

解矩阵  $\mathcal{E}^{(0)} = \mathbf{0}$ 、镇定控制器  $S_u^{(0)}$  与(3-53)相同。为了衡量算法3.2的收敛精度，本文设计如下性能指标：

$$\begin{cases} \Delta_i^{(l)} = \log \left( 1 + \frac{\|\mathcal{E}_i^* - \mathcal{E}_i^{(l)}\|_2^2}{\|\mathcal{E}_i^*\|_2^2} \right) \\ \delta_i^{(l)} = \log \left( 1 + \frac{\|S_{i,u}^* - S_{i,u}^{(l)}\|_2^2}{\|S_{i,u}^*\|_2^2} \right) \end{cases} \quad (3-55)$$

其中， $\mathcal{E}^*$  为算法 3.2 应该收敛到的唯一镇定解、 $S_u^{*,TD}$  为唯一镇定解对应的 LQT 控制器，仿真时本文使用算法 3.1 获得的值作为  $\mathcal{E}^*$  与  $S_u^{*,TD}$ 。算法 3.2 经过 25 次迭代后，解矩阵和控制器收敛，其中解矩阵  $P^*$  的值限于篇幅没有展示，控制器  $S_u^{*,TD}$  的值为：

$$\begin{aligned} S_{1,u}^{*,TD} &= [0.1955 \quad -0.9205 \quad 0.0353 \quad 0.0387 \quad 0.0354 \quad 0.0382] \\ S_{2,u}^{*,TD} &= [0.1706 \quad -0.9893 \quad 0.0271 \quad 0.0713 \quad 0.0646 \quad 0.0702] \\ S_{3,u}^{*,TD} &= [0.0740 \quad -1.4749 \quad 0.0034 \quad 0.2133 \quad 0.1895 \quad 0.2097] \end{aligned} \quad (3-56)$$

下面考察算法 3.1 以及算法 3.2 求得的控制器(3-54)以及(3-56)的控制效果。初始状态选取为  $\tilde{x}_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 10 \quad 0 \quad 0]^\top$ ，图 3.5 展示了在控制器(3-54)以及(3-56)下的跟踪控制效果，可以发现其跟踪控制效果良好且两个控制器的控制效果相近，这说明本文提出的 CARE 及其求解算法是有效性的。

