踪期望的正弦波信号。此外，3 个功率模态分别为 1-low、2-medium、3-high，各模态具体参数如下：

$$A_i = \begin{bmatrix} \alpha_{i|1,1} & \alpha_{i|1,2} & 0 \\ \alpha_{i|2,1} & \alpha_{i|2,2} & 0 \\ \alpha_{i|3,1} & 0 & \alpha_{i|3,3} \end{bmatrix}，\ B_i = \begin{bmatrix} \beta_{i|1} \\ \beta_{i|2} \\ 0 \end{bmatrix}，\ C_i = \begin{bmatrix} \varphi_{i|1} \\ \varphi_{i|2} \\ \varphi_{i|3} \end{bmatrix}^{\top}，\ D_i = \phi_i \tag{3-50}$$

其中，系统的三个状态变量分别为转子角速度、电机消耗的电流以及 PI 控制器中的积分项。模态依赖参数的具体值在表 3-3 中给出。此外，各模态之间的转移概率矩阵为：

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 & 0.00 \\ 0.36 & 0.60 & 0.04 \\ 0.10 & 0.10 & 0.80 \end{bmatrix} \tag{3-51}$$

表 3-3 模态参数

Table 3-3. Parameters of model

模态参数	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$\alpha_{i\|1,1}$	-0.4799	-1.6026	0.6439
$\alpha_{i\|1,2}$	5.1546	9.1632	0.9178
$\alpha_{i\|2,1}$	-3.8162	-0.5918	-0.5056
$\alpha_{i\|2,2}$	14.4732	3.0317	2.4811
$\alpha_{i\|3,1}$	0.1399	0.0740	0.3865
$\alpha_{i\|3,3}$	-0.9925	-0.4338	0.0982
$\beta_{i\|1}$	5.8705	10.2851	0.7874
$\beta_{i\|2}$	15.5010	2.2282	1.5302
$\varphi_{i\|1}$	1.0000	1.0000	1.0000
$\varphi_{i\|2}$	0	0	0
$\varphi_{i\|3}$	0	0	0
ϕ_i	0	0	0

参考系统 $\mathcal{M}_{ref}$ 参数如下：

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.991 & -0.113 & 0.078 \\ 0.117 & 0.992 & -0.056 \\ -0.071 & 0.064 & 0.095 \end{bmatrix}，\ \hat{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-52}$$

设置权重矩阵 $Q = 50I$， $R = 0.5I$，衰减因子 $\gamma = 0.99$，选取初始镇定控制器 $S_u^{(0)}$ 为：

$$S_{1,u}^{(0)} = [0.250 \quad -0.850 \quad 0.050 \quad 0.050 \quad 0.050 \quad 0.050]$$
$$S_{2,u}^{(0)} = [0.201 \quad -1.502 \quad 0.100 \quad 0.100 \quad 0.000 \quad 0.100] \tag{3-53}$$
$$S_{3,u}^{(0)} = [0.100 \quad -0.998 \quad 0.100 \quad 0.100 \quad 0.100 \quad 0.100]$$

首先，基于以上参数，使用算法 3.1 求解 CARE(3-9)。图 3-1 与图 3-2 分别给出了 $P^{(l)}$ 与 $S_u^{(l)}$ 的收敛过程，注意到，控制器 $S_u^{(l)}$ 的收敛速度较快，在第 3 次迭代就已经平稳，解矩阵 $P^{(l)}$ 经过 6 次迭代后才逐渐收敛。限于篇幅，算法收敛时解矩阵 P^* 的值不进行展示，控制器 S_u^* 的值为：

$$S_{1,u}^{*} = [0.0893 \quad -0.8804 \quad 0 \quad 0.1696 \quad 0.1537 \quad 0.1671]$$
$$S_{2,u}^{*} = [0.1552 \quad -0.8884 \quad 0 \quad 0.1010 \quad 0.0907 \quad 0.1011] \tag{3-54}$$
$$S_{3,u}^{*} = [-0.7434 \quad -1.1732 \quad 0 \quad 1.2438 \quad 1.1252 \quad 1.2240]$$

