$$\left\{\begin{array}{l}\Upsilon_{\varpi_k|1,1}^{(3,k)} \triangleq \tilde{C}_{\varpi_k}^{\top} Q_{\varpi_k} \tilde{C}_{\varpi_k} + \gamma \tilde{A}_{\varpi_k}^{\top} \mathcal{E}_{\varpi_k}\left(P^{(k+1)}\right) \tilde{A}_{\varpi_k} \geq \mathbf{0} \\ \Upsilon_{\varpi_k|1,2}^{(3,k)} = \left(\Upsilon_{\varpi_k|2,1}^{(3,k)}\right)^{\top} \triangleq \tilde{C}_{\varpi_k}^{\top} Q_{\varpi_k} D_{\varpi_k} + \gamma \tilde{A}_{\varpi_k}^{\top} \mathcal{E}_{\varpi_k}\left(P^{(k+1)}\right) \tilde{B}_{\varpi_k} \\ \Upsilon_{\varpi_k|1,3}^{(3,k)} = \left(\Upsilon_{\varpi_k|3,1}^{(3,k)}\right)^{\top} \triangleq \tilde{C}_{\varpi_k}^{\top} Q_{\varpi_k} \tilde{H}_{\varpi_k} + \gamma \tilde{A}_{\varpi_k}^{\top} \mathcal{E}_{\varpi_k}\left(P^{(k+1)}\right) \tilde{F}_{\varpi_k} \\ \Upsilon_{\varpi_k|2,2}^{(3,k)} \triangleq D_{\varpi_k}^{\top} Q_{\varpi_k} D_{\varpi_k} + R_{\varpi_k} + \gamma \tilde{B}_{\varpi_k}^{\top} \mathcal{E}_{\varpi_k}\left(P^{(k+1)}\right) \tilde{B}_{\varpi_k} > \mathbf{0} \\ \Upsilon_{\varpi_k|2,3}^{(3,k)} = \left(\Upsilon_{\varpi_k|3,2}^{(3,k+1)}\right)^{\top} \triangleq D_{\varpi_k}^{\top} Q_{\varpi_k} \tilde{H}_{\varpi_k} + \gamma \tilde{B}_{\varpi_k}^{\top} \mathcal{E}_{\varpi_k}\left(P^{(k+1)}\right) \tilde{F}_{\varpi_k} \\ \Upsilon_{\varpi_k|3,3}^{(3,k)} \triangleq \tilde{H}_{\varpi_k}^{\top} Q_{\varpi_k} \tilde{H}_{\varpi_k} - \theta^2 I + \gamma \tilde{F}_{\varpi_k}^{\top} \mathcal{E}_{\varpi_k}\left(P^{(k+1)}\right) \tilde{F}_{\varpi_k}\end{array}\right. \tag{4-21}$$

可以发现关于控制律 $u = \{u_{k_0}, u_{k_0+1}, \cdots\}$ 以及噪声序列 $\tilde{w} = \{\tilde{w}_{k_0}, \tilde{w}_{k_0+1}, \cdots\}$ 的极小极大问题(4-13)已经转化为一个仅仅与 u_{k_0} 和 $\tilde{w}_{k_0}$ 有关的无约束优化问题(4-19)。首先，令 $\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i)$ 对 u_{k_0} 偏导数为 0，求解使得 $\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i)$ 最小的 u_{k_0}，即

$$\frac{\partial \mathcal{J}\left(\tilde{x}_{k_0}, i\right)}{\partial u_{k_0}} = \tilde{x}_{k_0}^{\top} \Upsilon_{i|1,2}^{(3,k_0)} + u_{k_0}^{\top} \Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)} + \tilde{w}_{k_0}^{\top} \Upsilon_{i|3,2}^{(3,k_0)} = \mathbf{0} \tag{4-22}$$

接着，令 $\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i)$ 对 $\tilde{w}_{k_0}$ 偏导数为 0，求解使得 $\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i)$ 最大的 $\tilde{w}_{k_0}$，即

$$\frac{\partial \mathcal{J}\left(\tilde{x}_{k_0}, i\right)}{\partial \tilde{w}_{k_0}} = \tilde{x}_{k_0}^{\top} \Upsilon_{i|1,3}^{(3,k_0)} + u_{k_0}^{\top} \Upsilon_{i|2,3}^{(3,k_0)} + \tilde{w}_{k_0}^{\top} \Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)} = \mathbf{0} \tag{4-23}$$