图 3.3 与图 3.4 给出了  $\mathcal{E}^*$  与  $S_u^{*,TD}$  的收敛过程。

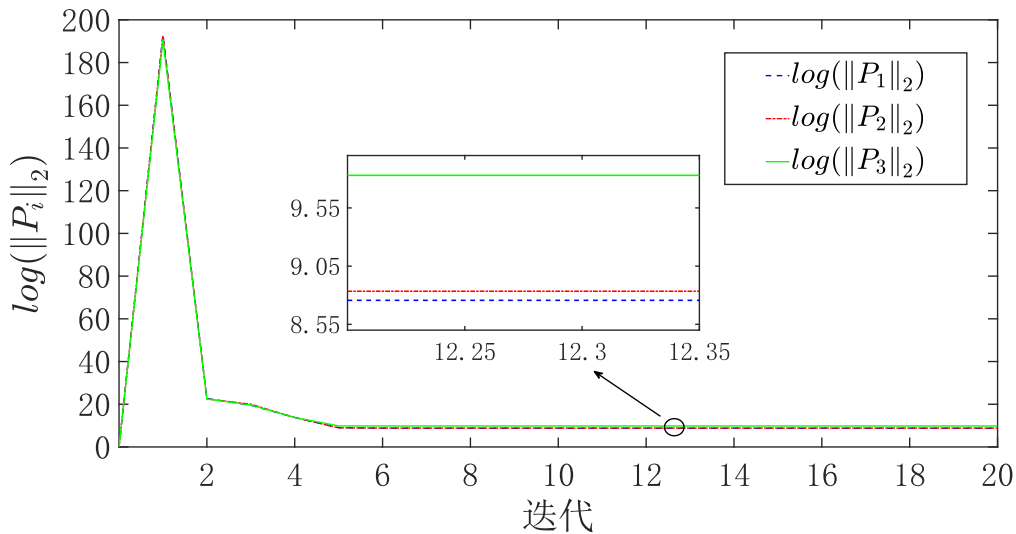


图 3 - 1 算法 3.1 解矩阵收敛过程

Figure 3 - 1. Algorithm 3.1 Solution Matrix Convergence Process

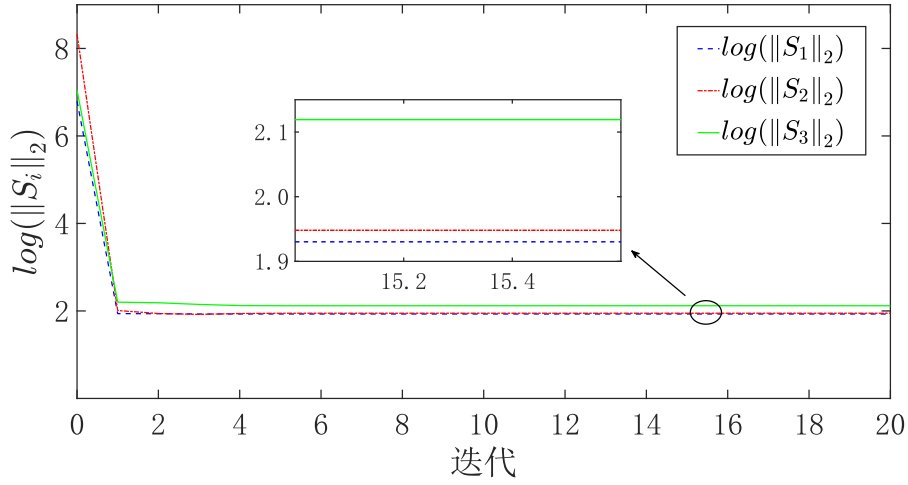


图 3 - 2 算法 3.1 控制器收敛过程

Figure 3 - 2. Algorithm 3.1 Controller Convergence Process

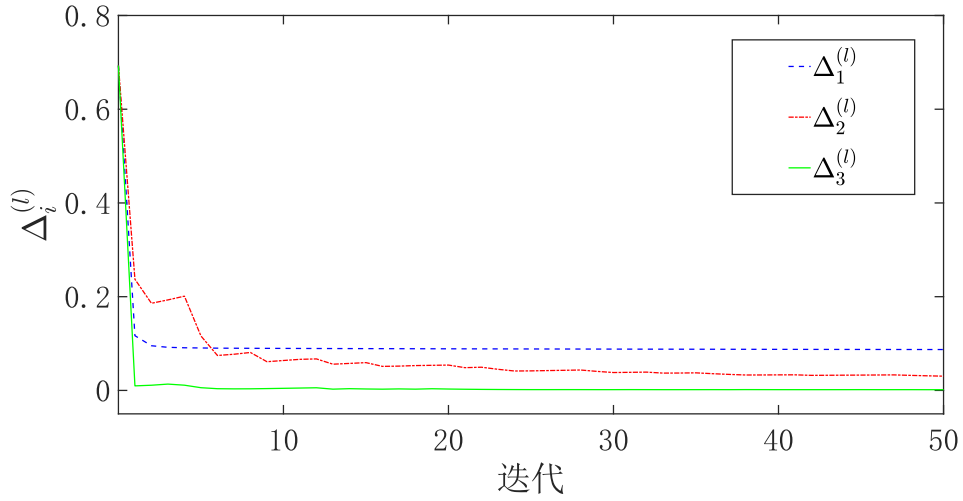


图 3 - 3 算法 3.2 解矩阵收敛过程

Figure 3 - 3. Algorithm 3.2 Solution Matrix Convergence Process

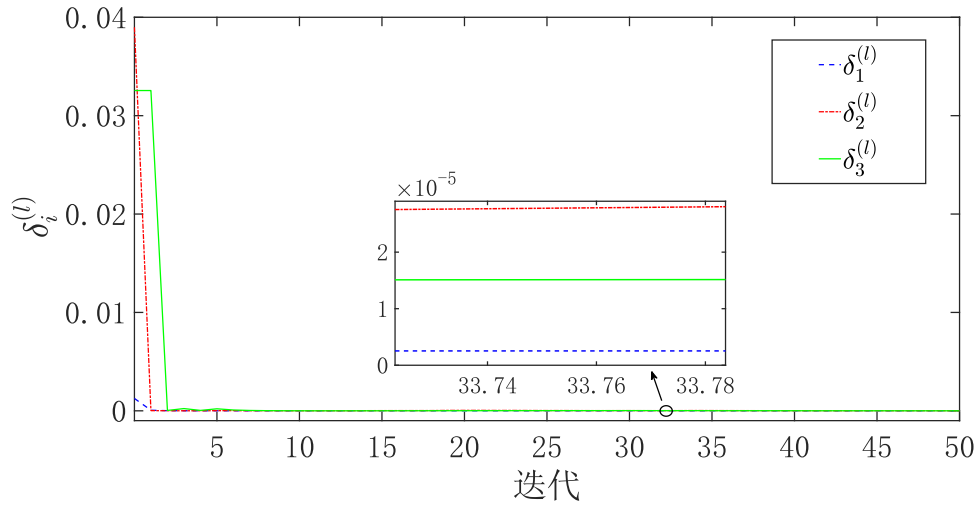


图 3 - 4 算法 3.2 控制器收敛过程

Figure 3 - 4. Algorithm 3.2 Controller Convergence Process

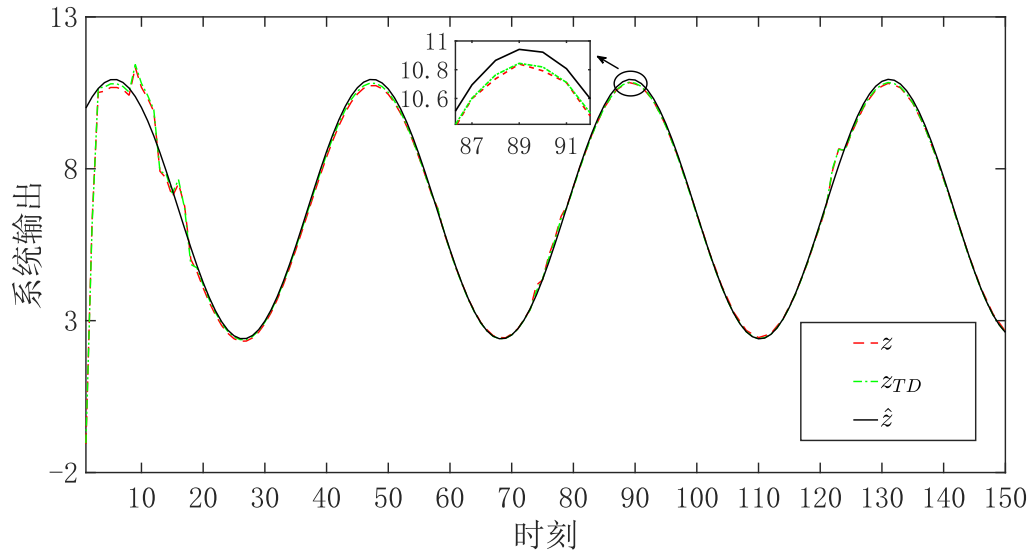


图 3 - 5 LQT 跟踪控制器作用下的跟踪控制过程

