

不确定离散半马尔可夫跳变系统的有限时间鲁棒 H_∞ 控制

郑柏浩¹, 嵇小辅^{1,2†}, 朱 毅¹

(1. 江南大学 物联网工程学院, 江苏 无锡 214122;

2. 江南大学 轻工过程先进控制教育部重点实验室, 江苏 无锡 214122)

摘 要: 研究一类不确定离散时间半马尔可夫跳变系统的有限时间鲁棒 H_∞ 控制问题. 首先, 应用半马尔可夫核方法建模离散时间系统的半马尔可夫跳变过程, 其中驻留时间的概率密度函数依赖系统当前模态和下一模态, 使得所提出理论可考虑不同的驻留时间概率分布类型, 针对随机跳变系统有限时间分析中的跳变次数问题, 提出估计跳变次数最大值的方法; 然后, 考虑系统模态驻留时间的上下界, 提出新的有限时间有界概念, 并保证基于半马尔可夫核方法给出的不确定离散时间半马尔可夫随机跳变系统有限时间有界判断数值可解; 接着, 在此基础上, 分析系统的 H_∞ 性能指标, 设计模态依赖的状态反馈控制律保证闭环系统的有限时间鲁棒 H_∞ 性能; 最后, 通过 2 个算例仿真验证所提出理论的可行性和有效性.

关键词: 离散时间系统; 半马尔可夫跳变系统; 有限时间有界; 鲁棒 H_∞ 控制; 半马尔可夫核; 线性矩阵不等式
中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.0846

引用格式: 郑柏浩, 嵇小辅, 朱毅. 不确定离散半马尔可夫跳变系统的有限时间鲁棒 H_∞ 控制[J]. 控制与决策, 2024, 39(3): 836-844.

Robust finite-time H_∞ control for uncertain discrete-time semi-Markov jump systems

ZHENG Bai-hao¹, JI Xiao-fu^{1,2†}, ZHU Yi¹

(1. School of Internet of Things Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122, China; 2. Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry of Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract: This paper studies the problem of robust finite-time H_∞ control for a class of uncertain discrete-time semi-Markov jump systems. The semi-Markov kernel approach is employed to model the semi-Markov jump process, in which the probability density function of sojourn time takes into account both the present and next system mode, and different types of sojourn time probability distribution can be considered in the proposed criteria. The method of estimating the maximum number of jumps is proposed for the finite-time analysis of the stochastic switching system. The upper and lower bound of sojourn time are considered simultaneously, which gives a novel concept of finite-time boundedness and guarantees the corresponding criteria based on the semi-Markov kernel to be numerically testable. On the basis of this concept, the H_∞ performance is studied and the corresponding design method of the mode-dependent state-feedback control law is given to guarantee the corresponding closed-loop system to be finite-time bounded with given H_∞ performance. Two numerical examples are delivered to illustrate the feasibility and effectiveness of the proposed theoretical method.

Keywords: discrete-time system; semi-Markov jump systems; finite-time boundness; robust H_∞ control; semi-Markov kernel; linear matrix inequality

0 引 言

马尔可夫跳变系统(Markov jump system, MJS)是一类特殊的随机切换系统, 其具备两种混杂的动态形式: 模态和状态. 系统的模态由连续时间、离散

状态的马尔可夫随机过程描述; 系统的状态由每一模态下的状态空间方程描述. 模态的切换代表系统模型进行相应的变化, 能够反映动态系统运行过程中结构、参数和扰动的随机变化, 因此, MJS 可有效地建

收稿日期: 2022-05-14; 录用日期: 2022-12-01.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61773180).

责任编辑: 关新平.

[†]通讯作者. E-mail: xiaofuji@jiangnan.edu.cn.

*本文附带电子附录文件, 可登录本刊官网该文“资源附件”区自行下载阅览.

模一大类随机过程,如电力系统的负载变化和跳、合闸^[1-2]、网络控制系统的丢包现象^[3-4]、空中交通管理系统的随机飞机轨迹^[5]和医学分析系统的疾病史数据^[6]均可视为一类马尔可夫集,MJS的研究具有重要的理论意义和工程应用价值.然而,如文献[7]所述,MJS的驻留时间必须服从指数分布(在离散域中服从几何分布),这在一定程度上限制了MJS的实际应用.半马尔可夫跳变系统(semi-Markov jump system, S-MJS)允许驻留时间服从任意概率分布,模态转移概率是与驻留时间相关的时变参数,因此其应用较MJS更为广泛^[8-12].

文献[8]引入了半马尔可夫核(semi-Markov kernel, SMK)的概念并提出了离散时间S-MJS的 σ -均方稳定判据,通过限制模态的驻留时间上限,给出了数值可解的均方稳定判据. SMK保证了驻留时间的概率密度函数与当前系统模态和下一系统模态相关,在系统建模中考虑了不同的驻留时间分布规律,因此, σ -均方稳定判据具有较低的保守性.在此基础上,文献[9]进一步引入了驻留时间下限,使得SMK理论具有更好的实用性.针对部分转移概率和驻留时间信息未知的情况,文献[10]研究了转移概率和驻留时间信息估计对离散时间S-MJS σ -均方稳定性的影响.考虑到系统运行过程中无法避免的不确定性和外部扰动,鲁棒 H_∞ 控制能够抑制参数不确定性和外部扰动对系统稳定性的影响,提高系统的鲁棒性能和抗干扰性能.文献[11]引入了连续、非跳变采样点间Lyapunov函数值的关系,讨论了离散时间S-MJS的 H_∞ 均方稳定性问题.在此基础上,文献[12]进一步讨论了奇异摄动离散时间S-MJS的 H_∞ 均方指数稳定性问题.上述随机稳定性或均方稳定性表征了随机跳变系统在无限时间区间的稳态性能,然而在有些应用场合,人们更关注有限时间区间内的系统动态性能,即系统轨线在一定时间范围内是否超过某一特定值.如导弹的飞行时间只有几分钟,机械手从抓起工件到放在指定位置只有几秒钟,这种情况下讨论系统的有限时间有界更能够满足实际运行要求.

目前,离散时间MJS和连续时间S-MJS的有限时间问题已基本解决^[13-17],但是,离散时间S-MJS有限时间控制方面的成果却鲜见报道.已发表文献采用的离散时间MJS和连续时间S-MJS的有限时间研究方法均无法适用于这一问题,如文献[18]将一维传热方程建模为空间连接MJS,设计了有限时间控制器,但是,所提出定理没有考虑随机跳变系统转移概率的时变性;文献[19]将单连接机械臂建模为连续时间S-

MJS,设计了有限时间滑模控制器,但是所提出方法在离散域无法适用.

基于上述讨论,本文主要研究一类不确定离散时间S-MJS的有限时间鲁棒 H_∞ 控制问题.主要内容有以下几点:1)提出离散时间S-MJS的 σ -有限时间有界的新概念,相较于传统有限时间有界而言,考虑驻留时间存在上下界的情况,使得理论具有更好的适用性;2) σ -有限时间有界保证应用SMK方法给出的判据数值可解,解决传统方法无法数值求解的难题,利用驻留时间概率密度函数与系统当前模态和系统下一模态相关的特性,考虑随机过程中模态具有不同的驻留时间分布规律,因此,得到的判据具有更好的通用性;3)分析不确定S-MJS的 H_∞ 性能指标,设计模态依赖的状态反馈鲁棒 H_∞ 控制律实现闭环系统的 σ - H_∞ 有限时间有界.

