



控制工程  
*Control Engineering of China*  
ISSN 1671-7848, CN 21-1476/TP

## 《控制工程》网络首发论文

题目: 半马尔可夫跳变系统的自适应容错跟踪控制  
作者: 马奇, 嵇小辅  
DOI: 10.14107/j.cnki.kzgc.20230774  
收稿日期: 2023-09-01  
网络首发日期: 2023-12-21  
引用格式: 马奇, 嵇小辅. 半马尔可夫跳变系统的自适应容错跟踪控制[J/OL]. 控制工程.  
<https://doi.org/10.14107/j.cnki.kzgc.20230774>



**网络首发:** 在编辑部工作流程中, 稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定, 且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式(包括网络呈现版式)排版后的稿件, 可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定; 学术研究成果具有创新性、科学性和先进性, 符合编辑部对刊文的录用要求, 不存在学术不端行为及其他侵权行为; 稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准, 正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性, 录用定稿一经发布, 不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容, 只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

**出版确认:** 纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊(光盘版)》电子杂志社有限公司签约, 在《中国学术期刊(网络版)》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版, 以单篇或整期出版形式, 在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊(网络版)》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物(ISSN 2096-4188, CN 11-6037/Z), 所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

## 半马尔可夫跳变系统的自适应容错跟踪控制

马奇<sup>a</sup>, 嵇小辅<sup>b</sup>

(江南大学 a. 物联网工程学院, b. 轻工过程先进控制教育部重点实验室, 江苏 无锡 214122)



**摘要:** 针对具有执行器故障和外部扰动的半马尔可夫跳变系统, 研究了基于闭环参考模型的 $H_\infty$ 自适应容错跟踪控制问题。具体来说, 保证在系统稳定的前提下, 利用自适应机制提供的在线信息, 设计自适应容错跟踪控制器去补偿执行器故障和外部干扰对系统造成的影响, 从而实现系统的状态跟踪参考模型的状态轨迹。其次, 为了改善传统自适应控制对跟踪误差系统暂态性能的影响, 在参考模型中引入一个系统跟踪误差作为反馈项, 将闭环参考模型与自适应容错控制相结合。进而将半马尔可夫跳变系统的 $H_\infty$ 自适应容错跟踪控制问题转化为闭环误差系统稳定性问题, 推导出闭环误差系统随机稳定并满足 $H_\infty$ 跟踪性能的充分条件。最后, 通过一个数值仿真和对比实验验证了所提方法的可行性和优越性。  
**关键词:** 半马尔可夫跳变系统; 跟踪控制; 自适应容错控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标识码: A

## Adaptive Fault-tolerant Tracking Control of semi-Markov Jump Systems

MA Qi<sup>a</sup>, JI Xiao-fu<sup>b</sup>

(a. School of Internet of Things Engineering, b. Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry (Ministry of Education), Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

**Abstract:** For the semi-Markov jump system with actuator fault and external disturbance, the  $H_\infty$  adaptive fault-tolerant tracking control problem based on closed-loop reference model is studied. Specifically, under the premise of system stability, the adaptive fault-tolerant tracking controller is designed to compensate for the impact of actuator failure and external disturbance on the system by using the online information provided by the adaptive mechanism, so as to realize the state trajectory of the systems state tracking reference model. Second, to improve the influence of traditional adaptive control on the transient performance of tracking error systems, we combine a closed-loop reference model with adaptive fault-tolerant control. Then, the  $H_\infty$  adaptive fault-tolerant tracking control problem of the semi-Markov jump system is transformed into the stability problem of the closed-loop error system, and sufficient conditions for asymptotic stability of the closed-loop error system to meet  $H_\infty$  tracking performance are derived. Finally, a numerical simulation and comparative experiment verify the feasibility and superiority of the proposed method.

**Key words:** semi-Markov jump systems; tracking control; adaptive fault-tolerant control; linear matrix inequality

### 1 引言

马尔可夫跳变系统(Markov jump systems, MJS)是一类典型的由多种不同模式组成的随机混杂系统。近几十年来, 由于其可以精确的描述或表征复杂的动态随机过程而得到广泛应用, 如网络控制系统<sup>[1]</sup>、制造业生产系统<sup>[2]</sup>、模糊控制系统<sup>[3]</sup>等。然而, MJS在系统建模方面存在一定的局限性。例如, 每

个子系统的驻留时间(两个连续模态转换之间的持续时间)服从指数分布, 意味着在表示马尔可夫过程中的转移速率是时不变的, 这限制了MJS在许多实际系统中不适用。作为一种替代方案, 半马尔可夫跳变系统(semi-Markov jump systems, S-MJS)克服了传统MJS驻留时间仅服从指数分布的局限性。因此,

收稿日期: 2023-09-01

作者简介: 马奇 (1998-), 男, 安徽阜阳人, 研究生, 主要研究方向为随机跳变系统、跟踪控制; 嵇小辅 (1979-), 男, 江苏无锡人, 博士, 教授, 主要从事鲁棒控制、网络控制系统等方面教学与科研工作 (本文通信作者, Email: xiaofuji@jiangnan.edu.cn)。

S-MJS相较于MJS具有更低的保守性并且可以建模和描述更广泛的实际系统。目前关于S-MJS的相关研究更多还是稳定性和镇定性方面的基础研究<sup>[4-9]</sup>, 对于S-MJS跟踪控制的研究成果较少。

跟踪控制作为控制工程中一个重要课题, 其目的是在被控对象稳定的前提下, 其状态(或输出)能够跟踪参考模型状态(或输出), 在飞行控制<sup>[10]</sup>和机器人工程<sup>[11]</sup>等领域得到广泛应用。因此, 跟踪控制问题的研究更具有实用性和必要性。对于随机跳变系统的跟踪控制, 文献[12]通过划分延迟的下界, 利用Lyapunov-Krasovskii泛函研究了一类具有区间时变时滞的不确定MJS的鲁棒  $H_\infty$  跟踪控制问题。文献[13]提出了一种状态反馈控制器, 研究了在外部干扰和输入约束下离散MJS的  $H_\infty$  跟踪控制问题。文献[14]提出了一种依赖模态信息的事件触发通信策略, 研究网络化S-MJS的跟踪控制问题。文献[15]研究了基于分散观测器的互联MJS有限时间跟踪控制的稳定性以及  $L_2 - L_\infty$  性能。然而, 值得注意的是, 文献[12-15]中, 参考输入作为外部干扰的一部分, 这总是不合理的, 有必要寻找一种更有效的方法来解决这一问题。因此, 本文采用自适应控制方法, 通过构造自适应律, 利用自适应机制提供的在线信息实现系统的状态跟踪参考模型的状态轨迹, 避免了将参考输入视为外部干扰的一部分。

此外, 随着工业系统结构越来越复杂, 系统不可避免地会发生意外故障, 从而导致系统性能严重下降。因此, 容错控制成为近年来较为活跃的研究领域<sup>[16]</sup>。在容错控制中, 自适应容错控制由于其能够有效处理系统未知故障而得到广泛应用。例如, 文献[17]研究了一类具有数字通信约束、参数不确定、干扰和执行器故障的连续MJS的自适应容错控制问题。文献[18]利用自适应控制自动补偿执行器故障, 研究了执行器失效的MJS的异步容错控制问题。然而, 当系统出现故障时, 如何保证系统能够精确的跟踪参考模型的轨迹是值得研究的一个课题。注意到, 文献[12-15]考虑的都是系统未发生故障时的跟踪控制。关于具有执行器故障的S-MJS的自适应容错跟踪控制问题尚未得到解决。本文利用自适应控制理论与李亚普诺夫函数方法, 通过构造自适应律去估计执行器故障, 基于估计值, 自适应容错控制器的参数可以自动更新以补偿执行器故障对闭环误差系统造成的影响。

