

# 博士学位论文

几类切换非线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制  
问题研究

**RESEARCH ON ROBUST  $H_\infty$  CONTROL  
PROBLEMS FOR SEVERAL CLASSES OF  
SWITCHED NONLINEAR SYSTEMS**

赵鸿鹏

哈尔滨工业大学  
2022 年 06 月

国内图书分类号: O231.5  
国际图书分类号: 519.7

学校代码: 10213  
密级: 公开

## 理学博士学位论文

# 几类切换非线性系统的鲁棒 $H_\infty$ 控制 问题研究

博士研究生: 赵鸿鹏

导师: 王兴涛教授

申请学位: 理学博士

学科: 数学

所在单位: 数学学院

答辩日期: 2022 年 06 月

授予学位单位: 哈尔滨工业大学

Classified Index: O231.5

U.D.C: 519.7

Dissertation for the Doctoral Degree in Science

# RESEARCH ON ROBUST $H_\infty$ CONTROL PROBLEMS FOR SEVERAL CLASSES OF SWITCHED NONLINEAR SYSTEMS

<b>Candidate:</b>	Hongpeng Zhao
<b>Supervisor:</b>	Prof. Xingtao Wang
<b>Academic Degree Applied for:</b>	Doctor of Science
<b>Specialty:</b>	Mathematics
<b>Affiliation:</b>	School of Mathematics
<b>Date of Defence:</b>	June, 2022
<b>Degree-Confering-Institution:</b>	Harbin Institute of Technology

## 摘 要

切换系统是一类广泛应用于信息处理、自动化生产以及航空航天等领域的混杂系统。随着这些高新技术领域的快速发展,它们涉及的控制系统越来越复杂,大多数实际的控制系统都发展成了非线性的,这给切换非线性系统的稳定性研究带来很大的促进作用。另外,由各种因素导致的不确定性总是伴随实际系统,并时刻影响着系统的稳定性,这使得系统的鲁棒性能研究吸引了更多研究者的关注。

本文主要研究几类切换非线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题,旨在为其应用于工业化生产提供理论基础,相关研究内容如下:

针对具有无源子系统和非无源子系统的不确定切换非线性系统,研究其稳定性和加权  $L_2$ -增益性能。对于适当的切换信号,通过事先给定无源率、平均驻留时间和干扰衰减水平,利用系统的无源性对无源子系统和非无源子系统分别设计控制器,从而避免构造 Lyapunov 函数的困难,并且不需要求解 Hamilton-Jacobi 方程,在一定程度上降低计算难度。基于平均驻留时间方法和多存储函数方法,得到系统的全局指数稳定性和加权  $L_2$ -增益性能,并通过一个实际例子和一个数值仿真验证了方法的有效性。

对于一类切换非线性系统,研究其状态反馈控制问题。基于周期采样数据方法,通过考虑采样周期和驻留时间的关系,分别讨论系统在单个采样周期中不发生切换和仅发生一次切换的情况。如果在单个采样周期内发生切换,则在切换发生的瞬间系统转变为异步切换,直到下一个采样瞬间结束。首先,运用反步法构建状态反馈采样数据控制器,然后通过引入判断函数分析切换信号和 Lyapunov 函数方法之间的关系,并且利用平均驻留时间方法得到采样周期的限制条件,进一步得到切换非线性系统的全局渐近稳定性和加权  $L_2$ -增益性能。此方法是对切换非线性系统的鲁棒  $H_\infty$  性能研究方法的补充。最后,给出两个数值实验,验证所提出方法的可行性。

针对一类切换随机非线性系统,研究其输出反馈控制问题。仍然采用周期采样的方法,通过采样周期和驻留时间的关系,类似切换非线性系统的研究,将系统分情况讨论。首先,构造观测器,并进一步得到观测误差函数。然后,采用反步法构建输出反馈采样数据控制器,该控制器由采样数据信息和观测信息来构建,使得控制器更容易获得。随后,基于平均驻留时间方法得到采样周期的限制条件,使得闭环系统是均方渐近稳定的,并具有加权的  $L_2$ -增益性能。

最后，通过两个数值例子展示了理论结果的有效性。

**关键词：**切换非线性系统；鲁棒  $H_\infty$  控制；无源性；周期采样；平均驻留时间

## Abstract

Switching system is a kind of hybrid system which is widely used in information processing, automated production, aerospace and other fields. With the rapid development of these high-tech fields, their requirements for the control systems involved are increasingly complex, and most practical control systems are developed to be nonlinear, which brings great influence and promotion to the stability of switched nonlinear systems. In addition, uncertainties caused by various factors always accompany actual systems and affect the stability of systems all the time, which make the research on the robust performance of systems attract the attention of more researchers.

In this dissertation, we mainly study the robust  $H_\infty$  control problem of several types of switched nonlinear systems, aiming to provide theoretical basis for its application in industrial production. The relevant research contents are as follows:

For the uncertain switched nonlinear systems with passive and non-passive subsystems, the stability and weighted  $L_2$ -gain performance are investigated. For appropriate switching signal, by giving the passive rate, the average dwell time and the interference attenuation level in advance, the controllers are designed for passive subsystems and non-passive subsystems respectively. The use of system passivity avoids the difficulty of constructing the Lyapunov function and solving the Hamilton-Jacobi equation, which reduces the computational difficulty to a certain extent. Based on the average dwell time method and the multi-stored function method, the global exponential stability and weighted  $L_2$ -gain performance of the system are obtained, and the effectiveness of the method is illustrated by a practical example and a numerical simulation.

For a class of switched nonlinear systems, the state feedback control problem is studied. Using the periodic sampling data method and considering the relationship between the sampling period and the dwell time, the cases of no switching and only one switching of the system in a single sampling period are discussed respectively. If switching occurs within a single sampling period, the system transitions to asynchronous switching at the instant the switching occur until the next sampling instant ends. First, the state feedback sampled-data controller is constructed by the back-stepping method, and then using the judgment function, we analyze the relationship between the switching signal and the Lyapunov function method, and the limiting conditions of the sampling period are obtained

by the average dwell time method. The global asymptotic stability and weighted  $L_2$ -gain performance of the switched nonlinear system are further obtained, and this method complements the research way of the robust  $H_\infty$  performance of the switched nonlinear systems. Finally, two numerical experiments are given to demonstrate the feasibility of the proposed method.

For a class of switched stochastic nonlinear systems, the output feedback control problem is researched. The method of periodic sampling is still adopted, and similar to the study of switched nonlinear system, the system is discussed by the relationship between the sampling period and the dwell time. First, we construct the observer, and obtain the observation error function further. Then, an output feedback sampled-data controller is constructed by back-stepping method, and the controller is constructed from sampled-data information and observation information so that the controller is easier to be obtained. Subsequently, the constraints of the sampling period are obtained based on the average dwell time method, so that the closed-loop system is the mean-square asymptotically stable and has weighted  $L_2$ -gain performance. Finally, the effectiveness of the method is demonstrated through two numerical examples.

**Keywords:** switched nonlinear systems, robust  $H_\infty$  control, passivity, periodic sampling, average dwell time

## 目 录

第 1 章 绪论.....	1
1.1 课题背景及意义.....	1
1.2 研究现状.....	2
1.2.1 鲁棒 $H_\infty$ 控制理论的发展.....	2
1.2.2 基于无源性的切换系统的研究现状.....	3
1.2.3 采样数据在切换确定性系统中的研究现状 .....	5
1.2.4 采样数据在切换随机系统中的研究现状 .....	7
1.3 本文的主要研究内容.....	9
第 2 章 一类不确定切换非线性系统的鲁棒 $H_\infty$ 控制问题 .....	11
2.1 带有不确定性的切换非线性系统的描述及预备知识 .....	11
2.2 主要研究结果.....	16
2.2.1 稳定性分析.....	16
2.2.2 $L_2$ -增益分析.....	18
2.3 仿真分析.....	23
2.4 本章小结.....	28
第 3 章 基于数据采样的切换非线性系统的鲁棒 $H_\infty$ 控制问题 .....	29
3.1 切换非线性系统的描述及预备知识 .....	29
3.2 控制器设计及性能分析.....	30
3.3 仿真分析.....	44
3.4 本章小结.....	49
第 4 章 基于数据采样的切换随机非线性系统的鲁棒 $H_\infty$ 控制问题 ..	50
4.1 切换随机非线性系统的描述及预备知识 .....	50
4.2 观测器设计.....	51
4.3 控制器设计及性能分析.....	52
4.4 仿真分析.....	64
4.5 本章小结.....	67
结论.....	68
参考文献.....	70



# 第1章 绪论

## 1.1 课题背景及意义

切换系统是由数量有限的子系统和协调子系统之间的切换信号组成的系统，其中切换信号用于在指定时间激活指定子系统。切换系统作为一类重要的混杂系统，广泛应用于信息处理<sup>[1,2]</sup>、机器人控制<sup>[3]</sup>以及自动化生产<sup>[4-6]</sup>等高新技术领域，因此切换系统的稳定性至关重要。然而，人们发现实际的系统总是存在着各种各样的不确定性，这就导致了系统会变得不再稳定，于是对系统的鲁棒控制研究随之产生，并随着实际需求不断发展壮大。所谓鲁棒控制，就是通过设计控制器使得闭环系统在具有一定程度不确定性的情况下仍能保持稳定，并且具有较好的性能<sup>[7]</sup>。经典的鲁棒控制主要是通过 Bode 图和 Nyquist 曲线间接分析系统的不确定性问题，并且局限于单输入单输出系统，这也逐渐不能满足实际的生产需求，于是鲁棒  $H_\infty$  控制理论应运而生，随即它便成为了控制理论研究者们关注的焦点，并且在各个高新技术领域占有举足轻重的地位<sup>[8]</sup>。

近年来，在工业化的促进作用下，高新技术领域对所涉及的控制系统的要求越来越复杂，大家发现线性系统只能某种程度上简化实际的系统，而多数实际应用的系统都是非线性的，这给切换非线性系统的控制问题研究带来很大的促进作用，关于切换非线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题的研究结果不断涌现<sup>[9,10]</sup>。然而，当前对该问题的研究方法主要有线性矩阵不等式方法<sup>[11,12]</sup>和 Lyapunov 函数方法<sup>[13-15]</sup>，研究方法相对复杂，所以如何减少计算复杂性，实现计算机快速处理，进一步应用于工业化生产成为重要的研究方向，并受到广泛关注。

为了减少控制器的复杂性，源于电网的系统无源性被引入到切换非线性系统的研究中，基于 Lyapunov 稳定性理论的系统稳定性可以与系统无源性联系起来，为非线性系统的分析提供了有力的工具<sup>[16]</sup>。同时，随着计算机技术的发展，数字信号处理理论和技术都在日益成熟，周期采样作为理想化的采样方法被广泛应用于计算机控制系统中，这促使研究者们采用周期采样的方法来处理非线性系统的稳定性问题<sup>[17]</sup>。另外，在实际的系统中，随机因素是普遍存在的，例如：系统运行过程中的温度变化<sup>[18]</sup>和外界气流变化<sup>[19]</sup>等。虽然在很多情况下忽略了这些因素的影响，将系统作为确定性系统来研究，但是当系统精度要求较高时，这些微小变化所带来的随机因素也足以影响系统的性能，例如：轻

武器射击时膛口抖动的随机性造成射弹误差<sup>[20]</sup>。因此，切换随机非线性系统研究具有重要的理论价值和实际意义。

本论文将通过系统的无源性和周期采样方法，研究几类切换非线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题，旨在为切换非线性系统参与到工业化应用提供更多的理论基础。

## 1.2 研究现状

### 1.2.1 鲁棒 $H_\infty$ 控制理论的发展

鲁棒  $H_\infty$  控制理论起源于经典控制理论。所谓的经典控制理论，就是利用频域分析方法研究单输入单输出系统的控制问题，它基于现场测试得到被控对象的频率特性，并通过频域分析的方法设定规则，进一步反复调试得到系统性能指标<sup>[7]</sup>。经典控制理论对当前自动化工业的发展起到了至关重要的作用，但是随着科技生产水平的不断提高，以及当前实际的生产需求的增加，促使学者们不断探索。1981 年，建立在频域方法上的  $H_\infty$  控制理论由加拿大学者 Zames 在文章 [21] 中首次提出，通过引入  $H_\infty$  范数作为目标函数进行优化设计，这标志着鲁棒  $H_\infty$  控制理论的诞生。鲁棒  $H_\infty$  控制理论是在实有理函数空间中，通过优化  $H_\infty$  范数来获取系统鲁棒性能的一种控制理论，如图 1-1，表示的是标

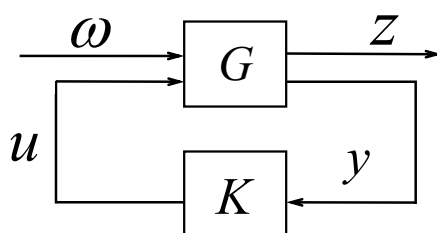


图 1-1 标准的鲁棒  $H_\infty$  控制问题框图

Fig 1-1 The block diagram of standard robust  $H_\infty$  control problem

准的鲁棒  $H_\infty$  控制问题框图，其中， $G$  表示系统给定的广义被控对象， $K$  表示待设计的系统控制器， $\omega$  表示扰动输入信号， $u$  表示控制信号输入， $y$  表示测量输出， $z$  表示被控输出。本文所研究的鲁棒稳定性就是通过设计控制器  $K$ ，使得广义被控对象  $G$  在一定的扰动范围中仍然保持稳定并具有较好性能。

紧接着，类似于控制理论由频域到时域的发展进程，鲁棒  $H_\infty$  控制理论也发展到了时域阶段<sup>[22]</sup>。随着实际生产的需要，鲁棒  $H_\infty$  控制理论经历了从定常

系统到时变系统<sup>[23]</sup>，从确定系统到不确定系统<sup>[24]</sup>，从线性系统到非线性系统<sup>[25]</sup>的发展和衍变，并逐渐走向成熟。

随着工业化的进步，切换系统广泛应用于工业和物理系统（如搅拌釜反应器系统<sup>[26]</sup>和单连杆机械手系统<sup>[27]</sup>），这也促使着切换系统的鲁棒  $H_\infty$  控制理论研究快速发展。目前，通过应用线性矩阵不等式方法<sup>[11, 12]</sup>、Lyapunov 函数方法<sup>[14, 28]</sup>、平均驻留时间法<sup>[29, 30]</sup>和多 Lyapunov 函数法<sup>[31, 32]</sup>，对切换非线性系统稳定性及系统的鲁棒  $H_\infty$  性能研究取得了很多不错的成果。通常，在任意切换信号下，Lyapunov 函数方法对切换非线性系统稳定性及其鲁棒  $H_\infty$  性能研究起到重要作用<sup>[14, 28, 33]</sup>。基于平均驻留时间法和 Lyapunov 函数法，通过设计新的切换自适应输出反馈控制器，文献 [4] 研究了切换非线性系统的自适应模糊跟踪控制问题。文献 [34] 设计了一个特殊的切换律，为切换非线性系统提供了鲁棒  $H_\infty$  指数稳定性的充分条件。当切换非线性系统具有不稳定子系统时，多 Lyapunov 函数方法成为了舞台上的主角。通过平均驻留时间法和多 Lyapunov 函数法，文献 [2] 证明了具有非严格反馈结构的闭环非线性系统的稳定性。在文献 [35] 中利用多 Lyapunov 函数方法减少系统的保守性，并利用递归设计算法，显式构造了子系统的连续状态反馈控制器，得到了系统的全局渐近稳定性。文献 [31] 提出了基于多 Lyapunov 函数的小增益定理，研究了具有不稳定子系统的切换非线性系统。文献 [36] 应用小增益定理来显式地构造一类非线性控制器，处理了动态不确定性中不可控制的增益函数。针对一类不确定切换非线性时滞系统，文献 [37] 通过对不确定参数的上限估计，使用鲁棒控制技术和多 Lyapunov 函数方法设计控制器，研究了系统的自适应容错控制问题，并得到了闭环系统的渐近稳定性。通过跟踪控制方法，一类切换非线性系统的鲁棒镇定和鲁棒  $H_\infty$  跟踪控制问题被解决<sup>[32]</sup>。

自鲁棒  $H_\infty$  控制理论诞生以来，研究者们从未停止对它的研究，为了进一步优化现代控制系统所采用的数字控制器，更多的研究方法被提出，下面将介绍几类切换非线性系统研究方法及研究现状。

### 1.2.2 基于无源性的切换系统的研究现状

无源性是电路与控制理论交叉的主要概念之一，它由 Willems<sup>[38]</sup> 发现并由 Hill 和 Moylan<sup>[39]</sup> 进一步扩展，是一个非常重要的系统属性。在某些负反馈扰动下，无源性与系统的鲁棒稳定性密切相关，表征无源性的存储函数通常有资格作为 Lyapunov 函数用于稳定性问题分析。在许多情况下，一旦确保了无源性，

那么系统的稳定性问题就可以解决,这使得它已然成为控制器设计和系统分析的有效工具<sup>[40-42]</sup>。

无源性理论把一些数学工具和物理现象联系起来,适用于许多控制问题。由于系统的无源性和稳定性的关系紧密,所以在控制领域如何利用无源性研究非线性系统稳定性,引起了学者们的关注<sup>[43,44]</sup>。

同样,在切换系统中无源性也是一个非常有用的工具,关于切换系统无源性的许多研究结果已经被发表,参照文献[45-51],其中,文献[45]发现存储函数方法可以确保最小驻留时间的上限,以保持线性系统的无源性,并将这一概念推广到连续时间的线性切换系统。文献[46]研究了基于混合控制策略的切换线性系统的无源控制问题,通过求解线性矩阵不等式方法来构造所需的混合控制器,并获得了全局渐近稳定的充分条件。随着切换非线性系统应用的不断增多,切换非线性系统的无源性研究也备受关注。最初在文献[47]中考虑了一般切换非线性系统的无源性概念,其中多个正定存储函数已成功用于稳定性分析和设计。对于离散时间切换非线性系统,文献[48]得出了由无源和非无源模式组成的离散时间切换非线性系统的局部无源性的充分必要条件,研究了控制输入仿射系统的无源性问题。文献[50]基于无源性研究了带有输入和输出的离散时间切换系统控制问题,利用存储函数、李导数和迭代技术推导了保证离散时间切换非线性系统渐近稳定的充分条件。文献[51]通过平均驻留时间方法研究了一类具有反馈增量无源子系统的切换非线性系统的输出调节问题,分别设计了每个子系统的动态误差反馈稳定器,解决了切换非线性系统的输出调节问题。

随着系统在实际问题中变得更加复杂,外部干扰引起的鲁棒性成为麻烦的根源,而基于无源性的控制方法有较好的鲁棒性,所以,利用无源性在切换系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题的研究方面取得了很多不错的成果。例如,结合分段 Lyapunov 函数和平均驻留时间方法,文献[52]利用无源性研究了由几个线性时不变子系统组成的切换系统的扰动衰减性能。文献[53]采用分段二次 Lyapunov 函数方法研究了带有干扰的切换线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题。对于切换非线性系统,文献[54]研究了带有输入和输出无源性的连续非线性切换系统的控制问题,给出了基于多 Lyapunov 函数方法的控制问题可解的充分条件,并通过构造非线性控制器和适当的切换规则得到系统的稳定性。在前人的研究基础上,本文第二章将利用系统无源性及表征无源性的存储函数,研究一类带有无源和非无源子系统的切换非线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制的问题。

### 1.2.3 采样数据在切换确定性系统中的研究现状

随着计算机控制技术的发展,采样数据控制技术被广泛应用于多机器人系统<sup>[55]</sup>、无人机和航天系统<sup>[56, 57]</sup>等。在采样数据控制系统中,输入和输出是连续信号,但是控制器是离散的,因而会出现连续信号和离散信号共存的现象,这也是采样数据控制系统的一个主要特征,如图1-2,其中 $G$ 表示时间连续的被控对象, $x(t)$ 表示系统状态, $S$ 表示采样器, $x_d$ 表示系统状态的采样结果, $K_d$ 表示离散控制器, $u_d$ 表示离散的控制信号,ZOH表示零阶保持器, $u$ 表示连续的控制信号。与连续时间控制相比,采样数据控制使用离散控制器,具有以下显著的优势:可靠性、稳定性、低成本<sup>[17, 58]</sup>。因此,通过采样方法来研究非线性系统的性能具有非常大的实用价值,并且逐渐成为近年来研究的热点<sup>[59]</sup>。

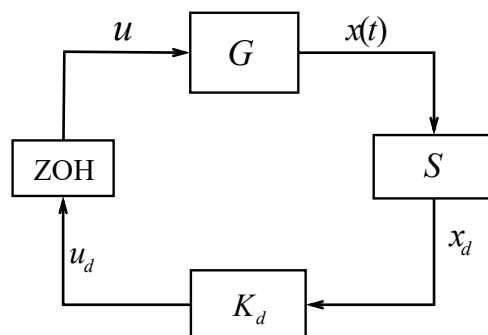


图 1-2 采样数据控制系统  
Fig 1-2 Sample-data control system

对于采样数据控制来说,以何种方式采样是最根本,也是重要的问题之一。根据采样方法的不同,采样数据控制的方法主要可以分为周期采样控制<sup>[60, 61]</sup>、随机采样控制<sup>[62, 63]</sup>、时变采样控制<sup>[64, 65]</sup>以及多率采样控制<sup>[66]</sup>等。周期采样控制:采集信号数据时,相邻的两个采样点之间的间隔是常数 $T$ ,我们称 $T$ 为采样周期;随机采样:采集信号数据时,相邻的两个采样点之间的间隔的长度是随机的,即对于 $T_k = t_{k+1} - t_k$ , $T_{k-1}$ 与 $T_k$ 值不一定相等;时变采样控制:采集信号数据时,相邻的两个采样点之间的间隔是随时间变化的;多率采样控制:主要用来研究具有多个不同信号同时输入的系统,对于不同的信号采用不同的采样间隔,但是每一个信号自身的采样间隔相同。

当前,周期采样作为理想化的采样方法正在被广泛应用于计算机控制系统。随着系统在实际应用中变得日益复杂,对系统稳定性和精确性的要求也越

来越高, 如何确保在存在外部干扰的影响下保持系统性能显得至关重要, 这促使学者们开始聚焦于系统鲁棒性能的研究<sup>[67-70]</sup>。早期, 通过采样数据方法对线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题的分析, 为研究非线性系统的采样控制工作奠定了基础<sup>[60, 71]</sup>。基于类 Lyapunov 泛函方法, 文献 [61] 通过定常周期采样分析了非线性系统的指数稳定问题, 得到了保守性较小的稳定性结果。文献 [62] 和 [63] 将随机采样转换为周期采样, 分别研究了具有随机采样的非线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题和一类具有随机采样的不确定非线性网络系统的鲁棒  $H_\infty$  输出跟踪控制问题。这些工作为切换系统的鲁棒  $H_\infty$  控制研究打下了基础。此外, 本文还参考了文献 [72, 73] 中关于坐标变化和稳定性理论的内容。

现在, 切换系统广泛应用于各个领域, 而采样数据控制技术具有加快系统分析速度的优势, 这使得利用采样数据方法求解切换系统稳定性问题备受关注<sup>[74, 75]</sup>。对此图 1-3 给出了切换系统的采样数据控制框图, 其中  $G_M$  表示具有多

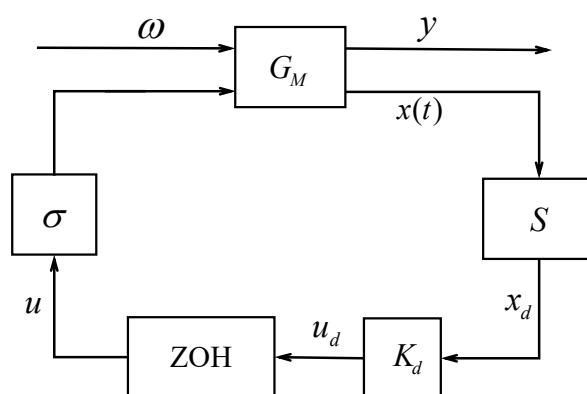


图 1-3 切换系统的采样数据控制  
Fig 1-3 The sample-data control of switched system

个子系统的连续被控对象,  $\sigma$  是切换信号,  $\omega$  是外界干扰信号,  $y$  表示系统的测量输出, 其他符号意义与图 1-2 中的描述相同, 并且对切换非线性系统<sup>[76]</sup>、切换仿射系统<sup>[77, 78]</sup> 和切换随机非线性系统<sup>[79]</sup>等的研究都在不断深入。李等人<sup>[76]</sup>结合 Lyapunov 函数和平均驻留时间方法进一步考虑了非线性切换系统的全局采样数据稳定性问题。Hauroign<sup>[78]</sup> 和 Hetel<sup>[77]</sup> 分别通过控制 Lyapunov 函数和随时间变化的 Lyapunov 函数讨论了切换仿射系统的可变采样控制问题。毛等人<sup>[79]</sup>通过选择适当的分段 Lyapunov 函数, 解决了一类切换非线性系统的采样数据输出反馈稳定性问题, 证明了在平均驻留时间条件下, 所提出的周期采样数据控制器, 能使所考虑的切换非线性系统是稳定的。然而以上结果都没有考虑系统

的鲁棒性。

当前,利用周期采样对切换非线性系统研究还在不断继续,其中对切换非线性系统的鲁棒性能研究还在持续完善,所以本文的第3章和第4章将主要通过周期采样研究几类切换非线性系统的鲁棒性能,为周期采样的实际应用提供更多的理论基础。

### 1.2.4 采样数据在切换随机系统中的研究现状

随着实际系统越来越复杂,研究人员发现随机扰动往往会影响系统的稳定性,这使得人们对随机系统的研究产生了浓厚的兴趣<sup>[80, 81]</sup>。所谓随机系统,就是自身带有某种不确定因素的系统,或者是系统受到某些外部随机扰动,或者是测量时出现了随机误差。随机过程理论作为随机系统研究的理论基础,二者发展密切相关的。随机过程起源于1827年,英国植物学家 Brown 观察到悬浮的花粉颗粒在水中不停地做无规则运动,即 Brown 运动<sup>[82]</sup>。直到20世纪初, Brown 运动的初步数学模型才被建立,随后,美国数学家 Wiener 给出了 Brown 运动的精确数学描述,因此 Brown 运动又称为 Wiener 过程<sup>[83]</sup>。后来,苏联数学家 Kolmogorov 发表了著作《概率论中的分析方法》,为随机过程的研究奠定了基础<sup>[84]</sup>。1951年,日本数学家 Itô<sup>[85]</sup>提出了著名的 Itô 公式,从而随机分析理论逐步被建立,并发展到各个领域,例如:金融市场系统<sup>[86]</sup>,神经网络系统<sup>[87]</sup>。

根据系统中的随机变量不同,所得到的随机系统模型是不同的。比较经典的随机系统有 Itô 随机微分方程系统<sup>[79, 88]</sup>和 Markov 跳跃系统<sup>[89, 90]</sup>。下面简单介绍这两类随机系统的数学模型:

#### 1. Itô 随机微分方程系统模型:

$$dx(t) = f(t, x)dt + g(t, x)d\vartheta(t)$$

其中,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  为系统状态,  $f(t, x)$  和  $g(t, x)$  是关于  $t$  和  $x$  的函数,  $\vartheta(t)$  是标准 Wiener 过程。

#### 2. Markov 跳跃系统模型:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), r(t), t)$$

其中  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  为系统状态,  $f$  是满足一般增长条件的光滑函数,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  为控制输入, 随机参数  $r(t)$  是完备概率空间上的一个右连续 Markov 过程, 并且在  $S = \{1, \dots, n\}$  中取值,  $r(t)$  决定了系统模式间的切换, 状态转移概率矩阵表示为:

$$\text{Prob}\{r(t + \Delta) = j \mid r(t) = i\} = \begin{cases} \pi_{ij}\Delta + o(\Delta), & i \neq j \\ 1 + \pi_{ii}\Delta + o(\Delta), & i = j \end{cases}$$

其中  $\Delta > 0$ ,  $\pi_{ij}$  是从  $t$  时刻到  $t + \Delta$  时刻, 系统模态由  $i$  跳变到模态  $j$  的转移率, 并且对于所有  $i, j \in S$ , 有

$$\pi_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \pi_{ij}, \quad (\pi_{ij} \geq 0, \quad i \neq j)$$

切换控制系统作为一类重要的混杂系统有着广泛的应用, 其本身具有的鲁棒性对系统性能的影响也备受关注, 相关理论不断完善。研究人员发现在实际系统中, 随机扰动时常影响系统的稳定性, 使得越来越多的视线开始聚焦于随机系统的研究。自然而然地, 鲁棒  $H_\infty$  控制理论也被扩展到了切换随机系统中<sup>[70, 91]</sup>。

与切换系统类似, 切换随机系统的鲁棒  $H_\infty$  控制理论也经历了从离散系统到线性系统, 然后到非线性系统的发展进程。早期, Bouhtouri 等人<sup>[92]</sup>研究了离散时间线性随机系统的输出反馈控制, 并发展了随机系统的  $H_\infty$  控制理论。随后, 文献 [93] 基于离散 Lyapunov 函数和线性矩阵不等式方法研究了不确定随机离散时滞系统的鲁棒稳定性。文献 [94] 则考虑了离散时间的 Markov 跳跃系统。对于随机线性系统, 文献 [95] 利用多 Lyapunov 函数方法研究了切换线性随机系统的鲁棒控制问题, 得到了系统均方稳定的充分条件。文献 [96] 利用线性矩阵不等式方法构建了随机有界实引理, 解决了一类切换随机系统的鲁棒控制问题, 并且完成了状态反馈鲁棒  $H_\infty$  控制器的设计。文献 [97] 基于平均驻留时间方法, 研究了异步切换下的切换不确定随机非线性系统的鲁棒镇定问题, 并给出了异步切换下切换随机系统存在指数均方稳定的一个充分条件。通过设计模糊参数相关的故障检测滤波器, 文献 [98] 解决了切换随机非线性系统的故障检测滤波问题。为了降低计算的复杂度, 学者们利用反步法和 Nussbaum 函数来获得一类切换随机非线性系统的稳定性<sup>[99]</sup>。

与连续时间控制相比, 采样数据控制技术更适合数字信号处理, 具有重要的实用价值, 于是如何利用采样方法 (周期性或随机采样) 研究随机非线性系统和切换非线性系统的鲁棒性能问题逐渐成为近年来的热点<sup>[58, 62, 79, 100]</sup>。为简单起见, 基于反馈控制方法和反步法, 文献 [101] 和 [58] 设计了采样数据输出反馈控制器, 分别研究切换随机非线性系统和切换大规模随机非线性系统的均方全局指数稳定性。为了研究非线性切换系统的鲁棒稳定性, 文献 [102] 利用平均驻留时间方法和输入延迟方法设计了可靠的采样数据控制器。根据采样周期



与驻留时间之间的关系,文献 [103] 采用线性矩阵不等式方法研究了具有时变时滞的切换非线性系统的鲁棒指数镇定问题。

目前,研究人员已经开始通过采样数据控制研究切换随机系统的鲁棒稳定性,并发表了一些关于线性随机系统的研究成果<sup>[104, 105]</sup>。一个自然的问题是具有随机扰动的切换非线性系统是否能够保持稳定并具有很好的鲁棒性能,本文第4章将主要利用 Itô 随机微分方程理论研究切换随机非线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制理论。

### 1.3 本文的主要研究内容

基于前面对鲁棒  $H_\infty$  理论发展的总结和几类切换非线性系统研究方法及现状的介绍,可以发现控制理论在工业化、自动化和信息化等领域的应用越来越多,对切换非线性系统模型的需求也更加广泛,所以切换非线性系统的性能问题成为研究者们和系统使用者们关注的重点。针对切换非线性控制系统的研究已经取得了许多优秀的成果,但这也远远不足以满足实际的生产需求。基于此,本文将对几类切换非线性系统的稳定性及  $H_\infty$  性能进行分析,旨在为其实际应用提供更多的理论依据。主要研究内容如下:

第2章基于平均驻留时间方法研究一类具有无源和非无源子系统的不确定切换非线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题。对于给定的切换信号,通过给定的无源率、平均驻留时间和扰动衰减水平,以保证不确定切换非线性系统的可解性,并分别为无源子系统和非无源子系统设计对应的控制器。在上述给定条件下,应用多存储函数方法求得系统的全局指数稳定性和系统的  $L_2$ -增益性能。最后,通过一个具有两个进料模式的切换连续搅拌釜反应器系统的例子和一个数值算例验证了方法的有效性。

第3章基于采样数据方法研究一类切换非线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题。本章采用周期采样方法,通过考虑采样的周期和驻留时间的关系,将系统分为两种情况进行分析,即单个采样周期中系统不发生切换和仅发生一次切换的情形,如果在采样周期内系统发生切换,则切换转化为异步切换。然后利用平均驻留时间方法得到的采样周期的限制条件,通过反步法构建状态反馈采样数据控制器使得闭环系统是全局渐近稳定的,并且具有加权的  $L_2$ -增益性能。

第4章基于周期采样研究一类切换随机非线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题。在第3章中主要研究了切换非线性系统的状态反馈控制器的设计,但是很多时候系统的状态并不是全部可测的,这时状态反馈控制就无法满足系统的要求,

而系统的输出是可测的，所以利用输出反馈器来研究切换随机非线性系统具有重要意义。为了测量系统输出，首先构造了可执行的观测器，并进一步得到了观测误差。随后类似第 3 章对采样周期和驻留时间关系的讨论，仍然分两种情况分析系统。在基于平均驻留时间法得到的采样周期的限制条件下，本章将采用反步法构建输出反馈采样数据控制器，使得闭环系统是均方渐近稳定的，并且具有加权的  $L_2$ -增益性能。

结论部分对本文的整体工作做了总结，并且介绍了本文工作的创新点和未来工作的方向。

## 第2章 一类不确定切换非线性系统的鲁棒 $H_\infty$ 控制问题

随着计算机技术在工业化上的广泛应用,非线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题研究得到了极大的推动,非线性控制问题的研究成果不断涌现<sup>[106-108]</sup>。然而,这些方法通常需要构造复杂的 Lyapunov 函数,或者求解 Hamilton-Jacobi 方程,这对计算机运算来说是困难的。

无源性作为稳定性的一种更高层次的抽象,系统基于 Lyapunov 函数的稳定性理论可以转化为从无源性的角度解释。在无源性出现以前,学者们常常需要事先构造复杂的 Lyapunov 函数,然后才能分析系统的稳定性能,但是利用无源性的概念,可以将这一过程转化为构造一个使系统无源的存储函数,这减少了函数构造的困难。例如:文献 [109] 通过无源性对切换非线性系统稳定性进行研究,避免了求解 Hamilton-Jacobi 不等式问题。文献 [110] 利用无源性设计了复合切换定律和状态反馈控制器,解决了切换非线性系统的输出跟踪控制问题。

本章将利用系统的无源性,基于平均驻留时间的方法,考虑一类具有无源和非无源子系统的不确定切换非线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题。