显然 $\Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)} > \mathbf{0}$ 是可逆矩阵，然而 $\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)} = \tilde{H}_i^{\top} Q_i \tilde{H}_i - \theta^2 I + \gamma \tilde{F}_i^{\top} \mathcal{E}_i(P^{(k_0+1)}) \tilde{F}_i$ 是否可逆与预设的 L_2 增益 θ 有关，此处无法判断，暂时假设 $\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)}$ 也是可逆的。联立(4-22)与(4-23)，可以得到

$$\left\{\begin{array}{l}\Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)} u_{k_0} + \Upsilon_{i|2,3}^{(3,k_0)} \tilde{w}_{k_0} = -\Upsilon_{i|2,1}^{(3,k_0)} \tilde{x}_{k_0} \\ \Upsilon_{i|3,2}^{(3,k_0)} u_{k_0} + \Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)} \tilde{w}_{k_0} = -\Upsilon_{i|3,1}^{(3,k_0)} \tilde{x}_{k_0}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}u_{k_0} = -\left(\Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)}\right)^{-1}\left(\Upsilon_{i|2,1}^{(3,k_0)} \tilde{x}_{k_0} + \Upsilon_{i|2,3}^{(3,k_0)} \tilde{w}_{k_0}\right) \\ \tilde{w}_{k_0} = -\left(\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)}\right)^{-1}\left(\Upsilon_{i|3,1}^{(3,k_0)} \tilde{x}_{k_0} + \Upsilon_{i|3,2}^{(3,k_0)} u_{k_0}\right)\end{array}\right. \tag{4-24}$$

解得

$$\left\{\begin{array}{l}u_{k_0} = \left\{\Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)} - \Upsilon_{i|2,3}^{(3)}\left(\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)}\right)^{-1} \Upsilon_{i|3,2}^{(3,k_0)}\right\}^{-1}\left\{\Upsilon_{i|2,3}^{(3,k_0)}\left(\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)}\right)^{-1} \Upsilon_{i|3,1}^{(3,k_0)} - \Upsilon_{i|2,1}^{(3,k_0)}\right\} \tilde{x}_{k_0} \\ \quad = K_{i,u}^{(k_0)} \tilde{x}_{k_0} \\ \tilde{w}_{k_0} = \left\{\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)} - \Upsilon_{i|3,2}^{(3)}\left(\Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)}\right)^{-1} \Upsilon_{i|2,3}^{(3,k_0)}\right\}^{-1}\left\{\Upsilon_{i|3,2}^{(3,k_0)}\left(\Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)}\right)^{-1} \Upsilon_{i|2,1}^{(3,k_0)} - \Upsilon_{i|3,1}^{(3,k_0)}\right\} \tilde{x}_{k_0} \\ \quad = K_{i,\tilde{w}}^{(k_0)} \tilde{x}_{k_0}\end{array}\right. \tag{4-25}$$

此外，考虑 $\mathcal{J}(\tilde{x}_{k_0}, i)$ 对 u_{k_0} 和 $\tilde{w}_{k_0}$ 的二阶偏导数有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathcal{J}\left(\tilde{x}_{k_0}, i\right)}{\partial u_{k_0}^2} = \Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)} = D_i^\top D_i + R_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i\left(P^{(k_0+1)}\right) \tilde{B}_i > \mathbf{0} \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{J}\left(\tilde{x}_{k_0}, i\right)}{\partial \tilde{w}_{k_0}^2} = \Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)} = \tilde{H}_i^\top \tilde{H}_i - \theta^2 I + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i\left(P^{(k_0+1)}\right) \tilde{F}_i \end{cases} \tag{4-26}$$

