

- [1] H_∞ optimal output tracking control for Markov jump systems: A reinforcement learning-based approach. International Journal of Robust and Nonlinear Control. doi:10.1002/rnc.7255(学生一作, JCR 二区)

3 参与的科研项目及获奖情况

- [1] 国家自然科学基金青年项目: 输出受限马尔可夫跳变系统的可估计性分析与异步滤波研究(62103373), 2022-2024 年
- [2] 浙江省自然科学基金探索项目: 基于强化学习的连续时间 Markov 跳变系统最优控制研究(LQ22F030012), 2022-2024 年

4 发明专利

- [1] 一种适用于机械臂中具有功率模式切换的直流电机输出跟踪控制方法, 202310824266.7, 2023 年 7 月 6 日.(已公开)
- [2] 机械臂中信息不完全直流电机输出跟踪控制软件 V1.0, 2023SR1088457, 2023 年 9 月 18 日.(已授权)