信息与控制　2022 年　第 51 卷　第 1 期: 54 ~68
DOI: 10.13976/j.cnki.xk.2022.0311　文章编号: 1002 -0411(2022) -01 -0054 -15

# 马尔可夫跳变线性系统最优控制的研究现状与进展

刘　越，周　平

东北大学流程工业综合自动化国家重点实验室，辽宁 沈阳　110819

基金项目: 国家自然科学基金(61890934，61790572)；辽宁省“兴辽英才计划”项目(XLYC1907132)；中央高校科研基金(N180802003)

通信作者: 周平，zhouping@mail.neu.edu.cn
收稿/录用/修回: 2021 -07 -20/2021 -09 -16/2021 -11 -25

**摘要**

马尔可夫跳变线性系统(MJLS)是一种具有多个模态的随机系统，系统在各个模态之间的跳变转移由一组马尔可夫链来决定。MJLS 模型因其在表示过程中可以产生突变而更能精确的描述实际工程应用中的系统。近年来，MJLS 的最优控制问题成为了研究的热点，动态规划、极大值原理以及线性矩阵不等式等成为了解决此类问题的主流方法。本文对 MJLS 最优控制领域的研究现状进行了综述。分别对一般情况下、带有噪声的情况下、带有时滞的情况下以及某些特定情况下的 MLJS 最优控制问题的国内外研究现状进行论述。最后进行了总结并提出 MJLS 最优控制领域未来值得关注的研究方向。

**关键词**

马尔可夫跳变线性系统
最优控制
噪声系统
时滞系统
中图法分类号: TP13
文献标识码: A

# Recent Status and Progress in Optimal Control of Markov Jump Linear Systems

LIU Yue，ZHOU Ping

*The State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries*，*Northeastern University*，*Shenyang* 110819，*China*

**Abstract**

A Markov jump linear system (MJLS) is a random system with multiple modes. The jump transition of the system between each mode is determined by a set of Markov chains. The MJLS model can accurately describe the system in actual engineering applications because it can produce mutations in the representation process. In recent years，the optimal control problem of the MJLS has become a research hotspot. Dynamic programming，maximum value principle，and linear matrix inequality have become the mainstream methods to solve such problems. This paper reviews the current research status of the MJLS optimal control field. The research status of MLJS optimal control problems at home and abroad under general conditions，noise conditions，time delay conditions，and some specific conditions are discussed individually. Finally，the research direction of the MJLS optimal control field worthy of attention in the future is summarized and put forward.

**Keywords**

Markov jump linear system;
optimal control;
noise system;
time delay system

## 0　引言

随着生产技术的现代化和工业过程的复杂化，许多实际系统在运行过程中往往由于某些随机突变因素，如环境突变、子系统之间关联改变和系统组件故障等，导致系统的结构或参数发生改变。一般

的线性定常系统模型已经无法满足完整描述此类系统的需求。针对此类系统，“马尔可夫跳变线性系统”的概念应运而生[1]。MJLS 是一种具有多个模态的随机系统，系统在各个模态之间的跳变转移是由一组马尔可夫链决定的。作为表示不确定性系统的一种模型，MJLS 模型是通过状态转移矩阵来描述各个模态权重的。相比于传统的控制系统模型，MJLS 模型因其在表示过程中可以产生突变而更能精确地描述实际工程应用中的系统。因此，对 MJLS 的研究受到许多国内外学者的广泛关注[2-6]。

根据系统的动态特性，MJLS 一般可以分为离散时间 MJLS 和连续时间 MJLS。对于一个给定的概率空间$(\Omega, F, \theta)$，离散时间 MJLS 可以描述为

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}_{\theta(k)}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_{\theta(k)}\boldsymbol{u}(k) \tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{x}(k)$、$\boldsymbol{u}(k)$ 和 $\theta(k)$ 分别表示状态变量、输入向量以及系统模态。随机过程$\{\theta(k); k>0\}$由一条离散时间齐次马尔可夫链表示，其中 $\theta(k)$ 在有限的集合 $L=\{1, 2, \cdots, l\}$ 中取值，其模态转移概率为: $\Pr\{\theta(k+1)=j \mid \theta(k)=i\}=\lambda_{ij}$，且有 $\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij} \geqslant 0$。类似的，连续时间 MJLS 可以描述为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}_{\gamma(t)}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_{\gamma(t)}\boldsymbol{u}(t) \tag{2}$$

随机过程$\{\gamma(t); t>0\}$是一个时间连续、状态离散的齐次马尔可夫过程，其模态转移概率表示为

$$\Pr\{\gamma(t+h)=j \mid \gamma(t)=i\} = \begin{cases} \pi_{ij}h + o(h), & i \neq j \\ 1+\pi_{ii}h+o(h), & i \neq j \end{cases}$$

式中，$h>0$，$o(h)$ 为 $h$ 的无穷小量。对于每个模态 $i$，有 $\pi_{ii} = -\sum_{j=1, i\neq j}^{l}\pi_{ij}$，$\pi_{ij} \geqslant 0$，$i \neq j$。

文[4]中提到的经济学模型可以看作是 MJLS 建模应用的典型案例。一个国家的经济状态可以大致分成 3 种可能的模式 “正常”、“繁荣”和“萧条”，它们之间的切换可以被建模为均匀的马尔可夫链。采用离散 MJLS 模型时，通过计算采样时刻数据的转移概率，得到状态转移矩阵为

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.17 & 0.16 \\ 0.30 & 0.47 & 0.23 \\ 0.26 & 0.10 & 0.64 \end{bmatrix}$$

国家经济状态之间的转换如图 1 所示。类似地，采用连续 MJLS 模型时，状态转移矩阵为

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} -0.53 & 0.32 & 0.21 \\ 0.40 & -0.53 & 0.13 \\ 0.50 & 0.38 & -0.88 \end{bmatrix}$$

国家经济状态之间的转换见图 2。

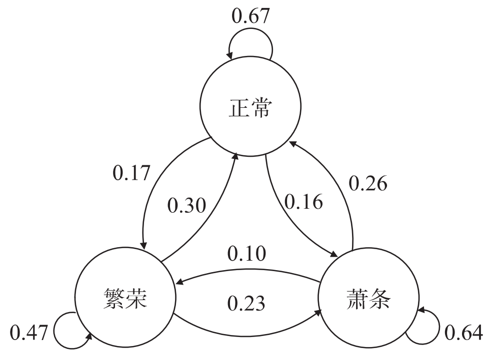


图 1　离散 MJLS 模型下国家经济状态之间的转换

Fig.1　The transition between national economic states under the discrete-time MJLS model

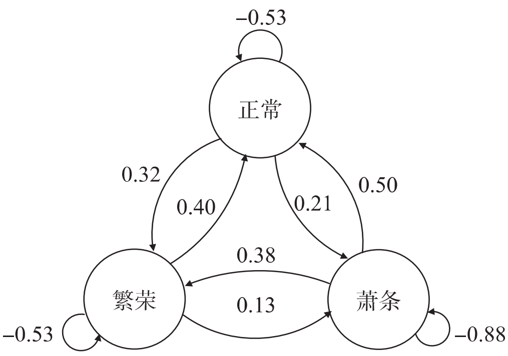


图 2　连续 MJLS 模型下国家经济状态之间的转换

Fig.2　The transition between national economic states under the continuous-time MJLS model

另一方面，最优控制也是现代控制理论的一个中心课题。其研究问题可以概括为: 根据受控系统的数学模型，在一类容许控制集中寻找出一个最优的控制方案，使得系统能够按照预定的要求运行，并且使得给定的性能指标最小。求解最优控制的常用方法有变分法、动态规划、极大值原理以及线性矩阵不等式等，各种方法的特点以及其适用的应用场景见表 1。用最优控制设计的系统具有如下特点: 1）适用于多变量以及时变系统; 2）可以任意地设置初始条件; 3）可以满足多个不同的目标函数要求。最优控制理论在处理时间最少、能耗最小、跟踪和调节等问题时具有明显的优势。随着计算机技术的发展，最优控制的应用领域越来越广泛，例如生产制造、航空航天、经济活动和网络控制系统等。最优控制理论的发展对于经济发展和国防军事等方面都起着至关重要的作用。

作为一种多模态的系统，MJLS 一般用来模拟具有突变特性的动态系统，并且广泛应用于现代社会的多个领域，例如金融经济[7-9]、自然生态[10-11]、智能交通[12-14]以及网络控制系统[15-16]

等。变分法、动态规划、极大值原理以及线性矩阵不等式等仍然可以用来求解 MJLS 的最优控制问题，但是在某些方面，这些方法需要做出适当的改变，例如 Riccati 方程、哈密尔顿函数等。对 MJLS 最优控制的研究，最早可以追溯到文[17－18]，它们为这一领域的未来研究奠定了基础。在文[17]中，Sworder 考虑了连续时间 MJLS 在有限时域情况下的线性二次控制问题，应用极大值原理，推导出了产生最优反馈增益的微分方程。Wonham 在文[18]中应用了动态规划方法，处理了无限时域情况下连续时间 MJLS 的线性二次控制问题，设计了最优控制器。但是由于稳定性标准的选择，使得最终结果并不充分。因此对 MJLS 最优控制的进一步研究具有重要的理论和实际意义。