Figure 3 - 5. Tracking control process under the action of LQT tracking controller

### 3.6 总结

本章研究系统状态与模态可获得时，无限时域下 MJS 的 LQT 问题。基于 LQT 问题的二次型性能指标，将二次型性能指标的求解转化为极小化问题。通过动态规划递推求解该极小化问题并推导得到无限时域下 MJS 的 LQT 问题对应的 CARE 及对应的 LQT 控制器。接着，在给定衰减因子下，结合衰减跟踪误差系统讨论 CARE 解的存在性以及对应反馈控制器作用下闭环系统的稳定性，给出了 CARE 唯一镇定解存在的充分必要条件和稳定性证明。此外对于转移概率已知以及未知两种情况，分别考虑吧 CARE 求解问题，基于初始镇定解设计迭代求解算法并证明算法的收敛性。最后，在一个受随机故障影响的直流电机模型上对所提算法进行模拟仿真验证。

## 第四章 无限时域下马尔可夫跳变系统的 $H_\infty$ 跟踪控制问题

### 4.1 引言

无限时域下 MJS 的  $H_\infty$  跟踪控制问题涉及到控制与状态估计两个方面，需要根据分离原理分别进行控制器与滤波器的设计。但大部文献基于状态可获得的假设，仅仅考虑控制器的求解忽略了滤波器的设计。与此同时，TP 未知时  $H_\infty$  控制问题与  $H_\infty$  滤波问题对应的 GCARE 的求解算法目前研究较少且大部分集中在连续 MJS 上。因此，如何在 TP 未知时，实现无限时域下 MJS 的跟踪控制具有迫切需求。