### 2.1 带有不确定性的切换非线性系统的描述及预备知识

考虑具有以下形式的切换非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{z} = p_{\sigma(t)}(z, x) + q_{\sigma(t)}(z, x) \omega \\ \dot{x} = f_{\sigma(t)}(z, x) + \Delta f_{\sigma(t)}(t, z, x) + g_{\sigma(t)}(z, x) u_{\sigma(t)} + c_{\sigma(t)}(z, x) \omega \\ y = h_{\sigma(t)}(z, x) + d_{\sigma(t)}(z, x) \omega \end{cases} \quad (2-1)$$

其中  $z \in \mathbb{R}^{n-m}$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $\omega$  表示干扰输入,并且  $\omega \in L_2[0, \infty)$ , 也即  $\int_0^\infty |\omega(t)|^2 dt < \infty$ ,  $u_\sigma \in \mathbb{R}^m$  是控制输入,  $y$  是控制输出, 定义右连续函数  $\sigma: \mathbb{R}^+ \rightarrow l_N = \{1, 2, \dots, N\}$  是切换规律,  $p_{\sigma(t)}$ ,  $f_{\sigma(t)}$ ,  $g_{\sigma(t)}$ ,  $h_{\sigma(t)}$  是光滑函数,  $q_{\sigma(t)}$ ,  $c_{\sigma(t)}$ ,  $d_{\sigma(t)}$  是有界光滑函数, 而  $\Delta f_{\sigma(t)}$  表示不确定非线性函数。特别地,  $p_{\sigma(t)}(0, 0) = 0$ ,  $f_{\sigma(t)}(0, 0) = 0$ ,  $h_{\sigma(t)}(0, 0) = 0$ 。在理想状态下, 子系统的切换信号  $\sigma(t)$  在如下切换序列内定义:

$$\Sigma = \left\{ \left( z_0^T, x_0^T \right)^T; (t_0, \sigma(t_0)), (t_1, \sigma(t_1)), (t_2, \sigma(t_2)), \dots, (t_k, \sigma(t_k)), k \in l_N \right\}$$

其中  $t_0$  和  $(z_0^T, x_0^T)^T$  分别是初始时间和初始状态,  $(t_k, \sigma(t_k))$  表示第  $\sigma(t_k)$  个子系统

在  $t \in [t_k, t_{k+1})$  中被激活。不失一般性, 假定  $t_0 = 0$ 。

为了更好地理解子系统之间的切换, 在图 2-1 中展示了切换系统 (2-1) 运行时的流程图。

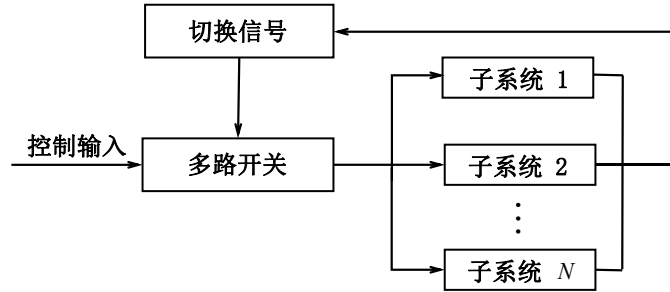


图 2-1 切换系统流程图

Fig 2-1 The block diagram of the switched system

基于文献 [111–114], 给出如下一些定义和假设。

**假设 2.1** 对于  $z \in \mathbb{R}^{n-m}$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ , 以及常数  $a_1, a_2, a_3 > 0, \mu \geq 1$ , 存在一阶连续可导的存储函数  $W_i(z, x), i \in l_N$ , 使得以下条件成立:

$$a_1(\|z\| + \|x\|)^2 \leq W_i(z, x) \leq a_2(\|z\| + \|x\|)^2 \quad (2-2)$$

$$\left\| \frac{\partial W_i(z, x)}{\partial x} \right\| \leq a_3 \|x\|, \quad \left\| \frac{\partial W_i(z, x)}{\partial z} \right\| \leq a_3 \|z\| \quad (2-3)$$

$$W_i(z, x) \leq \mu W_j(z, x), \quad i, j \in l_N \quad (2-4)$$

其中  $\|\cdot\|$  表示欧氏空间中的向量范数。

**注解 2.1** 存储函数又称为能量存储函数, 其概念来源于电路系统, 即描述电路系统对系统能量的存储情况, 是光滑可微的正定函数, 即能量的供给大于能量损耗。由于无源性与系统的鲁棒性能密切相关, 在某些负反馈扰动下, 存储函数有资格作为 Lyapunov 函数用于稳定性问题分析。

**假设 2.2** 对于  $\forall i \in l_N$ , 不确定函数  $\Delta f_i(t, z, x)$  满足  $\|\Delta f_i(t, z, x)\| \leq \zeta(t)(\|z\| + \|x\|)$ , 并且  $\int_{t_0}^t \zeta(\tau) d\tau \leq \kappa(t - t_0) + \eta$ , 其中  $\zeta(t)$  是非负函数,  $\kappa$  和  $\eta$  是非负常数。

**定义 2.1** 令  $W_i(z, x) = U_i(z) + V_i(x)$ , 其中  $U_i$  和  $V_i$  是光滑函数, 并且  $L_{f_i} V_i(x) = \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} f_i(x)$ ,  $L_{g_i} V_i(x) = \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} g_i(x)$ ,  $L_{p_i} U_i(z) = \frac{\partial U_i(z)}{\partial z} p_i(x)$ 。对于第  $i$  个子系统, 如果

$$L_{f_i} V_i(x) \leq 0, \quad L_{p_i} U_i(z) \leq 0, \quad L_{g_i} V_i(x) = h_i(z, x) \quad (2-5)$$

成立, 则称该子系统是无源的; 如果第  $i$  个子系统不满足 (2-5) 式, 且存在常数  $\lambda > 0$  满足

$$L_{f_i} V_i(x) + L_{p_i} U_i(z) \leq \lambda W_i(z, x) \quad (2-6)$$

则称该子系统是非无源的。

对于切换系统 (2-1) 的子系统, 根据定义 2.1 可以分为以下两种情况:

- i) 第  $i$  个闭环子系统是无源的, 记为  $i \in I_p \subset I_N$ ;
- ii) 第  $i$  个闭环子系统是非无源的, 记为  $i \in I_n = I_N - I_p$ .

**定义 2.2** 定义  $N_\sigma(\tau, t)$  是  $\sigma(t)$  在区间  $(\tau, t)$  上的切换次数, 其中  $\sigma(t)$  是切换信号, 并且  $0 < \tau < t$ . 如果存在  $N_0 \geq 0$  和  $\tau_a > 0$ , 满足

$$N_\sigma(\tau, t) \leq N_0 + \frac{t - \tau}{\tau_a}$$

则称  $\tau_a$  是平均驻留时间,  $N_0$  是震颤界。

在控制系统研究中, 平均驻留时间的概念通常用于识别具有某些理想特性的切换信号。

**定义 2.3** 对于任意  $0 \leq T_1 < T_2$ , 当无源子系统在区间  $[T_1, T_2]$  上处于激活状态时, 定义  $T_{p[T_1, T_2]}$  为激活总时间, 并记切换系统的无源率为  $r_{p[T_1, T_2]} = \frac{T_{p[T_1, T_2]}}{T_2 - T_1}$ , 显然  $0 < r_{p[T_1, T_2]} \leq 1$ .

本章将研究系统 (2-1) 的鲁棒  $H_\infty$  控制问题, 对此有如下定义:

**定义 2.4** 对于任意的常数  $\gamma > 0$ , 对于每个子系统的控制定律  $u_i = u_i(z, x)$  并且  $u_i(0, 0) = 0, i = 1, \dots, n$ . 在切换信号  $\sigma(t)$  下, 存在正常数  $c$  和  $\lambda$ , 系统 (2-1) 具有如下定义:

- a) 对于所有允许的不确定性, 当  $\omega(t) \equiv 0$  时, 如果有

$$\|z(t)\| + \|x(t)\| \leq ce^{-\lambda(t-t_0)}(\|z(t_0)\| + \|x(t_0)\|), \quad t \geq t_0$$

成立, 则称闭环系统 (2-1) 是全局鲁棒指数稳定的。

- b) 对于实值函数  $\beta(z, x)$  且  $\beta(0, 0) = 0$ , 如果存在  $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$ , 使得

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} y^T(t) y(t) dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty \omega^T(t) \omega(t) dt + \beta(z_0, x_0)$$

成立, 则称闭环系统 (2-1) 具有加权  $L_2$ -增益水平  $\gamma$ .

**定义 2.5** 考虑非线性系统

$$\begin{cases} \dot{z} = p_{\sigma(t)}(z, x) \\ \dot{x} = f_{\sigma(t)}(z, x) \\ y = h_{\sigma(t)}(z, x) \end{cases} \quad (2-7)$$

在区间  $[t^*, t^* + \tau]$  中, 如果存在正常数  $\delta$ , 当  $0 < s \leq \tau$  时, 有  $\|y(t+s)\| \leq \delta$ , 那么

存在正常数  $c$  和  $\bar{\lambda}$ , 使得  $\|z(t)\| + \|x(t)\| \leq ce^{-\bar{\lambda}(t-t^*)}(\|z(t^*)\| + \|x(t^*)\|)$  成立, 则称系统 (2-7) 在小时间区间内是指数可测的。

**注解 2.2** 文献 [115] 已经提出了系统在小时间区间内指数可测就可以确保切换系统的渐近稳定性。本章中定义系统在小时间区间内是指数可测的, 测度为  $\bar{\lambda}$ , 目的是用于研究系统 (2-1) 的全局鲁棒指数稳定性。

**注解 2.3** 下面验证系统 (2-7) 在小时间区间内是指数可测的。令

$$W(t) = z^T(t)Q_1z(t) + x^T(t)Q_2x(t)$$

其中  $Q_1$  和  $Q_2$  为正定矩阵, 并且

$$l_1 = \lambda_{\min}\{Q_1, Q_2\}, \quad l_2 = \lambda_{\max}\{Q_1, Q_2\}$$

于是

$$l_1(\|z\| + \|x\|)^2 \leq z^T Q_1 z + x^T Q_2 x \leq l_2(\|z\| + \|x\|)^2 \quad (2-8)$$

存在正常数  $\delta$  和  $\bar{\lambda}$ , 满足以下条件:

$$2z^T Q_1 p(z, x) + 2x^T Q_2 f(z, x) + (\delta + 2\bar{\lambda} - \|y(t+s)\|)(z^T Q_1 z + x^T Q_2 x) \leq 0 \quad (2-9)$$

将  $W(t)$  沿系统 (2-7) 的轨迹关于时间求导, 由 (2-9) 得

$$\frac{dW(t)}{dt} = 2z^T Q_1 p(z, x) + 2x^T Q_2 f(z, x) \leq (\|y(t+s)\| - \delta - 2\bar{\lambda})W(t)$$

当  $t \in [t^*, t^* + \tau]$  时, 如果  $\|y(t+s)\| \leq \delta$  成立, 得到

$$\frac{dW(t)}{dt} \leq -2\bar{\lambda}W(t), \quad t \in [t^*, t^* + \tau] \quad (2-10)$$

由 (2-8) 式和 (2-10) 式, 得到

$$W(t) \leq e^{-2\bar{\lambda}(t-t^*)}W(t^*)$$

因此,

$$l_1(\|z(t)\| + \|x(t)\|)^2 \leq l_2 e^{-2\bar{\lambda}(t-t^*)}(\|z(t^*)\| + \|x(t^*)\|)^2, \quad t \in [t^*, t^* + \tau]$$

即

$$\|z(t)\| + \|x(t)\| \leq ce^{-\bar{\lambda}(t-t^*)}(\|z(t^*)\| + \|x(t^*)\|), \quad c = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}}, t \in [t^*, t^* + \tau]$$

根据定义 2.5, 系统 (2-7) 在小时间区间内是指数可测的。

**引理 2.1** 如果系统 (2-7) 在小时间区间内指数可测, 测度为  $\bar{\lambda}$ , 并且存在  $k_0 > 0$ , 使得

$$\|y(z(s), x(s))\|^2 \leq \frac{k_0}{\tau} e^{-2\bar{\lambda}\tau}(\|z(t)\| + \|x(t)\|)^2, \quad \forall s \in [t, t + \tau]$$

其中  $t, \tau$  在定义 2.2 中给出, 则对任意的  $k \geq 0$ , 有

$$(\|z(t+\tau)\| + \|x(t+\tau)\|)^2 \leq c_1 e^{-2(\bar{\lambda}-k)\tau} (\|z(t)\| + \|x(t)\|)^2 - \int_t^{t+\tau} e^{-2(\bar{\lambda}-k)(t+\tau-\theta)} \|y(z(\theta), x(\theta))\|^2 d\theta$$

其中  $c_1 = k_0 + c^2$ ,  $t \geq t_0$ ,  $\tau > 0$ .

**证明:** 已知系统 (2-7) 以  $\bar{\lambda}$  为测度在小时间区间内是指数可测的, 并且存在常数  $k_0 > 0$ , 使得

$$\|y(z(s), x(s))\|^2 \leq \frac{k_0}{\tau} e^{-2\bar{\lambda}\tau} (\|z(t)\| + \|x(t)\|)^2, \quad \forall s \in [t, t+\tau] \quad (2-11)$$

成立。由 (2-11), 得到

$$\|y(z(s), x(s))\|^2 \leq \frac{k_0}{\tau} e^{-2(\bar{\lambda}-k)(s-t)} (\|z(t)\| + \|x(t)\|)^2, \quad \forall s \in [t, t+\tau]$$

即

$$\tau e^{2s(\bar{\lambda}-k)} (\|y(z(s), x(s))\|)^2 \leq k_0 e^{2t(\bar{\lambda}-k)} (\|z(t)\| + \|x(t)\|)^2, \quad \forall s \in [t, t+\tau]$$

应用积分中值定理, 存在一个常数  $s_0$ , 且  $t \leq s_0 \leq t+\tau$ , 使得

$$\int_t^{t+\tau} e^{2(\bar{\lambda}-k)\theta} \|y(z(\theta), x(\theta))\|^2 d\theta = \tau e^{2(\bar{\lambda}-k)s_0} \|y(z(s_0), x(s_0))\|^2 \leq k_0 e^{2t(\bar{\lambda}-k)} (\|z(t)\| + \|x(t)\|)^2$$

则

$$-k_0 e^{-2\tau(\bar{\lambda}-k)} (\|z(t)\| + \|x(t)\|)^2 \leq - \int_t^{t+\tau} e^{-2(\bar{\lambda}-k)(t+\tau-\theta)} \|y(z(\theta), x(\theta))\|^2 d\theta \quad (2-12)$$

由于系统 (2-7) 在小时间区间内是指数可测的, 则对于  $t^* \leq t$ ,  $0 < \tau$ ,  $0 < s \leq \tau$ , 有  $\|y(t+s)\| \leq \delta$  成立, 并且

$$\|z(t)\| + \|x(t)\| \leq c e^{-\bar{\lambda}\tau} (\|z(t^*)\| + \|x(t^*)\|), \quad t \in [t^*, t^* + \tau], \quad c = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}}$$

即

$$\|z(t+\tau)\| + \|x(t+\tau)\| \leq c e^{-\bar{\lambda}\tau} (\|z(t)\| + \|x(t)\|)$$

于是

$$(\|z(t+\tau)\| + \|x(t+\tau)\|)^2 \leq c^2 e^{-2\bar{\lambda}\tau} (\|z(t)\| + \|x(t)\|)^2 \quad (2-13)$$

对 (2-12) 式和 (2-13) 式求和, 得到

$$(\|z(t+\tau)\| + \|x(t+\tau)\|)^2 \leq c_1 e^{-2(\bar{\lambda}-k)\tau} (\|z(t)\| + \|x(t)\|)^2 - \int_t^{t+\tau} e^{-2(\bar{\lambda}-k)(t+\tau-\theta)} \|y(z(\theta), x(\theta))\|^2 d\theta$$

其中  $c_1 = k_0 + c^2$ . □

## 2.2 主要研究结果

在本节中，我们将分两部分讨论系统 (2-1)：第 I 部分：当  $\omega \equiv 0$  时，对于所有可允许的不确定性，分析系统 (2-1) 的全局鲁棒指数稳定性；第 II 部分：当  $\omega \in L_2[0, \infty)$  时，分析系统 (2-1) 的加权  $L_2$ -增益水平。

### 2.2.1 稳定性分析

**定理 2.1** 若假设 2.1 和假设 2.2 成立，令正常数  $\tau_a$  和  $r$  分别为任意给定的平均驻留时间和无源率，对于所有允许的不确定性，当  $u_i = 0$  时，若系统 (2-1) 在小时间区间内是指数可测的，且满足  $\bar{\lambda} \geq \frac{1}{2} \left( \lambda^* - \frac{a_3 \kappa}{a_1} \right)$ ，其中  $\lambda^* = \frac{\lambda_1}{r} + \frac{\lambda}{r} + \frac{\ln \mu \xi}{r \tau_a} + \frac{a_3 \kappa}{r a_1} - \lambda$ ， $\xi = e^{\frac{a_3 \eta}{a_1}}$ ， $\lambda_1 > 0$ ，并且  $c \leq \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \xi$ ，设计控制器

$$u_i(x) = \begin{cases} -k_i(W_i(z, x), \tau_a, r) (L_{g_i} V_i(x))^T, & i \in I_p \\ 0, & i \in I_n \end{cases} \quad (2-14)$$

其中

$$k_i(W_i(z, x), \tau_a, r) = \begin{cases} \lambda^* \left( \|L_{g_i} V_i(x)\|^2 \right)^{-1} W_i(z, x), & \|L_{g_i} V_i(x)\| > \delta \\ 0, & \|L_{g_i} V_i(x)\| \leq \delta \end{cases}$$

则当  $\omega \equiv 0$  时，在适当的切换信号下，切换系统 (2-1) 是全局鲁棒指数稳定的。

**证明：** 引入存储函数

$$W_\sigma(z(t), x(t)) = U_\sigma(z(t)) + V_\sigma(x(t))$$

其中  $U_\sigma$  和  $V_\sigma$  是光滑函数。

由于控制器  $u_i$  为分段函数，为方便叙述，当  $i \in I_p$  时，构建集合  $S_i = \{t : \|L_{g_i} V_i(x(t))\| \leq \delta\}$ ，将  $i \in I_p$  分为：i)  $S_i = \emptyset$ ，ii)  $S_i \neq \emptyset$ 。下面将分情况来研究系统的稳定性。

情况 i)：当  $i \in I_p, S_i = \emptyset$  时，对上述多项式函数沿着系统 (2-1) 关于时间求导得到：

$$\frac{\partial W_i(z(t), x(t))}{\partial t} = \frac{\partial U_i(z)}{\partial z} p_i + \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} (f_i + \Delta f_i + g_i u_i) \quad (2-15)$$

将控制器 (2-14) 代入到 (2-15) 中，由 (2-2), (2-3) 和 (2-6)，我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_i(z(t), x(t))}{\partial t} &\leq L_{p_i} U_i(z) + L_{f_i} V_i(x) + \frac{a_3}{a_1} W_i(z, x) \zeta(t) \\ &\quad - \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} \frac{g_i \lambda^* W_i(z, x) (L_{g_i} V_i(x))^T}{\|L_{g_i} V_i(x)\|^2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\leq \frac{a_3}{a_1} W_i(z, x) \zeta(t) - \lambda^* W_i(z, x) \\
&= -(\lambda^* - \frac{a_3}{a_1} \zeta(t)) W_i(z, x)
\end{aligned} \tag{2-16}$$

其中

$$\frac{\partial V_i(x)}{\partial x} \Delta f_i \leq a_3 \Delta f_i \|x\| \leq a_3 \Delta f_i (\|x\| + \|z\|) \leq a_3 \zeta(t) (\|x\| + \|z\|)^2 \leq \frac{a_3}{a_1} W_i(z, x) \zeta(t)$$

类似地, 当  $i \in I_n$  时, 根据 (2-2), (2-3) 和 (2-5), 得到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_i(z(t), x(t))}{\partial t} &\leq \lambda W_i(z, x) + \frac{a_3}{a_1} W_i(z, x) \zeta(t) \\
&= (\lambda + \frac{a_3}{a_1} \zeta(t)) W_i(z, x)
\end{aligned} \tag{2-17}$$

下面对 (2-16) 和 (2-17) 关于  $t$  在区间  $[t_k, t_{k+1})$  上求积分

$$W_{i_k}(z(t), x(t)) \leq \tilde{\phi}_{i_k}(t, t_k) W_{i_k}(z(t_k), x(t_k)), \quad t \in [t_k, t_{k+1})$$

其中

$$\tilde{\phi}_{i_k}(t, t_k) = \begin{cases} e^{-\lambda^*(t-t_k) + \frac{a_3}{a_1} \int_{t_k}^t \zeta(\tau) d\tau}, & i_k \in I_p \\ e^{\lambda(t-t_k) + \frac{a_3}{a_1} \int_{t_k}^t \zeta(\tau) d\tau}, & i_k \in I_n \end{cases}$$

定义

$$\phi_{i_k}(t, t_k) := \begin{cases} \xi e^{-a^*(t-t_k)}, & i_k \in I_p \\ \xi e^{a(t-t_k)}, & i_k \in I_n \end{cases}$$

其中  $a^* = \lambda^* - \frac{a_3 K}{a_1}$ ,  $a = \lambda + \frac{a_3 K}{a_1}$ ,  $\xi = e^{\frac{a_3 \eta}{a_1}}$ . 由假设 2.2, 得到  $\tilde{\phi}_{i_k}(t, t_k) \leq \phi_{i_k}(t, t_k)$ , 于是

$$W_{i_k}(z(t), x(t)) \leq \phi_{i_k}(t, t_k) W_{i_k}(z(t_k), x(t_k)), \quad t \in [t_k, t_{k+1})$$

选择分段函数

$$W(z(t), x(t)) = W_{i_k}(z(t), x(t))$$

其中  $W(z(t_0), x(t_0)) = W_{i_0}(z(t_0), x(t_0))$ .

对  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , 由  $\phi_{i_k}(t, \tau) \phi_{i_{k-1}}(\tau, s) = \xi \phi_{i_{k-1}}(t, s)$ , 有

$$\begin{aligned}
W(z(t), x(t)) &= W_{i_k}(z(t), x(t)) \\
&\leq \phi_{i_k}(t, t_k) W_{i_k}(z(t_k), x(t_k)) \\
&\leq \phi_{i_k}(t, t_k) \mu W_{i_{k-1}}(z(t_k), x(t_k)) \\
&\leq \phi_{i_k}(t, t_k) \mu \phi_{i_{k-1}}(t_k, t_{k-1}) W_{i_{k-1}}(z(t_{k-1}), x(t_{k-1})) \\
&\dots \\
&\leq \phi_{i_k}(t, t_k) \dots \phi_{i_0}(t_1, t_0) \mu^k W_{i_0}(z(t_0), x(t_0)) \\
&= \xi^k \phi(t, t_0) \mu^k W_{i_0}(z(t_0), x(t_0))
\end{aligned} \tag{2-18}$$

$$= \xi e^{(N_0 + \frac{t-t_0}{\tau_a}) \ln \mu \xi - a^* T_{p[t_0, t]} + a T_{n[t_0, t]}} W(z(t_0), x(t_0))$$

由  $\lambda^* = \frac{\lambda_1}{r} + \frac{\lambda}{r} + \frac{\ln \mu \xi}{r \tau_a} + \frac{a_3 \kappa}{r a_1} - \lambda$ , 有  $\lambda_1 = \lambda^* r - \lambda - \frac{\ln \mu \xi}{\tau_a} - \frac{a_3 \kappa}{a_1} + \lambda r$ , 于是

$$\left(N_0 + \frac{t-t_0}{\tau_a}\right) \ln \mu \xi - a^* T_{p[t_0, t]} + a T_{n[t_0, t]} = N_0 \ln \mu \xi - \lambda_1 (t - t_0) \quad (2-19)$$

将 (2-19) 代入到 (2-18) 中, 得到

$$W(z(t), x(t)) \leq \xi^{N_0+1} \mu^{N_0} e^{-\lambda_1 (t-t_0)} W(z(t_0), x(t_0))$$

由 (2-2), 可得

$$a_1 (\|z(t)\| + \|x(t)\|)^2 \leq \xi^{N_0+1} \mu^{N_0} a_2 e^{-\lambda_1 (t-t_0)} (\|z(t_0)\| + \|x(t_0)\|)^2$$

即

$$\|z(t)\| + \|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \xi^{N_0+1} \mu^{N_0} e^{-\frac{\lambda_1}{2} (t-t_0)} (\|z(t_0)\| + \|x(t_0)\|)$$

情况 ii): 当  $i \in I_p, S_i \neq \emptyset$  时, 假设

$$\{t : \|L_{g_i} V_i(x(t))\| \leq \delta\} = [t_{i_1}, t'_{i_1}] \cup [t_{i_2}, t'_{i_2}] \cup \dots \subset [t_0, t]$$

由定义 2.5, 可知  $\|z(t+\tau)\| + \|x(t+\tau)\| \leq c e^{-\bar{\lambda} \tau} (\|z(t)\| + \|x(t)\|)$ , 于是

$$\begin{aligned} \|z(t'_{i_k})\| + \|x(t'_{i_k})\| &\leq c e^{-\bar{\lambda} (t'_{i_k} - t_{i_k})} (\|z(t_{i_k})\| + \|x(t_{i_k})\|) \\ &\leq \sqrt{\frac{a_1 \xi}{a_2}} e^{-\frac{a^*}{2} (t'_{i_k} - t_{i_k})} (\|z(t_{i_k})\| + \|x(t_{i_k})\|) \end{aligned}$$

由 (2-2), 得到

$$W_{i_k}(z(t'_{i_k}), x(t'_{i_k})) \leq \xi e^{-a^* (t'_{i_k} - t_{i_k})} W_{i_k}(z(t_{i_k}), x(t_{i_k}))$$

类似于情况 i), 有

$$\|z(t)\| + \|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \xi^{N_0+1} \mu^{N_0} e^{-\frac{\lambda_1}{2} (t-t_0)} (\|z(t_0)\| + \|x(t_0)\|)$$

因此, 闭环系统 (2-1) 对所有允许的不确定性是指数稳定的。  $\square$

## 2.2.2 $L_2$ -增益分析

在本小节中, 将通过分析  $L_2$ -增益水平  $\gamma$  研究系统 (2-1) 的  $H_\infty$  性能。

**定理 2.2** 若假设 2.1 和假设 2.2 成立, 令正常数  $\tau_a, r$  和  $\gamma$  分别表示为平均驻留时间、无源率和干扰衰减水平, 对于所有允许的不确定性和扰动输入, 存在正常数  $k$  满足  $k = \bar{\lambda} - \frac{1}{2} \left( \lambda^* - \frac{a_3 \kappa}{a_1} - \frac{a_3^2 \rho^2}{4 a_1 \gamma^2} \right)$ , 其中  $\lambda^* = \frac{\lambda_1}{r} + \frac{\lambda}{r} + \frac{\ln \mu \xi}{r \tau_a} + \frac{a_3 \kappa}{r a_1} - \lambda$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 + \frac{a_3^2 \rho^2}{4 a_1 \gamma^2}$ ,  $\lambda_2 > 0$ , 并且  $a_2 c^2 \leq (a_1 - k_0) e^{\frac{a_3 \eta}{a_1}}$ , 设计如下控制器

$$u_i(x) = \begin{cases} -k_i(W_i(z, x), \tau_a, r, \gamma) \left( L_{g_i} V_i(x) \right)^T, & i \in I_p \\ -\left( L_{g_i} V_i(x) \right)^T, & i \in I_n \end{cases} \quad (2-20)$$

其中

$$k_i(W_i(z, x), \tau_a, r, \gamma) = \begin{cases} \frac{\lambda^* W_i(z, x) + y_i y_i^T}{\|L_{g_i} V_i(x)\|^2}, & \|L_{g_i} V_i(x)\| > \delta \\ 0, & \|L_{g_i} V_i(x)\| \leq \delta \end{cases}$$

则当  $\omega \in L_2[0, \infty)$  时, 对于所有可允许的不确定性, 切换系统 (2-1) 具有加权  $L_2$ -增益水平  $\gamma$ .

**证明:** 引入存储函数

$$W_\sigma(z(t), x(t)) = U_\sigma(z(t)) + V_\sigma(x(t))$$

其中  $U_\sigma$  和  $V_\sigma$  是光滑函数。基于定理 2.1, 对上述函数  $W_i(z, x)$  沿着系统 (2-1) 的轨迹关于  $t$  求导得到

$$\frac{\partial W_i(z(t), x(t))}{\partial t} = \frac{\partial U_i(z)}{\partial z} (p_i + q_i \omega) + \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} (f_i + \Delta f_i + g_i u_i + c_i \omega) \quad (2-21)$$

当  $i \in I_p, S_i = \emptyset$  时, 类似于定理 2.1 的证明过程, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_i(z(t), x(t))}{\partial t} &\leq -(\lambda^* - \frac{a_3 \xi}{a_1}) W_i(z, x) + \frac{\partial U_i(z)}{\partial z} q_i \omega + \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} c_i \omega - y_i^T y_i \\ &\leq -\left( \lambda^* - \frac{a_3}{a_1} \zeta(t) \right) W_i(z, x) + (a_3 \|z\| q_i + a_3 \|x\| c_i) \|\omega\| - y_i^T y_i \\ &\leq -\left( \lambda^* - \frac{a_3}{a_1} \zeta(t) \right) W_i(z, x) + \frac{a_3^2 \rho^2}{4\gamma^2} (\|z\| + \|x\|)^2 + \gamma^2 \|\omega\|^2 - y_i^T y_i \\ &\leq -\left( \lambda^* - \frac{a_3}{a_1} \zeta(t) - \frac{a_3^2 \rho^2}{4a_1 \gamma^2} \right) W_i(z, x) + \gamma^2 \omega^T(t) \omega(t) - y_i^T y_i \end{aligned} \quad (2-22)$$

其中  $\rho = \max\{q_i, c_i\}$ .

当  $i \in I_p, S_i \neq \emptyset$  时, 在区间  $[t_{i_k}, t'_{i_k}]$  上, 有

$$\begin{aligned} (\|z(t'_{i_k})\| + \|x(t'_{i_k})\|)^2 &\leq c_1 e^{-2(\bar{\lambda}-k)(t'_{i_k}-t_{i_k})} (\|z(t_{i_k})\| + \|x(t_{i_k})\|)^2 \\ &\quad - \frac{\xi}{a_2} \int_{t_{i_k}}^{t'_{i_k}} e^{-2(\bar{\lambda}-k)(t'_{i_k}-\theta)} y_i^T y_i d\theta \end{aligned}$$

由 (2-2), 得到

$$\begin{aligned} &W_{i_k}(z(t'_{i_k}), x(t'_{i_k})) \\ &\leq (c^2 a_2 + \xi k_0) e^{-2(\bar{\lambda}-k)(t'_{i_k}-t_{i_k})} (\|z(t_{i_k})\| + \|x(t_{i_k})\|)^2 - \int_{t_{i_k}}^{t'_{i_k}} \xi e^{-2(\bar{\lambda}-k)(t'_{i_k}-\theta)} y_{i_k}^T y_{i_k} d\theta \\ &\leq \frac{c^2 a_2 + \xi k_0}{a_1} e^{-2(\bar{\lambda}-k)(t'_{i_k}-t_{i_k})} W_{i_k}(z(t_{i_k}), x(t_{i_k})) - \int_{t_{i_k}}^{t'_{i_k}} \xi e^{-2(\bar{\lambda}-k)(t'_{i_k}-\theta)} y_{i_k}^T y_{i_k} d\theta \end{aligned} \quad (2-23)$$

由于  $k = \bar{\lambda} - \frac{1}{2} \left( \lambda^* - \frac{a_3 \kappa}{a_1} - \frac{a_3^2 \rho^2}{4a_1 \gamma^2} \right)$ , 有  $\bar{\lambda} - k = \frac{1}{2} \left( \lambda^* - \frac{a_3 \kappa}{a_1} - \frac{a_3^2 \rho^2}{4a_1 \gamma^2} \right) = \frac{1}{2} a^* - \frac{a_3^2 \rho^2}{4a_1 \gamma^2}$ . 将  $\bar{\lambda} - k$  代入 (2-23), 得到

$$W_{i_k}(z(t'_{i_k}), x(t'_{i_k})) \leq \frac{c^2 a_2 + \xi k_0}{a_1} e^{-\left(a^* - \frac{a_3^2 \rho^2}{4a_1 \gamma^2}\right)(t'_{i_k} - t_{i_k})} W_{i_k}(z(t_{i_k}), x(t_{i_k})) \\ + \int_{t_{i_k}}^{t'_{i_k}} \xi e^{-\left(a^* - \frac{a_3^2 \rho^2}{4a_1 \gamma^2}\right)(t'_{i_k} - \theta)} (\gamma^2 \omega^2(\theta) - y_{i_k}^T y_{i_k}) d\theta$$

对于  $a_2 c^2 \leq (a_1 - k_0) e^{\frac{a_3 \eta}{a_1}} = (a_1 - k_0) \xi = a_1 \xi - k_0 \xi$ , 它可以转化为  $\frac{c^2 a_2 + \xi k_0}{a_1} \leq \xi$ , 于是

$$W_{i_k}(z(t'_{i_k}), x(t'_{i_k})) \leq \xi e^{-\left(a^* - \frac{a_3^2 \rho^2}{4a_1 \gamma^2}\right)(t'_{i_k} - t_{i_k})} W_{i_k}(z(t_{i_k}), x(t_{i_k})) \\ + \int_{t_{i_k}}^{t'_{i_k}} \xi e^{-\left(a^* - \frac{a_3^2 \rho^2}{4a_1 \gamma^2}\right)(t'_{i_k} - \theta)} (\gamma^2 \omega^2(\theta) - y_{i_k}^T y_{i_k}) d\theta \quad (2-24)$$

当  $i \in I_n$  时, 类似得到

$$\frac{\partial W_i(z(t), x(t))}{\partial t} \leq \left( \lambda + \frac{a_3 \xi}{a_1} \right) W_i(z, x) + \frac{\partial U_i(z)}{\partial z} q_i \omega + \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} c_i \omega - y_i^T y_i \\ \leq \left( \lambda + \frac{a_3}{a_1} \zeta(t) + \frac{a_3^2 \rho^2}{4a_1 \gamma^2} \right) W_i(z, x) + \gamma^2 \omega^T(t) \omega(t) - y_i^T y_i \quad (2-25)$$