由于$\Upsilon_{i|2,2}^{(3,k_0)} > \mathbf{0}$，因此(4-25)求得的$u_{k_0}$为极小极大问题(4-13)的极小值。同时，本文期望(4-13)求得的$\tilde{w}_{k_0}$应该为极小极大问题(4-13)的极小值，这就要求$\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)}$是负定的，即$\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)} < \mathbf{0}$。由于预设的$L_2$增益$\theta$，此处也是无法直接判断的，本文暂时假设$\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)} < \mathbf{0}$。需要注意的是，假设$\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)} < \mathbf{0}$后，$\Upsilon_{i|3,3}^{(3,k_0)}$显然是可逆矩阵。定义$K_i^{(k)} = \begin{bmatrix} I & K_{i,u}^{(k)\top} & K_{i,\tilde{w}}^{(k)\top} \end{bmatrix}^\top$，有$X_k = \begin{bmatrix} \tilde{x}_k^\top & u_k^\top & \tilde{w}_k^\top \end{bmatrix}^\top = K_i^{(k)} \tilde{x}_k$，代入(4-19)中，得

$$\mathcal{J}\left(\tilde{x}_{k_0}, i\right) = \left\| X_{k_0} \right\|_{\Upsilon_i^{(3,k_0)}}^2 = \left\| K_i^{(k_0)} \tilde{x}_{k_0} \right\|_{\Upsilon_i^{(3,k_0)}}^2 = \mathbf{0} \tag{4-27}$$

显然(4-27)与(4-14)是等价的，即

$$\left\| K_i^{(k_0)} \tilde{x}_{k_0} \right\|_{\Upsilon_i^{(3,k_0)}}^2 = \left\| \tilde{x}_{k_0} \right\|_{P_i^{(k_0)}}^2 \Leftrightarrow \tilde{x}_{k_0}^\top \left\{ \left\| K_i^{(k_0)} \right\|_{\Upsilon_i^{(3,k_0)}}^2 - P_i^{(k_0)} \right\} \tilde{x}_{k_0} = \mathbf{0} \tag{4-28}$$

由于本文假设的$\tilde{x}_{k_0}$是任意的，因此(4-28)对任意的$\tilde{x}_{k_0}$都成立，那么

$$\left\| K_i^{(k_0)} \right\|_{\Upsilon_i^{(3,k_0)}}^2 - P_i^{(k_0)} = \mathbf{0} \tag{4-29}$$

(4-17)就是k_0时刻的博弈耦合差分 Riccati 方程，利用相同的推导可以得到对应$k = k_0, \cdots, \infty$各个时刻的博弈耦合差分 Riccati 方程。同时考虑到随着$k \to \infty$，解矩阵$P_i^{(k)}$收敛，即$\lim_{k\to\infty} P_i^{(k)} = P_i$，$\Upsilon_{\varpi_k}^{(1)}$、$\Upsilon_{\varpi_k}^{(2,k)}$、$\Upsilon_{\varpi_k}^{(3,k)}$、$K_{\varpi_k,u}^{(k)}$、$K_{\varpi_k,\tilde{w}}^{(k)}$、$K_{\varpi_k}^{(k)}$也变为定常矩阵，博弈耦合差分 Riccati 方程会变为 GCARE：

$$\left\| K_i \right\|_{\Upsilon_i^{(3)}}^2 - P_i = \mathbf{0} \tag{4-30}$$

同理，可以给出此时的H_∞控制器以及最坏噪声增益：

$$\begin{cases} K_{i,u} = \left\{ \Upsilon_{i|2,2}^{(3)} - \Upsilon_{i|2,3}^{(3)} \left(\Upsilon_{i|3,3}^{(3)} \right)^{-1} \Upsilon_{i|3,2}^{(3)} \right\}^{-1} \left\{ \Upsilon_{i|2,3}^{(3)} \left(\Upsilon_{i|3,3}^{(3)} \right)^{-1} \Upsilon_{i|3,1}^{(3)} - \Upsilon_{i|2,1}^{(3)} \right\} \\ K_{i,\tilde{w}} = \left\{ \Upsilon_{i|3,3}^{(3)} - \Upsilon_{i|3,2}^{(3)} \left(\Upsilon_{i|2,2}^{(3)} \right)^{-1} \Upsilon_{i|2,3}^{(3)} \right\}^{-1} \left\{ \Upsilon_{i|3,2}^{(3)} \left(\Upsilon_{i|2,2}^{(3)} \right)^{-1} \Upsilon_{i|2,1}^{(3)} - \Upsilon_{i|3,1}^{(3)} \right\} \end{cases} \tag{4-31}$$

