



浙江工业大学

# 硕士学位论文

马尔可夫跳变系统跟踪控制研究

作者姓名	姚才康
指导教师	沈英 副教授
学科专业	控制科学与工程
学位类型	工学硕士
培养类别	全日制学术型硕士
所在学院	信息工程学院

提交日期：2024 年 06 月

# Tracking control study of Markovian jump systems

Dissertation Submitted to  
**Zhejiang University of Technology**  
in partial fulfillment of the requirement  
for the degree of  
**Doctor of Engineering**



by

**Cai-kang YAO**

Dissertation Supervisor: Prof. Ying SHEN

June, 2024

## 浙江工业大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所提交的学位论文是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的研究成果。除文中已经加以标注引用的内容外，本论文不包含其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果，也不含为获得浙江工业大学或其它教育机构的学位证书而使用过的材料。对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人承担本声明的法律责任。

作者签名：

日期： 2024 年 6 月

## 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权浙江工业大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于： 1、保密□，在一年解密后适用本授权书。

2、保密□，在二年解密后适用本授权书。

3、保密□，在三年解密后适用本授权书。

4、不保密□。

（请在以上相应方框内打“√”）

作者签名：

日期： 2024 年 06 月

导师签名：

日期： 2024 年 06 月



中图分类号 TP390

学校代码 10337

UDC 004

密级 公开

研究生类别 全日制学术型硕士研究生



浙江工业大学

## 硕士学位论文

马尔科夫跳变系统跟踪控制研究

Tracking control study of Markovian jump systems

作者姓名	姚才康	第一导师	沈英 副教授
学位类型	工学硕士	第二导师	
学科专业	控制科学与工程	培养单位	信息工程学院
研究方向			

答辩日期: 2024 年 6 月 日



## 马尔科夫跳变系统跟踪控制研究

### 摘要

马尔可夫跳变系统是一类具有多模态的随机系统，其模态服从马尔可夫过程在多个可能的取值之间转移，因此在刻画一些具有随机突变如元器件损坏、网络传输延迟、功率切换等结构或参数突变的系统时，马尔可夫跳变模型具有非常突出的优势。本课题关注无限时域下马尔可夫跳变系统的状态估计与输出跟踪控制问题。针对无限时域下马尔可夫跳变系统的跟踪控制问题，考虑不同场景，通过动态规划推导 Riccati 方程及其控制器，同时设计转移概率已知或未知时 Riccati 方程的迭代求解算法，并在数值仿真系统上验证所提方法的有效性与优越性。本文主要研究内容如下：

(1) 研究系统状态与模态可获得时，无限时域下马尔可夫跳变系统的线性二次型跟踪(Linear Quadratic Tracker, LQT)问题。基于被控系统与跟踪系统，定义跟踪误差与增广状态变量，构造跟踪误差系统。通过动态规划推导得到 LQT 问题对应的耦合代数 Riccati 方程(Coupled Algebraic Riccati Equation, CARE)及 LQT 控制器。结合跟踪误差系统，在给定衰减因子下，讨论 CARE 解的存在性以及对应反馈控制器作用下闭环系统的稳定性。考虑转移概率已知以及未知两种情况进行 CARE 求解，基于初始镇定解设计迭代求解算法并证明算法的收敛性并对所提算法进行模拟仿真验证；

(2) 研究系统状态模态可获得但系统状态不可获得时，无限时域下马尔可夫跳变系统的  $H_\infty$  跟踪控制问题。基于被控系统与  $H_\infty$  滤波器，定义估计误差与增广状态变量，构造估计误差系统。基于被控系统与跟踪系统，定义跟踪误差与增广状态变量，构造跟踪误差系统。利用博弈论的思想，将  $L_2$  增益的实现转化为极小极大问题的求解，利用动态规划求解  $H_\infty$  跟踪控制问题以及  $H_\infty$  滤波问题对应的博弈耦合代数 Riccati 方程(Game Coupled Algebraic Riccati Equation, GCARE)及  $H_\infty$  跟踪控制器和  $H_\infty$  滤波器。在给定衰减因子以及期望的  $L_2$  增益下，讨论 GCARE 解的存在性以及对应  $H_\infty$  跟踪控制器和  $H_\infty$  滤波器下闭环系统的稳定性。考虑转移概率已知以及未知两种情况进行 GCARE 求解，基于初始镇定解设计迭代求解算法并证明算法的收敛性并对所提算法进行模拟仿真验证。

**关键词：**马尔可夫跳变系统，LQT， $H_\infty$ ，Riccati 方程，转移概率未知

# TRACKING CONTROL STUDY OF MARKOVIAN JUMP SYSTEMS

## ABSTRACT

Markov jump systems (MJS) are a class of stochastic systems with multiple modes, whose modes obey a Markov process shifting between multiple possible values, and thus Markov jump models have a very prominent advantage in portraying systems with random mutations such as component damage, network transmission delay, power switching, and other structural or parameter mutations. In this work, we focus on the state estimation and output tracking control problems of MJS in infinite time domain. In order to solve the tracking control problem of MJS in infinite time domain, we consider different scenarios, derive the Riccati equation and its controller through dynamic programming, and design an iterative algorithm for solving the Riccati equation when the transfer probability (TP) is known or unknown, and validate the validity and superiority of the proposed method on the numerical simulation system. The main research contents of this paper are as follows:

(1) To study the LQT problem of MJS in infinite time domain when the system states and modes are obtainable. Based on the controlled system and the tracked system, the tracking error and the augmented state variables are defined, and the tracking error system is constructed. The CARE and LQT controller corresponding to the LQT problem are obtained by DP derivation. In conjunction with the tracking error system, the existence of the CARE solution and the stability of the closed-loop system under the action of the corresponding feedback controller are discussed for a given discount factor. The CARE solution is considered for both known and unknown TPs, and an iterative solution algorithm is designed based on the initial calibration solution, and the convergence of the algorithm is demonstrated and verified by simulation;

(2) To study the  $H_\infty$  tracking control problem of MJS in infinite time domain when the system modes are available but the system state is not. Based on the controlled system and the  $H_\infty$  filter, the estimation error and the generalised state variables are defined, and the estimation error system is constructed. Based on the controlled system and the tracked system, define the tracking error and the generalised state variables, and construct the tracking error system. Using the idea of game theory, the  $L_2$  gain realisation is transformed into the solution of the minimal-extremely large problem, and



the DP is used to solve the  $H_\infty$  tracking control problem as well as the  $H_\infty$  filtering problem corresponding to the GCARE and the  $H_\infty$  tracking controllers and  $H_\infty$  filters. The existence of the GCARE solution and the stability of the closed-loop system with the corresponding  $H_\infty$  tracking controller and  $H_\infty$  filter are discussed for a given discount factor and desired  $L_2$  gain. Both known and unknown TPs are considered for the GCARE solution, and an iterative solution algorithm based on the initial calibration solution is designed and its convergence is proved and the proposed algorithm is validated by simulation.

**KEY WORDS:** Markov jump system, LQT,  $H_\infty$ , Riccati equation, transfer probability unknown

## 目 录

摘 要 .....	I
ABSTRACT .....	II
目 录 .....	IV
插图清单 .....	VII
表格清单 .....	VII
符号说明 .....	VIII
第一章 绪 论 .....	1
1.1 课题背景及研究意义 .....	1
1.2 国内外研究现状 .....	3
1.2.1 最优控制的研究现状 .....	3
1.2.2 $H_\infty$ 控制的研究现状 .....	4
1.2.3 $H_\infty$ 滤波的研究现状 .....	5
1.2.4 数据驱动控制的研究现状 .....	5
1.3 本文研究内容 .....	6
1.4 本文组织框架 .....	7
第二章 马尔可夫跳变系统跟踪控制问题 .....	8
2.1 引言 .....	8
2.2 研究对象 .....	8
2.3 基础知识 .....	9
2.4 总结 .....	11
第三章 LQT 问题求解 .....	12
3.1 引言 .....	12
3.2 LQT 问题建模 .....	12
3.3 CARE .....	14
3.3.1 CARE 推导 .....	14

3.3.2 CAER 镇定解的存在性与稳定性 .....	17
3.4 CARE 求解 .....	18
3.4.1 TP 已知 CARE 求解 .....	18
3.4.2 TP 未知 CARE 求解 .....	21
3.5 仿真 .....	23
3.6 总结 .....	27
第四章 $H_\infty$ 跟踪控制问题求解 .....	28
4.1 引言 .....	28
4.2 $H_\infty$ 跟踪控制问题建模 .....	28
4.3 GCARE .....	31
4.3.1 控制问题 GCARE 推导 .....	31
4.3.2 估计问题 GCARE .....	35
4.3.3 GCARE 镇定解的存在性与稳定性 .....	37
4.4 GCARE 求解 .....	40
4.4.1 TP 已知 GCARE 求解 .....	40
4.4.2 TP 未知 GCARE 求解 .....	45
4.5 仿真 .....	46
4.6 总结 .....	52
第五章 结论与展望 .....	53
5.1 结论 .....	53
5.2 展望 .....	54
参考文献 .....	55
致 谢 .....	59
作者简介 .....	60
1 作者简历 .....	60
2 攻读硕士学位期间发表的学术论文 .....	60
3 参与的科研项目及获奖情况 .....	60
4 发明专利 .....	60

学位论文数据集 .....	61
---------------	----

## 插图清单

图 3-1 算法 3.1 解矩阵收敛过程.....	24
图 3-2 算法 3.1 控制器收敛过程.....	25
图 3-3 算法 3.2 解矩阵收敛过程.....	26
图 3-4 算法 3.2 控制器收敛过程.....	26
图 3-5 跟踪控制过程.....	27
图 4-1 算法 4.1 解矩阵收敛过程.....	48
图 4-2 算法 4.1 控制器收敛过程.....	48
图 4-3 算法 4.2 解矩阵收敛过程.....	49
图 4-4 算法 4.2 控制器收敛过程.....	49
图 4-5 跟踪控制过程.....	52

## 表格清单

表 3-1 KLEINMAN 算法求解 CARE.....	20
表 3-2 TD( $\lambda$ )算法求解 CARE.....	22
表 3-3 模态参数.....	23
表 4-1 KLEINMAN 算法求解 GCARE.....	44
表 4-2 TD( $\lambda$ ) 算法求解 GCARE.....	46

## 符号说明

MJS	——	马尔可夫跳变系统(Markov Jump System);
TP	——	转移概率(Transition Probability);
SS	——	随机稳定(Stochastically Stable);
LQR	——	线性二次型调节(Linear Quadratic Regulator);
LQT	——	线性二次型跟踪(Linear Quadratic Gaussian);
LQG	——	线性二次型高斯控制(Linear Quadratic Tracker);
LMI	——	线性矩阵不等式(Linear Matrix Inequality);
DP	——	动态规划(Dynamic Programming);
CLE	——	耦合 Lyapunov 方程(Coupled Lyapunov Equation)
ARE	——	代数 Riccati 方程(Algebraic Riccati Equation);
CARE	——	耦合代数 Riccati 方程(Coupled Algebraic Riccati Equation);
GCARE	——	博弈耦合代数 Riccati 方程(Game Coupled Algebraic Riccati Equation);
$\mathbb{R}^n$	——	N 维实欧氏空间;
$\mathbb{R}^{n \times m}$	——	<b>N 维实欧氏空间;</b>
<b>I</b>	——	合适维度的单位阵;
<b>0</b>	——	合适维度的零矩阵;
$X > \mathbf{0}$	——	对称正定矩阵 $X$ ;
$X \geq \mathbf{0}$	——	对称半正定矩阵 $X$ ;
$X^\top$	——	矩阵 $X$ 的转置;
$X^{-1}$	——	矩阵 $X$ 的逆;
$\mathbb{E}\{\cdot\}$	——	数学期望;
$\Pr\{\cdot\}$	——	事件 $\cdot$ 发生的概率;
$\triangleq$	——	定义为;
$\ \cdot\ $	——	向量或矩阵范数;
$\ x\ _Q^2$	——	$x^\top Q x$ ;
$\otimes$	——	克罗内克积;
$r(\cdot)$	——	算子 $\cdot$ 的谱半径;

# 第一章 绪 论

## 1.1 课题背景及研究意义

本课题关注无限时域下马尔可夫跳变系统(Markov Jump System, MJS)的状态估计与输出跟踪控制问题。混杂系统(Hybrid System)是由连续变量动态系统和离散事件动态系统相互混杂、相互作用形成的统一动态系统<sup>[1]</sup>。切换系统作为混杂系统的一种,其系统的离散事件表现为系统具有多个模态用于描述系统的不同运行状态,且各个模态在特定的切换策略下进行切换<sup>[2]</sup>。MJS 同时具备马尔可夫过程和切换系统的特征,可以看作一种特殊的切换系统,区别在于 MJS 的模态转移服从于马尔可夫过程而不是给定的切换策略。相比于一般的线性或非线性定常系统, MJS 的结构是时变的,其模态在多个可能的取值之间转移,因此在刻画一些具有随机突变如元器件损坏、网络传输延迟、功率切换等结构或参数突变的系统时,马尔可夫跳变模型具有非常突出的优势。然而 MJS 的系统状态在时间上连续变化,模态转移却呈现时间上的离散变化,表现出强时变、非线性的特征,因此已有的关于一般线性或非线性系统的研究方法和理论无法直接应用于 MJS 的分析与设计。针对 MJS 的理论分析和相关问题及方法的研究具有重要意义,值得深入探讨,不论是学术界还是工业界都迫切需要建立和完善 MJS 分析设计的理论体系。自 20 世纪 60 年代以来, MJS 受到了专家和学者的广泛关注,其理论和应用取得了巨大进展,许多基本的控制估计问题得到了深入研究,如能控性能观性<sup>[3][4][5]</sup>,稳定性<sup>[6][7][8][9][10]</sup>,镇定控制<sup>[11][12]</sup>,最优控制<sup>[13][14][15][16]</sup>,线性二次型高斯(Linear Quadratic Gaussian, LQG)控制<sup>[17][18][19]</sup>,状态估计和滤波<sup>[20][21][22][23][24]</sup>,参数估计<sup>[25][26]</sup>,模型降阶<sup>[27][28]</sup>,其中巴西学者 Costa 及其团队对 MJS 进行了系统性的研究,并取得了系统的研究成果<sup>[29][30]</sup>。

本课题讨论 MJS 无限时域下的输出跟踪控制问题。跟踪控制要求系统状态或输出与目标信号保持一致,已被广泛地应用于无人机混合编队协同作战跟踪控制<sup>[31]</sup>、不可预测飞行物的雷达追踪<sup>[32]</sup>、水下机器人跟踪作业<sup>[33]</sup>等工程实践中。通过线性二次型跟踪(Linear Quadratic Tracker, LQT)控制方法设计最优跟踪控制器使被控系统输出在给定性能指标下实现对参考轨迹的跟踪,是解决跟踪控制问题的重要方法之一。LQT 属于最优控制的一种,最优控制是现代控制理论和应用中最基本的工具之一,最优控制问题可以通过变分法、极大值原理、动态规划(Dynamic Programming, DP)等数学方法推导得到代数 Riccati 方程(Algebraic Riccati Equation, ARE),根据 ARE 的解设计出满足预设性能指标的反馈控制器。LQT 控制不考虑

被控系统存在过程噪声的情况,是比较理想的控制器设计方法,然而系统实际运行时存在各种各样的随机因素,如量测输出中可能存在量测噪声,系统运行时存在过程噪声等等。如果在控制器设计时忽略这些随机因素,就难以达到预期的控制效果,因此 LQT 控制无法应对系统存在各类噪声时的跟踪要求。同属最优控制的 LQG 控制可以处理随机干扰为高斯噪声且其统计特性已知时的控制问题。LQG 控制下系统具有  $0.5 \sim \infty$  的幅值稳定裕度和大于等于  $60^\circ$  的相位稳定裕度,控制效果优越。然而 LQG 控制基于被控对象数学模型进行控制器设计,控制性能的实现极大地依赖于被控系统数学模型的精确程度,因此对于受控对象模型摄动时的鲁棒性很差,同时如果仅仅知道噪声干扰属于某个集合但是其统计特性未知时, LQG 控制也无法应用<sup>[34]</sup>。为了解决 LQG 的这些局限性与缺点,以 Zames.G 为代表的学者们提出  $H_\infty$  控制理论,即对扰动信号不再假设具有固定的统计特性,只要求其能量有界即可,此外,引入了对模型不确定性的处理,使得系统具有较好的鲁棒性<sup>[35]</sup>。

上述控制方法在设计时一般假设系统状态已知或可直接获得,但大多数情况下系统的状态无法直接获得。当系统满足能观性条件且无随机干扰时,可以利用系统量测信息通过系统重构设计状态观测器获取系统状态。当系统受过程噪声或量测噪声等随机干扰影响时,简单的状态观测器无法获得精确的系统状态,此时可以通过一些状态估计方法减少噪声的影响获取较为精确的系统状态。状态估计问题也被称为滤波问题,而实现滤波的装置也被称为滤波器,状态估计即从数据中滤除噪声和干扰以提取有用的信息估计出真实的系统状态。早期的滤波器设计在频域进行,出于第二次世界大战时的军事需要,柯尔莫哥洛夫和维纳相继提出了针对平稳随机过程的最优线性滤波理论,即维纳滤波理论,但维纳滤波只能处理平稳随机过程,对非平稳随机过程滤波效果一般。时域上最经典的滤波器是卡尔曼滤波器,它结合先验信息和实际测量实时更新状态估计及其协方差,需要的数据量小,计算速度快<sup>[37]</sup>。卡尔曼滤波的局限性在于其实现需要已知噪声的统计特性,依赖于精确的系统模型,因此仍然需要其他可以处理噪声统计特性未知以及建模误差的滤波算法,即要求滤波算法有较好的鲁棒性。众多学者已针对该问题进行了深入研究,并提出了许多基于卡尔曼滤波理论的鲁棒滤波算法,但这些算法仍属于卡尔曼滤波的范畴。本课题关注  $H_\infty$  滤波问题,也被称为极小极大滤波,即在最坏噪声条件下设计滤波器,因此该滤波器将具有较好的鲁棒性,同时它不要求噪声统计特性已知,仅要求其能量有界<sup>[38]</sup>。

现代控制理论以被控对象的数学模型为基础进行控制,被称为基于模型的控制。系统的建模与辨识是基于模型的控制理论中最重要的组成部分,只有基于一个精确的数学模型,才能设计出满足预期控制效果的控制器。但是随着被控系统



规模的扩大和复杂性的增加，建立精确的物理化学机理模型逐渐变得困难。如何直接通过系统输入输出数据进行系统控制，即基于数据的控制受到了控制领域专家学者的广泛关注。基于数据的控制是指在不建立系统模型的情况下，仅利用被控系统的输入输出数据直接设计、优化控制器，避免了建模误差对控制器性能的影响，是直接从数据到控制器设计的控制理论和方法。数据驱动控制的实现依赖于高质量的系统数据、高效的数据分析和处理能力，而不是事先建立的精确数学模型，其优势在于可以处理难以建模的复杂系统，自适应地调整控制策略以适应系统行为的变化。因此，发展数据驱动控制理论方法是现代控制理论发展与重大应用的必然要求，具有重要的理论与现实意义<sup>[39]</sup>。

## 1.2 国内外研究现状

### 1.2.1 最优控制的研究现状

关于 MJS 的最优控制，文献[13][14] 首次研究有限时域下连续 MJS 的线性二次型调节器(Linear Quadratic Regulator, LQR)问题，基于极大值原理得到 LQR 问题对应的耦合代数 Riccati 方程(Coupled Algebraic Riccatic Equation, CARE)，提出适用于 MJS 的模态相关最优状态反馈控制器。太阳能发电系统在运作时可能会被天空中的云层遮挡，其所能接收到的日照量以难以预测的方式随机突变，文献[15]将发电系统中的蒸汽温度调节器建模为连续 MJS，并将文献[13]的结果应用于蒸汽锅炉的温度控制中，实现了更稳定的温度输出和更迅速的温度调节。随后文献[14]将文献[13]的结果推广到无限时域下离散 MJS 的 LQR 问题中，基于 DP 给出了相对应的 CARE 及其反馈控制器形式，并在萨缪尔森乘数-加速器模型描述的简单经济系统中进行了仿真验证。文献[13]与[15]虽然给出了 LQR 问题对应的 CARE，但是没有讨论 CARE 镇定解的存在性问题。文献[4]与文献[5]为研究离散或连续 CARE 镇定解的存在性，提出了弱能控性与能观性、绝对能控性与能观性的概念，分别给出了 CARE 镇定解存在的充要条件。文献[16]结合矩阵不等式，通过序列的单调性设计 CARE 镇定解的数值求解算法。

系统实际运行时可能各种随机因素的影响，针对系统存在加性高斯白噪声的情况，文献[17]与[18]研究了连续以及离散 MJS 的 LQG 问题，在有限时域下根据分离原理分别设计了最优控制器和最优滤波器，在无限时域下给出了稳态控制器和次优滤波器。文献[19]关注广义加性白噪声下的有限时域离散 MJS 的 LQG 问题，提出了适用该情况的分离原理。一般情况下，最优控制中的二次型权重矩阵要求是正定的，对于权重矩阵半正定或不定的问题，文献[40]给出了最优控制器存在充要条件。文献[41]研究了一步时滞下离散 MJS 的最优控制问题，在有限时域下

给出了对应 Riccati 方程,但在无限时域下仅仅给出了对应的线性矩阵不等式 (Linear Matrix Inequality, LMI)求解方法,结果具有一定的保守性。文献[42]研究了一类具有有界时变时滞的离散 MJS 在转移概率(Transition Probability, TP)部分已知时的稳定性及镇定问题,以 LMI 的形式给出控制器设计方法。在表征系统模态的马尔可夫参数不可获得时,文献[43]研究系统状态和控制输入受约束下的无限时域离散 MJS 的 LQR 问题,利用模态探测器获取模态信息,通过 LMI 求解反馈控制器。对于具有不确定 TP 分布的非齐次 MJS,文献[44]引入总变化距离衡量模态转移过程的不确定性,通过 DP 导出鲁棒最优控制器。

### 1.2.2 $H_\infty$ 控制的研究现状

$H_\infty$  控制作为一种抑制扰动的鲁棒控制方法,是现代控制理论与应用中非常重要的控制工具,文献[45]首次研究了有限和无限时域下连续 MJS 的  $H_\infty$  控制问题,随后文献[46]将结果推广到离散情况下,得到了博弈耦合代数 Riccati 方程(Game Coupled Algebraic Riccatic Equation, GCARE)和对应的  $H_\infty$  控制器,并证明了当  $L_2$  增益趋于无穷时,GCARE 将退化为 CARE。文献[47]研究离散 MJS 的全信息  $H_\infty$  控制,给出了 GCARE 具有唯一镇定解的充分必要条件,证明了在任意能量有界噪声下闭环系统都满足预设的  $L_2$  增益,并且在最坏噪声下闭环系统随机稳定。文献[48]考虑具有有界时变参数不确定性 MJS 的  $H_\infty$  控制问题,并讨论了 TP 不确定时的鲁棒  $H_\infty$  控制问题。对于 TP 在有界凸集内的混合  $H_2/H_\infty$  控制问题,文献[49]给出了相应的 LMI 解,但只考虑单一模态的噪声增益矩阵,建模存在局限,文献[50]进一步将该结果推广到具有多模态噪声增益,带有乘性噪声的无限时域混合  $H_2/H_\infty$  控制问题,给出了相应的 Riccati 方程与 LMI 求解算法。文献[51]将 TP 不确定性量化为高斯概率密度函数,利用 LMI 给出了  $H_\infty$  控制器存在的充分条件。文献[52]研究了基于 Roesser 模型的二维 MJS 的异步  $H_\infty$  控制问题。文献[53]通过子系统变换对 MJS 进行解耦,考虑 TP 和系统动态未知的连续 MJS,使用积分强化学习求解 GCARE 和  $H_\infty$  控制器。

文献[54]首次研究无限时域下连续 MJS 的  $H_\infty$  跟踪问题,基于 LMI 给出了  $H_\infty$  跟踪控制器。文献[55]将存在随机推力器故障的航天器轨迹跟踪控制问题建模为 MJS 输出跟踪问题,利用 LMI 保证输入约束下 MJS 的随机稳定性给出  $H_\infty$  跟踪控制器。文献[56]研究了一类具有多源不确定性,部分未知 TP,未知非线性,以及未知动态的严格反馈 MJS 的自适应模糊跟踪问题,在执行器存在不可预测故障时利用 LMI 给出  $H_\infty$  跟踪控制器。当被跟踪系统存在未知有界能量输入时,文

献[57]研究了模态已知或未知情况下的  $H_\infty$  跟踪问题，并分别给出了模态依赖以及模态非依赖的  $H_\infty$  跟踪控制器。

### 1.2.3 $H_\infty$ 滤波的研究现状

关于 MJS 的状态估计问题存在大量的理论研究，主要有卡尔曼滤波和  $H_\infty$  滤波两类状态估计方法，其中关于 MJS 的卡尔曼滤波在过去十几年间已经被深入讨论<sup>[20][21][22][23]</sup>。特别要注意，不论是使用卡尔曼滤波或  $H_\infty$  滤波对 MJS 进行状态估计时，其模态是否可获得是至关重要的。本课题关注 MJS 的  $H_\infty$  滤波问题，文献[58]考虑系统模态可获得解决了连续 MJS 的  $H_\infty$  滤波问题，利用 LMI 设计模态相关  $H_\infty$  滤波器，随后文献[59]将结果推广到离散 MJS。文献[60]研究具有有界参数不确定性连续 MJS 的鲁棒  $H_\infty$  滤波问题，设计 LMI 算法进行鲁棒  $H_\infty$  滤波器求解。对于系统模态信息未知且 TP 具有多面体不确定性的情况，文献[61]与[62]结合模态相关的 Lyapunov 函数给出了模态非依赖的鲁棒  $H_\infty$  滤波器，随后文献[63]将结果推广到连续系统中，文献[64]给出了比文献[63]保守性更弱的结果，并且适用于具有终止模态的 MJS。对于带有有界时变不确定性以及模态相关有界时变时滞的时变 MJS，文献[65]给出了相应的鲁棒  $H_\infty$  滤波器。文献[66]研究基于 Roesser 模型的二维 MJS 的  $H_\infty$  滤波问题，给出了模态相关的全阶  $H_\infty$  滤波器。文献[67]研究了 TP 未知离散 MJS 的  $H_\infty$  滤波问题，构造模态相关的全阶滤波器，并通过 LMI 得到的估计误差系统的有界实引理，给出了  $H_\infty$  滤波器的存在性定理。文献[68]研究了 TP 部分未知的 MJS 的  $H_\infty$  和  $H_2$  滤波，提出了一种引入额外矩阵变量的方法，使 Lyapunov 矩阵与滤波器参数解耦，改进了已有的滤波器设计方法，降低了保守性，提高了计算速度。文献[69]考虑 TP 和检测器的检测概率未知，基于检测器方法估计不可获得的模态信息，给出了  $H_\infty$  滤波器存在的充要条件，文献[70]将结果推广到混合  $H_2/H_\infty$  滤波问题上，使得滤波性能得到提升，文献[71]将文献[70]的结果应用到 MJS 的鲁棒故障检测中取得了不错的效果。

### 1.2.4 数据驱动控制的研究现状

注意到 MJS 的控制或估计方法基于 TP 信息才能实现，现有的结果通常假设 TP 完全已知，在许多实际情况这个假设相当理想化，受成本或系统本身限制完整的 TP 难以获得。一种解决思路是估计 TP，如文献应用期望极小极大算法估计 TP 并用于控制器设计<sup>[25]</sup>。另一种是引入数据驱动控制方法进行控制器或滤波器设计，文献[72]使用离线类 TD( $\lambda$ )算法来求解 TP 完全未知时的 CARE，通过已有的模态序列求解按 TP 加权的解矩阵实现控制器设计，文献[73]将文献[72]提出的离线算法转化为在线算法，提高求解效率，文献[74]与[75]将在线算法推广到 TP 未

知时 MJS 与半马尔可夫跳变系统的 GCARE 求解中。文献[76]与[77]结合强化学习提出的无模型近似动态规划作为一种数据驱动方法，利用系统运行过程中的状态信息，在激励噪声下使用最小二乘求解控制器，目前已被运用到 CARE 或 GCARE 的求解中。文献[78]使用积分强化学习，研究连续 MJ 在参数部分未知及 TP 未知时的 LQT 问题，但参数矩阵完全未知的问题还未解决。文献[79]针对模糊非线性 MJS，得到一组模糊随机耦合代数 Riccati 方程，提出了系统参数未知下基于积分强化学习的非脆弱输出反馈跟踪控制器求解算法。文献[53]通过子系统变换对 MJS 进行解耦，考虑 TP 和系统动态未知的连续 MJS，使用积分强化学习求解 GCARE 和  $H_\infty$  控制器并运用在潮汐涡轮机系统控制中。

### 1.3 本文研究内容

通过查阅国内外相关文献，了解 MJS 的理论体系和研究现状，并深入研究 MJS 的 LQT 控制、 $H_\infty$  控制、 $H_\infty$  滤波等控制估计方法。针对无限时域下 MJS 的跟踪控制问题，考虑不同场景，通过 DP 推导 Riccati 方程及其控制器，同时设计 TP 已知或未知时 Riccati 方程的迭代求解算法，并在数值仿真系统上验证所提方法的有效性与优越性。本文主要研究内容如下：