1 问题描述

在完备概率空间 (Ψ, \mathcal{F}, \Pr) 上考虑以下不确定离散时间随机跳变系统. 对于 $\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,有

$$\begin{cases} x(k+1) = \\ (A_{r(k)} + \Delta A_{r(k)}(k))x(k) + \\ (B_{r(k)} + \Delta B_{r(k)}(k))u(k) + C_{r(k)}\omega(k), \\ z(k) = D_{r(k)}x(k). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ 和 $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ 分别为系统的状态向量和控制输入向量, $\omega(k) \in \mathbb{R}^{n_\omega}$ 为未知的外部扰动输入向量, $z(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$ 为系统的输出向量. 切换过程 $\{r(k)\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 为模态空间 $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, M\}$ 上的半马尔可夫链,系统的模态依赖该过程的随机切换. 对于 $r(k) = i \in \mathcal{I}$, $A_{r(k)}$ 、 $B_{r(k)}$ 、 $C_{r(k)}$ 、 $D_{r(k)}$ 、 $\Delta A_{r(k)}$ 和 $\Delta B_{r(k)}$ 分别简写为 A_i 、 B_i 、 C_i 、 D_i 、 $\Delta A_i(k)$ 和 $\Delta B_i(k)$,其中 $\Delta A_i(k)$ 和 $\Delta B_i(k)$ 分别为系统矩阵中的不确定参数,满足如下形式:

$$[\Delta A_i(k) \quad \Delta B_i(k)] = M_i \Delta(k) [N_{ai} \quad N_{bi}]. \quad (2)$$

其中: M_i 、 N_{ai} 以及 N_{bi} 为已知实矩阵, $\Delta(k)$ 为满足 $\Delta^T(k)\Delta(k) \leq I$ 的未知时变矩阵.

引入两个随机过程 $\{R_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 和 $\{k_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ ^[8],其中随机过程 $\{R_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 在模态空间 \mathcal{I} 中取值, $\{k_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 在空间 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 中取值. 对于 $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, R_n 为系统第 n 次跳变后的模态, k_n 为系统第 n 次跳变的时间. 令 $k_0 = 0$ 且 $0 < k_1 < k_2 < \dots < k_n$,令 $S_n = k_n - k_{n-1} (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$, S_n 为模态 R_{n-1} 在第 $n-1$ 次跳变与第 n 次跳变间的驻留时间,则可给出离散时间齐次马尔可夫再生链的定义.

定义1^[20] 随机过程 $\{(R_n, k_n)\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 称为离散

时间齐次马尔可夫再生链,若对于 $\forall i, j \in \mathcal{I}, i \neq j$, $\forall \tau \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$,则满足

$$\begin{aligned} \Pr(R_{n+1} = j, S_{n+1} = \tau | R_l, k_l, l \in \mathbf{Z}_{[0, n]}) &= \\ \Pr(R_{n+1} = j, S_{n+1} = \tau | R_n = i) &= \\ \Pr(R_1 = j, S_1 = \tau | R_0 = i). \end{aligned} \quad (3)$$

定义离散时间SMKII(τ) = $[\pi_{ij}(\tau)]_{i, j \in \mathcal{I}, \tau \in \mathbf{Z}_{\geq 0}}$, $\pi_{ij}(\tau) = \Pr(R_{n+1} = j, S_{n+1} = \tau | R_n = i)$, $\pi_{ij}(0) = 0$, 显然 $\pi_{ij}(\tau) \in \mathbf{R}_{[0, 1]}$ 且 $\sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{j \in \mathcal{I}} \pi_{ij}(\tau) = 1$. 定义1中随机过程 $\{R_n\}_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}}$ 称为随机过程 $\{(R_n, k_n)\}_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}}$ 的嵌入马尔可夫链,随机过程 $\{R_n\}_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}}$ 的转移概率矩阵 $\Theta = [\theta_{ij}]_{i, j \in \mathcal{I}}$ 定义为 $\theta_{ij} = \Pr(R_{n+1} = j | R_n = i) (\forall i, j \in \mathcal{I})$, $\theta_{ii} = 0$.

驻留时间的概率密度函数依赖当前模态和下一模态,令其为 $f_{ij}(\tau) = \Pr(S_{n+1} = \tau | R_n = R_{n+1} = j) (\forall i, j \in \mathcal{I}, \forall \tau \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$. 显然, $\pi_{ij}(\tau) = f_{ij}(\tau)\theta_{ij}$. 当前模态 i 的驻留时间累积分布函数定义为 $F_i(\tau) = \Pr(S_{n+1} \leq \tau | R_n = i) = \sum_{t=0}^{\tau} \sum_{j \in \mathcal{I}} f_{ij}(t) (\forall i \in \mathcal{I}, \forall \tau \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$, 且 $F_i(0) = f_{ij}(0) = 0$, 则可给出半马尔可夫链的定义.

定义2^[20] 考虑马尔可夫再生链 $\{(R_n, k_n)\}_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}}$, 若满足 $r(k) = R_n (\forall k \in \mathbf{Z}_{[k_n, k_{n+1}-1]}, n \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$, 则随机过程 $\{r(k)\}_{k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}}$ 称为半马尔可夫链.

假设1 外部干扰 $\omega(k)$ 满足有界条件,即

$$\omega^T(k)\omega(k) \leq d, \forall k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, d \in \mathbf{R}_{\geq 0}. \quad (4)$$

假设2 随机跳变过程存在2个模态 $a, b \in \mathcal{I}, a \neq b$, 其驻留时间下界 $T_{\min}^a, T_{\min}^b \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ 满足 $T_{\min}^a \leq T_{\min}^b \leq T_{\min}^i (\forall i \in \mathcal{I})$, 则 K_f 时间内随机跳变系统的跳变次数 N 满足

$$N \leq \bar{N} := \left\lfloor \frac{2K_f}{T_{\min}^a + T_{\min}^b} \right\rfloor. \quad (5)$$

易看出, 当时间常数 K_f 一定且随机跳变系统模态在满足假设2的两个模态 a, b 间切换时, 随机跳变系统的跳变次数达到最大.

定义3^[14] 给定时间常数 $K_f \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ 和正定对称矩阵 R , 对于 $\forall k \in [1, K_f]$, 若

$$x_0^T R x_0 < c_1 \implies E\{x_k^T R x_k\} < c_2, \quad (6)$$

则称离散时间S-MJS(1)关于 (c_1, c_2, d, K_f, R) 是有限时间有界的. 其中: $0 < c_1 < c_2$, 且 $\omega(k)$ 满足式(4). 若系统满足 $\omega(k) \equiv 0$, 则称系统关于 (c_1, c_2, K_f, R) 是有限时间稳定的.

易看出, 若系统第 i 个模态的驻留时间有上限 T_{\max}^i 和下限 T_{\min}^i , 则定义3相对保守. 为了在系统分析和综合考虑更多的驻留时间信息, 进一步降低结论的保守性, 现给出离散时间S-MJS在驻留时间有界情况下的有限时间有界定义.

