线性随机系统H_2滤波与H_∞滤波

张志钢[1,2]，王付生[2]，沈宏[3]
([1]山东大学控制科学与工程学院，济南 250062；
[2]山东电力高等专科学校控制系，济南 250002；
[3]济南市铸造锻压机械研究所，济南 250022)

摘要：卡尔曼滤波技术在控制工程中得到了广泛应用。若得到较精确的系统模型，且噪声统计特性已知的情况下，可以采用卡尔曼滤波技术得到状态的最优估计值；在噪声统计特性未知的情形，经典卡尔曼滤波应用就会受到限制，此时可以运用H_∞滤波来解决。本文给出了H_2滤波与H_∞滤波的方法，并通过仿真分析，对二者的性能进行了对比研究。

关键词：H_2滤波；H_∞滤波；线性随机系统；离散时间系统；Riccati方程

卡尔曼滤波技术是R. E. Kalman于1960年提出的基于状态空间模型的递推状态估计算法[1]，在之后近50年时间在航空航天、电力、船舶、造纸、石油地震勘探等工程领域得到广泛应用[2,5]。作为最优控制的必要组成部分，Kalman滤波技术已经得到人们深入广泛的研究，理论已渐趋于完善[3,4]。

经典Kalman滤波理论就是H_2意义上的滤波技术，即H_2滤波，它适合处理状态噪声、观测噪声与状态初值估计偏差都是白噪声，但仅在相同时刻是相关、在不同时刻无关，且在相互之间是无关的情形。

H_∞滤波与H_2滤波不同之处在于，它用未知的具有有限能量的确定性干扰替代白噪声干扰，并保证从干扰到估计误差的能量增益小于预定的性能指标$\gamma(\gamma>0)$。

1 H_2滤波

考虑离散的线性时变随机系统

$$x(t+1)=\Phi_t x(t)+\Gamma_t u(t) \tag{1}$$
$$y(t)=H_t x(t)+v(t) \tag{2}$$

其中状态$x(t)\in R^n$，观测$y(t)\in R^m$，Φ_t、Γ_t、H_t是适当维的时变矩阵，系统噪声$u(t)\in R^r$是零均值的白噪声，在相同时刻是相关的，观测噪声$v(t)\in R^m$也是零均值的白噪声，在相同时刻相关，且与$u(t)$无关，即有下面各式成立：

$$E\left[u(t)\right]=0, E\left[v(t)\right]=0,$$
$$E\left[w(t)v^{\mathrm{T}}(k)\right]=0, E\left[u(t)u^{\mathrm{T}}(j)\right]=Q_t\delta_{tj},$$
$$E\left[v(t)v^{\mathrm{T}}(j)\right]=R_t\delta_{tj}$$

其中，E为均值符号，上标T是转置符号。假定初始观测时刻$t_0=0$，且有

$$E\left[x(0)\right]=0, E\left[x(0)x^{\mathrm{T}}(0)\right]=\Pi_0$$

且$x(0)$与$u(t)$和$v(t)$都不相关。

H_2滤波问题 基于观测量构成的线性空间$L\{y(0),y(1),\cdots,y(t)\}$，给出当前时刻的状态估计值$\hat{x}(t)$，且使下面的性能指标最小：

$$J=E\left[\left(x(t)-\hat{x}(t)\right)^{\mathrm{T}}\left(x(t)-\hat{x}(t)\right)\right] \tag{3}$$

定理1 设计如下实时递推的滤波算法：

$$\hat{x}(t+1)=\Phi_t\hat{x}(t)+P(t+1)H_{t+1}^{\mathrm{T}}\left[H_{t+1}P(t+1)H_{t+1}^{\mathrm{T}}+R_{t+1}\right]^{-1}\left(y(t+1)-H_{t+1}\Phi_t\hat{x}(t)\right) \tag{4}$$

其中，$\hat{x}(0)=0$，$P(t)$ 由下面矩阵 Riccati 方程递推求解

$$\begin{aligned}P(t+1)&=\Phi_tP(t)\Phi_t^{\mathrm{T}}+\Gamma_tQ_t\Gamma_t^{\mathrm{T}}\\&\quad-\Phi_tP(t)H_t^{\mathrm{T}}\left[H_tP(t)H_t^{\mathrm{T}}+R_t\right]^{-1}H_tP(t)\Phi_t^{\mathrm{T}}\\P(1)&=\Phi_0\Pi_0\Phi_0^{\mathrm{T}}+\Gamma_0Q_0\Gamma_0^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{5}$$