本章研究系统状态可获但系统状态不可获得时，无限时域下 MJS 的  $H_\infty$  跟踪控制问题。首先基于  $H_\infty$  跟踪控制问题提出的二次型性能指标，利用博弈论的思想，将二次型性能指标的实现转化为极小极大问题的求解。利用动态规划求解该极小极大问题对应的 GCARE 及  $H_\infty$  跟踪控制器和  $H_\infty$  滤波器。接着，在给定衰减因子下，结合衰减误差跟踪系统讨论 GCARE 解的存在性以及在对  $H_\infty$  跟踪控制器和  $H_\infty$  滤波器下闭环系统的稳定性，给出了 GCARE 唯一镇定解存在的充分必要条件和稳定性证明。此外，考虑 TP 已知以及未知两种情况进行 GCARE 求解问题，基于初始镇定解设计迭代求解算法并证明算法的收敛性。最后，在一个受随机故障影响的直流电机模型上对所提算法进行模拟仿真验证。

### 4.2 无限时域下马尔可夫跳变系统的 $H_\infty$ 跟踪控制问题建模

本文的第四章将研究无限时域下 MJS 的  $H_\infty$  跟踪控制问题。在该  $H_\infty$  跟踪控制问题中，本文假设模态变量  $\varpi_k$  是可获得的，状态变量  $x_k$  无法直接获得。同时由于系统存在扰动，即噪声增益矩阵  $F_i$ 、 $G_i$ 、 $\hat{F}$ 、 $\hat{G}$  不为  $\mathbf{0}$ ，因此需要考虑状态估计问题。定义  $\tilde{x}_k \triangleq [x_k^\top \quad \hat{x}_k^\top]^\top$ ， $\tilde{w}_k \triangleq [w_k^\top \quad \hat{w}_k^\top]^\top$ ， $\tilde{y}_k \triangleq [y_k^\top \quad \hat{y}_k^\top]^\top$ ，构造如下跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$ ：

$$\begin{aligned}
 K_{1,u}^{*,TD} &= [0.1977 \quad -0.9211 \quad 0.0348 \quad 0.0377 \quad 0.0345 \quad 0.0370] \\
 K_{2,u}^{*,TD} &= [0.1714 \quad -0.9914 \quad 0.0261 \quad 0.0703 \quad 0.0638 \quad 0.0691] \\
 K_{3,u}^{*,TD} &= [0.0904 \quad -1.4905 \quad 0.0009 \quad 0.2091 \quad 0.1864 \quad 0.2049]
 \end{aligned} \tag{4-84}$$

图 4-3 与图 4-4 给出了  $\mathcal{E}^*$  与  $S_u^{*,TD}$  的收敛过程。

下面考察在系统状态可获得的情况下，算法 4.1 和算法 4.2 求得的控制器(4-83)、(4-84)的控制效果。选取初始状态为  $\tilde{x}_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 20 \quad -30 \quad 20]^\top$ ，初始状态估计为  $\hat{x}_0 = \mathbf{0}$ ，系统噪声为均值为 0，方差为 0.005 的高斯噪声。图 4-5 展示了基于真实状态的状态反馈，在控制器(4-83)、(4-84)作用下的跟踪控制效果，可以发现其能够较好的跟踪参考轨迹且两个控制器的控制效果相近，这说明本文提出的 GCARE 及其求解算法是有效的。

利用算法 4.1 以及 4.2 本文同样可以求得  $H_\infty$  滤波问题对应的 GCARE(4-43)及其  $H_\infty$  滤波器，本文不做讨论，仅给出相关结果。选取初始噪声增益  $L_w^{(0)} = \mathbf{0}$ ，初始镇定滤波器  $L_y^{(0)}$  为：

$$L_{1,y}^{(0)} = \begin{bmatrix} -0.03 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & -13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0 & -0.3 & 0.2 \end{bmatrix}, L_{2,y}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.7 & -8 & 0 & 0 \\ 0.2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0 & -0.3 & 0.2 \end{bmatrix}, L_{3,y}^{(0)} = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.8 & 0 & 0 \\ 0.2 & -2 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0 & -0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \tag{4-85}$$

使用算法 4.1 求解 GCARE(4-43)。算法 4.1 经过 5 次迭代后，解矩阵和滤波器收敛。限于篇幅，本文不展示解矩阵  $P^*$  的值，滤波器  $L_y^*$  的值如(4-86)所示。转移概率未知时，本文使用以下参数进行算法 4.2 的迭代求解：迭代幕数  $e=50$ ，每幕步数  $s=100$ ，回报权重  $\lambda=0.10$ ，迭代步长  $\mu=1/l$ 。此外，选取初始解矩阵  $\mathcal{E}^{(0)} = \mathbf{0}$ 、镇定滤波器  $L_y^{(0)}$  与(4-73)相同。算法 4.2 经过 40 次迭代后，解矩阵和控制器收敛，其中解矩阵  $\mathcal{E}^*$  的值限于篇幅，本文没有展示，滤波器  $L_y^{*,TD}$  的值如(4-87)所示。