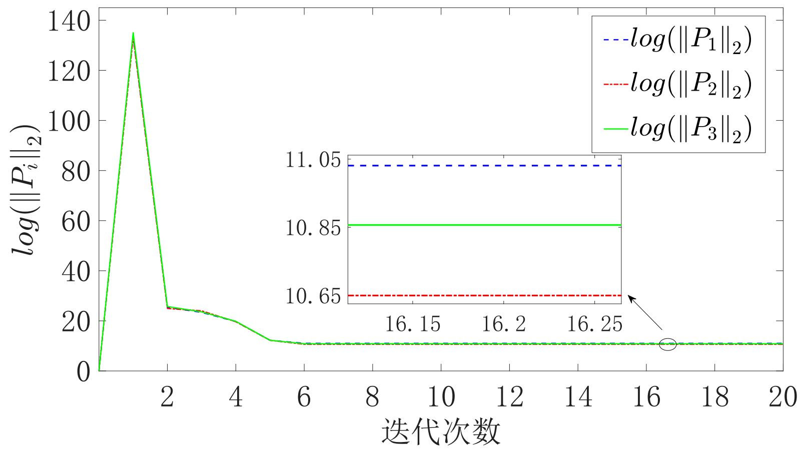

图 3-1 算法 3.1 解矩阵收敛过程

Figure 3-1. Solution matrix monvergence process of Algorithm 3.1

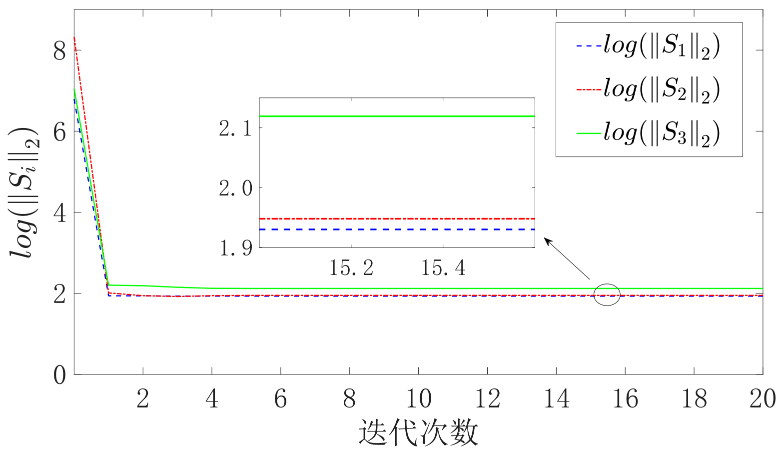

图 3-2 算法 3.1 控制器收敛过程

Figure 3-2. Controller convergence process of Algorithm 3.1

接下来使用算法3.2求解转移概率未知下的CARE(3-9)，算法具体参数为：迭代幕数 $\mathbf{e}=50$，每幕步数 $\mathbf{s}=100$，回报权重 $\lambda=0.05$，迭代步长 $\mu=1/l$，初始解矩阵 $\mathcal{E}^{(0)}=\mathbf{0}$，镇定控制器 $S_u^{(0)}$ 与(3-53)相同。此外，提出性能指标(3-55)衡量算法3.2的收敛精度：

$$\begin{cases} \Delta_i^{(l)}=\log\left(1+\dfrac{\left\|\mathcal{E}_i^*-\mathcal{E}_i^{(l)}\right\|_2^2}{\left\|\mathcal{E}_i^*\right\|_2^2}\right) \\ \delta_i^{(l)}=\log\left(1+\dfrac{\left\|S_{i,u}^*-S_{i,u}^{(l)}\right\|_2^2}{\left\|S_{i,u}^*\right\|_2^2}\right) \end{cases} \tag{3-1}$$