表 1 最优控制问题的一般求解方法

Tab.1 General solving methods for the optimal control problems

| 方法 | 特点 | 适用场景 |
|---|---|---|
| 变分法 | 对解决开集约束的最优控制问题十分有效，无法处理闭集性约束 | 最速下降、最短路径、图像去噪等 |
| 动态规划 | 原理简明，适用于计算机求解；必须保证系统的状态变量满足“无后效性”；状态变量的维数增加，要求计算机内存成指数倍增长，计算工作量也大大增加；处理约束条件效率较低，适合小规模问题 | 库存管理、资源分配、设备的更新排序以及装载等 |
| 极大值原理 | 可以解决变分法无法解决的最优控制问题，即控制有约束，Hamiltonia 函数对控制变量不可微时的情况；一般情况下只能得到极值的必要条件，得到最优控制的解析表达式并构成反馈控制也比较困难 | 航天器姿态控制、基金最优管理、最短时间、最少燃料等 |
| 线性矩阵不等式 | 在处理凸优化问题上有明显优势；有多种算法可供选择，MATLAB 更是提供了采用投影算法的 LMI 工具箱；无法找到对应的物理意义，“LMI 满足的条件”和“实际环境要满足的条件”无法直接转换 | 位姿估计、视觉定位、锥补线性化、汽车主动悬架控制等 |

近几十年来，为了便于 MJLS 在实际工程中的应用，国内外专家做出了大量努力，并在 MJLS 的建模、控制、滤波、稳定性分析以及故障诊断等方面取得了突出成就。在一篇文章中将所有前人对 MJLS 所做的贡献详细的介绍是不现实的，因此本文着重对 MJLS 的最优控制的研究现状进行综述，并指出该领域未来值得关注的研究方向。

## 1 一般情况下的 MJLS 最优控制

本节主要概括了一般情况下 MJLS 最优控制问题的研究现状，即由式(1)、式(2)给出的不包含噪声、时滞等情况的原始 MJLS。另外对于马尔可夫链在不同空间取值的情形也有所涉及。针对此类 MJLS 的最优控制问题的研究已经比较成熟，常用的求解方法是应用动态规划法或极大值原理法，通过求解 Riccati 方程来设计最优控制器。

### 1.1 离散时间情况

对于式(1)所示的离散时间 MJLS，在有限时域情况下，考虑如下性能指标：

$$J_N = E\Bigg( \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{x}'(k)\boldsymbol{Q}_{\theta(k)}(k)\boldsymbol{x}(k) + \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{u}'(k)\boldsymbol{R}_{\theta(k)}(k)\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{x}'(N+1)\boldsymbol{P}_{\theta(N+1)}(N+1)\boldsymbol{x}(N+1)\Bigg) \tag{3}$$

式中，$N>0$ 为时间域，$\boldsymbol{x}(N+1)$ 是终端状态值；权重矩阵 $\boldsymbol{Q}_i(k)$，$\boldsymbol{R}_i(k)$ 和 $\boldsymbol{P}_i(N+1)$ $(i=1,2,\cdots,L)$ 都是给定的正半定对称矩阵。离散时间 MJLS 的最优控制问题可以描述为：寻找一个 $G_k$ $(G_k=\{\theta(t);\ t=0,1,\cdots,k\})$ 阶可测的反馈控制 $u(k)$，使之能够满足系统方程(1)，并且使得性能指标(3)最小[19]。

文[20－22]针对一般情况下的离散时间 MJLS 最优控制问题进行了研究，包含有限时域和无限时域两种情况。文[20]首次研究了离散时间 MJLS 的最优控制问题，对带有控制项和状态项乘积的二次性能指标，应用动态规划方法，通过耦合 Riccati 方程的解得到了最优显式控制率。该结果与 Sworder 在连续时间 MJLS 情况下得到的结论[17]是相对应的，两种结果得到的 Riccati 方程在形式上与线性定常系统相同，然而它们是随机相互耦合的，这为 Riccati 方程的求解带来了很大困难。文[21]研究了具有二次性能指标的完全可观离散 MJLS 的最优控制问题，利用动态规划方法并通过一组耦合 Riccati 差分方程来计算最优控制律和预期成本；同时考虑了闭环系统不稳定的情况，当满足一系列假设时，给出了系统稳态最优控制器存在的充分必要条件。然而，需要满足的假设相当苛刻并且难以验证。文[22]针对文[21]提出的假设难以验证等问题做了进一步拓展，给出了无限时域情况下离散

MJLS 最优可镇定控制器存在的充分条件，即只需满足$\|A_i - B_iF_i\| < c < 1$，其中 $A_i$、$B_i$ 为系统矩阵，$F_i$ 为控制器增益矩阵。文[20-22]设计的无限时域最优稳定控制器需要满足的假设条件较为苛刻或是只能得到最优解存在的充分条件，因此导致了较高的保守性。

另外，文[20,22]所提出的结果需要满足系统完全能控能观的假设，然而 MJLS 是含有跳变参数的随机系统，其能控性和能观性的定义与确定性系统并不完全等价。针对该问题，文[23]提出了弱能控性和绝对能控、弱能观性和绝对能观的定义，其中绝对能控和绝对可观测在 MJLS 最优控制中的作用类似于确定性系统的能控性和能观性；应用代数检验的方法给出了离散 MJLS 能控性、能观性成立的充要条件；证明了在状态反馈的条件下系统能控性是不变的，在线性观测器的情况下系统的能观性是不变的；同时设计了无限时域情况下的最优可镇定控制器。

对于离散时间 MJLS 最优线性二次控制所产生的耦合 Riccati 方程的求解问题，文[24-25]给出了详细说明。文[24]指出不可能将 Riccati 方程写成高维的单一方程形式，因此求解确定性系统最优线性二次控制问题的算法和结论并不适用于 MJLS；基于一个简单的数值方法，得到了耦合 Riccati 方程存在半正定解的充要条件，并证明了其解是收敛于类 Riccati 方程解的单调序列。文[25]指出 MJLS 线性二次最优问题的解可以由一组相互关联的代数 Riccati 方程(ISARE)获得；通过在性能指标中求解具有交叉项的递归解耦标准代数 Riccati 方程，提供了两种不同的方法来得到 ISARE 的数值解；所提出的方法使用两种不同的停止时间序列来定义近似二次控制问题的终端时间，使得在收敛速度方面有了明显改进。

不同于动态规划法和极大值原理法的求解思路，文[26]应用线性矩阵不等式法研究了离散时间 MJLS 最优输出反馈控制问题。文[26]将所有全阶固有模态相关的输出反馈控制器的集合用纯线性矩阵不等式表示的凸约束参数化，得到了没有任何附加约束的线性控制器。然而，线性矩阵不等式在获得更好性能的同时，也使得计算变得更加复杂；另外，基于线性矩阵不等式所设计的最优控制器具有一定的局限性，只能处理全阶模态相关的线性控制器而无法引入任何保守性。

文[20-26]对一般情况下离散时间 MJLS 的稳定性、可镇定性、能控性以及能观性进行了详细的解释，并提出了一系列求解最优控制问题的相关方法(动态规划法、极大值原理法和线性矩阵不等式法等)，为后来对离散时间 MJLS 最优控制的进一步研究奠定了坚实的基础。然而，当马尔可夫链不在 Euclidean 空间取值，上述最优控制的结果将可能不再成立。针对上述问题，文[27-31]分别研究了马尔可夫链取值于可数无穷集、Hilbert 空间以及 Borel 空间时的离散时间 MJLS 最优控制问题。文[27]研究了马尔可夫链在可数无穷集合上取值($\theta(k) = \{1, 2, \cdots, \infty\}$)的离散线性二次最优控制问题，在无噪声情况下，得到了可数无限耦合代数 Riccati 方程(ICARE)正半定解唯一存在的条件，并由此解决了上述最优控制问题；在有噪声的情况下，随机可镇定性和随机可观测性保证了嵌入式马尔可夫链平稳测度的存在性和唯一性，从而保证了最优平稳控制策略的存在。在有限状态空间得到的 MJLS 最优控制结果并不完全适用于可数无限状态空间的情况，因此，在对状态空间进行可数无限情况拓展时，必须解决一些具有挑战性的问题，例如 ICARE 的数值求解等。文[28]研究了 Hilbert 空间中具有马尔可夫摄动的线性离散时间系统的二次控制问题，证明了最优控制律的选择与定义在特定有序 Banach 空间上的 Riccati 方程全局解的稳定性和有界性密切相关；通过提供 Riccati 方程稳定且有界的充分条件，设计了最优控制器。文[29]将马尔可夫链的取值拓展到一般 Borel 空间中，证明了随机稳定性等价于 Banach 空间中有界线性算子的谱半径小于 1，或者等价于李雅普诺夫型方程解的存在性，给出了离散时间 MJLS 随机稳定性的充要条件。文[30]将文[29]的结果进一步拓展，研究了马尔可夫链在一般 Borel 空间中取值时的最优线性二次控制问题，在满足随机稳定和随机可观测的假设下，指出了耦合 Riccati 方程的正半定解是唯一存在的，并由此设计了最优控制器。文[29-30]的结果推广了以往文献中只考虑马尔可夫链在有限或无限可数空间中取值的情况。当马尔可夫链在一般状态空间(包括连续状态空间)中取值时，文[31]首先研究了离散时间 MJLS 的均方稳定问题，根据算子理论的结果导出了系统均方指数稳定的等价条件；其次线性二次最优控制问题的解决方案以 Riccati 积分方程的形式给出。相较于文[28-30]，文[31]的结果更具普遍性和一般性。文[27-31]将马尔可夫链的取值拓展到不同的状态空间中，所得

到的结果更加丰富了离散时间 MJLS 最优控制的理论体系。然而，当马尔可夫链在不同空间取值时 Riccati 方程唯一存在的必要条件以及它的数值求解仍需进一步探索。更多关于一般情况下离散时间 MJLS 最优控制的研究请参见文[32－34]。