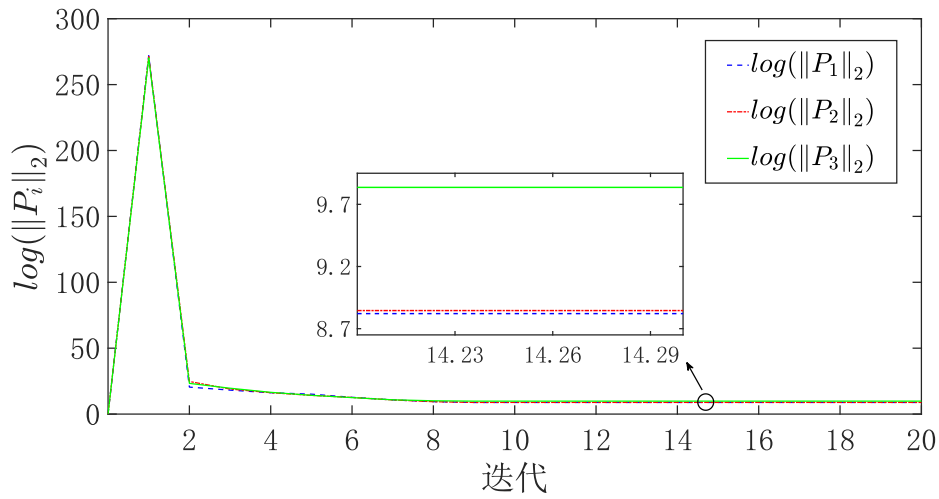


图 4 - 1 算法 4.1 解矩阵收敛过程

Figure 4 - 1. Algorithm 4.1 Solution Matrix Convergence Process

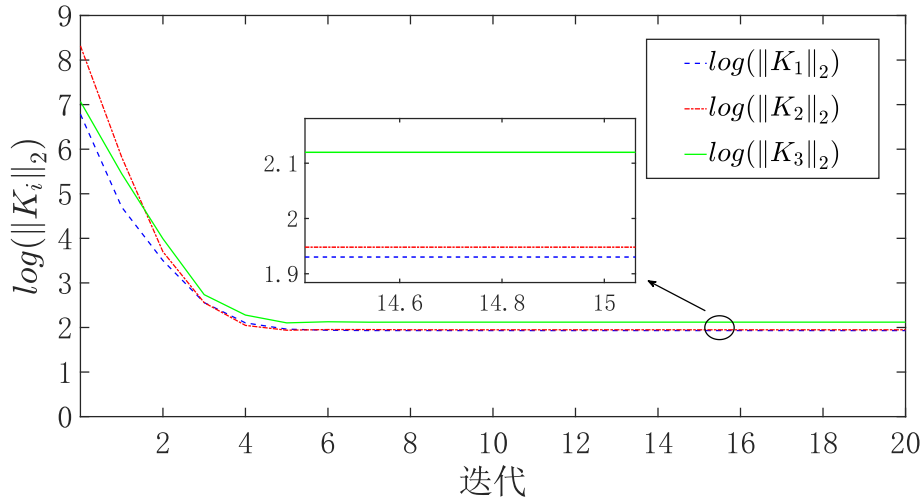


图 4 - 2 算法 4.1 控制器收敛过程

Figure 4 - 2. Algorithm 4.1 Controller Convergence Process

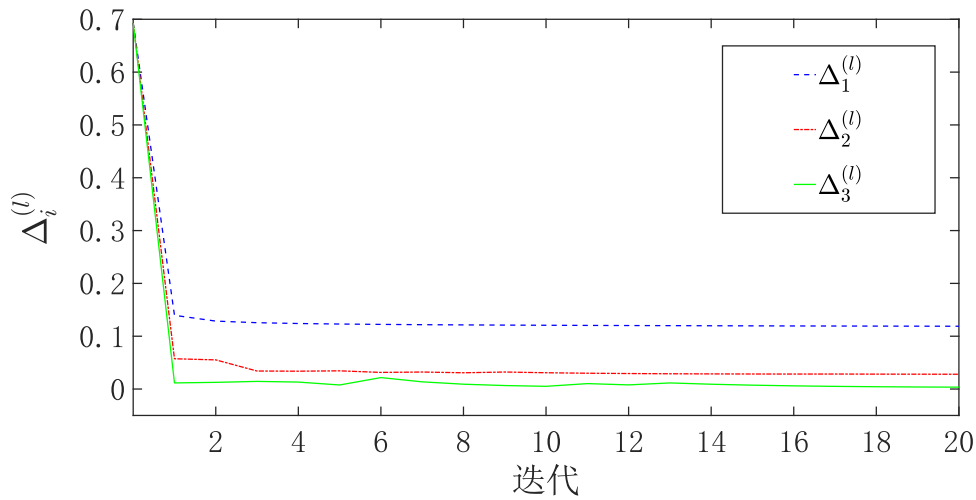


图 4 - 3 算法 4.2 解矩阵收敛过程

Figure 4 - 3. Algorithm 4.2 Solution Matrix Convergence Process

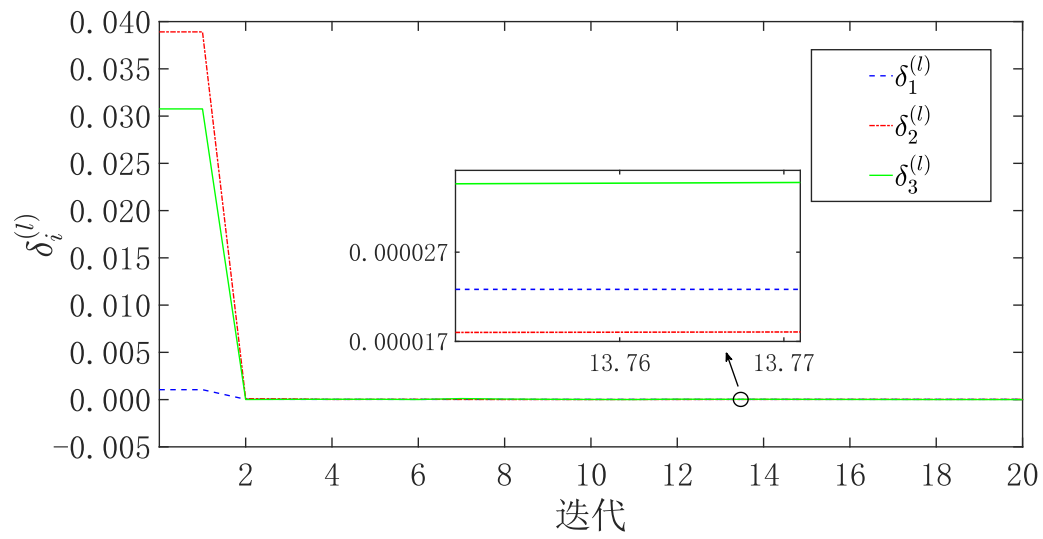


图 4 - 4 算法 4.2 控制器收敛过程

Figure 4 - 4. Algorithm 4.2 Controller Convergence Process

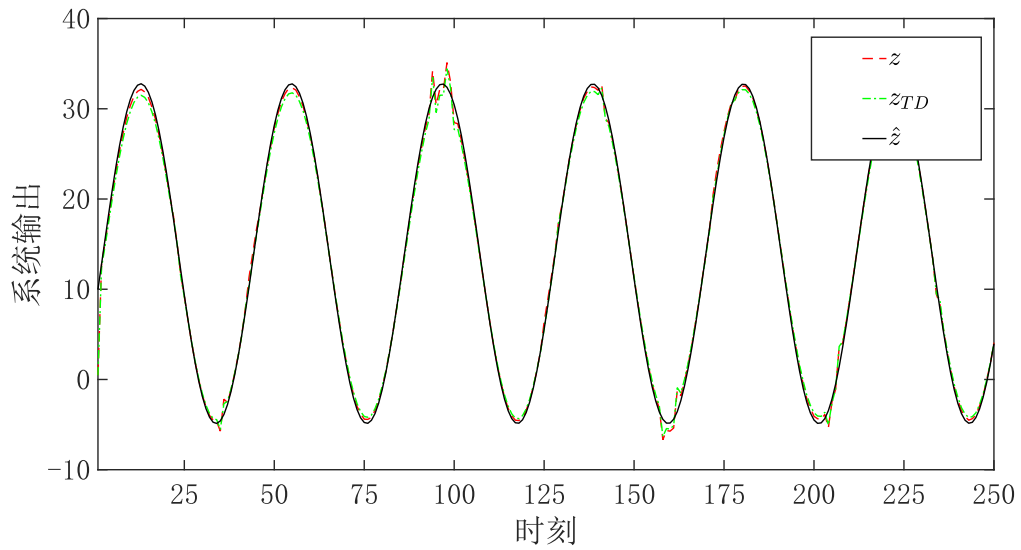


图 4 - 5 基于真实状态反馈的  $H_\infty$  跟踪控制过程

Figure 4 - 5.  $H_\infty$  tracking control process based on real state feedback

$$\begin{aligned}
 L_{1,\bar{y}}^* &= \begin{bmatrix} -0.022 & -4.712 & 0 & 0 \\ 1.111 & -13.185 & 0 & 0 \\ -0.054 & -0.010 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.487 & 0.068 \\ 0 & 0 & -0.034 & -0.425 \\ 0 & 0 & -0.300 & 0.184 \end{bmatrix} \\