定义4 给定时间常数 $K_f \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$, 子系统驻留时间上下界 $T_{\max}^i, T_{\min}^i \in \mathbf{Z}_{\geq 1} (\forall i \in \mathcal{I})$ 和正定对称矩阵 R , 对于 $\forall k \in [1, K_f]$, 若

$$x_0^T R x_0 < c_1 \implies E\{x_k^T R x_k\} < c_2, \quad (7)$$

则称离散时间S-MJS(1)关于 $(c_1, c_2, d, K_f, R, T_{\min}^i, T_{\max}^i)$ 是 σ -有限时间有界. 其中: $0 < c_1 < c_2, T_{\min}^i \leq T_{\max}^i, \omega(k)$ 满足式(4), σ 定义为

$$\sigma = \frac{1}{M} \sum_{i \in \mathcal{I}} |\ln(F_i(T_{\max}^i) - F_i(T_{\min}^i - 1))|,$$

M 为 \mathcal{I} 中系统模态个数. 若系统满足 $\omega(k) \equiv 0$, 则称系统关于 $(c_1, c_2, K_f, R, T_{\min}^i, T_{\max}^i)$ 是 σ -有限时间稳定.

在定义4中, σ 表征 σ -有限时间有界相对于传统有限时间有界的近似误差程度. 由 σ 的定义可知, T_{\min}^i 减小或 T_{\max}^i 增大, σ 会相应减小. 特别地, 当 $T_{\min}^i = 1, T_{\max}^i \rightarrow \infty (\forall i \in \mathcal{I})$ 时, $F_i(T_{\min}^i - 1) = 0, F_i(T_{\max}^i) \rightarrow 1, \sigma \rightarrow 0$, 此时, σ -有限时间有界等同于传统的有限时间有界.

定义5 若离散时间S-MJS(1)关于 $(c_1, c_2, d, K_f, R, T_{\min}^i, T_{\max}^i)$ 是 σ -有限时间有界的, 且在0初始条件下满足条件

$$E\left\{\sum_{k=0}^{K_f} z^T(k)z(k)\right\} < \gamma^2 \sum_{k=0}^{K_f} \omega^T(k)\omega(k), \quad (8)$$

则称系统关于 $(c_1, c_2, \gamma, d, K_f, R, T_{\min}^i, T_{\max}^i)$ 是 σ - H_{∞} 有限时间有界的. 其中: $\gamma > 0, \omega(k)$ 满足式(4).

定义5扩展自文献[13]对 H_{∞} 有限时间有界的定义.

引理1^[21] 设 X, Y 和 $F(k) (k \in \mathbf{Z}_{\geq 1})$ 为适当维度的矩阵, 且满足 $F^T(k)F(k) \prec I$, 则存在标量 $\varsigma > 0$ 使得 $X^T F(k)Y + Y^T F^T(k)X \leq \varsigma^{-1} X^T X + \varsigma Y^T Y$ 成立.

对于不确定离散时间S-MJS(1), 设计模态依赖的状态反馈控制律 $u(k) = K_i x(k)$, 其中 K_i 为控制律增益. 这时的闭环系统具有如下形式:

$$\begin{cases} x(k+1) = (A_i + \Delta A_i(k) + B_i K_i + \\ \quad \Delta B_i(k) K_i) x(k) + C_i \omega(k), \\ z(k) = D_i x(k), k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}. \end{cases} \quad (9)$$

2 主要成果

定理1 考虑不确定离散时间S-MJS(1), 其中 $u(k) \equiv 0$. 给定标量 $c_2 > c_1 > 0, d > 0$, 正整数 $T_{\min}^i, T_{\max}^i (i \in \mathcal{I})$ 和正定对称矩阵 R , 对于 $\forall i, j \in \mathcal{I}$ 和

$\forall \tau \in [T_{\min}^j, T_{\max}^j]$, 若存在标量 $\epsilon > 0$, $h_i > 1$, $\mu_i > 1$, $\varphi > 0$, $\theta > 0$ 和正定对称矩阵 P_i , Q_i 满足以下线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} -h_i P_i + \epsilon N_{ai}^T N_{ai} & 0 & A_i^T P_i & 0 \\ * & -Q_i & C_i^T P_i & 0 \\ * & * & -P_i & P_i M_i \\ * & * & * & -\epsilon I \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}, \quad (10a)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \pi_{ji}(\tau) P_i - \mu_j P_j \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi_{ji}(\tau) \prec \mathbf{0}, \quad (10b)$$

$$R \prec P_i \prec \varphi R, \quad (10c)$$

$$Q_i \prec \theta I, \quad (10d)$$

$$\bar{h}^{K_f} \bar{\mu}^{\bar{N}} \varphi c_1 + \bar{h}^{K_f-1} \bar{\mu}^{\bar{N}} \theta (K_f - 1) d < c_2, \quad (10e)$$

则该系统关于 $(c_1, c_2, d, K_f, R, T_{\min}^i, T_{\max}^i)$ 是 σ -有限时间有界的. 其中: $\bar{h} = \max_{i \in \mathcal{I}} \{h_i\}$, $\bar{\mu} = \max_{i \in \mathcal{I}} \{\mu_i\}$, \bar{N} 满足式(5).

证明 构造 Lyapunov 函数 $V(x(k), r(k_n)) = x^T(k) P_{r(k_n)} x(k)$, 并记 $r(k_n) = i \in \mathcal{I} (\forall k \in [k_n, k_{n+1} - 1])$, 可得到

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\{V(x(k+1), r(k_n))\} - h_{r(k_n)} \mathbf{E}\{V(x(k), r(k_n))\} - \\ & \omega^T(k) Q_{r(k_n)} \omega(k) = \\ & \mathbf{E}\{x^T(k+1) P_i x(k+1)\} - h_i \mathbf{E}\{x^T(k) P_i x(k)\} - \\ & \omega^T(k) Q_i \omega(k) = \\ & \mathbf{E}\{[(A_i + \Delta A_i(k))x(k) + C_i \omega(k)]^T P_i \times \\ & [(A_i + \Delta A_i(k))x(k) + C_i \omega(k)]\} - \\ & \mathbf{E}\{h_i x^T(k) P_i x(k)\} - \omega^T(k) Q_i \omega(k) = \\ & \mathbf{E}\{X^T(k) \Omega_i X(k)\}. \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} X(k) &= [x^T(k) \quad \omega^T(k)]^T, \\ \Omega_i &= \begin{bmatrix} \Omega_{11,i} & (A_i + \Delta A_i(k))^T P_i C_i \\ * & C_i^T P_i C_i - Q_i \end{bmatrix}, \\ \Omega_{11,i} &= (A_i + \Delta A_i(k))^T P_i (A_i + \Delta A_i(k)) - h_i P_i. \end{aligned}$$

应用 Schur 补引理, $\Omega_i \prec \mathbf{0}$ 等价于

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} -h_i P_i & 0 & (A_i + \Delta A_i(k))^T P_i \\ * & -Q_i & C_i^T P_i \\ * & * & -P_i \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}. \quad (12)$$

考虑式(2), 可将式(12)分解为

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \begin{bmatrix} -h_i P_i & 0 & A_i^T P_i \\ * & -Q_i & C_i^T P_i \\ * & * & -P_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_i M_i \end{bmatrix} \Delta(k) \times \\ & [N_{ai} \quad 0 \quad 0] + \begin{bmatrix} N_{ai}^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta^T(k) [0 \quad 0 \quad M_i^T P_i] \prec \mathbf{0}. \end{aligned}$$