另一方面, 虽然自适应容错控制能够有效补偿系统故障, 但由于故障的发生不仅会对系统稳定性造成影响而且会对系统的暂态性能造成影响。针对S-MJS的自适应容错跟踪控制问题, 为了改善传统自适应控制对跟踪误差系统暂态性能的影响, 我们将闭环参考模型与自适应容错控制相结合。事实上,

一般我们提到的参考模型都是开环参考模型, 开环参考模型是指建立的参考模型与被控系统的动态无关。闭环参考模型是在开环参考模型的基础上将系统输出误差作为反馈项引入到开环参考模型中, 通过调整反馈增益的大小实现系统特征值向坐标轴左侧移动, 从而加快跟踪误差收敛速度, 有效抑制系统出现高频振荡。

综上所述, 本文针对具有执行器故障和外部扰动的S-MJS, 研究了基于闭环参考模型的  $H_\infty$  自适应容错跟踪控制。本文的主要贡献为: (1) 本文利用自适应容错控制方法解决了具有执行器故障和外部扰动的S-MJS的跟踪控制问题, 同时该方法避免了将参考输入视为外部干扰的一部分。(2) 将闭环参考模型与自适应容错控制相结合, 改善传统自适应控制对跟踪误差系统暂态性能的影响, 仿真结果表明, 该方法可以有效抑制系统出现高频振荡, 并且最优的  $H_\infty$  跟踪性能指标  $\gamma = 0.3162$ 。

**符号:** 文中出现的  $\mathbb{R}^n$  表示  $n$  维欧氏空间;  $\mathbf{R}^{m \times n}$  表示  $m \times n$  的实矩阵; 字母  $P > 0$  表示  $P$  是一个正定矩阵; 上标 “T” 和 “-1” 分别表示矩阵的转置和矩阵的逆;  $I$  表示适当维数的单位矩阵;  $\text{diag}\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  表示  $n \times n$  的对角矩阵;  $*$  号表示矩阵的对称部分;  $\text{sym}(A)$  表示  $A + A^T$ ;  $L_2[0, \infty)$  表示定义在  $[0, \infty)$  的  $L_2$  范数;  $E\{\}$  表示数学期望;  $\text{tr}(A)$  表示矩阵  $A$  的迹。

## 2 系统描述

在一个固定的概率空间  $(\Omega, \Theta, \text{Pr})$  中考虑一类具有执行器故障和外部扰动的S-MJS:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\sigma(t))x(t) + B(\sigma(t))u(t) \\ \quad + E(\sigma(t))f(t) + D(\sigma(t))w(t) \\ y(t) = C(\sigma(t))x(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  表示系统的状态,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  表示控制输入,  $f(t) \in \mathbb{R}^r$  表示执行器故障,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  表示系统输出,  $w(t) \in \mathbb{R}^s$  表示外部扰动且  $w(t) \in L_2[0, \infty)$ 。  $\sigma(t)$  是右连续轨迹的连续时间S-MJS链并且在有限时间集合  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  中取值, 其状态转移概率为

$$\text{Pr}\{\sigma_{t+h} = j | \sigma_t = i\} = \begin{cases} \lambda_{ij}(h)h + o(h), & i \neq j \\ 1 + \lambda_{ii}(h)h + o(h), & i = j \end{cases} \quad (2)$$

其中, 转移率  $\lambda_{ij}(h)$  是时变的变量。  $h > 0$  是驻留时间。  $i \neq j$  时,  $\lambda_{ij}(h) > 0$  代表系统状态在  $t$  时刻从  $i$  模态跳变到  $t+h$  时刻模态  $j$  的转移率。

$\lim_{h \rightarrow 0} (o(h)/h) = 0$ ,  $o(h)$  是由  $\lim_{h \rightarrow 0} (o(h)/h) = 0$  定义的

无穷小量。当  $i = j$  时, 满足  $\lambda_{ii}(h) = -\sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_{ij}(h)$ 。

关于 S-MJS 中时变转移率的处理, 本文通过假设时变转移率  $\lambda_{ij}(h)$  具有上下界, 即满足  $\lambda_{ij}(h) \in [\underline{\lambda}_{ij}, \bar{\lambda}_{ij}]$ , 其中  $\underline{\lambda}_{ij}$ ,  $\bar{\lambda}_{ij}$  分别是转移率  $\lambda_{ij}(h)$  的下界和上界, 且为已知常数。  $A(\sigma(t))$ ,  $B(\sigma(t))$ ,  $E(\sigma(t))$ ,  $D(\sigma(t))$  和  $C(\sigma(t))$  是具有合适维度的常数矩阵。为了表达方便和下文描述, 定义  $\sigma(t) = i$ , 所以上述矩阵可以表示为  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $E_i$ ,  $D_i$ ,  $C_i$ 。

**假设 1**<sup>[19]</sup> 定义  $T_{n-1}$  表示第  $n-1$  次跳变的时刻,  $T_n$  表示第  $n$  次跳变的时刻, 则  $h_n = T_n - T_{n-1}$  表示系统在第  $n-1$  次与第  $n$  次跳变之间的驻留时间。序列  $\{h_n = T_n - T_{n-1}, n \geq 0\}$  是驻留时间的集合, 期望为  $E\{T_n - T_{n-1}\} < \infty$ 。

为了具有一般性且获得良好的跟踪性能, 引入具有模态依赖的闭环参考模型:

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) = A_m(\sigma(t))x_m(t) + B_m(\sigma(t))r(t) \\ \quad - L(\sigma(t))(y(t) - y_m(t)) \\ y_m(t) = C(\sigma(t))x_m(t) \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $x_m(t) \in \mathbb{R}^n$  表示闭环参考模型状态,  $r(t) \in \mathbb{R}^m$  表示闭环参考模型输入, 满足  $r(t) \in L_2[0, \infty)$ ,  $y_m \in \mathbb{R}^p$  表示闭环参考模型输出,  $L(\sigma(t))$  表示闭环参考模型反馈增益。令  $\sigma(t) = i$ ,  $A_{mi}$ ,  $B_{mi}$  为适当维度的实常数矩阵, 且  $A_{mi}$  是 Hurwitz 的。

本文的控制目标是针对具有执行器故障和外部干扰的 S-MJS, 基于闭环参考模型, 设计自适应容错跟踪控制器使得闭环误差系统随机稳定并且满足如下的  $H_\infty$  性能指标:

$$E\left\{\int_0^\infty e^T(t)e(t)dt\right\} \leq \gamma^2 E\left\{\int_0^\infty w^T(t)w(t)dt\right\} \quad (4)$$

其中,  $e(t)$  表示跟踪误差并且满足  $e(t) = x(t) - x_m(t)$ ,  $\gamma > 0$  为最优的  $H_\infty$  跟踪性能指标。