其中，$\mathcal{E}^*$ 表示算法 3.2 应该收敛到的解矩阵，仿真时使用算法 3.1 获取的结果代替，S_u^* 表示算法 3.2 应该收敛到的 LQT 控制器，仿真时使用算法 3.1 获取的结果代替。图 3-3 与图 3-4 分别给出了 $\mathcal{E}^{(l)}$ 与 $S_u^{(l)}$ 的收敛过程，注意到，控制器 $S_u^{(l)}$ 的收敛速度较快，在第 3 次迭代就已经平稳，解矩阵 $\mathcal{E}^{(l)}$ 经过 6 次迭代后才逐渐收敛。限于篇幅，算法收敛时解矩阵 $\mathcal{E}^*$ 的值不进行展示，控制器 $S_u^{*,TD}$ 的值为：

$$\begin{aligned} S_{1,u}^{*,TD}&=\begin{bmatrix}0.0865 & -0.8794 & 0 & 0.1744 & 0.1564 & 0.1717\end{bmatrix} \\ S_{2,u}^{*,TD}&=\begin{bmatrix}0.1546 & -0.8855 & 0 & 0.1077 & 0.0938 & 0.1062\end{bmatrix} \\ S_{3,u}^{*,TD}&=\begin{bmatrix}-0.6633 & -1.2072 & 0 & 1.1758 & 1.0495 & 1.1607\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3-2}$$

分别得到算法 3.1 以及算法 3.2 对应的控制器(3-54)以及(3-56)后，使用数值仿真验证控制器的跟踪控制效果。初始状态选为 $\tilde{x}_0=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0\end{bmatrix}^\top$，图 3-5 展示了在控制器(3-54)以及(3-56)下的跟踪控制效果，可以发现跟踪控制效果良好且两个控制器的控制效果相近，这说明本文提出的 CARE 及其求解算法是有效的。