(1) 研究系统状态与模态可获得时，无限时域下 MJS 的 LQT 问题。基于被控系统与被跟踪系统，定义跟踪误差与增广状态变量，构造跟踪误差系统。通过 DP 推导得到 LQT 问题对应的 CARE 及 LQT 控制器。结合跟踪误差系统，在给定衰减因子下，讨论 CARE 解的存在性以及对应反馈控制器作用下闭环系统的稳定性。考虑 TP 已知以及未知两种情况进行 CARE 求解，基于初始镇定解设计迭代求解算法并证明算法的收敛性并对所提算法进行模拟仿真验证；

(2) 研究系统状态模态可获得但系统状态不可获得时，无限时域下 MJS 的  $H_\infty$  跟踪控制问题。基于被控系统与  $H_\infty$  滤波器，定义估计误差与增广状态变量，构造估计误差系统。基于被控系统与被跟踪系统，定义跟踪误差与增广状态变量，构造跟踪误差系统。利用博弈论的思想，将  $L_2$  增益的实现转化为极小极大问题的求解，利用 DP 求解  $H_\infty$  跟踪控制问题以及  $H_\infty$  滤波问题对应的 GCARE 及  $H_\infty$  跟踪控制器和  $H_\infty$  滤波器。在给定衰减因子以及期望的  $L_2$  增益下，讨论 GCARE 解的存在性以及对应  $H_\infty$  跟踪控制器和  $H_\infty$  滤波器下闭环系统的稳定性。考虑 TP 已知以及未知两种情况进行 GCARE 求解，基于初始镇定解设计迭代求解算法并证明算法的收敛性并对所提算法进行模拟仿真验证。

## 1.4 本文组织框架

本文分为五个章节，每个章节的主要内容如下：

第一章，绪论。本章介绍了课题的研究背景及研究意义，总结了马尔可夫跳变系统控制与估计问题的研究现状，最后概述了本文的主要研究内容并介绍本文的组织结构。

第二章，数学基础。本章介绍 MJS 的基本理论，给出研究对象和研究问题，为后续工作提供知识基础与思路指引。基于被控系统与  $H_\infty$  滤波器，定义估计误差与增广状态变量，构造估计误差系统。基于被控系统与跟踪系统，定义跟踪误差与增广状态变量，构造跟踪误差系统。

第三章，系统状态与模态可获得时无限时域下 MJS 的 LQT 问题。本章基于跟踪误差系统，通过 DP 推导得到 LQT 问题对应的 CARE 及 LQT 控制器。结合跟踪误差系统，在给定衰减因子下，讨论 CARE 解的存在性以及对应反馈控制器作用下闭环系统的稳定性。考虑 TP 已知以及未知两种情况进行 CARE 求解，基于初始镇定解设计迭代求解算法并证明算法的收敛性并对所提算法进行模拟仿真验证。

第四章，系统状态与模态不可获得时无限时域下 MJS 的  $H_\infty$  跟踪控制问题。基于估计误差系统和跟踪误差系统，利用博弈论的思想，将  $l_2$  增益的实现转化为极小极大问题的求解，利用 DP 求解  $H_\infty$  跟踪控制问题以及  $H_\infty$  滤波问题对应的 GCARE 及  $H_\infty$  跟踪控制器和  $H_\infty$  滤波器。在给定衰减因子以及期望的  $l_2$  增益下，讨论 GCARE 解的存在性以及对应  $H_\infty$  跟踪控制器和  $H_\infty$  滤波器下闭环系统的稳定性。考虑 TP 已知以及未知两种情况进行 GCARE 求解，基于初始镇定解设计迭代求解算法并证明算法的收敛性并对所提算法进行模拟仿真验证。

第五章，结论与展望。本章对全文研究工作和研究成果进行总结，并指出马尔可夫跳变系统跟踪控制中有待进一步研究的问题。

## 第二章 马尔可夫跳变系统跟踪控制问题

### 2.1 引言

由于 MJS 独特的系统结构, 已有的关于一般线性或非线性系统的研究方法和理论无法直接应用于 MJS 的分析与设计。尤其是无限时域下马尔可夫跳变系统的跟踪控制问题目前并没有被很好的解决, 其中大部分文献考虑的情形比较简单, 并且给出的控制器大都基于 LMI 进行求解, 保守性较强。在 TP 未知时,  $H_\infty$  控制问题与  $H_\infty$  滤波问题对应的 GCARE 的求解算法目前研究较少且大部分集中在连续 MJS 上。因此, 如何在 TP 未知时, 实现无限时域下马尔可夫跳变系统的跟踪控制具有迫切需求。

本章介绍 MJS 的基本理论和常用定理引理, 如 MJS 的随机稳定性、稳定性判据、 $L_2$  增益、Fréchet 导数、Newton-Kantorovich 定理等等, 便于后续研究。

### 2.2 研究对象

本课题研究对象为状态空间方程描述的离散马尔可夫跳变系统:

$$\mathcal{M}_{op} = \begin{cases} x_{k+1} = A_{\varpi_k} x_k + B_{\varpi_k} u_k + F_{\varpi_k} w_k \\ y_k = E_{\varpi_k} x_k + G_{\varpi_k} w_k \\ z_k = C_{\varpi_k} x_k + D_{\varpi_k} u_k + H_{\varpi_k} w_k \end{cases} \quad (2-1)$$

其中  $x_k \in \mathbb{R}^n$  为被控系统状态,  $u_k \in \mathbb{R}^m$  为被控系统控制输入,  $w_k \in \mathbb{R}^p$  为被控系统扰动噪声, 包括过程噪声和量测噪声,  $y_k \in \mathbb{R}^l$  为被控系统量测输出,  $z_k \in \mathbb{R}^q$  为被控系统控制输出。 $\{\varpi_k, k \geq 0\}$  是一个在有限集合  $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$  内取值的离散马尔可夫过程, 用于描述系统模态转移, 其模态转移服从以下条件概率:

$$\Pr\{\varpi_{k+1} = j | \varpi_k = i\} = \pi_{ij} \quad (2-2)$$

其中对任意的  $i, j \in \mathcal{N}$ , 有  $0 \leq \pi_{ij} \leq 1$  且  $\sum_{j=1}^N \pi_{ij} = 1$ 。定义转移概率矩阵(transition probability matrix, TPM)为:

$$\Pi \triangleq \begin{bmatrix} \pi_{11} & \cdots & \pi_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{N1} & \cdots & \pi_{NN} \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

当系统模态  $\varpi_k = i$  时, 我们定义模态依赖矩阵为  $(\cdot)_i \triangleq (\cdot)_{\varpi_k=i}$ 。  $A_i$ 、 $B_i$ 、 $C_i$ 、 $D_i$ 、 $E_i$ 、 $F_i$ 、 $G_i$ 、 $H_i$  是合适维度的实矩阵, 且  $C_i$  是行满秩的。此外噪声增益矩阵满足  $G_i G_i^\top > \mathbf{0}$  以保证  $G_i$  行满秩, 目的是使得量测输出的每一个分量都包含噪声。

**注 2.1:** 在 MJS(2-1) 中只有一种噪声, 即  $w_k$  作为被控系统扰动噪声包括了过程噪声和量测噪声。实际上这种建模形式与系统具有不同测量和过程噪声的情况是等价的。如果考虑不同的过程噪声和测量噪声, 则 MJS 可以建模为

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_{\varpi_k} x_k + B_{\varpi_k} u_k + F_{\varpi_k} w_k \\ y_k = E_{\varpi_k} x_k + G_{\varpi_k} v_k \\ z_k = C_{\varpi_k} x_k + D_{\varpi_k} u_k + H_{\varpi_k} r_k \end{cases} \quad (2-4)$$

其中  $w_k$ 、 $v_k$ 、 $r_k$  表征系统扰动, 定义  $\omega_k \triangleq [w_k^\top \ v_k^\top \ r_k^\top]^\top$ ,  $F_i^{(1)} \triangleq [F_i \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}]$ ,  $G_i^{(1)} \triangleq [\mathbf{0} \ G_i \ \mathbf{0}]$ ,  $H_i^{(1)} \triangleq [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ H_i]$ , 则(2-4)等价于

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_{\varpi_k} x_k + B_{\varpi_k} u_k + F_{\varpi_k}^{(1)} \omega_k \\ y_k = E_{\varpi_k} x_k + G_{\varpi_k}^{(1)} \omega_k \\ z_k = C_{\varpi_k} x_k + D_{\varpi_k} u_k + H_{\varpi_k}^{(1)} \omega_k \end{cases} \quad (2-5)$$

显然, (2-5)与(2-1)为同一个系统。不失一般性, 我们选择(2-1)的形式讨论问题。

考虑被控系统为离散马尔可夫跳变系统  $\mathcal{M}_{op}$ , 被跟踪系统为线性定常系统  $\mathcal{M}_{ref}$ :

$$\mathcal{M}_{ref} = \begin{cases} \hat{x}_{k+1} = \hat{A} \hat{x}_k + \hat{F} \hat{w}_k \\ \hat{y}_k = \hat{E} \hat{x}_k + \hat{G} \hat{w}_k \\ \hat{z}_k = \hat{C} \hat{x}_k \end{cases} \quad (2-6)$$

其中  $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^r$  为被跟踪系统状态,  $\hat{w}_k \in \mathbb{R}^s$  为被跟踪系统未知随机输入,  $\hat{z}_k \in \mathbb{R}^q$  为被跟踪系统控制输出,  $\hat{y}_k \in \mathbb{R}^l$  为被跟踪系统量测输出。  $\hat{A}$ 、 $\hat{C}$ 、 $\hat{E}$ 、 $\hat{F}$ 、 $\hat{G}$  是已知的实矩阵, 注意到这里不要求  $\hat{A}$  是稳定矩阵, 即系统(2-6)可能是不稳定系统。此外噪声增益矩阵满足  $\hat{G} \hat{G}^\top > \mathbf{0}$ , 目的是使得量测输出的每一个分量都包含噪声。

## 2.3 基础知识

下面提出一些基本的数学概念以及数学定理便于后续理论推导。

**定义 2.1 (随机稳定)<sup>[29]</sup>:** 对于马尔可夫跳变系统  $\mathcal{M}_{op}$ , 若  $u_k \equiv 0$  且  $w_k \equiv 0$  时, 对于任意的初始状态  $(x_0, \varpi_0)$  有:

$$\mathbb{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|_2^2 \middle| x_0, \varpi_0 \right\} < \infty \quad (2-7)$$

那么马尔可夫跳变系统  $\mathcal{M}_{op}$  被称为是随机稳定(Stochastically Stable, SS)的。

**定义 2.2 ( $L_2$  增益):** 对于给定的  $\theta > 0$ , 若  $u_k \equiv 0$  时任意的能量有界噪声  $w_k$  满足:

$$\sup_w \frac{\mathbb{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \|z_k\|_2^2 \middle| x_0 = 0, \varpi_0 \right\}}{\sum_{k=0}^{\infty} \|w_k\|_2^2} \leq \theta^2 \quad (2-8)$$

那么马尔可夫跳变系统  $\mathcal{M}_{op}$  有小于等于  $\theta$  的  $L_2$  增益。

**定义 2.3 (Fréchet 导数)<sup>[80]</sup>:** 令  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{Y}$  是从线性空间  $\mathbb{X}$  上的开集  $\mathbb{D}$  到另一个线性空间  $\mathbb{Y}$  的映射。对于  $\forall x \in \mathbb{D}$ , 若存在线性有界映射  $g: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  使得下式成立:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\|f(x + \Delta x) - f(x) - g(\Delta x)\|}{\|\Delta x\|} = 0 \quad (2-9)$$

其中,  $(x + \Delta x)$  在  $x$  的邻域内。那么  $f$  在  $x$  处是 Fréchet 可微的,  $g$  被称为  $f$  在  $x$  处的 Fréchet 导数。

**引理 2.1 [29]:** 马尔可夫跳变系统  $\mathcal{M}_{op}$  是 SS 的当且仅当对于给定的任意半正定矩阵序列  $Q = (Q_1, \dots, Q_N)$ , 下列耦合 Lyapunov 方程(Coupled Lyapunov Equation, CLE)存在唯一镇定解  $P = (P_1, \dots, P_N)$ :

$$A_i^\top \mathcal{E}_i(P) A_i - P_i = -Q_i \quad (2-10)$$

其中  $\mathcal{E}_i(P) = \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j$ ,  $i \in \mathcal{N}$ 。此外, (2-10)的解为:

$$P_i = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_i^k(A, Q) \quad (2-11)$$

其中算子  $\mathcal{L}_i(A, Q)$  可以用更一般的形式  $\mathcal{L}_i(\Gamma, \bullet)$  表示, 定义为:

$$\mathcal{L}_i(\Gamma, \bullet) \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{ij} \Gamma_i^\top(\bullet)_j \Gamma_i \quad (2-12)$$

$\Gamma$  表示系统闭环矩阵,  $(\bullet)$  表征任意的矩阵序列。

**引理 2.2 [29]:** 如果马尔可夫跳变系统  $\mathcal{M}_{op}$  是 SS 的, 则算子(2-12)的谱半径满足  $r(\mathcal{L}) < 1$ , 其中  $\Gamma$  为对应的系统闭环矩阵。

**引理 2.3 (Newton-Kantorovich 定理)<sup>[80]</sup>:** 令  $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  是从 Banach 空间  $\mathbb{X}$  到另一个 Banach 空间  $\mathbb{Y}$  的映射。令  $x_0 \in \mathbb{X}$ ,  $x_0$  满足  $f$  在  $x_0$  处的 Fréchet 导数  $\dot{f}(x_0)$  存在且可逆。定义:



$$\begin{cases} \xi_0 \triangleq \|\dot{f}(x_0)^{-1}\| \\ \eta_0 \triangleq \|\dot{f}(x_0)^{-1} f(x_0)\| \\ \mathbb{Z}(x_0, 2\eta_0) \triangleq \{x \in \mathbb{X} : \|x - x_0\| \leq 2\eta_0\} \\ \sigma \triangleq 2 \sup \left\{ \|\dot{f}(x) - \dot{f}(v)\| / \|x - v\| : x, v \in \mathbb{Z}(x_0, 2\eta_0), x \neq v \right\} \\ \rho_0 \triangleq \xi_0 \eta_0 \sigma \end{cases} \quad (2-13)$$

如果  $f$  在  $\mathbb{Z}(x_0, 2\eta_0)$  内二阶 Fréchet 可微, 并且  $0 < \rho_0 \leq 0.5$ , 那么  $f$  在  $\mathbb{Z}(x_0, 2\eta_0)$  存在零点。定义  $\rho_0^* = (1 - \sqrt{1 - 2\rho_0}) / \rho_0$ , 那么  $\mathbb{Z}(x_0, \rho_0^* \eta_0) \subset \mathbb{Z}(x_0, 2\eta_0)$ , 那么始于  $x_0$  的如下牛顿迭代:

$$x_{k+1} = x_k - \dot{f}(x_k)^{-1} f(x_k) \quad (2-14)$$

将二次收敛于  $f$  的零点  $x^*$ , 且  $x^*$  和牛顿迭代序列  $\{x_0, x_1, \dots\}$  在空间  $\mathbb{Z}(x_0, \rho_0^* \eta_0)$  内, 此外  $x^*$  在  $\mathbb{Z}(x_0, 2\eta_0)$  内具有唯一解。

## 2.4 总结

本章介绍 MJS 的基本理论和常用定理引理, 如 MJS 的随机稳定性、稳定性判据、 $L_2$  增益、Fréchet 导数、Newton-Kantorovich 定理等等, 便于后续研究。

### 第三章 LQT 问题求解

#### 3.1 引言

本章研究系统状态与模态可获得时，无限时域下 MJS 的 LQT 问题。首先基于 LQT 问题的二次型性能指标，将二次型性能指标的求解转化为极小化问题。通过 DP 递推求解该极小化问题并推导得到无限时域下 MJS 的 LQT 问题对应的 CARE 及对应的 LQT 控制器。接着，在给定衰减因子下，结合衰减跟踪误差系统讨论 CARE 解的存在性以及对应反馈控制器作用下闭环系统的稳定性，给出了 CARE 唯一镇定解存在的充分必要条件和稳定性证明。此外对于 TP 已知以及未知两种情况，分别考虑 CARE 求解问题，基于初始镇定解设计迭代求解算法并证明算法的收敛性。最后，在一个受随机故障影响的直流电机模型上对所提算法进行模拟仿真验证。

#### 3.2 LQT 问题建模

本文的第三章节将研究无限时域下 MJS 的 LQT 跟踪控制问题。在该 LQT 跟踪控制问题中，我们假设状态变量  $x_k$  和模态变量  $\varpi_k$  是可获得的，同时考虑噪声增益矩阵  $F_i$ 、 $G_i$ 、 $\hat{F}$ 、 $\hat{G}$  为  $\mathbf{0}$ ，因此可以不考虑状态估计问题。基于以上假设，我们期望设计 LQT 跟踪控制器，使用尽量小的控制输入  $u = \{u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots\}$ ，使得被控系统(2-1)的输出  $z_k$  能够较好的跟踪被跟踪系统(2-6)的输出  $\hat{z}_k$ ，即跟踪误差  $\tilde{z}_k \triangleq z_k - \hat{z}_k$  随时间趋于 0。定义  $\tilde{x}_k \triangleq [x_k^\top \quad \hat{x}_k^\top]^\top$ ，构造如下跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{te}^{(1)}$ ：

$$\mathcal{M}_{te}^{(1)} = \begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}_{\varpi_k} \tilde{x}_k + \tilde{B}_{\varpi_k} u_k \\ \tilde{z}_k = \tilde{C}_{\varpi_k} \tilde{x}_k + D_{\varpi_k} u_k \end{cases} \quad (3-1)$$

其中，

$$\tilde{A}_i \triangleq \begin{bmatrix} A_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{A} \end{bmatrix} \quad \tilde{B}_i \triangleq \begin{bmatrix} B_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \tilde{C}_i \triangleq [C_i \quad -\hat{C}] \quad (3-2)$$

针对跟踪误差系统(3-1)，假设 $k_0$ 时刻系统 $\mathcal{M}_{te}$ 状态为 $\tilde{x}_{k_0}$ ，控制输入为 $u_{k_0}$ ，模态为 $\varpi_{k_0}$ 。考虑到 $D_i$ 可能不是行满秩的，因此引入加权项 $\sum_{k=k_0}^{\infty} \|u_k\|_{R_{\varpi_k}}^2$  对控制输入进行约束，其中 $R_i > \mathbf{0}$ 。此外参考系统可能是不稳定的，此时若要对参考轨迹的跟踪控制，加权项 $\sum_{k=k_0}^{\infty} \|u_k\|_{R_{\varpi_k}}^2$  不一定收敛。为了实现对不稳定系统进行跟踪，引入衰减因子 $\gamma$  以保证控制输入能量的有限和优化问题的可解，提出如下二次型性能指标：

$$\begin{aligned} J(\tilde{x}_{k_0}, u_{k_0}, \varpi_{k_0}) &\triangleq \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma^{k-k_0} \left( \|\tilde{z}_k\|_{Q_{\varpi_k}}^2 + \|u_k\|_{R_{\varpi_k}}^2 \right) \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma^{k-k_0} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ u_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \tilde{C}_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} \tilde{C}_{\varpi_k} & \tilde{C}_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} D_{\varpi_k} \\ D_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} \tilde{C}_{\varpi_k} & D_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} D_{\varpi_k} + R_{\varpi_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ u_k \end{bmatrix} \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma^{k-k_0} \|\chi_k\|_{\Psi_{\varpi_k}^{(1)}}^2 \right\} \end{aligned} \quad (3-3)$$

其中 $Q_i \geq \mathbf{0}$ ， $\chi_k \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{x}_k^\top & u_k^\top \end{bmatrix}^\top$ ，且

$$\Psi_i^{(1)} \triangleq \begin{bmatrix} \Psi_{i1,1}^{(1)} & \Psi_{i1,2}^{(1)} \\ \Psi_{i2,1}^{(1)} & \Psi_{i2,2}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_i^\top Q_i \tilde{C}_i & \tilde{C}_i^\top Q_i D_i \\ D_i^\top Q_i \tilde{C}_i & D_i^\top Q_i D_i + R_i \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3-4)$$

显然，其中 $D_i^\top Q_i D_i + R_i > \mathbf{0}$ 。后续将基于二次型性能指标(3-3)推导控制器。

由于引入了衰减因子 $\gamma$ ，跟踪误差 $\tilde{z}_k$ 难以保证一定随时间趋于 $\mathbf{0}$ ，但是我们可以构造衰减跟踪误差系统，考察衰减跟踪误差的收敛性。定义衰减增广状态为 $\bar{x}_k \triangleq \gamma^{k/2} \tilde{x}_k$ ，衰减控制输入为 $\bar{u}_k \triangleq \gamma^{k/2} u_k$ ，衰减跟踪误差为 $\bar{z}_k \triangleq \gamma^{k/2} \tilde{z}_k$ ，有衰减跟踪误差系统 $\mathcal{M}_{dte}^{(1)}$ 为：

$$\mathcal{M}_{dte}^{(1)} = \begin{cases} \bar{x}_{k+1} = \sqrt{\gamma} (\tilde{A}_{\varpi_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\varpi_k} \bar{u}_k) \\ \bar{z}_k = \tilde{C}_{\varpi_k} \bar{x}_k + D_{\varpi_k} \bar{u}_k \end{cases} \quad (3-5)$$

定义 $\bar{\chi}_k \triangleq \begin{bmatrix} \bar{x}_k^\top & \bar{u}_k^\top \end{bmatrix}^\top$ ，性能指标(3-3)可以改写为等价的形式：

$$\begin{aligned} J(\bar{x}_{k_0}, \bar{u}_{k_0}, \varpi_{k_0}) &= \gamma^{-k_0} \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \left( \|\bar{z}_k\|_{Q_{\varpi_k}}^2 + \|\bar{u}_k\|_{R_{\varpi_k}}^2 \right) \right\} \\ &= \gamma^{-k_0} \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\bar{\chi}_k\|_{\Psi_{\varpi_k}^{(1)}}^2 \right\} \end{aligned} \quad (3-6)$$

我们分析在设计的控制器下衰减跟踪误差系统(3-5)的稳定性以及性能指标(3-6)的实现。

### 3.3 CARE

#### 3.3.1 CARE 推导

针对二次型性能指标(3-3)，假设 $k_0$ 时刻系统 $\mathcal{M}_{te}^{(1)}$ 状态为 $\tilde{x}_{k_0}$ ，模态为 $\varpi_{k_0} = i$ ，我们期望找到 $u = \{u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots\}$ 使得性能指标尽可能的小，即求解下列极小化问题：

$$\begin{aligned} J(\tilde{x}_{k_0}, \varpi_{k_0} = i) &\triangleq \min_u J(\tilde{x}_{k_0}, u_{k_0}, \varpi_{k_0} = i) \\ &= \min_u \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma^{k-k_0} \|\chi_k\|_{\Psi_{\varpi_k}^{(1)}}^2 \right\} \end{aligned} \quad (3-7)$$

由文献[81]知，若极小化问题(3-7)有解，则 $J(\tilde{x}_k, \varpi_k)$ 可写为关于 $\tilde{x}_k$ 的二次型函数，即

$$J(\tilde{x}_k, \varpi_k) = \|\tilde{x}_k\|_{P_{\varpi_k}^{(k)}}^2 \quad (3-8)$$

其中

$$P^{(k)} = (P_1^{(k)}, \dots, P_N^{(k)}), P_i^{(k)} \geq 0 \quad (3-9)$$

可以将极小化问题(3-7)写为递推的形式，得到 Bellman 方程为：

$$\begin{aligned} J(\tilde{x}_{k_0}, i) &= \min_u \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma^{k-k_0} \|\chi_k\|_{\Psi_{\varpi_k}^{(1)}}^2 \right\} \\ &= \|\chi_{k_0}\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 + \min_u \gamma \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \gamma^{k-k_0-1} \|\chi_k\|_{\Psi_{\varpi_k}^{(1)}}^2 \right\} \\ &= \|\chi_{k_0}\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 + \gamma \mathbb{E} [J(\tilde{x}_{k_0+1}, \varpi_{k_0+1})] \end{aligned} \quad (3-10)$$

显然， $J(\tilde{x}_{k_0+1}, \varpi_{k_0+1})$ 也可写为二次型形式，则结合系统状态空间方程并考虑 $\mathbb{E}[J(\tilde{x}_{k_0+1}, \varpi_{k_0+1})]$ 的二次型形式得，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[J(\tilde{x}_{k_0+1}, \varpi_{k_0+1})] &= \mathbb{E} \left\{ \|\tilde{x}_{k_0+1}\|_{P_{\varpi_{k_0+1}}^{(k_0+1)}}^2 \right\} \\ &= \sum_{j=1}^N \pi_{ij} \|\tilde{A}_i \tilde{x}_{k_0} + \tilde{B}_i u_{k_0}\|_{P_j^{(k_0+1)}}^2 \\ &= \|\tilde{A}_i \tilde{x}_{k_0} + \tilde{B}_i u_{k_0}\|_{\mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)})}^2 \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{x}_{k_0} \\ u_{k_0} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{A}_i & \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{B}_i \\ \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{A}_i & \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{B}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{k_0} \\ u_{k_0} \end{bmatrix} \\ &= \|\chi_{k_0}\|_{\Psi_i^{(2, k_0)}}^2 \end{aligned} \quad (3-11)$$

其中

$$\begin{aligned}\Psi_{\varpi_k}^{(2,k)} &\triangleq \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k} \left( P^{(k+1)} \right) \tilde{A}_{\varpi_k} & \tilde{A}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k} \left( P^{(k+1)} \right) \tilde{B}_{\varpi_k} \\ \tilde{B}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k} \left( P^{(k+1)} \right) \tilde{A}_{\varpi_k} & \tilde{B}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k} \left( P^{(k+1)} \right) \tilde{B}_{\varpi_k} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\varpi_k} & \tilde{B}_{\varpi_k} \end{bmatrix}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k} \left( P^{(k+1)} \right) \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\varpi_k} & \tilde{B}_{\varpi_k} \end{bmatrix} \\ &\geq \mathbf{0}\end{aligned}\quad (3-12)$$

将(3-11)代入(3-10)中, 可以得到

$$J(\tilde{x}_{k_0}, i) = \|\chi_{k_0}\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 + \gamma \|\chi_{k_0}\|_{\Psi_i^{(2,k_0)}}^2 = \|\chi_{k_0}\|_{\Psi_i^{(3,k_0)}}^2 \quad (3-13)$$

其中

$$\Psi_{\varpi_k}^{(3,k)} \triangleq \Psi_{\varpi_k}^{(1)} + \gamma \Psi_{\varpi_k}^{(2,k)} = \begin{bmatrix} \Psi_{\varpi_k|1,1}^{(3,k)} & \Psi_{\varpi_k|1,2}^{(3,k)} \\ \Psi_{\varpi_k|2,1}^{(3,k)} & \Psi_{\varpi_k|2,2}^{(3,k)} \end{bmatrix} \quad (3-14)$$

以及

$$\begin{cases} \Psi_{\varpi_k|1,1}^{(3,k)} \triangleq \tilde{C}_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} \tilde{C}_{\varpi_k} + \gamma \tilde{A}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k} \left( P^{(k+1)} \right) \tilde{A}_{\varpi_k} \geq \mathbf{0} \\ \Psi_{\varpi_k|1,2}^{(3,k)} = \left( \Psi_{\varpi_k|2,1}^{(3,k)} \right)^\top \triangleq \tilde{C}_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} D_{\varpi_k} + \gamma \tilde{A}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k} \left( P^{(k+1)} \right) \tilde{B}_{\varpi_k} \\ \Psi_{\varpi_k|2,2}^{(3,k)} \triangleq D_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} D_{\var�_k} + R_{\varpi_k} + \gamma \tilde{B}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k} \left( P^{(k+1)} \right) \tilde{B}_{\varpi_k} > \mathbf{0} \end{cases} \quad (3-15)$$

可以发现关于控制律  $u = \{u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots\}$  的极小化问题已经转化为一个仅仅与  $u_{k_0}$  有关的无约束优化问题(3-13)。令  $J(\tilde{x}_{k_0}, i)$  对  $u_{k_0}$  偏导数为 0, 求解使得  $J(\tilde{x}_{k_0}, i)$  最小的  $u_{k_0}$ :

$$\frac{\partial J(\tilde{x}_{k_0}, i)}{\partial u_{k_0}} = 2\tilde{x}_{k_0}^\top \Psi_{i|1,2}^{(3,k_0)} + 2u_{k_0}^\top \Psi_{i|2,2}^{(3,k_0)} = \mathbf{0} \quad (3-16)$$

显然  $\Psi_{i|2,2}^{(3,k_0)} = D_i^\top Q_i D_i + R_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{B}_i > \mathbf{0}$  是可逆矩阵, 计算  $u_{k_0}$  得到:

$$u_{k_0} = -\left( \Psi_{i|2,2}^{(3,k_0)} \right)^{-1} \Psi_{i|2,1}^{(3,k_0)} \tilde{x}_{k_0} = S_{i,u}^{(k_0)} \tilde{x}_{k_0} \quad (3-17)$$

考虑  $J(\tilde{x}_{k_0}, i)$  对  $u_{k_0}$  的二阶偏导数有:

$$\frac{\partial^2 J(\tilde{x}_{k_0}, i)}{\partial u_{k_0}^2} = \Psi_{i|2,2}^{(3,k_0)} > \mathbf{0} \quad (3-18)$$