为了实现控制目标, 我们引入以下假设:

假设 2: 矩阵  $(A_i, C_i)$  可观的;

假设 3: 存在矩阵  $H_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  和  $K_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$  满足:

$$A_i + B_i H_i^T = A_{ni}, \quad B_i K_i^T = B_{ni};$$

假设 4:  $\text{rank}(B_i, E_i) = \text{rank}(B_i)$ , 即存在一个矩阵

$$F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}, \text{ 使得 } B_i F_i = E_i;$$

假设 5: 参数  $H_i$  有已知的上界, 满足  $\bar{h}_i \triangleq \sup \|H_i\|$ ;

假设 6: 执行器故障是常故障, 满足  $\dot{f}(t) = 0$ 。

为了实现鲁棒自适应容错跟踪控制目标, 构造如下自适应容错跟踪控制器:

$$u = \hat{H}_i^T x_m(t) + \hat{K}_i^T r(t) - F_i \hat{f}(t) \quad (5)$$

其中,  $\hat{H}_i$ ,  $\hat{K}_i$  和  $\hat{f}(t)$  分别是  $H_i$ ,  $K_i$  和  $f(t)$  的估计值。  $\hat{H}_i$ ,  $\hat{K}_i$  和  $\hat{f}(t)$  的自适应律如下:

$$\dot{\hat{H}}_i = -\Gamma_H x_m(t) e_y^T(t) N_i \quad (6)$$

$$\dot{\hat{K}}_i = -\Gamma_K r(t) e_y^T(t) N_i \quad (7)$$

$$\dot{\hat{f}} = \Gamma_f e_y R_i \quad (8)$$

其中,  $N_i = C_i B_i$ ,  $R_i = F_i^T N_i^T$ ,  $e_y(t) = y(t) - y_m(t)$ 。  $\Gamma_H$ ,  $\Gamma_K$  和  $\Gamma_f$  是自适应增益,  $C_i$  和  $B_i$  是系统(1)的常数矩阵,  $F_i$  可以由假设 4 获得,  $e_y(t)$  是系统(1)与闭环参考模型(3)的输出误差。

联合式(1)(3)和(5)可以得到跟踪误差系统如下:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & (A_{mi} + L_i C_i) e(t) + B_i \tilde{H}_i^T x_m - E_i e_f \\ & + D_i w(t) + B_i \tilde{K}_i^T r(t) - B_i H_i^T e(t) \end{aligned} \quad (9)$$

其中,  $\tilde{H}_i = \hat{H}_i - H_i$ ,  $\tilde{K}_i = \hat{K}_i - K_i$ ,  $e_f = \hat{f}(t) - f(t)$  是参数估计误差。

在结束此部分之前, 说明两条定义和一个引理, 它们在第 3 部分中需要用到。

**定义 1**<sup>[20]</sup>: 对于 S-MJS (1), 令  $u(t) \equiv 0$ ,  $w(t) \equiv 0$  时, 如果对于所有初始状态  $x_0$  和初始模态  $\sigma_0$  满足

$$E\left\{\int_0^\infty e^T(t)e(t)dt \mid x_0, \sigma_0\right\} < \infty \quad (10)$$

则跟踪误差系统(9)是随机稳定的。

**定义 2**<sup>[21]</sup>: 对于 S-MJS (1), 当  $w(t) \neq 0$  时, 如果存在常数  $M(x_0, \sigma_0)$ , 且  $M(0, \sigma_0) = 0$ , 满足下面的不等式

$$\begin{aligned} E\left\{\int_0^\infty e^T(t)e(t)dt \mid x_0, \sigma_0\right\} \\ \leq \gamma^2 E\left\{\int_0^\infty w^T(t)w(t)dt\right\} + M(x_0, \sigma_0) \end{aligned} \quad (11)$$

则跟踪误差系统(9)是随机稳定的且满足(4)中的  $H_\infty$  跟踪性能  $\gamma$ 。

**引理 1**<sup>[22]</sup>: 对于任意的  $\nu > 0$ , 存在适当维数的矩阵  $M$  和  $N$ , 矩阵  $Q > 0$ , 满足不等式

$$MN + (MN)^T \leq \nu^{-1} M Q^{-1} M^T + \nu N^T Q N \quad (12)$$

### 3 主要结果

本节中, 我们针对具有执行器故障和外部扰动的 S-MJS, 利用自适应机制提供的在线估计信息与 Lyapunov 函数, 分析误差系统(9)的稳定性, 并推导出实现  $H_\infty$  跟踪性能的充分条件。

**定理 1** 针对 S-MJS (1), 对于任意的  $i \in \mathbb{N}$ , 给定  $\rho > \rho^* > 0$ ,  $\bar{h}_i > 0$ , 如果存在跟踪性能抑制指标  $\gamma > 0$  以及矩阵  $P_i = P_i^T > 0$ ,  $Q_i > 0$ , 矩阵  $L_i$ , 满足式(13)-(15)



$$\begin{bmatrix} \Omega_i & C_i^T N_i & P_i D_i \\ * & -(2\rho)^{-1} I & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

$$P_i B_i = C_i^T N_i \quad (14)$$

$$\rho^* = \frac{\bar{h}_i^2}{2\lambda_{\min}(Q_i)} \quad (15)$$

其中,

$$\Omega_i = \text{sym}(P_i A_{mi} + P_i L_i C_i) + Q_i + I + \sum_{j=1}^n P_j \lambda_{ij}(h) \text{ 那么,}$$

所设计的容错跟踪控制器(5)和自适应律(6)-(8)可以使闭环误差系统随机稳定并满足  $H_\infty$  跟踪性能指标  $\gamma$ 。

**证明** 定义  $\tilde{H}_i = [\tilde{H}_{i1} \ \tilde{H}_{i2} \ \cdots \ \tilde{H}_{in}]^T$ ,

$$\tilde{K}_i = [\tilde{K}_{i1} \ \tilde{K}_{i2} \ \cdots \ \tilde{K}_{in}]^T, \bar{e}(t) = [e^T(t) \ \tilde{H}_i^T \ \tilde{K}_i^T \ e_f^T(t)]^T$$

为了使得式(4)成立, 构造李雅普诺夫函数如下:

$$V(\bar{e}(t), i) = V_1(e(t), i) + V_2(\tilde{H}_i(t), i) + V_3(\tilde{K}_i(t), i) + V_4(e_f(t), i) \quad (16)$$

其中,

$$V_1(e(t), i) = e(t)^T P_i e(t)$$

$$V_2(\tilde{H}_i(t), i) = \text{Tr}[\tilde{H}_i^T \Gamma_H^{-1} \tilde{H}_i]$$

$$V_3(\tilde{K}_i(t), i) = \text{Tr}[\tilde{K}_i^T \Gamma_K^{-1} \tilde{K}_i]$$

$$V_4(e_f(t)) = e_f^T \Gamma_f^{-1} e_f$$

定义  $\xi$  为随机过程李亚普诺夫函数的弱微分算子:

$$\begin{aligned} \xi V(\bar{e}(t), i) &= \frac{1}{\Delta} \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \{E[V((\bar{e}(t+\Delta), \sigma(t+\Delta)) | \bar{e}(t), \sigma(t)) \\ &\quad - V(\bar{e}(t), \sigma(t))]\} \end{aligned} \quad (17)$$