下面给出(4-30)的几种等价形式便于后续理论推导。首先，考虑到(4-30)中的$\Upsilon_{\varpi_k}^{(3,k)} = \Upsilon_{\varpi_k}^{(1)} + \gamma \Upsilon_{\varpi_k}^{(2,k)}$可以变为$\Upsilon_i^{(3)} = \Upsilon_i^{(1)} + \gamma \Upsilon_i^{(2)}$，代入到(4-30)中，得到

$$\begin{aligned} P_i &= \left\| K_i \right\|_{\Upsilon_i^{(1)}}^2 + \left\| K_i \right\|_{\gamma \Upsilon_i^{(2)}}^2 \\ &= \gamma \left\| \tilde{A}_i + \tilde{B}_i K_{i,u} + \tilde{F}_i K_{i,\tilde{w}} \right\|_{\mathcal{E}_i(P)}^2 + \left\| K_i \right\|_{\Upsilon_i^{(1)}}^2 \end{aligned} \tag{4-32}$$

(4-32)是 GCARE 的闭环控制器形式，其中 $\tilde{A}_i+\tilde{B}_iK_{i,u}+\tilde{F}_iK_{i,\tilde{w}}$ 是跟踪误差系统 $\mathcal{M}_{te}^{(2)}$ 引入反馈控制律 $u_k=K_{\varpi_k,u}\tilde{x}_k$ 以及最坏噪声 $\tilde{w}_k=K_{\varpi_k,\tilde{w}}\tilde{x}_k$ 后的闭环控制器。可以发现(4-32)的结构类似于引理 2.1 中的耦合 Lyapunov 方程，因此该形式可以用于闭环系统的稳定性分析。

考察 $\begin{bmatrix}K_{i,u}^\top & K_{i,\tilde{w}}^\top\end{bmatrix}^\top$，将(4-24)化为增广矩阵的形式，得

$$\begin{bmatrix}\Upsilon_{i|2,2}^{(3)} & \Upsilon_{i|2,3}^{(3)}\\ \Upsilon_{i|3,2}^{(3)} & \Upsilon_{i|3,3}^{(3)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K_{i,u}\\ K_{i,\tilde{w}}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\Upsilon_{i|2,1}^{(3)}\\ \Upsilon_{i|3,1}^{(3)}\end{bmatrix} \tag{4-33}$$

由于 $\Upsilon_{i|2,2}^{(3)}$ 与 $\Upsilon_{i|3,3}^{(3)}$ 可逆，可以得到

$$\begin{bmatrix}K_{i,u}\\ K_{i,\tilde{w}}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\Upsilon_{i|2,2}^{(3)} & \Upsilon_{i|2,3}^{(3)}\\ \Upsilon_{i|3,2}^{(3)} & \Upsilon_{i|3,3}^{(3)}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\Upsilon_{i|2,1}^{(3)}\\ \Upsilon_{i|3,1}^{(3)}\end{bmatrix} \tag{4-34}$$

将 $K_i^{(k)}=\begin{bmatrix}I & K_{i,u}^{(k)\top} & K_{i,\tilde{w}}^{(k)\top}\end{bmatrix}^\top$ 以及(4-34)代入(4-30)中，得到

$$\begin{aligned}P_i&=\left\|\begin{bmatrix}I & K_{i,u}^\top & K_{i,\tilde{w}}^\top\end{bmatrix}^\top\right\|_{\Upsilon_i^{(3)}}^2\\
&=\begin{bmatrix}I & K_{i,u}^\top & K_{i,\tilde{w}}^\top\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Upsilon_{i|1,1}^{(3)} & \Upsilon_{i|1,2}^{(3)} & \Upsilon_{i|1,3}^{(3)}\\ \Upsilon_{i|2,1}^{(3)} & \Upsilon_{i|2,2}^{(3)} & \Upsilon_{i|2,3}^{(3)}\\ \Upsilon_{i|3,1}^{(3)} & \Upsilon_{i|3,2}^{(3)} & \Upsilon_{i|3,3}^{(3)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & K_{i,u}^\top & K_{i,\tilde{w}}^\top\end{bmatrix}^\top\\
&=\Upsilon_{i|1,1}^{(3)}-\begin{bmatrix}\Upsilon_{i|2,1}^{(3)}\\ \Upsilon_{i|3,1}^{(3)}\end{bmatrix}^\top\begin{bmatrix}\Upsilon_{i|2,2}^{(3)} & \Upsilon_{i|2,3}^{(3)}\\ \Upsilon_{i|3,2}^{(3)} & \Upsilon_{i|3,3}^{(3)}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\Upsilon_{i|2,1}^{(3)}\\ \Upsilon_{i|3,1}^{(3)}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{4-35}$$