因此(3-17)求得的  $u_{k_0} = S_{i,u}^{(k_0)} \tilde{x}_{k_0}$  为极小化问题的极小值,  $S_{i,u}^{(k_0)}$  就是我们所期望的  $k_0$  时刻的 LQT 控制器增益。

定义  $S_i^{(k)} \triangleq \begin{bmatrix} I & S_{i,u}^{(k)\top} \end{bmatrix}^\top$ , 有  $\chi_k = \begin{bmatrix} \tilde{x}_k^\top & u_k^\top \end{bmatrix}^\top = S_i^{(k)} \tilde{x}_k$ , 代入(3-7)中, 得

$$J(\tilde{x}_{k_0}, i) = \|\chi_{k_0}\|_{\Psi_i^{(3,k_0)}}^2 = \|S_i^{(k_0)} \tilde{x}_{k_0}\|_{\Psi_i^{(3,k_0)}}^2 \quad (3-19)$$

显然(3-19)与(3-8)是等价的, 即

$$\|S_i^{(k_0)} \tilde{x}_{k_0}\|_{\Psi_i^{(3,k_0)}}^2 = \|\tilde{x}_{k_0}\|_{P_i^{(k_0)}}^2 \Leftrightarrow \tilde{x}_{k_0}^\top \left\{ \|S_i^{(k_0)}\|_{\Psi_i^{(3,k_0)}}^2 - P_i^{(k_0)} \right\} \tilde{x}_{k_0} = \mathbf{0} \quad (3-20)$$

由于我们假设的  $\tilde{x}_{k_0}$  是任意的，因此(3-20)对任意的  $\tilde{x}_{k_0}$  都成立，那么

$$\|S_i^{(k_0)}\|_{\Psi_i^{(3,k_0)}}^2 - P_i^{(k_0)} = \mathbf{0} \quad (3-21)$$

上式就是  $k_0$  时刻的耦合差分 Riccati 方程，利用相同的推导可以得到对应  $k = k_0, \dots, \infty$  各个时刻的耦合差分 Riccati 方程。同时考虑到随着  $k \rightarrow \infty$ ，解矩阵  $P_i^{(k)}$  收敛，即  $\lim_{k \rightarrow \infty} P_i^{(k)} = P_i$ ， $\Psi_{\varpi_k}^{(2,k)}$ 、 $\Psi_{\varpi_k}^{(3,k)}$ 、 $S_{\varpi_k,u}^{(k)}$ 、 $S_{\varpi_k}^{(k)}$  也变为定常矩阵，耦合差分 Riccati 方程会变为 CARE：

$$\|S_i\|_{\Psi_i^{(3)}}^2 - P_i = \mathbf{0} \quad (3-22)$$

同理，可以给出此时的反馈控制律，也就是期望求得的 LQT 控制器：

$$u_k = -\left(\Psi_{\varpi_k|2,2}^{(3)}\right)^{-1} \Psi_{\varpi_k|2,1}^{(3)} \tilde{x}_{k_0} = S_{\varpi_k,u} \tilde{x}_k \quad (3-23)$$

下面给出(3-22)的几种等价形式便于后续理论推导。观察到，(3-14)中的  $\Psi_{\varpi_k}^{(3,k)} = \Psi_{\varpi_k}^{(1)} + \gamma \Psi_{\varpi_k}^{(2,k)}$  可以变为  $\Psi_i^{(3)} = \Psi_i^{(1)} + \gamma \Psi_i^{(2)}$ ，代入到(3-22)中，得到

$$\begin{aligned} P_i &= \|S_i\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 + \|S_i\|_{\gamma \Psi_i^{(2)}}^2 \\ &= \|S_i\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 + \gamma \left[ I \quad S_{i,u}^\top \right] \begin{bmatrix} \tilde{A}_i & \tilde{B}_i \end{bmatrix}^\top \mathcal{E}_i(P) \begin{bmatrix} \tilde{A}_i & \tilde{B}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & S_{i,u}^\top \end{bmatrix}^\top \\ &= \gamma \left\| \tilde{A}_i + \tilde{B}_i S_{i,u} \right\|_{\mathcal{E}_i(P)}^2 + \|S_i\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 \end{aligned} \quad (3-24)$$

上式是 CARE 的闭环控制器形式，其中  $\tilde{A}_i + \tilde{B}_i S_{i,u}$  是跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{te}^{(1)}$  引入反馈控制律  $u_k = S_{\varpi_k,u} \tilde{x}_k$  后的闭环控制器。可以发现(3-24)的结构类似于引理 2.1 中的 CLE，因此该形式可以用于闭环系统的稳定性分析。

将  $S_{i,u}^{(k_0)} = -\left(\Psi_{i|2,2}^{(3,k_0)}\right)^{-1} \Psi_{i|2,1}^{(3,k_0)}$  变为  $S_{i,u} = -\left(\Psi_{i|2,2}^{(3)}\right)^{-1} \Psi_{i|2,1}^{(3)}$  并  $S_i = \begin{bmatrix} I & S_{i,u}^\top \end{bmatrix}^\top$  将代入(3-22)中，得到

$$\begin{aligned} P_i &= \left\| \begin{bmatrix} I & -\Psi_{i|1,2}^{(3)} \left(\Psi_{i|2,2}^{(3)}\right)^{-1} \end{bmatrix}^\top \right\|_{\Psi_i^{(3)}}^2 \\ &= \begin{bmatrix} I & -\Psi_{i|1,2}^{(3)} \left(\Psi_{i|2,2}^{(3)}\right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{i|1,1}^{(3)} & \Psi_{i|1,2}^{(3)} \\ \Psi_{i|2,1}^{(3)} & \Psi_{i|2,2}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\Psi_{i|1,2}^{(3)} \left(\Psi_{i|2,2}^{(3)}\right)^{-1} \end{bmatrix}^\top \\ &= \begin{bmatrix} \Psi_{i|1,1}^{(3)} - \Psi_{i|1,2}^{(3)} \left(\Psi_{i|2,2}^{(3)}\right)^{-1} \Psi_{i|2,1}^{(3)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\left(\Psi_{i|2,2}^{(3)}\right)^{-1} \Psi_{i|2,1}^{(3)} \end{bmatrix}^\top \\ &= \Psi_{i|1,1}^{(3)} - \Psi_{i|1,2}^{(3)} \left(\Psi_{i|2,2}^{(3)}\right)^{-1} \Psi_{i|2,1}^{(3)} \end{aligned} \quad (3-25)$$

将(3-15)中的具体表达式代入(3-25)中得到：

$$P_i = \gamma \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i + \tilde{C}_i^\top Q_i \tilde{C}_i - \left( D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \right)^\top \times \left( D_i^\top Q_i D_i + R_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{B}_i \right)^{-1} \left( D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \right) \quad (3-26)$$

(3-26)中只有系统参数与权重矩阵，大部分文献中给出的 CARE 都是这种形式，可用于解矩阵  $P$  的理论分析与求解。

**定理 3.1 (CARE)<sup>[29]</sup>:** 极小化问题(3-7)对应的控制律为  $u_k = S_{\varpi_k, u} \tilde{x}_k$ ，其中  $S_{i, u}$  为 LQT 控制器，具体形式为

$$S_{i, u} = - \left( D_i^\top Q_i D_i + R_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{B}_i \right)^{-1} \left( D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \right) \quad (3-27)$$

其中， $P$  是 CARE(3-28)的唯一镇定解：

$$P_i = \gamma \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i + \tilde{C}_i^\top Q_i \tilde{C}_i - \left( D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \right)^\top \times \left( D_i^\top Q_i D_i + R_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{B}_i \right)^{-1} \left( D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \right) \quad (3-28)$$

### 3.3.2 CAER 镇定解的存在性与稳定性

本小节讨论 CARE(3-26)镇定解的存在性与稳定性问题。类似于文献[29]的 Definition 4.4 中提出的镇定解(Stabilizing Solution)的定义，本文也定义 CARE(3-26)的镇定解用于讨论。

**定义 3.1 (CARE 镇定解)<sup>[29]</sup>:** CARE(3-26)的镇定解  $P$  定义为满足(3-28)且使得  $r(\mathcal{L}) < 1$ ，其中算子  $\mathcal{L}_i(\Gamma, \bullet)$  中  $\Gamma$  为系统闭环矩阵  $\Gamma_i = \gamma^{1/2}(\tilde{A}_i + \tilde{B}_i S_{i, u})$ ，LQT 控制器  $S_{i, u}$  满足(3-27)。

我们期望 CARE(3-28)具有唯一镇定解，文献[29]的 Corollary A.16 给出了类似的结论，我们将其改造为适合(3-28)的结果。

**引理 3.1 (CARE 镇定解存在充要条件)<sup>[29]</sup>:** CARE(3-28)存在唯一镇定解当且仅当  $(\gamma^{1/2} \tilde{A}, \gamma^{1/2} \tilde{B}, \Pi)$  能镇定， $(\Pi, (\gamma Q)^{1/2} \tilde{C}, \gamma^{1/2} \tilde{A})$  可探测。

显然对于给定的被控系统与参考系统， $(\gamma^{1/2} \tilde{A}, \gamma^{1/2} \tilde{B}, \Pi)$  是否能镇定只与衰减因子  $\gamma$  有关， $(\Pi, (\gamma Q)^{1/2} \tilde{C}, \gamma^{1/2} \tilde{A})$  是否可探测只与衰减因子  $\gamma$  以及权重矩阵  $Q$  有关。这为我们选取衰减因子  $\gamma$  以及权重矩阵  $Q$  提供依据。

**注 3.1:** 关于 MJS 能镇定与可探测的定义，文献[29]的 P57 中有详细介绍。同时，文献[29]提供了能镇定与可探测的判定方法。

若 CARE 有唯一镇定解，在该镇定解对应的反馈控制律  $u_k = S_{\varpi_k, u} \tilde{x}_k$  作用下，我们讨论跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{te}^{(1)}$  的稳定性。出于跟踪不稳定系统的目的，本文在二次型性能指标引入了衰减因子  $\gamma$ ，这不可避免的对跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{te}^{(1)}$  的稳定性产生影响，我们转而分析衰减跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{de}^{(1)}$  的稳定性。在镇定解对应的反馈控制律  $u_k = S_{\varpi_k, u} \tilde{x}_k$  作用下闭环系统为：

$$\mathcal{M}_{de}^{(1)} = \begin{cases} \bar{x}_{k+1} = \sqrt{\gamma} (\tilde{A}_{\varpi_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\varpi_k} \bar{u}_k) \\ \bar{z}_k = \tilde{C}_{\varpi_k} \bar{x}_k + D_{\varpi_k} \bar{u}_k \end{cases} = \begin{cases} \bar{x}_{k+1} = \sqrt{\gamma} (\tilde{A}_{\varpi_k} + \tilde{B}_{\varpi_k} S_{\varpi_k, u}) \bar{x}_k \\ \bar{z}_k = (\tilde{C}_{\varpi_k} + D_{\varpi_k} S_{\varpi_k, u}) \bar{x}_k \end{cases} \quad (3-29)$$

可以发现若  $\tilde{C}_i + D_i S_{i,u} \neq \mathbf{0}$ ，那么  $\bar{x}_k$  收敛等价于  $\bar{z}_k$  收敛。将 CARE 的唯一镇定解  $P$  作为 Lyapunov 函数中的二次型矩阵，那么可以得到系统(3-23)对应的 CLE 为：

$$\gamma \left\| \tilde{A}_i + \tilde{B}_i S_{i,u} \right\|_{\mathcal{E}_i(P)}^2 - P_i = -\left\| S_i \right\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 \quad (3-30)$$

由于  $\Psi_{i1,1}^{(3)} = \tilde{C}_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \geq \mathbf{0}$ ，所以引理 2.1 成立，因此在镇定解对应的反馈控制律  $u_k = S_{\varpi_k, u} \tilde{x}_k$  作用下，衰减跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{de}^{(1)}$  是 SS 的。

### 3.4 CARE 求解

前文推导得到了 LQT 问题对应的 CARE 及其控制器解析形式，但面对(3-26)这样复杂的代数方程，是难以获得其解析解  $P$  的，无法求得  $P$  也就无法应用 LQT 控制器。本节关注 TP 已知和未知两种情况下的 CARE 的数值求解问题。

#### 3.4.1 TP 已知 CARE 求解

对于 Riccati 方程的数值求解问题，文献[82]提出了一种基于镇定控制器的迭代求解算法，也就是经典的 Kleinman 迭代算法。Kleinman 迭代算法只需要一个镇定控制器进行初始迭代就能实现二次收敛，其迭代过程简单，收敛速度快，求解精度高。本课题参考文献[82]，设计适用于 CARE(3-26)的 Kleinman 迭代求解算法。

**定理 3.2 (Kleinman 算法)**<sup>[82]</sup>: CARE(3-26)存在唯一镇定解  $P$  时，给定镇定控制器  $S_u^{(l)} = (S_{1,u}^{(l)}, \dots, S_{N,u}^{(l)})$ ，若  $P^{(l)} = (P_1^{(l)}, \dots, P_N^{(l)})$  是下列 CLE 的唯一镇定解：

$$\begin{bmatrix} \left\| \Gamma_1^{(l)} \right\|_{\mathcal{E}_1(P^{(l)})}^2 - P_1^{(l)} + \left\| S_1^{(l)} \right\|_{\Psi_1^{(1)}}^2 \\ \vdots \\ \left\| \Gamma_N^{(l)} \right\|_{\mathcal{E}_N(P^{(l)})}^2 - P_N^{(l)} + \left\| S_N^{(l)} \right\|_{\Psi_N^{(1)}}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3-31)$$

其中  $\Gamma_i^{(l)} = \gamma^{1/2} (\tilde{A}_i + \tilde{B}_i S_{i,u}^{(l)})$ ， $S_i^{(l)} = [I \quad S_{i,u}^{(l)\top}]^\top$ 。那么基于  $P^{(l)}$  可以进一步给出

$$S_{i,u}^{(l+1)} = - \left( D_i^\top Q_i D_i + R_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(l)}) \tilde{B}_i \right)^{-1} \left( D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(l)}) \tilde{A}_i \right) \quad (3-32)$$

若选择镇定控制器  $S_u^{(0)}$  进行初始迭代，则  $\lim_{l \rightarrow \infty} P^{(l)} = P$ 。

**证明：**对于初始镇定控制器  $S_u^{(0)}$ ，通过求解(3-31)可以得到  $P^{(0)}$ ，将  $P^{(0)}$  代入(3-32)得到  $S_u^{(1)}$ 。首先，我们尝试证明  $S_u^{(1)}$  也是镇定控制器。已知



$$\|\Gamma_i^{(0)}\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 - P_i^{(0)} + \|S_i^{(0)}\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 = 0 \quad (3-33)$$

显然  $\Gamma_i^{(1)} - \Gamma_i^{(0)} = \gamma^{1/2} \tilde{B}_i(S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)})$ , 则

$$\begin{aligned} \|\Gamma_i^{(1)}\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 &= \|\Gamma_i^{(0)} + \gamma^{1/2} \tilde{B}_i(S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)})\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 \\ &= \|\Gamma_i^{(0)}\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 + \gamma^{1/2} (S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)})^\top \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(0)}) \Gamma_i^{(0)} \\ &\quad + \gamma^{1/2} \Gamma_i^{(0)\top} \mathcal{E}_i(P^{(0)}) \tilde{B}_i (S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)}) + \|\gamma^{1/2} \tilde{B}_i (S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)})\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 \end{aligned} \quad (3-34)$$

对于(3-31), 考虑  $l=0$  得, 代入  $\gamma^{1/2} \tilde{A}_i = \Gamma_i^{(l)} - \gamma^{1/2} \tilde{B}_i S_{i,u}^{(l)}$

$$\begin{aligned} &(D_i^\top Q_i D_i + R_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(0)}) \tilde{B}_i) S_{i,u}^{(1)} \\ &= -(D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(0)}) \tilde{A}_i) \\ &= -(D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma^{1/2} \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(0)}) (\Gamma_i^{(0)} - \gamma^{1/2} \tilde{B}_i S_{i,u}^{(0)})) \\ &= -(D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma^{1/2} \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(0)}) \Gamma_i^{(0)} - \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(0)}) \tilde{B}_i S_{i,u}^{(0)}) \end{aligned} \quad (3-35)$$

将(3-35)移项并整理, 得

$$\begin{aligned} &\gamma^{1/2} \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(0)}) \Gamma_i^{(0)} \\ &= \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(0)}) \tilde{B}_i S_{i,u}^{(0)} - (D_i^\top Q_i D_i + R_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(0)}) \tilde{B}_i) S_{i,u}^{(1)} - D_i^\top Q_i \tilde{C}_i \\ &= -(\gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(0)}) \tilde{B}_i (S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)})) + (D_i^\top Q_i D_i + R_i) S_{i,u}^{(1)} + D_i^\top Q_i \tilde{C}_i \end{aligned} \quad (3-36)$$

将(3-36)代入(3-34)可以得到

$$\begin{aligned} \|\Gamma_i^{(1)}\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 &= \|\Gamma_i^{(0)}\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 - \|S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)}\|_{\gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(0)}) \tilde{B}_i + D_i^\top Q_i D_i + R_i}^2 \\ &\quad - (S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)})^\top ((D_i^\top Q_i D_i + R_i) S_{i,u}^{(0)} + D_i^\top Q_i \tilde{C}_i) \\ &\quad - ((D_i^\top Q_i D_i + R_i) S_{i,u}^{(1)} + D_i^\top Q_i \tilde{C}_i)^\top (S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)}) \\ &= \|\Gamma_i^{(0)}\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 - \|S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)}\|_{\Psi_{i,2,2}^{(3,0)}}^2 \\ &\quad + \|S_{i,u}^{(0)}\|_{D_i^\top Q_i D_i + R_i}^2 + (S_{i,u}^{(0)})^\top D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + (D_i^\top Q_i \tilde{C}_i)^\top S_{i,u}^{(0)} \\ &\quad - \|S_{i,u}^{(1)}\|_{D_i^\top Q_i D_i + R_i}^2 - (S_{i,u}^{(1)})^\top D_i^\top Q_i \tilde{C}_i - (D_i^\top Q_i \tilde{C}_i)^\top S_{i,u}^{(1)} \\ &= \|\Gamma_i^{(0)}\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 - \|S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)}\|_{\Psi_{i,2,2}^{(3,0)}}^2 + \|S_{i,u}^{(0)}\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 - \|S_{i,u}^{(1)}\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 \end{aligned} \quad (3-37)$$

将  $l=0$  和  $l=1$  的项分别移到等式两边, 并同时减去  $P_i^{(0)}$  构造出(3-33)的形式, 有

$$\begin{aligned}
 & \left\| \Gamma_i^{(0)} \right\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 - P_i^{(0)} + \left\| S_i^{(0)} \right\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 \\
 &= \left\| \Gamma_i^{(1)} \right\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 - P_i^{(0)} + \left\| S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)} \right\|_{\Psi_{i2,2}^{(3,0)}}^2 + \left\| S_i^{(1)} \right\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 \\
 &= \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{3-38}$$

其中

$$\left\| S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)} \right\|_{\Psi_{i2,2}^{(3,0)}}^2 + \left\| S_i^{(1)} \right\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 \geq \mathbf{0} \tag{3-39}$$

且  $P^{(0)}$  为半正定矩阵，则由引理 2.1 可知  $\Gamma_i^{(1)}$  是镇定矩阵，因此  $S_u^{(1)}$  是镇定控制器。

由于  $S_u^{(1)}$  是镇定控制器，那么可以通过(3-31)进一步求出  $P^{(1)}$ 。接下来尝试证明  $P_i^{(0)} - P_i^{(1)} \geq 0$ 。结合(3-25)与(3-32)，构造  $P_i^{(0)} - P_i^{(1)}$  得到

$$\begin{aligned}
 P_i^{(0)} - P_i^{(1)} &= \left\| \Gamma_i^{(0)} \right\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 + \left\| S_i^{(0)} \right\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 - \left\| \Gamma_i^{(1)} \right\|_{\mathcal{E}_i(P^{(1)})}^2 - \left\| S_i^{(1)} \right\|_{\Psi_i^{(1)}}^2 \\
 &= \left\| \Gamma_i^{(1)} \right\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)})}^2 + \left\| S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)} \right\|_{\Psi_{i2,2}^{(3,0)}}^2 - \left\| \Gamma_i^{(1)} \right\|_{\mathcal{E}_i(P^{(1)})}^2 \\
 &= \left\| \Gamma_i^{(1)} \right\|_{\mathcal{E}_i(P^{(0)} - P^{(1)})}^2 + \left\| S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)} \right\|_{\Psi_{i2,2}^{(3,0)}}^2
 \end{aligned} \tag{3-40}$$

其中

$$\left\| S_{i,u}^{(1)} - S_{i,u}^{(0)} \right\|_{\Psi_{i2,2}^{(3,0)}}^2 \geq \mathbf{0} \tag{3-41}$$

由于  $S_u^{(1)}$  是镇定控制器，因此  $\Gamma^{(1)}$  是镇定矩阵，由引理 2.1 可知  $P_i^{(0)} - P_i^{(1)} \geq 0$ 。同理，对于  $l=1,2,\dots$ ，重复前述论证，可以证明  $\{P^{(l)}, l=1,2,\dots\}$  是一个单调递减的有界序列且下界为  $P$ 。因此  $\lim_{l \rightarrow \infty} P^{(l)} = P$ ，证毕。

下面给出定理 3.2 Kleinman 算法的伪代码：

**表 3 - 1 Kleinman 算法求解 CARE**  
**Table 3-1. Kleinman Algorithm for Solving CARE**

**算法 3.1 Kleinman 算法迭代求解 CARE**

**输入：** 系统参数矩阵、权重矩阵  $Q$  和  $R$ 、衰减因子  $\gamma$ 、收敛阈值  $\varepsilon$ 、初始解矩阵  $P^{(0)}$ 、镇定控制器  $S_u^{(0)}$

**输出：** 唯一镇定解  $P^*$ 、LQT 控制器  $S_u^*$

1. 定义  $l=0$ ；
2. 对于给定的控制器  $S_u^{(l)}$ ，基于(3-31)求解  $P^{(l)}$ ；
3. 利用  $P^{(l)}$ ，使用(3-32)得到  $S_u^{(l+1)}$ ；
4. 判断是否  $\|P^{(l)} - P^{(l+1)}\| \leq \varepsilon$ ，是则进入步骤 6，否则进入步骤 5；
5. 令  $l=l+1$ ，返回步骤 1；

6. 输出唯一镇定解  $P^* = P^{(l)}$ , LQT 控制器  $S_u^* = S_u^{(l)}$ ;

**注 3.2:** 算法 3.1 中, 初始输入所需的镇定控制器  $S_u^{(0)}$  可以通过文献[84]提出的 LMI 算法求解获得。此外, 步骤 2 中(3-31)的解  $P^{(l)}$  可以使用引理 2.1 中的(2-11)以及(2-12)获得。

### 3.4.2 TP 未知 CARE 求解

根据定理 3.2, 本文提出了一种基于初始镇定控制器进行迭代求解 CARE(3-26)的 Kleinman 算法, 该算法可以收敛到 CARE (3-26)的唯一镇定解  $P^*$ 。然而, Kleinman 算法的求解需要 TP, 但是精确 TP 的获取, 意味着复杂的数学建模以及高昂的工程成本, 这在许多实际场景中是不能接受甚至无法实现的。为了摆脱这样一个理想的假设, 我们将尝试在 TP 未知的情况下求解 CARE。文献[72]提出一种 TD ( $\lambda$ ) 算法用于求解 TP 未知时的 CARE, 其核心思想在于求解  $\mathcal{E}(P) = (\mathcal{E}_1(P), \dots, \mathcal{E}_N(P))$  而不是  $P = (P_1, \dots, P_N)$ , 从而克服了 TP 未知的困难。受文献[72]的启发, 我们提出 TD ( $\lambda$ ) 算法用于求解未知 TP 时的 CARE。定义  $\mathcal{E}^{(l)} = \mathcal{E}(P^{(l)})$ , 若 CARE(3-26)存在唯一镇定解  $P$ ,  $P$  对应的  $\mathcal{E}(P)$  可表示为  $\mathcal{E}$ 。

**定理 3.3 (TD ( $\lambda$ ) 算法)[72]:** CARE(3-26)存在唯一镇定解  $P$  时, 给定解矩阵  $\mathcal{E}^{(l)} = (\mathcal{E}_1^{(l)}, \dots, \mathcal{E}_N^{(l)})$  与镇定控制器  $S_u^{(l)} = (S_{1,u}^{(l)}, \dots, S_{N,u}^{(l)})$ , 使用(3-26)迭代求解  $\mathcal{E}_i^{(l+1)}$ :

$$\mathcal{E}_i^{(l+1)} = \mathcal{E}_i^{(l)} + \mu_l \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathcal{T}_i(l, k, \mathcal{E}^{(l)}) \quad (3-42)$$

其中  $l$  代表第  $l$  幕,  $k$  表示每幕中的第  $k$  步,  $\lambda$  是给定的超参数用于指定回报权重,  $\mu$  是迭代步长满足:

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \mu_l = \infty \\ \sum_{l=0}^{\infty} \mu_l^2 < \infty \end{cases} \quad (3-43)$$

此外时序差分  $\mathcal{T}_i(l, k, \mathcal{E}^{(l)})$  定义为:

$$\mathcal{T}_i(l, k, \mathcal{E}^{(l)}) = \Lambda_i^{(l,k)\top} \left\{ \left\| \Gamma_{\varpi_{l,k+1}}^{(l)} \right\|_{\mathcal{E}^{(l)}}^2 - \mathcal{E}_{\varpi_{l,k}}^{(l)} + \left\| S_{\varpi_{l,k+1}}^{(l)} \right\|_{\Psi_{\varpi_{l,k+1}}^{(l)}}^2 \right\} \Lambda_i^{(l,k)} \quad (3-44)$$

其中  $\varpi_{l,k}$  表示第  $l$  幕第  $k$  步的模式,  $\Gamma_i^{(l)} = \gamma^{1/2} (\tilde{A}_i + \tilde{B}_i S_{i,u}^{(l)})$ ,  $S_i^{(l)} = [I \quad S_{i,u}^{(l)\top}]^\top$ , 且

$$\Lambda_i^{(l,k)} = \begin{cases} I, & k = 0 \\ \Gamma_{\varpi_{l,k}}^{(l)} \Lambda_i^{(l,k-1)}, & k > 0 \end{cases} \quad (3-45)$$

基于  $S_u^{(l)}$  与  $\mathcal{E}_i^{(l)}$  求解得到  $\mathcal{E}_i^{(l+1)}$  后, 可以利用  $\mathcal{E}_i^{(l+1)}$  可以进一步给出  $S_u^{(l+1)}$ :

$$S_{i,u}^{(l+1)} = - \left( D_i^\top Q_i D_i + R_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i^{(l+1)} \tilde{B}_i \right)^{-1} \left( D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i^{(l+1)} \tilde{A}_i \right) \quad (3-46)$$

若选择镇定控制器  $S_u^{(0)}$  进行初始迭代, 则  $\lim_{l \rightarrow \infty} \mathcal{E}^{(l)} = \mathcal{E}$ 。

定义  $\mathbf{E} = \{0, 1, \dots, \mathbf{e}\}$  表示  $\mathbf{e}$  幕训练数据,  $\mathbf{S} = \{0, 1, \dots, \mathbf{s}\}$  表示每一幕的  $\mathbf{s}$  步, 假设我们具有数量充足的模态序列  $\mathbf{M} = \{\varpi_{l,k} \in \mathcal{N}, (l, k) \in \mathbf{E} \times \mathbf{S}\}$ 。下面给出定理 3.3 TD ( $\lambda$ ) 算法的伪代码:

表 3 - 2 TD( $\lambda$ )算法求解 CARE  
Table 3-2. TD( $\lambda$ ) Algorithm for Solving CARE

算法 3.2 TD( $\lambda$ ) 算法
<b>输入:</b> 系统参数矩阵、权重矩阵 $Q$ 和 $R$ 、衰减因子 $\gamma$ 、初始解矩阵 $\mathcal{E}^{(0)}$ 、镇定控制器 $S_u^{(0)}$ 、模态序列 $\mathbf{M}$ 、回报权重 $\lambda$ 、迭代步长 $\mu$ <b>输出:</b> 唯一镇定解 $\mathcal{E}^*$ 、LQT 控制器 $S_u^{*,TD}$
1. 定义 $l = 0$ ; 2. 定义 $k = 0$ ; 3. 基于给定的 $\mathcal{E}^{(l)}$ 与 $S_u^{(l)}$ , 使用(3-38)计算时序差分 $\mathcal{T}_i(l, k, \mathcal{E}^{(l)})$ ; 4. 判断 $k$ 是否小于 $\mathbf{s}$ , 是则进入步骤 5, 否则进入步骤 6; 5. 令 $k = k + 1$ , 返回步骤 3; 6. 利用步骤 3 计算的时序差分 $\mathcal{T}_i(l, k, \mathcal{E}^{(l)})$ , 基于(3-42)求解 $\mathcal{E}^{(l+1)}$ ; 7. 利用 $\mathcal{E}^{(l+1)}$ , 使用(3-46)得到 $S_u^{(l+1)}$ ; 8. 判断 $l$ 是否小于 $\mathbf{e}$ , 是则进入步骤 9, 否则进入步骤 10; 9. 令 $l = l + 1$ , 返回步骤 2; 10. 输出唯一镇定解 $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}^{(l)}$ , LQT 控制器 $S_u^{*,TD} = S_u^{(l)}$ ;