令  $\tilde{a}^* = a^* - \frac{a_3^2 \rho^2}{4a_1 \gamma^2}$ ,  $\tilde{a} = a + \frac{a_3^2 \rho^2}{4a_1 \gamma^2}$ ,  $\Gamma_i(t) = \gamma^2 \omega^T(t) \omega(t) - y_i^T y_i$ , 其中  $a^* = \lambda^* - \frac{a_3 \kappa}{a_1}$ ,  $a = \lambda + \frac{a_3 \kappa}{a_1}$ ,  $\xi = e^{\frac{a_3 \eta}{a_1}}$ ,  $\int_{t_0}^t \zeta(\tau) d\tau \leq \kappa(t - t_0) + \eta$ . 当  $i \in I_p, S_i = \emptyset$  时, 得到

$$W_{i_k}(z(t), x(t)) \leq e^{\int_{t_k}^t \left( \lambda^* - \frac{a_3}{a_1} \zeta(s) - \frac{a_3^2 \rho^2}{4a_1 \gamma^2} \right) ds} [W_{i_k}(z(t_k), x(t_k)) \\ + \int_{t_k}^t \Gamma_{i_k}(\tau) e^{-\int_{t_k}^{\tau} \left( \lambda^* - \frac{a_3}{a_1} \zeta(s) - \frac{a_3^2 \rho^2}{4a_1 \gamma^2} \right) ds} d\tau] \\ \leq \xi e^{-\tilde{a}^*(t-t_k)} W_{i_k}(z(t_k), x(t_k)) + \int_{t_k}^t e^{-\left( \lambda^* - \frac{a_3}{a_1} \zeta(t) - \frac{a_3^2 \rho^2}{4a_1 \gamma^2} \right)(t-\tau) + \frac{a_3}{a_1} \eta} \Gamma_{i_k}(\tau) d\tau \\ \leq \xi e^{-\tilde{a}^*(t-t_k)} W_{i_k}(z(t_k), x(t_k)) + \int_{t_k}^t \xi e^{-\tilde{a}^*(t-\tau)} \Gamma_{i_k}(\tau) d\tau \quad (2-26)$$

当  $i \in I_p, S_i \neq \emptyset$  时, 有

$$W_{i_k}(z(t), x(t_k)) \leq \xi e^{-\tilde{a}^*(t-t_k)} W_{i_k}(t_k) + \int_{t_k}^t \xi e^{-\tilde{a}^*(t-\tau)} \Gamma_{i_k}(\tau) d\tau \quad (2-27)$$

当  $i \in I_n$  时, 有

$$W_{i_k}(z(t), x(t)) \leq e^{\int_{t_k}^t \left( \lambda + \frac{a_3}{a_1} \zeta(s) + \frac{a_3^2 \rho^2}{4a_1 \gamma^2} \right) ds} [W_{i_k}(z(t_k), x(t_k))$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{t_k}^t \Gamma_{i_k}(\tau) e^{-\int_{t_k}^{\tau} \left( \lambda + \frac{a_3}{a_1} \zeta(s) + \frac{a_3^2 \rho^2}{4a_1 \gamma^2} \right) ds} d\tau \Bigg] \\
 & \leq \xi e^{\tilde{a}(t-t_k)} W_{i_k}(z(t_k), x(t_k)) + \int_{t_k}^t e^{\left( \lambda + \frac{a_3}{a_1} \zeta(t) + \frac{a_3^2 \rho^2}{4a_1 \gamma^2} \right)(t-\tau) + \frac{a_3}{a_1} \eta} \Gamma_{i_k}(\tau) d\tau \quad (2-28) \\
 & \leq \xi e^{\tilde{a}(t-t_k)} W_{i_k}(z(t_k), x(t_k)) + \int_{t_k}^t \xi e^{\tilde{a}(t-\tau)} \Gamma_{i_k}(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 & e^{\int_{t_k}^t \left( \lambda^* - \frac{a_3}{a_1} \zeta(s) - \frac{a_3^2 \rho^2}{4a_1 \gamma^2} \right) ds} \int_{t_k}^t \Gamma_{i_k}(\tau) e^{-\int_{t_k}^{\tau} \left( \lambda^* - \frac{a_3}{a_1} \zeta(s) - \frac{a_3^2 \rho^2}{4a_1 \gamma^2} \right) ds} d\tau \\
 & = \int_{t_k}^t \Gamma_{i_k}(\tau) e^{\int_{\tau}^t \left( \lambda^* - \frac{a_3}{a_1} \zeta(s) - \frac{a_3^2 \rho^2}{4a_1 \gamma^2} \right) ds} d\tau \\
 & \leq \int_{t_k}^t \Gamma_{i_k}(\tau) e^{\left( \lambda^* - \frac{a_3}{a_1} \zeta - \frac{a_3^2 \rho^2}{4a_1 \gamma^2} \right)(t-\tau) + \frac{a_3}{a_1} \eta} d\tau \\
 & = \int_{t_k}^t \xi e^{-\tilde{a}^*(t-\tau)} \Gamma_{i_k}(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

结合 (2-26), (2-27) 和 (2-28), 得到

$$W_{i_k}(z(t), x(t)) \leq \psi_{i_k}(t, t_k) W_{i_k}(z(t_k), x(t_k)) + \int_{t_k}^t \psi_{i_k}(t, \tau) \Gamma_{i_k}(\tau) d\tau, \quad t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (2-29)$$

其中

$$\psi_{i_k}(t, \tau) = \begin{cases} \xi e^{-\tilde{a}^*(t-\tau)}, & i_k \in I_p \\ \xi e^{\tilde{a}(t-\tau)}, & i_k \in I_n \end{cases}$$

选择分段函数  $W(z(t), x(t)) = W_{i_k}(z(t), x(t))$ ,  $t \in [t_k, t_{k+1})$ . 当时间  $t$  满足  $t_0 < t_1 < \cdots < t_l < t < t_{l+1} < \cdots$  时, 有  $\psi_{i_k}(t, \tau) \psi_{i_{k-1}}(\tau, s) = \xi \psi_{i_{k-1}}(t, s)$ ,  $i \in I_N$ , 并且由 (2-29), 得到

$$\begin{aligned}
 W(t) & = W_{i_k}(z(t), x(t)) \\
 & \leq \psi_{i_k}(t, t_k) W_{i_k}(z(t_k), x(t_k)) + \int_{t_k}^t \psi_{i_k}(t, \tau) \Gamma_{i_k}(\tau) d\tau \\
 & \leq \psi_{i_k}(t, t_k) \mu W_{i_{k-1}}(z(t_k), x(t_k)) + \int_{t_k}^t \psi_{i_k}(t, \tau) \Gamma_{i_k}(\tau) d\tau \\
 & \leq \psi_{i_k}(t, t_k) \mu [\psi_{i_{k-1}}(t_k, t_{k-1}) W_{i_{k-1}}(z(t_{k-1}), x(t_{k-1})) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \psi_{i_{k-1}}(t_k, \tau) \Gamma_{i_{k-1}}(\tau) d\tau] \\
 & \quad + \int_{t_k}^t \psi_{i_k}(t, \tau) \Gamma_{i_k}(\tau) d\tau \\
 & \quad \dots \\
 & \leq \psi_{i_k}(t, t_k) \cdots \psi_{i_0}(t_1, t_0) \mu^k W_{i_0}(z(t_0), x(t_0))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \psi_{i_k}(t, t_k) \cdots \psi_{i_1}(t_2, t_1) \mu^k \int_{t_0}^{t_1} \psi_{i_0}(t_1, \tau) \Gamma_{i_0}(\tau) d\tau \\
 & + \cdots + \psi_{i_k}(t, t_k) \mu \int_{t_{k-1}}^{t_k} \psi_{i_{k-1}}(t_k, \tau) \Gamma_{i_{k-1}}(\tau) d\tau + \int_{t_k}^t \psi_{i_k}(t, \tau) \Gamma_{i_k}(\tau) d\tau \\
 & = \psi_{i_k}(t, t_k) \cdots \psi_{i_0}(t_1, t_0) \mu^k W_{i_0}(z(t_0), x(t_0)) \\
 & + \sum_{l=1}^k \int_{t_{l-1}}^{t_l} \xi^{k-l+1} \mu^{k-l+1} \psi_{i_{l-1}}(t, \tau) \Gamma_{i_{l-1}}(\tau) d\tau + \int_{t_k}^t \psi_{i_k}(t, \tau) \Gamma_{i_k}(\tau) d\tau \\
 & \leq \xi^{k+1} \mu^k e^{-\tilde{a}^* T_{p[t_0, t]} + \tilde{a} T_{n[t_0, t]}} W(z(t_0), x(t_0)) + \xi \int_{t_0}^t (\mu \xi)^{N_{\sigma}(\tau, t)} e^{-\tilde{a}^* T_{p[\tau, t]} + \tilde{a} T_{n[\tau, t]}} \Gamma(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

由于  $\lambda_1 = \lambda_2 + \frac{a_3^2 \rho^2}{4a_1 \gamma^2}$ , 于是有  $-\tilde{a}^* T_{p[t_0, t]} + \tilde{a} T_{n[t_0, t]} = (-\lambda_2 - \frac{\ln \mu \xi}{\tau_a})(t - t_0)$ , 则

$$0 \leq \xi^k \mu^k e^{(-\lambda_2 - \frac{\ln \mu \xi}{\tau_a})(t - t_0)} W(z(t_0), x(t_0)) + \int_{t_0}^t (\mu \xi)^{N_{\sigma}(\tau, t)} e^{(-\lambda_2 - \frac{\ln \mu \xi}{\tau_a})(t - \tau)} \Gamma(\tau) d\tau$$

即

$$0 \leq e^{(-\lambda_2 - \frac{\ln \mu \xi}{\tau_a})(t - t_0) + N_{\delta}(t, t_0) \ln(\mu \xi)} W(z(t_0), x(t_0)) + \int_{t_0}^t e^{(-\lambda_2 - \frac{\ln \mu \xi}{\tau_a})(t - \tau) + N_{\delta}(t, \tau) \ln(\mu \xi)} \Gamma(\tau) d\tau$$

将上述公式两边同时乘以  $e^{-N_{\sigma}(t_0, t) \ln \mu \xi}$ , 得到

$$0 \leq e^{(-\lambda_2 - \frac{\ln \mu \xi}{\tau_a})(t - t_0)} W(z(t_0), x(t_0)) + \int_{t_0}^t e^{(-\lambda_2 - \frac{\ln \mu \xi}{\tau_a})(t - \tau) + N_{\delta}(t_0, \tau) \ln(\mu \xi)} \Gamma(\tau) d\tau \quad (2-30)$$

显然,  $-N_{\delta}(t_0, \tau) \leq 0, \xi > 1, \mu > 1$ , 则  $e^{-N_{\delta}(t_0, \tau) \ln(\mu \xi)} \leq 1$ , 将  $\Gamma(\tau)$  和  $N_{\delta}(t_0, \tau) = \frac{\tau - t_0}{\tau_a}$  代入到 (2-30) 中, 得到

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^t e^{(-\lambda_2 - \frac{\ln \mu \xi}{\tau_a})(t - \tau) - \frac{\ln \mu \xi}{\tau_a}(\tau - t_0)} y^T(\tau) y(\tau) d\tau \\
 & \leq \gamma^2 \int_{t_0}^t e^{(-\lambda_2 - \frac{\ln \mu \xi}{\tau_a})(t - \tau)} \omega^T(\tau) \omega(\tau) d\tau + e^{(-\lambda_2 - \frac{\ln \mu \xi}{\tau_a})(t - t_0)} W(z(t_0), x(t_0))
 \end{aligned}$$

当  $\mu = 1, \xi = 1$  时, 易得

$$\int_{t_0}^{\infty} y^T(\tau) y(\tau) d\tau \leq \gamma^2 \int_{t_0}^{\infty} \omega^T(\tau) \omega(\tau) d\tau + W(z(t_0), x(t_0)).$$

当  $\mu > 1$  时, 利用积分换序可得

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-\frac{\ln \mu \xi}{\tau_a}(\tau - t_0)} y^T(\tau) y(\tau) d\tau \leq \gamma^2 \int_{t_0}^{\infty} \omega^T(\tau) \omega(\tau) d\tau + W(z(t_0), x(t_0)) \quad (2-31)$$

因此, 切换系统 (2-1) 具有加权  $L_2$ -增益水平  $\gamma$ .  $\square$

**注解 2.4** 在零初始条件下, 有  $W(0, 0) = 0$ , 由 (2-31) 式可以得到加权的  $L_2$ -增益水平  $\gamma^2 = \frac{\int_0^{\infty} e^{-\frac{\ln \mu \xi}{\tau_a}(\tau - t_0)} y^T(\tau) y(\tau) d\tau}{\int_0^{\infty} \omega^T(\tau) \omega(\tau) d\tau}$ , 其中加权  $L_2$ -增益水平  $\gamma$  越小, 系统 (2-1) 的性能越好<sup>[116, 117]</sup>。

**注解 2.5** 文献 [118] 中的系统与本文中的系统 (2-1) 类似, 但需要满足文献 [118] 中的如下条件: i)  $\gamma^2 - \gamma_3^2 - \gamma_d^2 > 0$ ; ii) 对于无界正定可微函数  $V_i(x_1), i = 1, \dots, n$ , 常数  $\gamma_1 > 0$  和  $\lambda_0 > 0$ , 使得  $\frac{\partial V_i}{\partial x_1} f_{1,i}(x_1, 0) + \frac{1}{4\gamma_1^2} \frac{\partial V_i}{\partial x_1} c_i(x_1, 0) c_i^T(x_1, 0) \frac{\partial V_i^T}{\partial x_1} + h_i^T(x_1, 0) h_i(x_1, 0) + \lambda_0 V_i \leq 0$  成立。在这里只需要  $\gamma > 0$ , 且正定可微函数  $W_i$  不需要满足条件 ii), 所以本文保守性更小。

## 2.3 仿真分析

在本节中, 将给出两个例子来证明所提出方法的有效性。

**例 2.1** 考虑具有两个进料模式的切换连续搅拌釜反应器 (CSTR) 系统<sup>[26, 74]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \frac{F_{\sigma(t)}}{V} (\xi_{1,in,\sigma(t)} - \xi_1) + K_{\sigma(t)} \varphi_{\sigma(t)}(\xi_1, \xi_2) + \omega(t) \\ \dot{\xi}_2 = \frac{F_{\sigma(t)}}{V} (\xi_{2,in,\sigma(t)} - \xi_2) - \Delta H_{\sigma(t)}(\xi_1, \xi_2) \varphi_{\sigma(t)}(\xi_1, \xi_2) + \gamma(\xi_{2c} - \xi_2) + \omega(t) \end{cases} \quad (2-32)$$

其中:  $\xi_1 \in \mathbb{R}$  表示化学物质浓度,  $\xi_{1,in,k} \in \mathbb{R}$  表示输入流中的化学物质浓度,  $\xi_2, \xi_{2,in,k} \in \mathbb{R}$  表示反应器的温度和输入流温度,  $K_k$  为化学计量系数,  $\varphi_k(\xi_1, \xi_2)$  表示反应速率,  $\frac{F_k}{V}$  表示稀释率,  $\Delta H_k(x_1, x_2)$  表示反应热量,  $\gamma_k > 0$  为传热系数,  $\xi_{2c}$  表示冷却液温度,  $\omega(t)$  表示反应物浓度对反应速率的有界扰动。

这里控制目标是使反应物浓度和温度达到恒定的参考值  $\xi_1^*, \xi_2^*$ . 令  $z = \xi_1 - \xi_1^*, x = \xi_2 - \xi_2^*, u_k = \gamma(\xi_{2c} - \xi_{2c}^*)$ , 于是系统 (2-32) 可以转化为平衡点在原点的形式:

$$\begin{cases} \dot{z} = f_{1\sigma}(z, x) + \omega(t) \\ \dot{x} = f_{2\sigma}(z, x) + \Delta f_{2\sigma}(z, x) + u_\sigma + \omega(t) \end{cases} \quad (2-33)$$

其中  $f_{1\sigma} = \frac{F_\sigma}{V} (\xi_{1,in,\sigma} - \xi_1^* - z) + K_\sigma \varphi_\sigma(z + \xi_1^*, x + \xi_2^*)$ ,  $f_{2\sigma} = \frac{F_\sigma}{V} (\xi_{2,in,\sigma} - \xi_2^* - x) + \gamma(\xi_{2c}^* - \xi_2^* - x)$ , 并且  $\Delta f_{2\sigma} = -\Delta H_\sigma(z + \xi_1^*, x + \xi_2^*) \varphi_\sigma(z + \xi_1^*, x + \xi_2^*)$ .

接下来, 设稳态点  $\xi_2^* = \xi_{2c}^* = 0 \text{ K}$ ,  $\xi_1^* = 1 \text{ mol/L}$ , 并且模拟参数  $F_1 = 4 \text{ L/s}$ ,  $\gamma = K_1 = 1$ ,  $\xi_{2in1} = \xi_{2in2} = 0 \text{ K}$ ,  $V = 1 \text{ L}$ ,  $\xi_{1in1} = \xi_{1in2} = 1 \text{ mol/L}$ ,  $\Delta H_1 = \Delta H_2 = -0.5e^{-0.5t}$ ,  $F_2 = 1 \text{ L/s}$ ,  $K_2 = 2$ ,  $\varphi_1 = ze^{-x^2}$ ,  $\varphi_2 = (z+x)e^{-x^2}$ . 定义输出  $y = 2x$ , 得到如下两个子系统:

$$\begin{cases} \dot{z} = -4z + ze^{-x^2} + \omega(t) \\ \dot{x} = -5x + 0.5ze^{-x^2-0.5t} + u_1 + \omega(t) \\ y = 2x \end{cases} \quad (2-34)$$

$$\begin{cases} \dot{z} = -z + 2(z+x)e^{-x^2} + \omega(t) \\ \dot{x} = -2x + 0.5(z+x)e^{-x^2-0.5t} + u_2 + \omega(t) \\ y = 2x \end{cases} \quad (2-35)$$

其中  $u_i, i = 1, 2$  是控制器。

不难得知  $\|\Delta f_1(t, z, x)\| \leq 0.5\|z\|$ ,  $\|\Delta f_2(t, z, x)\| \leq 0.5(\|z\| + \|x\|)$ , 所以  $\int_{t_0}^t \zeta(\tau) d\tau \leq \int_{t_0}^t 0.5d\tau \leq \kappa(t - t_0) + \eta$ , 其中  $\kappa = 1, \eta = 0.5$ .

令

$$W_1 = z^2 + 0.5x^2, \quad W_2 = z^2 + x^2$$

对于子系统 (2-34), 有

$$L_{p_1} U_1(z) = \frac{\partial U_1}{\partial z} p_1 = 2z \times (-4z + ze^{-x^2}) = -8z^2 + 2z^2 e^{-x^2} \leq 0$$

$$L_{f_1} V_1(x) = \frac{\partial V_1}{\partial x} f_1 = x \times (-5x) = -5x^2 \leq 0$$

$$L_{g_1} V_1(x) = 2x$$

对于子系统 (2-35), 有

$$L_{p_2} U_2(z) = 2z \times (-z + 2(z+x)e^{-2x}) = -2z^2 + 4z(z+x)e^{-x^2}$$

$$L_{f_2} V_2(x) = 2x \times (-2x) = -4x^2$$

$$L_{g_2} V_2(x) = 2x$$

于是,  $L_{p_2} U_2(z) + L_{f_2} V_2(x) \leq 2z^2 + 4zx - 4x^2 \leq 3z^2 \leq 3W_2(z, x)$ , 容易验证子系统 (2-34) 是无源的, 而子系统 (2-35) 是非无源的。给定常数  $a_1 = 0.5, a_2 = 2, a_3 = 2, \mu = 2, \rho = 1$  和  $\lambda = 2$ . 此外, 得到  $c = 3, \xi = e^{\frac{a_3 \eta}{a_1}}$ . 设平均停留时间  $\tau_a = 2$ , 无源率  $r = 0.5$ , 扰动衰减水平  $\gamma = 2, \lambda_2 = 1.2$ , 于是  $\lambda_1 = \lambda_2 + \frac{a_3^2 \rho^2}{4a_1 \gamma^2} =$

$1.7000, \lambda^* = \frac{\lambda_1}{r} + \frac{\lambda}{r} + \frac{\ln(\mu\xi)}{r\tau_a} + \frac{a_3 \kappa}{ra_1} - \lambda = 7.0466, \bar{\lambda} = 10(\lambda^* - \frac{a_3 \kappa}{a_1}) = 30.4657$  和

$\bar{\lambda} - c\kappa - \frac{1}{2} \left( \lambda^* - \frac{a_3 \kappa}{a_1} - \frac{a_3^2}{4a_1 \gamma^2} \right) = 26.9424 > 0$ . 当  $\omega(t) \equiv 0$  时, 得到如下控制器:

$$u_i = \begin{cases} \frac{-14.0932(z^2 + 0.5x^2)x}{\|2x\|^2}, & i \in I_p, \quad \|2x\| > 0.1 \\ 0, & i \in I_p, \quad \|2x\| \leq 0.1 \\ 0, & i \in I_n \end{cases}$$

图 2-2 给出了子系统 (2-34)-(2-35) 的控制输入和切换信号  $\sigma(t)$ . 图 2-3 是初始状态为  $z(1) = 2, x(1) = 1$  的仿真结果, 此时系统是趋于稳定, 也即切换连续搅拌釜反应器系统中反应物浓度和温度达到了恒定的参考值。



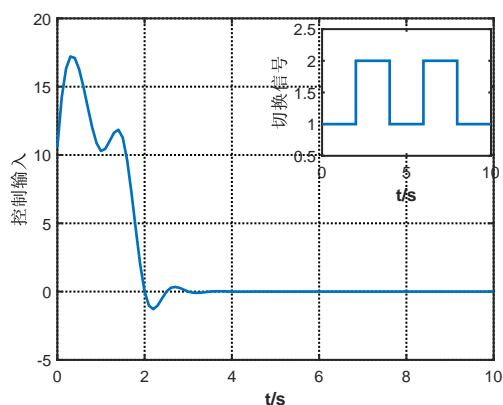


图 2-2 控制输入  $u$  和切换信号  $\sigma(t)$   
Fig 2-2 The control input  $u$  and the switching signal  $\sigma(t)$

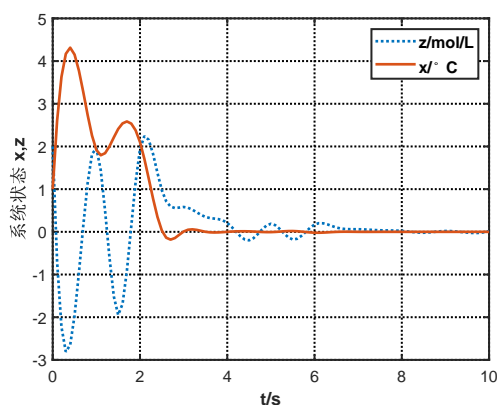


图 2-3 系统状态响应  
Fig 2-3 The system state response

当  $\omega(t) = e^{-t}$  时, 构造如下控制器:

$$u_i = \begin{cases} \frac{[-14.0932(z^2 + 0.5x^2) - 8x^2]x}{\|2x\|^2}, & i \in I_p, \quad \|2x\| > 0.1 \\ 0, & i \in I_p, \quad \|2x\| \leq 0.1 \\ -2x, & i \in I_n \end{cases}$$

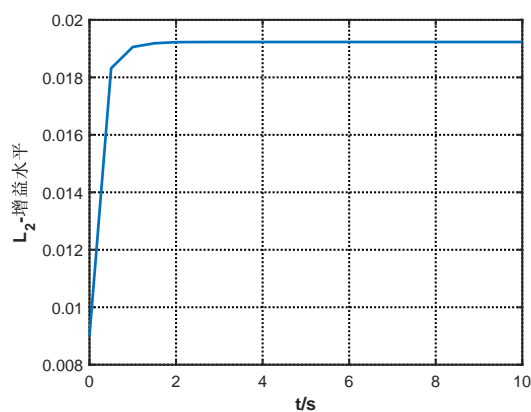


图 2-4  $L_2$ -增益水平  $\gamma$   
Fig 2-4 The  $L_2$ -gain level  $\gamma$

由注解 2.4, 定义如下函数

$$\gamma^2(s) = \frac{\int_0^s e^{-\frac{\ln \mu_c}{\tau_a}(\tau-t_0)} y^T(\tau) y(\tau) d\tau}{\int_0^s \omega^T(\tau) \omega(\tau) d\tau}$$

在这个例子中, 有

$$\gamma^2(s) = \frac{\int_0^s e^{-26.9315} y^T(\tau) y(\tau) d\tau}{\int_0^s \omega^T(\tau) \omega(\tau) d\tau}$$

图 2-4 给出了初始状态  $z(1) = 0, x(1) = 0$  的  $L_2$ -增益水平图像, 可以很容易地看到系统的  $L_2$ -增益水平远远小于  $\gamma = 2$ . 因此, 切换连续搅拌釜反应器系统在受到一定程度外部扰动时仍然具有良好的性能。

例 2.2 考虑具有两个子系统的不确定切换非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -3z_1 - z_2x_1 \\ \dot{z}_2 = -z_2 + 5z_1x_1 \\ \dot{x}_1 = -x_1 - z_1x_2 + \theta_1x_1 - u_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + 0.3z_1x_1 + \theta_1x_2 - 3u_1 \\ y = -6x_1 - 6x_2 \end{cases} \quad (2-36)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1 - 0.2z_2x_1 \\ \dot{z}_2 = z_2 + 2z_1x_1 \\ \dot{x}_1 = x_1 + z_1x_2 + \theta_2x_1 + 0.1u_2 + \sin(x_1^2)\omega \\ \dot{x}_2 = x_2 - z_1x_1 + \theta_2x_2 - 0.1u_2 + \sin(x_2^2)\omega \\ y = 2x_1 + 2x_2 + \omega \end{cases} \quad (2-37)$$

其中  $\theta_1 = -0.48$  和  $\theta_2 = -0.06$  是由随机数生成的常量。

令

$$W_1 = 0.5z_1^2 + 0.1z_2^2 + 3x_1^2 + x_2^2, \quad W_2 = z_1^2 + 0.1z_2^2 + x_1^2 + x_2^2$$

对于子系统 (2-36), 有

$$L_{p_1} U_1(z) = \begin{pmatrix} z_1 & 0.2z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3z_1 - z_2x_1 \\ -z_2 + 5z_1x_1 \end{pmatrix} = -3z_1^2 - 0.2z_2^2 \leq 0$$

$$L_{f_1} V_1(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 - z_1x_2 \\ -2x_2 + 0.3z_1x_1 \end{pmatrix} = -6x_1^2 - 4x_2^2 \leq 0$$

$$L_{g_1} V_1(x) = -6x_1 - 6x_2$$

对于子系统 (2-37), 有

$$L_{p_2} U_2(z) = \begin{pmatrix} 2z_1 & 0.2z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 - 0.2z_2x_1 \\ z_2 + 2z_1x_1 \end{pmatrix} = 2z_1^2 + 0.2z_2^2 \quad (2-38)$$

$$L_{f_2} V_2(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + z_1 x_2 \\ x_2 - z_1 x_1 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + 2x_2^2$$

$$L_{g_2} V_2(x) = 0.2x_1 - 0.2x_2$$

于是

$$L_{p_2} U_2(z) + L_{f_2} V_2(x) = 2z_1^2 + 0.2z_2^2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 \leq 2W_2(z, x)$$

容易得出子系统 (2-36) 是无源的, 而子系统 (2-37) 是非无源的。

给定常数  $a_1 = 0.1, a_2 = 3, a_3 = 2, \mu = 10, c = 20, \kappa = 0, \eta = 0.5, \rho = 1, \lambda = 2$ , 计算得到  $\xi = e^{\frac{a_3 \eta}{a_1}}$ . 取平均驻留时间  $\tau_a = 2$ , 无源率  $r = 0.6$ , 扰动衰减水平  $\gamma = 1$ ,  $\lambda_2 = 1.2$ . 因此,  $\lambda_1 = \lambda_2 + \frac{a_3^2 \rho^2}{4a_1 \gamma^2} = 3.7000, \lambda^* = \frac{\lambda_1}{r} + \frac{\lambda}{r} + \frac{\ln(\mu \xi)}{r \tau_a} + \frac{a_3 \kappa}{r a_1} - \lambda = 0.3919$ ,  $\bar{\lambda} = 10(\lambda^* - \frac{a_3 \kappa}{a_1}) = 3.9188, \bar{\lambda} - c\kappa - \frac{1}{2} \left( \lambda^* - \frac{a_3 \kappa}{a_1} - \frac{a_3^2}{4a_1 \gamma^2} \right) = 4.0354 > 0$ .

根据定理 2.1, 在  $\omega(t) \equiv 0$  时构造如下控制器:

$$u_i = \begin{cases} \frac{0.3919(0.5z_1^2 + 0.1z_2^2 + 3x_1^2 + x_2^2)(x_1 + x_2)}{6\|x_1 + x_2\|^2}, & i \in I_p, \quad 6\|x_1 + x_2\| > 0.3 \\ 0, & i \in I_p, \quad 6\|x_1 + x_2\| \leq 0.3 \\ 0, & i \in I_n \end{cases}$$

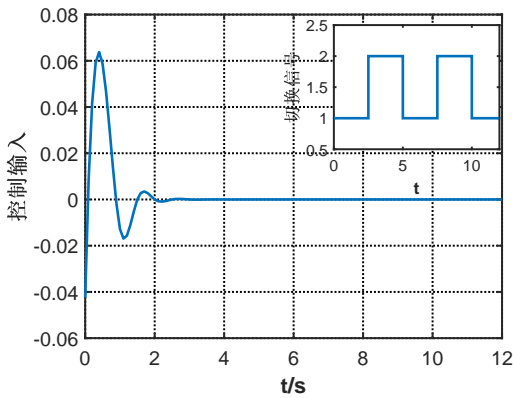


图 2-5 控制输入  $u$  和切换信号  $\sigma(t)$   
Fig 2-5 The control input  $u$  and the switching signal  $\sigma(t)$

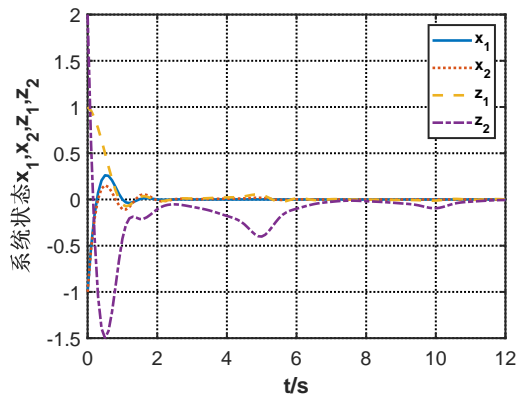


图 2-6 系统状态响应  
Fig 2-6 The system state response

图 2-5 给出了子系统 (2-36)-(2-37) 的控制输入和切换信号  $\sigma(t)$ . 图 2-6 是初始状态  $z_1(1) = 1, z_2(1) = 2, x_1(1) = -1, x_2(1) = -1$  的仿真结果。

当  $\omega(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$  时, 构造控制器

$$u_i = \begin{cases} \frac{[0.3919(0.5z_1^2 + 0.1z_2^2 + 3x_1^2 + x_2^2) + y_1 y_1^T](x_1 + x_2)}{6\|x_1 + x_2\|^2}, & i \in I_p, \quad 6\|x_1 + x_2\| > 0.3 \\ 0, & i \in I_p, \quad 6\|x_1 + x_2\| \leq 0.3 \\ -(0.2x_1 - 0.2x_2), & i \in I_n \end{cases}$$

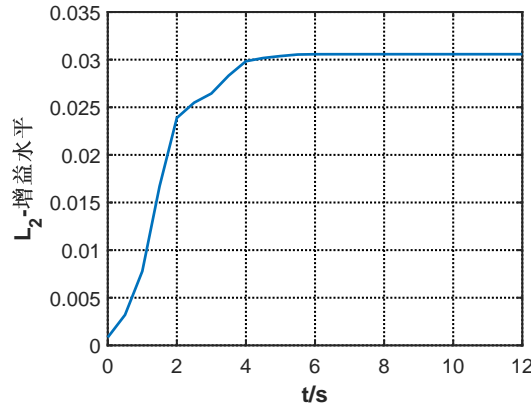


图 2-7  $L_2$ -增益水平  $\gamma$   
Fig 2-7 The  $L_2$ -gain level  $\gamma$

在这个例子中，可以得到  $\gamma^2(s) = \frac{\int_0^s e^{-103.8155} y^T(\tau) y(\tau) d\tau}{\int_0^s \omega^T(\tau) \omega(\tau) d\tau}$ . 图 2-7 表示在初始状态  $z_1(1) = 0, z_2(1) = 0, x_1(1) = 0, x_2(1) = 0$  下系统的  $L_2$ -增益水平，可以看到此时系统的  $L_2$ -增益小于  $\gamma = 1$ .

## 2.4 本章小结

基于平均驻留时间方法，给出了充分条件以确保系统 (2-1) 的可解性，从而通过存储函数避免了构造 Lyapunov 函数的困难，在一定程度上降低了计算复杂性。对于给定的切换信号，在无源率、平均驻留时间和干扰衰减水平所设计的反馈控制器的作用下，系统可以实现全局指数稳定，并具有加权  $L_2$ -增益水平。

## 第3章 基于数据采样的切换非线性系统的鲁棒 $H_\infty$ 控制问题

在上一章中,利用无源性处理了非线性切换系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题,这在一定程度上减少了计算的复杂性,但是研究者们并没有停止优化算法的脚步,于是采样数据方法进入了控制理论的世界。

在实际工程中,利用采样数据控制技术可以通过数字计算机达到控制系统的效果,该技术已经应用于飞机和航天器控制系统<sup>[8,56]</sup>,多机器人系统等<sup>[55]</sup>,然而这些实际系统大多数都是存在外部干扰的非线性系统,因此,基于采样数据的非线性系统鲁棒  $H_\infty$  控制问题的研究就更加重要了。另一方面,切换系统在各个领域应用广泛,并且对于切换非线性系统稳定性及其鲁棒  $H_\infty$  控制问题的研究已经取得很多成果,常用的方法有 Lyapunov 函数方法<sup>[28,33]</sup>,平均驻留时间方法<sup>[29,34]</sup>和多重 Lyapunov 函数方法<sup>[31,32]</sup>,这些方法通常会涉及到构造函数。与之相比,采样数据控制技术具有加快切换系统的分析速度的优势,并且可以减少系统对硬件和环境的要求,节约成本。

目前,通过采样数据控制对切换非线性系统的鲁棒性的研究还可以进一步完善,因此,本章将利用周期采样方法构造状态反馈控制来研究切换非线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题。

### 3.1 切换非线性系统的描述及预备知识

考虑如下非线性切换系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + f_{i,\sigma(t)}(x_1, \dots, x_i) + \Phi_{i,\sigma(t)}(x_1, \dots, x_i)\omega, & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n = u + f_{n,\sigma(t)}(x_1, \dots, x_n) + \Phi_{n,\sigma(t)}(x_1, \dots, x_n)\omega \\ y = h(x_1) \end{cases} \quad (3-1)$$

其中  $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  表示系统 (3-1) 的状态,  $\mathbb{R}^n$  是  $n$  维实欧氏空间,  $y$  是控制输出,  $\omega$  是干扰输入, 并且  $\omega \in L_2[0, \infty)$  表示  $\int_0^\infty |\omega(t)|^2 dt < \infty$ ,  $u$  是控制输入, 右连续函数  $\sigma: \mathbb{R}^+ \rightarrow I_N = \{1, 2, \dots, N\}$  是切换规律,  $f_{i,\sigma(t)}$ ,  $\Phi_{i,\sigma(t)}$ ,  $i = 1, \dots, n$  和  $h$  是光滑函数, 并且  $h(0) = 0$ 。

基于文献 [112, 119], 给出如下定义和假设。

**假设 3.1** 对于  $i = 1, 2, \dots, n$ , 假设

$$|f_i(x_1, \dots, x_i)| \leq (|x_1|^{p_i} + \dots + |x_i|^{p_i}) a_i(x_1, \dots, x_i)$$

$$|g_i(x_1, \dots, x_i)| \leq (|x_1|^{p_i} + \dots + |x_i|^{p_i}) b_i(x_1, \dots, x_i)$$

$$|\Phi_i(x_1, \dots, x_i)| \leq \varphi_i(x_1, \dots, x_i)$$

其中  $a_i, b_i$  和  $\varphi_i$  是已知的非负有界的光滑函数,  $p_i$  是正奇数。

本文我们将考虑系统 (3-1) 的鲁棒  $H_\infty$  控制问题, 定义如下:

**定义 3.1** 对于任意的常量  $\gamma > 0$ , 对于每个子系统的控制定律  $u_i(\cdot)$ , 并且  $u_i(0) = 0, i = 1, \dots, n$ . 在切换信号  $\sigma(t)$  下, 通过设计控制器, 当  $\omega(t) \equiv 0$  时, 闭环系统 (3-1) 全局渐近稳定, 且对于初值为零的实值函数  $\beta(s)$ , 如果存在  $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$ , 使得

$$\int_0^\infty y^T(t)y(t)dt \leq \beta(s(t_0)) + \gamma^2 \int_0^\infty \omega^T(t)\omega(t)dt$$

成立, 则称闭环系统 (3-1) 具有  $L_2$ -增益水平  $\gamma$ .