将(4-21)中的具体表达式代入(4-35)中，得到

$$\begin{aligned}P_i=&\gamma\tilde{A}_i^\top\mathcal{E}_i(P)\tilde{A}_i+\tilde{C}_i^\top Q_i\tilde{C}_i-\begin{bmatrix}D_i^\top Q_i\tilde{C}_i+\gamma\tilde{B}_i^\top\mathcal{E}_i(P)\tilde{A}_i\\ \tilde{H}_i^\top Q_i\tilde{C}_i+\gamma\tilde{F}_i^\top\mathcal{E}_i(P)\tilde{A}_i\end{bmatrix}^\top\\
&\times\begin{bmatrix}D_i^\top Q_iD_i+R_i+\gamma\tilde{B}_i^\top\mathcal{E}_i(P)\tilde{B}_i & D_i^\top Q_i\tilde{H}_i+\gamma\tilde{B}_i^\top\mathcal{E}_i(P)\tilde{F}_i\\ \tilde{H}_i^\top Q_iD_i+\gamma\tilde{F}_i^\top\mathcal{E}_i(P)\tilde{B}_i & \tilde{H}_i^\top Q_i\tilde{H}_i-\theta^2I+\gamma\tilde{F}_i^\top\mathcal{E}_i(P)\tilde{F}_i\end{bmatrix}^{-1}\\
&\times\begin{bmatrix}D_i^\top Q_i\tilde{C}_i+\gamma\tilde{B}_i^\top\mathcal{E}_i(P)\tilde{A}_i\\ \tilde{H}_i^\top Q_i\tilde{C}_i+\gamma\tilde{F}_i^\top\mathcal{E}_i(P)\tilde{A}_i\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{4-36}$$

(4-36)中只有系统参数与权重矩阵，可用于解矩阵 P 的理论分析与求解。

定理 4.1 (控制 GCARE)[29]: 满足极小极大问题(4-13)的控制律与噪声扰动为 $u_k=K_{\varpi_k,u}\tilde{x}_k$ 以及 $\tilde{w}_k=K_{\varpi_k,\tilde{w}}\tilde{x}_k$，其具体形式为

$$\begin{cases}K_{i,u}=\left\{\Upsilon_{i|2,2}^{(3)}-\Upsilon_{i|2,3}^{(3)}\left(\Upsilon_{i|3,3}^{(3)}\right)^{-1}\Upsilon_{i|3,2}^{(3)}\right\}^{-1}\left\{\Upsilon_{i|2,3}^{(3)}\left(\Upsilon_{i|3,3}^{(3)}\right)^{-1}\Upsilon_{i|3,1}^{(3)}-\Upsilon_{i|2,1}^{(3)}\right\}\\ K_{i,\tilde{w}}=\left\{\Upsilon_{i|3,3}^{(3)}-\Upsilon_{i|3,2}^{(3)}\left(\Upsilon_{i|2,2}^{(3)}\right)^{-1}\Upsilon_{i|2,3}^{(3)}\right\}^{-1}\left\{\Upsilon_{i|3,2}^{(3)}\left(\Upsilon_{i|2,2}^{(3)}\right)^{-1}\Upsilon_{i|2,1}^{(3)}-\Upsilon_{i|3,1}^{(3)}\right\}\end{cases} \tag{4-37}$$

其中，P 是 GCARE(4-38)的唯一镇定解：

$$
\begin{aligned}
P_i = \gamma \tilde{A}_i^\top \mathcal{E}_i(P)\tilde{A}_i + \tilde{C}_i^\top Q_i \tilde{C}_i - &\begin{bmatrix} D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i\left(P\right)\tilde{A}_i \\ \tilde{H}_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i\left(P\right)\tilde{A}_i \end{bmatrix}^\top \\
&\times \begin{bmatrix} D_i^\top Q_i D_i + R_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i\left(P\right)\tilde{B}_i & D_i^\top Q_i \tilde{H}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i\left(P\right)\tilde{F}_i \\ \tilde{H}_i^\top Q_i D_i + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i\left(P\right)\tilde{B}_i & \tilde{H}_i^\top Q_i \tilde{H}_i - \theta^2 I + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i\left(P\right)\tilde{F}_i \end{bmatrix}^{-1} \\
&\times \begin{bmatrix} D_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{B}_i^\top \mathcal{E}_i\left(P\right)\tilde{A}_i \\ \tilde{H}_i^\top Q_i \tilde{C}_i + \gamma \tilde{F}_i^\top \mathcal{E}_i\left(P\right)\tilde{A}_i \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4-38}
$$