由引理1可知, 该不等式成立, 若存在标量 $\epsilon > 0$ 使得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -h_i P_i & 0 & A_i^T P_i \\ * & -Q_i & C_i^T P_i \\ * & * & -P_i \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} N_{ai}^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [N_{ai} \quad 0 \quad 0] + \\ & \epsilon^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_i M_i \end{bmatrix} [0 \quad 0 \quad M_i^T P_i] \prec \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (13)$$

则由 Schur 补引理, 式(10a)等价于(13), 从而式(10a)保证了式(12)成立. 因此, 对于 $\forall k \in [k_n, k_{n+1} - 1]$ 均有

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\{V(x(k+1), r(k_n))\} < \\ & h_{r(k_n)} \mathbf{E}\{V(x(k), r(k_n))\} + \omega^T(k) Q_{r(k_n)} \omega(k). \end{aligned} \quad (14)$$

对于 $\forall k \in [k_n + 1, k_{n+1}]$, 由式(14), 得到

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\{V(x(k), r(k_n))\} < \\ & h_{r(k_n)}^{k-k_n} \mathbf{E}\{V(x(k_n), r(k_n))\} + \\ & \sum_{s=k_n}^{k-1} h_{r(k_n)}^{k-s-1} \omega^T(s) Q_{r(k_n)} \omega(s). \end{aligned} \quad (15)$$

另外, 由式(10b)可知

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\{V(x(k_n), r(k_n))\} |_{x(k_{n-1}), r(k_{n-1})} - \\ & \mu_{r(k_{n-1})} \mathbf{E}\{V(x(k_n), r(k_{n-1}))\} |_{x(k_{n-1}), r(k_{n-1})} = \\ & \frac{1}{\eta_j} x^T(k_{n-1}) \left[\sum_{\tau=T_{\min}^j}^{T_{\max}^j} (A_j^T)^\tau \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \pi_{ji}(\tau) P_i - \right. \right. \\ & \left. \left. \mu_j P_j \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi_{ji}(\tau) A_j^\tau \right) x(k_{n-1}) < 0. \end{aligned} \quad (16)$$

其中: $j = r(k_{n-1})$, $\eta_j = \sum_{\tau=T_{\min}^j}^{T_{\max}^j} \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi_{ji}(\tau) (i, j \in \mathcal{I})$.

结合式(15)和(16), 得到

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\{V(x(k), r(k_n))\} < \\ & h_{r(k_n)}^{k-k_n} \mu_{r(k_{n-1})} \mathbf{E}\{V(x(k_n), r(k_{n-1}))\} + \\ & \sum_{s=k_n}^{k-1} h_{r(k_n)}^{k-s-1} \omega^T(s) Q_{r(k_n)} \omega(s) < \\ & \bar{h}^{k-k_0} \bar{\mu}^N V(x(k_0), r(k_0)) + \\ & \bar{\mu}^N \sum_{s=k_0}^{k_1-1} \bar{h}^{k-s-1} \omega^T(s) Q_{r(k_0)} \omega(s) + \dots + \\ & \sum_{s=k_n}^{k-1} \bar{h}^{k-s-1} \omega^T(s) Q_{r(k_n)} \omega(s), \end{aligned} \quad (17)$$

其中 N 为时间区域 $[k_0, k]$ 内的系统跳变次数. 由于 $N \leq \bar{N}$, 令 $k_0 = 0$, $k = K_f$, $\lambda_1 = \max_{i \in \mathcal{I}} \{\lambda_{\max}(Q_i)\}$, $\lambda_2 = \max_{r(0) \in \mathcal{I}} \{\lambda_{\max}(R^{-\frac{1}{2}} P_{r(0)} R^{-\frac{1}{2}})\}$. 若 $x^T(0) R x(0) < c_1$, 则

由式(4)和(17)可得到

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\{V(x(k), r(k_n))\} < \\ & \bar{h}^{k-k_0} \bar{\mu}^N V(x(k_0), r(k_0)) + \\ & \bar{h}^{k-k_0-1} \bar{\mu}^N \lambda_1 \sum_{s=k_0}^{k-1} \omega^T(s) \omega(s) < \\ & \bar{h}^{K_f} \bar{\mu}^N x^T(0) R^{\frac{1}{2}} (R^{-\frac{1}{2}} P_{r(0)} R^{-\frac{1}{2}}) R^{\frac{1}{2}} x(0) + \\ & \bar{h}^{K_f-1} \bar{\mu}^N \lambda_1 \sum_{s=0}^{K_f-1} \omega^T(s) \omega(s) < \\ & \bar{h}^{K_f} \bar{\mu}^N \lambda_2 c_1 + \bar{h}^{K_f-1} \bar{\mu}^N \lambda_1 (K_f - 1) d. \end{aligned} \quad (18)$$

另外, 令 $\lambda_3 = \min_{r(k_n) \in \mathcal{I}} \{\lambda_{\min}(R^{-\frac{1}{2}} P_{r(k_n)} R^{-\frac{1}{2}})\}$, 得到

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\{V(x(k), r(k_n))\} = \\ & \mathbf{E}\{x^T(k) P_{r(k_n)} x(k)\} = \\ & \mathbf{E}\{x^T(k) R^{\frac{1}{2}} (R^{-\frac{1}{2}} P_{r(k_n)} R^{-\frac{1}{2}}) R^{\frac{1}{2}} x(k)\} > \\ & \lambda_3 \mathbf{E}\{x^T(k) R x(k)\}. \end{aligned} \quad (19)$$

由式(18)和(19), 得到

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\{x^T(k) R x(k)\} < \\ & \frac{\bar{h}^{K_f} \bar{\mu}^N \lambda_2 c_1 + \bar{h}^{K_f-1} \bar{\mu}^N \lambda_1 (K_f - 1) d}{\lambda_3}, \end{aligned} \quad (20)$$

再由式(10c)、(10d)和(10e), 得到 $\mathbf{E}\{x^T(k) R x(k)\} < c_2$. 结合定义4可知, 不确定离散时间S-MJS(1)关于 $(c_1, c_2, d, K_f, R, T_{\min}^i, T_{\max}^i)$ 是 σ -有限时间有界的. \square

注1 不同于文献[8]中仅基于跳变时间 k_n 的稳定性条件, 定理1中增加了式(10a), 以描述系统在同一模态下任意采样时间 k 与 $k+1$ 的Lyapunov函数值关系, 使得分析不确定离散时间S-MJS的 σ -有限时间有界性成为可能. 由于系统存在服从半马尔可夫链的随机跳变, 式(10b)应用SMK方法描述了任意跳变时间 k_n 前后Lyapunov函数值关系, 该方法解决了离散时间半马尔可夫跳变过程不能利用转移概率或转移速率建模的问题, 充分体现了驻留时间概率密度函数依赖当前模态和下一模态的特性. 通过二者的迭代, 得到系统的Lyapunov函数值 $V(k_0)$ 与 $V(k)$ 的关系, 最终得到 σ -有限时间有界条件.

注2 当 $T_{\min}^i = 1, T_{\max}^i \rightarrow \infty (\forall i \in \mathcal{I})$ 时, σ -有限时间有界与传统的有限时间有界等价, 但是该条件下式(10b)无数值解. 换言之, 定理1的 T_{\max}^i 必须是有限的. T_{\min}^i 的取值不仅影响半马尔可夫随机跳变过程, 还影响式(5)计算系统的最大跳变次数, 进而影响定理1对离散时间S-MJS σ -有限时间有界分析.