2 H_∞滤波

H_∞滤波的主要设计思想是引入鲁棒控制设计中的性能指标等概念，在系统的噪声缺乏统计特性时来解决状态估计问题。

对于线性离散系统

$$x(t+1)=\Phi_tx(t)+\Gamma_tu(t),\ \ \hat{x}(0)=0 \tag{6}$$

$$y(t)=H_tx(t)+v(t) \tag{7}$$

$$z(t)=L_tx(t) \tag{8}$$

其中，$\{u_j\}$ 和 $\{v_j\}$ 是未知噪声，$z(t)\in R^p$ 是待估计的向量，它是状态的线性组合，其余变量定义同前。

H_∞滤波问题：给出标量 $\gamma>0$，求取状态的估计值 $\breve{z}(t)$，使之满足下面的性能指标：

$$\sup_{x_0,\{u_t\},\{v_t\}\neq 0}\frac{\sum_{j=0}^{t}\left[\breve{z}(j)-z(j)\right]^{\mathrm{T}}\left[\breve{z}(j)-z(j)\right]}{x_0^{\mathrm{T}}\Pi_0^{-1}x_0+\sum_{j=0}^{t}u^{\mathrm{T}}(j)u(j)+\sum_{j=0}^{t}v^{\mathrm{T}}(j)v(j)}<\gamma^2 \tag{9}$$

其中，正定矩阵 Π_0 表示状态初始估计值偏离真值的程度。可将上述指标等价为求取下面性能指标J的最小值：

$$\begin{aligned}J&=x_0^{\mathrm{T}}\Pi_0^{-1}x_0+\sum_{j=0}^{t}u^{\mathrm{T}}(j)u(j)+\sum_{j=0}^{t}v^{\mathrm{T}}(j)v(j)\\&\quad-\gamma^{-2}\sum_{j=0}^{t}\left[\breve{z}(j)-z(j)\right]^{\mathrm{T}}\left[\breve{z}(j)-z(j)\right]\\&=\begin{bmatrix}x_0\\u^N\\v_s^N\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\Pi_0&&\\&Q^N&\\&&R^N\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x_0\\u^N\\v_s^N\end{bmatrix}\end{aligned}$$

式中，

$$\begin{aligned}&u^N=\mathrm{col}\{u(0),u(1),\cdots,u(t)\}\\&v_s^N=\mathrm{col}\{v_s(0),v_s(1),\cdots,v_s(t)\},\\&v_s(j)=\begin{pmatrix}v(j)\\v_z(j)\end{pmatrix}=y_s(j)-\begin{pmatrix}H_j\\L_j\end{pmatrix}x(j)\\&Q^N=Q(0)\oplus\cdots\oplus Q(t),\ \ Q(i)=I_r\\&R^N=R(0)\oplus\cdots\oplus R(t),\\&R(i)=\begin{pmatrix}I_m&0\\0&-\gamma^{-2}I_p\end{pmatrix}\end{aligned}$$

其中：$v_z(j)=\breve{z}(j)-z(j)$ 显然 $J>0$ 成立。

$$\begin{aligned}&y_s^N=\mathrm{col}\{y_s(0),y_s(1),\cdots,y_s(t)\}\\&y_s(j)=\begin{pmatrix}y(j)\\\breve{z}(j)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

显然有下式成立：

$$\begin{bmatrix}x_0\\u^N\\y_s^N\end{bmatrix}=\Psi\begin{bmatrix}x_0\\u^N\\v_s^N\end{bmatrix} \tag{11}$$

其中，Ψ 为确定的可逆矩阵。(10)式所表示的性能指标可改写为

$$J=\begin{bmatrix}x_0\\u^N\\y_s^N\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\left(\Psi\begin{bmatrix}\Pi_0&&\\&Q^N&\\&&R^N\end{bmatrix}\Psi^T\right)^{-1}\begin{bmatrix}x_0\\u^N\\y_s^N\end{bmatrix} \tag{12}$$

可引入下面格林空间的随机系统[3]：

$$\mathbf{x}(t+1)=\Phi_t\mathbf{x}(t)+\Gamma_t\mathbf{u}(t),\ \ \hat{\mathbf{x}}(0)=0 \tag{13}$$

$$\mathbf{y}_s(t)=\begin{bmatrix}H_t\\L_t\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\mathbf{v}_s(t) \tag{14}$$