其中,  $\Delta$  是很小的正数, 应用条件期望, 对  $V_1(e(t), i)$  求导如下

$$\begin{aligned} \xi V_1(e(t), i) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left\{ \sum_{j=1, i \neq j}^n \text{Pr}\{\sigma(t+\Delta) = j | \sigma(t) = i\} e^T(t+\Delta) P_j e(t+\Delta) \right. \\ &\quad + \text{Pr}\{\sigma(t+\Delta) = i | \sigma(t) = i\} e^T(t+\Delta) P_i e(t+\Delta) \\ &\quad \left. - e^T(t) P_i e(t) \right\} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{\text{Pr}\{\sigma(t+\Delta) = i, \sigma(t) = i\}}{\text{Pr}\{\sigma(t) = i\}} e^T(t+\Delta) P_i e(t+\Delta) \right. \\ &\quad + \sum_{j=1, i \neq j}^n \frac{\text{Pr}\{\sigma(t+\Delta) = j, \sigma(t) = i\}}{\text{Pr}\{\sigma(t) = i\}} e^T(t+\Delta) P_j e(t+\Delta) \\ &\quad \left. - e^T(t) P_i e(t) \right\} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left\{ \sum_{j=1, i \neq j}^n \frac{q_{ij}(G_i(h+\Delta) - G_i(h))}{1 - G_i(h)} e^T(t+\Delta) P_j e(t+\Delta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - G_i(h+\Delta)}{1 - G_i(h)} e^T(t+\Delta) P_i e(t+\Delta) - e^T(t) P_i e(t) \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $h$  是驻留时间,  $G_i(t)$  是驻留时间  $h$  的累积分布函数,  $q_{ij}$  表示状态跳变的概率强度。  $e(t+\Delta)$  可以近似表示为  $e(t+\Delta) = e(t) + \Delta \dot{e}(t) + o(\Delta)$ 。同时, 由累积分布函数的性质, 可以得到:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1 - G_i(h+\Delta)}{1 - G_i(h)} = 1$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{G_i(h+\Delta) - G_i(h)}{1 - G_i(h)} = 0$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{G_i(h+\Delta) - G_i(h)}{(1 - G_i(h))\Delta} = \lambda_i(h)$$

所以可以得到

$$\begin{aligned} \xi V_1(e(t), i) &= \lambda_i(h) e^T(t) \left( \sum_{j=1, i \neq j}^n q_{ij} P_j - P_i \right) e(t) \\ &\quad + \text{sym}(e^T(t) P_i \dot{e}(t)) \end{aligned} \quad (19)$$

当  $i \neq j$ , 令  $\lambda_{ij}(h) = q_{ij} \lambda_i(h)$ ,  $\lambda_{ii} = -\sum_{j=1, i \neq j}^n \lambda_{ij}(h)$ 。从而, 式(19)可以重写为:

$$\begin{aligned} \xi V_1(e(t), i) &= e^T(t) \left( \sum_{j=1, i \neq j}^n q_{ij} \lambda_i(h) P_j - \lambda_i(h) P_i \right) e(t) \\ &\quad + \text{sym}(e^T(t) P_i \dot{e}(t)) \\ &= e^T(t) \sum_{j=1}^n P_j \lambda_{ij}(h) e(t) + \text{sym}(e^T(t) P_i \dot{e}(t)) \end{aligned} \quad (20)$$

综上, 可以得到

$$\begin{aligned} \xi V_1(e(t), i) &= \text{sym}(e^T(t) P_i A_{mi} e(t) + e^T(t) P_i L_i C_i e(t)) \\ &\quad + 2e^T(t) P_i B_i \tilde{H}_i^T x_{mi} + 2e^T(t) P_i B_i \tilde{K}_i^T r(t) \\ &\quad - 2e^T(t) P_i B_i H_i^T e(t) - 2e^T(t) P_i E_i e_f(t) \\ &\quad + 2e^T(t) P_i D_i w(t) + e^T(t) \sum_{j=1}^n P_j \lambda_{ij}(h) e(t) \end{aligned} \quad (21)$$

对  $V_2(\tilde{H}_i(t), i)$ ,  $V_3(\tilde{K}_i(t), i)$  和  $V_4(e_f(t), i)$  分别求导可得到:

$$\xi V_2(\tilde{H}_i(t), i) = 2\text{Tr}[\tilde{H}_i^T \Gamma_H^{-1} \dot{\tilde{H}}_i] \quad (22)$$

$$\xi V_3(\tilde{K}_i(t), i) = 2\text{Tr}[\tilde{K}_i^T \Gamma_K^{-1} \dot{\tilde{K}}_i] \quad (23)$$

$$\xi V_4(e_f(t), i) = 2e_f^T \Gamma_f^{-1} \dot{e}_f \quad (24)$$

综合式(21)(22)(23)和(24)可得:

$$\begin{aligned} \xi V(\bar{e}(t), i) &= \text{sym}(e^T(t) P_i A_{mi} e(t) + e^T(t) P_i L_i C_i e(t)) \\ &\quad + 2e^T(t) P_i B_i \tilde{H}_i^T x_{mi} + 2e^T(t) P_i B_i \tilde{K}_i^T r(t) \\ &\quad - 2e^T(t) P_i B_i H_i^T e(t) - 2e^T(t) P_i E_i e_f(t) \\ &\quad + 2e^T(t) P_i D_i w(t) + 2\text{Tr}[\tilde{H}_i^T \Gamma_H^{-1} \dot{\tilde{H}}_i] \\ &\quad + 2\text{Tr}[\tilde{K}_i^T \Gamma_K^{-1} \dot{\tilde{K}}_i] + 2e_f^T \Gamma_f^{-1} \dot{e}_f \\ &\quad + e^T(t) \sum_{j=1}^n P_j \lambda_{ij}(h) e(t) \end{aligned} \quad (25)$$

由于  $a^T b = \text{Tr}[ba^T]$ , 从而

$$2e^T P_i B_i \tilde{H}_i^T x_m = 2\text{Tr}[\tilde{H}_i^T x_m e^T P_i B_i] \quad (26)$$

$$2e^T P_i B_i \tilde{K}_i^T r = 2\text{Tr}[\tilde{K}_i^T r e^T P_i B_i] \quad (27)$$

将式(26)(27)代入式(28)，且  $\dot{\tilde{H}}_i = \dot{H}_i$ ， $\dot{\tilde{K}}_i = \dot{K}_i$ ，可以得到

$$\begin{aligned} \xi V(\bar{e}(t), i) = & \text{sym}(e^T(t) P_i A_{mi} e(t) + e^T(t) P_i L_i C_i e(t)) \\ & + 2\text{Tr}[\tilde{H}_i^T x_m e^T P_i B_i] + 2\text{Tr}[\tilde{K}_i^T r e^T P_i B_i] \\ & - 2e^T(t) P_i B_i H_i^T e(t) - 2e^T(t) P_i E_i e_f(t) \\ & + 2e^T(t) P_i D_i w(t) + 2\text{Tr}[\tilde{H}_i^T \Gamma_H^{-1} \dot{\tilde{H}}_i] \\ & + 2\text{Tr}[\tilde{K}_i^T \Gamma_K^{-1} \dot{\tilde{K}}_i] + 2e_f^T \Gamma_f^{-1} \dot{e}_f \\ & + e^T(t) \sum_{j=1}^n P_j \lambda_{ij}(h) e(t) \end{aligned} \quad (28)$$