### 1.2 连续时间情况

不同于离散时间 MJLS，连续时间情况下 MJLS 的动态方程应用了式(2)的形式，并考虑如下带有积分项和初始条件的性能指标:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{J}(t_0, \boldsymbol{x}(t_0), \theta(t_0), t_{\mathrm{f}}, \boldsymbol{u})\\&=E\left\{\int_{t_0}^{t_{\mathrm{f}}}(\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{Q}_{\theta(t)}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}(t)\boldsymbol{R}_{\theta(t)}(t)\boldsymbol{u}(t))\,\mathrm{d}t \mid \boldsymbol{x}_0, \theta(t_0)\right\}\end{aligned} \tag{4}$$

式中，$t_{\mathrm{f}}>0$ 为时间域；权重矩阵 $\boldsymbol{Q}_i(t)$、$\boldsymbol{R}_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,L)$ 都是给定的正半定对称矩阵，那么连续时间 MJLS 的最优控制问题可以描述为：寻找一个容许控制 $\boldsymbol{u}(k)$，使之能够满足系统方程式(2)，并且使得性能指标式(4)最小[35]。

文[17]和文[18]分别应用极大值原理和动态规划方法求解了连续时间 MJLS 线性二次最优控制问题，但是对于系统的能观能控性、可镇定性等问题并没有进行深入研究。针对上述问题，文[36－39]对连续时间 MJLS 的随机稳定性、随机可镇定性、随机可检测性以及可观测性等概念进行了详细说明，并在所提概念的基础上设计了最优控制器。文[36]首先提出了连续时间 MJLS 随机能控性和可镇定性的概念，并应用随机李雅普诺夫函数方法建立了系统随机能控能稳的充要条件；在无限时域情况下，应用对偶系统原理对系统的可观测性和可检测性进行了分析，在此基础上，设计了可以使系统性能指标有界且能保证系统稳定的最优控制器。文[38]指出弱可检测性是解决跳变线性二次控制问题且能保证系统稳定的充分条件。在此基础上，文[39]进行了深入研究，证明了弱可检测性不仅是系统稳定的充分条件，而且也是必要条件，同时也是性能泛函有界、系统均方稳定的最弱条件；另外指出，弱可观测性是该问题有正定解的充要条件；基于弱可观测性和弱可检测性的特性，通过耦合 Riccati 方程设计了最优控制器。当马尔可夫链在可数无限集上取值(即 $\theta(k)=\{1,2,\cdots,\infty\}$)时，文[37]首先使用来自 Banach 空间中的半群理论建立了系统随机稳定性(SS)和随机可检性(SD)的等价性条件，应用算子理论把控制问题框定在一个无限维的 Banach 空间中求解；基于 SS 和 SD 的扩展概念，得到了可数无限耦合代数 Riccati 方程存在唯一正半定解的充分条件，分别在有限时域和无限时域情况下给出了最优控制器的设计方案。上述文献对连续时间 MJLS 的稳定性、可镇定性、可观性以及可检测性进行了详细分析，这些性质的满足是求解连续时间 MJLS 最优控制问题的前提条件。然而在最优控制器的设计过程中，大都只给出了 Riccati 方程存在唯一解的充分条件，必要条件并没有明确给出。

对于连续时间 MJLS 跳变转移概率受控的情况，文[40]应用动态规划方法导出了最优控制表达式，并针对一维系统，提出一种求解对应最优控制器的耦合 Riccati 方程的算法。需要指出的是：该算法仅适用于一维系统，求解高维耦合 Riccati 方程的算法需要进一步研究。

除了极大值原理和动态规划，凸规划、近似动态规划等方法也是解决连续时间 MJLS 最优控制问题的有效工具。文[41]用凸规划方法研究了连续时间 MJLS 的最优输出反馈控制问题，在跳变参数已知但状态未知的情况下，首先给出了输出反馈控制器唯一存在且能保证系统稳定的充要条件；其次将连续时间 MJLS 的输出反馈 $\mathrm{H}_2$ 和 $\mathrm{H}_\infty$ 控制问题写成了线性矩阵不等式优化问题的形式，通过线性矩阵不等式优化问题的最优解，得到令闭环系统均方稳定的控制器。文[42]提出了一种新的近似动态规划方法来解决连续时间 MJLS 的最优控制问题，应用子系统变换的方法将原系统解耦并重新构造了一组新的连续时间马尔可夫跳变线性子系统；采用在线策略迭代算法求解耦合代数矩阵 Riccati 方程，并设计了与所研究 MJLS 等价的最优控制器。上述文献所设计的最优控制器需要在满足一系列假设的条件下才能成立，这使得结果的保守性较高。另外，更多关于一般情况下连续时间 MJLS 最优控制的研究请读者参考文[43－45]。

综上，对于一般情况下的 MJLS，文[20－22，26]和文[17－18]等分别设计了离散时间情况下和连续时间情况下的线性二次最优控制器，通过求解 Riccati 方程得到控制器增益矩阵，而文[24－25]给出了 Riccati 方程的两种解决方案。需要指出的是：Riccati 方程解的存在性和唯一性是获取控制器解析解的充分条件，同时也应该是必要条件，但在部分文献中并没有给出必要性的明确证明。无限时域的情况下，保证系统稳定运行是设计控制器的前提条件。而 MJLS 是含有跳变参数的随机系统，其稳

定性的定义与确定性系统并不完全等价。为此，文[23]和文[36，39]给出了 MJLS 能控能观性、随机稳定性、随机可镇定性以及随机可检测性的详细概念。另外，文[20－26]和文[37]在马尔可夫链于不同状态空间取值时设计了最优控制器。文[41－42]所提出的凸规划法和近似动态规划法为 MJLS 最优控制问题的求解提供了新的思路。同时，大多数文献在设计控制器时提出了一系列需要满足的假设，这就增加了结果的保守性。因此，基于创造新方法和降低保守性的考虑，对马尔可夫最优控制问题的研究还需更加深入。

## 2　带有噪声的 MJLS 最优控制

加性噪声一般是指系统的测量噪声，它是固有存在的，在信号传输过程中一般被看成是系统的背景噪声。而乘性噪声一般表示系统的扰动，大多时候是由时变性(如衰落或者多普勒)或者非线性所造成的。噪声的出现往往会导致系统的不稳定，如何抑制或消除噪声的影响成为了近年来学者们研究的热门话题[46]。因此，对受噪声影响的 MJLS 最优控制问题进行研究更具有实际意义。

### 2.1　离散时间情况

带有加性噪声的离散时间 MJLS 一般描述为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}_{\theta(k)}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}_{\theta(k)}(k)\boldsymbol{u}(k)+\boldsymbol{G}_{\theta(k)}(k)\boldsymbol{w}(k) \tag{5}$$

式中，$\boldsymbol{w}(k)$ 表示加性噪声。通常情况下，$\boldsymbol{w}(k)$ 为零均值、方差为 $\sigma^2$ 的高斯白噪声。

带有乘性噪声的离散时间 MJLS 一般描述为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\Big(\bar{\boldsymbol{A}}_{\theta(k)}(k)+\sum_{s=1}^{v^x}\tilde{\boldsymbol{A}}_{\theta(k),s}(k)\boldsymbol{w}_s^x(k)\Big)\boldsymbol{x}(k)+\Big(\bar{\boldsymbol{B}}_{\theta(k)}(k)+\sum_{s=1}^{v^u}\tilde{\boldsymbol{B}}_{\theta(k),s}(k)\boldsymbol{w}_s^u(k)\Big)\boldsymbol{u}(k) \tag{6}$$

式中，$\{\boldsymbol{w}_s^x(k);\ s=1,\cdots,v^x,\ k=0,1,\cdots,T-1\}$ 是零均值、方差为 $\sigma_x^2$ 的白噪声；$\{w_s^u(k);\ s=1,\cdots,v^u,\ k=0,1,\cdots,T-1\}$ 是零均值、方差为 $\sigma_u^2$ 的白噪声；$\boldsymbol{w}_s^x(k)$ 和 $\boldsymbol{w}_s^u(k)$ 与马尔可夫链 $\theta(k)$ 互不相关。

文[47－48]对带有高斯加性白噪声的离散时间 MJLS 的线性二次最优控制问题进行了研究。文[47]首先在有限时域情况下，利用分离原理分别设计了最优控制器和最优滤波器；其次在无限时域情况下，基于 MJLS 的能控性和能观性，提出了一种具有稳态控制器和时变滤波器的补偿器，需要指出的是：无限时域线性二次补偿器具有稳态控制律，但没有稳态滤波器，因此它是次优的。文[48]考虑了由广义加性白噪声序列驱动的离散时间 MJLS 在有限时域的线性二次最优控制问题，在满足输出测量可用和跳变参数已知的条件下，应用动态规划方法，证明了最优控制器可以由两个耦合的 Riccati 差分方程得到，其中一个与最优控制问题相关，一个与最优滤波问题相关；建立了一个新的适用于 MJLS 的分离原理，当马尔可夫链只有一个模态时，该分离原理与离散时间线性系统线性二次高斯控制的传统分离原理相吻合。上述文献很好地解决了加性噪声情况下离散时间 MJLS 的最优控制问题，然而对于系统方程存在乘性噪声的情况，该问题的求解将变得更加复杂。