 L_{2,\bar{y}}^* &= \begin{bmatrix} 0.730 & -8.557 & 0 & 0 \\ 0.272 & -2.831 & 0 & 0 \\ -0.037 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.487 & 0.068 \\ 0 & 0 & -0.034 & -0.425 \\ 0 & 0 & -0.300 & 0.184 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4-86}$$

$$\begin{aligned}
 L_{3,\bar{y}}^* &= \begin{bmatrix} -0.342 & -0.826 & 0 & 0 \\ 0.166 & -2.206 & 0 & 0 \\ -0.189 & -0.004 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.487 & 0.068 \\ 0 & 0 & -0.034 & -0.425 \\ 0 & 0 & -0.300 & 0.184 \end{bmatrix} \\
 L_{1,\bar{y}}^{*,TD} &= \begin{bmatrix} -0.289 & -4.532 & 0 & 0 \\ 0.294 & -12.637 & 0 & 0 \\ -0.038 & -0.021 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.461 & 0.052 \\ 0 & 0 & -0.047 & -0.416 \\ 0 & 0 & -0.082 & 0.052 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{2,\bar{y}}^{*,TD} &= \begin{bmatrix} 0.764 & -8.608 & 0 & 0 \\ 0.283 & -2.831 & 0 & 0 \\ -0.040 & 0.002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.461 & 0.052 \\ 0 & 0 & -0.048 & -0.416 \\ 0 & 0 & -0.078 & 0.051 \end{bmatrix} \\