**引理 3.1** <sup>[111]</sup> 对于实数  $x, y$  和  $z_i, i = 1, \dots, n$ , 假设  $g_1: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, g_2: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  是光滑函数, 则存在实数  $l > 0$  和两个非负光滑函数  $h_1: \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}, h_2: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  使得如下关系成立:

$$\begin{aligned} \text{a) } & |x[(y + xg_1(z_1, \dots, z_n, x)) - (xg_1(z_1, \dots, z_n, x))]| \\ & \leq \frac{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 + |x|^2}{l} + |y|^2 h_1(z_1, \dots, z_n, x, y) \end{aligned}$$

$$\text{b) } |y(z_1 + \dots + z_n + y)g_2(z_1, \dots, z_n, y)| \leq \frac{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}{l} + |y|^2 h_2(z_1, \dots, z_n, y)$$

**引理 3.2** <sup>[120]</sup> 令  $D := [a, b] \subset \mathbb{R}$ , 假设  $a(t) \geq 0, f(t)$  和  $g(t)$  是  $D$  上的连续实值函数, 如果  $f(t)$  满足如下不等式:

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t a(s)f(s)ds$$

则对于  $t \in D$ , 如下关系成立:

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t g(s)a(s)e^{\int_s^t a(r)dr}ds$$

## 3.2 控制器设计及性能分析

不失一般性, 设在每个采样区间内最多发生一次切换, 即采样周期  $T$  小于最小切换间隔  $T_d$  (另请参阅 [76])。然后, 分两种情况分析系统 (3-1), 情况 i): 采样区间中不发生切换; 情况 ii): 采样区间中仅发生一次切换。对于情况 i), 激活的子系统与其匹配的控制器是同步的, 参见图 3-1 中采样点之间的虚线部分。对于情况 ii), 被激活的子系统在切换瞬间后变为异步状态, 一直持续到下

一个采样时刻，参见图 3-1 上采样点之间的实线部分。

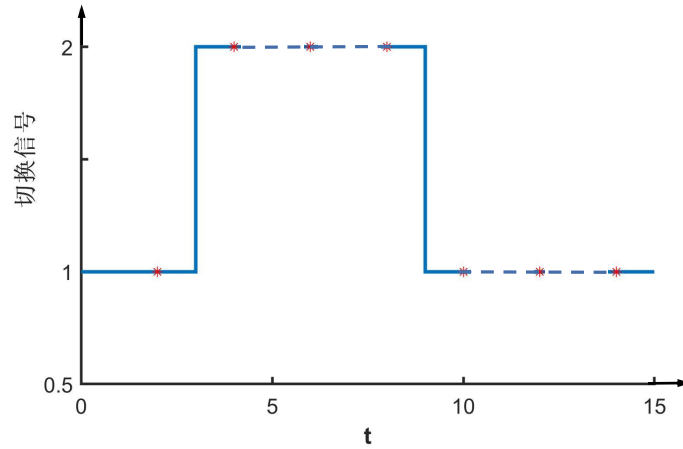


图 3-1 切换信号与采样区间的关系。这里红色的“\*”表示采样点，虚线部分表示情况 i)，实线部分表示情况 ii)。

Fig 3-1 Relationship between switching signal and sampling interval. Here red “\*” are represent sampling points, the dashed parts are represent case i), and the solid line parts are represent case ii).

下面，本章将解决切换系统 (3-1) 的稳定性和  $L_2$ -增益问题。

**定理 3.1** 对允许的采样周期  $T$ ，令  $\nu^{\frac{1}{\varepsilon}} \delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} < 1$ ，其中  $\delta$  和  $\nu$  是关于  $T$  的常数，分别由式 (3-24) 和 (3-34) 定义。如果假设 3.1 成立，并且采样周期  $T$  与平均驻留时间的关系满足

$$\tau_a > \left(1 - \frac{\ln \nu}{\ln \delta}\right) T$$

则得到采样数据控制器

$$u_{\sigma(t)} = -\alpha_{n,\sigma(t)}(z_1(t_k), \dots, z_{n,\sigma(t)}(t_k)) z_{n,\sigma(t)}(t_k)$$

其中

$$\alpha_{n,\sigma(t)}(z_1(t), \dots, z_{n,\sigma(t)}(t)) = 1 + \tilde{\rho}_{n,\sigma(t)}(z_1, \dots, z_{n,\sigma(t)}) + \hat{\rho}_{n,\sigma(t)}(z_1, \dots, z_{n,\sigma(t)}) + \frac{1}{4\beta} \Psi_{n,\sigma(t)}^2(z_1, \dots, z_{n,\sigma(t)})$$

并且  $0 < \beta \leq \frac{\gamma^2}{n}$ ， $z_{i,\sigma(t)}$  由式 (3-2) 给出， $\tilde{\rho}_{i,\sigma(t)}$ ， $\hat{\rho}_{i,\sigma(t)}$ ， $\Psi_{i,\sigma(t)}$ ， $i = 1, \dots, n$  由式子 (3-15) 给出，则当  $\omega(t) \equiv 0$  时，闭环系统 (3-1) 是全局渐近稳定的，并且当存在  $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$  时，闭环系统 (3-1) 具有加权的  $L_2$ -增益水平  $\gamma$ 。

**证明：** 下面将分两种情况来研究系统 (3-1)，情况 i)：采样区间中不发生切换；情况 ii)：采样区间中仅发生一次切换。

情况 i): 当  $\sigma(t_k) = \sigma(t_{k+1}) = l$ ,  $l \in l_N$  时, 第  $l$  个子系统在整个  $[t_k, t_{k+1})$  区间上被激活。首先, 系统 (3-1) 进行如下坐标变换:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_{i,l} = x_i - x_{i,l}^*, \quad i = 2, \dots, n \\ y = h(x_1) \end{cases} \quad (3-2)$$

其中  $x_{i,l}^*$  是虚拟控制法则, 其具体定义将在后文给出。

第 1 步: 选择如下 Lyapunov 函数:

$$V_{1,l} = \frac{1}{2} z_1^2$$

对  $0 < \beta \leq \frac{\gamma^2}{n}$ , 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1,l} + y^2 - \beta \|\omega\|^2 &= x_1 [x_2 + f_{1,l}(x_1) + \Phi_{1,l}(x_1)\omega] + y^2 - \beta \|\omega\|^2 \\ &\leq x_1(x_2 - x_{2,l}^*) + x_1[x_{2,l}^* + f_{1,l}(x_1) + \Phi_{1,l}(x_1)\omega] + x_1^2 \rho_0(x_1) - \beta \|\omega\|^2 \\ &\leq x_1(x_2 - x_{2,l}^*) + x_1 x_{2,l}^* + x_1^2 \rho_{1,l}(x_1) + |x_1| \Phi_{1,l}(x_1) \|\omega\| + x_1^2 \rho_0(x_1) - \beta \|\omega\|^2 \\ &\leq x_1(x_2 - x_{2,l}^*) + x_1 x_{2,l}^* + x_1^2 \rho_{1,l}(x_1) + x_1^2 \rho_0(x_1) + \frac{x_1^2 \Phi_{1,l}^2(x_1)}{4\beta} \\ &= x_1(x_2 - x_{2,l}^*) + x_1 \left[ x_{2,l}^* + x_1 \rho_{1,l}(x_1) + x_1 \rho_0(x_1) + \frac{x_1 \Phi_{1,l}^2(x_1)}{4\beta} \right] \\ &= z_1(x_2 - x_{2,l}^*) + z_1 \left[ x_{2,l}^* + z_1 \rho_{1,l}(x_1) + z_1 \rho_0(x_1) + \frac{z_1 \Phi_{1,l}^2(x_1)}{4\beta} \right] \end{aligned} \quad (3-3)$$

其中  $0 \leq (|x_1| \Phi_{1,l}(x_1) - 2\beta \|\omega\|)^2 \leq x_1^2 \Phi_{1,l}^2(x_1) - 4\beta |x_1| \Phi_{1,l}(x_1) \|\omega\| + 4\beta^2 \|\omega\|^2$ , 这推出

$$|x_1| \Phi_{1,l}(x_1) \|\omega\| - \beta \|\omega\|^2 \leq \frac{x_1^2 \Phi_{1,l}^2(x_1)}{4\beta}$$

令  $x_{2,l}^* = -z_1 \alpha_{1,l}(x_1)$ , 其中  $\alpha_{1,l}(x_1) = n + \rho_{1,l}(x_1) + \rho_0(x_1) + \frac{\Phi_{1,l}^2(x_1)}{4\beta}$ , 于是有

$$\dot{V}_{1,l} + y^2 - \beta \|\omega\|^2 \leq -n z_1^2 + z_1(x_2 - x_{2,l}^*) \quad (3-4)$$

第 2 步: 选择如下 Lyapunov 函数:

$$V_{2,l} = V_{1,l} + \frac{1}{2} z_{2,l}^2$$

显然

$$\dot{V}_{2,l} = \dot{V}_{1,l} + z_{2,l} \dot{z}_{2,l} \quad (3-5)$$

对于  $\dot{z}_{2,l}$ , 可得

$$\dot{z}_{2,l} = \dot{x}_2 - \dot{x}_{2,l}^* \quad (3-6)$$



$$= x_3 + f_{2,l}(x_1, x_2) + \Phi_{2,l}(x_1, x_2)\omega - \frac{\partial x_{2,l}^*}{\partial x_1} \dot{x}_1 \quad (3-7)$$

$$= x_3 + \left[ f_{2,l}(x_1, x_2) - \frac{\partial x_{2,l}^*}{\partial x_1} (x_2 + f_{1,l}(x_1)) \right] + \left[ \Phi_{2,l}(x_1, x_2) - \frac{\partial x_{2,l}^*}{\partial x_1} \Phi_{1,l}(x_1) \right] \omega \quad (3-8)$$

令

$$F_{2,l}(x_1, x_2) = f_{2,l}(x_1, x_2) - \frac{\partial x_{2,l}^*}{\partial x_1} (x_2 + f_{1,l}(x_1))$$

并且

$$\Phi_{2,l}(x_1, x_2) = \Phi_{2,l}(x_1, x_2) - \frac{\partial x_{2,l}^*}{\partial x_1} \Phi_{1,l}(x_1)$$

则由式 (3-6),  $\dot{z}_{2,l}$  可以被化简为

$$\dot{z}_{2,l} = x_3 + F_{2,l}(x_1, x_2) + \Phi_{2,l}(x_1, x_2)\omega$$

所以

$$\begin{aligned} & \dot{V}_{2,l} + y^2 - 2\beta\|\omega\|^2 \\ &= \dot{V}_1 + y^2 - \beta\|\omega\|^2 + z_{2,l}\dot{z}_{2,l} - \beta\|\omega\|^2 \\ &\leq -nz_1^2 + z_{1,l}[(z_{2,l} + x_{2,l}^*) - x_{2,l}^*] + z_{2,l}(x_3 + F_{2,l} + \Phi_{2,l}\omega) - \beta\|\omega\|^2 \end{aligned} \quad (3-9)$$

由假设 3.1 和  $x_{2,l}^*$  得到, 存在非负光滑函数  $\Psi_{2,l}(x_1, x_2)$  和  $r_{2,l}(z_1, z_{2,l})$  满足

$$\begin{aligned} |\Phi_{2,l}(x_1, x_2)| &\leq \Psi_{2,l}(z_1, z_{2,l}) \\ |F_{2,l}(x_1, x_2)| &\leq (|x_1| + |x_2|) \tilde{r}_{2,l}(x_1, x_2) \leq (|z_1| + |z_{2,l}|) r_{2,l}(z_1, z_{2,l}) \end{aligned}$$

由引理 3.1, 得

$$\begin{aligned} |z_{1,l}[(z_{2,l} + x_{2,l}^*) - x_{2,l}^*]| &\leq \frac{z_1^2}{2} + z_{2,l}^2 \tilde{\rho}_{2,l}(z_1, z_{2,l}) \\ |z_{2,l}F_{2,l}(x_1, x_2)| &\leq \frac{z_1^2}{2} + z_{2,l}^2 \hat{\rho}_{2,l}(z_1, z_{2,l}) \end{aligned}$$

$$|z_{2,l}\Phi_{2,l}(x_1, x_2)\omega| \leq |z_{2,l}|\Psi_{2,l}(z_1, z_{2,l})\|\omega\| \leq z_{2,l}^2 \frac{\Psi_{2,l}^2(z_1, z_{2,l})}{4\beta} + \beta\|\omega\|^2$$

则 (3-9) 式可以化简为:

$$\begin{aligned} & \dot{V}_{2,l} + y^2 - 2\beta\|\omega\|^2 \\ &\leq -(n-1)z_1^2 + z_{2,l}x_3 + z_{2,l}^2 \left[ \tilde{\rho}_{2,l}(z_1, z_{2,l}) + \hat{\rho}_{2,l}(z_1, z_{2,l}) + \frac{\Psi_{2,l}^2(z_1, z_{2,l})}{4\beta} \right] \\ &= -(n-1)z_1^2 + z_{2,l}(x_3 - x_{3,l}^*) + z_{2,l}x_{3,l}^* \\ &\quad + z_{2,l}^2 \left[ \tilde{\rho}_{2,l}(z_1, z_{2,l}) + \hat{\rho}_{2,l}(z_1, z_{2,l}) + \frac{\Psi_{2,l}^2(z_1, z_{2,l})}{4\beta} \right] \end{aligned} \quad (3-10)$$

令

$$x_{3,l}^*(x_1, x_2) = -z_{2,l}\alpha_{2,l}(z_1, z_{2,l})$$

其中  $\alpha_{2,l}(x_1, z_{2,l}) = n - 1 + \tilde{\rho}_{2,l}(z_1, z_{2,l}) + \hat{\rho}_{2,l}(z_1, z_{2,l}) + \frac{\Psi_{2,l}^2(z_1, z_{2,l})}{4\beta}$ , 则

$$\dot{V}_{2,l} + y^2 - 2\beta\|\omega\|^2 \leq -(n-1)(z_1^2 + z_{2,l}^2) + z_{2,l}(x_3 - x_{3,l}^*) \quad (3-11)$$

第  $n$  步: 选择如下 Lyapunov 函数:

$$V_{n,l} = V_{n-1,l} + \frac{1}{2}z_{n,l}^2$$

于是有

$$\begin{aligned} & \dot{V}_{n,l} + y^2 - n\beta\|\omega\|^2 \\ &= \dot{V}_{n-1,l} + y^2 - (n-1)\beta\|\omega\|^2 + z_{n,l}\dot{z}_{n,l} - \beta\|\omega\| \\ &\leq -2(z_1^2 + z_{2,l}^2 + \cdots + z_{n-1,l}^2) + z_{n-1,l}(x_n - x_{n,l}^*) + z_{n,l}\dot{z}_{n,l} - \beta\|\omega\| \\ &= -2(z_1^2 + z_{2,l}^2 + \cdots + z_{n-1,l}^2) + z_{n-1,l}[(z_{n,l} + x_{n,l}^*) - x_{n,l}^*] + z_{n,l}\dot{z}_{n,l} - \beta\|\omega\| \end{aligned} \quad (3-12)$$

于是  $\dot{z}_{n,l}$  简化为

$$\dot{z}_{n,l} = u_l + F_{n,l}(x_1, \dots, x_n) + \Phi_{n,l}(x_1, \dots, x_n)\omega \quad (3-13)$$

其中

$$\begin{aligned} F_{n,l}(x_1, \dots, x_n) &= f_{n,l}(x_1, \dots, x_n) - \frac{\partial x_{n,l}^*}{\partial x_1}(x_2 + f_{1,l}(x_1)) \\ &\quad - \cdots - \frac{\partial x_{n,l}^*}{\partial x_{n-1}}(x_n + f_{n-1,l}(x_1, \dots, x_{n-1})) \\ \Phi_{n,l}(x_1, \dots, x_n) &= \Phi_{n,l}(x_1, \dots, x_n) - \frac{\partial x_{n,l}^*}{\partial x_1}\Phi_{1,l}(x_1) \\ &\quad - \cdots - \frac{\partial x_{n,l}^*}{\partial x_{n-1}}\Phi_{n-1,l}(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

利用式 (3-13), 将式 (3-12) 化简为

$$\begin{aligned} & \dot{V}_{n,l} + y^2 - n\beta\|\omega\|^2 \\ &\leq -2(z_1^2 + z_{2,l}^2 + \cdots + z_{n-1,l}^2) + z_{n-1,l}[(z_{n,l} + x_{n,l}^*) - x_{n,l}^*] \\ &\quad + z_{n,l}[u_l + F_{n,l}(x_1, \dots, x_n) + \Phi_{n,l}(x_1, \dots, x_n)\omega] - \beta\|\omega\| \end{aligned} \quad (3-14)$$

由假设 3.1, 可知存在光滑函数  $\Psi_{n,l}$  和  $r_{n,l}$  满足

$$\begin{aligned} |\Phi_{n,l}(x_1, \dots, x_n)| &\leq \Psi_{n,l}(z_1, z_{2,l}, \dots, z_{n,l}) \\ |F_{n,l}(x_1, \dots, x_{n,l})| &\leq (|x_1| + \cdots + |x_n|)\tilde{r}_n(x_1, \dots, x_n) \\ &\leq (|z_1| + \cdots + |z_{n,l}|)r_{n,l}(z_1, \dots, z_{n,l}) \end{aligned}$$

由引理 3.1, 得

$$\begin{aligned}
 |z_{n-1,l}[(z_{n,l} + x_{n,l}^*) - x_{n,l}^*]| &\leq \frac{z_1^2 + z_{2,l}^2 + \cdots + z_{n-1,l}^2}{2} + z_{n,l}^2 \tilde{\rho}_{n,l}(z_1, \dots, z_{n,l}) \\
 |z_{n,l} F_{n,l}(x_1, \dots, x_{n,l})| &\leq \frac{z_1^2 + z_{2,l}^2 + \cdots + z_{n-1,l}^2}{2} + z_{n,l}^2 \hat{\rho}_{n,l}(z_1, \dots, z_{n,l}) \\
 \|z_{n,l} \Phi_{n,l}(x_1, \dots, x_n) \omega\| &\leq z_{n,l}^2 \frac{\Psi_{n,l}^2(z_1, z_{2,l}, \dots, z_{n,l})}{4\beta} + \beta \|\omega\|^2
 \end{aligned} \tag{3-15}$$

因此,

$$\begin{aligned}
 &\dot{V}_{n,l} + y^2 - n\beta \|\omega\|^2 \\
 &\leq -2(z_1^2 + z_{2,l}^2 + \cdots + z_{n-1,l}^2) + z_{n,l}^2 [\tilde{\rho}_{n,l}(z_1, \dots, z_{n,l}) + \hat{\rho}_{n,l}(z_1, \dots, z_{n,l})] + z_{n,l} u_l \\
 &\quad + z_{n,l}^2 \frac{\Psi_{n,l}^2(z_1, z_{2,l}, \dots, z_{n,l})}{4\beta} \\
 &= -(z_1^2 + z_{2,l}^2 + \cdots + z_{n-1,l}^2) + z_{n,l}(u_l - u_l^*) - z_{n,l} u_l^* \\
 &\quad + z_{n,l}^2 \left[ \tilde{\rho}_{n,l}(z_1, \dots, z_{n,l}) + \hat{\rho}_{n,l}(z_1, \dots, z_{n,l}) + \frac{\Psi_{n,l}^2(z_1, z_{2,l}, \dots, z_{n,l})}{4\beta} \right] \\
 &= -(z_1^2 + z_{2,l}^2 + \cdots + z_{n,l}^2) + z_{n,l}(u_l - u_l^*)
 \end{aligned} \tag{3-16}$$

其中

$$u_l^* = -\alpha_{n,l}(z_1(t), \dots, z_{n,l}(t))z_{n,l}(t)$$

并且

$$\alpha_{n,l}(z_1(t), \dots, z_{n,l}(t)) = 1 + \tilde{\rho}_{n,l}(z_1, \dots, z_{n,l}) + \hat{\rho}_{n,l}(z_1, \dots, z_{n,l}) + \frac{\Psi_{n,l}^2(z_1, z_{2,l}, \dots, z_{n,l})}{4\beta}$$

于是, 基于虚拟控制器  $u_l^*$ , 控制器可以被设计为:

$$u_l = -\alpha_{n,l}(z_1(t_k), \dots, z_{n,l}(t_k))z_{n,l}(t_k) \tag{3-17}$$

定义  $Z(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ , 并且  $\dot{Z}(t) = \Gamma_l(Z(t_k), Z(t))$ , 则对于任意  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , 可得

$$\begin{aligned}
 \|Z(t) - Z(t_k)\| &\leq \int_{t_k}^t \|\Gamma_l(Z(t_k), Z(s))\| ds \\
 &\leq \int_{t_k}^t \alpha \|Z(s) - Z(t_k)\| ds + \alpha(t - t_k) \|Z(t_k)\|
 \end{aligned}$$

其中  $\alpha > 0$  是常数。

由引理 3.2, 对  $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$ , 有

$$\begin{aligned}
 \|Z(t) - Z(t_k)\| &\leq \alpha(t - t_k) \|Z(t_k)\| + \alpha^2 \|Z(t_k)\| \int_{t_k}^t (s - t_k) e^{\alpha(t-s)} ds \\
 &\leq \bar{\alpha} \sqrt{V_{n,l}(t_k)} (e^{\alpha(t-t_k)} - 1)
 \end{aligned} \tag{3-18}$$

其中  $\bar{\alpha}$  是常数。

存在常数  $\lambda_{i,l} \geq \alpha_{i,l}$ , 令  $\gamma_{n,l} = \lambda_{n,l}$ ,  $\gamma_{n-1,l} = \lambda_{n,l}\lambda_{n-1,l}, \dots, \gamma_{1,l} = \lambda_{n,l}\lambda_{n-1,l} \cdots \lambda_{1,l}$ , 注意到  $|x_i(t) - x_i(t_k)| \leq \|Z(t) - Z(t_k)\|$ , 由式 (3-18), 对于任意  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , 有

$$\begin{aligned} & |u_l - u_l^*| \\ & \leq \gamma_{n,l} |x_n(t) - x_n(t_k)| + \gamma_{n-1,l} |x_{n-1}(t) - x_{n-1}(t_k)| + \cdots + \gamma_{1,l} |x_1(t) - x_1(t_k)| \\ & \leq d_1 \|Z(t) - Z(t_k)\| \\ & \leq d_2 \sqrt{V_{n,l}(t_k)} (e^{\alpha T} - 1) \end{aligned} \quad (3-19)$$

其中  $d_1 = n\Pi$ , 并且  $\Pi = \max_{l \in \mathbb{N}} \{\gamma_{1,l}, \dots, \gamma_{n,l}\}$ ,  $d_2 = \bar{\alpha}d_1$ .

由式 (3-16) 和式 (3-19), 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_{n,l}(t) + y^2 - n\beta\|\omega(t)\|^2 & \leq d_3 \sqrt{V_{n,l}(t)} \sqrt{V_{n,l}(t_k)} (e^{\alpha T} - 1) - 2V_{n,l}(t) \\ & \leq d_l V_{n,l}(t_k) - V_{n,l}(t), \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \end{aligned} \quad (3-20)$$

其中  $d_3$  是常数, 并且  $d_l = \frac{[d_3(e^{\alpha T} - 1)]^2}{4}$ .

令  $H(t) = y^2(t) - n\beta\|\omega(t)\|^2$ , 式 (3-20) 简化为

$$\dot{V}_{n,l}(t) + H(t) \leq d_l V_{n,l}(t_k) - V_{n,l}(t) \quad (3-21)$$

对于任意  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , 易得

$$V_{n,l}(t) \leq \left[ e^{-(t-t_k)} + d_l (1 - e^{-(t-t_k)}) \right] V_{n,l}(t_k) - \int_{t_k}^t H(s) e^{(s-t)} ds \quad (3-22)$$

当  $t = t_{k+1}$  时, 显然有

$$V_{n,l}(t_{k+1}) \leq \delta V_{n,l}(t_k) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} H(s) e^{(s-t_{k+1})} ds \quad (3-23)$$

其中

$$\delta = e^{-T} + d_l (1 - e^{-T}) \quad (3-24)$$

情况 ii): 当  $\sigma(t_k) = l \neq \sigma(t_{k+1}) = m$  时, 表示在区间  $[t_k, t_{k+1})$  上发生了一次切换, 不妨记为从子系统  $l$  切换到子系统  $m$ , 但是我们不知道切换发生的时刻. 因此, 设当  $t = t_k + \Delta t$ ,  $\Delta t \in (0, T]$  时切换发生, 也就是说, 当  $t \in [t_k, t_k + \Delta t)$  时, 子系统  $l$  被激活, 于是得到

$$V_{n,l}(t_k + \Delta t) \leq \left[ e^{-\Delta t} + d_l^* (1 - e^{-\Delta t}) \right] V_{n,l}(t_k) - \int_{t_k}^{t_k + \Delta t} H(s) e^{(s-(t_k + \Delta t))} ds \quad (3-25)$$

其中  $d_l^* = \frac{[d_3(e^{\alpha \Delta t} - 1)]^2}{4} \leq d_l$ .

当  $t \in [t_k + \Delta t, t_{k+1})$  时, 选择如下 Lyapunov 函数:

$$V_{n,m} = \frac{1}{2} z_1^2 + \sum_{i=2}^n \frac{z_{i,m}^2}{2} = V_{n-1,m} + \frac{1}{2} z_{n,m}^2 \quad (3-26)$$

类似地,

$$\begin{aligned}
 & \dot{V}_{n,m} + y^2 - n\beta\|\omega\|^2 \\
 & \leq -2(z_1^2 + z_{2,m}^2 + \cdots + z_{n-1,m}^2) + z_{n-1,m}[(z_{n,m} + x_{n,m}^*) - x_{n,l}^*] \\
 & \quad + z_{n,m}[u_l + F_{n,m}(x_1, \dots, x_n) + \Phi_{n,m}(x_1, \dots, x_n)\omega] - \beta\|\omega\| \\
 & \leq -(z_1^2 + z_{2,m}^2 + \cdots + z_{n,m}^2) + z_{n,m}(u_l - u_m^*) \\
 & = -2V_{n,m}(t) + z_{n,m}(u_l - u_m^*)
 \end{aligned} \tag{3-27}$$

其中

$$\begin{aligned}
 F_{n,m}(x_1, \dots, x_n) &= f_{n,m}(x_1, \dots, x_n) - \frac{\partial x_{n,m}^*}{\partial x_1}(x_2 + f_{1,m}(x_1)) - \cdots \\
 & \quad - \frac{\partial x_{n,m}^*}{\partial x_{n-1}}(x_n + f_{n-1,m}(x_1, \dots, x_{n-1})) \\
 \Phi_{n,m}(x_1, \dots, x_n) &= \Phi_{n,m}(x_1, \dots, x_n) - \frac{\partial x_{n,m}^*}{\partial x_1}\Phi_{1,m}(x_1) - \cdots \\
 & \quad - \frac{\partial x_{n,m}^*}{\partial x_{n-1}}\Phi_{n-1,m}(x_1, \dots, x_{n-1})
 \end{aligned}$$

由引理 3.1, 可得

$$\begin{aligned}
 |z_{n-1,m}[(z_{n,m} + x_{n,m}^*) - x_{n,m}^*]| &\leq \frac{z_1^2 + z_{2,m}^2 + \cdots + z_{n-1,m}^2}{2} + z_{n,m}^2 \tilde{\rho}_{n,m}(z_1, \dots, z_{n,m}) \\
 |z_{n,m}F_{n,m}(x_1, \dots, x_{n,l})| &\leq \frac{z_1^2 + z_{2,m}^2 + \cdots + z_{n-1,m}^2}{2} + z_{n,m}^2 \hat{\rho}_{n,m}(z_1, \dots, z_{n,m}) \\
 \|z_{n,m}\Phi_{n,m}(x_1, \dots, x_n)\omega\| &\leq z_{n,m}^2 \frac{\Psi_{n,m}^2(z_1, z_{2,m}, \dots, z_{n,m})}{4\beta} + \beta\|\omega\|^2
 \end{aligned}$$

定义  $Z(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ , 于是  $\dot{Z}(t) = \Gamma_m(Z(t_k), Z(t))$ , 所以对于  $t \in [t_k + \Delta t, t_{k+1})$ , 有

$$\begin{aligned}
 \|Z(t) - Z(t_k)\| &\leq \int_{t_k + \Delta t}^{t_k} \|\Gamma_l(Z(t_k), Z(s))\| ds + \int_{t_k + \Delta t}^t \|\Gamma_m(Z(t_k), Z(s))\| ds \\
 &\leq \int_{t_k}^t \alpha \|Z(s) - Z(t_k)\| ds + \alpha(t - t_k) \|Z(t_k)\|
 \end{aligned} \tag{3-28}$$

由引理 3.2 和式 (3-28), 对  $t \in [t_k + \Delta t, t_{k+1})$ , 有

$$\|Z(t) - Z(t_k)\| \leq \bar{\alpha} \sqrt{V_{n,m}(t_k)} (e^{\alpha(t-t_k)} - 1)$$

类似情况 i), 得到

$$\begin{aligned}
 |u_m^* - u_l| &\leq 2d_1 \|Z(t_k)\| + d_1 \|Z(t) - Z(t_k)\| \\
 &\leq d_2 \sqrt{V_{n,m}(t_k)} (e^{\alpha T} + 1)
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 & \dot{V}_{n,m} + y^2 - n\beta\|\omega\|^2 \\
 & \leq d_3 \sqrt{V_{n,m}(t)} \sqrt{V_{n,l}(t_k)} (e^{\alpha T} + 1) - 2V_{n,m}(t) \\
 & \leq d_m V_{n,l}(t_k) - V_{n,m}(t), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1})
 \end{aligned} \tag{3-29}$$

其中  $d_3$  是常数, 并且  $d_m = \frac{[d_3(e^{\alpha T} + 1)]^2}{4}$ .