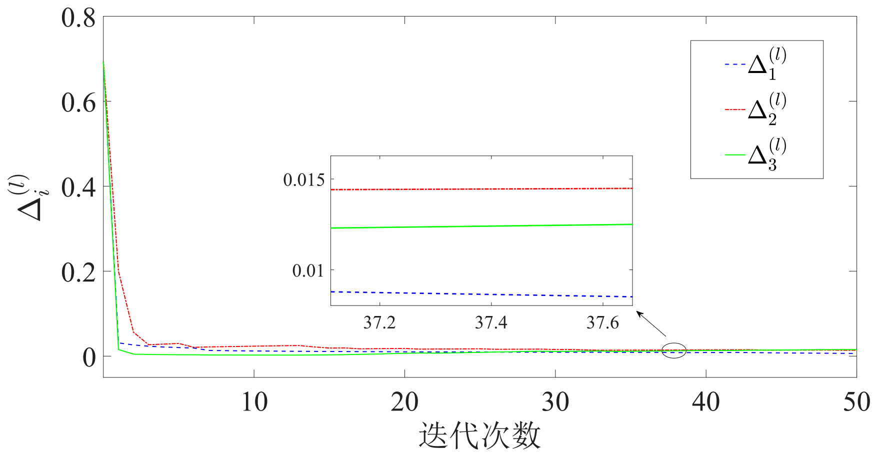

图 3-3 算法 3.2 解矩阵收敛过程

Figure 3-3. Solution matrix convergence process of Algorithm 3.2

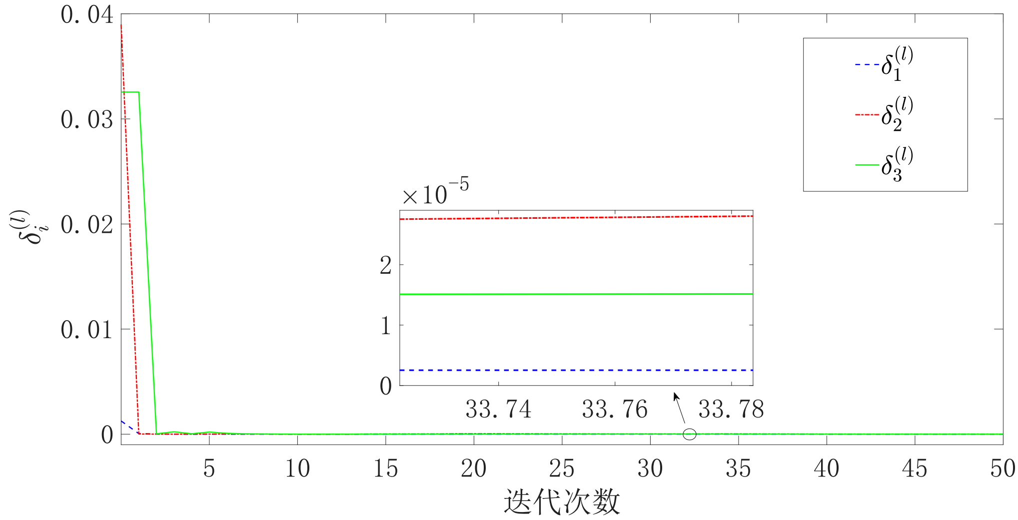

图 3-4 算法 3.2 控制器收敛过程

Figure 3-4. Controller convergence process of Algorithm 3.2

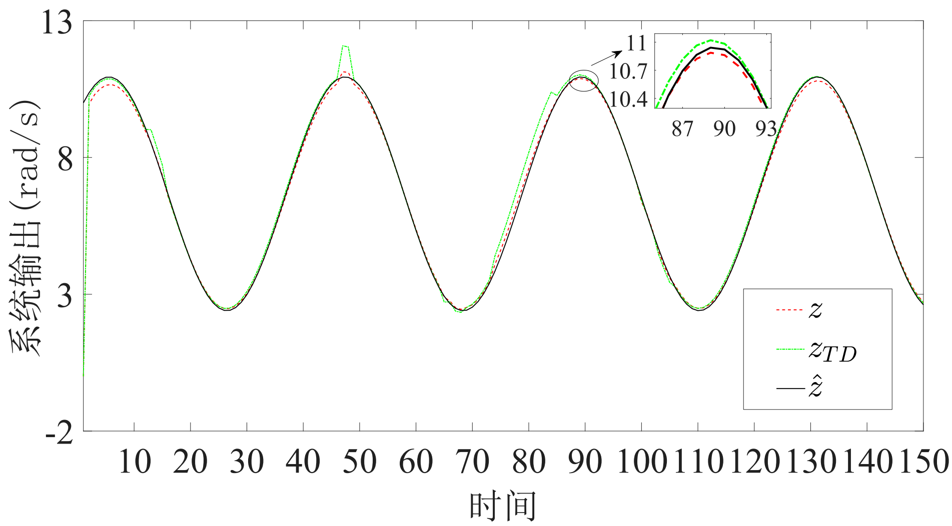

图 3-5 LQT 跟踪控制器作用下的跟踪控制过程

Figure 3-5. Tracking control process under the action of LQT tracking controller

3.6 总结

本章针对无限时域下 MJS 的 LQT 问题，给出了 CARE 镇定解的存在性与 LQT 控制器作用下闭环系统的稳定性证明，设计转移概率已知与未知下的 CARE 迭代求解算法。具体地，首先在二次型性能指标中引入衰减因子使得二次型性能指标收敛，保证最优控制问题可解，从而实现了对不稳定系统的跟踪控制。其次，将二次型性能指标转化为等价的极小化问题，利用动态规划递推求解该极小化问题导出了 CARE 以及对应的 LQT 控制器。再次，在给定衰减因子下，结合衰减跟踪误差系统讨论 CARE 镇定解的存在性以及 LQT 控制器作用下闭环系统的稳定性，