 L_{3,\bar{y}}^{*,TD} &= \begin{bmatrix} -0.345 & -0.818 & 0 & 0 \\ 0.156 & -2.182 & 0 & 0 \\ -0.188 & -0.005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.460 & 0.052 \\ 0 & 0 & -0.005 & -0.416 \\ 0 & 0 & -0.076 & 0.050 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4-87}$$



下面考察算法 4.1 和算法 4.2 求得的滤波器(4-86)、(4-87)的估计效果。选取初始状态为  $\tilde{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 20 \ -30 \ 20]^\top$ ，初始状态估计为  $\hat{x}_0 = \mathbf{0}$ ，系统噪声为均值为 0，方差为 0.005 的高斯噪声。图 4.7 展示了使用滤波器(4-86)、(4-87)进行状态估计的估计误差，可以发现其估计误差较小且两个滤波器的估计性能相近，这说明本文提出的 GCARE 及其求解算法是有效的。

下面考察算法 4.1 和算法 4.2 求得的控制器(4-83)、(4-84)以及滤波器(4-86)、(4-87)的控制估计效果。选取初始状态为  $\tilde{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 20 \ -30 \ 20]^\top$ ，初始状态估计为  $\hat{x}_0 = \mathbf{0}$ ，系统噪声为均值为 0，方差为 0.005 的高斯噪声。图 4.7 展示了使用滤波器(4-86)、(4-87)进行状态估计并在控制器(4-83)、(4-84)作用下的跟踪控制效果，可以发现其能够较好的跟踪参考轨迹且两个控制器的控制效果相近，这说明本文提出的 GCARE 及其求解算法是有效性的。