注意到，我们无法直接处理式(28)得到式(4)成立，所以需要做出以下等价变换。令  $P_i B_i = C_i^T N_i$ ，由式(6)-(8)可得：

$$2\text{Tr}[\tilde{H}_i^T \Gamma_H^{-1} \dot{\tilde{H}}_i] = -2\text{Tr}[\tilde{H}_i^T x_m e_y^T N_i] \quad (29)$$

$$= -2\text{Tr}[\tilde{H}_i^T x_m e^T C_i^T N_i] = -2\text{Tr}[\tilde{H}_i^T x_m e^T P_i B_i]$$

$$2\text{Tr}[\tilde{K}_i^T \Gamma_K^{-1} \dot{\tilde{K}}_i] = -2\text{Tr}[\tilde{K}_i^T r e_y^T N_i] \quad (30)$$

$$= -2\text{Tr}[\tilde{K}_i^T r e^T C_i^T N_i] = -2\text{Tr}[\tilde{K}_i^T r e^T P_i B_i]$$

$$\begin{aligned} 2e_f^T \Gamma_f^{-1} \dot{e}_f &= 2e_f^T R_i e_y = 2e_f^T F_i^T N_i^T C_i e \\ &= 2e_f^T F_i^T B_i^T P_i e = 2e_f^T E_i^T P_i e = 2e^T P_i E_i e_f \end{aligned} \quad (31)$$

将式(29)-(31)代入式(28)得到：

$$\begin{aligned} \xi V(\bar{e}(t), i) = & \text{sym}(e^T(t) P_i A_{mi} e(t) + e^T(t) P_i L_i C_i e(t)) \\ & - 2e^T P_i B_i H_i^T e + 2e^T P_i D_i w \end{aligned} \quad (32)$$

由引理1可知， $2e^T P_i D_i w \leq \gamma^2 w^T w + \gamma^{-2} e^T P_i D_i D_i^T P_i e$ ，所以，

$$\begin{aligned} \xi V(\bar{e}(t), i) \leq & \text{sym}(e^T(t) P_i A_{mi} e(t) + e^T(t) P_i L_i C_i e(t)) \\ & + \gamma^2 w^T w + \gamma^{-2} e^T P_i D_i D_i^T P_i e \\ & - 2e^T P_i B_i H_i^T e \end{aligned} \quad (33)$$

对定理1中式(13)应用Schur补，可得到：

$$\begin{aligned} & \text{sym}(P_i A_{mi} + P_i L_i C_i) + Q_i + I + \sum_{j=1}^n P_j \lambda_{ij}(h) \\ & + 2\rho C_i^T N_i N_i^T C_i + \gamma^{-2} P_i D_i D_i^T P_i < 0 \end{aligned} \quad (34)$$

将式(34)左乘  $e^T$  右乘  $e$ ，可得到：

$$\begin{aligned} & e^T \text{sym}(P_i A_{mi} + P_i L_i C_i) e + e^T Q_i e + e^T e + e^T \sum_{j=1}^n P_j \lambda_{ij}(h) e \\ & + 2e^T \rho C_i^T N_i N_i^T C_i e + \gamma^{-2} e^T P_i D_i D_i^T P_i e < 0 \end{aligned} \quad (35)$$

根据式(35)，以及  $P_i B_i = C_i^T N_i$ ， $e_y = C_i e$  得到：

$$\begin{aligned} & \xi V(\bar{e}(t), i) + e^T e - \gamma^2 w^T w \\ & \leq e^T \text{sym}(P_i A_{mi} + P_i L_i C_i) e - 2e^T P_i B_i H_i^T e \\ & \quad + \gamma^{-2} e^T P_i D_i D_i^T P_i e + e^T e \\ & \leq -e^T Q_i e - 2e^T \rho C_i^T N_i N_i^T C_i e - 2e^T P_i B_i H_i^T e \quad (36) \\ & = \begin{bmatrix} e^T & e_y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Q_i & -N_i H_i^T \\ * & -2\rho N_i N_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ e_y \end{bmatrix} \\ & = \eta^T \Phi_i \eta \end{aligned}$$

由定理1可知，给定  $\rho > \rho^* > 0$ ，根据式(15)，可以得到  $-2\rho N_i N_i^T + N_i H_i^T Q_i^{-1} H_i N_i^T < 0$ ，利用Schur补，可得  $\Phi_i < 0$ 。综上，可以得出：

$$\xi V(\bar{e}(t), i) + e^T e - \gamma^2 w^T w < 0 \quad (37)$$

在零初始条件下利用 Dinkins 方程得：

$$\begin{aligned} E\left\{\int_{t_0}^t \xi V(\bar{e}(s), i) ds\right\} &= E\{V(\bar{e}(t), i)\} - E\{V(\bar{e}(t_0), i)\} \\ &= E\{V(\bar{e}(t), i)\} \end{aligned} \quad (38)$$

将式(37)两边积分，并与式(38)结合起来可得：

$$\begin{aligned} E\left\{\int_{t_0}^t e^T(s) e(s) ds\right\} &- E\left\{\int_{t_0}^t \gamma^2 w^T(s) w(s) ds\right\} \\ &+ E\{V(\bar{e}(t), i)\} < 0 \end{aligned} \quad (39)$$

所以，

$$E\left\{\int_{t_0}^t e^T(s) e(s) ds\right\} - E\left\{\int_{t_0}^t \gamma^2 w^T(s) w(s) ds\right\} < 0 \quad (40)$$

$$E\left\{\int_{t_0}^t e^T(s) e(s) ds\right\} < E\left\{\int_{t_0}^t \gamma^2 w^T(s) w(s) ds\right\} \quad (41)$$

综上，由定义1和2知，式(4)成立。闭环误差系统是随机稳定的且 S-MJS (1) 的状态  $x$  可以跟踪闭环参考模型(3)的状态  $x_m$ ，并满足跟踪性能水平  $\gamma$ 。证毕。

**注1** 注意到，本文采用自适应控制方法，避免了将  $w(t)$  和  $r(t)$  处理为  $\bar{w}(t) = [w^T(t) \ r^T(t)]^T$ 。通过对比式(41)与文献[15]中式(37)可以发现本文方法可以有效避免将参考输入视为外部干扰的一部分。

**注2** 定理1给出了闭环系统随机稳定并满足给定跟踪性能水平  $\gamma$  的充分条件。由于式(13)中的转移率  $\lambda_{ij}(h)$  是时变的，这将会涉及无限多个线性矩阵不等式，从数值计算的角度来看，处理难度极大。除此之外，定理1并未给出闭环参考模型反馈增益的具体计算方法。基于此，定理2将会解决上述问题。

**定理2** 针对 S-MJS (1)，对于任意的  $i \in \mathbb{N}$ ，如果存在常数  $\rho > \rho^* > 0$ ， $\bar{h}_i > 0$ ， $\gamma > 0$ ， $\varepsilon > 0$  以及矩阵  $P_i = P_i^T > 0$ ， $Q_i > 0$ ，矩阵  $X_i$ ，满足线性矩阵不等式(42)-(45)

$$\begin{bmatrix} \bar{\Psi}_i & C_i^T N_i & P_i D_i & \bar{\Theta}_i \\ * & -(2\rho)^{-1} I & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -Y_i \end{bmatrix} < 0 \quad (42)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\Psi}_i & C_i^T N_i & P_i D_i & \underline{\Theta}_i \\ * & -(2\rho)^{-1} I & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -Y_i \end{bmatrix} < 0 \quad (43)$$