注3 不同于渐近稳定, 有限时间稳定允许Lyapunov函数值是递增的, 即 h_i 和 μ_i 均应取大于1的值. 过小的 h_i 和 μ_i 会使得定理1中式(10a)和(10b)难以满足, 过大则无法满足式(10e). 由式(10e)可知, h_i

和 μ_i 与满足 σ -有限时间有界的 c_2 最小值存在指数相关性. 为了尽量减少判据的保守性, h_i 和 μ_i 应在满足式(10a)和(10b)的基础上尽可能的小, 使得满足 σ -有限时间有界的 c_2 可设置得足够小.

注4 本文考虑系统轨迹集的时不变性, 初始集与轨迹集具有相同的形状, 即若系统的状态 $x(0)$ 在某一形状区域内, 则状态 $x(k)$ 也会在大小可变的同一形状区域内. 以选取 R 为对角阵为例, 可调整 R 的对角线元素来调整性能指标中各状态分量在指标中的权重: 权重越大, 该变量在指标中的重要性越高; 权重越小, 重要性越低.

定理2 考虑不确定离散时间S-MJS(1), 其中 $u(k) \equiv 0$. 给定标量 $c_2 > c_1 > 0, d > 0$ 、正整数 $T_{\min}^i, T_{\max}^i, i \in \mathcal{I}$ 和正定对称矩阵 R , 对于 $\forall i, j \in \mathcal{I}$ 和 $\forall \tau \in \mathbf{Z}_{[T_{\min}^j, T_{\max}^j]}$, 若存在标量 $\epsilon > 0, \gamma > 0, h_i > 1, \mu_i > 1, \varphi > 0$ 和正定对称矩阵 P_i 满足以下线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} -h_i P_i + D_i^T D_i + \epsilon N_{ai}^T N_{ai} & 0 \\ * & -\gamma^2 I \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A_i^T P_i & 0 \\ C_i^T P_i & 0 \\ -P_i & P_i M_i \\ * & -\epsilon I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (21a)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \pi_{ji}(\tau) P_i - \mu_j P_j \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi_{ji}(\tau) \prec 0, \quad (21b)$$

$$R \prec P_i \prec \varphi R, \quad (21c)$$

$$\bar{h}^{K_f} \bar{\mu}^N \varphi c_1 + \bar{h}^{K_f-1} \bar{\mu}^N \gamma^2 (K_f - 1) d < c_2, \quad (21d)$$

则该系统关于 $(c_1, c_2, \bar{\gamma}, d, K_f, R, T_{\min}^i, T_{\max}^i)$ 是 σ - H_∞ 有限时间有界的. 其中: $\bar{h} = \max_{i \in \mathcal{I}} \{h_i\}, \bar{\mu} = \max_{i \in \mathcal{I}} \{\mu_i\}, \bar{N}$ 满足式(5), H_∞ 性能指标 $\bar{\gamma} = \sqrt{\bar{\mu}^N \gamma^2}$.

证明 令 $J(k) = \gamma^2 \omega^T(k) \omega(k) - \mathbf{E}\{z^T(k) z(k)\}$, 对于 $\forall k \in [k_n, k_{n+1} - 1]$, 有

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\{V(x(k+1), r(k_n))\} - \\ & h_{r(k_n)} \mathbf{E}\{V(x(k), r(k_n))\} - J(k) = \\ & \mathbf{E}\{[(A_i + \Delta A_i(k))x(k) + C_i \omega(k)]^T P_i \times \\ & [(A_i + \Delta A_i(k))x(k) + C_i \omega(k)]\} - \\ & h_i \mathbf{E}\{x^T(k) P_i x(k)\} + \\ & \mathbf{E}\{x^T(k) D_i^T D_i x(k)\} - \gamma^2 \omega^T(k) \omega(k) = \\ & \mathbf{E}\{X^T(k) \Sigma_i X(k)\}. \end{aligned} \quad (22)$$

其中: $X(k)$ 与式(11)相同, 且有

$$\Sigma_i = \begin{bmatrix} \Sigma_{11,i} & (A_i + \Delta A_i(k))^T P_i C_i \\ * & C_i^T P_i C_i - \gamma^2 I \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{11,i} =$$

$$(A_i + \Delta A_i(k))^T P_i (A_i + \Delta A_i(k)) - h_i P_i + D_i^T D_i.$$

与定理1的证明过程类似, 式(21a)保证了 $\Sigma_i < 0$ 对于所有 $\Delta A_i(k)$ 均成立. 因此, 对于 $\forall k \in [k_n, k_{n+1} - 1]$, 均有

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\{V(x(k+1), r(k_n))\} < \\ & h_{r(k_n)} \mathbf{E}\{V(x(k), r(k_n))\} + J(k), \end{aligned} \quad (23)$$

从而, 有

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\{V(x(k+1), r(k_n))\} < \\ & h_{r(k_n)}^{k-k_n+1} \mathbf{E}\{V(x(k_n), r(k_n))\} + \sum_{s=k_n}^k h_{r(k_n)}^{k-s} J(s). \end{aligned} \quad (24)$$

由式(21b), 得到

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\{V(x(k_n), r(k_n))\} |_{x(k_{n-1}), r(k_{n-1})} < \\ & \mu_{r(k_{n-1})} \mathbf{E}\{V(x(k_n), r(k_{n-1}))\} |_{x(k_{n-1}), r(k_{n-1})}. \end{aligned} \quad (25)$$

结合式(24)和(25), 得到

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\{V(x(k+1), r(k_n))\} < \\ & h_{r(k_n)}^{k-k_n+1} \mu_{r(k_{n-1})} \mathbf{E}\{V(x(k_n), r(k_{n-1}))\} + \\ & \sum_{s=k_n}^k h_{r(k_n)}^{k-s} J(s) < \\ & \bar{h}^{k-k_0+1} \bar{\mu}^N V(x(k_0), r(k_0)) + \\ & \bar{\mu}^N \sum_{s=k_0}^{k_1-1} \bar{h}^{k-s} J(s) + \dots + \\ & \bar{\mu} \sum_{s=k_{n-1}}^{k_n-1} \bar{h}^{k-s} J(s) + \sum_{s=k_n}^k \bar{h}^{k-s} J(s), \end{aligned} \quad (26)$$

其中 N 为时间区域 $[k_0, k]$ 内的系统跳变次数. 式(26)在0初始条件下, 有

$$0 < \bar{\mu}^N \sum_{s=k_0}^{k_1-1} \bar{h}^{k-s} J(s) + \dots + \sum_{s=k_n}^k \bar{h}^{k-s} J(s). \quad (27)$$

可得到

$$\begin{aligned} & \bar{\mu}^N \mathbf{E}\left\{ \sum_{s=k_0}^{k_1-1} \bar{h}^{k-s} z^T(s) z(s) \right\} + \dots + \\ & \bar{\mu} \mathbf{E}\left\{ \sum_{s=k_{n-1}}^{k_n-1} \bar{h}^{k-s} z^T(s) z(s) \right\} + \\ & \mathbf{E}\left\{ \sum_{s=k_n}^k \bar{h}^{k-s} z^T(s) z(s) \right\} < \\ & \bar{\mu}^N \sum_{s=k_0}^{k_1-1} \bar{h}^{k-s} \gamma^2 \omega^T(s) \omega(s) + \dots + \\ & \bar{\mu} \sum_{s=k_{n-1}}^{k_n-1} \bar{h}^{k-s} \gamma^2 \omega^T(s) \omega(s) + \sum_{s=k_n}^k \bar{h}^{k-s} \gamma^2 \omega^T(s) \omega(s). \end{aligned} \quad (28)$$

由于 $0 \leq N \leq \bar{N}$, 有

$$\bar{h}^k \mathbf{E}\left\{ \sum_{s=k_0}^k z^T(s) z(s) \right\} < \bar{h}^k \bar{\mu}^{\bar{N}} \gamma^2 \sum_{s=k_0}^k \omega^T(s) \omega(s). \quad (29)$$

令 $k_0=0, k=K_f, \bar{\gamma}^2 = \bar{\mu}^{\bar{N}} \gamma^2$, 由式(29), 得到

$$\mathbf{E}\left\{ \sum_{k=0}^{K_f} z^T(k) z(k) \right\} < \bar{\gamma}^2 \sum_{k=0}^{K_f} \omega^T(k) \omega(k).$$

与定理1的证明过程类似, 令

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \max_{r(0) \in \mathcal{I}} (\lambda_{\max}(R^{-\frac{1}{2}} P_{r(0)} R^{-\frac{1}{2}})), \\ \lambda_2 &= \min_{r(k_n) \in \mathcal{I}} (\lambda_{\min}(R^{-\frac{1}{2}} P_{r(k_n)} R^{-\frac{1}{2}})), \end{aligned}$$

可得到

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\{x^T(k) R x(k)\} < \\ & \frac{\bar{h}^{K_f} \bar{\mu}^{\bar{N}} \lambda_1 c_1 + \bar{h}^{K_f-1} \bar{\mu}^{\bar{N}} \gamma^2 (K_f - 1) d}{\lambda_2}. \end{aligned} \quad (30)$$

再由式(21c)和(21d), 得到 $x^T(k) R x(k) < c_2$, 结合定义5可知, S-MJS(1)关于 $(c_1, c_2, \bar{\gamma}, d, K_f, R, T_{\min}^i, T_{\max}^i)$ 是 σ - H_∞ 有限时间有界. \square

定理3 考虑不确定离散时间 S-MJS(8). 给定标量 $c_2 > c_1 > 0, d > 0$, 正整数 $T_{\min}^i, T_{\max}^i (i \in \mathcal{I})$ 和正定对称矩阵 R , 对于 $\forall i, j \in \mathcal{I}$ 和 $\forall \tau \in \mathcal{Z}_{[T_{\min}^j, T_{\max}^j]}$, 若存在标量 $\delta > 0, \gamma > 0, h_i > 1, \mu_i > 1, \psi > 0$, 正定对称矩阵 X_i 和矩阵 Y_i 满足以下线性矩阵不等式:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -h_i X_i & 0 & X_i A_i^T + Y_i^T B_i^T \\ * & -\gamma^2 I & C_i^T \\ * & * & -X_i \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \begin{bmatrix} X_i N_{ai}^T + Y_i^T N_{bi}^T & 0 & X_i D_i^T \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta M_i & 0 \\ -\delta I & 0 & 0 \\ * & -\delta I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (31a)$$

$$\begin{bmatrix} -\mu_j X_j \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi_{ji}(\tau) & X_j \mathcal{L}_j(\tau) \\ * & -\mathcal{X} \end{bmatrix} < 0, \quad (31b)$$

$$\psi R^{-1} < X_i < R^{-1}, \quad (31c)$$

$$\begin{bmatrix} \psi & \sqrt{\bar{h}^{K_f} \bar{\mu}^{\bar{N}} c_1} \\ * & c_2 - \bar{h}^{K_f-1} \bar{\mu}^{\bar{N}} \gamma^2 (K_f - 1) d \end{bmatrix} \succ 0, \quad (31d)$$

则可构造如下状态反馈控制律:

$$u(k) = Y_i X_i^{-1} x(k),$$

使得不确定离散时间 S-MJS(8)关于 $(c_1, c_2, \bar{\gamma}, d, K_f, R, T_{\min}^i, T_{\max}^i)$ 是 σ - H_∞ 有限时间有界的. 其中: $\bar{h} = \max_{i \in \mathcal{I}} \{h_i\}, \bar{\mu} = \max_{i \in \mathcal{I}} \{\mu_i\}, \mathcal{L}_j(\tau) = [\sqrt{\pi_{j1}(\tau)}, \sqrt{\pi_{j2}(\tau)}, \dots, \sqrt{\pi_{jM}(\tau)}], \mathcal{X} = \text{diag}\{X_1, X_2, \dots, X_M\}, \bar{N}$ 满足式(5), H_∞ 性能指标 $\bar{\gamma} = \sqrt{\bar{\mu}^{\bar{N}} \gamma^2}$.

证明 用 $A_i + B_i K_i + \Delta A_i(k) + \Delta B_i(k) K_i$ 替换式(22)中的 $A_i + \Delta A_i(k)$, 得到

$$\begin{aligned} & E\{V(x(k+1), r(k_n))\} - \\ & h_{r(k_n)} E\{V(x(k), r(k_n))\} - J(k) = \\ & X^T(k) \Upsilon_i X(k). \end{aligned} \quad (32)$$

其中: $X(k)$ 与式(11)相同, 且有

$$\Upsilon_i = \begin{bmatrix} \Upsilon_{11,i} & (A_i + B_i K_i + \Delta A_i(k) + \Delta B_i(k) K_i)^T P_i C_i \\ * & C_i^T P_i C_i - \gamma^2 I \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{11,i} = & (A_i + B_i K_i + \Delta A_i(k) + \Delta B_i(k) K_i)^T P_i (A_i + \\ & B_i K_i + \Delta A_i(k) + \Delta B_i(k) K_i) - h_i P_i + D_i^T D_i. \end{aligned}$$

应用Schur补引理, $\Upsilon_i < 0$ 等价于

$$\Xi_i = \begin{bmatrix} -h_i P_i + D_i^T D_i & 0 & \Xi_{13,i} \\ * & -\gamma^2 I & C_i^T \\ * & * & -P_i^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (33)$$

其中 $\Xi_{13,i} = A_i^T + K_i^T B_i^T + \Delta A_i^T(k) + K_i^T \Delta B_i^T(k)$. 将 Ξ_i 左右两边均乘以矩阵 $\text{diag}\{P_i^{-1}, I, I\}$, 并考虑式(2), $\Xi_i < 0$ 等价于

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -h_i P_i^{-1} + P_i^{-1} D_i^T D_i P_i^{-1} & 0 \\ * & -\gamma^2 I \\ * & * \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} P_i^{-1} A_i^T + P_i^{-1} K_i^T B_i^T \\ C_i^T \\ -P_i^{-1} \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} P_i^{-1} N_{ai}^T + P_i^{-1} K_i^T N_{bi}^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta^T(k) [0 \ 0 \ M_i^T] + \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_i \end{bmatrix} \Delta(k) [N_{ai} P_i^{-1} + N_{bi} K_i P_i^{-1} \ 0 \ 0] < 0. \end{aligned} \quad (34)$$

由引理1和Schur补引理, 并定义 $X_i = P_i^{-1}$ 和 $Y_i = K_i P_i^{-1}$, 与定理1的证明过程类似, 由式(31a)得到(33)成立. 由式(31b)~(31d)易得到(21b)~(21d). 类似定理2的证明可知, 不确定离散时间S-MJS(8)关于 $(c_1, c_2, \bar{\gamma}, d, K_f, R, \min^i, T_{\max}^i)$ 是 σ - H_∞ 有限时间有界的. \square

注5 式(31a)、(31b)和(31d)并非严格的线性矩阵不等式, 通过给定标量 h_i 和 μ_i 的方法可转化为线性矩阵不等式求解, 因此, 定理3给出的离散时间S-MJS的有限时间鲁棒 H_∞ 控制律设计方法可转化为下列基于线性矩阵不等式的优化问题:

$$\min_{h_i, \mu_i} \gamma^2;$$

$$X_i, Y_i, \psi, \delta, i \in \mathcal{I}.$$

s.t. 式(31a)~(31d).