文[49]对具有乘性噪声的离散时间 MJLS 随机最优控制问题进行了研究，不同于之前的文献，其性能指标中状态变量和控制变量的权重矩阵允许是不定的；首先给出了对于该问题最优控制器存在的充要条件，在该条件下最优状态反馈解可以由一组耦合的广义 Riccati 差分方程导出，这些方程与一组耦合的线性递归方程互连；另外对于性能指标中状态变量和控制变量的权重矩阵是半正定的情况，最优控制器存在的充要条件被显式地表达了出来。文[50]研究了受乘性噪声影响的离散时间 MJLS 在有限时域情况下的混合 $H_2/H_\infty$ 最优控制问题，通过 4 个耦合差分矩阵值递归方程(CDMR)的可解性来建立最优混合 $H_2/H_\infty$ 控制器存在的充要条件，并由此设计了最优控制器。文[49－50]为有限时域情况下受乘性噪声影响的离散时间 MJLS 设计了有效的最优控制器或 $H_2/H_\infty$ 最优控制器。然而，对于无限时域的情况，考虑到系统的稳定性以及可观性等问题，上述结果可能并不适用。

另外，文[51－53]提供了加性噪声、乘性噪声情况下离散时间 MJLS 最优控制问题的不同求解思路。

### 2.2　连续时间情况

相较于带有噪声的离散时间 MJLS，连续时间的情况因积分项的存在而变得更加复杂。离散时间情况下所得到最优控制的结果并不能直接应用于带有噪声的连续时间 MJLS。因此许多学者针对带有噪声的连续时间 MJLS 最优控制问题进行了深入研究。此时系统动态方程由式(7)或式(8)给出。

带有加性噪声的连续时间 MJLS 一般描述为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}_{\theta(t)}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}_{\theta(t)}(t)\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{G}_{\theta(t)}(t)\boldsymbol{w}(t) \tag{7}$$

式中，$w(k)$ 为零均值、方差为 $\sigma^2$ 的高斯白噪声。

带有乘性噪声的连续时间 MJLS 一般描述为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t) = [\boldsymbol{A}_0(\theta(t))\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_0(\theta(t))\boldsymbol{u}(t)]\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{r}[\boldsymbol{A}_k(\theta(t))\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_k(\theta(t))\boldsymbol{u}(t)]\,\mathrm{d}\boldsymbol{w}_k(t) \tag{8}$$

式中，$\boldsymbol{w}(t) = [\boldsymbol{w}_1(t), \boldsymbol{w}_2(t), \cdots, \boldsymbol{w}_r(t)]^{\mathrm{T}}$ 是一个 $r$ 维的标准维纳过程。

文 [54 - 55] 在带有高斯加性噪声连续时间 MJLS 的线性二次最优控制问题上取得了突破性进展。文 [54] 引入分离原理，在有限时域情况下分别设计了最优滤波器和最优控制器，它们的组合可以看做是线性二次最优控制问题的补偿器；在无限时域情况下，基于对偶性和可镇定性的结果，设计了最优输出反馈控制器。需要指出：在无限时域情况下的最优滤波器一般不会收敛到一个稳定值，因此作者给出了一个次优的时不变滤波器，与最优控制器结合形成了一个时不变次优补偿器。文 [55] 研究了由维纳噪声驱动的连续时间 MJLS 的线性二次最优控制问题，考虑状态未知但输出已知的情况，证明了最优控制器可由两个耦合的 Riccati 微分方程得到，其中一个与状态已知时的最优控制问题有关，另一个与最有滤波问题相关，这就是连续时间 MJLS 的分离原理；指出了耦合 Riccati 微分方程的解渐近收敛到一组耦合 Riccati 代数方程，并设计了最优输出反馈控制器。文 [55] 本质上是文 [48] 在连续时间情况下的延伸。但是，文 [55] 仅给出了 Riccati 微分方程存在唯一正半定解的充分条件，并没有明确给出必要条件。

文 [56 - 57] 对带有乘性白噪声影响的连续时间 MJLS 的线性二次最优控制问题进行了深入研究。在文 [56] 中，作者首先应用动态规划方法设计了最优控制器；其次为了求与最优控制相关的随机广义 Riccati 微分方程的稳定解，提出了一类极大值解的迭代方法，这种迭代过程主要是基于求解若干解不耦合的李雅普诺夫方程。文 [57] 研究了带有 $m$ 维乘性噪声和 $N$ 个目标函数的连续时间 MJLS 的线性二次最优化问题，采用广义李雅普诺夫方程方法，并利用求得的随机广义 Riccati 微分方程的解设计了最优 Pareto 控制器，该控制器是一个稳定的反馈控制器，且随机广义 Riccati 微分方程的解与最优控制的关联最小。需要指出的是：上述方法的计算量过多，对最优控制的求解带来了不小的困难。如何让最优控制的解在计算量和保守性之间达到平衡是需要进一步研究的课题。

文 [58] 研究了马尔可夫链在可数无穷集取值且受乘性噪声影响的连续时间 MJLS 的线性二次最优控制问题，在系统可检测的假设下，给出了最优控制相关 Riccati 微分方程存在整体可解性的充要条件；采用非随机逼近方法，对系统的稳定性、可镇定性以及可检测性作了详细说明，并提出了一个适用于马尔可夫链在可数无穷集取值的 MJLS 的广义伊藤(Ito)公式。

更多对于受噪声影响的连续时间 MJLS 最优控制的研究请参见文 [59 - 62]。实际上，受噪声影响的 MJLS 的最优控制问题在近几年引起了国内外专家学者的广泛关注。如前文所述的文 [47 - 48] 和文 [54 - 55] 等对受加性噪声影响的 MJLS 的最优控制问题进行了研究，而文 [49 - 50] 和文 [56 - 57] 等给出了受乘性噪声影响的 MJLS 最优控制器的设计方案。但是，需要指出的是：目前对于噪声 MJLS 最优控制问题的研究大都假设了加性噪声、乘性噪声是高斯白噪声，而对于广泛存在的非高斯噪声的情况鲜有涉及。因此对带有非高斯噪声的 MJLS 最优控制问题的研究将成为一个十分有趣的问题和研究方向。另外，目前部分文献仅设计了有限时域情况下的最优控制器，对于无限时域的情况，如何设计出能够保证系统稳定的控制器值得进一步研究。一个可行的方案是设计补偿器，实现系统对全部干扰或部分干扰的补偿，如文 [47] 给出了这种方法的求解思路，然而所设计的控制器并不是是最优的。

## 3 带有时滞的 MJLS 最优控制

在设计控制系统时，时滞往往是不可避免的。时滞现象的发生往往会破坏系统的性能，甚至使系统稳定性遭到破坏。时滞系统的数学模型属于无穷维泛函微分方程，在数学理论上对其研究比对数学模型属于常微分方程的非时滞系统的研究难度大很多[63]。系统参数的改变和时滞的发生都有可能使得系统不稳定或者使系统性能变差，所以，对带有时滞的 MJLS 最优控制问题进行深入研究具有重要意义。

### 3.1 离散时间情况

文 [64 - 65] 对马尔可夫链模态存在时滞以及系统状态存在时滞情况下离散时间 MJLS 的最优控制问题进行了研究。在文 [64] 中，作者研究了一步时滞情况下离散时间 MJLS 的最优线性二次调节问题，在有限时域，利用动态规划方法，求解了一组

耦合的 Riccati 方程，证明了最优控制策略是当前状态的线性反馈，且其增益取决于延迟的模态；在无限时域情况下，耦合 Riccati 方程的解或不可行性证明是通过求解一组线性矩阵不等式来获得的；另外对于多步时滞的情况，作者指出最优控制策略非线性地依赖于一系列状态观测和控制输入，其长度取决于时滞的大小。文 [65] 研究了一类具有部分已知转移概率和时变延迟的离散时间 MJLS 的稳定性分析和镇定问题，这里的时滞被设定为随时间变化，并且有下限和上限，通过线性矩阵不等式方法推导出了底层系统随机稳定性的充分条件，并进一步给出最优稳定控制器的设计。值得一提的是：所提出的系统涵盖了转移概率完全未知或部分已知的情况，使得系统更具一般性；其次，引入时滞范围相关的概念，得到了底层系统保守性较低的稳定性和镇定条件。然而上述文献仅对模态时滞或状态时滞的情形进行了分析，得到的结果并不适用于带有输入时滞的离散时间 MJLS。

针对带有输入时滞和乘性噪声的一般线性系统，文 [66] 提出了一个新型的极大值原理，成为了解决此类系统线性二次最优控制问题的有效手段。受此启发，文 [67] 推导出了适用于 MJLS 的新型极大值原理；基于该方法，在有限时域情况下以显式形式给出了最优控制器存在的充要条件，并给出了最优控制器的解析解；最优控制器是当前时刻状态和历史时刻控制输入的线性函数，其中反馈增益是通过求解一种新型耦合差分 Riccati 方程得到的一组跳变参数矩阵。文 [68] 将文 [67] 的结果拓展到了无限时域情况下，首次在显式表达式下研究了 MJLS 稳定的充分性条件，并利用耦合代数 Riccati 方程设计了无限时域情况下的最优控制器，并指出带有输入时滞的 MJLS 在均方意义上存在最优可镇定控制器的充要条件是耦合代数 Riccati 方程具有唯一正定解。文 [68] 所设计的无限时域最优可镇定控制器是基于均方稳定的标准，对于不同稳定性准则下的最优可镇定控制器还需进一步研究。

对于同时带有输入时滞和观测丢包的离散时间 MJLS，文 [69] 研究了其最优输出反馈控制问题。作者基于适用于 MJLS 的新型极大值原理，通过求解一组时滞耦合差分 Riccati 方程获得了最优状态反馈控制器；在控制器无法得到系统状态信息但可获得带有丢包的观测信息的情况下，提出一种最优马尔可夫跳变线性滤波器；通过证明分离原理的成立，设计得到了最优输出反馈控制器。需要指出的是，文 [69] 所提出的方法仅适用于带有一步时滞的情形，对带有多步时滞或时变时滞的离散时间 MJLS 并不适用。