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon I & (P_i B_i - C_i^T N_i)^T \\ * & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (44)$$

$$\frac{\bar{h}_i^2}{2} I - \rho_i Q_i < 0 \quad (45)$$

其中,

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_i &= \text{sym}(P_i A_{mi} + X_i C_i) + Q_i + I + \bar{\lambda}_{ii} P_i \\ \underline{\Psi}_i &= \text{sym}(P_i A_{mi} + X_i C_i) + Q_i + I + \underline{\lambda}_{ii} P_i \\ \bar{\Theta}_i &= [\sqrt{\bar{\lambda}_{i1}} P_1 \quad \sqrt{\bar{\lambda}_{i2}} P_2 \quad \cdots \quad \sqrt{\bar{\lambda}_{in}} P_n]_{n \neq i} \\ \underline{\Theta}_i &= [\sqrt{\underline{\lambda}_{i1}} P_1 \quad \sqrt{\underline{\lambda}_{i2}} P_2 \quad \cdots \quad \sqrt{\underline{\lambda}_{in}} P_n]_{n \neq i} \\ Y_i &= \text{diag}\{P_1 \quad \cdots \quad P_{i-1} \quad P_{i+1} \quad \cdots \quad P_n\} \end{aligned}$$

那么, 所设计的自适应容错跟踪控制器(5)在自适应律(6)-(8)下可以使跟踪误差系统满足  $H_\infty$  跟踪性能, 且闭环参考模型输出反馈增益为

$$L_i = P_i^{-1} X_i \quad (46)$$

**证明** 由定理1可知, 式(13)中存在耦合项, 定义

$$X_i = P_i L_i \quad (47)$$

将式(47)代入式(13), 并利用 Schur 补定理可得如下不等式

$$\begin{bmatrix} \Xi_i & C_i^T N_i & P_i D_i & \Sigma_i \\ * & -(2\rho)^{-1} I & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -Y_i \end{bmatrix} < 0 \quad (48)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Xi_i &= \text{sym}(P_i A_{mi} + X_i C_i) + Q_i + I + \lambda_{ii}(h) P_i \\ \Sigma_i &= [\sqrt{\lambda_{i1}(h)} P_1 \quad \sqrt{\lambda_{i2}(h)} P_2 \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_{in}(h)} P_n]_{n \neq i} \end{aligned}$$

定理 1 中式(14)是等式约束项, 不能在 MATLAB 中用 LMI 工具箱来解决, 可以等效转化为

$$\text{tr}[(P_i B_i - C_i^T N_i)^T (P_i B_i - C_i^T N_i)] = 0 \quad (49)$$

接着, 式(49)可以简化为

$$(P_i B_i - C_i^T N_i)^T (P_i B_i - C_i^T N_i) \leq \varepsilon I \quad (50)$$

其中,  $\varepsilon$  是一个大于零且较小的常数。式(50)利用 Schur 补定理, 即可得到式(44)。

定理 1 中式(15)也是等式约束项, 由于

$$\rho > \rho^* = \frac{\bar{h}_i^2}{2\lambda_{\min}(Q_i)} > 0 \quad (51)$$

式(51)可以等效转化为

$$\frac{\bar{h}_i^2}{2} < \rho \lambda_{\min}(Q_i) \Rightarrow \frac{\bar{h}_i^2}{2} I < \rho \lambda_{\min}(Q_i) I < \rho Q_i \quad (52)$$

由式(52)可以得到式(45)成立。

下面处理式(48)中转移率的时变项, 上文中假设转移率  $\lambda_{ij}(h)$  具有上下界, 即满足  $\lambda_{ij}(h) \in [\underline{\lambda}_{ij}, \bar{\lambda}_{ij}]$ 。对于给定的驻留时间  $h$ , 转移速率  $\lambda_{ij}(h) = \theta_1 \bar{\lambda}_{ij} + \theta_2 \underline{\lambda}_{ij}$ , 其中,  $\theta_1 + \theta_2 = 1$ , 且  $\theta_1 > 0$ ,  $\theta_2 > 0$ 。将  $\theta_1$  乘以式(42),  $\theta_2$  乘以式(43), 得到

$$\begin{bmatrix} \Psi_i & C_i^T N_i & P_i D_i & \theta_1 \bar{\Theta}_i + \theta_2 \underline{\Theta}_i \\ * & -(2\rho)^{-1} I & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -Y_i \end{bmatrix} < 0 \quad (53)$$

其中,

$$\Psi_i = \text{sym}(P_i A_{mi} + X_i C_i) + Q_i + I + (\theta_1 \bar{\lambda}_{ii} + \theta_2 \underline{\lambda}_{ii}) P_i$$

对任意的转移率  $\lambda_{ij}(h) \in [\underline{\lambda}_{ij}, \bar{\lambda}_{ij}]$ , 可以通过选择不同的参数  $\theta_1$  和  $\theta_2$  获得。式(53)成立, 等价于式(42)和式(43)成立。因此, 所设计的自适应容错跟踪控制器(5)在自适应律(6)-(8)下可以使跟踪误差系统满足  $H_\infty$  跟踪性能, 且闭环参考模型输出反馈增益可由式(46)获得。证毕。

此外, 为了使  $P_i B_i$  以令人满意的精度近似于  $C_i^T N_i$  且获得最优的跟踪性能, 我们可以通过以下最小化问题的全局解来优化  $\mu = \varepsilon + \gamma^2$ , 从而找到最优解。

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu \\ \text{s.t.} \quad & (42)-(45) \end{aligned}$$

## 4 仿真研究

在本节中, 我们将采用一个数值算例来验证自适应容错跟踪控制器和引入闭环参考模型改善暂态性能的有效性。

具有执行器故障和外部扰动的 S-MJS (1) 的模型参数:

模态 1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4.6 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6.2 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6.2 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [1 \quad 1]$$

模态 2:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 14.1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 14.1 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} -0.02 \\ 0.01 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

闭环跟踪参考模型(3)的参数:

模态 1:

$$A_{m1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15 & -8 \end{bmatrix}, \quad B_{m1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6.2 \end{bmatrix}$$

模态 2:

$$A_{m2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -27 & -12 \end{bmatrix}, \quad B_{m2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 14.1 \end{bmatrix}$$

假设转移速率的上下界为:

$$\lambda_{ij}(h) = \begin{bmatrix} -1.1 & 0.084 \\ 0.084 & -1.1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\lambda}_{ij}(h) = \begin{bmatrix} -0.084 & 1.1 \\ 1.1 & -0.084 \end{bmatrix}$$

需要指出地是, 给定  $\rho = 0.023$ ,  $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 0.2$ 。外部扰动和参考输入分别为

$$r(t) = 3.5 \sin(2\pi 0.6t)$$

$$w(t) = 0.1 \tanh(t) + \sin(0.5t)$$

自适应增益

$$\Gamma_H = 100I, \quad \Gamma_K = \Gamma_f = 50$$

执行器故障选择为

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 20s \\ 8 & 20s < t < 50s \end{cases}$$