式中，$\mathbf{x}_0,\{\mathbf{u}_j\}$ 和 $\{\mathbf{v}_j\}$ 都属于内积不定的线性空间—格林空间 $\mathbf{K}$，而不是属于希尔伯特空间，且它们之

间满足关系：

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}^N \\ \mathbf{v}^N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}^N \\ \mathbf{v}^N \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} \Pi_0 & & \\ & Q^N & \\ & & R^N \end{bmatrix} \tag{15}$$

假定观测值$\{y_i\}$来自这一状态空间，即可由如下的定理来求得状态的H_∞估计。

定理2 给定$\gamma>0$，如果Φ_t非奇异，则当且仅当

$$P^{-1}(j)+H_j^{\mathrm{T}}H_j-\gamma^{-2}L_j^{\mathrm{T}}L_j>0\ \ (j=0,1,\cdots,t) \tag{16}$$

时$J>0$成立，并可求出H_∞滤波器为

$$\check{z}(t)=L_t\hat{\mathbf{x}}(t) \tag{17}$$

其中，

$$\begin{aligned}&\hat{\mathbf{x}}(t+1)=\Phi_t\hat{\mathbf{x}}(t)+P(t+1)H_{t+1}^{\mathrm{T}}\\&\cdot\left(H_{t+1}P(t+1)H_{t+1}^{\mathrm{T}}+I_m\right)^{-1}\left(\mathbf{y}(t+1)-H_{t+1}\Phi_t\hat{\mathbf{x}}(t)\right)\end{aligned} \tag{18}$$

初值为$\hat{x}(0)=0$。其中，$P(t)$可由下面的Riccati方程递推求得

$$\begin{aligned}&P(t+1)=\Phi_tP(t)\Phi_t^{\mathrm{T}}+\Gamma_t\Gamma_t^{\mathrm{T}}-\Phi_tP(t)\begin{bmatrix}H_t\\L_t\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\&\cdot\left(\begin{bmatrix}H_t\\L_t\end{bmatrix}P(t)\begin{bmatrix}H_t\\L_t\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+\begin{bmatrix}I_m&0\\0&-\gamma^{-2}I_p\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}H_t\\L_t\end{bmatrix}P(t)\Phi_t^{\mathrm{T}}\\&P(1)=\Pi_0\end{aligned} \tag{19}$$

3 仿真分析

比照(4)式与(18)式可以看出，H_∞滤波与H_2滤波的形式是很相似的，只是在(19)式的Riccati方程递推过程出现了如

$$R=\begin{pmatrix}I_m&0\\0&-\gamma^{-2}I_p\end{pmatrix}$$ 的内积不定的情形。

另外，在递推求解时需要满足条件(16)，否则H_∞滤波问题的解就不存在。而基于希尔伯特空间正交投影一定存在，因此H_2滤波也必然有解。

下面通过仿真对H_2滤波与H_∞滤波进行对比研究。取

$$\Phi=\begin{bmatrix}0&1\\-0.26&-1\end{bmatrix},\Gamma=\begin{bmatrix}0.4\\1\end{bmatrix},H=\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix}$$