4.3.2 H_∞ 滤波问题对应的 GCARE 以及滤波器

由于估计误差系统 $\mathcal{M}_{ee}$ 受过程噪声与量测噪声影响，因此噪声序列 $\tilde{w} = \{\tilde{w}_{k_0}, \tilde{w}_{k_0+1}, \cdots\}$ 也被引入到性能指标(4-5)中，但是目前无法判断随机噪声扰动 $\tilde{w} = \{\tilde{w}_{k_0}, \tilde{w}_{k_0+1}, \cdots\}$ 对 $\mathcal{M}_{ee}$ 的影响。针对性能指标(4-5)，假设 k_0 时刻 $\mathcal{M}_{ee}$ 的状态为 $\tilde{x}_{k_0}$，模态为 $\varpi_{k_0} = i$。基于博弈论的思想，本文假设 $\mathcal{M}_{ee}$ 处于使得性能指标(4-5)最大的随机噪声扰动 $\tilde{w} = \{\tilde{w}_{k_0}, \tilde{w}_{k_0+1}, \cdots\}$ 之下，同时尝试寻找 $u = \{u_{k_0}, u_{k_0+1}, \cdots\}$ 使得性能指标(2-25)尽可能的小，也即求解下列极小极大问题：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}\left(\breve{x}_k, \varpi_{k_0} = i \right) &\triangleq \min_{\hat{x}} \max_{\tilde{w}} \mathcal{J}\left(\breve{x}_k, \tilde{w}_{k_0}, \varpi_{k_0} = i \right) \\
&= \min_{\hat{x}} \max_{\tilde{w}} \mathbb{E}\left\{ \sum\nolimits_{k=k_0}^{\infty} \left\| \mathcal{X}_k \right\|^2_{\Phi^{(1)}_{\varpi_k}} \right\}
\end{aligned} \tag{4-39}
$$

由于极小极大问题(4-39)的求解推导过程与定理 4.1 类似，且文献[58]已经给出了类似问题的解，因此本文不赘述极小极大问题(4-39)的求解与理论推导过程，仅仅给出相应结论。

定义

$$
\Phi_i^{(2)} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{F}_i \tilde{F}_i^\top & \tilde{F}_i \tilde{G}_i^\top & \mathbf{0} \\ \tilde{G}_i \tilde{F}_i^\top & G_i G_i^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\vartheta^2 I \end{bmatrix} \tag{4-40}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
\Phi_i^{(3)} &\triangleq \begin{bmatrix} \tilde{A}_i \mathcal{E}_i\left(P\right)\tilde{A}_i^\top + \tilde{F}_i \tilde{F}_i^\top & \tilde{F}_i \tilde{G}_i^\top + \tilde{A}_i \mathcal{E}_i\left(P\right)\tilde{E}_i^\top & \tilde{A}_i \mathcal{E}_i\left(P\right) \\ \tilde{G}_i \tilde{F}_i^\top + \tilde{E}_i \mathcal{E}_i\left(P\right)\tilde{A}_i^\top & \tilde{G}_i \tilde{G}_i^\top + \tilde{E}_i \mathcal{E}_i\left(P\right)\tilde{E}_i^\top & \tilde{E}_i \mathcal{E}_i\left(P\right) \\ \mathcal{E}_i\left(P\right)\tilde{A}_i^\top & \mathcal{E}_i\left(P\right)\tilde{E}_i^\top & \mathcal{E}_i\left(P\right) - \vartheta^2 I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \Phi_{i|1,1}^{(3)} & \Phi_{i|1,2}^{(3)} & \Phi_{i|1,3}^{(3)} \\ \Phi_{i|2,1}^{(3)} & \Phi_{i|2,2}^{(3)} & \Phi_{i|2,3}^{(3)} \\ \Phi_{i|3,1}^{(3)} & \Phi_{i|3,2}^{(3)} & \Phi_{i|3,3}^{(3)} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4-41}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left\| K_{\varpi_k,\tilde{w}}\bar{x}_k - \bar{w}_k \right\|^2_{\Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|3,3}} - \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Upsilon^{(1)}_{\varpi_k|1,1} & \Upsilon^{(1)}_{\varpi_k|1,2} & \Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|1,3} \\ \Upsilon^{(1)}_{\varpi_k|2,1} & \Upsilon^{(1)}_{\varpi_k|2,2} & \Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|2,3} \\ \Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|3,1} & \Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|3,2} & \Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ K_{\varpi_k,\tilde{w}}\bar{x}_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Upsilon^{(1)}_{\varpi_k|1,1} & \Upsilon^{(1)}_{\varpi_k|1,2} & \Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|1,3} \\ \Upsilon^{(1)}_{\varpi_k|2,1} & \Upsilon^{(1)}_{\varpi_k|2,2} & \Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|2,3} \\ \Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|3,1} & \Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|3,2} & \Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ K_{\varpi_k,\tilde{w}}\bar{x}_k \end{bmatrix} \\
&= -\bar{x}_k^\top K_{\varpi_k,\tilde{w}}^\top \Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|3,3}\bar{w}_k - \bar{w}_k^\top \Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|3,3} K_{\varpi_k,\tilde{w}}\bar{x}_k \\
&\quad - \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|1,3} \\ 0 & 0 & \Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|2,3} \\ \Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|3,1} & \Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|3,2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \end{bmatrix} \\
&= \left(\Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|3,1}\bar{x}_k + \Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|3,2}\bar{u}_k \right) \Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|3,3}\bar{w}_k + \bar{w}_k^\top \left(\Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|3,1}\bar{x}_k + \Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|3,2}\bar{u}_k \right) \\
&\quad - \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|1,3} \\ 0 & 0 & \Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|2,3} \\ \Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|3,1} & \Upsilon^{(3)}_{\varpi_k|3,2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \end{bmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{4-53}
$$