**注 3.3:** 算法 3.2 中, 初始输入所需的镇定控制器  $S_u^{(0)}$  同样可以通过文献[84]提出的 LMI 算法求解获得。

算法 3.2 的收敛过程中, 回报权重  $\lambda$  影响非常大, 关于如何选取合适的回报权重  $\lambda$  以实现期望的收敛效果, 文献[72]给出了如下选取准则。

**引理 3.2 (CARE 镇定解)<sup>[29]</sup>:** 若给定的回报权重  $\lambda$  与镇定的闭环控制器  $\Gamma$  满足:

$$\lambda^2 \|\Gamma \otimes \Gamma\|_{\max} < 1 \quad (3-47)$$

其中  $\otimes$  为克罗内克积, 且

$$\|\Gamma\|_{\max} = \max \left\{ \sqrt{\text{tr}(\|\Gamma_i\|_2)}; i \in \mathcal{N} \right\} \quad (3-48)$$

则

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \mathcal{E}^{(l)} = \mathcal{E} \quad (3-49)$$

引理 3.2 给出了算法 3.2 收敛的充分条件, 即只要我们选取满足条件(3-47)的回报权重  $\lambda$ , 算法 3.2 就能收敛。但需要注意引理 3.2 只是一个充分条件, 并不是必要条件, 也就是说即使我们选取的回报权重  $\lambda$  不满足条件(3-47), 算法 3.2 也可能收敛。

### 3.5 仿真

在前文中，我们针对无限时域下 MJS 的 LQT 问题进行了求解与算法设计。我们尝试在一个受随机故障影响而被建模为离散马尔可夫跳变系统的直流电机模型<sup>[85]</sup>上进行仿真，并验证本文提出理论的正确性与有效性。

受随机故障影响，电机功率会随机突变，文献[85]将其建模为 3 个功率模态，分别是 1-low、2-medium、3-high，各个模态的具体参数如下：

$$A_i = \begin{bmatrix} \alpha_{i1,1} & \alpha_{i1,2} & 0 \\ \alpha_{i2,1} & \alpha_{i2,2} & 0 \\ \alpha_{i3,1} & 0 & \alpha_{i3,3} \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} \beta_{i1} \\ \beta_{i2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_i = \begin{bmatrix} \varphi_{i1} \\ \varphi_{i2} \\ \varphi_{i3} \end{bmatrix}^T, \quad D_i = \phi_i \quad (3-50)$$

模态依赖参数的具体值在表 3.3 中给出，各个模态之间的转移概率矩阵 TPM 为：

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 & 0.00 \\ 0.36 & 0.60 & 0.04 \\ 0.10 & 0.10 & 0.80 \end{bmatrix} \quad (3-51)$$

参考系统  $\mathcal{M}_{ref}$  的系统参数如下：

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.991 & -0.113 & 0.078 \\ 0.117 & 0.992 & -0.056 \\ -0.071 & 0.064 & 0.095 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 1 \quad 1] \quad (3-52)$$

表 3 - 3 模态参数  
Table 3-3. 模态参数

模态参数	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$\alpha_{i1,1}$	-0.4799	-1.6026	0.6439
$\alpha_{i1,2}$	5.1546	9.1632	0.9178
$\alpha_{i2,1}$	-3.8162	-0.5918	-0.5056
$\alpha_{i2,2}$	14.4732	3.0317	2.4811
$\alpha_{i3,1}$	0.1399	0.0740	0.3865
$\alpha_{i3,3}$	-0.9925	-0.4338	0.0982
$\beta_{i1}$	5.8705	10.2851	0.7874
$\beta_{i2}$	15.5010	2.2282	1.5302
$\varphi_{i1}$	1.0230	0.9800	1.0000
$\varphi_{i2}$	2.1100	2.0500	2.0000
$\varphi_{i3}$	0.9500	1.1000	1.0500
$\phi_i$	1.0000	0.5000	-0.5000

权重矩阵  $Q=10I$ ， $R=0.5I$ ，衰减因子  $\gamma=0.99$ 。选取的初始镇定控制器  $S_u^{(0)}$  为：

$$\begin{aligned} S_{1,u}^{(0)} &= [0.250 \quad -0.850 \quad 0.050 \quad 0.050 \quad 0.050 \quad 0.050] \\ S_{2,u}^{(0)} &= [0.201 \quad -1.502 \quad 0.100 \quad 0.100 \quad 0.000 \quad 0.100] \\ S_{3,u}^{(0)} &= [0.100 \quad -0.998 \quad 0.100 \quad 0.100 \quad 0.100 \quad 0.100] \end{aligned} \quad (3-53)$$

首先，基于以上参数，使用算法 3.1 求解 CARE(3-26)。算法 3.1 经过 5 次迭代后，解矩阵和控制器收敛，其中解矩阵  $P^*$  的值限于篇幅，本文没有展示，控制器  $S_u^*$  的值为：

$$\begin{aligned} S_{1,u}^* &= [0.1960 \quad -0.9205 \quad 0.0323 \quad 0.0390 \quad 0.0356 \quad 0.0383] \\ S_{2,u}^* &= [0.1705 \quad -0.9859 \quad 0.0239 \quad 0.0686 \quad 0.0626 \quad 0.0700] \\ S_{3,u}^* &= [0.0814 \quad -1.4814 \quad 0.0026 \quad 0.2122 \quad 0.1886 \quad 0.2075] \end{aligned} \quad (3-54)$$

图 3.1 与图 3.2 给出了  $P^{(l)}$  与  $S_u^{(l)}$  的收敛过程，

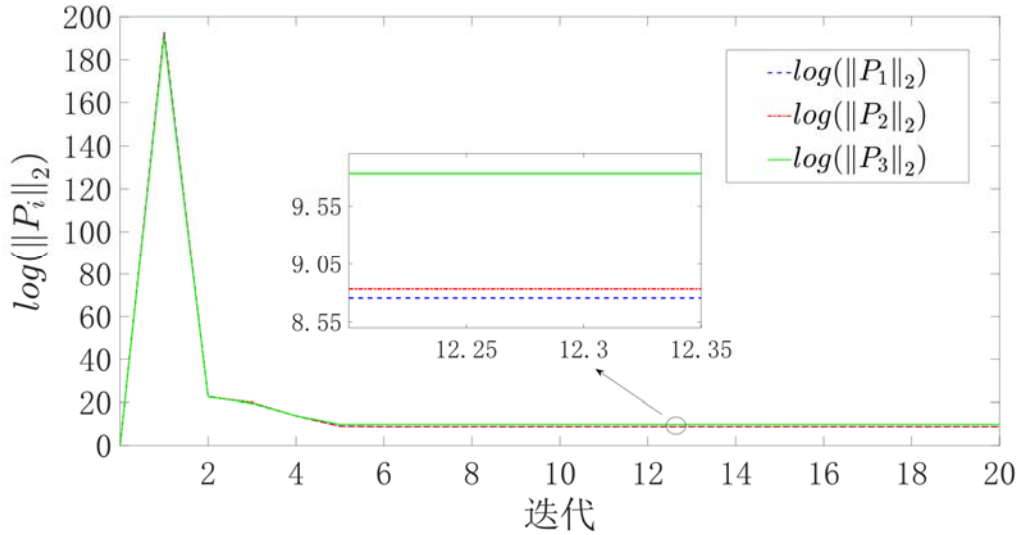


图 3 - 1 算法 3.1 解矩阵收敛过程

Figure 3 - 1. Algorithm 3.1 Solution Matrix Convergence Process

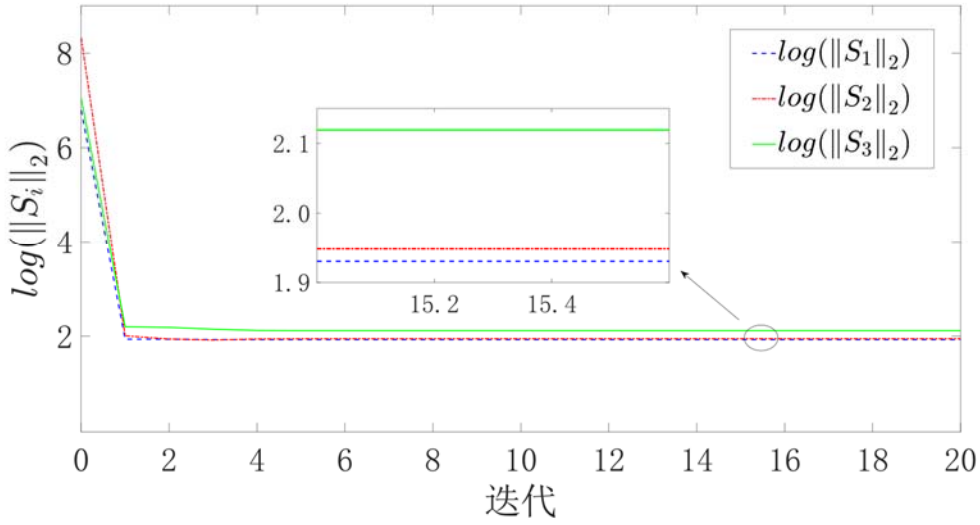


图 3 - 2 算法 3.1 控制器收敛过程

Figure 3 - 2. Algorithm 3.1 Controller Convergence Process

TP未知时，我们使用以下参数进行算法3.2的迭代求解：迭代幕数  $e = 50$ ，每幕步数  $s = 100$ ，回报权重  $\lambda = 0.10$ ，迭代步长  $\mu = 1/l$ 。此外，选取初始解矩阵  $\mathcal{E}^{(0)} = \mathbf{0}$ 、镇定控制器  $S_u^{(0)}$  与(3-53)相同。为了衡量算法3.2的收敛精度，我们设计如下性能指标：

$$\begin{cases} \Delta_i^{(l)} = \log \left( 1 + \frac{\|\mathcal{E}_i^* - \mathcal{E}_i^{(l)}\|_2^2}{\|\mathcal{E}_i^*\|_2^2} \right) \\ \delta_i^{(l)} = \log \left( 1 + \frac{\|S_{i,u}^* - S_{i,u}^{(l)}\|_2^2}{\|S_{i,u}^*\|_2^2} \right) \end{cases} \quad (3-55)$$

其中， $\mathcal{E}^*$ 为算法 3.2 应该收敛到的唯一镇定解、 $S_u^{*,TD}$ 为唯一镇定解对应的 LQT 控制器，仿真时我们使用算法 3.1 获得的值作为  $\mathcal{E}^*$  与  $S_u^{*,TD}$ 。算法 3.2 经过 25 次迭代后，解矩阵和控制器收敛，其中解矩阵  $P^*$  的值限于篇幅，本文没有展示，控制器  $S_u^{*,TD}$  的值为：

$$\begin{aligned} S_{1,u}^{*,TD} &= [0.1955 \quad -0.9205 \quad 0.0353 \quad 0.0387 \quad 0.0354 \quad 0.0382] \\ S_{2,u}^{*,TD} &= [0.1706 \quad -0.9893 \quad 0.0271 \quad 0.0713 \quad 0.0646 \quad 0.0702] \\ S_{3,u}^{*,TD} &= [0.0740 \quad -1.4749 \quad 0.0034 \quad 0.2133 \quad 0.1895 \quad 0.2097] \end{aligned} \quad (3-56)$$

图 3.3 与图 3.4 给出了  $\mathcal{E}^*$  与  $S_u^{*,TD}$  的收敛过程，

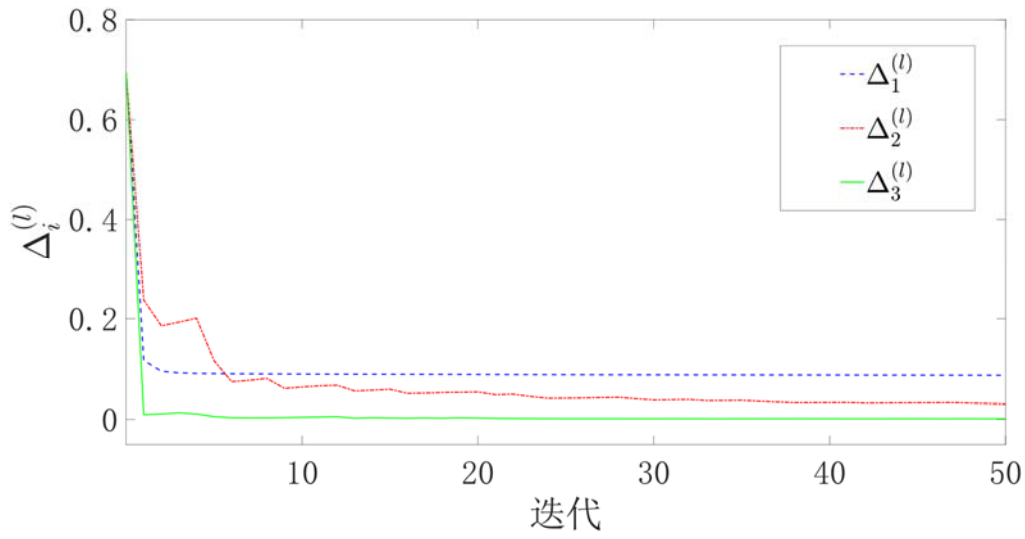


图 3 - 3 算法 3.2 解矩阵收敛过程

Figure 3 - 3. Algorithm 3.2 Solution Matrix Convergence Process

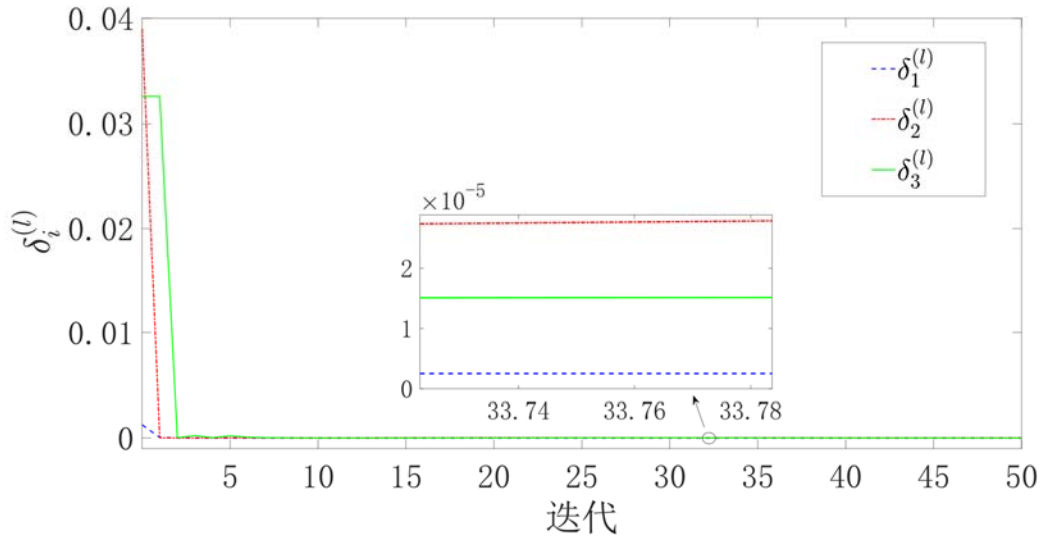


图 3 - 4 算法 3.2 控制器收敛过程

Figure 3 - 4. Algorithm 3.2 Controller Convergence Process

下面考察算法 3.1 以及算法 3.2 求得的控制(3-54)以及(3-56)的控制效果。初始状态选取为  $\tilde{x}_{k_0} = [0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ ，图 3.5 展示了在控制器(3-54)以及(3-56)下的跟踪控制效果，可以发现其跟踪控制效果良好且两个控制器的控制效果相近，这说明我们提出的 CARE 及其求解算法是有效性的。



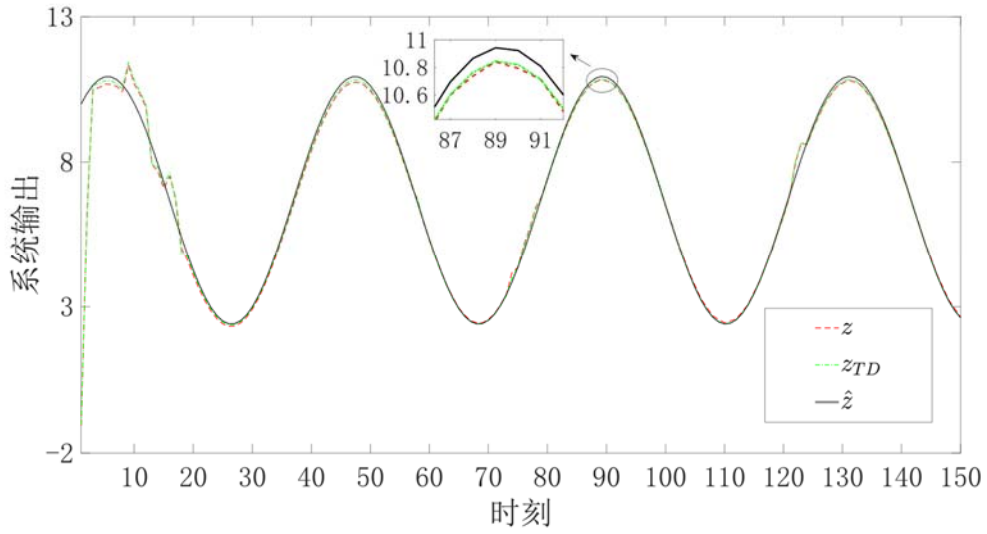


图 3 - 5 跟踪控制过程  
Figure 3 - 5. Tracking control process

### 3.6 总结

本章研究系统状态与模态可获得时，无限时域下 MJS 的 LQT 问题。基于 LQT 问题的二次型性能指标，将二次型性能指标的求解转化为极小化问题。通过 DP 递推求解该极小化问题并推导得到无限时域下 MJS 的 LQT 问题对应的 CARE 及对应的 LQT 控制器。接着，在给定衰减因子下，结合衰减跟踪误差系统讨论 CARE 解的存在性以及对应反馈控制器作用下闭环系统的稳定性，给出了 CARE 唯一镇定解存在的充分必要条件和稳定性证明。此外对于 TP 已知以及未知两种情况，分别考虑吧 CARE 求解问题，基于初始镇定解设计迭代求解算法并证明算法的收敛性。最后，在一个受随机故障影响的直流电机模型上对所提算法进行模拟仿真验证。

## 第四章 $H_\infty$ 跟踪控制问题求解

### 4.1 引言

本章研究系统状态可获得但系统状态不可获得时，无限时域下 MJS 的  $H_\infty$  跟踪控制问题。首先基于  $H_\infty$  跟踪控制问题提出的二次型性能指标，利用博弈论的思想，将二次型性能指标的的实现转化为极小极大问题的求解。利用 DP 求解该极小极大问题对应的 GCARE 及  $H_\infty$  跟踪控制器和  $H_\infty$  滤波器。接着，在给定衰减因子下，结合衰减误差跟踪系统讨论 GCARE 解的存在性以及在对  $H_\infty$  跟踪控制器和  $H_\infty$  滤波器下闭环系统的稳定性，给出了 GCARE 唯一镇定解存在的充分必要条件和稳定性证明。此外，考虑 TP 已知以及未知两种情况进行 GCARE 求解问题，基于初始镇定解设计迭代求解算法并证明算法的收敛性。最后，在一个受随机故障影响的直流电机模型上对所提算法进行模拟仿真验证。

### 4.2 $H_\infty$ 跟踪控制问题建模

本文的第四章将研究无限时域下 MJS 的  $H_\infty$  跟踪控制问题。在该  $H_\infty$  跟踪控制问题中，我们假设模态变量  $\varpi_k$  是可获得的，状态变量  $x_k$  无法直接获得。同时由于系统存在扰动，即噪声增益矩阵  $F_i$ 、 $G_i$ 、 $\hat{F}$ 、 $\hat{G}$  不为  $\mathbf{0}$ ，因此需要考虑状态估计问题。定义  $\tilde{x}_k \triangleq [x_k^\top \quad \hat{x}_k^\top]^\top$ ， $\tilde{w}_k \triangleq [w_k^\top \quad \hat{w}_k^\top]^\top$ ， $\tilde{y}_k \triangleq [y_k^\top \quad \hat{y}_k^\top]^\top$ ，构造如下跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$ ：

$$\mathcal{M}_{te}^{(2)} = \begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}_{\varpi_k} \tilde{x}_k + \tilde{B}_{\varpi_k} u_k + \tilde{F}_{\varpi_k} \tilde{w}_k \\ \tilde{z}_k = \tilde{C}_{\varpi_k} \tilde{x}_k + D_{\varpi_k} u_k + \tilde{H}_{\varpi_k} \tilde{w}_k \\ \tilde{y}_k = \tilde{E}_{\varpi_k} \tilde{x}_k + \tilde{G}_{\varpi_k} \tilde{w}_k \end{cases} \quad (4-1)$$

其中，

$$\begin{aligned}\tilde{A}_i &\triangleq \begin{bmatrix} A_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{A} \end{bmatrix} & \tilde{B}_i &\triangleq \begin{bmatrix} B_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \tilde{F}_i &\triangleq \begin{bmatrix} F_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{F} \end{bmatrix} & \tilde{C}_i &\triangleq [C_i \quad -\hat{C}] \\ \tilde{H}_i &\triangleq [H_i \quad \mathbf{0}] & \tilde{E}_i &\triangleq \begin{bmatrix} E_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{E} \end{bmatrix} & \tilde{G}_i &\triangleq \begin{bmatrix} G_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{G} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4-2)$$

由于状态变量  $x_k$  无法直接获得且显然被跟踪系统的状态  $\hat{x}_k$  是无法获得的，因此跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$  的状态是未知的，需要进行状态估计。针对跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$ ，考虑具有如下结构的离散马尔可夫跳变  $H_\infty$  滤波器  $\mathcal{M}_{esti}$  用于系统状态估计：

$$\mathcal{M}_{esti} = \begin{cases} \hat{x}_{k+1} = \tilde{A}_{\varpi_k} \hat{x}_k + \tilde{B}_{\varpi_k} u_k + L_{\varpi_k} (\tilde{y}_k - \hat{y}_k) \\ \hat{y}_k = \tilde{E}_{\varpi_k} \hat{x}_k \end{cases} \quad (4-3)$$

其中， $\hat{x}_k$  为估计的跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$  状态， $\hat{y}_k$  为估计的跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$  量测输出， $L = (L_1, \dots, L_N)$  为需要被确定的  $H_\infty$  滤波器增益。定义状态估计误差为  $\tilde{x}_k \triangleq \tilde{x}_k - \hat{x}_k$ ，量测新息为  $\tilde{y}_k \triangleq \tilde{y}_k - \hat{y}_k$ ，结合  $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$  与  $\mathcal{M}_{esti}$  可构造估计误差系统为：

$$\mathcal{M}_{ee} = \begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}_{\varpi_k} \tilde{x}_k + \tilde{F}_{\varpi_k} \tilde{w}_k - L_{\varpi_k} \tilde{y}_k \\ \tilde{y}_k = \tilde{E}_{\varpi_k} \tilde{x}_k + \tilde{G}_{\varpi_k} \tilde{w}_k \end{cases} \quad (4-4)$$

基于以上假设，我们期望设计  $H_\infty$  滤波器增益  $L$  使得  $H_\infty$  滤波器  $\mathcal{M}_{esti}$  在噪声序列  $\tilde{w} = \{\tilde{w}_{k_0}, \tilde{w}_{k_0+1}, \dots\}$  下满足  $L_2$  增益  $\vartheta$ ，提出如下性能指标：

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, \tilde{w}_{k_0}, \varpi_{k_0}) &\triangleq \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \left( \|\tilde{x}_k\|_2^2 - \vartheta^2 \|\tilde{w}_k\|_2^2 \right) \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{w}_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\vartheta^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{w}_k \end{bmatrix} \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\mathcal{X}_k\|_{\Phi_k^{(1)}}^2 \right\}\end{aligned}\quad (4-5)$$

其中  $\mathcal{X}_k \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{x}_k^\top & \tilde{w}_k^\top \end{bmatrix}^\top$ ，且

$$\Phi_i^{(1)} \triangleq \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\vartheta^2 I \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

通过  $H_\infty$  滤波器  $\mathcal{M}_{esti}$  得到估计状态  $\hat{x}_k$  后，我们期望设计  $H_\infty$  跟踪控制器要求在最坏的噪声  $\tilde{w} = \{\tilde{w}_{k_0}, \tilde{w}_{k_0+1}, \dots\}$  下，使用尽量小的控制输入  $u = \{u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots\}$  使得跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$  稳定，即跟踪误差  $\tilde{z}_k$  随时间趋于 0。同时我们希望系统即使在最坏的噪声  $\tilde{w} = \{\tilde{w}_{k_0}, \tilde{w}_{k_0+1}, \dots\}$  影响下，其跟踪误差与系统扰动之间依旧满足期望的  $L_2$  增益  $\theta$ 。与 LQT 控制类似，我们引入加权项  $\sum_{k=k_0}^{\infty} \|u_k\|_{R_{\varpi_k}}^2$  对控制输入进行约束，

引入衰减因子  $\gamma$  以保证控制输入能量的有限和优化问题的可解, 提出性能指标如下:

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, u_{k_0}, \tilde{w}_{k_0}, \varpi_{k_0}) \\
 & \triangleq \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma^{k-k_0} \left( \|\tilde{z}_k\|_{Q_{\varpi_k}}^2 + \|u_k\|_{R_{\varpi_k}}^2 - \theta^2 \|\tilde{w}_k\|_2^2 \right) \right\} \\
 & = \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma^{k-k_0} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ u_k \\ \tilde{w}_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \tilde{C}_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} \tilde{C}_{\varpi_k} & \tilde{C}_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} D_{\varpi_k} & \tilde{C}_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} \tilde{H}_{\varpi_k} \\ D_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} \tilde{C}_{\varpi_k} & D_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} D_{\varpi_k} + R_{\varpi_k} & D_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} \tilde{H}_{\varpi_k} \\ \tilde{H}_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} \tilde{C}_{\varpi_k} & \tilde{H}_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} D_{\varpi_k} & \tilde{H}_{\varpi_k}^\top Q_{\varpi_k} \tilde{H}_{\varpi_k} - \theta^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ u_k \\ \tilde{w}_k \end{bmatrix} \right\} \quad (4-7) \\
 & = \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma^{k-k_0} \|X_k\|_{\Upsilon_{\varpi_k}^{(1)}}^2 \right\}
 \end{aligned}$$

其中  $X_k \triangleq [\tilde{x}_k^\top \quad u_k^\top \quad \tilde{w}_k^\top]^\top$ , 且

$$\Upsilon_i^{(1)} \triangleq \begin{bmatrix} \Upsilon_{i|1,1}^{(1)} & \Upsilon_{i|1,2}^{(1)} & \Upsilon_{i|1,3}^{(1)} \\ \Upsilon_{i|2,1}^{(1)} & \Upsilon_{i|2,2}^{(1)} & \Upsilon_{i|2,3}^{(1)} \\ \Upsilon_{i|3,1}^{(1)} & \Upsilon_{i|3,2}^{(1)} & \Upsilon_{i|3,3}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_i^\top Q_i \tilde{C}_i & \tilde{C}_i^\top Q_i D_i & \tilde{C}_i^\top Q_i \tilde{H}_i \\ D_i^\top Q_i \tilde{C}_i & D_i^\top Q_i D_i + R_i & D_i^\top Q_i \tilde{H}_i \\ \tilde{H}_i^\top Q_i \tilde{C}_i & \tilde{H}_i^\top Q_i D_i & \tilde{H}_i^\top Q_i \tilde{H}_i - \theta^2 I \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

下面考虑在  $H_\infty$  滤波器以及  $H_\infty$  控制器  $u_k = K_{\varpi_k, u} \hat{x}_k$  以及共同作用下, 跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$  的稳定性。将跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$  与  $H_\infty$  滤波器  $\mathcal{M}_{esti}$  的状态增广得到闭环系统如下:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{k+1} \\ \hat{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\varpi_k} & \tilde{B}_{\varpi_k} K_{\varpi_k, u} \\ L_{\varpi_k} \tilde{E}_{\varpi_k} & \tilde{A}_{\varpi_k} + \tilde{B}_{\varpi_k} K_{\varpi_k, u} - L_{\varpi_k} \tilde{E}_{\varpi_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \hat{x}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{F}_{\varpi_k} \\ L_{\varpi_k} \tilde{G}_{\varpi_k} \end{bmatrix} \tilde{w}_k \quad (4-9)$$

通过简单的线性变换可以得到,

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{k+1} \\ \tilde{\tilde{x}}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\varpi_k} + \tilde{B}_{\varpi_k} K_{\varpi_k} & -\tilde{B}_{\varpi_k} K_{\varpi_k} \\ \mathbf{0} & \tilde{A}_{\varpi_k} - L_{\varpi_k} \tilde{E}_{\varpi_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{\tilde{x}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{F}_{\varpi_k} \\ \tilde{F}_{\varpi_k} - L_{\varpi_k} \tilde{G}_{\varpi_k} \end{bmatrix} \tilde{w}_k \quad (4-10)$$