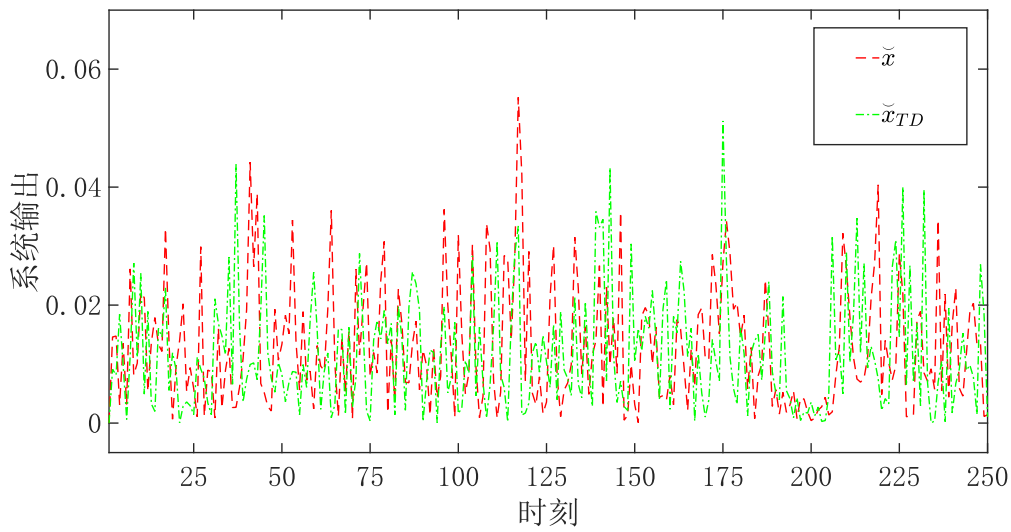


图 4 - 6  $H_\infty$  滤波器估计误差

Figure 4 - 6.  $H_\infty$  filter estimation error

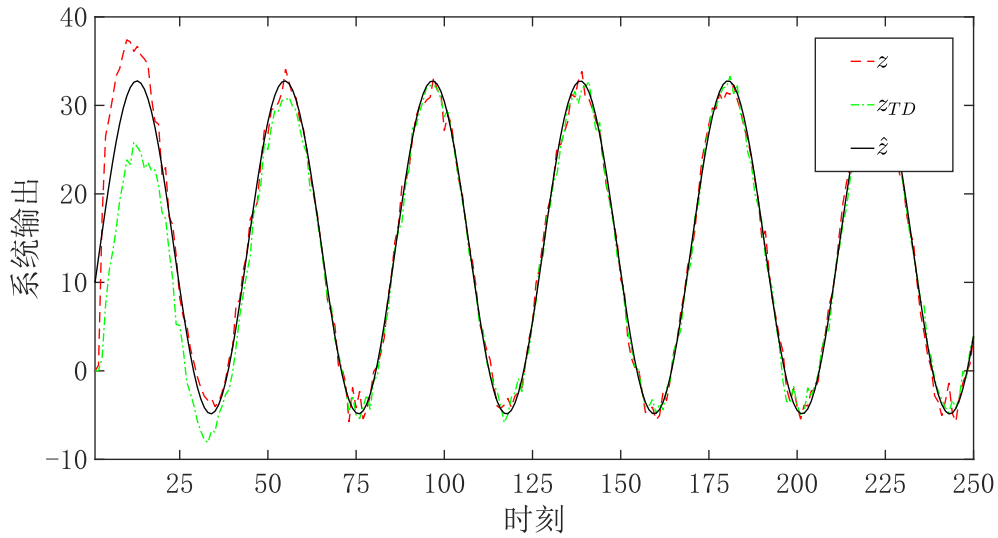


图 4 - 7 基于估计状态反馈的  $H_{\infty}$  跟踪控制过程

Figure 4 - 7.  $H_{\infty}$  tracking control process based on estimated state feedback

#### 4.6 总结

本章研究系统状态可获得但系统状态不可获得时，无限时域下 MJS 的  $H_{\infty}$  跟踪控制问题，利用博弈论的思想，将二次型性能指标的实现转化为极小极大问题的求解。利用动态规划求解该极小极大问题对应的 GCARE 及  $H_{\infty}$  跟踪控制器和  $H_{\infty}$  滤波器。接着，在给定衰减因子下，结合衰减误差跟踪系统讨论 GCARE 解的存在性以及在对应该  $H_{\infty}$  跟踪控制器和  $H_{\infty}$  滤波器下闭环系统的稳定性，给出了 GCARE 唯一镇定解存在的充分必要条件和稳定性证明。此外，考虑转移概率已知以及未知两种情况进行 GCARE 求解问题，基于初始镇定解设计迭代求解算法并证明算法的收敛性。最后，在一个受随机故障影响的直流电机模型上对所提算法进行模拟仿真验证。