令  $H(t) = y^2(t) - n\beta\|\omega(t)\|^2$ , 式 (3-29) 简化为

$$\dot{V}_{n,m}(t) + H(t) \leq d_m V_{n,l}(t_k) - V_{n,m}(t) \tag{3-30}$$

对于任意的  $t \in [t_k + \Delta t, t_{k+1})$ , 利用常数变易公式得到

$$V_{n,m}(t) \leq e^{-(t-t_k-\Delta t)} V_{n,m}(t_k + \Delta t) + d_m (1 - e^{-(t-t_k-\Delta t)}) V_{n,l}(t_k) - \int_{t_k+\Delta t}^t H(s) e^{(s-t)} ds \tag{3-31}$$

当  $t = t_{k+1}$  时, 易得

$$V_{n,m}(t_{k+1}) \leq e^{-(T-\Delta t)} V_{n,m}(t_k + \Delta t) + d_m (1 - e^{-(T-\Delta t)}) V_{n,l}(t_k) - \int_{t_k+\Delta t}^{t_{k+1}} H(s) e^{(s-t_{k+1})} ds \tag{3-32}$$

由式 (3-25) 和  $Z(t)$  的定义, 取

$$V_{n,m} = Z^T P_m Z$$

其中  $P_m > 0, m \in \mathbb{N}$ . 定义  $\mu = \frac{\max_{m \in \mathbb{N}} \lambda(P_m)}{\min_{m \in \mathbb{N}} \lambda(P_m)}$ , 则可以得到:

$$\begin{aligned}
 V_{n,m}(t_{k+1}) & \leq e^{-(T-\Delta t)} \mu V_{n,l}((t_k + \Delta t)^-) + d_m (1 - e^{-(T-\Delta t)}) V_{n,l}(t_k) \\
 & \quad - \int_{t_k+\Delta t}^{t_{k+1}} H(s) e^{s-t_{k+1}} ds \\
 & \leq \left[ e^{-(T-\Delta t)} \mu (e^{-\Delta t} + d_l^* (1 - e^{-\Delta t})) + d_m (1 - e^{-(T-\Delta t)}) \right] V_{n,l}(t_k) \\
 & \quad - e^{-(T-\Delta t)} \mu \int_{t_k}^{t_k+\Delta t} H(s) e^{s-(t_k+\Delta t)} ds - \int_{t_k+\Delta t}^{t_{k+1}} H(s) e^{s-t_{k+1}} ds \\
 & \leq \left[ \mu + \mu \frac{[d_3(e^{\alpha \Delta t} - 1)]^2}{4} + (1 - e^{-(T-\Delta t)}) \frac{[d_3(e^{\alpha T} + 1)]^2}{4} \right] V_{n,l}(t_k) \tag{3-33} \\
 & \quad - e^{-(T-\Delta t)} \mu \int_{t_k}^{t_k+\Delta t} H(s) e^{s-(t_k+\Delta t)} ds - \int_{t_k+\Delta t}^{t_{k+1}} H(s) e^{s-t_{k+1}} ds \\
 & \leq \left[ \mu \left[ 1 + \frac{[d_3(e^{\alpha T} - 1)]^2}{4} \right] + \frac{[d_3(e^{\alpha T} + 1)]^2}{4} \right] V_{n,l}(t_k) \\
 & \quad - e^{-(T-\Delta t)} \mu \int_{t_k}^{t_k+\Delta t} H(s) e^{s-(t_k+\Delta t)} ds - \int_{t_k+\Delta t}^{t_{k+1}} H(s) e^{s-t_{k+1}} ds \\
 & = \nu V_{n,l}(t_k) - \theta \int_{t_k}^{t_k+\Delta t} H(s) e^{s-(t_k+\Delta t)} ds - \int_{t_k+\Delta t}^{t_{k+1}} H(s) e^{s-t_{k+1}} ds
 \end{aligned}$$

其中

$$v = \mu \left[ 1 + \frac{[d_3(e^{\alpha T} - 1)]^2}{4} \right] + \frac{[d_3(e^{\alpha T} + 1)]^2}{4} \quad (3-34)$$

$$\theta = \mu e^{-(T-\Delta t)} \quad (3-35)$$

对于系统 (3-1), 构造如下分段微分函数:

$$V_{\sigma(t)} = V_{n,\sigma(t)} = \sum_{i=1}^n \frac{z_{i,\sigma(t)}^2}{2}$$

由定义 2.2, 对任意的  $\varepsilon$  使得  $\tau_a \geq \varepsilon T$ , 有

$$N_\sigma(t_0, t_k) \leq N_0 + \frac{t_k - t_0}{\tau_a} \leq N_0 + \frac{k}{\varepsilon} \quad (3-36)$$

其中  $N_\sigma(t_0, t_k)$  等同于  $k$  个形式为  $(t_\ell, t_{\ell+1})$ ,  $\ell = 0, \dots, k-1$  的间隔中包含的切换总次数。

定义如下判断函数:

$$\alpha(t_k) = \begin{cases} 0, & N_\sigma(t_k) \neq N_\sigma(t_{k+1}), \quad t \in [t_k, t_{k+1}) \\ 1, & N_\sigma(t_k) = N_\sigma(t_{k+1}), \quad t \in [t_k, t_{k+1}) \end{cases}$$

根据式 (3-23) 和式 (3-33), 对于  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , 有

$$\begin{aligned} & V_{\sigma(t)}(t) \\ & \leq (1 - \alpha(t_k)) \left[ \left( e^{-(t-t_k-\Delta t)} \mu \left( e^{-\Delta t} + d_l^* (1 - e^{-\Delta t}) \right) + d_m (1 - e^{-(t-t_k-\Delta t)}) \right) V_{n,l}(t_k) \right. \\ & \quad \left. - e^{-(t-t_k-\Delta t)} \mu \int_{t_k}^{t_k+\Delta t} H(s) e^{s-(t_k+\Delta t)} ds - \int_{t_k+\Delta t}^{t_{k+1}} H(s) e^{s-t_{k+1}} ds \right] \\ & \quad + \alpha(t_k) \left[ \left( e^{-(t-t_k)} + d_l (1 - e^{-(t-t_k)}) \right) V_{n,l}(t_k) - \int_{t_k}^t H(s) e^{s-t} ds \right] \\ & \leq \xi(t) V_{n,l}(t_k) - (1 - \alpha(t_k)) \left[ \theta(t) \int_{t_k}^{t_k+\Delta t} H(s) e^{s-(t_k+\Delta t)} ds + \int_{t_k+\Delta t}^t H(s) e^{s-t} ds \right] \\ & \quad - \alpha(t_k) \int_{t_k}^t H(s) e^{s-t} ds \\ & \dots \\ & \leq \xi(t) v^{N_\sigma(t_0, t_k)} \delta^{k-N_\sigma(t_0, t_k)} V_{\sigma(t_0)}(t_0) - \left[ \xi(t) K(t) + \alpha(t_k) \frac{t - t_k}{t - t_0} \right. \\ & \quad \left. + (1 - \alpha(t_k)) \left( \frac{\Delta t \theta(t)}{t - t_0} + \frac{t - (t_k + \Delta t)}{t - t_0} \right) \right] \int_{t_0}^t H(s) e^{s-t} ds \end{aligned} \quad (3-37)$$

其中  $V_{\sigma(t_0)}(t_0)$  表示  $V_{\sigma(t_0)}(Z(t_0))$ ,  $\theta(t) = \mu e^{-(t-t_k-\Delta t)}$ ,

$$\xi(t) = (1 - \alpha(t_k)) \left( e^{-(t-t_k-\Delta t)} \mu \left( e^{-\Delta t} + d_l^* (1 - e^{-\Delta t}) \right) + d_m (1 - e^{-(t-t_k-\Delta t)}) \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \alpha(t_k) \left( e^{-(t-t_k)} + d_l (1 - e^{-(t-t_k)}) \right) \\
 K(t) = & \sum_{i=1}^k \alpha(t_{i-1}) v^{N_{\sigma}(t_i, t_k)} \delta^{i-N_{\sigma}(t_i, t_k)} \frac{t_i - t_{i-1}}{t - t_0} \\
 & + \sum_{i=1}^k (1 - \alpha(t_{i-1})) v^{N_{\sigma}(t_i, t_k)} \delta^{i-N_{\sigma}(t_i, t_k)} \frac{\theta(t_i) \Delta t + t_i - (t_{i-1} + \Delta t)}{t - t_0}
 \end{aligned}$$

当  $\omega \equiv 0$  时, 由式 (3-36), 易见  $v^{N_{\sigma}(t_0, t_k)} \delta^{k-N_{\sigma}(t_0, t_k)} \leq v^{N_0} \delta^{-N_0} e^{k \ln(v^{\frac{1}{\varepsilon}} \delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}})}$ , 于是

$$V_{\sigma(t)}(t) \leq \xi(t) v^{N_{\sigma}(t_0, t_k)} \delta^{k-N_{\sigma}(t_0, t_k)} V_{\sigma(t_0)}(t_0) \leq \xi(t) \left( \frac{v}{\delta} \right)^{N_0} e^{k \ln(v^{\frac{1}{\varepsilon}} \delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}})} V_{\sigma(t_0)}(t_0) \quad (3-38)$$

当  $t \rightarrow \infty$  时, 有  $k \rightarrow \infty$ , 于是对于  $v^{\frac{1}{\varepsilon}} \delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} < 1$ , 显然有  $e^{k \ln(v^{\frac{1}{\varepsilon}} \delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}})} \rightarrow 0$ , 所以当  $\omega(t) \equiv 0$  时, 闭环系统 (3-1) 是全局渐近稳定性的。

当存在  $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$  时, 令

$$\kappa(t) = \xi(t) K(t) + \alpha(t) \frac{t - t_k}{t - t_0} + (1 - \alpha(t)) \left( \frac{\theta(t) \cdot \Delta t}{t - t_0} + \frac{t - (t_k + \Delta t)}{t - t_0} \right)$$

有

$$0 \leq V_{\sigma(t)}(t) \leq \xi(t) \left( \frac{v}{\delta} \right)^{N_0} e^{k \ln(v^{\frac{1}{\varepsilon}} \delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}})} V_{\sigma(t_0)}(t_0) - \kappa(t) \int_{t_0}^t H(s) e^{(s-t)} ds$$

由于  $\kappa(t)$  是有界函数, 所以可以得到  $\kappa_1 = \min\{\kappa(t)\}$ ,  $\kappa_2 = \max\{\kappa(t)\}$ , 则

$$\kappa_1 \int_{t_0}^t |y(t)|^2 e^{(s-t)} ds \leq \xi(t) \left( \frac{v}{\delta} \right)^{N_0} e^{k \ln(v^{\frac{1}{\varepsilon}} \delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}})} V_{\sigma(t_0)}(t_0) + \kappa_2 n \beta \int_{t_0}^t \|\omega(t)\|^2 e^{(s-t)} ds$$

上式两端从  $t = t_0 = 0$  到  $t = \infty$  积分得到

$$\kappa_1 \int_0^\infty |y(t)|^2 ds \leq \int_0^\infty \xi(t) \left( \frac{v}{\delta} \right)^{N_0} e^{k \ln(v^{\frac{1}{\varepsilon}} \delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}})} V_{\sigma(t_0)}(t_0) dt + \kappa_2 n \beta \int_0^\infty \|\omega(t)\|^2 ds \quad (3-39)$$

对于

$$\int_0^\infty \xi(t) \left( \frac{v}{\delta} \right)^{N_0} e^{k \ln(v^{\frac{1}{\varepsilon}} \delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}})} V_{\sigma(t_0)}(t_0) dt = [(1 - \alpha(t_k)) \zeta_1 + \alpha(t_k) \zeta_2] \left( \frac{v}{\delta} \right)^{N_0} V_{\sigma(t_0)}(t_0)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \zeta_1 = & \int_0^\infty \left( \mu(e^{-\Delta t} + d_l^* (1 - e^{-\Delta t})) e^{-(t-t_k-\Delta t)} + d_m (1 - e^{-(t-t_k-\Delta t)}) \right) e^{k \ln(v^{\frac{1}{\varepsilon}} \delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}})} dt \\
 \zeta_2 = & \int_0^\infty \left( e^{-(t-t_k)} + d_l (1 - e^{-(t-t_k)}) \right) e^{k \ln(v^{\frac{1}{\varepsilon}} \delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}})} dt
 \end{aligned}$$

由于  $\ln(v^{\frac{1}{\varepsilon}} \delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}) < 0$ , 并且  $k \geq \frac{t}{T} - 1$ , 当  $\alpha(t_k) = 0$  时, 则

$$\begin{aligned}
 \zeta_1 \leq & \int_0^\infty \left( \mu(e^{-\Delta t} + d_l^* (1 - e^{-\Delta t})) e^{-(t-t_k-\Delta t)} + d_m (1 - e^{-(t-t_k-\Delta t)}) \right) e^{(\frac{t}{T}-1) \ln(v^{\frac{1}{\varepsilon}} \delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}})} dt \\
 \leq & \int_0^\infty \left( \mu(e^{-\Delta t} + d_l^* (1 - e^{-\Delta t})) - d_m \right) e^{-(t-t_k-\Delta t) + (\frac{t}{T}-1) \ln(v^{\frac{1}{\varepsilon}} \delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}})} dt
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \int_0^\infty d_m e^{(\frac{t}{T}-1)\ln\left(v^{\frac{1}{\varepsilon}}\delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right)} dt \\
& = \frac{T(\mu(e^{-\Delta t} + d_l^*(1 - e^{-\Delta t})) - d_m)e^{(t_k+\Delta t)-\ln\left(v^{\frac{1}{\varepsilon}}\delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right)}}{T - \ln\left(v^{\frac{1}{\varepsilon}}\delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right)} - \frac{Td_me^{-\ln\left(v^{\frac{1}{\varepsilon}}\delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right)}}{\ln\left(v^{\frac{1}{\varepsilon}}\delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right)} := \hat{\zeta}_1
\end{aligned}$$

类似地, 当  $\alpha(t_k) = 1$  时, 易得

$$\zeta_2 \leq \frac{T(1 - d_l)e^{t_k - \ln\left(v^{\frac{1}{\varepsilon}}\delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right)}}{T - \ln\left(v^{\frac{1}{\varepsilon}}\delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right)} - \frac{Td_l e^{-\ln\left(v^{\frac{1}{\varepsilon}}\delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right)}}{\ln\left(v^{\frac{1}{\varepsilon}}\delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right)} := \hat{\zeta}_2$$

令  $\zeta = \max\{\mu(e^{-\Delta t} + d_l^*(1 - e^{-\Delta t}))\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2\}$ , 则

$$\int_0^\infty \xi(t) \left(\frac{v}{\delta}\right)^{N_0} e^{k\ln\left(v^{\frac{1}{\varepsilon}}\delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right)} V_{\sigma(t_0)}(t_0) dt \leq \zeta \left(\frac{v}{\delta}\right)^{N_0} V_{\sigma(t_0)}(t_0)$$

令  $\gamma^2 = \frac{\kappa_2 n \beta}{\kappa_1}$ , 则式 (3-39) 可写成如下形式:

$$\int_0^\infty y^T(t)y(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty \omega^T(t)\omega(t)dt + \frac{\zeta}{\kappa_1} V_{\sigma(t_0)}(t_0) \quad (3-40)$$

因此, 系统 (3-1) 具有加权  $L_2$ -增益水平  $\gamma$ .  $\square$

**注解 3.1** 在零初值条件下, 有  $V_{\sigma(t_0)}(0) = 0$ , 由式 (3-40) 可以得到系统的  $L_2$ -增益水平表达式  $\gamma^2 = \frac{\int_0^\infty y^T(t)y(t)dt}{\int_0^\infty \omega^T(t)\omega(t)dt}$ , 其中系统的  $L_2$ -增益水平  $\gamma$  越小, 则表示系统的性能越好。

**注解 3.2** 本章方法的采样周期  $T$  与系统性能密切相关。在相同条件下, 选择的采样周期  $T$  越小, 所获得的采样点就越密集, 得到的系统信息越丰富, 获得的结果也越准确。但是这会导致数据量大大增加, 从而影响系统计算时效。如果采样周期  $T$  大于最小的两个相邻切换的长度, 则在一些密集的切换之间可能没有采样点, 这会导致系统信息丢失。因此, 我们需要令采样周期  $T \leq T_d$ , 以避免系统出现较大的误差 (另请参见 [76])。

**注解 3.3** 文献 [11] 和 [32] 分别利用线性矩阵不等式方法和多 Lyapunov 函数方法研究切换非线性系统的性能, 与之相比, 本章利用周期采样方法将系统离散化, 减少了运算数据量, 并获得了较好的稳定性。与文献 [58] 相比, 本章考虑了系统的加权  $L_2$ -增益性能, 并推导出了平均驻留时间和采样周期之间的关系。特别地, 相较于文献 [59], 本章通过引入判断函数  $\alpha(t_k)$ , 在采样点与切换信号之间建立起联系, 解决了运算过程中无法判断切换时刻的困扰。

以上研究的是系统 (3-1) 中  $x_i$  和  $u$  的系数为 1 时的结果, 下面将对系统 (3-1) 进行推广:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \varphi_{i,\sigma(t)}(t)x_{i+1} + f_{i,\sigma(t)}(x_1, \dots, x_i) + \Phi_{i,\sigma(t)}(x_1, \dots, x_i)\omega, & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n = \varphi_{n,\sigma(t)}(t)u + f_{n,\sigma(t)}(x_1, \dots, x_n) + \Phi_{n,\sigma(t)}(x_1, \dots, x_n)\omega \\ y = h(x_1) \end{cases} \quad (3-41)$$

其中  $\varphi_{i,\sigma(t)}(t) \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  为未知参数, 其他函数定义与模型 (3-1) 相同, 给出以下推论:

**推论 3.1** 对于允许的采样周期  $T$ , 令  $\bar{v}^{\frac{1}{\varepsilon}} \bar{\delta}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} < 1$ , 其中  $\bar{\delta}$  和  $\bar{v}$  是关于  $T$  的常数, 具体定义形式在证明过程中给出。若假设 3.1 成立, 并且采样周期  $T$  与平均驻留时间满足

$$\tau_a > \left(1 - \frac{\ln \bar{v}}{\ln \bar{\delta}}\right) T$$

得到如下采样控制器

$$u_{\sigma(t)} = -\alpha_{n,\sigma(t)}(z_1(t_k), \dots, z_{n,\sigma(t)}(t_k))z_{n,\sigma(t)}(t_k)$$

其中

$$\alpha_{n,\sigma(t)}(z_1(t), \dots, z_{n,\sigma(t)}(t)) = \begin{cases} \frac{1}{\varphi_{1,\sigma(t)}(t)} \left[ 1 + \rho_{1,l}(z_1) + \hat{\rho}_0(z_1) + \frac{1}{4\beta} \Psi_{1,\sigma(t)}^2(z_1) \right], & n = 1 \\ \frac{1}{\varphi_{n,\sigma(t)}(t)} \left[ 1 + \frac{\varphi_{n-1,\sigma(t)}^2(t)}{2} + \hat{\rho}_{n,\sigma(t)}(z_1, \dots, z_{n,\sigma(t)}) \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{4\beta} \Psi_{n,\sigma(t)}^2(z_1, \dots, z_{n,\sigma(t)}) \right], & n > 1 \end{cases}$$

则当  $\omega(t) \equiv 0$  时, 闭环系统 (3-41) 是全局渐近稳定的, 并且当存在  $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$  时, 系统具有加权  $L_2$ -增益水平  $\gamma$ 。

**证明:** 类似于定理 3.1 的证明, 这里也分两种情况研究系统 (3-41) 的性能, 即采样区间中没有切换和采样区间中只有一次切换。

情况 i): 当  $\sigma(t_k) = \sigma(t_{k+1}) = l$ ,  $l \in l_N$  时, 第  $l$  个子系统在整个区间  $[t_k, t_{k+1})$  上被激活。我们选择与定理 3.1 相同的 Lyapunov 函数。

第 1 步: 对于  $0 < \beta \leq \frac{\gamma^2}{n}$ , 令  $x_{2,l}^* = -z_1 \alpha_{1,l}(x_1)$ , 其中

$$\alpha_{1,l}(z_1) = \frac{1}{\varphi_{1,l}} \left( n + \rho_{1,l}(z_1) + \rho_0(z_1) + \frac{\Phi_{1,l}^2(z_1)}{4\beta} \right)$$

得到

$$\dot{V}_{1,l} + y^2 - \beta \|\omega\|^2 \leq -nz_1^2 + z_1 \varphi_{1,l}(x_2 - x_{2,l}^*) \quad (3-42)$$

第 2 步: 令  $x_{3,l}^*(x_1, x_2) = -z_{2,l} \alpha_{2,l}(z_1, z_{2,l})$ , 其中

$$\alpha_{2,l}(z_1, z_{2,l}) = \frac{1}{\varphi_{2,l}} \left( n - 1 + \frac{\varphi_{1,\sigma(t)}^2(t)}{2} + \hat{\rho}_{2,l}(z_1, z_{2,l}) + \frac{\Psi_{2,l}^2(z_1, z_{2,l})}{4\beta} \right)$$

则

$$\dot{V}_{2,l} + y^2 - 2\beta\|\omega\|^2 \leq -(n-1)(z_1^2 + z_{2,l}^2) + z_{2,l}\varphi_{2,l}(x_3 - x_{3,l}^*) \quad (3-43)$$

第  $n$  步: 令

$$u_l^* = -\alpha_{n,l}(z_1(t), \dots, z_{n,l}(t))z_{n,l}(t)$$

其中

$$\alpha_{n,l}(z_1, \dots, z_{n,l}) = \frac{1}{\varphi_{n,l}} \left( 1 + \frac{\varphi_{n-1,\sigma(t)}^2(t)}{2} + \hat{\rho}_{n,l}(z_1, \dots, z_{n,l}) + \frac{\Psi_{n,l}^2(z_1, z_{2,l}, \dots, z_{n,l})}{4\beta} \right)$$

可得

$$\dot{V}_{n,l} + y^2 - n\beta\|\omega\|^2 \leq -(z_1^2 + z_{2,l}^2 + \dots + z_{n,l}^2) + z_{n,l}\varphi_{n,l}(u_l - u_l^*) \quad (3-44)$$

有

$$\begin{aligned} \dot{V}_{n,l}(t) + y^2 - n\beta\|\omega\|^2 &\leq \bar{d}_3 \sqrt{V_{n,l}(t)} \sqrt{V_{n,l}(t_k)} (e^{\alpha T} - 1) - 2V_{n,l}(t) \\ &\leq \bar{d}_l V_{n,l}(t_k) - V_{n,l}(t), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \end{aligned} \quad (3-45)$$

其中  $\bar{d}_3$  是常数, 并且  $\bar{d}_l = \frac{[\bar{d}_3(e^{\alpha T} - 1)]^2}{4}$ , 于是

$$V_{n,l}(t) \leq [e^{-(t-t_k)} + \bar{d}_l(1 - e^{-(t-t_k)})] V_{n,l}(t_k) - \int_{t_k}^t H(s)e^{(s-t)} ds \quad (3-46)$$

其中  $H(t) = y^2(t) - n\beta\|\omega(t)\|^2$ .

情况 ii): 当  $\sigma(t_k) = l \neq \sigma(t_{k+1}) = m$  时, 可以看出

$$\begin{aligned} \dot{V}_{n,m} + y^2 - n\beta\|\omega\|^2 &\leq \bar{d}_3 \sqrt{V_{n,m}(t)} \sqrt{V_{n,m}(t_k)} (e^{\alpha T} + 1) - 2V_{n,m}(t) \\ &\leq \bar{d}_m V_{n,m}(t_k) - V_{n,m}(t), \quad \forall t \in [t_k + \Delta t, t_{k+1}) \end{aligned} \quad (3-47)$$

其中  $\bar{d}_m = \frac{[\bar{d}_3(e^{\alpha T} + 1)]^2}{4}$ .

类似定理 3.1 的证明, 即从式 (3-29) 到式 (3-40) 的过程, 易得

$$V_{n,m}(t_{k+1}) \leq \bar{v}V_{n,l}(t_k) - \bar{\theta} \int_{t_k}^{t_k+\Delta t} H(s)e^{s-(t_k+\Delta t)} ds - \int_{t_k+\Delta t}^{t_{k+1}} H(s)e^{s-t_{k+1}} ds \quad (3-48)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \mu \left[ 1 + \frac{(\bar{d}_3(e^{\alpha T} - 1))^2}{4} \right] + \frac{(\bar{d}_3(e^{\alpha T} + 1))^2}{4} \\ \bar{\theta} &= \mu e^{-(T-\Delta t)} \end{aligned}$$

当  $\omega \equiv 0$  时, 得到

$$V_{\sigma(t)}(t) \leq \bar{\xi}(t) \left( \frac{\bar{v}}{\bar{\delta}} \right)^{N_0} e^{k \ln \left( \bar{v}^{\frac{1}{\bar{\delta}}} \bar{\delta}^{\frac{\varepsilon-1}{\bar{\delta}}} \right)} V_{\sigma(t_0)}(t_0) \quad (3-49)$$

其中

$$\begin{aligned}\bar{\xi}(t) &= (1 - \alpha(t_k)) \left( \mu \left( e^{-\Delta t} + \bar{d}_l^* \left( 1 - e^{-\Delta t} \right) \right) e^{-(t-t_k-\Delta t)} + \bar{d}_m \left( 1 - e^{-(t-t_k-\Delta t)} \right) \right) \\ &\quad + \alpha(t_k) \left( e^{-(t-t_k)} + \bar{d}_l \left( 1 - e^{-(t-t_k)} \right) \right) \\ \bar{\delta} &= e^{-T} + \bar{d}_l \left( 1 - e^{-T} \right), \quad \bar{d}_l^* = \frac{[\bar{d}_3(e^{\alpha\Delta t} - 1)]^2}{4}\end{aligned}$$

当  $t \rightarrow \infty$  时, 也即  $k \rightarrow \infty$ , 于是由  $\bar{v}^{\frac{1}{\varepsilon}} \bar{\delta}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} < 1$ , 得到  $e^{k \ln(\bar{v}^{\frac{1}{\varepsilon}} \bar{\delta}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}})} \rightarrow 0$ . 因此, 当  $\omega(t) \equiv 0$  时, 闭环系统 (3-41) 是全局渐近稳定的。

当存在  $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$  时, 得到

$$\int_0^\infty y^T(t)y(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty \omega^T(t)\omega(t)dt + \bar{\kappa} V_{\sigma(t_0)}(t_0) \quad (3-50)$$

其中  $\gamma$  和  $\bar{\kappa}$  是常量。因此, 系统 (3-41) 具有一个加权的  $L_2$ -增益水平  $\gamma$ .  $\square$

**算法 3.1** 基于上述的证明过程, 给出如下算法:

1. 将原始系统进行坐标变换, 得到系统的标准形式, 即将系统 (3-1) 转换为系统 (3-2)。
2. 选择常数  $\gamma > 0$ , 取定  $\beta$ , 其中  $0 < \beta \leq \frac{\gamma^2}{n}$ ,  $n$  是系统维数。
3. 选取主要参数  $\tau_a$  来获取采样周期  $T$ ,  $T$  要小于最小切换区间, 并且需要满足  $\tau_a > \left(1 - \frac{\ln \nu}{\ln \delta}\right) T$ , 其中  $\delta$  和  $\nu$  通过式 (3-24) 和式 (3-34) 计算得到。
4. 根据递推过程求解控制器, 使得控制器  $u_\sigma$  满足式 (3-17)。
5. 将控制器  $u_\sigma$  代入系统求解。

对于推论 3.1, 其算法步骤与上述过程类似, 并且在下一节的例 3.2 中也给出了关于推论 3.1 的数值模拟结果。

### 3.3 仿真分析

在这一部分, 给出两个实际的数值例子来说明该方法的可行性。

**例 3.1** 考虑如下具有两种进料模式的切换式连续搅拌釜反应器系统<sup>[26, 74]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{C}_A = \frac{q_I}{V} (C_{Afi} - C_A) - a_0 e^{-\frac{E}{RT}} C_A + \omega(t) \\ \dot{T} = \frac{q_I}{V} (T_{fi} - T) - a_1 e^{-\frac{E}{RT}} C_A + a_2 (T_c - T) \end{cases} \quad (3-51)$$

系统 (3-51) 中参数的物理含义参见文献 [74], 这里不再赘述, 本章将考虑反应物的浓度对该化学反应速率的扰动  $\omega(t)$ , 控制目标是使反应物浓度和温度达到恒定的参考值。通过平衡点平移和参数赋值, 系统 (3-51) 可以表示为以下由两个子系统组成的切换系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 0.5x_1 + \omega(t) \\ \dot{x}_2 = u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3-52)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2x_1 + \omega(t) \\ \dot{x}_2 = u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3-53)$$

通过使用坐标变换和上述证明过程, 选择如下的采样数据控制器:

$$u_{\sigma(t)} = -z_{2,\sigma(t)} \left( 1 + \tilde{\rho}_{2,\sigma(t)} + \hat{\rho}_{2,\sigma(t)} + \frac{\psi_{2,\sigma(t)}^2}{4\beta} \right)$$

其中

$$\begin{aligned} x_{2,1}^*(t) &= -x_1(t)(3.5 + \frac{1}{4\beta}), \quad z_{2,1}(t) = x_2(t) - x_{2,1}^*(t) \\ \Phi_{2,1}(t) &= 3.5 + \frac{1}{4\beta}, \quad F_{2,1} = \left( 3.5 + \frac{1}{4\beta} \right) (x_2 + 0.5x_1) \\ \Psi_{2,1}(t) &\geq \frac{4\beta}{z_{2,1}^2} \left( \|z_{2,1} \Phi_{2,1} x_1\| \omega - \beta \|\omega\|^2 \right) \\ \hat{\rho}_{2,1}(t) &\geq \frac{1}{z_{2,1}^2} \left( |z_{2,1} F_{2,1}| - \frac{x_1^2 + z_{2,1}^2}{2} \right) \\ \tilde{\rho}_{2,1}(t) &\geq \frac{1}{z_{2,1}^2} \left( |x_1 [(z_{2,1} + x_{2,1}^*) - x_{2,1}^*]| - \frac{x_1^2 + z_{2,1}^2}{2} \right) \\ x_{2,2}^*(t) &= -x_1(t)(5 + \frac{1}{\beta}), \quad z_{2,2}(t) = x_2(t) - x_{2,2}^*(t) \\ \Phi_{2,2}(t) &= 5 + \frac{1}{4\beta}, \quad \Psi_{2,2}(t) \geq \frac{4\beta}{z_{2,2}^2} \left( \|z_{2,2} \Phi_{2,2} x_1\| \omega - \beta \|\omega\|^2 \right) \\ \hat{\rho}_{2,2}(t) &\geq \frac{1}{z_{2,2}^2} \left( |z_{2,2} F_{2,2}| - \frac{x_1^2 + z_{2,2}^2}{2} \right), \quad F_{2,2} = \left( 5 + \frac{1}{4\beta} \right) (x_2 + 2x_1) \\ \tilde{\rho}_{2,2}(t) &\geq \frac{1}{z_{2,2}^2} \left( |x_1 [(z_{2,2} + x_{2,2}^*) - x_{2,2}^*]| - \frac{x_1^2 + z_{2,2}^2}{2} \right) \end{aligned}$$

这里给出如下主要参数:  $\tau_a = 1, \beta = 12, T = 0.2$ . 图 3-2 显示了切换信号函数  $\sigma(t)$  和由“\*”表示的周期采样点。基于给定的参数和切换信号  $\sigma(t)$ , 图 3-3 给出了子系统的控制输入。

当  $\omega(t) = 0$  时, 图 3-4 是初始状态为  $x_1(0) = 30, x_2(0) = -20$  的模拟结果, 系统状态最后是趋于稳定的, 即反应器系统 (3-51) 中反应物浓度和温度达到了恒定的参考值, 并可以持续保持。

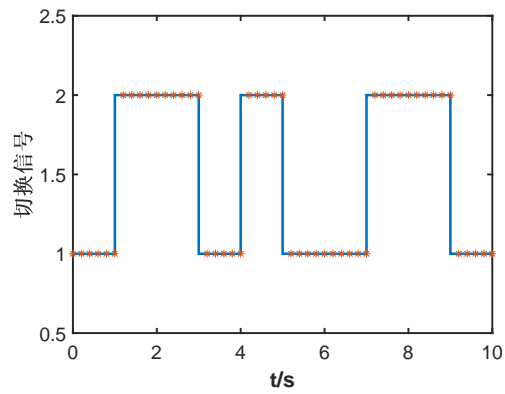


图 3-2 具有采样点的切换信号函数  
Fig 3-2 The switching signal function with the sampling points

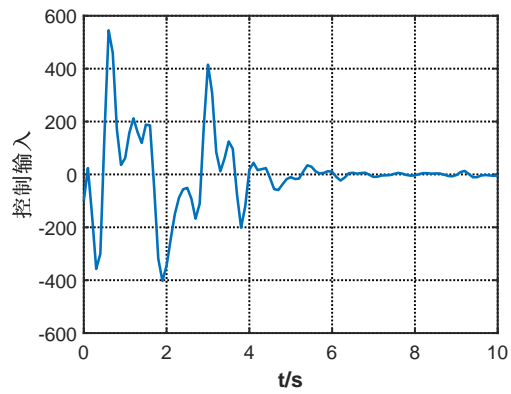


图 3-3 控制器输入  
Fig 3-3 The controller input

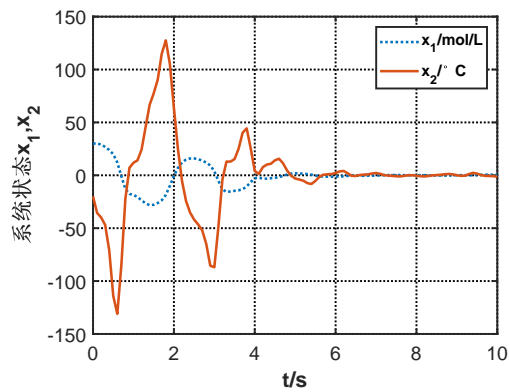


图 3-4 系统状态响应  
Fig 3-4 The system state response

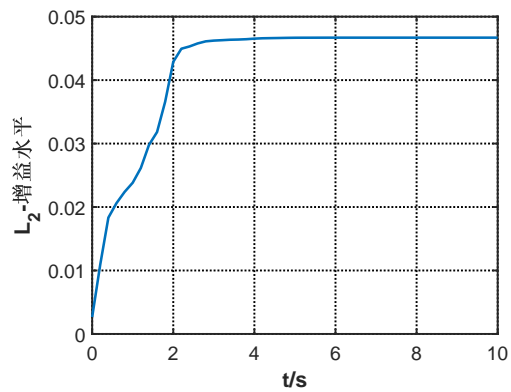


图 3-5  $L_2$ -增益  $\gamma$   
Fig 3-5 The  $L_2$ -gain  $\gamma$

当  $\omega(t) = e^{-t}$  时, 可以获得  $\gamma^2(s) = \frac{\int_0^s y^T(\tau)y(\tau)d\tau}{\int_0^s \omega^T(\tau)\omega(\tau)d\tau}$ . 在初始状态为  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 0$  时, 图 3-5 给出了  $L_2$ -增益水平情况图, 此时系统的  $L_2$ -增益水平远小于  $\gamma = 5$ , 表示反应器系统 (3-51) 在受到一定程度外部扰动时仍然具有良好的性能。

例 3.2 考虑具有两个子系统的不确定切换非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi_{1,\sigma(t)}(t)x_2 + f_{1,\sigma(t)}(x_1) + \Phi_{1,\sigma(t)}(x_1, x_2)\omega \\ \dot{x}_2 = \varphi_{2,\sigma(t)}(t)u + f_{2,\sigma(t)}(x_1, x_2) + \Phi_{2,\sigma(t)}(x_1, x_2)\omega \\ y = h(x_1) \end{cases} \quad (3-54)$$

其中  $\varphi_{1,1}(t) = 2 + \cos t$ ,  $\varphi_{1,2}(t) = 3$ ,  $\varphi_{2,1}(t) = 2$ ,  $\varphi_{2,2}(t) = 3 + 0.1\cos t$ ,  $f_{1,1}(x_1) = 0.5x_1 \cos x_1$ ,  $f_{1,2}(x_1) = 0.3x_1 \sin x_1$ ,  $f_{2,1}(x_1, x_2) = 0.4(x_1 + x_2 \sin x_1)$ ,  $f_{2,2}(x_1, x_2) = 0.5(x_1 \cos x_2 + x_2)$ ,  $\Phi_{1,1}(x_1, x_2) = \sin x_1$ ,  $\Phi_{2,1}(x_1, x_2) = 1 + \cos x_2$ ,  $\Phi_{1,2}(x_1, x_2) = \cos x_1$ ,  $\Phi_{2,2}(x_1, x_2) = 1 + \sin x_2$ ,  $h(x_1) = x_1$ .