显然, 状态估计误差  $\tilde{\tilde{x}}_k$  的收敛只与  $H_\infty$  滤波器增益  $L_i$  有关, 跟踪误差  $\tilde{x}_k$  的收敛只与  $H_\infty$  跟踪控制器增益  $K_i$  有关。因此我们可以分别设计  $H_\infty$  滤波器与  $H_\infty$  跟踪控制器, 这也就是 MJS 的分离原理<sup>[17]</sup>。首先观察估计误差系统  $\mathcal{M}_{ee}$  的稳定性, 可以发现其稳定性可以直接通过引理 2.1 进行证明。然而, 对于跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$ , 由于引入了衰减因子  $\gamma$ , 跟踪误差  $\tilde{z}_k$  难以保证一定随时间趋于 0。定义衰减增广状态为  $\bar{x}_k \triangleq \gamma^{k/2} \tilde{x}_k$ , 衰减控制输入为  $\bar{u}_k \triangleq \gamma^{k/2} u_k$ , 衰减过程噪声为  $\bar{w}_k \triangleq \gamma^{k/2} \tilde{w}_k$ , 衰减跟踪误差为  $\bar{z}_k \triangleq \gamma^{k/2} \tilde{z}_k$ , 有衰减跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{dte}^{(2)}$  为:

$$\mathcal{M}_{dte}^{(2)} = \begin{cases} \bar{x}_{k+1} = \sqrt{\gamma} \left( \tilde{A}_{\varpi_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\varpi_k} \bar{u}_k + \tilde{F}_{\varpi_k} \bar{w}_k \right) \\ \bar{z}_k = \tilde{C}_{\varpi_k} \bar{x}_k + D_{\varpi_k} \bar{u}_k + \tilde{H}_{\varpi_k} \bar{w}_k \end{cases} \quad (4-11)$$

定义  $\bar{X}_k \triangleq [\bar{x}_k^\top \quad \bar{u}_k^\top \quad \bar{w}_k^\top]^\top$ , 性能指标(4-7)可以改写为等价的形式:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\bar{x}_{k_0}, \bar{u}_{k_0}, \bar{w}_{k_0}, \varpi_{k_0}) &= \gamma^{-k_0} \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \left( \|\bar{z}_k\|_{Q_{\varpi_k}}^2 + \|\bar{u}_k\|_{R_{\varpi_k}}^2 - \theta^2 \|\bar{w}_k\|_2^2 \right) \right\} \\ &= \gamma^{-k_0} \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\bar{X}_k\|_{\Gamma_{\varpi_k}^{(1)}}^2 \right\}\end{aligned}\quad (4-12)$$

我们将分析在设计的控制器下衰减跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{de}^{(2)}$  的稳定性。

### 4.3 GCARE

#### 4.3.1 控制问题 GCARE 推导

由于跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$  受过程噪声影响，噪声序列  $\tilde{w} = \{\tilde{w}_{k_0}, \tilde{w}_{k_0+1}, \dots\}$  也被引入到性能指标(4-7)中，但是不同于  $u = \{u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots\}$  是一个人为控制的输入量，我们无法判断随机噪声扰动  $\tilde{w} = \{\tilde{w}_{k_0}, \tilde{w}_{k_0+1}, \dots\}$  对  $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$  的影响。针对性能指标(4-7)，假设  $k_0$  时刻  $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$  的状态为  $\tilde{x}_{k_0}$ ，模态为  $\varpi_{k_0} = i$ 。基于博弈论的思想，我们假设系统处于使得性能指标(4-7)尽可能大的随机噪声扰动  $\tilde{w} = \{\tilde{w}_{k_0}, \tilde{w}_{k_0+1}, \dots\}$  之下，同时尝试寻找  $u = \{u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots\}$  使得性能指标(4-7)尽可能的小，也即求解下列极小极大问题：

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, \varpi_{k_0} = i) &\triangleq \min_u \max_{\tilde{w}} \mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, u_{k_0}, \tilde{w}_{k_0}, \varpi_{k_0} = i) \\ &= \min_u \max_{\tilde{w}} \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma^{k-k_0} \|X_k\|_{\Gamma_{\varpi_k}^{(1)}}^2 \right\}\end{aligned}\quad (4-13)$$

由文献[81]知，若极小极大问题(4-13)有解，则考虑  $\mathcal{J}(\tilde{x}_k, \varpi_k)$  可写为关于  $\tilde{x}_k$  的二次型函数，即

$$\mathcal{J}(\tilde{x}_k, \varpi_k) = \|\tilde{x}_k\|_{P_{\varpi_k}^{(k)}}^2 \quad (4-14)$$

其中

$$P^{(k)} \triangleq \begin{bmatrix} P_1^{(k)} & \dots & P_N^{(k)} \end{bmatrix}^\top, P_i^{(k)} \geq 0 \quad (4-15)$$

为了后续理论的方便，(4-15)中的  $P^{(k)}$  以增广矩阵而不是(3-9)中矩阵序列的形式给出，其本质上是相同的。同样可以将极小极大问题(4-13)写为递推的形式，得到 Bellman 方程为：

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i) &= \min_u \max_{\tilde{w}} \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma^{k-k_0} \|X_k\|_{\Gamma_{\varpi_k}^{(1)}}^2 \right\} \\ &= \|X_{k_0}\|_{\Gamma_{\varpi_{k_0}}^{(1)}}^2 + \min_u \max_{\tilde{w}} \gamma \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \gamma^{k-k_0-1} \|X_k\|_{\Gamma_{\varpi_k}^{(1)}}^2 \right\} \\ &= \|X_{k_0}\|_{\Gamma_{\varpi_{k_0}}^{(1)}}^2 + \gamma \mathbb{E} [\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0+1}, \varpi_{k_0+1})]\end{aligned}\quad (4-16)$$

结合系统状态空间方程并考虑  $\mathbb{E}[\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0+1}, \varpi_{k_0+1})]$  的二次型形式得，

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[ \mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0+1}, \varpi_{k_0+1}) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \left\| \tilde{x}_{k_0+1} \right\|_{P^{(k_0+1)}}^2 \right\} \\
 &= \sum_{j=1}^N \pi_{ij} \left\| \tilde{A}_i \tilde{x}_{k_0} + \tilde{B}_i u_{k_0} + \tilde{F}_i \tilde{w}_{k_0} \right\|_{P_j^{(k_0+1)}}^2 \\
 &= \left\| \tilde{A}_i \tilde{x}_{k_0} + \tilde{B}_i u_{k_0} + \tilde{F}_i \tilde{w}_{k_0} \right\|_{\mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)})}^2 \\
 &= \begin{bmatrix} \tilde{x}_{k_0} \\ u_{k_0} \\ \tilde{w}_{k_0} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{A}_i & \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{B}_i & \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{F}_i \\ \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{A}_i & \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{B}_i & \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{F}_i \\ \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{A}_i & \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{B}_i & \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{F}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{k_0} \\ u_{k_0} \\ \tilde{w}_{k_0} \end{bmatrix} \\
 &= \left\| X_{k_0} \right\|_{\Upsilon_i^{(2,k_0)}}^2
 \end{aligned} \tag{4-17}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \Upsilon_{\varpi_k}^{(2,k)} &\triangleq \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{A}_{\varpi_k} & \tilde{A}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{B}_{\varpi_k} & \tilde{A}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{F}_{\varpi_k} \\ \tilde{B}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{A}_{\varpi_k} & \tilde{B}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{B}_{\varpi_k} & \tilde{B}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{F}_{\varpi_k} \\ \tilde{F}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{A}_{\varpi_k} & \tilde{F}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{B}_{\varpi_k} & \tilde{F}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{F}_{\varpi_k} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\varpi_k} & \tilde{B}_{\varpi_k} & \tilde{F}_{\varpi_k} \end{bmatrix}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\varpi_k} & \tilde{B}_{\varpi_k} & \tilde{F}_{\varpi_k} \end{bmatrix} \\
 &\geq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{4-18}$$

将(4-17)代入(4-16)中, 可以得到

$$\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i) = \left\| X_{k_0} \right\|_{\Upsilon_i^{(1)}}^2 + \gamma \left\| X_{k_0} \right\|_{\Upsilon_i^{(2,k_0)}}^2 = \left\| X_{k_0} \right\|_{\Upsilon_i^{(3,k_0)}}^2 \tag{4-19}$$

其中

$$\Upsilon_{\varpi_k}^{(3,k)} \triangleq \Upsilon_{\varpi_k}^{(1)} + \gamma \Upsilon_{\varpi_k}^{(2,k)} = \begin{bmatrix} \Upsilon_{\varpi_k|1,1}^{(3,k+1)} & \Upsilon_{\varpi_k|1,2}^{(3,k+1)} & \Upsilon_{\varpi_k|1,3}^{(3,k+1)} \\ \Upsilon_{\varpi_k|2,1}^{(3,k+1)} & \Upsilon_{\varpi_k|2,2}^{(3,k+1)} & \Upsilon_{\varpi_k|2,3}^{(3,k+1)} \\ \Upsilon_{\varpi_k|3,1}^{(3,k+1)} & \Upsilon_{\varpi_k|3,2}^{(3,k+1)} & \Upsilon_{\varpi_k|3,3}^{(3,k+1)} \end{bmatrix} \tag{4-20}$$

以及

$$\begin{cases} \Upsilon_{\varpi_k|1,1}^{(3,k)} \triangleq \tilde{C}_{\varpi_k}^\top \mathcal{Q}_{\varpi_k} \tilde{C}_{\varpi_k} + \gamma \tilde{A}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{A}_{\varpi_k} \geq \mathbf{0} \\ \Upsilon_{\varpi_k|1,2}^{(3,k)} = \left( \Upsilon_{\varpi_k|2,1}^{(3,k)} \right)^\top \triangleq \tilde{C}_{\varpi_k}^\top \mathcal{Q}_{\varpi_k} D_{\varpi_k} + \gamma \tilde{A}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{B}_{\varpi_k} \\ \Upsilon_{\varpi_k|1,3}^{(3,k)} = \left( \Upsilon_{\varpi_k|3,1}^{(3,k)} \right)^\top \triangleq \tilde{C}_{\varpi_k}^\top \mathcal{Q}_{\varpi_k} \tilde{H}_{\varpi_k} + \gamma \tilde{A}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{F}_{\varpi_k} \\ \Upsilon_{\varpi_k|2,2}^{(3,k)} \triangleq D_{\varpi_k}^\top \mathcal{Q}_{\varpi_k} D_{\var�_k} + R_{\varpi_k} + \gamma \tilde{B}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{B}_{\varpi_k} > \mathbf{0} \\ \Upsilon_{\varpi_k|2,3}^{(3,k)} = \left( \Upsilon_{\varpi_k|3,2}^{(3,k+1)} \right)^\top \triangleq D_{\varpi_k}^\top \mathcal{Q}_{\varpi_k} \tilde{H}_{\varpi_k} + \gamma \tilde{B}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{F}_{\varpi_k} \\ \Upsilon_{\varpi_k|3,3}^{(3,k)} \triangleq \tilde{H}_{\varpi_k}^\top \mathcal{Q}_{\varpi_k} \tilde{H}_{\varpi_k} - \theta^2 I + \gamma \tilde{F}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P^{(k+1)}) \tilde{F}_{\varpi_k} \end{cases} \tag{4-21}$$

可以发现关于控制律  $u = \{u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots\}$  以及噪声序列  $\tilde{w} = \{\tilde{w}_{k_0}, \tilde{w}_{k_0+1}, \dots\}$  的极小极大问题(4-13)已经转化为一个仅仅与  $u_{k_0}$  和  $\tilde{w}_{k_0}$  有关的无约束优化问题(4-19)。首先，令  $\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i)$  对  $u_{k_0}$  偏导数为 0，求解使得  $\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i)$  最小的  $u_{k_0}$ ，即

$$\frac{\partial \mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i)}{\partial u_{k_0}} = \tilde{x}_{k_0}^\top \Upsilon_{i|1,2}^{(3,k_0)} + u_{k_0}^\top \Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)} + \tilde{w}_{k_0}^\top \Upsilon_{i|3,2}^{(3,k_0)} = \mathbf{0} \quad (4-22)$$

接着，令  $\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i)$  对  $\tilde{w}_{k_0}$  偏导数为 0，求解使得  $\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i)$  最大的  $\tilde{w}_{k_0}$ ，即

$$\frac{\partial \mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i)}{\partial \tilde{w}_{k_0}} = \tilde{x}_{k_0}^\top \Upsilon_{i|1,3}^{(3,k_0)} + u_{k_0}^\top \Upsilon_{i|2,3}^{(3,k_0)} + \tilde{w}_{k_0}^\top \Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)} = \mathbf{0} \quad (4-23)$$

显然  $\Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)} > \mathbf{0}$  是可逆矩阵，然而  $\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)} = \tilde{H}_i^\top Q_i \tilde{H}_i - \theta^2 I + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{F}_i$  是否可逆与预设的  $L_2$  增益  $\theta$  有关，此处无法判断，暂时假设  $\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)}$  也是可逆的。联立(4-22)与(4-23)，可以得到

$$\begin{cases} \Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)} u_{k_0} + \Upsilon_{i|2,3}^{(3,k_0)} \tilde{w}_{k_0} = -\Upsilon_{i|2,1}^{(3,k_0)} \tilde{x}_{k_0} \\ \Upsilon_{i|3,2}^{(3,k_0)} u_{k_0} + \Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)} \tilde{w}_{k_0} = -\Upsilon_{i|3,1}^{(3,k_0)} \tilde{x}_{k_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{k_0} = -(\Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)})^{-1} (\Upsilon_{i|2,1}^{(3,k_0)} \tilde{x}_{k_0} + \Upsilon_{i|2,3}^{(3,k_0)} \tilde{w}_{k_0}) \\ \tilde{w}_{k_0} = -(\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)})^{-1} (\Upsilon_{i|3,1}^{(3,k_0)} \tilde{x}_{k_0} + \Upsilon_{i|3,2}^{(3,k_0)} u_{k_0}) \end{cases} \quad (4-24)$$

解得

$$\begin{cases} u_{k_0} = \left\{ \Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)} - \Upsilon_{i|2,3}^{(3,k_0)} (\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)})^{-1} \Upsilon_{i|3,2}^{(3,k_0)} \right\}^{-1} \left\{ \Upsilon_{i|2,3}^{(3,k_0)} (\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)})^{-1} \Upsilon_{i|3,1}^{(3,k_0)} - \Upsilon_{i|2,1}^{(3,k_0)} \right\} \tilde{x}_{k_0} \\ \quad = K_{i,u}^{(k_0)} \tilde{x}_{k_0} \\ \tilde{w}_{k_0} = \left\{ \Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)} - \Upsilon_{i|3,2}^{(3,k_0)} (\Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)})^{-1} \Upsilon_{i|2,3}^{(3,k_0)} \right\}^{-1} \left\{ \Upsilon_{i|3,2}^{(3,k_0)} (\Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)})^{-1} \Upsilon_{i|2,1}^{(3,k_0)} - \Upsilon_{i|3,1}^{(3,k_0)} \right\} \tilde{x}_{k_0} \\ \quad = K_{i,w}^{(k_0)} \tilde{x}_{k_0} \end{cases} \quad (4-25)$$

此外，考虑  $\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i)$  对  $u_{k_0}$  和  $\tilde{w}_{k_0}$  的二阶偏导数有

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i)}{\partial u_{k_0}^2} = \Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)} = D_i^\top D_i + R_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{B}_i > \mathbf{0} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i)}{\partial \tilde{w}_{k_0}^2} = \Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)} = \tilde{H}_i^\top \tilde{H}_i - \theta^2 I + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{F}_i \end{cases} \quad (4-26)$$

由于  $\Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)} > \mathbf{0}$ ，因此(4-25)求得的  $u_{k_0}$  为极小极大问题(4-13)的极小值。同时，我们期望(4-13)求得的  $\tilde{w}_{k_0}$  应该为极小极大问题(4-13)的极小值，这就要求  $\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)}$  是负定的，即  $\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)} < \mathbf{0}$ 。由于预设的  $L_2$  增益  $\theta$ ，此处也是无法直接判断的，我们暂时假设  $\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)} < \mathbf{0}$ 。需要注意的是，假设  $\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)} < \mathbf{0}$  后， $\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)}$  显然是可逆矩阵。

定义  $K_i^{(k)} = [I \quad K_{i,u}^{(k)\top} \quad K_{i,\tilde{w}}^{(k)\top}]^\top$ , 有  $X_k = [\tilde{x}_k^\top \quad u_k^\top \quad \tilde{w}_k^\top]^\top = K_i^{(k)} \tilde{x}_k$ , 代入(4-19)中, 得

$$\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i) = \|X_{k_0}\|_{\Upsilon_i^{(3,k_0)}}^2 = \|K_i^{(k_0)} \tilde{x}_{k_0}\|_{\Upsilon_i^{(3,k_0)}}^2 = 0 \quad (4-27)$$

显然(4-27)与(4-14)是等价的, 即

$$\|K_i^{(k_0)} \tilde{x}_{k_0}\|_{\Upsilon_i^{(3,k_0)}}^2 = \|\tilde{x}_{k_0}\|_{P_i^{(k_0)}}^2 \Leftrightarrow \tilde{x}_{k_0}^\top \left\{ \|K_i^{(k_0)}\|_{\Upsilon_i^{(3,k_0)}}^2 - P_i^{(k_0)} \right\} \tilde{x}_{k_0} = 0 \quad (4-28)$$

由于我们假设的  $\tilde{x}_{k_0}$  是任意的, 因此(4-28)对任意的  $\tilde{x}_{k_0}$  都成立, 那么

$$\|K_i^{(k_0)}\|_{\Upsilon_i^{(3,k_0)}}^2 - P_i^{(k_0)} = 0 \quad (4-29)$$

(4-17)就是  $k_0$  时刻的博弈耦合差分 Riccati 方程, 利用相同的推导可以得到对应

$k = k_0, \dots, \infty$  各个时刻的博弈耦合差分 Riccati 方程。同时考虑到随着  $k \rightarrow \infty$ , 解

矩阵  $P_i^{(k)}$  收敛, 即  $\lim_{k \rightarrow \infty} P_i^{(k)} = P_i$ ,  $\Upsilon_{\varpi_k}^{(1)}$ 、 $\Upsilon_{\varpi_k}^{(2,k)}$ 、 $\Upsilon_{\varpi_k}^{(3,k)}$ 、 $K_{\varpi_k,u}^{(k)}$ 、 $K_{\varpi_k,\tilde{w}}^{(k)}$ 、 $K_{\varpi_k}^{(k)}$  也变为

定常矩阵, 博弈耦合差分 Riccati 方程会变为 GCARE:

$$\|K_i\|_{\Upsilon_i^{(3)}}^2 - P_i = 0 \quad (4-30)$$

同理, 可以给出此时的  $H_\infty$  控制器以及最坏噪声增益:

$$\begin{cases} K_{i,u} = \left\{ \Upsilon_{i2,2}^{(3)} - \Upsilon_{i2,3}^{(3)} (\Upsilon_{i3,3}^{(3)})^{-1} \Upsilon_{i3,2}^{(3)} \right\}^{-1} \left\{ \Upsilon_{i2,3}^{(3)} (\Upsilon_{i3,3}^{(3)})^{-1} \Upsilon_{i3,1}^{(3)} - \Upsilon_{i2,1}^{(3)} \right\} \\ K_{i,\tilde{w}} = \left\{ \Upsilon_{i3,3}^{(3)} - \Upsilon_{i3,2}^{(3)} (\Upsilon_{i2,2}^{(3)})^{-1} \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \right\}^{-1} \left\{ \Upsilon_{i3,2}^{(3)} (\Upsilon_{i2,2}^{(3)})^{-1} \Upsilon_{i2,1}^{(3)} - \Upsilon_{i3,1}^{(3)} \right\} \end{cases} \quad (4-31)$$

下面给出(4-30)的几种等价形式便于后续理论推导。首先, 考虑到(4-30)中的  $\Upsilon_{\varpi_k}^{(3,k)} = \Upsilon_{\varpi_k}^{(1)} + \gamma \Upsilon_{\varpi_k}^{(2,k)}$  可以变为  $\Upsilon_i^{(3)} = \Upsilon_i^{(1)} + \gamma \Upsilon_i^{(2)}$ , 代入到(4-30)中, 得到

$$\begin{aligned} P_i &= \|K_i\|_{\Upsilon_i^{(1)}}^2 + \|K_i\|_{\gamma \Upsilon_i^{(2)}}^2 \\ &= \gamma \|\tilde{A}_i + \tilde{B}_i K_{i,u} + \tilde{F}_i K_{i,\tilde{w}}\|_{\mathcal{E}_i(P)}^2 + \|K_i\|_{\Upsilon_i^{(1)}}^2 \end{aligned} \quad (4-32)$$

(4-32)是 GCARE 的闭环控制器形式, 其中  $\tilde{A}_i + \tilde{B}_i K_{i,u} + \tilde{F}_i K_{i,\tilde{w}}$  是跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$  引入反馈控制律  $u_k = K_{\varpi_k,u} \tilde{x}_k$  以及最坏噪声  $\tilde{w}_k = K_{\varpi_k,\tilde{w}} \tilde{x}_k$  后的闭环控制器。可以发现(4-32)的结构类似于引理 2.1 中的 CLE, 因此该形式可以用于闭环系统的稳定性分析。

考察  $[K_{i,u}^\top \quad K_{i,\tilde{w}}^\top]^\top$ , 将(4-24)化为增广矩阵的形式, 得

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,2}^{(3)} & \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,2}^{(3)} & \Upsilon_{i3,3}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{i,u} \\ K_{i,\tilde{w}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,1}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (4-33)$$

由于  $\Upsilon_{i2,2}^{(3)}$  与  $\Upsilon_{i3,3}^{(3)}$  可逆, 可以得到



$$\begin{bmatrix} K_{i,u} \\ K_{i,\tilde{w}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,2}^{(3)} & \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,2}^{(3)} & \Upsilon_{i3,3}^{(3)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,1}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (4-34)$$

将  $K_i^{(k)} = [I \quad K_{i,u}^{(k)\top} \quad K_{i,\tilde{w}}^{(k)\top}]^\top$  以及(4-34)代入(4-30)中, 得到

$$\begin{aligned} P_i &= \left\| \begin{bmatrix} I & K_{i,u}^\top & K_{i,\tilde{w}}^\top \end{bmatrix} \right\|_{\Upsilon_i^{(3)}}^2 \\ &= \begin{bmatrix} I & K_{i,u}^\top & K_{i,\tilde{w}}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Upsilon_{i1,1}^{(3)} & \Upsilon_{i1,2}^{(3)} & \Upsilon_{i1,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i2,1}^{(3)} & \Upsilon_{i2,2}^{(3)} & \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} & \Upsilon_{i3,2}^{(3)} & \Upsilon_{i3,3}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & K_{i,u}^\top & K_{i,\tilde{w}}^\top \end{bmatrix}^\top \\ &= \Upsilon_{i1,1}^{(3)} - \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,1}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,2}^{(3)} & \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,2}^{(3)} & \Upsilon_{i3,3}^{(3)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,1}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-35)$$

将(4-21)中的具体表达式代入(4-35)中, 得到

$$\begin{aligned} P_i &= \gamma \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i + \tilde{C}_i^\top Q_i \tilde{C}_i - \begin{bmatrix} D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \\ \tilde{H}_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \end{bmatrix}^\top \\ &\quad \times \begin{bmatrix} D_i^\top Q_i D_i + R_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{B}_i & D_i^\top Q_i \tilde{H}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{F}_i \\ \tilde{H}_i^\top Q_i D_i + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{B}_i & \tilde{H}_i^\top Q_i \tilde{H}_i - \theta^2 I + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{F}_i \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \\ \tilde{H}_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-36)$$

(4-36)中只有系统参数与权重矩阵, 可用于解矩阵  $P$  的理论分析与求解。

**定理 4.1 (控制 GCARE)**<sup>[29]</sup>: 满足极小极大问题(4-13)的控制律与噪声扰动为

$u_k = K_{\varpi_k, u} \tilde{x}_k$  以及  $\tilde{w}_k = K_{\varpi_k, \tilde{w}} \tilde{x}_k$ , 其具体形式为

$$\begin{cases} K_{i,u} = \left\{ \Upsilon_{i2,2}^{(3)} - \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \left( \Upsilon_{i3,3}^{(3)} \right)^{-1} \Upsilon_{i3,2}^{(3)} \right\}^{-1} \left\{ \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \left( \Upsilon_{i3,3}^{(3)} \right)^{-1} \Upsilon_{i3,1}^{(3)} - \Upsilon_{i2,1}^{(3)} \right\} \\ K_{i,\tilde{w}} = \left\{ \Upsilon_{i3,3}^{(3)} - \Upsilon_{i3,2}^{(3)} \left( \Upsilon_{i2,2}^{(3)} \right)^{-1} \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \right\}^{-1} \left\{ \Upsilon_{i3,2}^{(3)} \left( \Upsilon_{i2,2}^{(3)} \right)^{-1} \Upsilon_{i2,1}^{(3)} - \Upsilon_{i3,1}^{(3)} \right\} \end{cases} \quad (4-37)$$

其中,  $P$  是 GCARE(4-38)的唯一镇定解:

$$\begin{aligned} P_i &= \gamma \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i + \tilde{C}_i^\top Q_i \tilde{C}_i - \begin{bmatrix} D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \\ \tilde{H}_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \end{bmatrix}^\top \\ &\quad \times \begin{bmatrix} D_i^\top Q_i D_i + R_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{B}_i & D_i^\top Q_i \tilde{H}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{F}_i \\ \tilde{H}_i^\top Q_i D_i + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{B}_i & \tilde{H}_i^\top Q_i \tilde{H}_i - \theta^2 I + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{F}_i \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \\ \tilde{H}_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-38)$$

#### 4.3.2 估计问题 GCARE

由于估计误差系统  $\mathcal{M}_{ee}$  受过程噪声与量测噪声影响, 因此噪声序列

$\tilde{w} = \{\tilde{w}_{k_0}, \tilde{w}_{k_0+1}, \dots\}$  也被引入到性能指标(4-5)中, 但是我们无法判断随机噪声扰动

$\tilde{w} = \{\tilde{w}_{k_0}, \tilde{w}_{k_0+1}, \dots\}$  对  $\mathcal{M}_{ee}$  的影响。针对性能指标(4-5)，假设  $k_0$  时刻  $\mathcal{M}_{ee}$  的状态为  $\tilde{x}_{k_0}$ ，模态为  $\varpi_{k_0} = i$ 。基于博弈论的思想，我们假设  $\mathcal{M}_{ee}$  处于使得性能指标(4-5)最大的随机噪声扰动  $\tilde{w} = \{\tilde{w}_{k_0}, \tilde{w}_{k_0+1}, \dots\}$  之下，同时尝试寻找  $u = \{u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots\}$  使得性能指标(2-25)尽可能的小，也即求解下列极小极大问题：

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\tilde{x}_k, \varpi_{k_0} = i) &\triangleq \min_{\tilde{x}} \max_{\tilde{w}} \mathcal{J}(\tilde{x}_k, \tilde{w}_{k_0}, \varpi_{k_0} = i) \\ &= \min_{\tilde{x}} \max_{\tilde{w}} \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\mathcal{X}_k\|_{\Phi_k^{(1)}}^2 \right\} \end{aligned} \quad (4-39)$$

由于极小极大问题(4-39)的求解推导过程与定理 4.1 类似，且文献[59]已经给出了类似问题的解，因此本文不赘述极小极大问题(4-39)的求解与理论推导过程，仅给出相应结论。

定义

$$\Phi_i^{(2)} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{F}_i \tilde{F}_i^\top & \tilde{F}_i \tilde{G}_i^\top & \mathbf{0} \\ \tilde{G}_i \tilde{F}_i^\top & \tilde{G}_i \tilde{G}_i^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\vartheta^2 I \end{bmatrix} \quad (4-40)$$

以及

$$\begin{aligned} \Phi_i^{(3)} &\triangleq \begin{bmatrix} \tilde{A}_i \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i^\top + \tilde{F}_i \tilde{F}_i^\top & \tilde{F}_i \tilde{G}_i^\top + \tilde{A}_i \mathcal{E}_i(P) \tilde{E}_i^\top & \tilde{A}_i \mathcal{E}_i(P) \\ \tilde{G}_i \tilde{F}_i^\top + \tilde{E}_i \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i^\top & \tilde{G}_i \tilde{G}_i^\top + \tilde{E}_i \mathcal{E}_i(P) \tilde{E}_i^\top & \tilde{E}_i \mathcal{E}_i(P) \\ \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i^\top & \mathcal{E}_i(P) \tilde{E}_i^\top & \mathcal{E}_i(P) - \vartheta^2 I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_{i1,1}^{(3)} & \Phi_{i1,2}^{(3)} & \Phi_{i1,3}^{(3)} \\ \Phi_{i2,1}^{(3)} & \Phi_{i2,2}^{(3)} & \Phi_{i2,3}^{(3)} \\ \Phi_{i3,1}^{(3)} & \Phi_{i3,2}^{(3)} & \Phi_{i3,3}^{(3)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-41)$$