文 [70－72] 分别研究了长时滞、同时包含时滞和丢包情况下的离散时间 MJLS 最优控制问题。需要指出的是：相较于无时滞的情况，时滞情况下与最优控制器相关的耦合 Riccati 方程包含了时滞项，这使得耦合 Riccati 方程的求解变得更加复杂。

### 3.2　连续时间情况

由于时滞的存在，使得对最优控制相关耦合 Riccati 微分方程的求解变得异常复杂。因此，时滞情况下连续时间 MJLS 的最优控制问题是否存在唯一解的充要条件很难获得，最优控制器的解析形式更是无法给出。据笔者所知，目前连续时间时滞 MJLS 的最优控制问题还没有得到解决，包括状态时滞、输入时滞、恒定时滞以及时变时滞等情况。国内外专家学者对于连续时间时滞 MJLS 的研究成果大都集中在系统的均方稳定性[73]、鲁棒稳定性[74]、指数稳定性[75]、可镇定性[76－77]以及 $H_\infty$ 控制[78－79]、基于 Lasalle 定理的状态反馈控制[80]等方面。这些稳定性与控制器的设计思路为连续时间时滞 MJLS 最优控制器的设计奠定了基础，连续时间时滞 MJLS 的最优控制问题需要进一步探索。

实际工业系统的控制系统设计中，时滞广泛存在并且有时是不可避免的。实际上，时滞是导致系统不稳定和性能差的原因之一。因此带有时滞的 MJLS 的最优控制问题得到了学者的广泛关注，如前文所述的文 [64－68] 等分别对带有模态时滞、状态时滞以及输入时滞的离散时间 MJLS 最优控制问题进行了研究。类似于一般 MJLS，时滞 MJLS 最优控制问题的求解大部分也是依赖于 Riccati 方程的求解。然而由于时滞项的存在，想要获得 Riccati 方程存在唯一解的充要条件变得更加复杂。研究带有时滞与噪声、时滞与丢包、长时滞、时变时滞以及随机时滞等的 MJLS 的最优控制问题将会更加完善 MJLS 的控制理论，拓宽 MJLS 在实际工业系统的应用，具有重要的理论与实际意义。另外，带有时滞的连续时间 MJLS 的最优控制问题还没有得到解决，因此时滞 MJLS 的最优控制问题值得更加深入的研究。对于一般的线性时滞系统，可以通过增广矩阵的方法将其转变为无时滞系统，然后利用无时滞系统的求解方法来获得等价的最优控制结果。因此，可以将这种思路应用于时滞 MJLS 来求取最优控制，其难点在于建立增广矩阵时系统矩阵的设

置，这也是作者正在研究的问题之一。

## 4 特定情况下的 MJLS 最优控制

本节主要介绍了在某些特定情况下 MJLS 最优控制的研究进展，例如，奇异 MJLS 的情况，MJLS 与平均场理论相结合的情况，MJLS 受约束的情况以及不确定转移概率 MJLS 的情况。这些特定情况下 MJLS 最优控制的研究成果丰富和完善了 MJLS 的理论体系，使得 MJLS 在实际中的应用更加广泛。

### 4.1 离散时间情况

对于没有跳变的奇异系统，一个最基本的问题是在给定的初始条件下，系统是否存在唯一解，这一问题也被称为正则性问题。文［81］通过对一个固定的矩阵 $P$ 进行坐标变换，应用 Weierstrass 分解定理，提供了一个等价的子系统对，从而得到了奇异系统正则性问题的解决方案。然而这种方法无法直接应用于奇异 MJLS，因为模态的变化会使矩阵 $P$ 从一个周期到另一个周期发生变化。文［82－83］对奇异 MJLS 的最优控制问题展开了研究。一个一般的奇异 MJLS 可由式(9)给出：

$$S_{\theta(k+1)}x(k+1)=A_{\theta(k)}x(k)+B_{\theta(k)}u(k) \qquad (9)$$

式中，$S_{\theta(k+1)}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 也是系统的参数矩阵。如果存在某个常数 $\lambda$ 使得 $|\lambda S-A|\neq 0$，那么称系统是正则的，否则系统非正则。文［82］引入了一个矩阵 $P$，这个矩阵 $P$ 的结构可以将一个周期的终端状态和下一个周期的初始状态连接起来，应用类似文［81］的方法，导出了奇异 MJLS 的唯一解；定义了适当的预期概念，在此基础上提出了奇异 MJLS 的二阶矩模型，并给出了预测条件的实际检验方法；定义了关于奇异 MJLS 的 4 个稳定性概念，包括均方稳定性、随机稳定性、均方指数稳定性和几乎确定稳定性，建立了它们之间的关系，并给出了用增广矩阵的谱半径检验系统稳定性的方法。文［83］在文［82］的基础上进一步拓展，同时研究了有限时域和无限时域情况下的离散奇异 MJLS 的线性二次最优控制问题，应用动态规划方法获得了最优状态反馈控制器。值得一提的是：该方法涉及基变换，并将控制动作限制在了适当的子空间，足以保证闭环系统的规律性和稳定性。

平均场理论是将环境对物体的作用平均化，以平均作用代替单个作用效果加和的方法。平均场能够将高次、多维并且难以求解的问题转化为一个低维、易于求解的问题，因此平均场理论被广泛应用于各个领域[84]。与标准的 MJLS 的线性二次最优控制问题相比，具有马尔可夫跳变参数的平均场随机线性二次最优控制问题的一个重要特点是系统的性能指标包含状态、控制以及它们期望值的非线性项。其性能指标表示为

$$\begin{aligned}J_N=\sum_{k=0}^{N-1}&E(x_k'Q_{\theta(k)}x_k+(E(x_k))'\bar{Q}_{\theta(k)}E(x_k)+\\&u_k'R_{\theta(k)}u_k+(E(u_k))'\bar{R}_{\theta(k)}E(u_k))+\\&E(x_N'G_{\theta(N)}x_N)+E((E(x_N))'\bar{G}_{\theta(N)}(E(x_N)))\end{aligned} \qquad (10)$$

式中，$E$ 表示数学期望，$Q_i$，$\bar{Q}_i$，$R_i$，$G_i$ 和 $\bar{G}_i$($i=1,2,\cdots,l$)是相应的加权矩阵。

文［85］基于马尔可夫链的模态，应用文［2］中提到的分解技术，对马尔可夫链的状态和控制进行了分解，并将系统性能指标分解为了一个可解的公式；建立了新的增广状态矩阵和增广控制矩阵，通过求解两个广义差分 Riccati 方程设计了有限时域情况下的最优控制器。不同于文［85］，针对系统性能指标中加权矩阵不定号的情况，文［86］研究了其线性二次最优控制问题，应用平均场类型的极大值原理，通过求解广义差分 Riccati 方程给出最优控制集的一般形式。需要指出的是：无限时域情况下具有马尔可夫跳变参数的平均场随机线性二次最优控制问题值得进一步研究。

文［87］研究了一类状态变量和控制变量受不等式($\|F_lx(k)+G_lu(k)\|\leqslant\rho_l$，$k=0,1,\cdots,l=1,2,\cdots,t$)约束的离散时间 MJLS 的线性二次最优控制问题，其中 $F_l$ 和 $G_l$ 是具有适当维数的矩阵，$\rho_l$ 表示约束的边界。假设初始状态在概率为 1 的适当凸集上取值但不完全已知，设计了一种算法将控制问题转化成了线性矩阵不等式的凸优化问题，并由此设计了最优控制器，该控制器可以使性能指标的值小于某个设定的上界。

文［88－89］对马尔可夫跳变参数不确定离散时间 MJLS 的最优控制问题进行了研究。在转移概率矩阵不明确已知，但属于多面体域或者包含未知或有界元素的情况下，文［88］研究了离散时间 MJLS 的 $H_2$ 状态反馈控制问题，首先用单形的笛卡尔积将转移概率矩阵的不确定性建模，这使得 $H_2$ 鲁棒均方稳定问题可以通过线性矩阵不等式的松弛解来分析；对于 $H_2$ 状态反馈控制器的设计，给出了在区间(－1，1)内具有标量参数的线性矩阵不等式的充分条件，该条件对于完全可观、部分可观和不可观的情况都适用。值得一提的是：随着决策变量偏度的增加和对标量参数最优值的搜索，使用文［88］的方法可以得到了更清晰的结果；与其他可用

技术相比，该方法在不增加计算量的情况下，提供了更好的 $H_2$ 保性能估计。文 [89] 研究了跳变参数具有多面体不确定性的离散时间 MJLS 的模型预测控制（MPC）问题，利用多步模态依赖状态反馈控制律分别给出了无约束、有约束和低在线计算量（LOCB）约束三种情况下的 MPC（model predictive control）设计方案；利用线性矩阵不等式解的仿射性质，提出了一种具有 LOCB 的算法，该算法既能保证系统的均方稳定，又能满足输入变量和状态变量的硬模态依赖约束。更多关于约束、未知转移概率情况下的离散时间 MJLS 最优控制的研究请参见文 [90－92]。