通过定理 2, 利用 LMI 工具箱求解(42)-(45)可得  $\varepsilon = 5.4529 \times 10^{-4}$ ,  $H_\infty$  跟踪性能指标  $\gamma$  为 0.3162, 闭环参考模型反馈增益为

$$L_1 = 1.0e+04 \times \begin{bmatrix} 0.037 \\ -51.1233 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = 1.0e+05 \times \begin{bmatrix} 0.004 \\ -10.0521 \end{bmatrix}$$

仿真过程中, S-MJS 初始状态设定为

$$x(0) = [x_1(0) \quad x_2(0)]^T = [1 \quad -0.5]^T$$

闭环参考模型的初始状态设定为

$$x_m(0) = [x_{m1}(0) \quad x_{m2}(0)]^T = [-1 \quad 1.5]^T。$$

仿真结果如下:

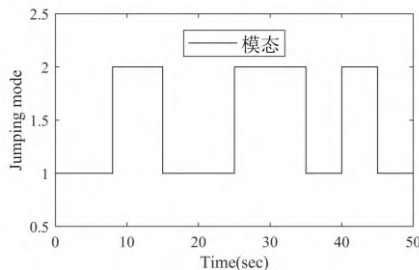


图 1 系统模态响应曲线

Fig. 1 System modal response curve

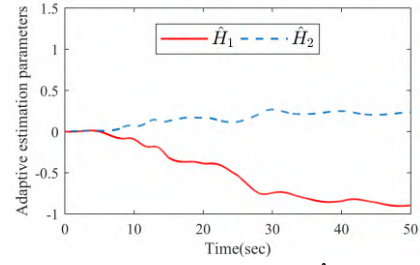


图 2 自适应估计参数  $\hat{H}_i$

Fig. 2 Adaptive estimation parameters  $\hat{H}_i$

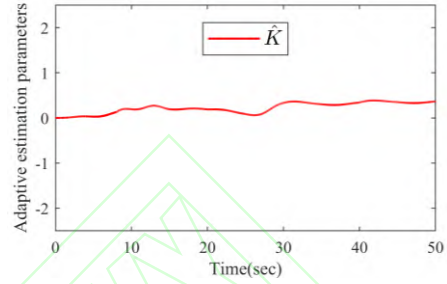


图 3 自适应估计参数  $\hat{K}_i$

Fig. 3 Adaptive estimation parameters  $\hat{K}_i$

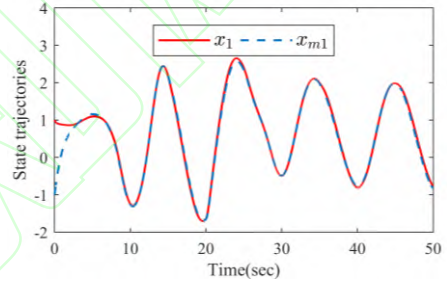


图 4 状态跟踪曲线  $x_1$

Fig. 4 Status tracking curve  $x_1$

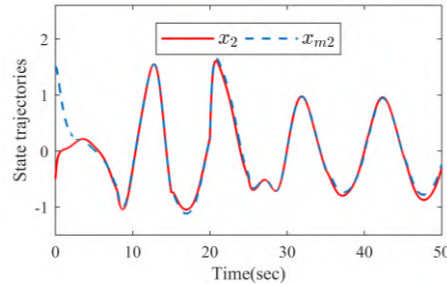


图 5 状态跟踪曲线  $x_2$

Fig. 5 Status tracking curve  $x_2$

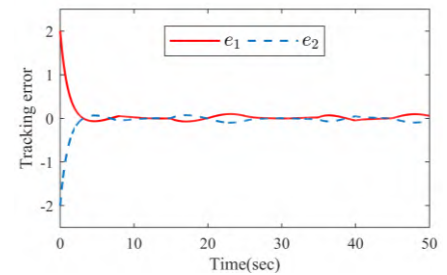


图 6 跟踪误差曲线

Fig. 6 Tracking error curve

图 1 表示 S-MJS 的跳变模态, 图 2 表示自适应参数  $\hat{H}_i$  的估计, 图 3 表示自适应参数  $\hat{K}_i$  的估计,



图4和图5是状态跟踪曲线,图6是状态跟踪误差曲线。从仿真结果可以看出,在受到外界干扰和执行器故障影响的情况下,利用自适应机制提供的在线估计信息,设计的自适应容错跟踪控制器可以确保闭环系统在随机稳定的前提下跟踪闭环参考模型的状态轨迹,同时达到预期的 $H_\infty$ 跟踪性能。

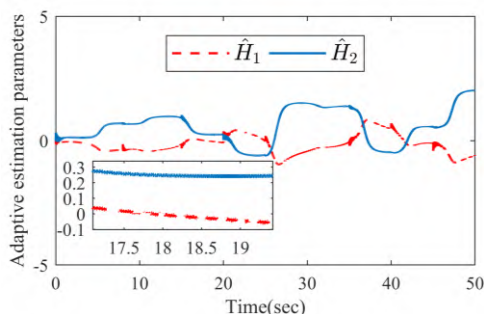


图7  $L_i = [0 \ 0]^T$  时自适应估计参数  $\hat{H}_i$

Fig. 7 Adaptive estimation parameters  $\hat{H}_i$  at  $L_i = [0 \ 0]^T$

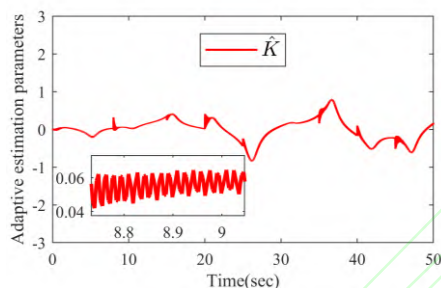


图8  $L_i = [0 \ 0]^T$  时自适应估计参数  $\hat{K}_i$

Fig. 8 Adaptive estimation parameters  $\hat{K}_i$  at  $L_i = [0 \ 0]^T$

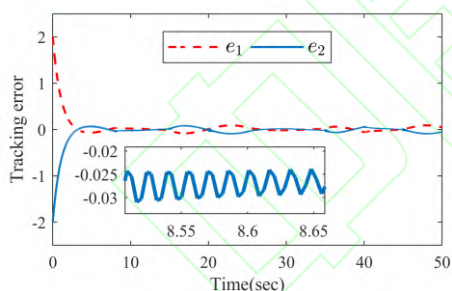


图9  $L_i = [0 \ 0]^T$  时跟踪误差曲线

Fig. 9 Tracking error curve at  $L_i = [0 \ 0]^T$

此外,为了进一步说明引入闭环参考模型对改善跟踪误差系统暂态性能的有效性。我们令  $L_1 = L_2 = [0 \ 0]^T$ , 此时,闭环参考模型(3)转化为开环参考模型,仿真结果如图7-9所示。从仿真结果可以看出在开环情况下,尽管系统的跟踪误差在执行器故障和外部干扰影响的情况下能够渐近收敛到零附近,但是会出现高频振荡。对比图2-图6可知,通过引入闭环参考模型可以有效抑制系统出现高频振荡,从而获得良好的跟踪性能。综上所述,说明了本文所设计的基于闭环参考模型的自适应容错跟踪控制器是可行的。