**定理 4.2 (估计 GCARE)<sup>[29]</sup>:** 满足极小极大问题(4-39)的  $H_\infty$  滤波器增益  $L_{\varpi_k, \tilde{w}}$  与噪声扰动增益  $L_{\varpi_k, \tilde{w}}$  为

$$\begin{cases} L_{i, \tilde{y}} = \left\{ \Phi_{i1,3}^{(2)} \left( \Phi_{i3,3}^{(2)} \right)^{-1} \Phi_{i3,2}^{(2)} - \Phi_{i1,2}^{(2)} \right\} \left\{ \Phi_{i2,2}^{(2)} - \Phi_{i2,3}^{(2)} \left( \Phi_{i3,3}^{(2)} \right)^{-1} \Phi_{i3,2}^{(2)} \right\}^{-1} \\ L_{i, \tilde{w}} = \left\{ \Phi_{i1,2}^{(2)} \left( \Phi_{i2,2}^{(2)} \right)^{-1} \Phi_{i2,3}^{(2)} - \Phi_{i1,3}^{(2)} \right\} \left\{ \Phi_{i3,3}^{(2)} - \Phi_{i3,2}^{(2)} \left( \Phi_{i2,2}^{(2)} \right)^{-1} \Phi_{i2,3}^{(2)} \right\}^{-1} \end{cases} \quad (4-42)$$

其中， $P$  是 GCARE(4-43)的唯一镇定解：

$$\begin{aligned}
 P_i &= \Phi_{i|1,1}^{(2)} - \begin{bmatrix} \Phi_{i|2,1}^{(2)} \\ \Phi_{i|3,1}^{(2)} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Phi_{i|2,2}^{(2)} & \Phi_{i|2,3}^{(2)} \\ \Phi_{i|3,2}^{(2)} & \Phi_{i|3,3}^{(2)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Phi_{i|2,1}^{(2)} \\ \Phi_{i|3,1}^{(2)} \end{bmatrix} \\
 &= \tilde{A}_i \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i^\top + \tilde{F}_i \tilde{F}_i^\top - \begin{bmatrix} \tilde{G}_i \tilde{F}_i^\top + \tilde{E}_i \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i^\top \\ \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i^\top \end{bmatrix}^\top \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} \tilde{G}_i \tilde{G}_i^\top + \tilde{E}_i \mathcal{E}_i(P) \tilde{E}_i^\top & \tilde{E}_i \mathcal{E}_i(P) \\ \mathcal{E}_i(P) \tilde{E}_i^\top & \mathcal{E}_i(P) - \vartheta^2 I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{G}_i \tilde{F}_i^\top + \tilde{E}_i \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i^\top \\ \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_i^\top \end{bmatrix} \\
 &= \|\tilde{A}_i + L_{i,y} \tilde{E}_i + L_{i,w}\|_{\mathcal{E}_i(P)}^2 + \|L_i^\top\|_{\Phi_i^{(3)}}^2
 \end{aligned} \tag{4-43}$$

#### 4.3.3 GCARE 镇定解的存在性与稳定性

本小节讨论 GCARE(4-38)以及(4-43)镇定解的存在性与稳定性问题。可以发现 GCARE(4-38)和(4-43)在结构上是类似的，因此我们下面主要分析(4-38)镇定解的存在性与稳定性问题。我们期望 GCARE(4-38)具有唯一镇定解，文献[47]的 Theorem 给出了类似的结论，我们将其改造为适合(4-38)的结果。

**引理 4.1 (GCARE 镇定解存在的充要条件)**<sup>[29]</sup>: GCARE(4-38)存在唯一镇定解当且仅当  $(\gamma^{1/2} \tilde{A}, \gamma^{1/2} \tilde{B}, \Pi)$  能镇定， $(\Pi, (\gamma Q)^{1/2} \tilde{C}, \gamma^{1/2} \tilde{A})$  可探测且该镇定解  $P$  满足

$$\Upsilon_{i|3,3}^{(3)} = \tilde{H}_i^\top Q_i \tilde{H}_i - \theta^2 I + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(P) \tilde{F}_i < \mathbf{0} \tag{4-44}$$

显然对于给定的被控系统 with 参考系统， $(\gamma^{1/2} \tilde{A}, \gamma^{1/2} \tilde{B}, \Pi)$  是否能镇定只与衰减因子  $\gamma$  有关， $(\Pi, (\gamma Q)^{1/2} \tilde{C}, \gamma^{1/2} \tilde{A})$  是否可探测只与衰减因子  $\gamma$  以及权重矩阵  $Q$  有关。这为我们选取衰减因子  $\gamma$  以及权重矩阵  $Q$  提供依据。

**注 4.1:** 关于 MJS 能镇定与可探测的定义，文献[29]的 P57 中有详细介绍。同时，文献[29]提供了能镇定与可探测的判定方法。此外，前文中  $\Upsilon_{i|3,3}^{(3)} < \mathbf{0}$  的假设是必需的，如果不满足该假设，极小极大问题(4-13)是无解的，后续的推导过程也就没有意义了。

若 GCARE(4-38)有唯一镇定解，在该镇定解对应的反馈控制律  $u_k = K_{\varpi_k, u} \tilde{x}_k$  作用下，我们讨论跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$  的稳定性。出于跟踪不稳定系统的目的，本文在二次型性能指标引入了衰减因子  $\gamma$ ，这不可避免的对跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$  的稳定性产生影响，我们转而分析衰减跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{dte}^{(2)}$  的稳定性。在镇定解对应的反馈控制律  $u_k = K_{\varpi_k, u} \tilde{x}_k$  作用下闭环系统为：

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = \sqrt{\gamma} (\tilde{A}_{\varpi_k} + \tilde{B}_{\varpi_k} K_{\varpi_k, u}) \bar{x}_k + \sqrt{\gamma} \tilde{F}_{\varpi_k} \bar{w}_k \\ \bar{z}_k = (\tilde{C}_{\varpi_k} + D_{\varpi_k} K_{\varpi_k, u}) \bar{x}_k + \tilde{H}_{\varpi_k} \bar{w}_k \end{cases} \tag{4-45}$$

分析稳定性时可以认为  $\bar{w}_k \equiv \mathbf{0}$ ，可以发现若  $\tilde{C}_{\varpi_k} + D_{\varpi_k} K_{u,\varpi_k} \neq \mathbf{0}$ ，那么  $\bar{x}_k$  收敛等价于  $\bar{z}_k$  收敛。将 GCARE(4-38)的唯一镇定解  $P$  作为 Lyapunov 函数中的二次型矩阵，可以得到系统(4-45)对应的 CLE 为

$$\begin{aligned}
 \gamma \left\| \tilde{A}_i + \tilde{B}_i K_{i,u} \right\|_{\mathcal{E}_i(P)}^2 - P_i &= K_i^\top \left\{ \gamma \left\| \begin{bmatrix} \tilde{A}_i & \tilde{B}_i & 0 \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{E}_i(P)}^2 - \Upsilon_i^{(3)} \right\} K_i \\
 &= - \begin{bmatrix} I \\ K_{i,u} \\ K_{i,\tilde{w}} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Upsilon_{i1,1}^{(1)} & \Upsilon_{i1,2}^{(1)} & \Upsilon_{i1,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i2,1}^{(1)} & \Upsilon_{i2,2}^{(1)} & \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} & \Upsilon_{i3,2}^{(3)} & \Upsilon_{i3,3}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ K_{i,u} \\ K_{i,\tilde{w}} \end{bmatrix} \\
 &= - \begin{bmatrix} I \\ K_{i,u} \\ K_{i,\tilde{w}} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Upsilon_{i1,1}^{(1)} & \Upsilon_{i1,2}^{(1)} & 0 \\ \Upsilon_{i2,1}^{(1)} & \Upsilon_{i2,2}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & -\Upsilon_{i3,3}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ K_{i,u} \\ K_{i,\tilde{w}} \end{bmatrix} \\
 &= - \left\| K_i \right\|_{\Upsilon_i^{(4)}}^2
 \end{aligned} \tag{4-46}$$

显然由于  $\Upsilon_{i3,3}^{(3)} < \mathbf{0}$ ，所以  $\Upsilon_i^{(4)} \geq \mathbf{0}$ ，则引理 2.1 成立，因此在镇定解对应的反馈控制律  $u_k = K_{\varpi_k,u} \tilde{x}_k$  作用下衰减跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{de}^{(2)}$  是 SS 的。关于(4-46)的推导，(4-46)的第一个等式需要代入(4-29)。第三个等式具体细节如下：

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} I \\ K_{i,u} \\ K_{i,\tilde{w}} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Upsilon_{i1,3}^{(3)} \\ 0 & 0 & \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} & \Upsilon_{i3,2}^{(3)} & 2\Upsilon_{i3,3}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ K_{i,u} \\ K_{i,\tilde{w}} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} I \\ K_{i,u} \\ K_{i,\tilde{w}} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Upsilon_{i1,3}^{(3)} K_{i,\tilde{w}} \\ \Upsilon_{i2,3}^{(3)} K_{i,\tilde{w}} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} + \Upsilon_{i3,2}^{(3)} K_{i,u} + 2\Upsilon_{i3,3}^{(3)} K_{i,\tilde{w}} \end{bmatrix} \\
 &= \Upsilon_{i1,3}^{(3)} K_{i,\tilde{w}} + K_{i,u}^\top \Upsilon_{i2,3}^{(3)} K_{i,\tilde{w}} + K_{i,\tilde{w}}^\top \left\{ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} + \Upsilon_{i3,2}^{(3)} K_{i,u} + 2\Upsilon_{i3,3}^{(3)} K_{i,\tilde{w}} \right\} \\
 &= \Upsilon_{i1,3}^{(3)} K_{i,\tilde{w}} - \left( \Upsilon_{i2,1}^{(3,k_0)} + \Upsilon_{i2,3}^{(3,k_0)} K_{i,\tilde{w}} \right)^\top \left( \Upsilon_{i2,2}^{(3,k_0)} \right)^{-1} \Upsilon_{i2,3}^{(3)} K_{i,\tilde{w}} \\
 &\quad + K_{i,\tilde{w}}^\top \left\{ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} - \Upsilon_{i3,2}^{(3)} \left( \Upsilon_{i2,2}^{(3,k_0)} \right)^{-1} \left( \Upsilon_{i2,1}^{(3,k_0)} + \Upsilon_{i2,3}^{(3,k_0)} K_{i,\tilde{w}} \right) + 2\Upsilon_{i3,3}^{(3)} K_{i,\tilde{w}} \right\} \\
 &= \left\{ \Upsilon_{i1,3}^{(3)} - \Upsilon_{i1,2}^{(3)} \left( \Upsilon_{i2,2}^{(3)} \right)^{-1} \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \right\} K_{i,\tilde{w}} + K_{i,u}^\top \left\{ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} - \Upsilon_{i3,2}^{(3)} \left( \Upsilon_{i2,2}^{(3)} \right)^{-1} \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \right\} \\
 &\quad + 2K_{i,\tilde{w}}^\top \left\{ \Upsilon_{i3,3}^{(3)} - \Upsilon_{i3,2}^{(3)} \left( \Upsilon_{i2,2}^{(3)} \right)^{-1} \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \right\} K_{i,\tilde{w}} \\
 &= \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{4-47}$$

下面证明若 GCARE(4-38)有唯一镇定解存在，那么在该镇定解对应的控制器  $K_{i,u}$  下，衰减跟踪误差系统  $\mathcal{M}_{de}^{(2)}$  的闭环系统(4-45)满足预设的  $L_2$  增益。令  $k$  时刻系统模态为  $\varpi_k$ ，结合(4-45)考虑  $k+1$  时刻：

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left\{ \left\| \bar{x}_{k+1} \right\|_{P_{\varpi_{k+1}}}^2 \right\} &= \gamma \mathbb{E} \left\{ \left\| \left( \tilde{A}_{\varpi_k} + \tilde{B}_{\varpi_k} K_{\varpi_k, u} \right) \bar{x}_k + \tilde{F}_{\varpi_k} \bar{w}_k \right\|_{P_{\varpi_{k+1}}}^2 \right\} \\
 &= \gamma \mathbb{E} \left\{ \left\| \tilde{A}_{\varpi_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\varpi_k} \bar{u}_k + \tilde{F}_{\varpi_k} \bar{w}_k \right\|_{\mathcal{E}_{\varpi_k}(P)}^2 \right\} \\
 &= \gamma \mathbb{E} \left\{ \left\| \tilde{A}_{\varpi_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\varpi_k} \bar{u}_k \right\|_{\mathcal{E}_i(P)}^2 + \bar{w}_k^\top \tilde{F}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P) \left( \tilde{A}_{\varpi_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\varpi_k} \bar{u}_k \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \tilde{A}_{\varpi_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\varpi_k} \bar{u}_k + \tilde{F}_{\varpi_k} \bar{w}_k \right)^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P) \tilde{F}_{\varpi_k} \bar{w}_k \right\}
 \end{aligned} \tag{4-48}$$

其中  $P$  为 GCARE(4-26) 的唯一镇定解, 代入(4-34)中得

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} \left\{ \left\| \bar{x}_{k+1} \right\|_{P_{\varpi_{k+1}}}^2 \right\} \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \left\| \bar{x}_k \right\|_{P_{\varpi_k}}^2 - \left\| K_{\varpi_k} \bar{x}_k \right\|_{Y_{\varpi_k}^{(4)}}^2 + \gamma \bar{w}_k^\top \tilde{F}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P) \left( \tilde{A}_{\varpi_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\varpi_k} \bar{u}_k \right) \right. \\
 &\quad \left. + \gamma \left( \tilde{A}_{\varpi_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\varpi_k} \bar{u}_k + \tilde{F}_{\varpi_k} \bar{w}_k \right)^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P) \tilde{F}_{\varpi_k} \bar{w}_k \right\} \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \left\| \bar{x}_k \right\|_{P_{\varpi_k}}^2 - \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ K_{\varpi_k, \tilde{w}} \bar{x}_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Upsilon_{\varpi_k|1,1}^{(1)} & \Upsilon_{\varpi_k|1,2}^{(1)} & \Upsilon_{\varpi_k|1,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{\varpi_k|2,1}^{(1)} & \Upsilon_{\varpi_k|2,2}^{(1)} & \Upsilon_{\varpi_k|2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{\varpi_k|3,1}^{(3)} & \Upsilon_{\varpi_k|3,2}^{(3)} & \Upsilon_{\varpi_k|3,3}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ K_{\varpi_k, \tilde{w}} \bar{x}_k \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + \gamma \bar{w}_k^\top \tilde{F}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P) \left( \tilde{A}_{\varpi_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\varpi_k} \bar{u}_k \right) + \gamma \left( \tilde{A}_{\varpi_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\varpi_k} \bar{u}_k + \tilde{F}_{\varpi_k} \bar{w}_k \right)^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P) \tilde{F}_{\varpi_k} \bar{w}_k \right\} \tag{4-49} \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \left\| \bar{x}_k \right\|_{P_{\varpi_k}}^2 + \left\| K_{\varpi_k, \tilde{w}} \bar{x}_k - \bar{w}_k \right\|_{Y_{\varpi_k|3,3}^{(3)}}^2 - \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Upsilon_{\varpi_k|1,1}^{(1)} & \Upsilon_{\varpi_k|1,2}^{(1)} & \Upsilon_{\varpi_k|1,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{\varpi_k|2,1}^{(1)} & \Upsilon_{\varpi_k|2,2}^{(1)} & \Upsilon_{\varpi_k|2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{\varpi_k|3,1}^{(3)} & \Upsilon_{\varpi_k|3,2}^{(3)} & \Upsilon_{\varpi_k|3,3}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + \gamma \bar{w}_k^\top \tilde{F}_{\varpi_k}^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P) \left( \tilde{A}_{\varpi_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\varpi_k} \bar{u}_k \right) + \gamma \left( \tilde{A}_{\varpi_k} \bar{x}_k + \tilde{B}_{\varpi_k} \bar{u}_k + \tilde{F}_{\varpi_k} \bar{w}_k \right)^\top \mathcal{E}_{\varpi_k}(P) \tilde{F}_{\varpi_k} \bar{w}_k \right\} \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \left\| \bar{x}_k \right\|_{P_{\varpi_k}}^2 + \left\| K_{\varpi_k, \tilde{w}} \bar{x}_k - \bar{w}_k \right\|_{Y_{\varpi_k|3,3}^{(3)}}^2 - \left\| \bar{x}_k \right\|_{Y_{\varpi_k}^{(1)}}^2 \right\} \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \left\| \bar{x}_k \right\|_{P_{\varpi_k}}^2 + \left\| v_k \right\|_{Y_{\varpi_k|3,3}^{(3)}}^2 - \left\| \bar{z}_k \right\|_{Q_{\varpi_k}}^2 - \left\| \bar{u}_k \right\|_{R_{\varpi_k}}^2 + \theta^2 \left\| \bar{w}_k \right\|_2^2 \right\}
 \end{aligned}$$

其中  $v_k = K_{\varpi_k, \tilde{w}} \bar{x}_k - \bar{w}_k$ , 由于在反馈控制律  $u_k = K_{\varpi_k, u} \tilde{x}_k$  下系统(4-33)闭环稳定, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \left\| \bar{x}_k \right\|_{P_{\varpi_k}}^2 \mid \bar{x}_{k_0}, \varpi_{k_0} \right\} = 0 \tag{4-50}$$

且系统处于零初始条件下, 则

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0}^{\kappa} \mathbb{E} \left\{ \left\| \bar{x}_{k+1} \right\|_{P_{\varpi_{k+1}}}^2 - \left\| \bar{x}_k \right\|_{P_{\varpi_k}}^2 \right\} = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \left\| \bar{x}_{\kappa} \right\|_{P_{\varpi_{\kappa}}}^2 - \left\| \bar{x}_{k_0} \right\|_{P_{\varpi_{k_0}}}^2 \right\} = 0 \tag{4-51}$$

则将(4-51)代入(4-50)得

$$\mathbb{E} \left\{ \sum_{k_0}^{\infty} \left( \|\bar{z}_k\|_{Q_{\sigma_k}}^2 + \|\bar{u}_k\|_{R_{\sigma_k}}^2 \right) \right\} = \mathbb{E} \left\{ \sum_{k_0}^{\infty} \left( \theta^2 \|\bar{w}_k\|_2^2 - \|\nu_k\|_{\gamma_{\sigma_k|3,3}^{(3)}}^2 \right) \right\} \leq \theta^2 \sum_{k_0}^{\infty} \|\bar{w}_k\|_2^2 \quad (4-52)$$

(4-37)中第二个等式到第三个等式的关键在于

$$\begin{aligned} & \left\| K_{\sigma_k, \tilde{w}} \bar{x}_k - \bar{w}_k \right\|_{\gamma_{\sigma_k|3,3}^{(3)}}^2 - \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Upsilon_{\sigma_k|1,1}^{(1)} & \Upsilon_{\sigma_k|1,2}^{(1)} & \Upsilon_{\sigma_k|1,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{\sigma_k|2,1}^{(1)} & \Upsilon_{\sigma_k|2,2}^{(1)} & \Upsilon_{\sigma_k|2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{\sigma_k|3,1}^{(3)} & \Upsilon_{\sigma_k|3,2}^{(3)} & \Upsilon_{\sigma_k|3,3}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ K_{\sigma_k, \tilde{w}} \bar{x}_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Upsilon_{\sigma_k|1,1}^{(1)} & \Upsilon_{\sigma_k|1,2}^{(1)} & \Upsilon_{\sigma_k|1,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{\sigma_k|2,1}^{(1)} & \Upsilon_{\sigma_k|2,2}^{(1)} & \Upsilon_{\sigma_k|2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{\sigma_k|3,1}^{(3)} & \Upsilon_{\sigma_k|3,2}^{(3)} & \Upsilon_{\sigma_k|3,3}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ K_{\sigma_k, \tilde{w}} \bar{x}_k \end{bmatrix} \\ & = -\bar{x}_k^\top K_{\sigma_k, \tilde{w}}^\top \Upsilon_{\sigma_k|3,3}^{(3)} \bar{w}_k - \bar{w}_k^\top \Upsilon_{\sigma_k|3,3}^{(3)} K_{\sigma_k, \tilde{w}} \bar{x}_k \\ & - \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Upsilon_{\sigma_k|1,3}^{(3)} \\ 0 & 0 & \Upsilon_{\sigma_k|2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{\sigma_k|3,1}^{(3)} & \Upsilon_{\sigma_k|3,2}^{(3)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \end{bmatrix} \\ & = \left( \Upsilon_{\sigma_k|3,1}^{(3)} \bar{x}_k + \Upsilon_{\sigma_k|3,2}^{(3)} \bar{u}_k \right) \Upsilon_{\sigma_k|3,3}^{(3)} \bar{w}_k + \bar{w}_k^\top \left( \Upsilon_{\sigma_k|3,1}^{(3)} \bar{x}_k + \Upsilon_{\sigma_k|3,2}^{(3)} \bar{u}_k \right) \\ & - \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Upsilon_{\sigma_k|1,3}^{(3)} \\ 0 & 0 & \Upsilon_{\sigma_k|2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{\sigma_k|3,1}^{(3)} & \Upsilon_{\sigma_k|3,2}^{(3)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \end{bmatrix} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (4-53)$$

#### 4.4 GCARE 求解

本小节讨论 GCARE(4-38)以及(4-43)唯一镇定解的求解问题，可以发现 GCARE(4-38)和(4-43)在结构上是类似的，因此我们下面主要分析 TP 已知和未知两种情况下(4-38)唯一镇定解的求解问题。

##### 4.4.1 TP 已知 GCARE 求解

在本文的第 3.3 小节中，我们提出 Kleinman 迭代算法用于迭代求解 CARE(3-26)。对于 GCARE(4-38)，Kleinman 迭代算法依然适用，但是其收敛性难以证明。我们尝试使用 Newton-Kantorovich 定理证明 Kleinman 迭代算法的收敛性。

**定理 4.3 (Kleinman 算法):** GCARE(4-38)存在唯一镇定解  $P$  时，给定镇定控制器  $K_u^{(l)} = (K_{1,u}^{(l)}, \dots, K_{N,u}^{(l)})$  与  $K_{\tilde{w}}^{(l)} = (K_{1,\tilde{w}}^{(l)}, \dots, K_{N,\tilde{w}}^{(l)})$ ，若  $P^{(l)} = (P_1^{(l)}, \dots, P_N^{(l)})$  是下列 CLE 的唯一镇定解：

$$\begin{bmatrix} \gamma \|\Gamma_1^{(l)}\|_{\mathcal{E}_1(P^{(l)})}^2 - P_1^{(l)} + \|K_1^{(l)}\|_{\Gamma_1^{(l)}}^2 \\ \vdots \\ \gamma \|\Gamma_N^{(l)}\|_{\mathcal{E}_N(P^{(l)})}^2 - P_N^{(l)} + \|K_N^{(l)}\|_{\Gamma_N^{(l)}}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4-54)$$

其中  $\Gamma_i^{(l)} = \gamma^{1/2}(\tilde{A}_i + \tilde{B}_i K_{i,u}^{(l)} + \tilde{F}_i K_{i,\tilde{w}}^{(l)})$ ,  $K_i^{(l)} = [I \quad K_{i,u}^{(l)\top} \quad K_{i,\tilde{w}}^{(l)\top}]^\top$ 。那么基于  $P^{(l)}$  可以进一步给出

$$\begin{bmatrix} K_{i,u}^{(l+1)} \\ K_{i,\tilde{w}}^{(l+1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,2}^{(3,l)} & \Upsilon_{i2,3}^{(3,l)} \\ \Upsilon_{i3,2}^{(3,l)} & \Upsilon_{i3,3}^{(3,l)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,1}^{(3,l)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3,l)} \end{bmatrix} \quad (4-55)$$

若选择镇定控制器  $K_u^{(l)} = (K_{1,u}^{(l)}, \dots, K_{N,u}^{(l)})$  与  $K_{\tilde{w}}^{(l)} = (K_{1,\tilde{w}}^{(l)}, \dots, K_{N,\tilde{w}}^{(l)})$  进行初始迭代, 则  $\lim_{l \rightarrow \infty} P^{(l)} = P$ 。

**证明:** 将 GCARE(4-26)定义为等价的非线性算子:

$$\mathcal{F}(P) = [\mathcal{F}_1(P) \quad \mathcal{F}_2(P) \quad \dots \quad \mathcal{F}_N(P)]^\top \quad (4-56)$$

其中  $\mathcal{F}_i(P)$  为:

$$\mathcal{F}_i(P) = \Upsilon_{i1,1}^{(3)} - P_i - \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,1}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,2}^{(3)} & \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,2}^{(3)} & \Upsilon_{i3,3}^{(3)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,1}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (4-57)$$

显然  $\mathcal{F}(P)$  的零点就是 GCARE(4-38)的解。定义牛顿迭代序列为:

$$P^{(l+1)} = P^{(l)} - \{\dot{\mathcal{F}}(P^{(l)})\}^{-1} \mathcal{F}(P^{(l)}) \quad (4-58)$$

其中  $\dot{\mathcal{F}}(P^{(l)})$  为  $\mathcal{F}$  在  $P^{(l)}$  处的 Fréchet 导数。下面证明基于  $P^{(l)}$  的牛顿迭代(4-58)与 Kleinman 迭代(4-54)~(4-55)等价。牛顿迭代(4-58)在  $\dot{\mathcal{F}}(P^{(l)})$  可逆时等价于为对(4-59)求解  $P^{(l+1)}$ :

$$\dot{\mathcal{F}}(P^{(l)})P^{(l+1)} - \dot{\mathcal{F}}(P^{(l)})P^{(l)} + \mathcal{F}(P^{(l)}) = \mathbf{0} \quad (4-59)$$

Fréchet 导数通常难以直接计算, 下面引入 Gâteaux 导数便于 Fréchet 导数的计算。

$\mathcal{F}$  在  $P$  处的 Gâteaux 导数  $\dot{\mathcal{F}}_G(P)$ , 定义如下:

$$\mathcal{F}(P + \alpha \mathcal{V}) = \mathcal{F}(P) + \alpha \dot{\mathcal{F}}_G(P) \mathcal{V} + o(\alpha), \|\mathcal{V}\| = 1 \quad (4-60)$$

其中,  $\alpha$  为零点的某个邻域内的任意实数,  $o(\alpha)$  为  $\alpha$  的高阶无穷小, 则  $\mathcal{F}$  在  $P$  处的 Gâteaux 导数可直接通过下式表达:

$$\dot{\mathcal{F}}_G(P) \mathcal{V} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(P + \alpha \mathcal{V}) - \mathcal{F}(P)}{\alpha} \quad (4-61)$$

关于 Fréchet 导数与 Gâteaux 导数的关系有: 如果  $\mathcal{F}$  在  $P$  的某个邻域内 Gâteaux 导数存在, 且  $\mathcal{F}$  在  $P$  处的 Gâteaux 导数  $\dot{\mathcal{F}}_G(P)$  连续, 那么  $\mathcal{F}$  在  $P$  处的 Gâteaux 导数

$\dot{\mathcal{F}}_G(P)$  等于  $\mathcal{F}$  在  $P$  处的 Fréchet 导数  $\dot{\mathcal{F}}(P)$ ，后续推导将 Fréchet 导数与 Gâteaux 导数都表示为  $\dot{\mathcal{F}}(P)$ 。考察  $\mathcal{F}_i(P)$  及其 Gâteaux 导数  $\dot{\mathcal{F}}_i(P)$ ，对于增量  $\alpha\mathcal{V}$  有：

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{F}_i(P + \alpha\mathcal{V}) \\
 &= \tilde{C}_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(P + \alpha\mathcal{V}) \tilde{A}_i - (P_i + \alpha\mathcal{V}_i) - \left\{ \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,1}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} \end{bmatrix} + \alpha\gamma \begin{bmatrix} \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(\mathcal{V}) \tilde{A}_i \\ \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(\mathcal{V}) \tilde{A}_i \end{bmatrix} \right\}^\top \\
 & \times \left\{ \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,2}^{(3)} & \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,2}^{(3)} & \Upsilon_{i3,3}^{(3)} \end{bmatrix} + \alpha\gamma \left\| \begin{bmatrix} \tilde{B}_i & \tilde{F}_i \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{E}_i(\mathcal{V})}^2 \right\}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,1}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} \end{bmatrix} + \alpha\gamma \begin{bmatrix} \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(\mathcal{V}) \tilde{A}_i \\ \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(\mathcal{V}) \tilde{A}_i \end{bmatrix} \right\} \\
 &= \Upsilon_{i1,1}^{(3)} - P_i + \alpha\gamma \left\| \tilde{A}_i \right\|_{\mathcal{E}_i(\mathcal{V})}^2 - \alpha\mathcal{V}_i - \left\| \mathcal{G}_{i,1}(\alpha, P, \mathcal{V}) \right\|_{\{\mathcal{G}_{i,2}(\alpha, P, \mathcal{V})\}^{-1}}^2
 \end{aligned} \tag{4-62}$$

其中，

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{i,1}(\alpha, P, \mathcal{V}) = \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,1}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} \end{bmatrix} + \alpha\gamma \begin{bmatrix} \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(\mathcal{V}) \tilde{A}_i \\ \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(\mathcal{V}) \tilde{A}_i \end{bmatrix} \\ \mathcal{G}_{i,2}(\alpha, P, \mathcal{V}) = \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,2}^{(3)} & \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,2}^{(3)} & \Upsilon_{i3,3}^{(3)} \end{bmatrix} + \alpha\gamma \left\| \begin{bmatrix} \tilde{B}_i & \tilde{F}_i \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{E}_i(\mathcal{V})}^2 \end{cases} \tag{4-63}$$

求  $\mathcal{G}_{i,1}(\alpha, P, \mathcal{V})$  与  $\mathcal{G}_{i,2}(\alpha, P, \mathcal{V})$  在  $\alpha = 0$  时的值以及对  $\alpha$  的偏导数，有