3 算例仿真

考虑含有两个模态的离散时间S-MJS: $x(k+1) = A_i x(k) + B_i \omega(k)$. 两个模态分别如下:

模态1

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.28 & 0.54 \\ -1.43 & 1.56 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix};$$

模态2

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.27 & 0.49 \\ -0.29 & 1.07 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

该系统的半马尔可夫链转移概率为 $\theta_{12} = \theta_{21} = 1, \theta_{11} = \theta_{22} = 0$. 设定模态的驻留时间服从伯努利分布, 对于 $\forall i, j \in \{1, 2\}$, 设其概率密度函数为

$$[f_{ij}(\tau)] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{0.6^\tau \cdot 0.4^{15-\tau} \cdot 15!}{(15-\tau)! \tau!} \\ \frac{0.5^\tau \cdot 0.5^{15-\tau} \cdot 15!}{(15-\tau)! \tau!} & 0 \end{bmatrix}.$$

图1为模态驻留时间 τ 的概率密度函数 $f_{12}(\tau)$ 和 $f_{21}(\tau)$. 对于 $f_{12}(\tau)$, 当 $\tau \in \mathbf{Z}_{[1,4]}$ 时, 其概率密度 $f_{12}(\tau) < 0.01$, 在实际应用中可忽略, 因此可考虑取驻留时间下界 $T_{\min}^1 = 5$, 同理, 取驻留时间上界 $T_{\max}^1 = 13$; 对于 $f_{21}(\tau)$, 当 $\tau \in \mathbf{Z}_{[1,2]}$ 时, 其概率密度 $f_{21}(\tau) < 0.01$, 在实际应用中可忽略, 因此可考虑取驻留时间下界 $T_{\min}^2 = 3$, 同理, 取驻留时间上界 $T_{\max}^2 = 12$.

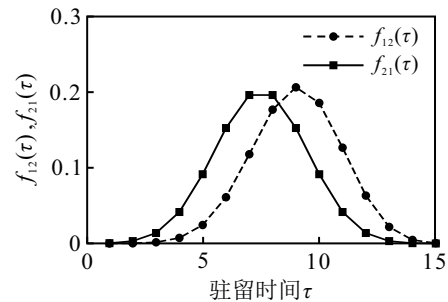


图1 驻留时间 τ 的概率密度函数 $f_{12}(\tau)$ 和 $f_{21}(\tau)$

为进一步分析各标量取值对 σ -有限时间有界判据的影响, 首先考虑不同的 h_i 、 μ_i ($i = 1, 2$), 并令 $c_1 = 1, R = \text{diag}\{1, 1\}, K_f = 50, d = 0.002, T_{\min}^1 = 5, T_{\max}^1 = 13, T_{\min}^2 = 3, T_{\max}^2 = 12$. 图2为改变 $h_i \in \mathbf{R}_{[1.001, 1.019]}$ 和 $\mu_i \in \mathbf{R}_{[1.01, 1.1]}$ 的值, 通过定理1解得系统满足 σ -有限时间有界的 c_2 最小值. 然后考虑不同的驻留时间上下界对 σ -有限时间有界判据的影响. 令 $c_1 = 1, R = \text{diag}\{1, 1\}, K_f = 50, d = 0.002, h_i = 1.001, \mu_i = 1.005, i = 1, 2$, 通过定理1求解不同驻留时间约束下满足 σ -有限时间有界的 σ 和 c_2 最小值, 如表

1所示. 由表1可见, σ 作为表征 σ -有限时间有界相对传统有限时间有界的近似误差参数, 对 (T_{\min}^i, T_{\max}^i) 的限制越严格, σ 越大. 不同的驻留时间约束会得到不同的 c_2 最小值.

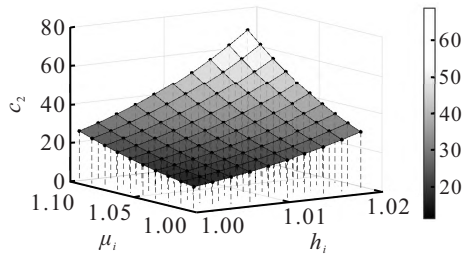


图2 h_i 和 μ_i ($i=1, 2$)变化时满足 σ -有限时间有界的 c_2 最小值

表1 T_{\min}^i, T_{\max}^i ($i=1, 2$)变化时 σ 和满足 σ -有限时间有界的 c_2 最小值

(T_{\min}^1, T_{\max}^1)	(T_{\min}^2, T_{\max}^2)	σ	c_2
(1, 15)	(1, 15)	1.5796×10^{-5}	12.673 3
(5, 13)	(3, 12)	0.011 0	10.493 1
(8, 13)	(7, 12)	0.306 7	10.218 3
(5, 9)	(3, 8)	0.449 6	10.534 5

考虑具有3个模态的离散时间S-MJS (1), 模态分别如下:

模态1

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.33 & 0.63 \\ -1.66 & 1.81 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0.03 \\ 0.03 \end{bmatrix}^T,$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.1 \end{bmatrix}, N_{a1} = \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.08 \end{bmatrix}^T, N_{b1} = 0.04;$$

模态2

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.31 & 0.57 \\ -0.34 & 1.25 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0.03 \\ 0.03 \end{bmatrix}^T,$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.1 \end{bmatrix}, N_{a2} = \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.08 \end{bmatrix}^T, N_{b2} = 0.04;$$

模态3

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.31 & 0.57 \\ -0.34 & 1.25 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, D_3 = \begin{bmatrix} 0.03 \\ 0.03 \end{bmatrix}^T,$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.1 \end{bmatrix}, N_{a3} = \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.08 \end{bmatrix}^T, N_{b3} = 0.04.$$

为了验证控制策略在多概率分布情况下的有效性, 设定模态1和模态3的驻留时间概率分布分别为

伯努利分布和韦布尔分布, 模态2则包含了以上两种不同类型的分布. 对于 $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$ 给定驻留时间概率密度函数为

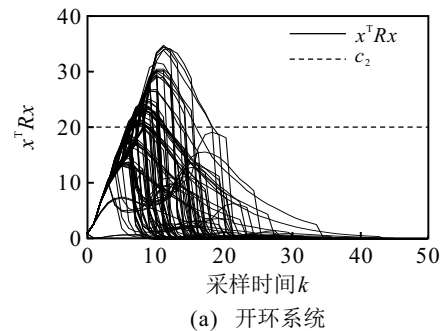
$$[f_{ij}(\tau)] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{0.6^\tau \cdot 0.4^{10-\tau} \cdot 10!}{(10-\tau)! \tau!} \\ 0.9(\tau-1)^2 - 0.9\tau^2 & 0 \\ 0.4(\tau-1)^{1.3} - 0.4\tau^{1.3} & 0.3(\tau-1)^{0.8} - 0.3\tau^{0.8} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{0.4^\tau \cdot 0.6^{10-\tau} \cdot 10!}{(10-\tau)! \tau!} \\ \frac{0.5^{10} \cdot 10!}{(10-\tau)! \tau!} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