### 4.2 连续时间情况

对于连续时间 MJLS，奇异问题、约束问题、不定转移概率问题等同样也是存在的。针对这些情况，国内外专家做了大量努力并取得了突出的成果。

文 [93－95] 对连续时间奇异 MJLS 的最优控制问题展开了深入研究。文 [93] 在小时间参数为零的条件下，通过等价变换将维数较高的系统方程转换成了维数较低的快变子系统和慢变子系统，应用动态规划方法设计了最优控制器；当必须考虑小时间参数且小时间参数不能精确测量时，应用极大值原理给出了系统最优控制率的设计步骤。文 [94] 考虑了马尔可夫链转移概率未知的连续时间奇异 MJLS 的最优控制问题，利用双线性矩阵不等式给出了系统存在输出反馈控制器存在的新条件，该条件可以保证系统是随机可容许的；为了求解与最优输出反馈控制器相关的双线性矩阵不等式，设计了一种求解算法，该算法可以产生更好的初值并且保守性很小。文 [95] 研究了一类连续时间奇异 MJLS 的近似最优控制问题，利用奇异值分解，得到了随机广义耦合微分 Riccati 方程解的存在性，将原系统转化成了具有马尔可夫跳变的奇摄动线性随机系统；通过原点理论给出了最优控制解的存在性充分条件，并给出了有限时域情况下最优控制器的显式表达形式。最优控制解存在性的必要条件有待进一步探索；无限时域情况下的最优可镇定控制器也值得深入研究。

文 [96] 研究了一类控制变量受约束（$u(t) \leqslant |U|$）的 MJLS 的最优控制问题，首先应用极大值原理设计了最优控制器；其次通过统计线性化将由控制约束导致的非线性函数线性化，并将其代入到最优控制器相关的 Riccati 方程中，通过求解一组常微分方程组的两点边值问题，得到了最优控制器的增益矩阵。

文 [97] 考虑了由 Ito 微分方程控制的时滞 MJLS 的 Pareto 最优控制问题，利用交叉耦合矩阵不等式给出了 Pareto 策略集存在的充分条件；将 KKT（Karush-Kuhn-Tucker）条件作为必要条件推导了一组新的交叉耦合随机代数方程，状态反馈策略集是通过求解线性矩阵不等式得到的。值得一提的是：文 [97] 首次提出了一类随机时滞 MJLS 的鲁棒 Pareto 最优策略，这是对理论改进的一个重要挑战。

对于带有时变转移概率的连续时间 Ito MJLS，文 [98] 研究了其无限时域情况下的线性二次最优控制问题，假设 MJLS 的转移概率具有分段齐次时变的性质，那么原系统就变成了一个分段齐次 Ito 随机 MJLS；首先给出了系统随机可镇定的充要条件；其次基于两个耦合 Riccati 方程，在跳变参数任意变化和随机变化两种情况下分别设计了线性二次最优控制器；最后给出了求解两个耦合 Riccati 方程唯一正定解的两种迭代算法。

综上，本节主要综述了某些特定情况下的 MJLS 的最优控制问题，主要包括奇异 MJLS 的最优控制问题 [81－83，93－95]、平均场线性二次最优控制问题 [85－86]、约束情况下的马尔可夫最优控制问题 [87，91－92，96] 以及跳变参数不确定或带有时变转移概率的 MJLS 的最优控制问题 [88－89，98]。由于篇幅限制，并没有对半马尔可夫跳变系统、隐马尔可夫跳变系统等复杂 MJLS 的最优控制或多目标最优控制问题进行介绍。但总的来说，目前对于这些特殊情况下的 MJLS 以及复杂 MJLS 最优控制的研究并不是很成熟，对其展开更深入的探索将会极大地丰富和完善 MJLS 控制理论体系，具有较好的理论和实际意义。

## 5 总结与展望

本文围绕 MJLS 的最优控制领域的研究现状进行综述，包括离散系统和连续系统在各种不同情况下的最优控制。首先，MJLS 由于其能够表示突变的特性在实际工程中广泛应用；其次，最优控制在处理时间最少、能耗最小、跟踪和调节等问题时具有明显的优势，因此，对 MJLS 最优控制的研究具有重大的理论意义与实际意义。目前，对 MJLS 最优控制的研究已经处于相对成熟的阶段，但仍有一些挑战性问题有待解决：

1）带有时滞的连续时间的 MJLS 的最优控制问题目前还没有得到解决，对于该问题的求解需要进

一步研究。带有时滞项的耦合 Riccati 微分方程是否存在唯一解还有待证实。近年来，关于连续时间时滞 MJLS 在有限时域、无限时域情况下稳定性分析的研究成果越来越丰富，这为研究其最优控制问题奠定了坚实的基础。一旦确定了 MJLS 的均方稳定性、鲁棒稳定性等准则，一个可行的方法是将时滞系统转化为无时滞系统，应用无时滞系统的求解思路来解决连续时间时滞 MJLS 的最优控制问题。

2）目前对于含有状态时滞和输入时滞 MJLS 的稳定性分析得到了广泛研究。然而已有文献中提出的稳定性结果仍具有一定程度的保守性，进一步降低稳定性结果的保守性是一个值的深入研究的课题。“保守性”和“计算量”通常是评价一个稳定性条件好坏的标准。一个“好”的稳定性条件通常需要保守性不变的情况下尽可能减少计算量，或者计算量不增多的情况下尽可能降低保守性。可以将一般线性系统中的松弛 Lyapunov-Krasovskii（L-K）泛函方法推广到 MJLS，设计一个合适的 L-K 泛函，以达到平衡稳定性条件的保守性和计算量、获得“好”的稳定性标准的目的。在获得了较低保守性和计算量的稳定性结果的条件下设计最优控制器也是一个重要的研究课题。

3）针对带加性噪声和乘性噪声的 MJLS 最优控制的研究已经比较成熟，但大多数研究结果假定噪声是高斯白噪声的情况，对于非高斯噪声的结果寥寥无几。求解带有非高斯噪声的 MJLS 最优控制问题的难点在于非高斯噪声的统计特性只能由输出概率密度函数（PDF）准确表征，而具有正积分约束的概率密度函数控制属于一个约束泛函空间的无穷维分布参数控制问题。传统的求解随机最优控制的工具并不适用于非高斯随机系统。因此对带有非高斯噪声的 MJLS 最优控制的研究仍是一个开放性课题。王宏、郭雷等在最近几年提出了非高斯随机分布系统的控制理论[99-100]，其核心内容是控制目标使得系统输出的 PDF 能够尽可能跟踪期望的 PDF。将非高斯随机分布控制理论推广到 MJLS 可能成为今后研究带有非高斯噪声 MJLS 最优控制的新课题。

4）对半马尔可夫跳变系统、隐马尔可夫跳变系统、2 维马尔可夫跳变系统这些由传统 MJLS 推广而来的复杂系统的最优控制问题值得深入研究。半马尔可夫跳变系统通过一个固定的转移概率矩阵以及一个驻留时间概率密度函数矩阵来表征，其转移概率不再是一个常数，而是随着时间而变化。隐马尔可夫跳变系统含有隐含的未知参数，其难点在于需要从可测参数中确定系统的隐含参数，一般情况下隐马尔可夫跳变系统的模态估计器和反馈控制器需要同时设计。2 维马尔可夫跳变系统由离散时间二维动态系统描述的子系统族以及它们之间指定的切换规则组成。传统 MJLS 中最优控制器的设计方法并不完全适用于这类复杂跳变系统。如何将求解传统 MJLS 最优控制的方法推广到这类复杂跳变系统，亦或者针对此类复杂跳变系统最优控制问题设计新的求解方法将成为今后一个重要的研究方向。

## 参考文献


[1] Krasovsky N N, Lidsky E. Controller analytical design in systems with random properties. Ⅰ. Solution view. Solution method[J]. Avtomatika i Telemekhanika, 1961, 22(9): 1145－1150.

[2] Costa O L V, Fragoso M D, Marques R P. Discrete-time Markov jump linear systems[M]. London, UK: Springer-Verlag London Limited, 2005.

[3] Boukas E K. Control of singular systems with random abrupt changes[M]. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2008.

[4] Costa O L V, Fragoso M D, Todorov M G. Continuous-time Markov jump linear systems[M]. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2013.

[5] Shi P, Li F B. A survey on Markovian jump systems: Modeling and design[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2015, 13(1): 1－16.

[6] 张保勇，夏卫锋，李永民. 时滞马尔科夫跳变系统的分析与综合研究综述（英文）[J]. 安徽大学学报（自然科学版），2018, 42(2): 3－17.
Zhang B Y, Xia W F, Li Y M. A survey on analysis and synthesis of delayed Markovian jump systems[J]. Journal of Anhui University (Natural Science Edition), 2018, 42(2): 3－17.

[7] Fernando G B. Stability global dynamics and Markov equilibrium in models of endogenous economic growth[J]. Journal of Economic Theory, 2007, 136(1): 392－416.

[8] Dogan I, Bilgili F. The non-linear impact of high and growing government external debt on economic growth: A Markov regime switching approach[J]. Economic Modelling, 2014, 39: 213－220.