通过使用坐标变化, 基于上述的证明, 选择如下采样数据控制器:

$$u_{\sigma(t)} = -\frac{z_{2,\sigma}}{\varphi_{2,\sigma(t)}} \left( 1 + \frac{\varphi_{1,\sigma(t)}^2}{2} + \hat{\rho}_{2,\sigma(t)} + \frac{\psi_{2,\sigma(t)}^2}{4\beta} \right)$$

其中

$$\begin{aligned} x_{2,1}^*(t) &= -x_1(t)(3 + 0.5\cos x_1 + \frac{\sin^2 x_1}{4\beta}), \quad z_{2,1}(t) = x_2(t) - x_{2,1}^*(t) \\ \Phi_{2,1}(t) &= \Phi_{2,1} - \frac{\partial x_{2,1}^*}{\partial x_1} \Phi_{1,1}, \quad F_{2,1} = f_{2,1} - \frac{\partial x_{2,1}^*}{\partial x_1} f_{1,1} \\ \psi_{2,1}(t) &\geq \frac{4\beta}{z_{2,1}^2} \left( \|z_{2,1} \Phi_{2,1} x_1\| \omega - \beta \|\omega\|^2 \right) \\ \hat{\rho}_{2,1}(t) &\geq \frac{1}{z_{2,1}^2} \left( |z_{2,1} F_{2,1}| - \frac{x_1^2 + z_{2,1}^2}{2} \right) \\ x_{2,2}^*(t) &= -x_1(t)(3 + 0.3\sin x_1 + \frac{\cos^2 x_1}{4\beta}), \quad z_{2,1}(t) = x_2(t) - x_{2,2}^*(t) \\ \Phi_{2,1}(t) &= \Phi_{2,2} - \frac{\partial x_{2,2}^*}{\partial x_1} \Phi_{1,2}, \quad F_{2,2} = f_{2,2} - \frac{\partial x_{2,2}^*}{\partial x_1} f_{1,2} \\ \psi_{2,2}(t) &\geq \frac{4\beta}{z_{2,2}^2} \left( \|z_{2,2} \Phi_{2,2} x_1\| \omega - \beta \|\omega\|^2 \right) \\ \hat{\rho}_{2,2}(t) &\geq \frac{1}{z_{2,2}^2} \left( |z_{2,2} F_{2,2}| - \frac{x_1^2 + z_{2,2}^2}{2} \right) \end{aligned}$$

在仿真中, 主要参数给出如下:  $\tau_a = 1$ ,  $\beta = 10$  和  $T = 0.1$ . 图 3-6 表示的是切换信号函数  $\sigma(t)$  和周期采样点 “\*” 的图像。基于给定的参数和切换信号

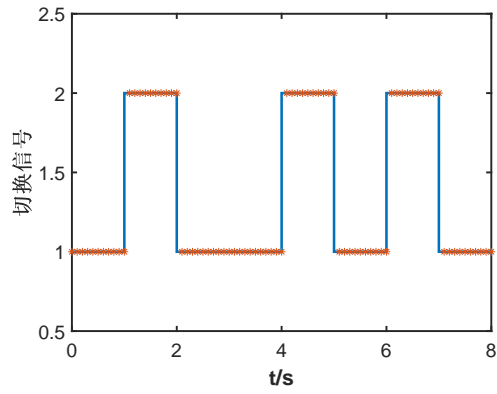


图 3-6 具有采样点的切换信号函数  
Fig 3-6 The switching signal function with the sampling points

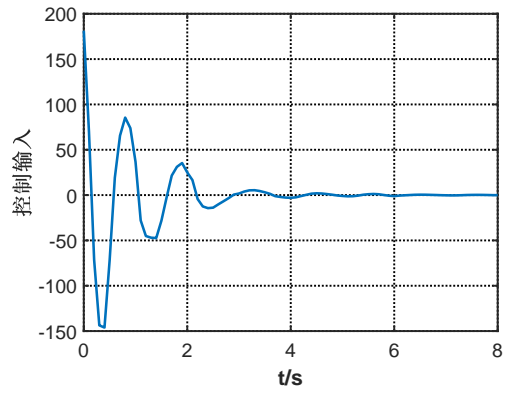


图 3-7 控制器输入  
Fig 3-7 The controller input

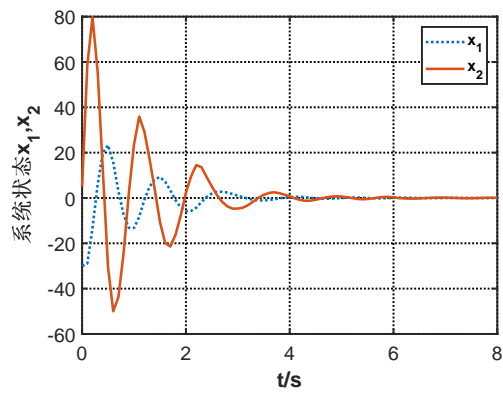


图 3-8 系统状态响应  
Fig 3-8 The system state response

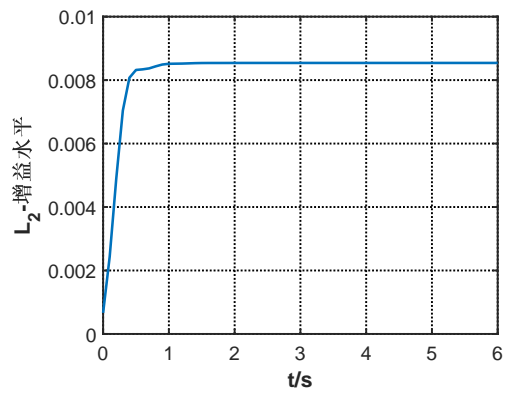


图 3-9  $L_2$ -增益  $\gamma$   
Fig 3-9 The  $L_2$ -gain  $\gamma$



$\sigma(t)$ , 图 3-7 给出了子系统的控制输入。在控制器的作用下, 得到在初始状态  $x_1(0) = -30, x_2(0) = 5$  下系统趋于稳定, 如图 3-8 所示。

当  $\omega(t) = e^{-t}$  时, 图 3-9 给出了初始状态为  $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0$  时系统的  $L_2$ -增益水平图像, 显然系统的  $L_2$ -增益水平远小于  $\gamma = 5$ 。

### 3.4 本章小结

通过使用周期采样方法解决了一类切换非线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题。该研究利用反步法设计状态反馈控制器, 并且利用平均驻留时间方法得到了采样周期的限制条件, 通过引入判断函数分析切换信号与 Lyapunov 函数方法之间的关系, 得到了系统是全局渐近稳定的, 并且具有加权  $L_2$ -增益性能。该方案补充了切换非线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题的研究方法。

## 第 4 章 基于数据采样的切换随机非线性系统的鲁棒 $H_\infty$ 控制问题

在实际生产中,系统的随机性(例如:外部随机干扰)始终存在,并且通常成为影响系统稳定性的来源。切换系统作为广泛使用在各个领域的混杂系统,系统中的随机因素对切换系统的稳定性影响很大,这使得对切换随机系统稳定性的研究至关重要。

随着采样数据控制技术的发展,学者们尝试利用采样技术来研究随机非线性系统的稳定性问题,其中对于切换仿射系统、切换线性系统和切换非线性系统,学者们通过采样数据控制得到了稳定性结果<sup>[121-123]</sup>。随后,一些学者通过采样数据控制研究了带有随机扰动的切换线性系统的鲁棒稳定性<sup>[124, 125]</sup>。毛军等人<sup>[79]</sup>通过选择适当的分段 Lyapunov 函数,解决了一类切换随机非线性系统的采样数据输出反馈稳定性问题,但是没有考虑系统的鲁棒性能,所以能否通过数据采样技术研究切换随机非线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题值得深思。

在第 3 章中,利用周期采样技术,通过设计状态反馈控制器研究了一类切换非线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题。事实上,很多时候系统的状态并不是全部可测的,这时就无法通过状态反馈控制约束系统的状态。另一方面,系统的输出结果通常是可测的,所以利用输出反馈器来研究切换随机非线性系统具有重要意义。本章将基于第 3 章的研究基础上,通过构造输出反馈控制器研究一类切换随机非线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题。

### 4.1 切换随机非线性系统的描述及预备知识

考虑具有如下形式的切换随机非线性系统:

$$\begin{cases} dx_i = [x_{i+1} + f_{i,\sigma(t)}(\bar{x}_i) + \phi_{i,\sigma(t)}(\bar{x}_i)\omega]dt + g_{i,\sigma(t)}^T(\bar{x}_i)d\vartheta, i = 1, \dots, n-1 \\ dx_n = [u(t) + f_{n,\sigma(t)}(x) + \phi_{n,\sigma(t)}(x)\omega]dt + g_{n,\sigma(t)}^T(x)d\vartheta \\ y = h(x_1) \end{cases} \quad (4-1)$$

其中,  $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  是系统 (4-1) 的状态,  $\bar{x}_i = [x_1, \dots, x_i]^T, i = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $y$  是控制输出,  $\omega$  是扰动输入, 且  $\omega \in L_2[0, \infty)$ ,  $u$  表示控制输入,  $\vartheta$  是标准 Wiener 过程, 右连续函数  $\sigma: \mathbb{R}^+ \rightarrow I_N = \{1, 2, \dots, N\}$  是切换规律,  $f_{i,\sigma(t)}, g_{i,\sigma(t)}, \phi_{i,\sigma(t)}, i = 1, \dots, n$  和  $h$  是光滑函数。

基于文献 [58, 112, 119], 给出如下一些定义和假设。

**定义 4.1** 对于任何给定的  $V(x) \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+)$ , 基于随机系统 (4-1), 微分算子  $\mathcal{L}$  定义为

$$\mathcal{L}V(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ g(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} g^T(x) \right\}$$

**假设 4.1** 对于  $i = 1, 2, \dots, n$ , 光滑函数  $f_i(x_1, \dots, x_i)$  和  $g_i(x_1, \dots, x_i)$  满足

$$|f_i(x_1, \dots, x_i)| \leq a_i(|x_1| + \dots + |x_i|)$$

$$|g_i(x_1, \dots, x_i)| \leq b_i(|x_1| + \dots + |x_i|)$$

其中  $a_i$  和  $b_i$  是正常数。

**定义 4.2** 对于任何常数  $\gamma > 0$ , 定义每个子系统的控制定律  $u_i(\cdot)$ , 并且  $u_i(0) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . 在切换信号  $\sigma(t)$  下, 通过设计控制器, 当  $\omega(t) \equiv 0$  时, 闭环系统 (4-1) 是均方渐近稳定的, 并且对于  $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$ , 如果存在实值函数  $\beta(s)$  且  $\beta(0) = 0$ , 使得

$$\mathbb{E} \left\{ \int_0^\infty \|y(t)\|^2 dt \right\} \leq \beta(s(t_0)) + \gamma^2 \mathbb{E} \left\{ \int_0^\infty \|\omega(t)\|^2 dt \right\}$$

成立, 则称闭环系统 (4-1) 具有  $L_2$ -增益水平  $\gamma$ .

**引理 4.1** <sup>[82]</sup> 设  $p \in \mathbb{R}^+$ , 对于  $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , 有

$$|x_1 + \dots + x_n|^p \leq \max\{n^{p-1}, 1\} (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)$$

## 4.2 观测器设计

对系统 (4-1) 进行如下坐标变换:

$$z_i = \frac{x_i}{L^{i-1}}, \quad v = \frac{u(t)}{L^n}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4-2)$$

其中  $L \geq 1$  是设计参数, 则系统 (4-1) 可以改写为如下方程:

$$\begin{cases} dz_i = (Lz_{i+1} + \bar{f}_{i,\sigma(t)}(z) + \bar{\phi}_{i,\sigma(t)}(z)\omega) dt + \bar{g}_{i,\sigma(t)}^T(z) d\vartheta, & i = 1, \dots, n-1 \\ dz_n = (Lv(t) + \bar{f}_{n,\sigma(t)}(z) + \bar{\phi}_{n,\sigma(t)}(z)\omega) dt + \bar{g}_{n,\sigma(t)}^T(z) d\vartheta \\ y = h(z_1) \end{cases} \quad (4-3)$$

其中  $\bar{f}_{i,\sigma(t)}(z) = \frac{1}{L^{i-1}} f_{i,\sigma(t)}(z_1, Lz_2, \dots, L^{i-1}z_i)$ ,  $\bar{g}_{i,\sigma(t)}(z) = \frac{1}{L^{i-1}} g_{i,\sigma(t)}(z_1, Lz_2, \dots, L^{i-1}z_i)$ ,  $\bar{\phi}_{i,\sigma(t)}(z) = \frac{1}{L^{i-1}} \phi_{i,\sigma(t)}(z_1, Lz_2, \dots, L^{i-1}z_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . 于是, 观测器可以被构造为如下形式:

$$\begin{cases} d\hat{x}_i = (\hat{x}_{i+1} - L^i a_i \hat{x}_1) dt, & i = 1, \dots, n-1 \\ d\hat{x}_n = (u(t) - L^n a_n \hat{x}_1) dt, & t \in [t_k, t_{k+1}) \end{cases} \quad (4-4)$$

其中  $a_i, i \in \mathbb{N}$  是 Hurwitz 多项式  $p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$  的系数。利用方程 (4-2) 的变换得到

$$\begin{cases} d\hat{z}_i = (L\hat{z}_{i+1} - La_i\hat{z}_1) dt, & i = 1, \dots, n-1 \\ d\hat{z}_n = (Lv(t) - La_n\hat{z}_1) dt, & t \in [t_k, t_{k+1}) \end{cases} \quad (4-5)$$

其中, 对于  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $v(t) = v(t_k)$ . 定义  $e_i = z_i - \hat{z}_i, i \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T$ . 结合 (4-3) 和 (4-5), 得到系统误差

$$d\mathbf{e} = (L\hat{A}\mathbf{e} + \bar{F}_{\sigma(t)}(z) + \bar{\Psi}_{\sigma(t)}(z) + \bar{\Phi}_{\sigma(t)}(z)\omega) dt + \bar{G}_{\sigma(t)}^T(z)d\vartheta \quad (4-6)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \\ \bar{F}_{\sigma(t)}(\cdot) &= [\bar{f}_{1,\sigma(t)}(\cdot), \bar{f}_{2,\sigma(t)}(\cdot), \dots, \bar{f}_{n,\sigma(t)}(\cdot)]^T \\ \bar{\Psi}_{\sigma(t)}(\cdot) &= [La_1z_1, La_2z_1, \dots, La_nz_1]^T \\ \bar{\Phi}_{\sigma(t)}(\cdot) &= [\bar{\phi}_{1,\sigma(t)}(\cdot), \bar{\phi}_{2,\sigma(t)}(\cdot), \dots, \bar{\phi}_{n,\sigma(t)}(\cdot)]^T \\ \bar{G}_{\sigma(t)}(\cdot) &= [\bar{g}_{1,\sigma(t)}(\cdot), \bar{g}_{2,\sigma(t)}(\cdot), \dots, \bar{g}_{n,\sigma(t)}(\cdot)] \end{aligned}$$

### 4.3 控制器设计及性能分析

本节将解决系统 (4-1) 的全局渐近稳定和  $L_2$ -增益问题。类似于第 3 章, 不失一般性, 假设在每个采样区间内最多发生一次切换, 这意味着  $T \leq T_d$  (参见 [76])。我们将分两种情况分析系统 (4-1): i) 采样区间无切换, 则激活的子系统与其匹配的控制器的同步; ii) 采样区间有一个切换, 则激活的子系统在切换之前与其相应的控制器同步, 切换瞬间以后, 直到下一个采样时间开始为异步过程, 详细过程亦可参见第 3 章中图 3-1。

接下来, 分两种情况对切换系统 (4-1) 进行分析:

情况 i): 当  $\sigma(t_k) = \sigma(t_{k+1}) = l, l \in l_N$  时, 第  $l$  个子系统在整个区间  $[t_k, t_{k+1})$  上被激活。

第 0 步: 选择

$$V_{0,l}(\mathbf{e}) = (n+1)\mathbf{e}^T P_l \mathbf{e}$$

其中  $P_l = P_l^T > 0, A^T P_l + P_l A = -I$ . 由 (4-6) 式得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_0 \leq & -(n+1)L\|\mathbf{e}\|^2 + 2(n+1)\mathbf{e}^T P_l \bar{F}_l(z) + 2(n+1)\mathbf{e}^T P_l \bar{\Psi}_l(z) \\ & + 2(n+1)\mathbf{e}^T P_l \bar{\Phi}_l(z)\omega + \frac{1}{2} \left\{ \bar{G}_l(z) \frac{\partial^2 V_0(\mathbf{e})}{\partial \mathbf{e}^2} \bar{G}_l^T(z) \right\} \end{aligned} \quad (4-7)$$

接下来, 研究式 (4-7) 的右侧。由假设 4.1 和引理 4.1, 可得

$$\begin{aligned} 2(n+1)\mathbf{e}^T P_l \bar{F}_l(z) & \leq (n+1)^2 \|\mathbf{e}\|^2 \|P_l\|^2 + |\bar{F}_l(z)|^2 \\ & \leq (n+1)^2 \|\mathbf{e}\|^2 \|P_l\|^2 + nc^2 \left( \sum_{i=1}^n |z_i| \right)^2 \\ & = \tilde{c}_l \|\mathbf{e}\|^2 + 3nc^2 \left( z_1^2 + (n-1) \sum_{i=2}^n \hat{z}_i^2 \right) \end{aligned} \quad (4-8)$$

其中  $\tilde{c}_l = (n+1)^2 \|P_l\|^2 + 3n(n-1)c^2$ . 类似地, 有

$$2(n+1)\mathbf{e}^T P_l \bar{\Psi}_l(z) \leq \frac{1}{2} L \|\mathbf{e}\|^2 + 2(n+1)^2 L \|P_l\|^2 z_1^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad (4-9)$$

基于假设 4.1, 得到

$$2(n+1)\mathbf{e}^T P_l \bar{\Phi}_l(z)\omega \leq \frac{1}{\beta} (n+1)^2 \|P_l\|^2 \sum_{i=1}^n \varphi_{i,l}^2 \|\mathbf{e}\|^2 + \beta \|\omega\|^2 \quad (4-10)$$

并且

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \bar{G}_l(z) \frac{\partial^2 V_0(\mathbf{e})}{\partial \mathbf{e}^2} \bar{G}_l^T(z) \right\} \\ & \leq \frac{3n(n+1)}{2} \lambda_{\max}\{P_l\} \sum_{i=1}^n \gamma_{i,l}^2 \left( |z_1|^2 + (n-1) \sum_{i=2}^n |\hat{z}_i|^2 + (n-1) \|\mathbf{e}\|^2 \right) \\ & \leq p_l \left( z_1^2 + (n-1) \sum_{i=2}^n \hat{z}_i^2 + (n-1) \|\mathbf{e}\|^2 \right) \end{aligned} \quad (4-11)$$

其中  $p_l = \max\{\gamma_{i,l}^2\} \lambda_{\max}\{P_l\} \frac{3n^2(n+1)}{2}$  是一个正常数, 并且不依赖于  $L$ . 对于  $0 < \beta \leq \frac{\gamma^2}{n}$ , 将 (4-8)-(4-11) 代入 (4-7) 中得

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}V_0 + y^2 - \beta \|\omega\|^2 \\ & \leq - \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) L - \tilde{c}_l - np_l - \frac{1}{\beta} (n+1)^2 \|P_l\|^2 \sum_{i=1}^n \varphi_{i,l}^2 \right] \|\mathbf{e}\|^2 \\ & \quad + z_1^2 \left( 3nc^2 + 2(n+1)^2 L \|P_l\|^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 + p_l + \rho_0(z_1) \right) + (3nc^2 + p_l)(n-1) \sum_{i=2}^n \hat{z}_i^2 \\ & = - \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) L - \Xi \right] \|\mathbf{e}\|^2 + z_1^2 \left( 3nc^2 + 2(n+1)^2 L \|P_l\|^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 + p_l + \rho_0(z_1) \right) \end{aligned} \quad (4-12)$$

$$+ (3nc^2 + p_l)(n-1) \sum_{i=2}^n \hat{z}_i^2$$

$$\text{其中 } \Xi = \tilde{c}_l + np_l + \frac{1}{\beta}(n+1)^2 \|P_l\|^2 \sum_{i=1}^n \varphi_{i,l}^2.$$

进行如下坐标变换:

$$\begin{cases} \xi_1 = z_1 \\ \xi_{i,l} = \hat{z}_i - \hat{z}_{i,l}^*, \quad i = 2, \dots, n \\ y = h(z_1) \end{cases} \quad (4-13)$$

其中  $\hat{z}_{i,l}^* = -\beta_{i-1,l} \xi_{i-1,l}$ ,  $i = 2, \dots, n$  是虚拟控制规律, 并将在后文给出定义.

第 1 步: 选择如下 Lyapunov 函数:

$$V_{1,l} = V_{0,l} + \frac{1}{2} z_1^2$$

由 (4-12), 于是有

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}V_{1,l} + y^2 - 2\beta\|\omega\|^2 \\ & \leq - \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) L - \Xi \right] \|\mathbf{e}\|^2 + z_1^2 \left( 3nc^2 + 2(n+1)^2 L \|P_l\|^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 + p_l + \rho_0(z_1) \right) \\ & \quad + (3nc^2 + p_l)(n-1) \sum_{i=2}^n \hat{z}_i^2 + z_1(Lz_2 + \bar{f}_{1,l}(z_1) + \bar{\phi}_{1,l}(z_1)\omega) + \frac{1}{2} |\bar{g}_{i,l}|^2 - \beta\|\omega\|^2 \\ & \leq - \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) L - \Xi \right] \|\mathbf{e}\|^2 + z_1^2 \left( 3nc^2 + 2(n+1)^2 L \|P_l\|^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 + p_l + \rho_0(z_1) \right) \\ & \quad + (3nc^2 + p_l)(n-1) \sum_{i=2}^n \hat{z}_i^2 + \frac{L}{2} z_1^2 + \frac{L}{2} \|\mathbf{e}\|^2 + c_{1,l} z_1^2 + \frac{\varphi_{1,l}^2}{4\beta} z_1^2 + Lz_1 \hat{z}_2 + \frac{r_{1,l}^2}{2} z_1^2 \\ & \leq - (nL - \Xi) \|\mathbf{e}\|^2 + q_l \sum_{i=2}^n \hat{z}_i^2 + \frac{r_{1,l}^2}{2} z_1^2 + Lz_1 \hat{z}_{2,l}^* + Lz_1 (\hat{z}_2 - \hat{z}_{2,l}^*) \\ & \quad + Lz_1^2 \left( \frac{3nc^2 + 1}{L} + 2(n+1)^2 \|P_l\|^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 + \frac{p_l}{L} + \frac{c_{1,l}}{L} + \frac{\varphi_{1,l}^2}{4\beta L} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (4-14)$$

其中  $q_l = (3nc^2 + p_l)(n-1)$ .

令

$$\hat{z}_{2,l}^* = -\beta_{1,l} \xi_{1,l} \quad (4-15)$$

其中

$$\beta_{1,l} = n + \frac{3nc^2}{L} + \frac{\rho_0(z_1)}{L} + 2(n+1)^2 \|P_l\|^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 + \frac{p_l}{L} + \frac{c_{1,l}}{L} + \frac{\varphi_{1,l}^2}{4\beta L} + \frac{1}{2}$$

由 (4-14) 和 (4-15), 易得

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}V_{1,l} + y^2 - 2\beta\|\omega\|^2 \\
& \leq -(nL - \Xi)\|\mathbf{e}\|^2 + q_l \sum_{i=3}^n \hat{z}_i^2 + \hat{\gamma}_l \xi_{2,l}^2 + \beta_{1,l}^2 \hat{\gamma}_l \xi_{1,l}^2 - \left(nL - \frac{r_{1,l}^2}{2}\right) z_1^2 + Lz_1 \xi_{2,l} \\
& \leq -(nL - \Xi)\|\mathbf{e}\|^2 + q_l \sum_{i=3}^n \hat{z}_i^2 - \left(nL - \beta_{1,l}^2 \hat{\gamma}_l - \frac{r_{1,l}^2}{2} - \frac{L}{2}\right) \xi_{1,l}^2 \\
& \quad + \hat{\gamma}_l \xi_{2,l}^2 + \frac{L}{2} \xi_{2,l}^2
\end{aligned} \tag{4-16}$$

其中  $\hat{\gamma}_l = 2q_l$ .

第2步: 选择如下 Lyapunov 函数:

$$V_{2,l} = V_1 + \frac{1}{2} \xi_{2,l}^2$$

由 (4-16), 得到

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}V_{2,l} + y^2 - 3\beta\|\omega\|^2 \\
& \leq -(nL - \Xi)\|\mathbf{e}\|^2 + q_l \sum_{i=3}^n \hat{z}_i^2 - \left(nL - \beta_{1,l}^2 \hat{\gamma}_l - \frac{r_{1,l}^2}{2} - \frac{L}{2}\right) \xi_{1,l}^2 \\
& \quad + \frac{L}{2} \xi_{2,l}^2 + \hat{\gamma}_l \xi_{2,l}^2 + \xi_{2,l} L \hat{z}_3 + \frac{L}{3} z_1^2 + L e_1^2 + L a_2^2 \xi_{2,l}^2 + L e_2^2 + \frac{L}{4} \beta_{1,l}^2 \xi_{2,l}^2 \\
& \quad + L \beta_{1,l} \xi_{2,l}^2 + \frac{2L}{3} z_1^2 + \frac{3L}{8} \beta_{1,l}^4 \xi_{2,l}^2 + z_1^2 + \frac{\beta_{1,l}^2 c_{1,l}^2 \xi_{2,l}^2}{4} + \frac{\beta_{1,l}^2 \varphi_{1,l}^2 \xi_{2,l}^2}{4\beta} + \frac{\beta_{1,l}^2 r_{1,l}^2 z_1^2}{2} \\
& \leq -[(n-1)L - \Xi]\|\mathbf{e}\|^2 + q_l \sum_{i=3}^n \hat{z}_i^2 + L \xi_{2,l} \hat{z}_{3,l}^* + L \xi_{2,l} (\hat{z}_3 - \hat{z}_{3,l}^*) \\
& \quad - \left((n-1)L - 1 - \beta_{1,l}^2 \hat{\gamma}_l - \frac{r_{1,l}^2(1 + \beta_{1,l}^2)}{2} - \frac{1}{2}\right) \xi_{1,l}^2 \\
& \quad + L \xi_{2,l}^2 \left(\frac{\hat{\gamma}_l}{L} + a_2^2 + \beta_{1,l} + \frac{\beta_{1,l}^2}{4} + \frac{3\beta_{1,l}^4}{8} + \frac{\beta_{1,l}^2}{4L} \left(c_{1,l}^2 + \frac{\varphi_{1,l}^2}{\beta}\right) + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned} \tag{4-17}$$

令

$$\hat{z}_{3,l}^* = -\beta_{2,l} \xi_{2,l} \tag{4-18}$$

其中  $\beta_{2,l} = n-1 + \frac{\hat{\gamma}_l}{L} + a_2^2 + \beta_{1,l} + \frac{\beta_{1,l}^2}{4} + \frac{3\beta_{1,l}^4}{8} + \frac{\beta_{1,l}^2}{4L} \left(c_{1,l}^2 + \frac{\varphi_{1,l}^2}{\beta}\right) + \frac{1}{2}$ , 则

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}V_{2,l} + y^2 - 3\beta\|\omega\|^2 \\
& \leq -[(n-1)L - \Xi]\|\mathbf{e}\|^2 + q_l \sum_{i=4}^n \hat{z}_i^2 + \hat{\gamma}_l \xi_{3,l}^2 + \beta_{2,l}^2 \hat{\gamma}_l^2 \xi_{2,l}^2 + L \xi_{2,l} (\hat{z}_3 - \hat{z}_{3,l}^*) \\
& \quad - \left((n-1)L - 1 - \beta_{1,l}^2 \hat{\gamma}_l - \frac{r_{1,l}^2(1 + \beta_{1,l}^2)}{2} - \frac{L}{2}\right) \xi_{1,l}^2 - (n-1)L \xi_{2,l}^2
\end{aligned} \tag{4-19}$$

$$\begin{aligned} &\leq -[(n-1)L - \Xi]\|\mathbf{e}\|^2 + q_l \sum_{i=4}^n \hat{z}_i^2 - \left( (n-1)L - 2 - \beta_{1,l}^2 \hat{\gamma}_l - \frac{r_{1,l}^2(1+\beta_{1,l}^2)}{2} - \frac{L}{2} \right) \xi_{1,l}^2 \\ &\quad - \left( (n-1)L - \beta_{2,l}^2 \hat{\gamma}_l^2 - \frac{L}{2} \right) \xi_{2,l}^2 + \hat{\gamma}_l \xi_{3,l}^2 + \frac{L}{2} \xi_{3,l}^2 \end{aligned}$$

第  $k$  步: 对于  $3 \leq k \leq n-2$ , 选择 Lyapunov 函数:

$$V_{k,l} = V_{k-1} + \frac{1}{2} \xi_{k,l}^2 \quad (4-20)$$

令  $\beta_{0,l} = 1$ , 得到

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}V_{k,l} + y^2 - (k+1)\beta\|\omega\|^2 \\ &\leq -[(n-(k-1))L - \Xi]\|\mathbf{e}\|^2 + q_l \sum_{i=k+2}^n \hat{z}_i^2 - \left( (n-(k-1))L - (k-1) - \beta_{1,l}^2 \hat{\gamma}_l \right. \\ &\quad \left. - \frac{r_{1,l}^2}{2} \left( \sum_{i=1}^k \prod_{j=1}^{i-1} \beta_{j,l}^2 \right) - \frac{L}{2} \right) \xi_{1,l}^2 - \left( (n-(k-1))L - \beta_{2,l}^2 \hat{\gamma}_l - \frac{L}{2} \right) \xi_{2,l}^2 \\ &\quad - \cdots - \left( (n-(k-1))L - \beta_{k,l}^2 \hat{r}_l^2 - \frac{L}{2} \right) \xi_{k,l}^2 + \hat{\gamma}_l \xi_{k+1,l}^2 + \frac{L}{2} \xi_{k+1,l}^2 \end{aligned} \quad (4-21)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } \beta_{k,l} &= (n-(k-1)) + \frac{\hat{\gamma}_l}{L} + \left[ a_k + \sum_{i=2}^{k-1} \left( a_i \prod_{j=i}^{k-1} \beta_{j,l} \right) \right]^2 + \beta_{k-1,l} + \prod_{j=1}^{k-1} \beta_{j,l}^2 + \frac{3}{4} \sum_{i=2}^{k-2} \prod_{j=i}^{k-1} \beta_{j,l}^2 + \\ &\frac{3}{8} \sum_{i=1}^{k-1} \left( \beta_{i,l}^2 \prod_{j=i}^{k-1} \beta_{j,l}^2 \right) + \frac{1}{4L} \left( c_{1,l}^2 + \frac{\varphi_{1,l}^2}{\beta} \right) \prod_{i=1}^{k-1} \beta_{i,l}^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

第  $n-1$  步: 选择如下 Lyapunov 函数:

$$V_{n-1,l} = V_{n-2} + \frac{1}{2} \xi_{n-1,l}^2 \quad (4-22)$$

则

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}V_{n-1,l} + y^2 - n\beta\|\omega\|^2 \\ &\leq -[2L - \Xi]\|\mathbf{e}\|^2 - \left( 2L - (n-2) - \beta_{1,l}^2 \hat{\gamma}_l - \frac{r_{1,l}^2}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{i-1} \beta_{j,l}^2 - \frac{L}{2} \right) \xi_{1,l}^2 \\ &\quad - \sum_{i=2}^{n-1} \left( 2L - \beta_{i,l}^2 \hat{\gamma}_l - \frac{L}{2} \right) \xi_{i,l}^2 + \hat{\gamma}_l \xi_{n,l}^2 + \frac{L}{2} \xi_{n,l}^2 \end{aligned} \quad (4-23)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } \beta_{n-1,l} &= 2 + \frac{\hat{\gamma}_l}{L} + \left[ a_{n-1} + \sum_{i=2}^{n-2} \left( a_i \prod_{j=i}^{n-2} \beta_{j,l} \right) \right]^2 + \beta_{n-2,l} + \prod_{j=1}^{n-2} \beta_{j,l}^2 + \frac{3}{4} \sum_{i=2}^{n-3} \prod_{j=i}^{n-2} \beta_{j,l}^2 + \\ &\frac{3}{8} \sum_{i=1}^{n-2} \left( \beta_{i,l}^2 \prod_{j=i}^{n-2} \beta_{j,l}^2 \right) + \frac{1}{4L} \left( c_{1,l}^2 + \frac{\varphi_{1,l}^2}{\beta} \right) \prod_{i=1}^{n-2} \beta_{i,l}^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

第  $n$  步: 选择如下 Lyapunov 函数:

$$V_{n,l} = V_{n-1} + \frac{1}{2} \xi_{n,l}^2 \quad (4-24)$$



则

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}V_{n,l} + y^2 - (n+1)\beta\|\omega\|^2 \\
& \leq -(L - \Xi)\|\mathbf{e}\|^2 - \left( L - (n-1) - \beta_{1,l}^2\hat{\gamma}_l - \frac{r_{1,l}^2}{2} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^{i-1} \beta_{j,l}^2 - \frac{L}{2} \right) \xi_{1,l}^2 \\
& \quad - \sum_{i=2}^{n-1} \left( L - \beta_{i,l}^2\hat{\gamma}_l - \frac{L}{2} \right) \xi_{i,l}^2 + L\xi_{n,l}v_l^* + L\xi_{n,l}(v - v_l^*) + L\xi_{n,l}^2 \left[ \frac{\hat{\gamma}_l}{L} \right. \\
& \quad \left. + \left[ a_n + \sum_{i=2}^{n-1} \left( a_i \prod_{j=i}^{n-1} \beta_{j,l} \right) \right]^2 + \beta_{n-1,l} + \prod_{j=1}^{n-1} \beta_{j,l}^2 + \frac{3}{4} \sum_{i=2}^{n-2} \prod_{j=i}^{n-1} \beta_{j,l}^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{3}{8} \sum_{i=1}^{n-1} \left( \beta_{i,l}^2 \prod_{j=i}^{n-1} \beta_{j,l}^2 \right) + \frac{1}{4L} \left( c_{1,l}^2 + \frac{\varphi_{1,l}^2}{\beta} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \beta_{i,l}^2 + \frac{1}{2} \right]
\end{aligned} \tag{4-25}$$

令

$$v_l^* = -\beta_{n,l}\xi_{n,l} \tag{4-26}$$

其中  $\beta_{n,l} = 1 + \frac{\hat{\gamma}_l}{L} + \left[ a_n + \sum_{i=2}^{n-1} \left( a_i \prod_{j=i}^{n-1} \beta_{j,l} \right) \right]^2 + \beta_{n-1,l} + \prod_{j=1}^{n-1} \beta_{j,l}^2 + \frac{3}{4} \sum_{i=2}^{n-2} \prod_{j=i}^{n-1} \beta_{j,l}^2 + \frac{3}{8} \sum_{i=1}^{n-1} \left( \beta_{i,l}^2 \prod_{j=i}^{n-1} \beta_{j,l}^2 \right) + \frac{1}{4L} \left( c_{1,l}^2 + \frac{\varphi_{1,l}^2}{\beta} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \beta_{i,l}^2 + \frac{1}{2}$ , 则

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}V_{n,l} + y^2 - (n+1)\beta\|\omega\|^2 \\
& \leq -(L - \Xi)\|\mathbf{e}\|^2 - \left( L - (n-1) - \beta_{1,l}^2\hat{\gamma}_l - \frac{r_{1,l}^2}{2} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^{i-1} \beta_{j,l}^2 - \frac{L}{2} \right) \xi_{1,l}^2 \\
& \quad - \sum_{i=2}^{n-1} \left( L - \beta_{i,l}^2\hat{\gamma}_l - \frac{L}{2} \right) \xi_{i,l}^2 - L\xi_{n,l}^2 + L\xi_{n,l}(v - v_l^*)^2 \\
& \leq -\rho_l \left( \|\mathbf{e}\|^2 + \sum_{i=1}^n \xi_{i,l}^2 \right) + L(v - v_l^*) \\
& \leq -\tilde{\gamma}_l V_{n,l} + L(v - v_l^*)^2
\end{aligned} \tag{4-27}$$

其中  $0 < \rho_l < \min_{k=2,\dots,n-2} \left\{ L - \Xi, L - (n-1) - \beta_{1,l}^2\hat{\gamma}_l - \frac{r_{1,l}^2}{2} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^{i-1} \beta_{j,l}^2 - \frac{L}{2}, L - \beta_{k,l}^2\hat{\gamma}_l - \frac{L}{2} \right\}$ ,

并且  $0 < \tilde{\gamma}_l < \rho_l \min \left\{ \frac{1}{(n+1)\lambda_{\max}(P_l)}, 2 \right\}$ . 然后, 得到如下采样数据控制器:

$$v(t_k) = -\beta_{n,l}\xi_{n,l}(t_k) \tag{4-28}$$

令  $Z = [e_1, \dots, e_n, z_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_n]^T$ , 选择函数  $V_{n,l} = Z^T Q_l Z$ , 其中  $Q_l$  是正定矩阵, 可得

$$\begin{aligned}
 |v(t_k) - v_l^*(t)|^2 &= \beta_n^2 |\xi_{n,l}(t_k) - \xi_{n,l}(t)|^2 \\
 &\leq \beta_{n,l}^2 \cdots \beta_{1,l}^2 \left( \sum_{i=2}^n |\hat{z}_i(t) - \hat{z}_i(t_k)|^2 + |y(t) - y(t_k)|^2 \right) \\
 &\leq \beta_{n,l}^2 \cdots \beta_{1,l}^2 \|Z(t) - Z(t_k)\|^2 \\
 &= d_1 \|Z(t) - Z(t_k)\|^2
 \end{aligned} \tag{4-29}$$

其中  $d_1 = \beta_{n,l}^2 \cdots \beta_{1,l}^2$ .