1) 当w,v均为白噪声时，且$Q=1,W=1,L=I_2$时，H_2滤波的仿真曲线如图1所示，而采用H_∞滤波的仿真曲线如图2所示。

由图1和图2的比较发现，在系统噪声与测量噪声均为白噪声，且统计特性已知时，H_2滤波要比H_∞滤波的结果好。

2) 当w,v不是白噪声或噪声的统计特性未知时，因无法得到状态的最优H_2滤波，只能采用H_∞滤波。其实验仿真曲线如图3所示。

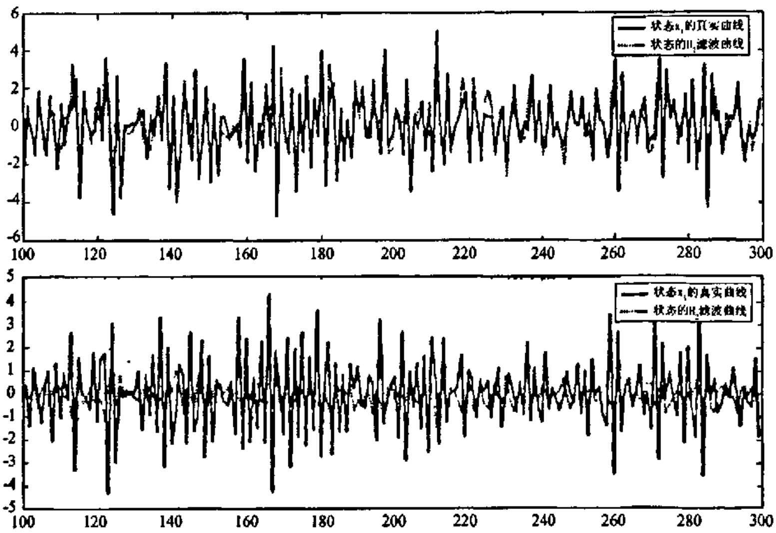

图1 系统噪声与测量噪声均为白噪声时H_2滤波曲线

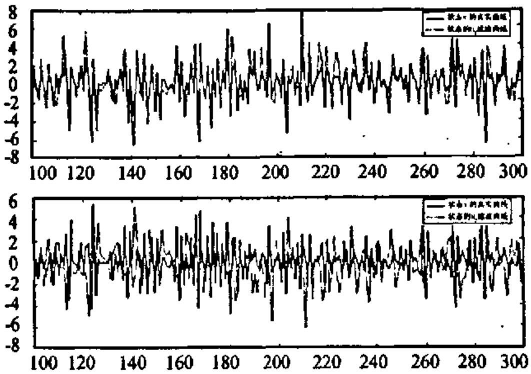

图2　系统噪声与测量噪声均为白噪声时H_∞滤波曲线

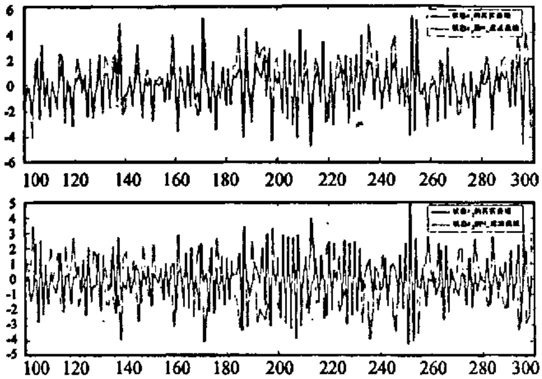

图3　系统噪声与测量噪声为未知统计特性噪声的H_∞滤波曲线

由图(3)可以看出，在系统噪声与测量噪声的统计特性未知时，采用H_∞滤波也能得到状态较好的估计。

4　结论

本文讨论了H_2滤波与H_∞滤波的递推计算方法。可以看出，H_∞滤波实际上可视为在内积不定的格林空间中的Kalman滤波。另外，H_∞滤波要满足附加的条件(16)式，因此格林空间的正交投影不一定存在，而希尔伯特空间的正交投影肯定存在，因此H_2滤波必然有解。

通过实例仿真表明，当噪声是白噪声，且统计特性能确切得到时，H_2滤波会得到较理想的结果，而在噪声不是白噪声，或存在一定的不确定性时，则可由H_∞滤波得到较为满意的状态估计值。

在系统中没有噪声或干扰较小时，可考虑设计状态观测器来估计状态，否则就要用Kalman滤波作为状态估计方法。Kalman滤波算法具有递推的形式，非常便于计算机编程实现，具有较大的灵活性和实时性。对经典Kalman必要的改进后，可适用于非线性时变系统甚至时滞系统等更为复杂的情形。

参考文献

1　Kalman, R E, A new approach to linear filtering and prediction problem. Jounal of Basic Engineering, Trans. ASME-D, 1960, 82(1):35-45.

2　邓自立. 卡尔曼滤波与维纳滤波桼现代时间序列分析方法. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2001.

3　Huanshui Zhang, Lihua Xie, Yeng Chai Soh. A unified approach to linear estimation for discrete-time systems. I. H_2 estimation. Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, 2001, 3:2917－2922.

4　Huanshui Zhang, Lihua Xie, Yeng Chai Soh . A unified approach to linear estimation for discrete-time systems. II. H_∞ estimation. Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, 2001, 3:2923－2928.

5　李明干等. 继电器. 基于卡尔曼滤波的电力系统短期负荷预测., 2004.