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{i,1}(0, P, \mathcal{V}) = \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,1}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3)} \end{bmatrix} \\ \mathcal{G}_{i,2}(0, P, \mathcal{V}) = \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,2}^{(3)} & \Upsilon_{i2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i3,2}^{(3)} & \Upsilon_{i3,3}^{(3)} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{4-64}$$

以及

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \mathcal{G}_{i,1}(\alpha, P, \mathcal{V})}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathcal{G}_{i,1}(\alpha, P, \mathcal{V}) - \mathcal{G}_{i,1}(0, P, \mathcal{V})}{\alpha} = \gamma \begin{bmatrix} \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i(\mathcal{V}) \tilde{A}_i \\ \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i(\mathcal{V}) \tilde{A}_i \end{bmatrix} \\ \left. \frac{\partial \mathcal{G}_{i,2}(\alpha, P, \mathcal{V})}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathcal{G}_{i,2}(\alpha, P, \mathcal{V}) - \mathcal{G}_{i,2}(0, P, \mathcal{V})}{\alpha} = \left\| \begin{bmatrix} \tilde{B}_i & \tilde{F}_i \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{E}_i(\mathcal{V})}^2 \end{cases} \tag{4-65}$$

以及  $\{\mathcal{G}_{i,2}(\alpha, P, \mathcal{V})\}^{-1}$  对  $\alpha$  的偏导数为

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{\partial \{\mathcal{G}_{i,2}(\alpha, P, \mathcal{V})\}^{-1}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \\
 &= -\{\mathcal{G}_{i,2}^\top(0, P, \mathcal{V})\}^{-1} \left. \frac{\partial \mathcal{G}_{i,2}(\alpha, P, \mathcal{V})}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \{\mathcal{G}_{i,2}(0, P, \mathcal{V})\}^{-1} \\
 &= -\left\| \{\mathcal{G}_{i,2}(0, P, \mathcal{V})\}^{-1} \right\|_{\left. \frac{\partial \mathcal{G}_{i,2}(\alpha, P, \mathcal{V})}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}}^2
 \end{aligned} \tag{4-66}$$



计算  $\dot{\mathcal{F}}_i(P)\mathcal{V}$  得到

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{F}}_i(P)\mathcal{V} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}_i(P + \alpha\mathcal{V}) - \mathcal{F}_i(P)}{\alpha} \\
 &= \gamma \left\| \tilde{A}_i \right\|_{\mathcal{E}_i(\mathcal{V})}^2 - \mathcal{V}_i - \frac{\partial \left\| \mathcal{G}_{i,1}(\alpha, P, \mathcal{V}) \right\|_{\{\mathcal{G}_{i,2}(\alpha, P, \mathcal{V})\}^{-1}}^2}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \\
 &= \gamma \left\| \tilde{A}_i \right\|_{\mathcal{E}_i(\mathcal{V})}^2 - \mathcal{V}_i - \frac{d\mathcal{G}_{i,1}^\top(\alpha, P, \mathcal{V})}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \mathcal{G}_{i,2}^{-1}(0, P, \mathcal{V}) \mathcal{G}_{i,1}(0, P, \mathcal{V}) \\
 &\quad + \left\| \mathcal{G}_{i,2}^{-1}(0, P, \mathcal{V}) \mathcal{G}_{i,1}(0, P, \mathcal{V}) \right\|_{\frac{\partial \mathcal{G}_{i,2}(\alpha, P, \mathcal{V})}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}}^2 \\
 &\quad - \mathcal{G}_{i,1}^\top(0, P, \mathcal{V}) \mathcal{G}_{i,2}^{-1}(0, P, \mathcal{V}) \frac{d\mathcal{G}_{i,1}(\alpha, P, \mathcal{V})}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}
 \end{aligned} \tag{4-67}$$

同时我们观察到

$$\begin{bmatrix} K_{i,u} \\ K_{i,\tilde{w}} \end{bmatrix} = -\{\mathcal{G}_{i,2}(0, P, \mathcal{V})\}^{-1} \mathcal{G}_{i,1}(0, P, \mathcal{V}) \tag{4-68}$$

将代入(4-62)~(4-66)以及(4-68)代入(4-67)得:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{F}}_i(P)\mathcal{V} &= \gamma \left\| \tilde{A}_i \right\|_{\mathcal{E}_i(\mathcal{V})}^2 + \gamma \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(\mathcal{V}) (\tilde{B}_i K_{i,u} + \tilde{F}_i K_{i,\tilde{w}}) \\
 &\quad + \gamma (\tilde{B}_i K_{i,u} + \tilde{F}_i K_{i,\tilde{w}})^\top \mathcal{E}_i(\mathcal{V}) \tilde{A}_i + \gamma \left\| \tilde{B}_i K_{i,u} + \tilde{F}_i K_{i,\tilde{w}} \right\|_{\mathcal{E}_i(\mathcal{V})}^2 - \mathcal{V}_i \\
 &= \left\| \Gamma_i \right\|_{\mathcal{E}_i(\mathcal{V})}^2 - \mathcal{V}_i
 \end{aligned} \tag{4-69}$$

其中  $\Gamma_i = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i K_{i,u} + \tilde{F}_i K_{i,\tilde{w}}$ 。对于  $\dot{\mathcal{F}}(P)$  很显然有

$$\dot{\mathcal{F}}(P)\mathcal{V} = \begin{bmatrix} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}_1(P + \alpha\mathcal{V}) - \mathcal{F}_1(P)}{\alpha} \\ \vdots \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}_N(P + \alpha\mathcal{V}) - \mathcal{F}_N(P)}{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{F}}_1(P)\mathcal{V} \\ \vdots \\ \dot{\mathcal{F}}_N(P)\mathcal{V} \end{bmatrix} \tag{4-70}$$

将  $P^{(l)}$  作为自变量, 将  $P^{(l)}$  以及  $P^{(l+1)}$  作为增量矩阵  $\mathcal{V}$  代入(4-70)中得

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\mathcal{F}}(P^{(l)})P^{(l)} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{F}}_1(P^{(l)})P^{(l)} \\ \vdots \\ \dot{\mathcal{F}}_N(P^{(l)})P^{(l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\| \Gamma_1^{(l+1)} \right\|_{\mathcal{E}_1(P^{(l)})}^2 - P_1^{(l)} \\ \vdots \\ \left\| \Gamma_N^{(l+1)} \right\|_{\mathcal{E}_N(P^{(l)})}^2 - P_N^{(l)} \end{bmatrix} \\ \dot{\mathcal{F}}(P^{(l)})P^{(l+1)} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{F}}_1(P^{(l)})P^{(l+1)} \\ \vdots \\ \dot{\mathcal{F}}_N(P^{(l)})P^{(l+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\| \Gamma_1^{(l+1)} \right\|_{\mathcal{E}_1(P^{(l+1)})}^2 - P_1^{(l+1)} \\ \vdots \\ \left\| \Gamma_N^{(l+1)} \right\|_{\mathcal{E}_N(P^{(l+1)})}^2 - P_N^{(l+1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \tag{4-71}$$

(4-57)中代入  $P^{(l)}$  并转化为形如(4-32)的 GCARE 闭环控制器形式，即：

$$\mathcal{F}_i(P^{(l)}) = \|\Gamma_i^{(l+1)}\|_{\mathcal{E}_i(P^{(l)})}^2 - P_i^{(l)} + \|K_i^{(l+1)}\|_{\Upsilon_i^{(l)}}^2 \quad (4-72)$$

由  $\mathcal{F}(P) = [\mathcal{F}_1(P) \ \mathcal{F}_2(P) \ \cdots \ \mathcal{F}_N(P)]^\top$  得

$$\mathcal{F}(P^{(l)}) = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1(P^{(l)}) \\ \vdots \\ \mathcal{F}_N(P^{(l)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\Gamma_1^{(l+1)}\|_{\mathcal{E}_1(P^{(l)})}^2 - P_1^{(l)} + \|K_1^{(l+1)}\|_{\Upsilon_1^{(l)}}^2 \\ \vdots \\ \|\Gamma_N^{(l+1)}\|_{\mathcal{E}_N(P^{(l)})}^2 - P_N^{(l)} + \|K_N^{(l+1)}\|_{\Upsilon_N^{(l)}}^2 \end{bmatrix} \quad (4-73)$$

将(4-71)以及(4-73)代入(4-59)中得：

$$\begin{aligned} & \dot{\mathcal{F}}(P^{(l)})P^{(l+1)} - \dot{\mathcal{F}}(P^{(l)})P^{(l)} + \mathcal{F}(P^{(l)}) \\ &= \begin{bmatrix} \|\Gamma_1^{(l+1)}\|_{\mathcal{E}_1(P^{(l+1)})}^2 - P_1^{(l+1)} + \|K_1^{(l+1)}\|_{\Upsilon_1^{(l)}}^2 \\ \vdots \\ \|\Gamma_N^{(l+1)}\|_{\mathcal{E}_N(P^{(l+1)})}^2 - P_N^{(l+1)} + \|K_N^{(l+1)}\|_{\Upsilon_N^{(l)}}^2 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4-74)$$

因此基于  $P^{(l)}$  的牛顿迭代(4-58)与 Kleinman 迭代(4-54)~(4-55)等价，区别在于一个基于解矩阵  $P^{(l)}$  进行迭代，一个基于镇定控制器进行迭代。那么只需要选取满足引理 2.3 Newton-Kantorovich 定理的解矩阵进行初始迭代，就可以保证牛顿迭代序列  $\{P^{(l)}, l=0,1,2,\dots\}$  收敛到 GCARE(4-38)的唯一镇定解。同时，文献[83]指出，镇定控制器所对应的解矩阵  $P^{(l)}$  满足 Newton-Kantorovich 定理。因此选择镇定控制器  $K_u^{(l)} = (K_{1,u}^{(l)}, \dots, K_{N,u}^{(l)})$  与  $K_w^{(l)} = (K_{1,w}^{(l)}, \dots, K_{N,w}^{(l)})$  进行初始迭代，则  $\lim_{l \rightarrow \infty} P^{(l)} = P$ 。

下面给出定理 4.3 Kleinman 算法的伪代码：

表 4 - 1 Kleinman 算法求解 GCARE  
Table 4-1. Kleinman Algorithm for Solving CARE

算法 4.1 Kleinman 算法求解 GCARE
<b>输入：</b> 权重矩阵 $Q$ 、 $R$ 、衰减因子 $\gamma$ 、收敛阈值 $\varepsilon$ 、初始解矩阵 $P^{(0)}$ 、镇定控制器 $K_u^{(0)}$ 、初始噪声增益 $K_w^{(0)}$
<b>输出：</b> 近似镇定解 $P^*$ 、 $H_\infty$ 控制器 $K_u^*$ 、最坏噪声 $K_w^*$
1. 定义 $l=0$ ；
2. 对于给定的控制器 $K_u^{(l)}$ 、 $K_w^{(l)}$ ，基于(4-54)求解 $P^{(l)}$ ；
3. 利用 $P^{(l)}$ ，使用(4-55)得到 $K_u^{(l+1)}$ 、 $K_w^{(l+1)}$ ；
4. 判断是否 $\ P^{(l)} - P^{(l+1)}\  \leq \varepsilon$ ，是则进入步骤 6，否则进入步骤 5；
5. 令 $l=l+1$ ，返回步骤 1；
6. 输出近似镇定解 $P^* = P^{(l)}$ ， $K_u^* = K_u^{(l)}$ ， $K_w^* = K_w^{(l)}$ ；

**注 4.2:** 算法 4.1 中, 初始输入所需的镇定控制器  $K_u^{(0)}$  可以通过文献[84]提出的 LMI 算法求解获得,  $K_w^{(0)}$  选取零矩阵即可。此外, 步骤 2 中(4-22)的解  $P^{(l)}$  可以使用引理 2.1 中的(2-11)以及(2-12)获得。

#### 4.4.2 TP 未知 GCARE 求解

根据定理 4.3, 本文提出了一种基于初始镇定控制器进行迭代求解 CARE (4-25) 的 Kleinman 算法, 该算法可以收敛到 CARE (4-38)的唯一镇定解  $P^*$ 。然而, Kleinman 算法的求解需要 TP, 为了摆脱这样一个理想的假设, 我们将尝试在 TP 未知的情况下求解 CARE (4-38)。文献[72]提出一种 TD( $\lambda$ )算法用于求解 TP 未知时的 GCARE, 其核心思想在于求解  $\mathcal{E}(P) = (\mathcal{E}_1(P), \dots, \mathcal{E}_N(P))$  而不是  $P = (P_1, \dots, P_N)$ , 从而克服了 TP 未知的困难。受文献[72]的启发, 我们提出 TD( $\lambda$ )算法用于求解未知 TP 时的 GCARE (4-38)。定义  $\mathcal{E}^{(l)} = \mathcal{E}(P^{(l)})$ , 若 GCARE(4-38)存在唯一镇定解  $P$ ,  $P$  对应的  $\mathcal{E}(P)$  可表示为  $\mathcal{E}$ 。

**定理 4.4 (TD( $\lambda$ ) 算法)<sup>[72]</sup>:** GCARE(4-38)存在唯一镇定解  $P$  时, 给定解矩阵  $\mathcal{E}^{(l)} = (\mathcal{E}_1^{(l)}, \dots, \mathcal{E}_N^{(l)})$  与镇定控制器选择镇定控制器  $K_u^{(l)} = (K_{1,u}^{(l)}, \dots, K_{N,u}^{(l)})$  与  $K_w^{(l)} = (K_{1,w}^{(l)}, \dots, K_{N,w}^{(l)})$ , 使用(4-75)迭代求解  $\mathcal{E}_i^{(l+1)}$ :

$$\mathcal{E}_i^{(l+1)} = \mathcal{E}_i^{(l)} + \mu_l \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathcal{T}_i(l, k, \mathcal{E}^{(l)}) \quad (4-75)$$

其中  $l$  代表第  $l$  幕,  $k$  表示每幕中的第  $k$  步,  $\lambda$  是给定的超参数用于指定回报权重,  $\mu$  是迭代步长满足:

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \mu_l = \infty \\ \sum_{l=0}^{\infty} \mu_l^2 < \infty \end{cases} \quad (4-76)$$

此外时序差分  $\mathcal{T}_i(l, k, \mathcal{E}^{(l)})$  定义为:

$$\mathcal{T}_i(l, k, \mathcal{E}^{(l)}) = \Lambda_i^{(l,k)\top} \left\{ \left\| \Gamma_{\varpi_{l,k+1}}^{(l)} \right\|_{\mathcal{E}^{(l)}}^2 - \mathcal{E}_{\varpi_{l,k}}^{(l)} + \left\| K_{\varpi_{l,k+1}}^{(l)} \right\|_{Y_{\varpi_{l,k+1}}^{(1)}}^2 \right\} \Lambda_i^{(l,k)} \quad (4-77)$$

其中  $\varpi_{l,k}$  表示第  $l$  幕第  $k$  步的模式, 闭环控制器  $\Gamma_i^{(l)} = \gamma^{1/2}(\tilde{A}_i + \tilde{B}_i K_{i,u}^{(l)} + \tilde{F}_i K_{i,w}^{(l)})$ ,

$K_i^{(l)} = \begin{bmatrix} I & K_{i,u}^{(l)\top} & K_{i,w}^{(l)\top} \end{bmatrix}^\top$ , 且

$$\Lambda_i^{(l,k)} = \begin{cases} I & , k = 0 \\ \Gamma_{\varpi_{l,k}}^{(l)} \Lambda_i^{(l,k-1)} & , k > 0 \end{cases} \quad (4-78)$$

基于  $K_{i,u}^{(l)}$ 、 $K_{i,w}^{(l)}$  与  $\mathcal{E}_i^{(l)}$  求解得到  $\mathcal{E}_i^{(l+1)}$  后, 可以利用  $\mathcal{E}_i^{(l+1)}$  可以进一步给出:

$$\begin{bmatrix} K_{i,u}^{(l+1)} \\ K_{i,w}^{(l+1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,2}^{(3,l+1)} & \Upsilon_{i2,3}^{(3,l+1)} \\ \Upsilon_{i3,2}^{(3,l+1)} & \Upsilon_{i3,3}^{(3,l+1)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Upsilon_{i2,1}^{(3,l+1)} \\ \Upsilon_{i3,1}^{(3,l+1)} \end{bmatrix} \quad (4-79)$$

若选择镇定控制器  $K_u^{(0)}$  与  $K_w^{(0)}$  进行初始迭代, 则  $\lim_{l \rightarrow \infty} \mathcal{E}^{(l)} = \mathcal{E}$ 。

定义  $\mathbf{E} = \{0, 1, \dots, \mathbf{e}\}$  表示  $\mathbf{e}$  幕训练数据,  $\mathbf{S} = \{0, 1, \dots, \mathbf{s}\}$  表示每一幕的  $\mathbf{s}$  步, 假设我们具有数量充足的模态序列  $\mathbf{M} = \{\varpi_{l,k} \in \mathcal{N}, (l, k) \in \mathbf{E} \times \mathbf{S}\}$ 。下面给出定理 4.4 TD ( $\lambda$ ) 算法的伪代码:

表 4 - 2 TD( $\lambda$ ) 算法求解 GCARE  
Table 4-2. TD( $\lambda$ ) Algorithm for Solving GCARE

算法 4.2 TD( $\lambda$ ) 算法求解 GCARE
<b>输入:</b> 系统参数矩阵、权重矩阵 $Q$ 和 $R$ 、衰减因子 $\gamma$ 、初始解矩阵 $\mathcal{E}^{(0)}$ 、镇定控制器 $K_u^{(0)}$ 、初始噪声增益 $K_w^{(0)}$ 、模态序列 $\mathbf{M}$ 、回报权重 $\lambda$ 、迭代步长 $\mu$ <b>输出:</b> 近似镇定解 $\mathcal{E}^*$ 、 $H_\infty$ 控制器 $K_u^*$ 、最坏噪声 $K_w^*$
1. 定义 $l = 0$ ; 2. 定义 $k = 0$ ; 3. 基于给定的 $\mathcal{E}^{(l)}$ 与 $K_u^{(l)}$ 、 $K_w^{(l)}$ , 使用(4-77)计算时序差分 $\mathcal{T}_i(l, k, \mathcal{E}^{(l)})$ ; 4. 判断 $k$ 是否小于 $\mathbf{s}$ , 是则进入步骤 5, 否则进入步骤 6; 5. 令 $k = k + 1$ , 返回步骤 3; 6. 利用步骤 3 计算的时序差分 $\mathcal{T}_i(l, k, \mathcal{E}^{(l)})$ , 基于(4-63)求解 $\mathcal{E}^{(l+1)}$ ; 7. 利用 $\mathcal{E}^{(l+1)}$ , 使用(4-79)得到 $S_u^{(l+1)}$ ; 8. 判断 $l$ 是否小于 $\mathbf{e}$ , 是则进入步骤 9, 否则进入步骤 10; 9. 令 $l = l + 1$ , 返回步骤 2; 10. 输出近似镇定解 $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}^{(l)}$ , $K_u^* = K_u^{(l)}$ , $K_w^* = K_w^{(l)}$ ;

**注 4.3:** 算法 4.2 中, 初始输入所需的镇定控制器  $K_u^{(0)}$  可以通过文献[84]提出的 LMI 算法求解获得,  $K_w^{(0)}$  选取零矩阵即可。

## 4.5 仿真

在前文中, 我们针对无限时域下 MJS 的  $H_\infty$  问题进行了求解与算法设计, 采用第三节提出的直流电机模型<sup>[85]</sup>进行仿真, 并验证本文提出理论的正确性与有效性。仿真使用的部分系统参数与第三章相同, 其余参数设置为:

$$\begin{aligned}
 E_i &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.05 & 0 \end{bmatrix}, F_i = \begin{bmatrix} 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 G_i &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 H_i &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.10 \quad 0.15]
 \end{aligned} \tag{4-80}$$

参考系统参数为:

$$\begin{aligned}
 \hat{F} &= \begin{bmatrix} 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \hat{E} &= \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \hat{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4-81}$$

权重矩阵  $Q=10I$  ,  $R=0.5I$  , 衰减因子  $\gamma=0.99$  , 滤波  $L_2$  增益  $\vartheta=15$  , 控制  $L_2$  增益  $\theta=22.35$  。选取初始噪声增益  $K_w^{(0)}=\mathbf{0}$  , 初始镇定控制器  $K_u^{(0)}$  为:

$$\begin{aligned}
 K_{1,u}^{(0)} &= [0.231 \quad -0.850 \quad 0.050 \quad 0.050 \quad 0.050 \quad 0.050] \\
 K_{2,u}^{(0)} &= [0.201 \quad -1.502 \quad 0.100 \quad 0.050 \quad 0.000 \quad 0.100] \\
 K_{3,u}^{(0)} &= [0.100 \quad -0.998 \quad 0.100 \quad 0.150 \quad 0.130 \quad 0.120]
 \end{aligned} \tag{4-82}$$

首先, 基于以上参数, 使用算法 4.1 求解 GCARE(4-38)。算法 4.1 经过 5 次迭代后, 解矩阵和控制器收敛。限于篇幅, 本文不展示解矩阵  $P^*$  的值, 控制器  $K_u^*$  的值为:

$$\begin{aligned}
 K_{1,u}^* &= [0.1960 \quad -0.9205 \quad 0.0321 \quad 0.0390 \quad 0.0357 \quad 0.0383] \\
 K_{2,u}^* &= [0.1706 \quad -0.9860 \quad 0.0237 \quad 0.0686 \quad 0.0621 \quad 0.0697] \\
 K_{3,u}^* &= [0.0804 \quad -1.4825 \quad 0.0021 \quad 0.2128 \quad 0.1893 \quad 0.2082]
 \end{aligned} \tag{4-83}$$

图 4.1 与图 4.2 给出了  $P^{(l)}$  与  $K_u^{(l)}$  的收敛过程,

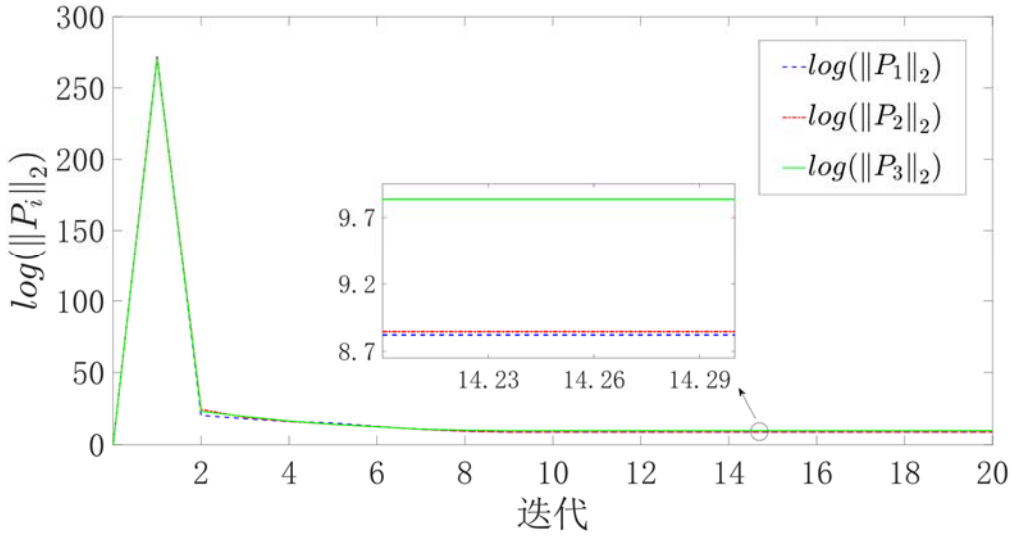


图 4 - 1 算法 4.1 解矩阵收敛过程

Figure 4 - 1. Algorithm 4.1 Solution Matrix Convergence Process

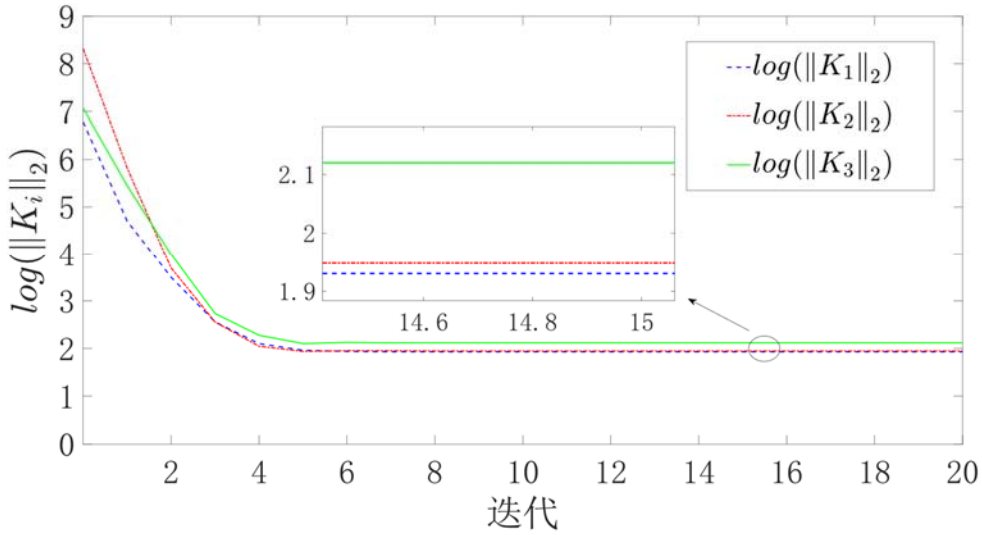


图 4 - 2 算法 4.1 控制器收敛过程

Figure 4 - 2. Algorithm 4.1 Controller Convergence Process

TP未知时，我们使用以下参数进行算法4.2的迭代求解：迭代幕数  $\mathbf{e} = 50$ ，每幕步数  $\mathbf{s} = 100$ ，回报权重  $\lambda = 0.10$ ，迭代步长  $\mu = 1/l$ 。此外，选取初始解矩阵  $\mathcal{E}^{(0)} = \mathbf{0}$ 、镇定控制器  $K_u^{(0)}$  与(4-82)相同。算法4.2经过25次迭代后，解矩阵和控制器收敛，其中解矩阵  $\mathcal{E}^*$  的值限于篇幅，本文没有展示，控制器  $K_u^{*,TD}$  的值为：

$$\begin{aligned} K_{1,u}^{*,TD} &= [0.1977 \quad -0.9211 \quad 0.0348 \quad 0.0377 \quad 0.0345 \quad 0.0370] \\ K_{2,u}^{*,TD} &= [0.1714 \quad -0.9914 \quad 0.0261 \quad 0.0703 \quad 0.0638 \quad 0.0691] \\ K_{3,u}^{*,TD} &= [0.0904 \quad -1.4905 \quad 0.0009 \quad 0.2091 \quad 0.1864 \quad 0.2049] \end{aligned} \quad (4-84)$$

图 3.3 与图 3.4 给出了  $\mathcal{E}^*$  与  $S_u^{*,TD}$  的收敛过程，

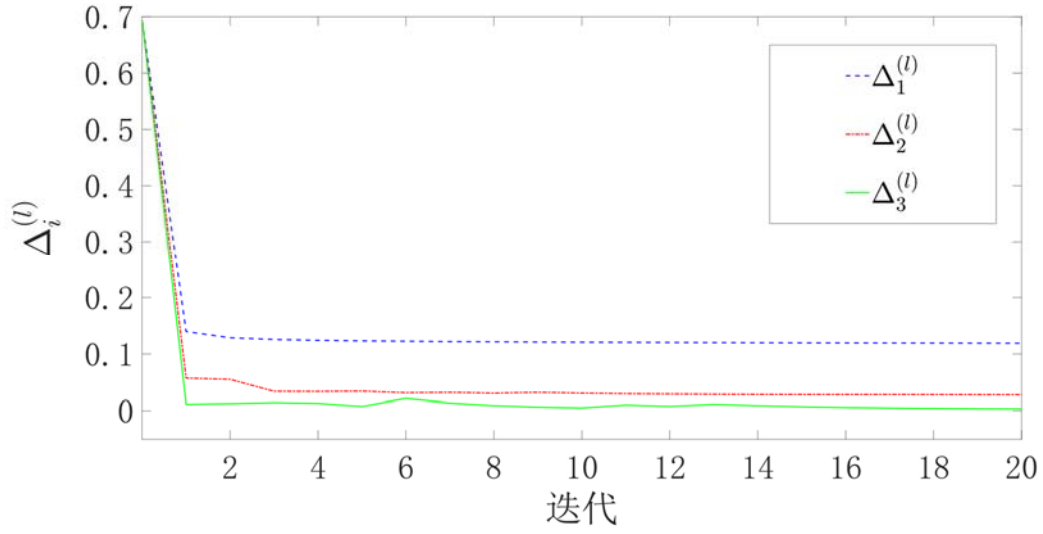


图 4 - 3 算法 4.2 解矩阵收敛过程

Figure 4 - 3. Algorithm 4.2 Solution Matrix Convergence Process

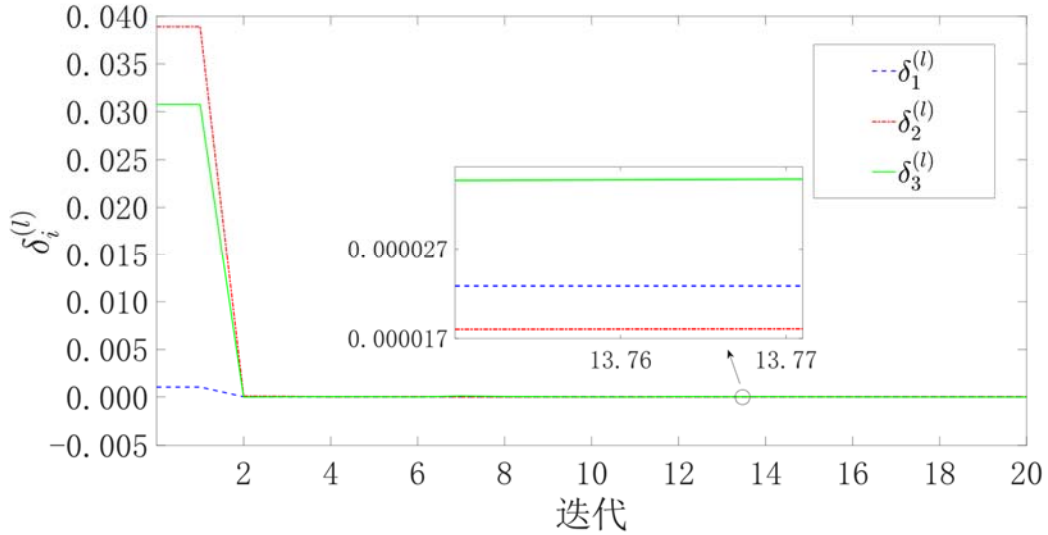


图 4 - 4 算法 4.2 控制器收敛过程

Figure 4 - 4. Algorithm 4.2 Controller Convergence Process

利用算法 4.1 以及 4.2 我们同样可以求得  $H_\infty$  滤波问题对应的 GCARE(4-43)及其  $H_\infty$  滤波器，本文不做讨论，仅给出相关结果。选取初始噪声增益  $L_w^{(0)} = \mathbf{0}$ ，初始镇定滤波器  $L_y^{(0)}$  为：

$$\begin{aligned}
L_{1,\bar{y}}^{(0)} &= \begin{bmatrix} -0.03 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & -13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0 & -0.3 & 0.2 \end{bmatrix}, L_{2,\bar{y}}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.7 & -8 & 0 & 0 \\ 0.2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0 & -0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \\
L_{3,\bar{y}}^{(0)} &= \begin{bmatrix} -0.3 & -0.8 & 0 & 0 \\ 0.2 & -2 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0 & -0.3 & 0.2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4-85}$$