记  $dZ = H_{\sigma(t)}(L, v(t_k), Z(s)) ds + G_{\sigma(t)}(Z(s)) d\vartheta(s)$ , 其中

$$\begin{aligned}
 H_{\sigma(t)} &= [H_{1,\sigma(t)}, \cdots, H_{n-1,\sigma(t)}, \bar{f}_{n,\sigma(t)} + \bar{\phi}_{n,\sigma(t)}\vartheta - La_n\hat{z}_1, \\
 &\quad L\hat{z}_2 + \bar{f}_{1,\sigma(t)} + \bar{\phi}_{1,\sigma(t)}\vartheta, L\hat{z}_3 - La_2\hat{z}_1, \cdots, Lv(t_k) - La_n\hat{z}_1]^T \\
 G_{\sigma(t)} &= [\bar{g}_{1,\sigma(t)}, \cdots, \bar{g}_{n,\sigma(t)}, \bar{g}_{1,\sigma(t)}, 0, \cdots, 0]^T \\
 H_{i,\sigma(t)} &= Le_{i+1} + \bar{f}_{i,\sigma(t)} + \bar{\phi}_{i,\sigma(t)}\vartheta - La_i\hat{z}_1
 \end{aligned}$$

由 Hölder 不等式和假设 4.1, 可得

$$\begin{aligned}
 &E \|Z(t) - Z(t_k)\|^2 \\
 &\leq E \left\| \int_{t_k}^t H_{\sigma(t)}(L, v(t_k), Z(s)) ds + \int_{t_k}^t G_{\sigma(t)}(Z(s)) d\vartheta(s) \right\|^2 \\
 &\leq 2E \left( \int_{t_k}^t 1 ds \left\| \int_{t_k}^t H_{\sigma(t)}(L, v(t_k), Z(s)) ds \right\|^2 \right) + 2E \left\| \int_{t_k}^t G_{\sigma(t)}(Z(s)) d\vartheta(s) \right\|^2 \\
 &\leq 2TE \int_{t_k}^t \|H_{\sigma(t)}(L, v(t_k), Z(s))\|^2 ds + 2E \int_{t_k}^t \|G_{\sigma(t)}(Z(s))\|^2 ds \\
 &\leq 2(\alpha T + \bar{\gamma}_l^2) E \int_{t_k}^t \|Z(s)\|^2 ds \\
 &\leq 4(\alpha T + \bar{\gamma}_l^2) E \int_{t_k}^t \|Z(t_k)\|^2 ds + 4(\alpha T + \bar{\gamma}_l^2) E \int_{t_k}^t \|Z(s) - Z(t_k)\|^2 ds
 \end{aligned} \tag{4-30}$$

其中  $\alpha = 8n^2(c^2 + \varphi^2\omega^2) + a^2L^2 + 2nL^2\beta_{1,l}^2 \cdots \beta_{n,l}^2$ ,  $c = \tilde{c} \max_{l \in I_N} \{c_{1,l}, c_{2,l}, \dots, c_{n,l}\}$ , 并且

$\bar{\gamma}_l = \max_{l \in I_N} \{\gamma_{1,l}, \gamma_{2,l}, \dots, \gamma_{n,l}\}$ . 由引理 3.2, 对于  $t \in (t_k, t_{k+1})$ , 有

$$\begin{aligned}
 E \|Z(t) - Z(t_k)\|^2 &\leq 4(\alpha T + \bar{\gamma}_l^2) e^{4T(\alpha T + \bar{\gamma}_l^2)} E \int_{t_k}^t \|Z(t_k)\|^2 ds \\
 &\leq 4(\alpha T + \bar{\gamma}_l^2) T e^{4T(\alpha T + \bar{\gamma}_l^2)} E \|Z(t_k)\|^2 \\
 &\leq 2\tau(T) (E \|Z(t) - Z(t_k)\|^2 + E \|Z(t)\|^2)
 \end{aligned} \tag{4-31}$$

其中  $\tau(T) = 4(\alpha T + \bar{\gamma}_l^2) T e^{4T(\alpha T + \bar{\gamma}_l^2)}$ , 并且  $\tau(T) < \frac{1}{2}$ , 则

$$E \|Z(t) - Z(t_k)\|^2 \leq \frac{2\tau(T)}{1 - 2\tau(T)} E \|Z(t)\|^2 \leq \frac{2\tau(T)}{\alpha_1(1 - 2\tau(T))} E(V_{n,l}(t)), \tag{4-32}$$

其中  $\alpha_1 = \max \{\lambda_{\max}(Q_l)\}$ . 由式 (4-27), (4-29) 和 (4-32), 易得

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \mathcal{L} V_{n,l} + y^2 - (n+1)\beta \|\omega\|^2 &\leq -\left(\tilde{\gamma}_l + \frac{2Ld_1\tau(T)}{\alpha_1(1-2\tau(T))}\right) \mathbb{E} V_{n,l}(t) \\ &= -\gamma_l \mathbb{E} V_{n,l}(t), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \end{aligned} \quad (4-33)$$

其中  $\gamma_l = \tilde{\gamma}_l + \frac{2Ld_1\tau(T)}{\alpha_1(1-2\tau(T))}$ .

令  $H(t) = y^2(t) - (n+1)\beta \|\omega(t)\|^2$ , 当  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , 对于 (4-33), 利用常数变异公式得到

$$\mathbb{E} V_{n,l}(t) \leq e^{-\gamma_l(t-t_k)} \mathbb{E} V_{n,l}(t_k) - \int_{t_k}^t H(s) e^{-\gamma_l(t-s)} ds \quad (4-34)$$

当  $t = t_{k+1}$  时, 易得

$$\mathbb{E} V_{n,l}(t_{k+1}) \leq \delta \mathbb{E} V_{n,l}(t_k) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} H(s) e^{-\gamma_l(t_{k+1}-s)} ds \quad (4-35)$$

其中  $\delta = e^{-\gamma_l T}$ .

情况 ii): 当  $\sigma(t_k) = l \neq \sigma(t_{k+1}) = m$  时, 表示在区间  $[t_k, t_{k+1})$  上发生了一次切换, 即从子系统  $l$  切换到子系统  $m$ , 但是不知道切换发生的时刻. 因此, 设在  $t = t_k + \Delta t$ ,  $\Delta t \in (0, T]$  时发生从  $l$  到  $m$  的切换, 这意味着子系统  $l$  在  $t \in [t_k, t_k + \Delta t)$  时处于激活状态. 由 (4-34) 得

$$\mathbb{E} V_{n,l}(t_k + \Delta t) \leq e^{-\gamma_l \Delta t} \mathbb{E} V_{n,l}(t_k) - \int_{t_k}^{t_k + \Delta t} H(s) e^{-\gamma_l(t_k + \Delta t - s)} ds \quad (4-36)$$

当  $t \in [t_k + \Delta t, t_{k+1})$  时, 选择如下 Lyapunov 函数

$$V_{n,m} = (n+1) \mathbf{e}^T P_m \mathbf{e} + \frac{1}{2} z_1^2 + \sum_{i=2}^n \frac{\xi_{i,m}^2}{2} = V_{n-1,m} + \frac{1}{2} \xi_{n,m}^2 \quad (4-37)$$

类似地,

$$\begin{aligned} &\mathcal{L} V_{n,m} + y^2 - (n+1)\beta \|\omega\|^2 \\ &\leq - (L - \Xi) \|\mathbf{e}\|^2 - \left( L - (n-1) - \beta_{1,l}^2 \hat{\gamma}_m - \frac{r_{1,l}^2}{2} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^{i-1} \beta_{j,m}^2 - \frac{L}{2} \right) \xi_{1,m}^2 \\ &\quad - \sum_{i=2}^{n-1} \left( L - \beta_{i,m}^2 \hat{\gamma}_m - \frac{L}{2} \right) \xi_{i,m}^2 + L \xi_{n,m} v_m^* + L \xi_{n,l} (v - v_m^*) + L \xi_{n,m}^2 \left[ \frac{\hat{\gamma}_m}{L} \right. \\ &\quad \left. + \left[ a_n + \sum_{i=2}^{n-1} \left( a_i \prod_{j=i}^{n-1} \beta_{j,m} \right) \right]^2 + \beta_{n-1,m} + \prod_{j=1}^{n-1} \beta_{j,m}^2 + \frac{3}{4} \sum_{i=2}^{n-2} \prod_{j=i}^{n-1} \beta_{j,m}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} \sum_{i=1}^{n-1} \left( \beta_{i,m}^2 \prod_{j=i}^{n-1} \beta_{j,m}^2 \right) + \frac{1}{4L} \left( c_{1,m}^2 + \frac{\varphi_{1,m}^2}{\beta} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \beta_{i,m}^2 + \frac{1}{2} \right] \end{aligned} \quad (4-38)$$

令

$$v_m^* = -\beta_{n,m}\xi_{n,m} \quad (4-39)$$

其中  $\beta_{n,m} = 1 + \frac{\hat{\gamma}_m}{L} + \left[ a_n + \sum_{i=2}^{n-1} \left( a_i \prod_{j=i}^{n-1} \beta_{j,m} \right) \right]^2 + \beta_{n-1,m} + \prod_{j=1}^{n-1} \beta_{j,m}^2 + \frac{3}{4} \sum_{i=2}^{n-2} \prod_{j=i}^{n-1} \beta_{j,m}^2 + \frac{3}{8} \sum_{i=1}^{n-1} \left( \beta_{i,m}^2 \prod_{j=i}^{n-1} \beta_{j,m}^2 \right) + \frac{1}{4L} \left( c_{1,m}^2 + \frac{\varphi_{1,m}^2}{\beta} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \beta_{i,m}^2 + \frac{1}{2}$ , 然后有

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}V_{n,m} + y^2 - (n+1)\beta\|\omega\|^2 \\ & \leq - (L - \Xi)\|\mathbf{e}\|^2 - \left( L - (n-1) - \beta_{1,m}^2\hat{\gamma}_m - \frac{r_{1,l}^2}{2} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^{i-1} \beta_{j,m}^2 - \frac{L}{2} \right) \xi_{1,m}^2 \\ & \quad - \sum_{i=2}^{n-1} \left( L - \beta_{i,m}^2\hat{\gamma}_m - \frac{L}{2} \right) \xi_{i,m}^2 + L\xi_{n,m}(v - v_m^*) - L\xi_{n,m}^2 \\ & \leq -\rho_m \left( \|\mathbf{e}\|^2 + \sum_{i=1}^n \xi_{i,m}^2 \right) + L(v - v_m^*)^2 \\ & \leq -\tilde{\gamma}_m V_{n,m} + L(v - v_m^*)^2 \end{aligned} \quad (4-40)$$

其中  $0 < \rho_m < \min_{k=2,\dots,n-2} \left\{ L - \Xi, L - (n-1) - \beta_{1,m}^2\hat{\gamma}_m - \frac{r_{1,m}^2}{2} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^{i-1} \beta_{j,m}^2 - \frac{L}{2}, L - \beta_{k,m}^2\hat{\gamma}_m - \frac{L}{2} \right\}$ , 并且  $0 < \tilde{\gamma}_m < \rho_m \min \left\{ \frac{1}{(n+1)\lambda_{\max}(P_m)}, 2 \right\}$ . 对于  $t \in [t_k + \Delta t, t_{k+1})$ , 得到

$$|v - v_m^*|^2 \leq d_1 \|Z(t) - Z(t_k)\|^2 + d_1 \|Z(t)\| \quad (4-41)$$

$$\mathbb{E}(\|Z(t) - Z(t_k)\|^2) \leq \frac{2\tau(T)}{1 - 2\tau(T)} \mathbb{E}(\|Z(t)\|^2) \quad (4-42)$$

则

$$\mathbb{E}\mathcal{L}V_{n,m} + y^2 - (n+1)\beta\|\omega\|^2 \leq -\gamma_m \mathbb{E}V_{n,m} \quad (4-43)$$

其中  $\gamma_m = \tilde{\gamma}_m + \frac{2Ld_1\tau(T)}{\alpha_1(1 - 2\tau(T))} + \frac{Ld_1}{\alpha_1}$ . 由  $H(t) = y^2 - (n+1)\beta\|\omega\|^2$  得

$$\mathbb{E}\mathcal{L}V_{n,m} \leq -\gamma_m \mathbb{E}V_{n,m} - \mathbb{E}H(t) \quad (4-44)$$

对于任意的  $t \in [t_k + \Delta t, t_{k+1})$ , 对 (4-44) 利用常数变异公式得到

$$\mathbb{E}V_{n,m}(t) \leq e^{-\gamma_m(t-t_k-\Delta t)} \mathbb{E}V_{n,m}(t_k + \Delta t) - \int_{t_k+\Delta t}^t \mathbb{E}\{H(s)e^{-\gamma_m(t-s)}\} ds \quad (4-45)$$

当  $t = t_{k+1}$  时, 易得

$$\mathbb{E}V_{n,m}(t_{k+1}) \leq e^{-\gamma_m(T-\Delta t)} \mathbb{E}V_{n,m}(t_k + \Delta t) - \int_{t_k+\Delta t}^{t_{k+1}} \mathbb{E}\{H(s)e^{-\gamma_m(t_{k+1}-s)}\} ds \quad (4-46)$$

对于 (4-37) 和  $Z(t)$  的定义, 有  $V_{n,m} = Z^T Q_m Z$ , 其中  $Q_m > 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . 当  $t \in [t_k, t_{k+1})$  时, 定义  $\mu = \frac{\max_{m \in \mathbb{N}} \lambda(Q_m)}{\min_{m \in \mathbb{N}} \lambda(Q_m)}$ , 则可以得到

$$\begin{aligned}
 EV_{n,m}(t_{k+1}) &\leq e^{-\gamma_m(T-\Delta t)} EV_{n,m}(t_k + \Delta t) - \int_{t_k+\Delta t}^{t_{k+1}} E\{H(s)e^{-\gamma_m(t_{k+1}-s)}\} ds \\
 &\leq e^{-\gamma_m(T-\Delta t)} \mu EV_{n,l}((t_k + \Delta t)^-) - \int_{t_k+\Delta t}^{t_{k+1}} E\{H(s)e^{-\gamma_m(t_{k+1}-s)}\} ds \\
 &\leq \mu e^{-\gamma_m(T-\Delta t)-\gamma_l\Delta t} EV_{n,l}(t_k) - \mu e^{-\gamma_m(T-\Delta t)} \int_{t_k}^{t_k+\Delta t} E\{H(s)e^{-\gamma_l(t_k+\Delta t-s)}\} ds \quad (4-47) \\
 &\quad - \int_{t_k+\Delta t}^{t_{k+1}} E\{H(s)e^{-\gamma_m(t_{k+1}-s)}\} ds \\
 &= \nu EV_{n,l}(t_k) - \mu e^{-\gamma_m(T-\Delta t)} \int_{t_k}^{t_k+\Delta t} E\{H(s)e^{-\gamma_l(t_k+\Delta t-s)}\} ds \\
 &\quad - \int_{t_k+\Delta t}^{t_{k+1}} E\{H(s)e^{-\gamma_m(t_{k+1}-s)}\} ds
 \end{aligned}$$

其中

$$\nu = \begin{cases} \mu e^{-\gamma_m T}, & \gamma_m - \gamma_l \leq 0 \\ \mu e^{-\gamma_l T}, & \gamma_m - \gamma_l > 0 \end{cases}$$

**定理 4.1** 对允许的采样周期  $T$ , 以及由  $T$  定义的常数  $\delta$  和  $\nu$ , 令  $\nu^{\frac{1}{\varepsilon}} \delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} < 1$ , 并且满足  $\tau(T) = 4(\alpha T + \bar{\gamma}_l^2) T e^{4T(\alpha T + \bar{\gamma}_l^2)} < \frac{1}{2}$ . 基于假设 4.1, 如果采样周期  $T$  与平均驻留时间满足

$$\tau_a > \left(1 - \frac{\ln \nu}{\ln \delta}\right) T$$

得到采样数据控制器

$$\nu = -\beta_{n,\sigma(t)} \xi_{n,\sigma(t)}$$

其中  $\beta_{n,\sigma(t)}$  参见上述控制器的推导过程,  $\xi_{i,\sigma(t)}$  由式 (4-13) 定义, 可得

a) 如果  $\omega(t) \equiv 0$ , 则闭环系统 (4-1) 均方渐近稳定。

b) 如果  $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$ , 则闭环系统 (4-1) 具有加权  $L_2$ -增益水平  $\gamma$ .

**证明:** 对于系统(4-1), 构造以下分段可微函数:

$$V_{\sigma(t)} = V_{n,\sigma(t)} = (n+1) \mathbf{e}^T P_{\sigma(t)} \mathbf{e} + \sum_{i=1}^n \frac{\xi_{i,\sigma(t)}^2}{2} \quad (4-48)$$

由定义 2.2, 对于每个  $\varepsilon > 0$ , 使得  $\tau_a \geq \varepsilon T$ , 于是

$$N_\sigma(t_0, t_k) \leq N_0 + \frac{t_k - t_0}{\tau_a} \leq N_0 + \frac{k}{\varepsilon} \quad (4-49)$$

定义如下判断函数:

$$\alpha(t_k) = \begin{cases} 0, & N_\sigma(t_k) \neq N_\sigma(t_{k+1}), \quad t \in [t_k, t_{k+1}) \\ 1, & N_\sigma(t_k) = N_\sigma(t_{k+1}), \quad t \in [t_k, t_{k+1}) \end{cases} \quad (4-50)$$

根据式 (4-35), (4-47) 和 (4-50), 对于  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , 有

$$\begin{aligned}
 EV_{\sigma(t)}(t) &\leq \left[ (1 - \alpha_k) \mu e^{-\gamma_m(t-t_k-\Delta t) - \gamma_l \Delta t} + \alpha(t_k) e^{-\gamma_l(t-t_k)} \right] EV_{\sigma}(t_k) \\
 &\quad - (1 - \alpha_k) \left[ \mu e^{-\gamma_m(t-t_k-\Delta t)} \int_{t_k}^{t_k+\Delta t} E \{ H(s) e^{-\gamma_l(t_k+\Delta t-s)} \} ds \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_k+\Delta t}^t E \{ H(s) e^{-\gamma_m(t-s)} \} ds \right] + \alpha(t_k) \int_{t_k}^t E \{ H(s) e^{-\gamma_l(t-s)} \} ds \\
 &\leq \xi(t) v^{N_{\sigma}(t_{k-1}, t_k)} \delta^{1-N_{\sigma}(t_{k-1}, t_k)} EV_{\sigma}(t_{k-1}) \\
 &\quad - \xi(t) \left\{ (1 - \alpha_{k-1}) \left[ \mu e^{-\gamma_m(T-\Delta t)} \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\Delta t} E \{ H(s) e^{-\gamma_l(t_{k-1}+\Delta t-s)} \} ds \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_{t_{k-1}+\Delta t}^{t_k} E \{ H(s) e^{-\gamma_m(t_k-s)} \} ds \right] + \alpha(t_{k-1}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} E \{ H(s) e^{-\gamma_l(t_k-s)} \} ds \right\} \\
 &\quad - (1 - \alpha_k) \left[ \mu e^{-\gamma_m(t-t_k-\Delta t)} \int_{t_k}^{t_k+\Delta t} E \{ H(s) e^{-\gamma_l(t_k+\Delta t-s)} \} ds \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_k+\Delta t}^t E \{ H(s) e^{-\gamma_m(t-s)} \} ds \right] + \alpha(t_k) \int_{t_k}^t E \{ H(s) e^{-\gamma_l(t-s)} \} ds \quad (4-51)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\dots \\
 &\leq \xi(t) v^{N_{\sigma}(t_0, t)} \delta^{k-N_{\sigma}(t_0, t)} EV_{\sigma}(t_0) - \xi(t) \left[ \sum_{i=1}^k (1 - \alpha(t_{i-1})) v^{N_{\sigma}(t_i, t_k)} \delta^{i-N_{\sigma}(t_i, t_k)} \right. \\
 &\quad \times \mu e^{-\gamma_m(T-\Delta t)} \int_{t_{i-1}}^{t_{i-1}+\Delta t} E \{ H(s) e^{-\gamma_l(t_{i-1}+\Delta t-s)} \} ds \\
 &\quad + \sum_{i=1}^k (1 - \alpha(t_{i-1})) v^{N_{\sigma}(t_i, t_k)} \delta^{i-N_{\sigma}(t_i, t_k)} \int_{t_{i-1}+\Delta t}^{t_i} E \{ H(s) e^{-\gamma_m(t_i-s)} \} ds \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1}^k \alpha(t_{i-1}) v^{N_{\sigma}(t_i, t_k)} \delta^{i-N_{\sigma}(t_i, t_k)} \int_{t_{i-1}}^{t_i} E \{ H(s) e^{-\gamma_l(t_i-s)} \} ds \right] \\
 &\quad - (1 - \alpha_k) \left[ \mu e^{-\gamma_m(t-t_k-\Delta t)} \int_{t_k}^{t_k+\Delta t} E \{ H(s) e^{-\gamma_l(t_k+\Delta t-s)} \} ds \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_k+\Delta t}^t E \{ H(s) e^{-\gamma_m(t-s)} \} ds \right] + \alpha(t_k) \int_{t_k}^t E \{ H(s) e^{-\gamma_l(t-s)} \} ds
 \end{aligned}$$

其中  $\xi(t) = (1 - \alpha_k) \mu e^{-\gamma_m(t-t_k-\Delta t) - \gamma_l \Delta t} + \alpha(t_k) e^{-\gamma_l(t-t_k)}$ .

a) 当  $\omega \equiv 0$  时, 很容易得到  $H(s) = y(s)^2 - (n+1)\beta \|\omega(s)\|^2 = y(s)^2 \geq 0$ . 由 (4-49) 和 (4-51), 显然有  $v^{N_{\sigma}(t_0, t_k)} \delta^{k-N_{\sigma}(t_0, t_k)} \leq v^{N_0} \delta^{-N_0} e^{k \ln \left( v^{\frac{1}{\varepsilon}} \delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right)}$ , 于是

$$\begin{aligned}
 EV_{\sigma(t)}(t) &\leq \xi(t) v^{N_{\sigma}(t_0, t_k)} \delta^{k-N_{\sigma}(t_0, t_k)} EV_{\sigma(t_0)}(t_0) \\
 &\leq \xi(t) \left( \frac{v}{\delta} \right)^{N_0} e^{k \ln \left( v^{\frac{1}{\varepsilon}} \delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right)} EV_{\sigma(t_0)}(t_0) \quad (4-52)
 \end{aligned}$$

当  $t \rightarrow \infty$  时, 这意味着  $k \rightarrow \infty$ , 对于  $v^{\frac{1}{\varepsilon}} \delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} < 1$ ,  $e^{k \ln \left( v^{\frac{1}{\varepsilon}} \delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right)} \rightarrow 0$ . 因此, 当

$\omega(t) \equiv 0$  时, 闭环系统 (4-1) 是均方渐近稳定的。

b) 如果  $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$ , 由 (4-51) 和  $H(s) = y(s)^2 - (n+1)\beta\|\omega(s)\|^2$  可得

$$\begin{aligned} \kappa(t) \int_0^t \mathbb{E} \{ \|y^2(s)\| e^{\gamma^-(s-t)} \} ds &\leq \xi(t) \left( \frac{\nu}{\delta} \right)^{N_0} e^{k \ln \left( \nu^{\frac{1}{\varepsilon}} \delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right)} \mathbb{E} V_{\sigma}(t_0) \\ &+ \kappa(t) \int_0^t \mathbb{E} \{ (n+1)\beta \|\omega(s)\|^2 e^{\gamma^+(s-t)} \} ds \end{aligned} \quad (4-53)$$

其中

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \xi(t) K(t) + \alpha(t_k) \frac{t-t_k}{t-t_0} + (1-\alpha(t_k)) \left( \frac{\Delta t \theta(t)}{t-t_0} + \frac{t-(t_k+\Delta t)}{t-t_0} \right) \\ K(t) &= \sum_{i=1}^k \alpha(t_{i-1}) \nu^{N_{\sigma}(t_i, t_k)} \delta^{i-N_{\sigma}(t_i, t_k)} \frac{t_i-t_{i-1}}{t-t_0} + \sum_{i=1}^k (1-\alpha(t_{i-1})) \nu^{N_{\sigma}(t_i, t_k)} \delta^{i-N_{\sigma}(t_i, t_k)} \\ &\quad \times \frac{\theta(t_i) \Delta t}{t-t_0} + \sum_{i=1}^k (1-\alpha(t_{i-1})) \nu^{N_{\sigma}(t_i, t_k)} \delta^{i-N_{\sigma}(t_i, t_k)} \frac{t_i-(t_{i-1}+\Delta t)}{t-t_0} \\ &= \sum_{i=1}^k \alpha(t_{i-1}) \nu^{N_{\sigma}(t_i, t_k)} \delta^{i-N_{\sigma}(t_i, t_k)} \frac{t_i-t_{i-1}}{t-t_0} \\ &\quad + \sum_{i=1}^k (1-\alpha(t_{i-1})) \nu^{N_{\sigma}(t_i, t_k)} \delta^{i-N_{\sigma}(t_i, t_k)} \frac{\theta(t_i) \Delta t + t_i-(t_{i-1}+\Delta t)}{t-t_0} \end{aligned}$$

$$\theta(t_i) = \mu e^{-\gamma_m(T-\Delta t_i)}, \gamma^+ = \max\{\gamma_l, \gamma_m\}, \gamma^- = \min\{\gamma_l, \gamma_m\}$$

因为  $\kappa(t)$  是有界函数, 所以可以取到  $\kappa_1 = \min\{\kappa(t)\}$ ,  $\kappa_2 = \max\{\kappa(t)\}$ , 则

$$\begin{aligned} \kappa_1 \int_0^t \mathbb{E} \{ \|y(s)\|^2 e^{\gamma^-(s-t)} \} ds &\leq \xi(t) \left( \frac{\nu}{\delta} \right)^{N_0} e^{k \ln \left( \nu^{\frac{1}{\varepsilon}} \delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right)} \mathbb{E} V_{n,l}(t_0) \\ &+ \kappa_2(n+1)\beta \int_0^t \mathbb{E} \{ \|\omega(s)\|^2 e^{\gamma^+(s-t)} \} ds \end{aligned} \quad (4-54)$$

从  $t = t_0 = 0$  到  $t = \infty$  对不等式 (4-54) 求积分得

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_1}{\gamma^-} \int_0^\infty \mathbb{E} \|y(s)\|^2 ds &\leq [(1-\alpha(t_k))\zeta_1 + \alpha(t_k)\zeta_2] \left( \frac{\nu}{\delta} \right)^{N_0} e^{k \ln \left( \nu^{\frac{1}{\varepsilon}} \delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right)} \mathbb{E} V_{\sigma(t_0)}(t_0) \\ &+ \frac{\kappa_2}{\gamma^+} (n+1)\beta \int_0^\infty \mathbb{E} \|\omega(s)\|^2 ds \end{aligned} \quad (4-55)$$

其中

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \mu \int_0^\infty e^{-\gamma_m(t-t_k-\Delta t)-\gamma_l \Delta t} dt \leq \mu \int_0^\infty e^{-\gamma^+(t-t_k)} dt \leq \frac{\mu}{\gamma^+} e^{-\gamma^+ t_k} := \hat{\zeta}_1, \\ \zeta_2 &= \int_0^\infty e^{-\gamma_l(t-t_k)} dt = \frac{1}{\gamma_l} e^{\gamma_l t_k} := \hat{\zeta}_2 \end{aligned}$$

令  $\zeta = \max\{\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2\} \left( \frac{\nu}{\delta} \right)^{N_0} e^{k \ln \left( \nu^{\frac{1}{\varepsilon}} \delta^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right)}$ , 并且  $\gamma^2 = \frac{\gamma^- \kappa_2 (n+1)\beta}{\gamma^+ \kappa_1}$ , 则 (4-55) 可被改写

为

$$\mathbb{E} \left\{ \int_0^\infty y^T(s)y(s)ds \right\} \leq \frac{\xi\gamma^-}{\kappa_1} \mathbb{E} V_{\sigma(t_0)}(t_0) + \gamma^2 \mathbb{E} \left\{ \int_0^\infty \omega^T(s)\omega(s)ds \right\} \quad (4-56)$$

因此, 系统 (4-1) 具有加权  $L_2$ -增益水平  $\gamma$ .  $\square$

**注解 4.1** 在零初值条件下, 可得  $V_{\sigma(t_0)}(0) = 0$ , 由式 (4-56) 可以得到  $L_2$ -增益水平表达式  $\gamma^2 = \frac{\mathbb{E} \left\{ \int_0^\infty y^T(s)y(s)ds \right\}}{\mathbb{E} \left\{ \int_0^\infty \omega^T(s)\omega(s)ds \right\}}$ , 其中  $L_2$ -增益水平  $\gamma$  的值越小, 系统的鲁棒性能越好。

**注解 4.2** 与文献 [79] 相比, 本章所需的 Lyapunov 函数更容易获得, 且考虑了系统的鲁棒性能。与文献 [126] 和 [127] 相比, 本章推导出了平均驻留时间和采样周期之间的关系, 以确保系统是均方渐近稳定的, 并具有加权的  $L_2$ -增益性能。另外, 相比于文献 [96] 利用线性矩阵不等式方法求解系统的状态反馈控制问题, 本章利用反步法构造的输出反馈控制器解决了系统状态不可测的困扰, 实用性更强。

**算法 4.1** 基于上述的证明过程, 给出如下算法:

1. 将原始系统进行坐标变换, 即将系统 (4-1) 转换为系统 (4-3).
2. 设计观测器 (4-5), 得到观测误差函数 (4-6).
3. 选择常数  $\gamma > 0$ , 取定  $\beta$ , 其中  $0 < \beta \leq \frac{\gamma^2}{n}$ ,  $n$  是系统维数.
4. 选取主要参数  $\tau_a$  来获取采样周期  $T$ ,  $T$  要小于最小切换区间, 满足  $\tau_a > \left(1 - \frac{\ln v}{\ln \delta}\right)T$ , 并且  $\tau(T) = 4(\alpha T + \bar{\gamma}_l^2)Te^{4T(\alpha T + \bar{\gamma}_l^2)} < \frac{1}{2}$ .
5. 构造控制器  $v = -\beta_{n,\sigma(t)}\xi_{n,\sigma(t)}$ , 其中  $\beta_{n,\sigma(t)}$ ,  $\xi_{n,\sigma(t)}$  可以根据递推过程求得.
6. 将控制器  $v$  代入系统求解.

## 4.4 仿真分析

在本节中, 给出了两个示例来证明所提出方法的有效性。

**例 4.1** 考虑一个具有两种进料模式的切换连续搅拌釜反应器系统<sup>[26, 74]</sup>:

$$\begin{cases} dC_A = \left[ \frac{q_l}{V} (C_{Afi} - C_A) - a_0 e^{-\frac{E}{RT}} C_A + \omega(t) \right] dt \\ dT = \left[ \frac{q_l}{V} (T_{fi} - T) - a_1 e^{-\frac{E}{RT}} C_A + a_2 (T_c - T) \right] dt + g d\vartheta \end{cases} \quad (4-57)$$

系统 (4-57) 中参数的物理含义参见文献 [74]。在本章中, 将考虑反应物浓度对反应速率的扰动  $\omega$ , 以及温度对反应速率的影响  $\vartheta$ , 其中  $\vartheta$  是标准 Wiener 过程。系统的控制目标是使反应物浓度和温度达到恒定的参考值, 通过平衡点平移和



参数赋值, 系统 (4-57) 可以表示为由如下两个子系统组成的切换系统:

$$\begin{cases} dx_1 = [x_2 + 0.5x_1 + \omega(t)]dt \\ dx_2 = udt + gd\vartheta \\ y = x_1 \end{cases} \quad (4-58)$$

$$\begin{cases} dx_1 = [x_2 + 2x_1 + \omega(t)]dt \\ dx_2 = udt + gd\vartheta \\ y = x_1 \end{cases} \quad (4-59)$$

给出如下主要参数:  $c = 0.02$ ,  $g = 0.02$ ,  $P = 0.02$ ,  $L = 15$ ,  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 1$ ,  $\tau_a = 0.5$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $T = 0.005$ , 并利用式 (4-5) 和 (4-28) 构造观察器和控制器。

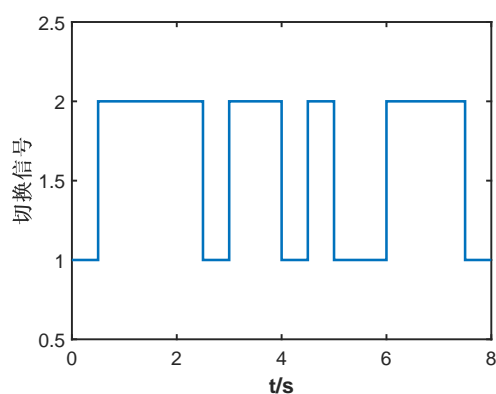


图 4-1 切换信号函数

Fig 4-1 The switching signal function

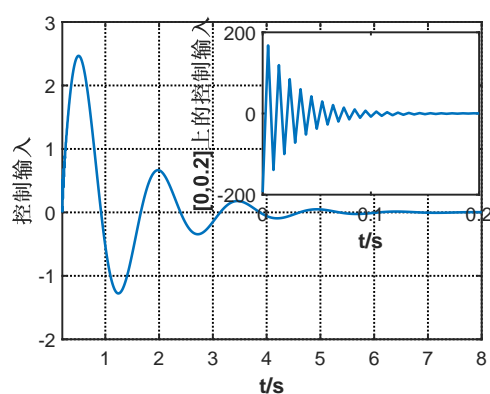


图 4-2 控制器输入

Fig 4-2 The controller input

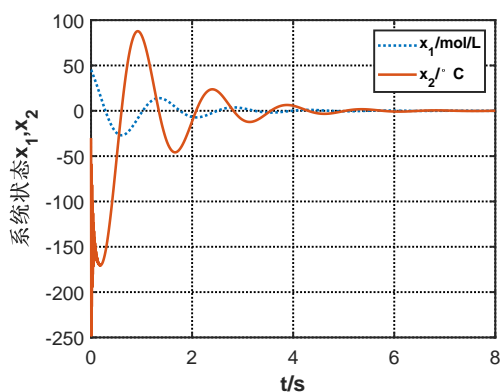
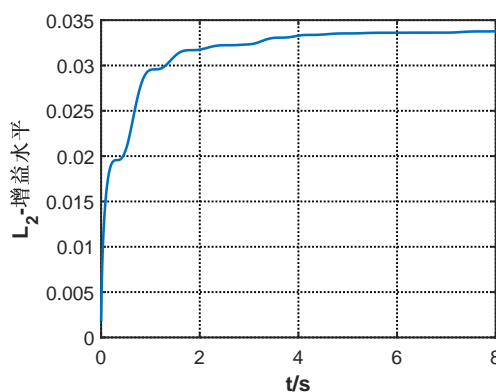


图 4-3 系统状态响应

Fig 4-3 The system state response

图 4-4  $L_2$ -增益  $\gamma$ Fig 4-4 The  $L_2$ -gain  $\gamma$ 

当  $\omega \equiv 0$  时, 图 4-1 展示的是切换信号函数  $\sigma(t)$  的图像, 基于初始值  $x_1(0) = 3$ ,  $x_2(0) = -2$ ,  $\hat{z}_1(0) = 0$ ,  $\hat{z}_2(0) = 0$  和上述切换信号  $\sigma(t)$ , 得到了系统的控

制输入函数  $u$ ，如图 4-2 所示，并且在此控制器作用下系统的状态趋于稳定，如图 4-3 所示，也即反应器系统 (4-57) 中反应物浓度和温度达到了恒定的参考值，并可以持续保持。

当初始值为零，且  $\omega = e^{-t}$  时，得到系统的  $L_2$ -增益水平  $\gamma$  如图 4-4 所示，小于给定的常量  $\gamma = 1$ ，这表示反应器系统 (4-57) 在受到一定程度外部扰动时仍然具有良好的性能。

**例 4.2** 考虑具有两个子系统的切换随机非线性系统：

$$\begin{cases} dx_1 = [x_2 + f_{1,\sigma(t)}(x_1) + \phi_{1,\sigma(t)}(x_1)\omega]dt + g_{1,\sigma(t)}^T(x_1)d\vartheta \\ dx_2 = [u(t) + f_{2,\sigma(t)}(x_1, x_2) + \phi_{2,\sigma(t)}(x_1, x_2)\omega]dt + g_{2,\sigma(t)}^T(x_1, x_2)d\vartheta \\ y = x_1 \end{cases} \quad (4-60)$$

其中  $f_{1,1} = 0.01x_1 \sin x_1$ ,  $\phi_{1,1} = 0.1x_1 \sin x_1 \omega$ ,  $g_{1,1} = 0.01x_1$ ,  $f_{2,1} = 0.01x_1 \sin(x_1 x_2)$ ,  $\phi_{1,2} = 0.1x_2 \cos(x_1 x_2)\omega$ ,  $g_{1,2} = 0.01x_1 \sin(x_1)$ ,  $f_{1,2} = 0.01x_1 \sin x_1$ ,  $\phi_{2,1} = x_1 \cos x_1 \omega$ ,  $g_{2,1} = 0.01x_1 \cos x_1$ ,  $f_{2,2} = 0.01(x_1 + x_2) \sin x_1$ ,  $\phi_{2,2} = 0$ ,  $g_{2,2} = 0.01x_1$ ，并且  $\vartheta$  是标准 Wiener 过程。

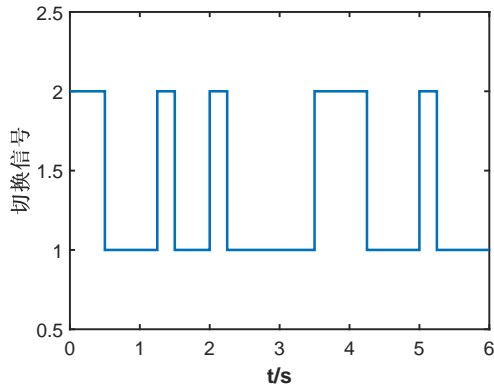


图 4-5 切换信号函数  
Fig 4-5 The switching signal function

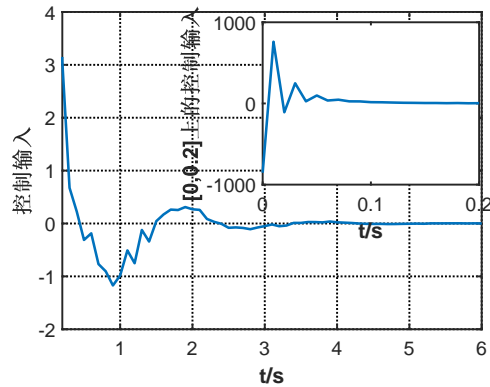


图 4-6 控制器输入  
Fig 4-6 The controller input

利用上一节的研究，利用式 (4-5) 和式 (4-28) 构造观察器和控制器。给出如下主要参数： $c = 0.02$ ,  $g = 0.01$ ,  $P = 0.02$ ,  $L = 8$ ,  $a_1 = 0.4$ ,  $a_2 = 0.2$ ,  $\tau_a = 0.25$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $T = 0.01$ . 当  $\omega \equiv 0$  时，基于初始值  $x_1(0) = 15$ ,  $x_2(0) = -30$ ,  $\hat{z}_1(0) = 0$ ,  $\hat{z}_2(0) = 0$  和图 4-5 展示的切换信号  $\sigma(t)$ ，得到系统的控制器输入函数  $u$ ，如图 4-6 所示，并且在控制器的作用下得到系统 (4-1) 状态趋于稳定，如图 4-7 所示。当初始值为零时，取  $\omega = 2e^{-t}$ ，可以看到图 4-8 中系统的  $L_2$ -增益水平  $\gamma$  远小于给定的常量  $\gamma = 1$ ，即系统具有较好的性能。

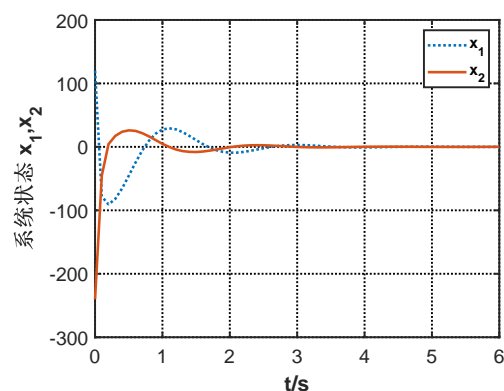


图 4-7 系统状态响应  
Fig 4-7 The system state response

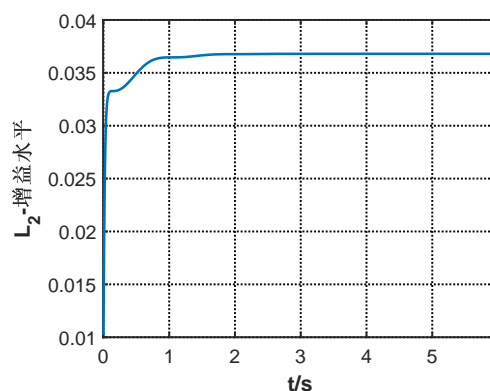


图 4-8  $L_2$ -增益  $\gamma$   
Fig 4-8 The  $L_2$ -gain  $\gamma$

## 4.5 本章小结

利用周期采样方法研究了一类切换随机非线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题。首先，构造了观测器，并进一步得到了观测误差函数。然后，基于采样周期和驻留时间的关系分情况讨论，采用反步法构建了输出反馈采样数据控制器，利用平均驻留时间方法得到了采样周期的限制条件，使得闭环系统是均方渐近稳定的，并具有加权的  $L_2$ -增益性能。

## 结 论

当前,切换非线性系统在信息处理、自动化生产以及航空航天等高新技术领域应用广泛,这为切换非线性系统控制问题的研究带来很大的促进作用。本文主要研究了几类切换非线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题,为控制理论应用于工业化生产提供了更多的理论基础,相关研究结果如下:

(1) 基于平均驻留时间的方法,分析了一类具有无源子系统和非无源子系统的不确定切换非线性系统的全局指数稳定性和  $L_2$ -增益问题。对于适当的切换信号,事先给出限制条件以保证系统的可解性(比如:无源率、平均驻留时间和干扰衰减水平),通过对无源子系统和非无源子系统分别设计控制器,利用多存储函数方法,得到了系统的全局指数稳定性和加权  $L_2$ -增益性能,并通过一个实际算例和一个数值仿真验证了方法的有效性。

(2) 在状态反馈控制器作用下,研究了一类切换非线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题。基于周期采样数据方法,通过考虑采样周期和驻留时间的关系,分别讨论了在单个采样周期中的不发生切换和发生一次切换的情况,如果系统在单个采样周期内发生切换,则在切换发生的瞬间系统转变为异步切换,直到下一个采样瞬间结束。首先,通过反步法构建了状态反馈采样数据控制器,然后,使用平均驻留时间方法得到了采样周期的限制条件,进一步得到了切换非线性系统的全局渐近稳定性和加权  $L_2$ -增益性能。

(3) 考虑了一类切换随机非线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题,在周期采样输出反馈控制器作用下,得到了系统的均方渐近稳定性和  $L_2$ -增益性能。利用周期采样的方法,基于采样周期和驻留时间的关系,分情况讨论系统在单个采样周期内是否发生切换。首先,构造了观测器,并且得到了观测误差函数。然后,采用反步法构建了输出反馈采样数据控制器,并且基于平均驻留时间方法得到了采样周期的限制条件,使得闭环系统是均方渐近稳定的,并具有加权的  $L_2$ -增益性能。

本文的创新点:

(1) 避开了构造 Lyapunov 函数的困难且无需求解 Hamilton-Jacobi 方程,而是利用存储函数判别出系统是全局指数稳定的,并且具有加权  $L_2$ -增益性能。

(2) 用反步法构建了切换非线性系统的状态反馈采样数据控制器,使用平均驻留时间方法得到了采样周期的限制条件,从而得到了系统的全局渐近稳定性和加权  $L_2$ -增益性能。

(3) 构造了切换随机非线性系统的观测器且得到了观测误差函数, 用反步法构建了输出反馈采样数据控制器, 并且基于平均驻留时间方法得到了采样周期的限制条件, 使得闭环系统均方渐近稳定, 并具有加权  $L_2$ -增益性能。

基于本文的研究结果, 后续研究工作将从以下几个方面进行:

(1) 对于实际系统, 控制器切换时滞以及输出时滞等对系统性能颇有影响, 如何将本文结果扩展到带有时滞的切换非线性系统问题中是值得考虑的。

(2) 针对基于周期采样方法的非线性系统问题研究, 采样周期大小与系统切换频率密切相关。如何减弱切换频率对采样周期的影响, 从而减少采样点的数量, 提高计算效率是非常值得研究的。

(3) 当前学者们对随机采样数据方法的研究还在进一步完善, 基于随机采样数据方法对切换非线性系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题的探究有待深入。

## 参考文献

- [1] XIE D, WU Y. Stabilisation of Time-delay Switched Systems with Constrained Switching Signals and Its Applications in Networked Control Systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2010, 4(10): 2120-2128.
- [2] WANG Y, NIU B, WANG H, et al. Neural Network-based Adaptive Tracking Control for Switched Nonlinear Systems with Prescribed Performance: An Average Dwell Time Switching Approach[J]. Neurocomputing, 2020, 435(6): 295-306.
- [3] TAN L N. Omnidirectional-vision-based Distributed Optimal Tracking Control for Mobile Multirobot Systems With Kinematic and Dynamic Disturbance Rejection[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2018, 65(7): 5693-5703.
- [4] DING Z, XI C, AN L, et al. Prescribed Performance Switched Adaptive Dynamic Surface Control of Switched Nonlinear Systems with Average Dwell Time[J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics Systems, 2017, 47(7): 1257-1269.
- [5] PARISE F, VALCHER M E, LYGEROS J. Computing the Projected Reachable Set of Stochastic Biochemical Reaction Networks Modelled by Switched Affine Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(11): 3719-3734.
- [6] XIE H, LI R. Simplified Modeling and Control of a GaN Switched-capacitor Converters with Phase Shift Modulation[J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2021, 36(12): 14550-14566.
- [7] 孙平. 鲁棒 $H_\infty$ 控制理论与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2012.
- [8] MA J, HONG N, JIE X, et al. Deterministic Sampling Strong Tracking Filtering Algorithms: Fast Detection and Isolation for Aircraft Actuator Fault[J]. Control Theory and Applications, 2015, 32: 734-743.
- [9] FENG G, CAO S, REES N. An Approach to  $H_\infty$  Control of a Class of Nonlinear Systems[J]. Automatica, 1996, 32: 1469-1474.
- [10] LI C, GUO H, FU J, et al.  $H_\infty$  Control for Switched Non-linear Systems with Structural Uncertainty by Using Robust Passivity[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2021, 40: Art. ID 101017, 14. <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2021.101017>.

- [11] CHANG X H, JU H P, ZHOU J. Robust Static Output Feedback  $H_\infty$  Control Design for Linear Systems with Polytopic Uncertainties[J]. Systems and Control Letters, 2015, 85: 23-32.
- [12] LI Z M, CHANG X H. Robust  $H_\infty$  Control for Networked Control Systems with Randomly Occurring Uncertainties: Observer-based Case[J]. ISA Transactions, 2018, 83: 13-24.
- [13] LIU L J, ZHAO X, WU D. Stability of Switched Positive Linear Time-delay Systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2019, 13(7): 912-919.
- [14] LAI G, LIU Z, ZHANG Y, et al. Adaptive Backstepping-based Tracking Control of a Class of Uncertain Switched Nonlinear Systems[J]. Automatica, 2018, 91: 301-310.
- [15] LIU L J, ZHAO X, SUN X M, et al. Stability and  $L_2$ -gain Analysis of Discrete-time Switched Systems with Mode-dependent Average Dwell Time[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2020, 50(6): 2305-2314.
- [16] BYRNES C, ISIDORI A, WILLEMS J. Passivity, Feedback Equivalence, and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1991, 36(11): 1228-1240.
- [17] LAN Q, LI S. Global Output-feedback Stabilization for a Class of Stochastic Nonlinear Systems via Sampled-data Control[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2017, 27(17): 3643-3658.
- [18] TSAI C C, LIN S C, WANG T Y, et al. Stochastic Model Reference Predictive Temperature Control with Integral Action for an Industrial Oil-cooling Process[J]. Control Engineering Practice, 2009, 17(2): 302-310.
- [19] 王放明. 随机动力学及其在兵器中的应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000.
- [20] 李德芬, 陆家鹏, 王放明. 随机动力学及其在武器射击密集度研究中的应用[J]. 振动、测试与诊断, 1993, 13(2): 28-36.
- [21] ZAMES, G. Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1981, 26(2): 301-320.
- [22] DOYLE J C, GLOVER K, KHARGONEKAR P P, et al. State-space Solutions to Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems[C]. 1988 American Control Conference. Atlanta, GA, USA: IEEE, 1988: 1691-1696.

- [23] RAVI R, NAGPAL K M, KHARGONEKAR P P.  $H_\infty$  Control of Linear Time-varying Systems: A State-space Approach[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1991, 29(6): 1394-1413.
- [24] XIE L, SU W. Robust  $H_\infty$  Control for a Class of Cascaded Nonlinear Systems[J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 1997, 42(10): 1465-1469.
- [25] 伍彩云, 赵军, 刘严严. 基于输出严格无源的切换非线性系统的  $H_\infty$  分析[J]. 控制与决策, 2013, 28(5): 137-140.
- [26] PANG H, LIU S. Robust Exponential Quasi Passivity and Global Stabilization for Uncertain Switched Nonlinear Systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2020, 30(18): 8117-8138.
- [27] KOROBOKOV V I, PAVLICHKOV S. Global Properties of the Triangular Systems in the Singular Case[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 342(2): 1426-1439.
- [28] LI Y, TONG S, LIU L, et al. Adaptive Output-feedback Control Design with Prescribed Performance for Switched Nonlinear Systems[J]. Automatica, 2017, 80: 225-231.
- [29] NIU B, KARIMI H R, WANG H, et al. Adaptive Output-feedback Controller Design for Switched Nonlinear Stochastic Systems with a Modified Average Dwell-time Method[J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics Systems, 2017, 47(7): 1371-1382.
- [30] WANG J, WANG X. Asynchronous  $H_\infty$  Control of Uncertain Switched Singular Systems with Time-varying Delays[J]. Circuits Systems and Signal Processing, 2021, 40(8): 3756-3781.
- [31] LONG L. Multiple Lyapunov Functions-based Small-gain Theorems for Switched Interconnected Nonlinear Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(8): 3943-3958.
- [32] NIU B, ZHAO J. Robust Stabilization and Tracking Control for a Class of Switched Nonlinear Systems[J]. Asian Journal of Control, 2013, 15(5): 1496-1502.
- [33] TANG L, ZHAO J. Neural Network Based Adaptive Prescribed Performance Control for a Class of Switched Nonlinear Systems[J]. Neurocomputing, 2017, 230: 316-321.



- 
- [34] ZHANG X, LIN A, ZENG J. Exponential Stability of Nonlinear Impulsive Switched Systems with Stable and Unstable Subsystems[J]. Frontiers of Information Technology and Electronic Engineering, 2014, 15(1): 31-42.
- [35] LONG L, ZHAO J.  $H_\infty$  Control of Switched Nonlinear Systems in  $p$ -Normal Form Using Multiple Lyapunov Functions[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(5): 1285-1291.
- [36] ZHU L, CHEN Z. Robust Input-to-output Stabilization of Nonlinear Systems with a Specified Gain[J]. Automatica, 2017, 84: 199-204.
- [37] WU L B, HE X Q, ZHANG D Q, et al. Adaptive  $H_\infty$  Fault-tolerant Control for a Class of Uncertain Switched Nonlinear Systems with Multiple State Time Delays[J]. International Journal of Systems Science, 2018, 49(8): 1784-1794.
- [38] WILLEMS J. Dissipative Dynamical Systems-part I: General Theory[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1972, 45(5): 321-351.
- [39] HILL D, MOYLAN P. Dissipative Dynamical Systems: Basic Input-output and State Properties[J]. Journal of the Franklin Institute, 1980, 309(5): 327-357.
- [40] HADDAD W, CHELLABOINA V. Dissipativity Theory and Stability of Feedback Interconnections for Hybrid Dynamical Systems[J]. Mathematics Problem in Engineering, 2001, 7(4): 299-335.
- [41] GAO Z, WANG Z, JI Z, et al.  $H_\infty$  Control of Continuous Switched Systems Based on Input and Output Strict Passivity[J]. IET Control Theory and Applications, 2018, 12(14): 1951-1955.
- [42] GAO Z, WANG Z, JI Z, et al. Output Strictly Passive  $H_\infty$  Control of Discrete-time Linear Switched Singular Systems Via Proportional Plus Derivative State Feedback[J]. Circuits Systems and Signal Processing, 2020, 39(8): 3907-3924.
- [43] LIN W, SHEN T. Robust Passivity and Feedback Design For Minimum-phase Nonlinear Systems with Structreal Uncertainty[J]. Automatica, 1999, 35(1): 35-47.
- [44] ITOH K, SHEN T, MUTOH Y, et al. Robust Control of NonLinear Systems with State Dependent Uncertainties[C]. 2001 European Control Conference (ECC). Porto, Portugal: IEEE, 2001: 3492-3498.
- [45] JOSÉ C G, PATRIZIO C, Bolzern P. Passivity of Switched Linear Systems: Analysis and Control Design[J]. Systems and Control Letters, 2012, 61: 549-554.

- [46] ZHENG Q, LING Y, WEI L, et al. Mixed  $H_\infty$  and Passive Control for Linear Switched Systems via Hybrid Control Approach[J]. International Journal of Systems Science, 2018, 49(4): 818-832.
- [47] ZHAO J, DAVID J H. A Notion of Passivity for Switched Systems with State-dependent Switching[J]. Journal of Control Theory and Applications, 2006, 1: 70-75.
- [48] WANG Y, GUPTA V, ANTSAKLIS P. On Passivity of a Class of Discrete-time Switched Nonlinear Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(3): 692-702.
- [49] ZHU H, HOU X. Exponential Feedback Passivity of Switched Polynomial Nonlinear Systems[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2018, Art. ID 6283875, 14. <https://doi.org/10.1155/2018/6283875>.
- [50] GAO Z, WANG Z, WU D. Input and Output Strictly Passive  $H_\infty$  Control of Discrete-time Switched Systems[J]. International Journal of Systems Science, 2019, 50(15): 2776-2784.
- [51] PANG H, ZHAO J. Incremental Passivity-based Output Regulation for Switched NonLinear Systems via Average Dwell-time Method[J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(8): 4215-4239.
- [52] ZHAI G, HU B, YASUDA K, et al. Disturbance Attenuation Properties of Time-controlled Switched Systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2001, 338(7): 765 - 779.
- [53] GRACE S D, JOSÉ C G, JAMAL D. Dynamic Output Feedback  $H_\infty$  Control of Switched Linear Systems[J]. Automatica, 2011, 47: 1713-1720.
- [54] GAO Z, WANG Z, JI Z, et al.  $H_\infty$  Control of Continuous Switched Systems Based on Input and Output Strict Passivity[J]. IET Control Theory and Applications, 2018, 12(14): 1951-1955.
- [55] LIU Z, WANG L, WANG J, et al. Distributed Sampled-data Control of Nonholonomic Multi-robot Systems with Proximity Networks[J]. Automatica, 2017, 77(6): 170-179.
- [56] KUMAR S V, RAJA R, ANTHONI S M, et al. Robust Finite-time Non-fragile Sampled-data Control for T-S Fuzzy Flexible Spacecraft Model with Stochastic Actuator Faults[J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 321: 483-497.

- [57] 朱晓强, 钟麦英. 基于强跟踪 $H_-/H_\infty$ 优化的无人机系统故障检测[J]. 山东大学学报(工学版), 2019, 49(01): 66-74.
- [58] LI S, XIANG Z. Sampled-Data Decentralized Output Feedback Control for a Class of Switched Large-scale Stochastic Nonlinear Systems[J]. IEEE Systems Journal, 2020, 14(2): 1602-1610.
- [59] GUAN C, CHEN W, YANG L, et al. Sampled-data Asynchronous Control for Switched Nonlinear Systems With Relaxed Switching Rules[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021: 1-12. <https://doi.org/10.1109/TCYB.2021.3079308>.
- [60] FRIDMAN E, SHAKED U, SUPLIN V. Input/Output Delay Approach to Robust Sampled-data  $H_\infty$  Control[J]. Systems and Control Letters, 2005, 54(3): 271-282.
- [61] SHAO H, HAN Q, ZHANG Z, et al. Sampling-interval-dependent Stability for Sampled-data Systems with State Quantization[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2013, 24(17): 2995-3008.
- [62] GAO H, WU J, SHI P. Robust Sampled-data  $H_\infty$  Control with Stochastic Sampling[J]. Automatica, 2009, 45(7): 1729-1736.
- [63] WEN S, ZENG Z. Robust Sampled-data  $H_\infty$  Output Tracking Control for a Class of Nonlinear Networked Systems with Stochastic Sampling[J]. International Journal of Systems Science, 2012, 44(9): 1-13.
- [64] KIM D W, LEE H J, TOMIZUKA M. Fuzzy Stabilization of Nonlinear Systems under Sampled-data Feedback: An Exact Discrete-time Model Approach[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2010, 18(2): 251-260.
- [65] JIN Y, KWON W, LEE S M. Affine Matched Parameterization Approach to Sampled-data Stabilization Criteria for T-S Fuzzy Systems with Variable Sampling[J]. Journal of the Franklin Institute, 2021, 358(7): 3530-3553.
- [66] DING F, XIE L, LIU Y J, et al. Modelling and Identification for Non-uniformly Periodically Sampled-data Systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2010, 4(5): 784-794.
- [67] WANG L, LIU X. Robust  $H_\infty$  Fuzzy Output Feedback Control for Uncertain Discrete-Time Nonlinear Systems[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2010, 12(3): 218-226.
- [68] GAO J, WANG X T. Asynchronous  $H_\infty$  Control of Switched Systems with Mode-dependent Average Dwell Time[J]. Circuits Systems and Signal Processing, 2017, 36(11): 4401-4422.

- [69] NIAMSUP P, PHAT V N. Robust Finite-time  $H_\infty$  Control of Linear Time-varying Delay Systems with Bounded Control via Riccati Equations[J]. International Journal of Automation and Computing, 2018, 15(3): 109-117.
- [70] REN J, HE G, FU J. Robust  $H_\infty$  Sliding Mode Control for Nonlinear Stochastic T-S Fuzzy Singular Markovian Gump Systems with Time-varying Delays[J]. Information Sciences, 2020, 535: 42-63.
- [71] LEE D H, JOO Y H, KIM S K.  $H_\infty$  Digital Redesign for LTI Systems[J]. International Journal of Control Automation and Systems, 2015, 13(3): 603-610.
- [72] CHANG Y, ZHANG S, ALOTAIBI N D, et al. Observer-based Adaptive Finite-time Tracking Control for a Class of Switched Nonlinear Systems With Unmodeled Dynamics[J]. IEEE Access, 2020, 8: 204782-204790.
- [73] WANG Y, XU N, LIU Y, et al. Adaptive Fault-tolerant Control for Switched Nonlinear Systems Based on Command Filter Technique[J]. Applied Mathematics and Computation, 2021, 392: Art. ID 125725, 18. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125725>.
- [74] YAZDI M B, JAHED-MOTLAGH M R. Stabilization of a CSTR with Two Arbitrarily Switching Modes Using Modal State Feedback Linearization[J]. Chemical Engineering Journal, 2009, 155(3): 838-843.
- [75] LIAN J, LI C, ZHAI G. Stability of Impulsive Switched Systems with Sampled-data Control[J]. IET Control Theory and Applications, 2021, 15: 523-533.
- [76] LI S, GUO J, XIANG Z. Global Stabilization of a Class of Switched Nonlinear Systems Under Sampled-data Control[J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics Systems, 2019, 49(9): 1912-1919.
- [77] HETEL L, FRIDMAN E. Robust Sampled-data Control of Switched Affine System[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(11): 2922-2928.
- [78] HAUROIGNE P, RIEDINGER P, IUNG C. Switched Affine Systems Using Sampled-data Controllers: Robust and Guaranteed Stabilization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(12): 2929-2935.
- [79] MAO J, XIANG Z, ZHAI G. Sampled-data Output Feedback Stabilization for a Class of Switched Stochastic Nonlinear Systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2019, 29(10): 2844-2861.

- [80] TONG W, TONG S, LI Y. Adaptive Neural Network Output Feedback Control of Stochastic Nonlinear Systems with Dynamical Uncertainties[J]. Neural Computing and Applications, 2013, 23(5): 1481-1494.
- [81] NIU B, AHN C K, LI H, et al. Adaptive Control for Stochastic Switched Nonlower Triangular Nonlinear Systems and Its Application to a One-link Manipulator[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2018, 48(10): 1701-1714.
- [82] LIU L, WANG Q, XIAO B, et al. Control and Analysis of Stochastic High-order Nonlinear Systems[M]. Beijing: Science Press, 2021.
- [83] WIENER N. The Average of an Analytic Functional and the Brownian Movement[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1921, 7(10): 294-298.
- [84] KOLMOGOROV A N. Foundations of the Theory of Probability[M]. New York: Chelsea Publishing, 1956.
- [85] ITÔ K. Stochastic Processes[M]. Berlin: Springer, 2004.
- [86] POSSAMAI D, TAN X, ZHOU C. Stochastic Control for a Class of Nonlinear Kernels and Applications[J]. The Annals of Probability: An Official Journal of the Institute of Mathematical Statistics, 2018, 46(1): 551-603.
- [87] ZHANG Y, WANG F. Observer-based Finite-time Control of Stochastic Non-strict-feedback Nonlinear Systems[J]. International Journal of Control Automation and Systems, 2021, 19(2): 655-665.
- [88] XU S. Explicit Solutions for Multivalued Stochastic Differential Equations[J]. Statistics and Probability Letters, 2008, 78(15): 2281-2292.
- [89] MARITON M. Jump Linear Systems in Automatic Control[M]. New York: Marcel Dekker, 1990.
- [90] HE S, FEI L. Exponential Stability for Uncertain Neutral Systems with Markov Jumps[J]. Journal of Control Theory and Applications, 2009, 7(1): 35-40.
- [91] XIANG Z, CHEN G. Stability Analysis and Robust  $H_\infty$  Control of Switched Stochastic Systems with Time-varying Delay[J]. Journal of Applied Mathematics, 2012: Art. ID 202916, 17. <https://doi.org/10.1155/2012/202916>.
- [92] BOUHTOURI A E, HINRICHSSEN D, PRITCHARD A J.  $H_\infty$  Control for Discrete-time Stochastic Systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 1999, 9(13): 923-948.

- [93] RAJCHAKIT G. New Design Switching Rule for the Robust Mean Square Stability of Uncertain Stochastic Discrete-time Hybrid Systems[C]. 2013 Third World Congress on Information and Communication Technologies (WICT 2013). Hanoi, Vietnam: IEEE, 2013: 214-218.
- [94] HOSOE Y, NAGIRA Y, HAGIWARA T. Random Polytope Representation of Discrete-time Uncertain Stochastic Switched Systems and Robust Stabilization[C]. 2016 European Control Conference (ECC). Aalborg, Denmark: IEEE, 2016: 2029-2034.
- [95] RAOUF J, MICHALSKA H. Robust Stabilization of Switched Linear Systems with Wiener Process Noise[C]. 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). Atlanta, GA, USA: IEEE, 2010: 6493-6498.
- [96] MA H, JIA Y, DU J, et al. Stochastic Bounded Real Lemma for Switched Stochastic Systems with Average Dwell Time[C]. 53rd IEEE Conference on Decision and Control. Los Angeles, CA, USA: IEEE, 2014: 4216-4221.
- [97] XIANG Z, WANG R, CHEN Q. Robust Stabilization of Uncertain Stochastic Switched Nonlinear Systems Under Asynchronous Switching[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, 2011, 225(1): 8-20.
- [98] SU X, PENG S, WU L, et al. Fault Detection Filtering for NonLinear Switched Stochastic Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(5): 1310-1315.
- [99] SHU Y, TONG Y, YU C. Robust Neural Tracking Control for Switched Nonaffine Stochastic Nonlinear Systems with Unknown Control Directions and Backlash-Like Hysteresis[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(5): 2791-2812.
- [100] WANG M, LIU Y, CAO G, et al. Energy-based Finite-time Stabilization and  $H_\infty$  Control of Stochastic Nonlinear Systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2020, 30: 7169-7184.
- [101] JIANG Y, ZHAI J. Global Sampled-data Output Feedback Stabilization for a Class of Switched Stochastic Nonlinear Systems with Quantized Input and Unknown Output Gain[J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2019, 41(17): 4511-4520.
- [102] LI Q, LIU X, ZHU Q, et al. Reliable Sampled-data Control for Nonlinear Switched Systems with Packet Dropout and Multiple Sampling Periods[J]. Mathematical

- Methods in the Applied Sciences, 2021: Art. ID 7609, 19. <https://doi.org/10.1002/mma.7609>.
- [103] LI T, WANG W, CHEN W. Sampled-data Control of Uncertain Switched Neutral Nonlinear Systems under Asynchronous Switching[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2020, 43(7): 4814-4834.
- [104] YAO L, ZHANG J. Sampled-data-based LQ Control of Stochastic Linear Continuous-time Systems[J]. Science in China, 2002, 45(5): 383-396.
- [105] CORENTIN B. Stability Analysis and Stabilization of Stochastic Linear Impulsive, Switched and Sampled-data Systems under Dwell-time Constraints[J]. Automatica, 2016, 74: 279-287.
- [106] FAHMY S, BANKS S. Robust  $H_\infty$  Control of Uncertain Nonlinear Dynamical Systems via Linear Time-varying Approximations[J]. Nonlinear Analysis, 2005, 63: 2315-2327.
- [107] POONGODI T, MISHRA P, Lim C P, et al. TS Fuzzy Robust Sampled-data Control for Nonlinear Systems with Bounded Disturbances[J]. Computation, 2021, 9(12): Art. ID 132, 14. <https://doi.org/10.3390/computation9120132>.
- [108] ELMI M, TALEBI A, MENHAJ M B. Robust Adaptive Output-feedback Dynamic Surface Control for a Class of Nonlinear Systems with Time-varying Parameters[J]. Mechatronic Systems and Control, 2021, 49(2): 62-73.
- [109] LI C, ZHAO J. Robust Passivity-based  $H_\infty$  Control for Uncertain Switched Nonlinear Systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2016, 26: 3186-3206.
- [110] SUN Y, ZHAO J. Regional Passivity for Switched Nonlinear Systems and Its Application[J]. ISA Transactions, 2019, 86: 98-109.
- [111] QIAN C, WEI L. Almost Disturbance Decoupling for a Class of High-order Nonlinear Systems[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2000, 45(6): 1208-1214.
- [112] KHALIL H. Nonlinear Systems[M]. Prentice Hall: Pearson Education, 2001.
- [113] LIBERZON D. Switching in Systems and Control[M]. New York: Springer, 2003.
- [114] LIU Y, ZHAO J. Stabilization of Switched Nonlinear Systems with Passive and Non-passive Subsystems[J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 67(3): 1709-1716.
- [115] HESPANHA J, LIBERSON D, SONTAG E. Nonlinear Norm Observability Notions and Stability of Switched Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(2): 154-168.

- [116] GAO H, CHEN T, LAM J. A New Delay System Approach to Network-based Control[J]. Automatica, 2008, 44(1): 39-52.
- [117] LI W Q, SU T, YANG L, et al. Reduction of Conservatism in Robust Gain-scheduling Control Based on LFT[J]. Journal of Naval Aeronautical and Astronautical University, 2011, 26(5): 533-538.
- [118] NIU B, ZHAO J. Stabilization and  $L_2$ -gain Analysis for a Class of Cascade Switched Nonlinear Systems: An Average Dwell-time Method[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2011, 5: 671-680.
- [119] BI W. Robust  $H_\infty$  Control for Uncertain Nonlinear Systems[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2007, 20(4): 545-553.
- [120] APOSTOL T. Mathematical Analysis, 2nd Edition[M]. Boston: Addison-Wesley Publishing Company, 1974.
- [121] WU F, QU X, LI C, et al. Multi-rate Sampled-data Control of Switched Affine Systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2020, 14(11): 1524-1530.
- [122] CHEN W, SHI S, GUAN C, et al. Finite-time Control of Switched Systems under Asynchronism Based on Quantized Sampled-data[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(11): 6635-6652.
- [123] BE A, TTA B, YE A. A Note on Stability and Control of Sampled-data Asynchronous Switched Systems[J]. European Journal of Control, 2022, 63: 143-150.
- [124] ZHANG L, LIU F, SONG Y. Linear Quadratic Optimal Sampled-data Control of Linear Continuous Switched Systems with Stochastic Disturbance[C]. Proceedings of the 31st Chinese Control Conference. Hefei, China: IEEE, 2012: 2209-2213.
- [125] NI H, XU Z, CHENG J, et al. Robust Stochastic Sampled-data-based Output Consensus of Heterogeneous Multi-agent Systems Subject to Random DoS Attack: A Markovian Jumping System Approach[J]. International Journal of Control Automation and Systems, 2019, 17(7): 1687-1698.
- [126] SONG Z, ZHAI J. Decentralized Output Feedback Stabilization for Switched Stochastic High-order Nonlinear Systems with Time-varying State/Input Delays[J]. ISA Transactions, 2019, 90: 64-73.
- [127] NIU B, AHN C K, LI H, et al. Adaptive Control for Stochastic Switched Nonlower Triangular Nonlinear Systems and Its Application to a One-Link Manipulator[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2018, 48(10): 1701-1714.