[9] Goutte S. Conditional Markov regime switching model applied to economic modelling [J]. Economic Modelling, 2014, 38: 258 – 269.
[10] 孙鹏，张强，白云岗，等. 基于马尔科夫模型的新疆水文气象干旱研究 [J]. 地理研究，2014，33(9)：1647 – 1657.
Sun P, Zhang Q, Bai Y G, et al. Transitional behaviors of hydrometeorological droughts in Xinjiang using the Markov chain model [J]. Scientia Geographica Sinica, 2014, 33(9): 1647 – 1657.
[11] Zeng J J, Li K, Wang X Q, et al. The application of reweighted Markov chains in water-sediment prediction in inland river basins – A case study of the Shiyang River Basin [J]. Sustainable Cities and Society, 2021. DOI: 10.1016/j.scs.2021.103061.
[12] Sean L, Michael G R. Time-varying mixtures of Markov chains: An application to road traffic modeling [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(12): 3152 – 3167.
[13] Zhang L G, Christophe P. Stochastic stability of Markov jump hyperbolic systems with application to traffic flow control [J]. Automatica, 2017, 86: 29 – 37.
[14] Sinan S, Suzan A. Alleviating road network congestion: Traffic pattern optimization using Markov chain traffic assignment [J]. Computers & Operations Research, 2018, 99: 191 – 205.
[15] Farzaneh A, Khorasani K. A decentralized Markovian jump $H_\infty$ control routing strategy for mobile multi-agent networked systems [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2011, 19(2): 269 – 283.
[16] Liu J, Wu H Q, Cao J D. Event-triggered synchronization in fixed time for semi-Markov switching dynamical complex networks with multiple weights and discontinuous nonlinearity [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2020. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105400.
[17] Sworder D. Feedback control of a class of linear systems with jump parameters [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1969, 14(1): 9 – 14.
[18] Wonham W M. Random differential equations in control theory [J]. Matematika, 1973, 17(4): 129 – 167.
[19] Han C Y, Li H D, Wang W, et al. Linear quadratic optimal control for discrete-time Markov jump linear systems [C] //14th International Conference on Control and Automation. Piscataway, USA: IEEE, 2018: 769 – 774.
[20] Blair W P, Sworder D D. Feedback control of a class of linear discrete systems with jump parameters and quadratic cost criteria [J]. International Journal of Control, 1975, 21(5): 833 – 841.
[21] Chizeck H J, Willsky A S, Castanon D. Markovian jump linear quadratic optimal control in discrete time [C] //22nd IEEE Conference on Decision and Control. Piscataway, USA: IEEE, 1983: 1138 – 1142.
[22] Chizeck H J, Willsky A S, Castanon D. Discrete-time Markovian-jump linear quadratic optimal control [J]. International Journal of Control, 1986, 43(1): 213 – 231.
[23] Ji Y, Chizeck H J. Controllability, observability and discrete-time Markovian jump linear quadratic control [J]. International Journal of Control, 1988, 48(2): 481 – 498.
[24] Abou-Kandil H, Freiling G, Jank G. On the solution of discrete-time Markovian jump linear quadratic control problems [J]. Automatica, 1995, 31(5): 765 – 768.
[25] Do Val J B R, Geromel J C, Costa O L V. Uncoupled Riccati iterations for the linear quadratic control problem of discrete-time Markov jump linear systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1998, 43(12): 1727 – 1733.
[26] Geromel J C, Goncalves A P C, Fioravanti A R. Dynamic output feedback control of discrete-time Markov jump linear systems through linear matrix inequalities [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2009, 48(2): 573 – 593.
[27] Costa O L V, Fragoso M D. Discrete-time LQ-optimal control problems for infinite Markov jump parameter systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1995, 40(12): 2076 – 2088.
[28] Ungureanu V M. Optimal control for linear discrete-time systems with Markov perturbations in Hilbert spaces [J]. IMA Journal of Mathematical Control and Information, 2009, 26(1): 105 – 127.
[29] Costa O L V, Figueiredo D Z. Stochastic stability of jump discrete-time linear systems with Markov chain in a general borel space [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(1): 223 – 227.
[30] Costa O L V, Figueiredo D Z. LQ control of discrete-time jump systems with Markov chain in a general Borel space [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(9): 2530 – 2535.
[31] Kordonis I, Papavassilopoulos G P. On stability and LQ control of MJLS With a Markov chain with general state space [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(2): 535 – 540.
[32] Do Val J B R, Geromel J C, Goncalves A P C. The $H_2$-control for jump linear systems: Cluster observations of the Markov state [J]. Automatica, 2002, 38(2): 343 – 349.
[33] 蔡文新，方洋旺，李锐，等. 离散马尔可夫跳变线性系统最优控制 [J]. 系统工程与电子技术，2012，34(7)：1458 – 1462.
Cai W X, Fang Y W, Li R, et al. Optimal control for Markov jump linear systems [J]. Systems Engineering and Electronics,

2012, 34(7): 1458 – 1462.

[34] Han C Y, Li H D, Wang W, et al. Linear quadratic optimal control and stabilization for discrete-time Markov jump linear systems [J/OL]. (2018 – 03 – 14) [2021 – 07 – 06]. https://arxiv.org/pdf/1803.05121v1.pdf.

[35] Mariton M, Bertrand P. Output feedback for a class of linear systems with stochastic jump parameters [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1985, 30(9): 898 – 900.

[36] Ji Y, Chizeck H J. Controllability, stabilizability, and continuous-time Markovian jump linear quadratic control [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1990, 35(7): 777 – 788.

[37] Do Val J B R, Costa E F. Numerical solution for linear-quadratic control problems of Markov jump linear systems and weak detectability concept [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2002, 114(1): 69 – 96.

[38] Val J B R, Costa E F. Stabilizability and positiveness of solutions of the jump linear quadratic problem and the coupled algebraic Riccati equation [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(5): 691 – 695.

[39] Fragoso M D, Baczynski J. Optimal control for continuous time LQ-problems with infinite Markov jump parameters via semigroup [C]//38th IEEE Conference on Decision and Control. Piscataway, USA: IEEE, 1999: 4131 – 4136.

[40] Boukas E K, Liu Z K. Jump linear quadratic regulator with controlled jump rates [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(2): 301 – 305.

[41] De Farias D P, Geromel J C, Do Val J B R, et al. Output feedback control of Markov jump linear systems in continuous-time [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(5): 944 – 949.

[42] He S P, Song J, Ding Z T, et al. Online adaptive optimal control for continuous-time Markov jump linear systems using a novel policy iteration algorithm [J]. IET Control Theory & Applications, 2015, 9(10): 1536 – 1543.

[43] Czornik A. On control problems for jump linear systems [M]. Gliwice, Poland: Wydawnictwo Politechniki Slaskiej, 2003.

[44] Dong J X, Yang G H. $H_2$ state feedback control synthesis of continuous-time uncertain Markov jump linear systems [C]//2007 American Control Conference. Piscataway, USA: IEEE, 2007: 2417 – 2421.

[45] **胡诗国，方洋旺，蔡文新，等. 连续马尔可夫跳变系统最优控制 [J]. 控制与决策**，2013，28(3)：396 – 401.
Hu S G, Fang Y W, Cai W X, et al. Optimal control for continuous-time Markov jump system [J]. Control and Decision, 2013, 28(3): 396 – 401.

[46] **王明康，周世健，李志农，等. 基于同态小波的乘性噪声去除方法研究 [J]. 设备管理与维修**，2018(13)：38 – 40.
Wang M K, Zhou S J, Li Z N, et al. Study on multiplicative noise removal method based on homomorphic wavelet [J]. Plant Maintenance Engineering, 2018(13): 38 – 40.

[47] Chizeck H J, Ji Y. Optimal quadratic control of jump linear systems with Gaussian noise in discrete-time [C]//27th IEEE Conference on Decision and Control. Piscataway, USA: IEEE, 1988: 1989 – 1993.

[48] Costa O L V, Tuesta E F. Finite horizon quadratic optimal control and a separation principle for Markovian jump linear systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(10): 1836 – 1842.

[49] Costa O L V, De Paulo W L. Indefinite quadratic with linear costs optimal control of Markov jump with multiplicative noise systems [J]. Automatica, 2007, 43(4): 587 – 597.

[50] Ting H, Wei H Z, Hong J M. Finite horizon $H_2/H_\infty$ control for discrete-time stochastic systems with Markovian jumps and multiplicative noise [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(5): 1185 – 1191.

[51] Costa O L V, Okimura R T. Discrete-time mean variance optimal control of linear systems with Markovian jumps and multiplicative noise [J]. International Journal of Control, 2009, 82(2): 256 – 267.

[52] Wang Y W, Jin Z, Xie W. Optimal control strategy for discrete-time MJLS with controllable Markov chain and Gaussian white noise [C]//34th Chinese Control Conference. Piscataway, USA: IEEE, 2015: 1934 – 1768.

[53] **王文莹. 离散时间马尔可夫跳变系统的线性二次最优控制 [D]. 青岛：山东科技大学**，2016.
Wang W Y. Stochastic linear quadratic optimal control for discrete-time systems with Markov jump [D]. Qingdao: Shandong University of Science and Technology, 2016.

[54] Ji Y, Chizeck H J. Jump linear quadratic Gaussian control in continuous time [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, 37(12): 1884 – 1892.

[55] Fragoso M D, Costa O L V. A separation principle for the continuous-time LQ-problem with Markovian jump parameters [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(12): 2692 – 2707.

[56] Dragan V, Morozan T. The linear quadratic optimization problems for a class of linear stochastic systems with multiplicative white noise and Markovian jumping [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(5): 665 – 675.

[57] Kong S L, Zhang Z S. Optimal control of stochastic system with Markovian jumping and multiplicative noises [J]. Acta Automat-

ica Sinica，2012，38(7)：1113－1118.

[58] Ungureanu V M. Optimal control for infinite dimensional stochastic differential equations with infinite Markov jumps and multiplicative noise [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2014，417(2)：694－718.

[59] Gao M，Sheng L，Zhang W H. Finite horizon $H_2/H_\infty$ control of time-varying stochastic systems with Markov jumps and $(x, u, v)$-dependent noise [J]. IET Control Theory & Applications，2014，8(14)：1354－1363.

[60] Nakura G. Stochastic optimal tracking with preview for linear continuous-time Markovian jump systems by output feedback [J]. Transactions of the Institute of Systems，Control and Information Engineers，2016，29(11)：497－505.

[61] Song J，He S P，Liu F，et al. Data-driven policy iteration algorithm for optimal control of continuous-time Itô stochastic systems with Markovian jumps [J]. IET Control Theory & Applications，2016，10(12)：1431－1439.

[62] Guevara K，Fragoso M D. Optimal control for linear quadratic problems with Markov jump parameters and fractional brownian perturbation [C]//56th Annual Conference on Decision and Control. Piscataway，USA：IEEE，2017：5906－5911.

[63] 米伟娜. 时滞系统的稳定性分析 [D]. 青岛：青岛大学，2010.
Mi W N. Stability analysis of time-delay systems [D]. Qingdao：Qingdao University，2010.

[64] Matei I，Martins N C，Baras J S. Optimal linear quadratic regulator for Markovian jump linear systems，in the presence of one time-step delayed mode observations [J]. IFAC Proceedings Volumes，2008，41(2)：8056－8061.

[65] Zhang L，Boukas E K，Lam J. Analysis and synthesis of Markov jump linear systems with time-varying delays and partially known transition probabilities [J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2008，53(10)：2458－1464.

[66] Zhang H S，Li L，Xu J J，et al. Linear quadratic regulation and stabilization of discrete-time systems with delay and multiplicative noise [J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2015，60(10)：2599－2613.

[67] Han C Y，Li H D，Zhang H S. Optimal control for discrete-time Markov jump linear system with control input delay [J/OL]. (2018－08－19) [2021－07－06]. https：//arxiv.org/pdf/1808.06228.pdf.

[68] Han C Y，Li H D，Zhang H S. Optimal stabilization control for discrete-time Markov jump linear system with control input delay [J/OL]. (2019－02－17) [2021－07－06]. https：//arxiv.org/pdf/1902.06235v1.pdf.

[69] Liu Y，Han C Y，Wang X H，et al. Optimal output feedback control for discrete-time Markov jump linear system with input delay and packet losses [J]. Optimal Control Applications and Methods，2021，42(2)：395－416.

[70] 朱其新，刘红俐，胡寿松. 长时延马尔可夫网络控制系统的随机最优控制 [J]. 华北电力大学学报，2007，34(3)：68－71.
Zhu Q X，Liu H L，Hu S S. Stochastic optimal control of Markov networked control systems with long time delay [J]. Journal of North China Electric Power University，2007，34(3)：68－71.

[71] Li H D，Han C Y，Zhang H S，et al. Optimal control and stabilization for networked systems with input delay and Markovian packet losses [J]. IEEE Transactions on Systems，Man，and Cybernetics：Systems，2021，51(7)：4453－4465.

[72] 刘越. 带有输入时滞的随机马尔可夫跳变系统的最优控制 [D]. 济南：济南大学，2020.
Liu Y. Optimal control for stochastic Markov jump systems with input delay [D]. Jinan：University of Jinan，2020.

[73] Benjelloun K，Boukas E K. Mean square stochastic stability of linear time-delay system with Markovian jumping parameters [J]. IEEE Transactions on Automatic Control，1998，43(10)：1456－1460.

[74] Mahmoud M S，Shi P. Robust stability，stabilization and $H_\infty$ control of time-delay systems with Markobian jump parameters [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control，2003，13(8)：755－784.

[75] Wang Z D，Liu Y R，Liu X H. Exponential stabilization of a class of stochastic system with Markovian jump parameters and mode-dependent mixed time-delays [J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2010，55(7)：1656－1662.

[76] Zhao X D，Zeng Q S. Stabilization of jump linear systems with mode-dependent time-varying delays [J]. Optimal Control Applications and Methods，2011，32(2)：139－152.

[77] Chen W M，Xu S Y，Zhang B Y，et al. Stability and stabilisation of neutral stochastic delay Markovian jump systems [J]. IET Control Theory & Applications，2016，10(15)：1798－1807.

[78] Xu S Y，Lam J，Mao X R. Delay-dependent $H_\infty$ control and filtering for uncertain Markovian jump systems with time-varying delays [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I：Regular Papers，2007，54(9)：2070－2077.

[79] Qiu J B，Wei Y L，Karimi H R. New approach to delay-dependent $H_\infty$ control for continuous-time Markovian jump systems with time-varying delay and deficient transition descriptions [J]. Journal of the Franklin Institute，2015，352(1)：189－215.

[80] Zhuang G M，Xia J W，Zhang W H，et al. State feedback control for stochastic Markovian jump delay systems based on LaSalle-type theorem [J]. Journal of the Franklin Institute，2018，355(5)：2179－2196.

[81] Duan G R. Analysis and design of descriptor linear systems [M]. New York，USA：Springer-Verlag New York Limited，2010.

[82] Chávez-Fuentes J R，Costa E F，Mayta J E，et al. Regularity and stability analysis of discrete-time Markov jump linear singular

systems [J]. Automatica, 2017, 76: 32 - 40.

[83] Chávez-Fuentes J R, Costa E F, Terra M H, et al. The linear quadratic optimal control problem for discrete-time Markov jump linear singular systems [J]. Automatica, 2021. DOI: 10.1016/j.automatica.2021.109506.

[84] 于合谣. 平均场离散马尔可夫跳变系统的不定 LQ 最优控制问题的研究 [D]. 青岛: 山东科技大学, 2018.
Yu H Y. Study on indefinite LQ optimal control of discrete Markov jump with mean field [D]. Qingdao: Shandong University of Science and Technology, 2018.

[85] Ni Y H, Li X, Zhang J F. Mean-field stochastic linear-quadratic optimal control with Markov jump parameters [J]. Systems & Control Letters, 2016, 93: 69 - 76.

[86] 于合谣, 刘西奎, 李伟明. 马尔科夫跳变系统的不定平均场随机线性二次最优控制问题 [J]. 山东科技大学学报(自然科学版), 2018, 37(4): 69 - 76.
Yu H Y, Liu X K, Li W M. Indefinite mean-field stochastic linear quadratic optimal control problem of Markov jump system [J]. Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science), 2018, 37(4): 69 - 76.

[87] Costa O L V, Assumpção F E O, Boukas E K, et al. Constrained quadratic state feedback control of discrete-time Markovian jump linear systems [J]. Automatica, 1999, 35(4): 617 - 626.

[88] Peres P, Braga M F, Oliveira R, et al. $H_2$ control of discrete-time Markov jump linear systems with uncertain transition probability matrix: Improved linear matrix inequality relaxations and multi-simplex modelling [J]. IET Control Theory & Applications, 2013, 7(12): 1665 - 1674.

[89] Lu J B, Li D W, Xi Y G. Constrained model predictive control synthesis for uncertain discrete-time Markovian jump linear systems [J]. IET Control Theory & Applications, 2013, 7(5): 707 - 719.

[90] Tonne J, Jilg M, Stursberg O. Constrained model predictive control of high dimensional jump Markov linear systems [C] //2015 American Control Conference. Piscataway, USA: IEEE, 2015: 2993 - 2998.

[91] Zabala Y A, Costa O L V. A Detector-based approach for the constrained quadratic control of discrete-time Markovian jump linear systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(3): 1211 - 1217.

[92] Tzortzis I, Charalambous C D, Hadjicostis C N. Jump LQR systems with unknown transition probabilities [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 66(6): 2693 - 2708.

[93] 陈佳. 奇异跳变系统的控制方法研究 [D]; 西安: 西安电子科技大学, 2013.
Chen J. Study on control methods in singular jumping systems [D]. Xi'an: Xidian University, 2013.

[94] Chen J, Lin C, Chen B, et al. Output feedback control for singular Markovian jump systems with uncertain transition rates [J]. IET Control Theory & Applications, 2016, 10(16): 2142 - 2147.

[95] Ren G Q, Liu B. Near-optimal control for a singularly perturbed linear stochastic singular system with Markovian jumping parameters [J]. European Journal of Control, 2019, 50: 88 - 95.

[96] 吴彦锐, 伍友利, 方洋旺, 等. 控制量受约束连续马尔可夫跳变系统最优控制 [C] //第三十一届中国控制会议. Piscataway, USA: IEEE, 2012: 2220 - 2223.
Wu Y R, Wu Y L, Fang Y W, et al. Optimal control for Markov jumping system with constrained control input [C] //31st Chinese Control Conference. Piscataway, USA: IEEE, 2012: 2220 - 2223.

[97] Mukaidani H, Unno M, Hua X, et al. Pareto-optimal solutions for Markov jump stochastic systems with delay [C] //2013 American Control Conference. Piscataway, USA: IEEE, 2013: 4660 - 4665

[98] Bai Y, Sun H J, Wu A G. Linear quadratic optimal control for a class of continuous-time nonhomogeneous Markovian jump linear systems in infinite time horizon [J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(14): 9733 - 9760.

[99] 王宏, 姚利娜, 张金芬. 有界动态随机系统的建模与控制 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2015.
Wang H, Yao L N, Zhang J F. Modeling and control of bounded dynamic stochastic system [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2015.

[100] 郭雷, 裔扬, 殷利平, 等. 非高斯随机分布系统建模、分析与控制理论 [M]. 北京: 科学出版社, 2019.
Guo L, Yi Y, Yin L P, et al. Modeling, analysis and control theory of non-Gaussian random distributed system [M]. Beijing: Science Press, 2019.

## 作者简介

**刘 越**(1995 - ), 男, 博士生。研究领域为马尔可夫跳变线性系统, 最优控制, 数据驱动控制。

**周 平**(1980 - ), 男, 博士, 教授, 博士生导师。研究领域为工业过程运行优化控制, 数据驱动建模, 控制与监测。