使用算法 4.1 求解 GCARE(4-43)。算法 4.1 经过 5 次迭代后，解矩阵和滤波器收敛。限于篇幅，本文不展示解矩阵  $P^*$  的值，滤波器  $L_{\bar{y}}^*$  的值为：

$$\begin{aligned}
L_{1,\bar{y}}^* &= \begin{bmatrix} -0.022 & -4.712 & 0 & 0 \\ 1.111 & -13.185 & 0 & 0 \\ -0.054 & -0.010 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.487 & 0.068 \\ 0 & 0 & -0.034 & -0.425 \\ 0 & 0 & -0.300 & 0.184 \end{bmatrix} \\
L_{2,\bar{y}}^* &= \begin{bmatrix} 0.730 & -8.557 & 0 & 0 \\ 0.272 & -2.831 & 0 & 0 \\ -0.037 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.487 & 0.068 \\ 0 & 0 & -0.034 & -0.425 \\ 0 & 0 & -0.300 & 0.184 \end{bmatrix} \\
L_{3,\bar{y}}^* &= \begin{bmatrix} -0.342 & -0.826 & 0 & 0 \\ 0.166 & -2.206 & 0 & 0 \\ -0.189 & -0.004 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.487 & 0.068 \\ 0 & 0 & -0.034 & -0.425 \\ 0 & 0 & -0.300 & 0.184 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4-86}$$

TP未知时，我们使用以下参数进行算法4.2的迭代求解：迭代幕数  $\mathbf{e} = 50$ ，每幕步数  $\mathbf{s} = 100$ ，回报权重  $\lambda = 0.10$ ，迭代步长  $\mu = 1/l$ 。此外，选取初始解矩阵  $\mathcal{E}^{(0)} = \mathbf{0}$ 、镇定滤波器  $L_{\bar{y}}^{(0)}$  与(4-73)相同。算法4.2经过40次迭代后，解矩阵和控制



器收敛，其中解矩阵  $\mathcal{E}^*$  的值限于篇幅，本文没有展示，滤波器  $L_{\bar{y}}^{*,TD}$  的值为：

$$\begin{aligned}
 L_{1,\bar{y}}^{*,TD} &= \begin{bmatrix} -0.289 & -4.532 & 0 & 0 \\ 0.294 & -12.637 & 0 & 0 \\ -0.038 & -0.021 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.461 & 0.052 \\ 0 & 0 & -0.047 & -0.416 \\ 0 & 0 & -0.082 & 0.052 \end{bmatrix} \\
 L_{2,\bar{y}}^{*,TD} &= \begin{bmatrix} 0.764 & -8.608 & 0 & 0 \\ 0.283 & -2.831 & 0 & 0 \\ -0.040 & 0.002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.461 & 0.052 \\ 0 & 0 & -0.048 & -0.416 \\ 0 & 0 & -0.078 & 0.051 \end{bmatrix} \\
 L_{3,\bar{y}}^{*,TD} &= \begin{bmatrix} -0.345 & -0.818 & 0 & 0 \\ 0.156 & -2.182 & 0 & 0 \\ -0.188 & -0.005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.460 & 0.052 \\ 0 & 0 & -0.005 & -0.416 \\ 0 & 0 & -0.076 & 0.050 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4-87}$$

下面考察算法 4.1 和算法 4.2 求得的控制(4-83)、(4-84)以及滤波器(4-86)、(4-87)的控制估计效果。选取初始状态为  $\tilde{x}_{k_0} = [0 \ 0 \ 0 \ 20 \ -30 \ 20]^\top$ ，初始状态估计为  $\hat{x}_0 = \mathbf{0}$ ，系统噪声为均值为 0，方差为 0.005 的高斯噪声。图 4.5 展示了使用滤波器(4-86)、(4-87)进行状态估计并在控制器(4-83)、(4-84)作用下的跟踪控制效果，可以发现其能够较好的跟踪参考轨迹且两个控制器的控制效果相近，这说明我们提出的 GCARE 及其求解算法是有效性的。

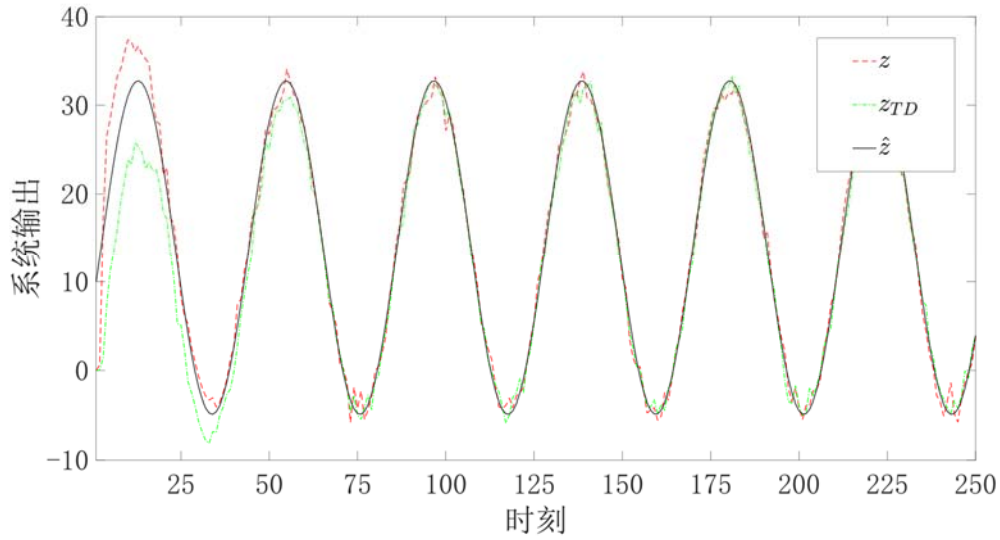


图 4 - 5 跟踪控制过程  
Figure 4 - 5. Tracking control process

#### 4.6 总结

本章研究系统状态可获得但系统状态不可获得时，无限时域下 MJS 的  $H_\infty$  跟踪控制问题，利用博弈论的思想，将二次型性能指标的实现转化为极小极大问题的求解。利用 DP 求解该极小极大问题对应的 GCARE 及  $H_\infty$  跟踪控制器和  $H_\infty$  滤波器。接着，在给定衰减因子下，结合衰减误差跟踪系统讨论 GCARE 解的存在性以及在对  $H_\infty$  跟踪控制器和  $H_\infty$  滤波器下闭环系统的稳定性，给出了 GCARE 唯一镇定解存在的充分必要条件和稳定性证明。此外，考虑 TP 已知以及未知两种情况进行 GCARE 求解问题，基于初始镇定解设计迭代求解算法并证明算法的收敛性。最后，在一个受随机故障影响的直流电机模型上对所提算法进行模拟仿真验证。

## 第五章 结论与展望

### 5.1 结论

本课题深入研究 MJS 的 LQT 控制、 $H_\infty$  控制、 $H_\infty$  滤波等控制估计方法。针对无限时域下 MJS 的跟踪控制问题，考虑不同场景，通过 DP 推导 Riccati 方程及其控制器，同时设计 TP 已知或未知时 Riccati 方程的迭代求解算法，并在数值仿真系统上验证所提方法的有效性与优越性。本文主要研究内容如下：

- 1) 研究系统状态与模态可获得时，无限时域下 MJS 的 LQT 问题。基于被控系统与被跟踪系统，定义跟踪误差与增广状态变量，构造跟踪误差系统。通过 DP 推导得到 LQT 问题对应的 CARE 及 LQT 控制器。结合跟踪误差系统，在给定衰减因子下，讨论 CARE 解的存在性以及对应反馈控制器作用下闭环系统的稳定性。考虑 TP 已知以及未知两种情况进行 CARE 求解，基于初始镇定解设计迭代求解算法并证明算法的收敛性并对所提算法进行模拟仿真验证；
- 2) 研究系统状态模态可获得但系统状态不可获得时，无限时域下 MJS 的  $H_\infty$  跟踪控制问题。基于被控系统与  $H_\infty$  滤波器，定义估计误差与增广状态变量，构造估计误差系统。基于被控系统与被跟踪系统，定义跟踪误差与增广状态变量，构造跟踪误差系统。利用博弈论的思想，将  $L_2$  增益的实现转化为极小极大问题的求解，利用 DP 求解  $H_\infty$  跟踪控制问题以及  $H_\infty$  滤波问题对应的 GCARE 及  $H_\infty$  跟踪控制器和  $H_\infty$  滤波器。在给定衰减因子以及期望的  $L_2$  增益下，讨论 GCARE 解的存在性以及对应  $H_\infty$  跟踪控制器和  $H_\infty$  滤波器下闭环系统的稳定性。考虑 TP 已知以及未知两种情况进行 GCARE 求解，基于初始镇定解设计迭代求解算法并证明算法的收敛性并对所提算法进行模拟仿真验证。

本工作的主要创新点在：

- 1) 引入衰减因子实现对不稳定系统的跟踪控制，使得问题更一般，结果更具普适性；
- 2) 通过 Riccati 方程研究估计与跟踪控制问题，基于 Riccati 方程进行滤波器与控制器的求解，使得滤波器与控制器的存在性和稳定性得到保证；

- 3) 设计 TP 已知以及未知两种情况下的 Riccati 方程求解算法, 解决了 TP 未知时的滤波器、控制器求解难题, 提高了求解速度, 提高了求解精度;

## 5.2 展望

本文研究了 MJS 无限时域下的跟踪控制问题, 并获得了一些研究成果但仍有不少具有挑战性的问题值得进一步研究和探索, 可以从以下几个方面进一步深入研究:

- 1) 本文考虑的被控系统只涉及比较简单的加性噪声扰动, 对于更复杂的情形如乘性噪声、系统不确定性、时滞等问题没有深入研究。同时本文考虑的被控制系统与参考系统是简单的离散线性系统, 但在实际工作时我们处理的大都是连续非线性系统, 这是相当理想的假设。更加复杂的控制难题值得继续研究与探索, 我们应当考虑更一般的问题以面对更恶劣更复杂多变的实际工作环境;
- 2) 本文处理跟踪控制与状态估计的方法主要是 LQT 控制、 $H_\infty$  控制、 $H_\infty$  滤波。但是目前已经有学者研究更先进更优秀的控制估计方法, 如混合  $H_2/H_\infty$  控制、鲁棒模型预测控制、强化学习等等。我们应当学习更多的先进的控制估计方法, 尝试获得更好的控制效果;
- 3) 本文考虑 TP 未知时的 Riccati 方程求解难题, 但是没有考虑系统参数未知的情形。显然系统参数未知时, Riccati 方程也是无法直接求解的。然而目前相关研究成果较少, 系统参数未知时的 Riccati 方程求解同样是一个巨大的挑战, 如何设计在系统参数未知时设计 Riccati 方程求解算法值得进一步的研究。

## 参考文献

- [1]. 翟海峰. 混杂系统分析与控制设计研究[D]. 浙江大学,2002.
- [2]. 孙振东, 郑大钟. 关于切换系统的一个例子[C]/中国自动化学会控制理论专业委员会.1998年中国控制会议论文集.国防大学出版社,1998:4.
- [3]. Mariton M. On controllability of linear systems with stochastic jump parameters[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1986, 31(7): 680-683.
- [4]. Ji Y, Chizeck H J. Controllability, observability and discrete-time Markovian jump linear quadratic control[J]. International Journal of Control, 1988, 48(2): 481-498.
- [5]. Ji Y, Chizeck H J. Controllability, stabilizability, and continuous-time Markovian jump linear quadratic control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1990, 35(7): 777-788.
- [6]. Feng X, Loparo K A, Ji Y, et al. Stochastic stability properties of jump linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, 37(1): 38-53.
- [7]. Fang Y, Loparo K A. Stochastic stability of jump linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(7): 1204-1208.
- [8]. Hou Z, Luo J, Shi P, et al. Stochastic stability of Ito differential equations with semi-Markovian jump parameters[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(8): 1383-1387.
- [9]. Hou T, Ma H. Exponential stability for discrete-time infinite Markov jump systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 61(12): 4241-4246.
- [10]. Wu X, Shi P, Tang Y, et al. Stability analysis of semi-Markov jump stochastic nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 67(4): 2084-2091.
- [11]. Fang Y, Loparo K A. Stabilization of continuous-time jump linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(10): 1590-1603.
- [12]. Xiao N, Xie L, Fu M. Stabilization of Markov jump linear systems using quantized state feedback[J]. Automatica, 2010, 46(10):1696-1702.
- [13]. Sworder D. Feedback control of a class of linear systems with jump parameters[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1969, 14(1): 9-14.
- [14]. Blair W P, Sworder D. Feedback control of a class of linear discrete systems with jump parameters and quadratic cost criteria[J]. International Journal of Control, 1975, 21(5): 833-841.
- [15]. Sworder D, Rogers R. An LQ-solution to a control problem associated with a solar thermal central receiver[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1983, 28(10): 971-978.
- [16]. Abou-Kandil H, Freiling G, Jank G. On the solution of discrete-time Markovian jump linear quadratic control problems[J]. Automatica, 1995, 31(5): 765-768.
- [17]. Chizeck H J, Ji Y. Optimal quadratic control of jump linear systems with Gaussian noise in discrete-time[C]/27th IEEE Conference on Decision and Control, 1988, 1989-1993.
- [18]. Ji Y, Chizeck H J. Jump linear quadratic Gaussian control in continuous time[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, 37 (12): 1884-1892.
- [19]. Costa O L V, Tuesta E F. Finite horizon quadratic optimal control and a separation principle for Markovian jump linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(10): 1836-1842.
- [20]. Costa O L V. Linear minimum mean square error estimation for discrete-time Markovian jump linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1994, 39(8): 1685-1689.
- [21]. Costa O L V, Guerra S. Stationary filter for linear minimum mean square error estimator of discrete-time Markovian jump systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(8): 1351-1356.
- [22]. Costa O L V, Benites G R A M. Linear minimum mean square filter for discrete-time linear systems with Markov jumps and multiplicative noises[J]. Automatica, 2011, 47(3): 466-476.
- [23]. Costa E F, Saporta B. Linear minimum mean square filters for Markov jump linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(7): 3567-3572.
- [24]. Sun Q, Lim C C, Shi P, et al. Design and stability of moving horizon estimator for Markov jump

- linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(3): 1109-1124.
- [25]. Balenzuela M P, Wills A G, Renton C, et al. Parameter estimation for jump Markov linear systems[J]. Automatica, 2022, 135: 109949.
- [26]. Balenzuela M P, Wills A G, Renton C, et al. A new smoothing algorithm for jump Markov linear systems[J]. Automatica, 2022, 140: 110218.
- [27]. Shen Y, Wu Z G, Shi P, et al. Model reduction of Markovian jump systems with uncertain probabilities[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 65(1): 382-388.
- [28]. Shen Y, Wu Z G, Meng D. Nonsynchronous model reduction for uncertain 2-D Markov jump systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 52(10): 10177-10186.
- [29]. Costa O L V, Fragoso M D, Marques R P. Discrete-time Markov jump linear systems[M]. Springer Science & Business Media, 2005.
- [30]. Costa O L, Fragoso M D, Todorov M G. Continuous-time Markov jump linear systems[M]. Springer Science & Business Media, 2012.
- [31]. Zhou H, Kong H, Wei L, et al. Efficient road detection and tracking for unmanned aerial vehicle[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2014, 16(1): 297-309.
- [32]. Joshi S K, Baumgartner S V, Krieger G. Tracking and track management of extended targets in range-Doppler using range-compressed airborne radar data[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2021, 60: 1-20.
- [33]. Wang Y, Tang C, Wang S, et al. Target tracking control of a biomimetic underwater vehicle through deep reinforcement learning[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2021, 33(8): 3741-3752.
- [34]. 褚健.鲁棒控制理论及应用[M].浙江大学出版社,2000.
- [35]. Zames G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1981, 26(2): 301-320.
- [36]. Stoorvogel A A. The  $H_\infty$  control problem: a state space approach. Prentice-Hall, New York, 1992.
- [37]. 谢克明.现代控制理论[M].清华大学出版社, 2007.
- [38]. Simon D. Optimal state estimation: Kalman,  $H_\infty$ , and nonlinear approaches[M]. John Wiley & Sons, 2006.
- [39]. Hou Z S, Wang Z. From model-based control to data-driven control: Survey, classification and perspective[J]. Information Sciences, 2013, 235: 3-35.
- [40]. Costa O L V, Paulo W L. Indefinite quadratic with linear costs optimal control of Markov jump with multiplicative noise systems[J]. Automatica, 2007, 43(4): 587-597.
- [41]. Matei I, Martins N C, Baras J S. Optimal linear quadratic regulator for Markovian jump linear systems, in the presence of one time-step delayed mode observations[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2008, 41(2): 8056-8061.
- [42]. Zhang L, Boukas E K, Lam J. Analysis and synthesis of Markov jump linear systems with time-varying delays and partially known transition probabilities[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(10): 2458-2464.
- [43]. Zabala Y A, Costa O L V. A detector-based approach for the constrained quadratic control of discrete-time Markovian jump linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 65(3): 1211-1217.
- [44]. Tzortzis I, Charalambous C D, Hadjicostis C N. Jump LQR systems with unknown transition probabilities[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 66(6): 2693-2708.
- [45]. Souza C E, Fragoso M D.  $H_\infty$  control for linear systems with Markovian jump parameters[J]. Control Theory and Advanced Technology, 1993, 9(2): 457-466.
- [46]. Fragoso M D, Val J B R, Pinto D L. Jump linear  $H_\infty$  control: the discrete-time case[J]. Control Theory and Advanced Technology, 1995, 10: 1459-1474.
- [47]. Costa O L V, Val J B R. Full information  $H_\infty$ -control for discrete-time infinite Markov jump parameter systems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1996, 202(2): 578-603.
- [48]. Shi P, Boukas E K.  $H_\infty$ -control for Markovian jump linear systems with parametric uncertainty[J]. Journal of optimization theory and applications, 1997, 95: 75-99.
- [49]. Costa O L V, Marques R P. Mixed  $H_2/H_\infty$ -control of discrete-time Markovian jump linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1998, 43(1): 95-100.
- [50]. Huang Y L, Zhang W H, Feng G. Infinite horizon  $H_2/H_\infty$  control for stochastic systems with

- Markovian jumps[J].Automatica, 2008, 44: 857-863.
- [51].Luan X L, Zhao S Y, Liu.  $H_\infty$  control for discrete-time Markov jump systems with uncertain transition probabilities[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(6): 1566-1572.
- [52].Wu Z G, Shen Y, Shi P, et al.  $H_\infty$  control for 2-D Markov jump systems in Roesser model[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 64(1): 427-432.
- [53].Fang H Y, Zhang M G, He S P, et al. Solving the zero-sum control problem for tidal turbine system: An online reinforcement learning approach[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2023,53(12): 7635-7647.
- [54].Boukas E K. On reference model tracking for Markov jump systems[J]. International Journal of Systems Science, 2009, 40(4): 393-401.
- [55].Fu Y M, Li C J. Parametric method for spacecraft trajectory tracking control problem with stochastic thruster fault[J]. IET Control Theory & Applications, 2016, 10(17): 2331-2338.
- [56].Wang Z, Yuan Y, Yang H. Adaptive fuzzy tracking control for strict-feedback Markov jumping nonlinear systems with actuator failures and unmodeled dynamics[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 50(1): 126-139.
- [57].Tian G. Tracking control of discrete-time Markovian jump systems[J]. International Journal of Systems Science, 2020, 51(15): 3070-3080.
- [58].Souza C E, Fragoso M D.  $H_\infty$  filtering for Markovian jump linear systems[J]. 35th IEEE Conference on Decision and Control, 1996, 4: 4814-4818.
- [59].Souza C E, Fragoso M D.  $H_\infty$  filtering for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2003, 13(14): 1299-1316.
- [60].Souza C E, Fragoso M D. Robust  $H_\infty$  filtering for uncertain Markovian jump linear systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2002, 12(5): 435-446.
- [61].Souza C E, A mode-independent  $H_\infty$  filter design for discrete-time Markovian jump linear systems[C]//42nd IEEE Conference on Decision and Control, 2003, 3: 2811-2816.
- [62].Souza C E, Trofino A, Barbosa K A. Mode-independent  $H_\infty$  filters for hybrid Markov linear systems[C]//43rd IEEE Conference on Decision and Control, 2004, 1: 947-952.
- [63].Souza C E, Trofino A, Barbosa K A. Mode-independent  $H_\infty$  filters for Markovian jump linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51: 1837-1841.
- [64].Liu H, Ho D W C, Sun F. Design of  $H_\infty$  filter for Markov jumping linear systems with non-accessible mode information[J]. Automatica, 2008, 44(10): 2655-2660.
- [65].Xu S, Chen T, Lam J. Robust  $H_\infty$  filtering for uncertain Markovian jump systems with mode-dependent time delays[J]. IEEE Transactions on Automatic control, 2003, 48(5): 900-907.
- [66].Wu L, Shi P, Gao H, et al.  $H_\infty$  filtering for 2D Markovian jump systems[J]. Automatica, 2008, 44(7): 1849-1858.
- [67].Zhang L, Boukas E K. Mode-dependent  $H_\infty$  filtering for discrete-time Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities[J]. Automatica, 2009, 45(6): 1462-1467.
- [68].Li X, Lam J, Gao H, et al.  $H_\infty$  and  $H_2$  filtering for linear systems with uncertain Markov transitions[J]. Automatica, 2016, 67: 252-266.
- [69].Oliveira A M, Costa O L V.  $H_\infty$ -filtering for Markov jump linear systems with partial information on the jump parameter[J]. IFAC Journal of Systems and Control, 2017, 1: 13-23.
- [70].Oliveira A M, Costa O L V. Mixed  $H_2/H_\infty$  filtering for Markov jump linear systems[J]. International Journal of Systems Science, 2018, 49(15): 3023-3036.
- [71].Carvalho L P, Oliveira A M, Costa O L V. Robust fault detection  $H_\infty$  filter for Markovian jump linear systems with partial information on the jump parameter[J]. IFAC-PapersOnLine, 2018, 51:202-207.
- [72].Costa O L V, Aya J C C. Monte Carlo TD ( $\lambda$ )-methods for the optimal control of discrete-time Markovian jump linear systems[J]. Automatica, 2002, 38(2): 217-225.
- [73].Beirigo R L, Todorov M G, Barreto A M S. Online TD ( $\lambda$ ) for discrete-time Markov jump linear systems[C]//2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC). IEEE, 2018: 2229-2234.
- [74].Chen Y, Wen J, Luan X, et al. Robust control for Markov jump linear systems with unknown transition probabilities—an online temporal differences approach[J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2020, 42(15): 3043-3051.
- [75].Chen Y, Wen J, Luan X, et al.  $H_\infty$  optimal control for semi-Markov jump linear systems via TP-free temporal difference ( $\lambda$ ) learning[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control,

- 2021, 31(14): 6905-6916.
- [76]. Kiumarsi B, Lewis F L, Modares H, et al. Reinforcement Q-learning for optimal tracking control of linear discrete-time systems with unknown dynamics[J]. Automatica, 2014, 50(4): 1167-1175.
- [77]. Kiumarsi B, Lewis F L, Jiang Z P.  $H_\infty$  control of linear discrete-time systems: Off-policy reinforcement learning[J]. Automatica, 2017, 78: 144-152.
- [78]. Zhang K, Zhang H, Cai Y, et al. Parallel optimal tracking control schemes for mode-dependent control of coupled Markov jump systems via integral RL method[J]. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2019, 17(3): 1332-1342.
- [79]. Wang J, Wu J, Cao J, et al. Nonfragile output feedback tracking control for Markov jump fuzzy systems based on integral reinforcement learning scheme[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 53: 4521-4530.
- [80]. Cheney E W. Analysis for applied mathematics[M]. New York: Springer, 2001.
- [81]. Bertsekas D P. Dynamic Programming and Stochastic Control[M]. Academic Press, 1976.
- [82]. Kleinman D. On an iterative technique for Riccati equation computations[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1968, 13(1): 114-115.
- [83]. Wu H N, Luo B. Simultaneous policy update algorithms for learning the solution of linear continuous-time  $H_\infty$  state feedback control[J]. Information Sciences, 2013, 222: 472-485.
- [84]. Zhang L, Boukas E K. Stability and stabilization of Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities[J]. Automatica, 2009, 45(2): 463-468.
- [85]. Oliveira R C L F, Vargas A N, do Val J B R, et al. Mode-Independent  $H_2$ -Control of a DC Motor Modeled as a Markov Jump Linear System[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2014, 22(5): 1915-1919.



## 致 谢

此论文完成之际,首先要衷心感谢悉心教导和关怀我的导师XXX教授。在攻读XX学位期间,导师对我论文的研究方案、实验思路和实验结果的分析提供了许多直接、深入、有益的指导、建议和帮助,让我能顺利完成学业。

感谢XXX、XXX在此课题上取得的成果为我的研究做了准备。

感谢XXX、XXX等对我实验过程的帮助。

感谢XXXX大学XXX教授、XXXX大学XXX教授及XXXX分析测试中心对催化剂测试的帮助。

感谢国家自然科学基金委（项目编号XXXXXXXXXX）对本研究的资助。

## 作者简介

### 1 作者简历

××××年××月出生于××××。

××××年××月——××××年××月,××大学××院(系)××专业学习,获得××学硕士学位。

××××年××月——××××年××月,××大学××院(系)××专业学习,攻读××学博士学位。

### 2 攻读硕士学位期间发表的学术论文

(时间均为倒序)

- [1] Jia M M, Yi N N, Bing O, Ding P Q, Wu R. Photocatalytic reduction of CO<sub>2</sub> in aqueous solution on TiO<sub>2</sub>. Energ. Fuel., 2016, accepted. (SCI 源, IF = X.XX)
- [2] Jia M M, Yi N N, Bing O, Ding P Q. Article Title. Journal Title, 2015, 118(1/2): 389–398. (SCI, IF= X.XX)

### 3 参与的科研项目及获奖情况

(时间均为倒序)

- [1] 易某某, 贾某某. ××催化剂的制备及其性能研究, 国家自然科学基金项目. 编号: ××××., 2016

### 4 发明专利

(时间均为倒序)

- [1] 贾某某. 一种磁分离催化剂制备方案. 中国, 2013 1 0513271.2 [P]. 2015-04-26.

## 学位论文数据集

密 级*	中图分类号*	UDC*	论文资助
学位授予单位 名称*	学位授予单位 代码*	学位类型*	学位级别*
浙江工业大学	10337		
论文 题名*			
关键 词*			论文 语种*
并列 题名			
作者姓名*		学 号*	
培养单位名称*	培养单位代码*	培养单位地址*	邮政编码*
浙江工业大学 环境学院	10337	杭州市潮王路 18 号	310032
学科专业*	研究方向*	学 制*	学位授予年*
论文提交日期*	与封面日期一致		
导师姓名*		职 称*	
评阅人	答辩委员会主 席*	答辩委员会成员	
电子版论文提交格式：文本（ ）图像（ ）视频（ ）音频（ ）多媒体（ ）其他 （ ）			
电子版论文出版（发 布）者	电子版论文出版（发布）地		版权声明
论文总页数*			

注：共 33 项,其中带\*为必填数据,为 25 项。

附件 2：学位论文书脊示例