4.4 基于策略迭代求解 GCARE

本小节讨论 GCARE(4-38)以及(4-43)唯一镇定解的求解问题，可以发现 GCARE(4-38)和(4-43)在结构上是类似的，因此本文下面主要分析 TP 已知和未知两种情况下(4-38)唯一镇定解的求解问题。

4.4.1 转移概率已知时的 GCARE 求解

在本文的第 3.3 小节中，本文提出 Kleinman 迭代算法用于迭代求解 CARE(3-26)。对于 GCARE(4-38)，Kleinman 迭代算法依然适用，但是其收敛性难以证明。本文尝试使用 Newton-Kantorovich 定理证明 Kleinman 迭代算法的收敛性。

定理 4.3 (Kleinman 算法): GCARE(4-38)存在唯一镇定解 P 时，给定镇定控制器 $K_u^{(l)} = (K_{1,u}^{(l)}, \cdots, K_{N,u}^{(l)})$ 与 $K_{\tilde{w}}^{(l)} = (K_{1,\tilde{w}}^{(l)}, \cdots, K_{N,\tilde{w}}^{(l)})$，若 $P^{(l)} = (P_1^{(l)}, \cdots, P_N^{(l)})$ 是下列 CLE 的唯一镇定解：

$$
\begin{bmatrix} \gamma \left\| \Gamma_1^{(l)} \right\|^2_{\mathcal{E}_1(P^{(l)})} - P_1^{(l)} + \left\| K_1^{(l)} \right\|^2_{\Upsilon_1^{(1)}} \\ \vdots \\ \gamma \left\| \Gamma_N^{(l)} \right\|^2_{\mathcal{E}_N(P^{(l)})} - P_N^{(l)} + \left\| K_N^{(l)} \right\|^2_{\Upsilon_N^{(1)}} \end{bmatrix} = \mathbf{0}
\tag{4-54}
$$

其中$\Gamma_i^{(l)}=\gamma^{1/2}(\tilde{A}_i+\tilde{B}_i K_{i,u}^{(l)}+\tilde{F}_i K_{i,\tilde{w}}^{(l)})$，$K_i^{(l)}=\begin{bmatrix} I & K_{i,u}^{(l)\top} & K_{i,\tilde{w}}^{(l)\top}\end{bmatrix}^\top$。那么基于$P^{(l)}$可以进一步给出

$$\begin{bmatrix} K_{i,u}^{(l+1)} \\ K_{i,\tilde{w}}^{(l+1)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \Upsilon_{i|2,2}^{(3,l)} & \Upsilon_{i|2,3}^{(3,l)} \\ \Upsilon_{i|3,2}^{(3,l)} & \Upsilon_{i|3,3}^{(3,l)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Upsilon_{i|2,1}^{(3,l)} \\ \Upsilon_{i|3,1}^{(3,l)} \end{bmatrix} \tag{4-55}$$