最后,通过引入误差绝对值的积分(Integral Absolute Error, IAE)和误差平方的积分(Integral Squared Error, ISE)性能指标来定量分析不同自适应增益下的跟踪响应特性:

$$I_{IAE} = \int_0^t |e(t)| dt \quad (54)$$

$$I_{ISE} = \int_0^t |e(t)|^2 dt \quad (55)$$

其中,  $t$  为仿真时间;  $e(t)$  为每个采样点的跟踪误差。

表1 不同增益跟踪误差量化分析

Tab. 1 Quantitative analysis of tracking errors with different gains

增益	误差	IAE	ISE
$\Gamma_H = I$	$e_1$	4.522	2.063
	$e_2$	4.518	2.063
$\Gamma_H = 10I$	$e_1$	3.705	2.050
	$e_2$	3.704	2.050
$\Gamma_H = 100I$	$e_1$	3.427	2.031
	$e_2$	3.427	2.031
$\Gamma_H = 1000I$	$e_1$	3.449	2.041
	$e_2$	3.449	2.042

通过表1可以看出,在本文所设计自适应容错控制器的作用下,随着增益  $\Gamma_H$  的不断增大,系统的跟踪误差逐渐减小,相应的跟踪性能不断增强。但当自适应增益过大时,反而跟踪误差会增大,跟踪性能会变差。

## 5 结论

针对具有执行器故障和外部扰动的S-MJS,本文研究了基于闭环参考模型的 $H_\infty$ 自适应容错跟踪控制,给出了系统稳定性条件和控制器参数设计规则。首先,保证在系统稳定的前提下,利用自适应机制提供的在线信息,设计自适应容错跟踪控制器去补偿外部干扰和执行器故障对系统造成的影响,从而实现系统的状态跟踪参考模型的状态轨迹。其次,为了改善传统自适应控制对跟踪误差系统暂态性能的影响,我们将闭环参考模型与自适应容错控制相结合。同时,以线性矩阵不等式形式给出了基于闭环参考模型的 $H_\infty$ 自适应容错跟踪问题的可行解条件。最后,仿真结果表明,在受到执行器故障和外界干扰影响的情况下,引入闭环参考模型不仅可以获得良好的跟踪性能还可以有效抑制系统出现高频振荡,并且选择合适的自适应增益有助于提高系统的跟踪性能。

## 参考文献(References)

- [1] ZHANG M, SHI P, MA L H, et al. Network-based fuzzy control for nonlinear Markov jump systems subject to quantization and dropout compensation[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2019, 371: 96-109.

- [2] QI W H, ZONG G D, KARIMI H R. Sliding mode control for nonlinear stochastic singular semi-Markov jump systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(1): 361-368.
- [3] SHEN H, MEN Y Z, WU Z G, et al. Nonfragile H-infinity control for fuzzy Markovian jump systems under fast sampling singular perturbation[J]. IEEE Transactions on Systems Man Cybernetics Systems, 2018, 48(12): 2058-2069.
- [4] LI Z C, LI M, XU Y L, et al. Finite-time stability and stabilization of semi-Markovian jump systems with time delay[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2018, 28(6): 2064-2081.
- [5] JIANG B P, KARIMI H R. Further criterion for stochastic stability analysis of semi-Markovian jump linear systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2020, 30(7): 2689-2700.
- [6] WEI Y L, PENG X Y, QIU J B. Robust and non-fragile static output feedback control for continuous-time semi-Markovian jump systems[J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2016, 38(9): 1136-1150.
- [7] JIANG B P, KAO Y H, KARIMI H R, et al. Stability and stabilization for singular switching semi-Markovian jump systems with generally uncertain transition rates[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(11): 3919-3926.
- [8] CHENG G F, JU Y Y, MU X W. Stochastic finite-time stability and stabilisation of semi-Markovian jump linear systems with generally uncertain transition rates[J]. International Journal of Systems Science, 2021, 52(1): 185-195.
- [9] 万海英, 栾小丽, 刘飞. 基于去随机化方法的Markov跳变系统有限频段控制[J]. 控制理论与应用, 2018, 35(7): 1002-1008.  
WAN H Y, LUAN X L, LIU F. Derandomization based finite-frequency control for Markov jump system[J]. Control Theory & Applications, 2018, 35(7): 1002-1008.
- [10] SUN H F, YANG Z L, MENG B. Tracking control of a class of non-linear systems with applications to cruise control of air-breathing hypersonic vehicles[J]. International Journal of Control, 2015, 88(5): 885-896.
- [11] 田运阳, 宋保业, 吴尤 等. 基于改进LADRC的全向移动机器人轨迹跟踪控制[J]. 控制工程, 2022: 1-8.  
TIAN Y Y, SONG B Y, WU Y, et al. Trajectory Tracking Control of Omni-directional Mobile Robot Based on Modified LADRC[J]. Journal of Control Engineering, 2022: 1-8.
- [12] XIA J W, PARK J H, ZHANG B Y, et al. Robust H-infinity tracking control for uncertain Markovian jumping systems with interval time-varying delay[J]. Complexity, 2015, 21(2): 355-366.
- [13] TIAN G T. Tracking control of discrete-time Markovian jump systems[J]. International Journal of Systems Science, 2020, 51(15): 3070-3080.
- [14] JI Y D, LI Y L, WU W, et al. Mode-dependent event-triggered tracking control for uncertain semi-Markov systems with application to vertical take-off and landing helicopter[J]. Measurement & Control, 2020, 53(5-6): 954-961.
- [15] CHEN Z H, TAN J, WANG X F, et al. Decentralized finite-time L-2 - L-infinity tracking control for a class of interconnected Markovian jump system with actuator saturation[J]. ISA Transactions, 2020, 96: 69-80.
- [16] FAN Q Y, YANG G H, YE D. Adaptive tracking control for a class of Markovian jump systems with time-varying delay and actuator faults[J]. Journal of the Franklin Institute-Engineering and Applied Mathematics, 2015, 352(5): 1979-2001.
- [17] ZHAO D Y, LIU Y, LIU M, et al. Adaptive fault-tolerant control for continuous-time Markovian jump systems with signal quantization[J]. Journal of the Franklin Institute-Engineering and Applied Mathematics, 2018, 355(6): 2987-3009.
- [18] ZHU S, LI J N, WANG A M. Adaptive event-triggered asynchronous fault-tolerant control for stochastic systems with multiple-types of failures[J]. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2022, 36(10): 2401-2418.
- [19] WANG B, ZHU Q X. Stability analysis of semi-Markov switched stochastic systems[J]. Automatica, 2018, 94: 72-80.
- [20] CHEN L H, HUANG X L, FU S S. Observer-based sensor fault-tolerant control for semi-Markovian jump systems[J]. Nonlinear Analysis-Hybrid Systems, 2016, 22: 161-177.
- [21] KAVIARASAN B, KWON O M, PARK M J, et al. Combined h-infinity and anti-disturbance control for semi-Markovian jump systems via a nonlinear disturbance observer[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2023, 33(13): 7968-7985.
- [22] XIE J, ZHAO J. H-infinity model reference adaptive control for switched systems based on the switched closed-loop reference model[J]. Nonlinear Analysis-Hybrid Systems, 2018, 27: 92-106.