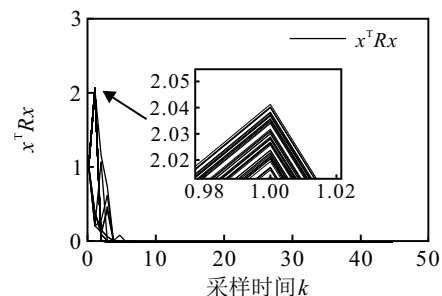
半马尔可夫链转移概率矩阵为

$$[\theta_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

令 $c_1 = 1, c_2 = 20, R = \text{diag}\{1, 1\}, K_f = 50, d = 0.002, \delta = 0.1$, 该S-MJS (1)不满足有限时间有界. 取 $T_{\min}^1 = 3, T_{\max}^1 = 8, T_{\min}^2 = 1, T_{\max}^2 = 7, T_{\min}^3 = 1, T_{\max}^3 = 3, h_i = 1.001, \mu_i = 1.001 (i = 1, 2, 3)$. 此时 $\sigma = 0.0573$, 由定理3, 可设计模态依赖状态反馈控制律使得闭环系统满足 σ - H_∞ 有限时间有界, 并得到控制律增益矩阵分别为 $K_1 = [8.0189 \quad -7.8659], K_2 = [3.0862 \quad -10.5193], K_3 = [0 \quad 0]$, 这时最优的扰动抑制性能为 $\bar{\gamma} = 1.3327$. 为了进一步验证控制律的有效性, 产生100次半马尔可夫随机跳变过程, 图3(a)和图3(b)分别为100次半马尔可夫随机跳变过程下开环系统和闭环系统的 $x^T R x$ 轨迹. 由图3(a)可见, 开环



(a) 开环系统



(b) 闭环系统

图3 S-MJS状态轨线 $x^T R x$ 的100次实现

系统不满足有限时间有界,而加入模态依赖状态反馈控制律的闭环系统能够满足有限时间有界,如图3(b)所示。

4 结论

本文研究了不确定离散时间S-MJS的有限时间鲁棒 H_∞ 控制问题。通过引入模态驻留时间的上下界,提出了不确定离散时间S-MJS的 σ -有限时间有界的概念。引入了SMK方法对半马尔可夫随机跳变过程进行建模,给出了不确定离散时间S-MJS是 σ -有限时间有界的充分条件。针对 H_∞ 性能指标,给出使得系统满足 σ - H_∞ 有限时间有界的充分条件,设计了模态依赖的状态反馈控制律保证闭环系统 σ - H_∞ 有限时间有界。最后,通过数值仿真算例验证了理论的可行性和有效性。

参考文献(References)

- [1] Li L, Ugrinovskii V A, Orsi R. Decentralized robust control of uncertain Markov jump parameter systems via output feedback[J]. *Automatica*, 2007, 43(11): 1932-1944.
- [2] Ugrinovskii V, Pota H R. Decentralized control of power systems via robust control of uncertain Markov jump parameter systems[J]. *International Journal of Control*, 2005, 78(9): 662-677.
- [3] Abdollahi F, Khorasani K. A decentralized Markovian jump H_∞ control routing strategy for mobile multi-agent networked systems[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2011, 19(2): 269-283.
- [4] You K Y, Fu M Y, Xie L H. Mean square stability for Kalman filtering with Markovian packet losses[J]. *Automatica: Journal of IFAC*, 2011, 47(12): 2647-2657.
- [5] Jacquemart D, Morio J. Conflict probability estimation between aircraft with dynamic importance splitting[J]. *Safety Science*, 2013, 51(1): 94-100.
- [6] Ocañ-Riola R. Non-homogeneous Markov processes for biomedical data analysis[J]. *Biometrical Journal*, 2005, 47(3): 369-376.
- [7] Huang J, Shi Y. Stochastic stability and robust stabilization of semi-Markov jump linear systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2013, 23(18): 2028-2043.
- [8] Zhang L X, Leng Y S, Colaneri P. Stability and stabilization of discrete-time semi-Markov jump linear systems via semi-Markov kernel approach[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(2): 503-508.
- [9] Ning Z P, Zhang L X, Lam J. Stability and stabilization of a class of stochastic switching systems with lower bound of sojourn time[J]. *Automatica*, 2018, 92: 18-28.
- [10] Ning Z P, Zhang L X, Colaneri P. Semi-Markov jump linear systems with incomplete sojourn and transition information: Analysis and synthesis[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(1): 159-174.
- [11] Yang T, Zhang L X, Lam H K. H_∞ fuzzy control of semi-Markov jump nonlinear systems under σ -error mean square stability[J]. *International Journal of Systems Science*, 2017, 48(11): 2291-2299.
- [12] Shen H, Xing M P, Xu S Y, et al. H_∞ stabilization of discrete-time nonlinear semi-Markov jump singularly perturbed systems with partially known semi-Markov kernel information[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2020, 68(2): 818-828.
- [13] He S P, Liu F. Robust finite-time H_∞ control of stochastic jump systems[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2010, 8(6): 1336-1341.
- [14] Zuo Z, Liu Y, Wang Y, et al. Finite-time stochastic stability and stabilisation of linear discrete-time Markovian jump systems with partly unknown transition probabilities[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2012, 6(10): 1522-1526.
- [15] Liu X H, Yu X H, Zhou X J, et al. Finite-time H_∞ control for linear systems with semi-Markovian switching[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 85(4): 2297-2308.
- [16] Wang J M, Ma S P, Zhang C H. Finite-time stabilization for nonlinear discrete-time singular Markov jump systems with piecewise-constant transition probabilities subject to average dwell time[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, 354(5): 2102-2124.
- [17] Li Z C, Li M, Xu Y L, et al. Finite-time stability and stabilization of semi-Markovian jump systems with time delay[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, 28(6): 2064-2081.
- [18] Feng H Y. Distributed finite-time stochastic control for spatially interconnected Markovian jump systems[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, 357(14): 9195-9219.
- [19] Qi W H, Zong G D, Karimi H R. Finite-time observer-based sliding mode control for quantized semi-Markov switching systems with application[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2020, 16(2): 1259-1271.
- [20] Barbu V, Limnios N. Empirical estimation for discrete-time semi-Markov processes with applications in reliability[J]. *Journal of Nonparametric Statistics*, 2006, 18(7/8): 483-498.
- [21] Qi W H, Gao X W. Finite-time H_∞ control for stochastic time-delayed Markovian switching systems with partly known transition rates and nonlinearity[J]. *International Journal of Systems Science*, 2016, 47(2): 500-508.

作者简介

郑柏浩(1997—),男,硕士生,从事随机跳变系统、有限时间控制等研究, E-mail: 6201905066@stu.jiangnan.edu.cn;
 稽小辅(1979—),男,教授,博士,从事鲁棒控制、网络控制系统等研究, E-mail: xiaofuji@jiangnan.edu.cn;
 朱毅(1997—),男,硕士生,从事随机跳变系统的研究, E-mail: 6201924231@stu.jiangnan.edu.cn.