若选择镇定控制器$K_u^{(l)}=(K_{1,u}^{(l)},\cdots,K_{N,u}^{(l)})$与$K_{\tilde{w}}^{(l)}=(K_{1,\tilde{w}}^{(l)},\cdots,K_{N,\tilde{w}}^{(l)})$进行初始迭代，则$\lim\limits_{l\to\infty}P^{(l)}=P$。

证明：将 GCARE(4-26)定义为等价的非线性算子：

$$\mathcal{F}(P)=\begin{bmatrix}\mathcal{F}_1(P) & \mathcal{F}_2(P) & \cdots & \mathcal{F}_N(P)\end{bmatrix}^\top \tag{4-56}$$

其中$\mathcal{F}_i(P)$为：

$$\mathcal{F}_i(P)=\Upsilon_{i|1,1}^{(3)}-P_i-\begin{bmatrix} \Upsilon_{i|2,1}^{(3)} \\ \Upsilon_{i|3,1}^{(3)} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Upsilon_{i|2,2}^{(3)} & \Upsilon_{i|2,3}^{(3)} \\ \Upsilon_{i|3,2}^{(3)} & \Upsilon_{i|3,3}^{(3)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Upsilon_{i|2,1}^{(3)} \\ \Upsilon_{i|3,1}^{(3)} \end{bmatrix} \tag{4-57}$$

显然$\mathcal{F}(P)$的零点就是 GCARE(4-38)的解。定义牛顿迭代序列为：

$$P^{(l+1)}=P^{(l)}-\left\{\dot{\mathcal{F}}\left(P^{(l)}\right)\right\}^{-1}\mathcal{F}\left(P^{(l)}\right) \tag{4-58}$$

其中$\dot{\mathcal{F}}(P^{(l)})$为$\mathcal{F}$在$P^{(l)}$处的 Fréchet 导数。下面证明基于$P^{(l)}$的牛顿迭代(4-58)与 Kleinman 迭代(4-54)~(4-55)等价。牛顿迭代(4-58)在$\dot{\mathcal{F}}(P^{(l)})$可逆时等价于为对(4-59)求解$P^{(l+1)}$：

$$\dot{\mathcal{F}}\left(P^{(l)}\right)P^{(l+1)}-\dot{\mathcal{F}}\left(P^{(l)}\right)P^{(l)}+\mathcal{F}\left(P^{(l)}\right)=\mathbf{0} \tag{4-59}$$

Fréchet 导数通常难以直接计算，下面引入 Gâteaux 导数便于 Fréchet 导数的计算。$\mathcal{F}$在P处的 Gâteaux 导数$\dot{\mathcal{F}}_G(P)$，定义如下：

$$\mathcal{F}(P+\alpha\mathcal{V})=\mathcal{F}(P)+\alpha\dot{\mathcal{F}}_G(P)\mathcal{V}+o(\alpha),\|\mathcal{V}\|=1 \tag{4-60}$$

其中，α为零点的某个邻域内的任意实数，$o(\alpha)$为α的高阶无穷小，则$\mathcal{F}$在P处的 Gâteaux 导数可直接通过下式表达：

$$\dot{\mathcal{F}}_G(P)\mathcal{V}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathcal{F}(P+\alpha\mathcal{V})-\mathcal{F}(P)}{\alpha} \tag{4-61}$$

关于 Fréchet 导数与 Gâteaux 导数的关系有：如果$\mathcal{F}$在P的某个邻域内 Gâteaux 导数存在，且$\mathcal{F}$在P处的 Gâteaux 导数$\dot{\mathcal{F}}_G(P)$连续，那么$\mathcal{F}$在P处的 Gâteaux 导数$\dot{\mathcal{F}}_G(P)$等于$\mathcal{F}$在P处的 Fréchet 导数$\dot{\mathcal{F}}(P)$，后续推导将 Fréchet 导数与 Gâteaux 导数都表示为$\dot{\mathcal{F}}(P)$。考察$\mathcal{F}_i(P)$及其 Gâteaux 导数$\dot{\mathcal{F}}_i(P)$，对于增量$\alpha\mathcal{V}$有: