

江南大学

硕士学位论文

题目：离散奇异马尔可夫跳变系统的有限时间控制

英文并列题目：Finite-Time Control of Discrete-Time
Singular Markov Jump Systems

研究生：严学庆

专业：控制科学与工程

研究方向：控制理论与控制工程

导师：嵇小辅 教授

指导小组成员：

学位授予日期：2023 年 6 月

答辩委员会主席：沈艳霞

江南大学

地址：无锡市蠡湖大道 1800 号

二〇二三年六月

摘要

实际的控制系统在运行的过程中,可能会出现系统硬件故障、环境条件突然变化、多个子系统之间的连接方式发生改变等问题。马尔可夫跳变系统(Markov Jump Systems, MJSs)作为一种特殊的随机系统,可以用来描述这一类特殊且复杂的现象。奇异马尔可夫跳变系统(Singular Markov Jump Systems, SMJSs)是奇异系统和MJSs的结合,是一种更为典型的混杂系统,与普通的状态空间系统相比具有更广泛的适用度,能够描述原有系统更多的物理特性以及其他的特征,广泛应用于电力系统、化工系统等。另一方面,在对SMJSs系统进行稳定性分析时,首推Lyapunov稳定性理论, Lyapunov稳定性更为关注系统在无限时域内的渐近稳定性,反映的是系统的稳态性能。然而在实际的工程应用中,例如火箭发射、机器人控制等,其更为关注系统在有限时域内的系统状态,与Lyapunov稳定性相比,有限时间稳定性更能反映系统在有限时域内的暂态性能,这使得SMJSs的有限时间控制问题具有重要的理论意义和应用价值。

针对离散时间SMJSs,以Lyapunov函数理论和随机系统相关理论为理论基础,以线性矩阵不等式为证明工具,研究了离散SMJSs的有限时间控制问题,给出了闭环系统有限时间稳定和有界的充分条件,并且给出了不同情况下控制器的设计方法。主要内容分为以下三部分:

首先,研究具有时变时滞的离散SMJSs的有限时间控制问题。考虑转移概率完全已知的情况,通过设计一个新的合适的Lyapunov函数,以严格的延迟相关线性矩阵不等式的形式给出了系统正则、因果和有限时间稳定的充分条件,给出了状态反馈控制器的设计方法。然后,考虑转移概率部分已知的情况,通过矩阵变换,处理矩阵不等式中的非线性项,设计控制器,使得闭环系统是正则、因果和有限时间稳定的。

然后,研究基于事件触发的离散SMJSs的有限时间异步控制问题。为提高网络资源的利用率,采用了事件触发机制,将闭环系统转换为特殊的具有时变时滞的SMJSs。同时,建立了隐马尔可夫模型,解释了控制器模式与系统模式之间的异步现象。应用Lyapunov函数的方法,通过构造合适的Lyapunov-Krasovskii泛函,借助Jensen不等式和自由权矩阵的方法,给出了闭环系统正则、因果和有限时间有界,且满足 H_∞ 性能指标的充分条件。通过矩阵构造和矩阵变换,处理条件中的非线性项,给出了状态反馈异步控制器的设计方法。

最后,研究基于事件触发的离散SMJSs的静态输出反馈有限时间控制问题。考虑信号传输的事件触发机制和网络传输延迟,建立了静态输出反馈下的闭环系统模型。应用Lyapunov函数的方法,通过构造合适的Lyapunov-Krasovskii泛函,给出了闭环系统正则、因果和有限时间有界,且满足 H_∞ 性能指标的充分条件。基于矩阵分解和变量分离的方法,给出了静态输出反馈控制增益矩阵的设计方法。

关键词: 奇异系统; 马尔可夫跳变系统; 有限时间 H_∞ 控制; 事件触发控制

Abstract

During the operation of the actual control system, the system may suffer from hardware failure, sudden changes in environmental conditions, changes in the connection between multiple subsystems, etc. As a special kind of stochastic systems, Markov Jump Systems (MJSs) can be used to describe this kind of special and complex phenomena. Singular Markov jump systems (SMJSs) are a combination of singular systems and MJSs, which are more typical hybrid systems with wider applicability than ordinary state space systems and can describe more physical properties of the system as well as other characteristics, and are widely used in power systems, chemical systems, etc. On the other hand, Lyapunov stability theory is preferred for the stability analysis of SMJSs, which is more concerned with the asymptotic stability of the system in the infinite time domain and reflects the steady-state performance of the system. However, in practical engineering applications, such as rocket launch and robot control, it is more concerned with the system state in the finite time domain. Compared with Lyapunov stability, finite-time stability can reflect the transient performance of the system in the finite time domain, which makes the finite-time control problem of SMJSs have important theoretical significance and application value.

For discrete time SMJSs, the problem of finite-time control for discrete-time SMJSs is studied based on the theory of Lyapunov functions and the theory related to stochastic systems, and the linear matrix inequality is used as a proof tool to give sufficient conditions for the finite-time stability and boundedness of the closed-loop system, and a design method for the controller in different cases is given. The main research is divided into three parts as follows:

Firstly, the finite-time control problem of discrete-time SMJSs with time-varying delay is studied. Considering the case where the transfer probabilities are completely known, the design of a state feedback controller is given by designing a new suitable class of Lyapunov functions that give sufficient conditions for the regular, causal and finite-time stability of the system in the form of strict delay-dependent linear matrix inequalities. Then, the controller is designed so that the closed-loop system is regular, causal, and finite-time stable by considering the case where the transfer probability is partially known, and the nonlinear terms in the matrix inequality are handled by matrix transformation.

Then, the problem of finite-time asynchronous control for discrete-time SMJSs based on event-triggered is investigated. To improve the utilization of network resources, an event-triggered mechanism is employed to convert the closed-loop system into special SMJSs with time-varying delay. Meanwhile, a Hidden Markov Model is developed to explain the asynchronous phenomenon between the controller mode and the system mode. The method of Lyapunov functions is applied to give sufficient conditions for the closed-loop system to be regular, causal and finite-time bounded and to satisfy the H_∞ performance index by constructing suit-

able Lyapunov-Krasovskii generalized functions with the help of Jensen inequality and the free power matrix. The design method of the state feedback asynchronous controller is given by matrix construction and matrix transformation to deal with the nonlinear terms in the conditions.

Finally, the problem of static output feedback finite-time control for discrete-time SMJSs based on event-triggered is investigated. The closed-loop system model under static output feedback is established by considering the event-triggered mechanism of signal transmission and network transmission delay. Applying the method of Lyapunov functions, sufficient conditions for the closed-loop system to be regular, causal and finite-time bounded and to satisfy the H_∞ performance index are given by constructing a suitable Lyapunov-Krasovskii general function. A design method for the static output feedback control gain matrix is given based on matrix decomposition and variable separation.

Keywords: Singular systems, Markov jump systems, finite-time H_∞ control, event-triggered control

符号说明

符号	意义
\mathbb{R}^n	n 维欧氏空间
$\mathbb{R}^{m \times n}$	$m \times n$ 阶实矩阵集合
\mathcal{I}	有限集合
\mathcal{K}	有限集合
\mathcal{Z}	有限集合
\mathbb{N}_+	正整数集
\mathbb{N}	自然数集
Ω	样本空间
\mathcal{J}	样本空间子集 σ 代数
\mathcal{P}	概率测度
$\mathcal{E}\{\cdot\}$	数学期望
$\text{diag}\{\cdot\}$	对角矩阵
$\text{rank}\{\cdot\}$	矩阵的秩
$\text{deg}\{\cdot\}$	多项式的最高阶次
$\det\{\cdot\}$	矩阵行列式的值
I	适当维度的单位矩阵
I_r	r 阶单位矩阵
$\mathbf{0}$	合适维数的零矩阵
A^T	矩阵 A 的转置
A^{-1}	矩阵 A 的逆
$\{A\}$	$A^T + A$
$A < 0$	矩阵 A 是负定矩阵
$A > 0$	矩阵 A 是正定矩阵
$\lambda_{\max}(A)$	矩阵 A 的最大特征值
$\lambda_{\min}(A)$	矩阵 A 的最小特征值

符号	意义
$*$	对称矩阵中的对称元素
$\max(\cdot)$	最大值
$\min(\cdot)$	最小值
\inf	下确界

目 录

第一章 绪论.....	1
1.1 研究背景和意义.....	1
1.2 国内外研究现状.....	2
1.2.1 奇异马尔可夫跳变系统的研究现状.....	2
1.2.2 有限时间控制的研究现状.....	4
1.2.3 事件触发机制的研究现状.....	5
1.3 本文主要工作.....	7
第二章 理论基础	9
2.1 奇异马尔可夫跳变系统.....	9
2.2 有限时间控制.....	10
2.2.1 有限时间稳定.....	10
2.2.2 有限时间有界.....	10
2.2.3 H_∞ 有限时间有界	11
2.3 事件触发.....	11
2.3.1 事件触发机制.....	11
2.4 相关引理.....	11
2.5 本章小结.....	12
第三章 具有时变时滞的离散奇异马尔可夫跳变系统的有限时间控制	13
3.1 引言.....	13
3.2 问题描述.....	13
3.3 主要结论.....	14
3.3.1 有限时间稳定性分析.....	14
3.3.2 有限时间控制器设计.....	20
3.4 数值仿真.....	22
3.5 本章小结.....	24
第四章 基于事件触发的离散奇异马尔可夫跳变系统的异步有限时间控制	25
4.1 引言.....	25
4.2 问题描述.....	25
4.3 主要结论.....	27
4.3.1 有限时间有界分析.....	27
4.3.2 H_∞ 有限时间有界分析	34
4.3.3 异步有限时间 H_∞ 控制器设计	36

4.4 数值仿真.....	38
4.5 本章小结.....	40
第五章 基于事件触发的离散奇异马尔可夫跳变系统的有限时间输出 反馈控制	41
5.1 引言.....	41
5.2 问题描述.....	41
5.3 主要结论.....	44
5.3.1 有限时间有界分析.....	44
5.3.2 有限时间 H_∞ 有界分析	49
5.3.3 控制器设计	51
5.4 数值仿真.....	52
5.5 本章小结.....	54
第六章 结论与展望	55
6.1 结论.....	55
6.2 展望.....	55
参考文献.....	57

第一章 绪论

1.1 研究背景和意义

实际的控制系统在运行的过程中, 由于系统繁杂的结构以及一些其它的因素, 往往会出现层出不穷的问题, 例如来自外界的干扰、系统零部件的一系列硬件故障、多个子系统之间的连接方式发生改变等, 随机系统则可以用来描述这一类特殊且复杂的现象^[1,2]。马尔可夫跳变系统 (MJSs) 本身拥有多个模态, 并且在各个模态下系统的参数各有不同, 当系统的运行环境或者工作的周期等发生改变时, 系统则会在根据马尔可夫链在不同的模态之间跳变, 其转移概率一般为常数。按运行的时域, 可以将 MJSs 划分为连续时间和离散时间。当系统为连续时间时, 其滞留时间服从于指数分布, 但是, 在离散时间的情况下, 其滞留时间服从于具有无记忆性的几何分布。自上世纪中期 MJSs 问世以来, MJSs 对于结构随机突变的动态系统的建模有着突出的表现, 在经济系统^[3]、化工系统^[4]、生物系统^[5]、电力系统^[6] 以及其他系统中有着广泛的应用。

奇异系统, 也称为隐式系统^[7]、广义系统、微分代数系统^[8] 和半状态系统^[9], 在实际系统中有着广泛的应用, 例如天气预报、机器人控制、电力系统、机械工程系统等。从范围上看, 奇异系统在实际系统中更为广泛。奇异系统中的矩阵往往是奇异的, 当矩阵为非奇异的情况下, 则可以转换为状态空间系统。从系统的模型上看, 奇异系统的状态空间表达式由微分方程或差分方程和代数方程组成, 分别代表动态层的慢变子系统和静态层的快变子系统, 不同于状态空间系统, 奇异系统既包含具有动态特性的动态层, 同时也包含具有静态特性的静态层, 是一种由动态系统和静态系统相结合共同描述的复杂大系统。从稳定性分析上看, 与一般系统不同的是, 奇异系统需要在考虑系统状态轨迹收敛的情况下, 同时还需要保证系统是正则的、无脉冲的或因果的。在实际的系统中, SMJSs 对于系统的描述往往更加的实际、准确, 在不断研究奇异系统和 MJSs 的基础上, 对于 SMJSs 的控制以及综合问题的研究更加具有实际意义。

对控制系统进行分析时, 系统的稳定性自然是最重要的一個概念。在众多有关稳定性研究的理论中, 首推 Lyapunov 稳定性理论, 其核心内容是构造合适的 Lyapunov 函数或 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 对于连续系统, 根据 Lyapunov 函数或泛函的导数的正负来判断系统是否稳定, 对于离散系统, 则是根据 Lyapunov 函数或泛函的前向差分的正负来判断系统是否稳定。值得注意的是, Lyapunov 稳定性更为关注系统在无限时域内的渐近稳定性, 本质上反映的是系统的稳态性能。然而, 在实际的工程应用中, 渐近稳定的系统往往会存在着比较坏的暂态性能, 例如振幅较大、调节时间长、超调大等, 甚至无法应用。在这种情况下, Lyapunov 稳定性理论并不能反映系统的暂态性能。因此, 在 19 世纪 50 年代, 提出了有限时间稳定性的概念。不同于 Lyapunov 稳定性理论, 在系统给定的初始条件是有边界的前提下, 并且在给定的有限时间范围之内, 系统的状态轨迹都在预定的阈值之内, 则称系统是有限时间稳定的。

在网络控制系统中, 传感器、控制器以及执行器通过公共的网络连接实现控制, 借助网络对数据信号进行传输以及交换, 具有成本低、结构灵活、易于系统拓展和维护的

特点,因此被广泛应用于移动机器人、智能交通系统等领域。然而,数据信号在网络传输的过程中不可避免会带来一些新的问题,表现最为突出的是网络延时和通信带宽有限。不同类型的网络有着不同的延时,可能是时变的或者时不变的,也有可能是随机的,但是,它们的存在都会影响着系统运行的性能,从而导致系统不稳定。在另一个方面,随着数据信号在网络上传输量越来越大,有限的通信带宽在有限的时间范围内难以满足实际的应用需求。因此,针对网络控制系统,需要设计有效的控制策略,提高资源的利用率,满足实际系统的要求。传统的网络控制系统大多采用时间触发的机制,按照给定的周期进行采样,进一步更新和控制信号。但是,当系统没有外界的扰动干扰时,系统按照理想的状态持续运行,继续按照周期采样的方式进行控制,极大程度上浪费了计算资源,同时,也增加了网络数据传输量,浪费了通讯资源。为了克服上述周期采样方式进行控制的缺点,提高网络资源的利用率,事件触发机制应运而生。事件触发机制不同于时间触发的方式,它并不会在每个周期去计算和改变系统的控制输入,而是预先给定一个条件,不断根据最新的采样状态去判断是否满足这一条件,从而决定最新的采样状态是否被传输至执行器。这种方式减少了数据传输的总量,有效低降低了不必要的资源浪费,提高了网络资源的利用率。

1.2 国内外研究现状

1.2.1 奇异马尔可夫跳变系统的研究现状

MJSs 的研究开始于上世纪 60 年代,Krasovskii 和 Lidskii 等^[10]首先提出了 MJSs 的概念,并建立了其模型。MJSs 作为一类特殊的混杂系统,它能够通过模态的切换反映动态系统运行过程中结构、参数的改变以及随机突变和意外扰动情况下的随机变化,能够有效地建模电路、电力系统、机械工程系统、经济系统和其他系统。近年来,MJSs 引起了众多研究学者的广泛关注,并对其进行了深入的研究,在能控能观性分析、稳定性分析、控制器设计、观测器设计以及滤波器设计等方面都取得了大量的研究成果。杜等通过构建合适的 Lyapunov 泛函,提出了无记忆性的状态反馈控制器的设计方法,研究了具有转移概率部分未知的随机时变时滞 MJSs 的镇定性问题^[11]。Guo 引入了平均稳定性的概念,研究了连续时间和离散时间正马尔可夫跳变系统的稳定性和镇定问题^[12]。周等讲 MJSs 中的模态进行增广,结合有限频段理论,给出了在不同频段下状态反馈控制器的设计方法,研究了连续时间 MJSs 的多频段多指标控制问题^[13]。Li 等通过构造 Lyapunov 函数,同时运用矩阵分解的方法,设计出一个新的自适应控制器,研究了具有 Markov 切换和 Lévy 噪声的随机系统的均方渐近稳定性问题^[14]。Guo 等通过深入利用转移概率之间的关系,研究了具有一般不确定转移率的 MJSs 的稳定性问题,给出了一个新的系统的稳定性判据^[15]。Chen 等采用观测器获取系统状态,并考虑具有概率分布的通信延迟,基于平均驻留时间方法,研究了具有分段常数转移率、随机非线性和随机通信延迟的马尔可夫跳变系统的无源控制问题^[16]。Fang 等为了描述目标系统和设计的滤波器之间的异步情况,构建隐马尔可夫模型,给出了滤波误差系统随机文稳定的充分条件,研究了具有 MJSs 的的异步 H_∞ 滤波设计问题^[17]。

对于离散时间的 MJSs,Zhang 等通过使用随机的 Lyapunov 函数,揭示了脉冲对系

统稳定性的影响, 研究了一类具有随机非线性和脉冲的离散时间延迟 MJSs 的稳定性问题^[18]。Yan 等给出了 MJSs 均方强稳定的充分条件和必要条件, 研究了离散时间 MJSs 的均方强稳定性和稳定化问题^[19]。Tian 等通过考虑具有未知输入和执行器故障的系统的状态方程, 研究了一类非线性离散时间 MJSs 的未知输入观测器的设计问题^[20]。周等通过对 MJSs 中的未知输入和测量噪声同时解耦, 以线性矩阵不等式的形式给出了降维观测器存在的充分条件, 研究了离散时间 MJSs 的降维观测器设计问题^[21]。Liu 等在正交投影定理的基础上, 提出了一种新的优化算法, 用于离散时间 MJSs 的最小均方误差估计, 研究了离散时间 MJSs 的状态估计问题^[22]。Yin 等设计了模式依赖的滤波器, 给出了误差动态系统是随机稳定的并具有 H_∞ 性能的充分条件, 研究了一类不确定的离散时间非同质 MJSs 的鲁棒 H_∞ 滤波问题^[23]。

奇异系统的概念最早由 Rosenbrock 提出^[24], 并研究了系统的解耦零点和受限等价性问题。在其基础上, Luenberger 研究了奇异线性系统的解的唯一性和存在性的条件, 并且对稳定性等基础相关问题也进行了研究^[25]。直到 1989 年, Dai 在 80 年代的相关成果的基础上, 出版了关于奇异系统的专著^[26], 详细地介绍了奇异系统基础理论以及分析方法。近年来, 越来越多的研究学者逐渐开始对奇异系统进行研究, 得到了许多杰出的研究成果。王等通过使用集合域内放大的方法, 给出了闭环系统鲁棒镇定的充分条件, 研究了一类不确定奇异系统的鲁棒控制问题^[27]。蔡等设计了一种能够估计奇异系统干扰的观测器, 给出了闭环系统容许的充分条件, 在此基础上, 以线性矩阵不等式的形式给出了闭环系统渐近稳定且满足 H_∞ 性能的充分条件^[28]。乔等以矩阵迹不等式的形式给出了奇异系统容许的代数判据, 提出了一种新的静态输出反馈控制器的设计方法^[29]。李等基于史密斯预估和利用逼近误差的方法, 将带有输入时滞的系统转换为无输入时滞的系统, 以线性矩阵不等式的形式给出了奇异系统基于观测器控制的充要条件^[30]。

切换系统作为混杂系统的另一个主要部分, 与奇异系统的研究密切相关, 因其浅而易懂的特点和在实际工程中的广泛应用, 控制领域的诸多学者对其十分关注。何等研究了不确定时滞奇异切换系统的鲁棒控制问题, 通过使用 Lyapunov 函数分析法和凸组合技术方法, 以线性矩阵不等式的形式给出了闭环系统渐近稳定且满足 H_∞ 性能的充分条件^[31]。Zhou 等给出了具有稳定子系统的奇异切换系统的指数稳定性的充分条件, 研究了切换式线性连续时间奇异系统的稳定性问题^[32]。史等利用矩阵分解和等价代换的方法, 给出了系统的脉冲控制律, 解决了奇异切换系统在切换点处由于不相容初始条件导致的状态跳变问题^[33]。Men 等研究了一类离散时间奇异切换系统的随机稳定问题, 通过使用 Bernoulli 变量, 提出了一种随机控制器, 给出了系统的随机稳定的充分条件^[34]。Wang 等研究了具有稳定和不稳定子系统的奇异切换随机线性系统的稳定性问题, 引入平均稳定性的概念, 给出了奇异切换系统的指数均方稳定性的充分条件^[35]。

当奇异切换系统中的随机特性表征为马尔可夫跳变时, 则可以得到奇异马尔可夫跳变系统 (SMJSs)。在稳定性分析方面, Ma 等研究了具有执行器饱和的离散时间不确定 SMJSs 的随机稳定性问题, 基于线性矩阵不等式的方法, 给出了离散时间 SMJSs 正则、因果且随机稳定的充分条件^[36]。Guerrero 等给出了离散时间 SMJSs 的有界实引理^[37]。Fu

等研究了一类具有混合时延的不确定 SMJSs 的鲁棒容错控制问题,提出了一种基于控制法补偿和故障信号重建的鲁棒容错控制器,给出了 SMJSs 的随机稳定的充分条件^[38]。Ma 等研究了时变延迟离散时间 SMJSs 的随机稳定性和随机稳定问题,对于转移概率完全已知和部分已知的情况,给出了系统具有规则性、因果性和随机稳定性的延迟相关性矩阵不等式条件^[39]。Zhuang 等通过构造一种新的动态滑模面函数,在考虑不确定性和外部扰动的前提下,给出了闭环系统随机容许的充分条件,研究了具有部分未知转移概率的 SMJSs 的变结构控制问题^[40]。Zhao 等研究了具有状态依赖性噪声的 SMJSs 的稳定性问题,包括连续时间和离散时间两种情况,给出了系统方程的存在性和唯一性的充分条件^[41]。Wu 等通过使用延迟划分方法,给出了两个与延迟有关的钝化条件以及系统随机稳定的充分条件,研究了具有时变或时不变延迟的 SMJSs 的延迟依赖性被动分析问题^[42]。在控制器设计方面,Zhou 等通过构建一种新的 Lyapunov-Krasovskii 函数,给出了系统具有随机稳定性且具有 H_∞ 性能指标的充分条件,研究了一类具有时间变化的 SMJSs 的 H_∞ 控制问题^[43]。Zhao 等研究了基于观测器的具有状态依赖性噪声的 SMJSs 的控制器设计问题,引入了非冲动性和均方可接受性两个新的概念,给出了开环和闭环 SMJSs 的均方可接受性的充分条件。Feng 等通过使用替换矩阵变量的方法,给出了一个新的 SMJSs 的均方可接受性准则,研究了 SMJSs 的滑模控制问题^[44]。Zhao 等研究了具有不完全转移概率的隐 SMJSs 的异步 H_∞ 控制问题,通过采用状态分解的方法,提出了一个带有状态向量分量的新型增广的 Lyapunov-Krasovskii 函数来减少冗余的决策变量,设计了一个基于隐马尔可夫模型的异步状态反馈控制器^[45]。王等研究了基于具有部分模态依赖的观测器的 SMJSs 的控制器设计问题,通过构造模态依赖的 Lyapunov 函数,证明了闭环系统的正则性、无脉冲性,给出了闭环系统随机稳定的充分条件^[46]。在滤波器设计方面,Yin 等研究了具有模式依赖的时变延迟的 SMJSs 神经网络的异步 H_∞ 滤波,通过奇异值分解技术获得正则性和脉冲自由度,给出了滤波误差系统随机稳定且具有 H_∞ 性能指标的充分条件^[47]。Tian 等研究了具有一般混合转移率的 SMJSs 的耗散滤波问题,提出了双边界法以及 Wirtinger 型基于自由矩阵的积分不等式,给出了滤波误差系统是随机可接受和严格耗散的充分条件^[48]。

1.2.2 有限时间控制的研究现状

上世纪 50 年代,俄国的一些研究学者对于系统的暂态稳定性进行了相关研究,在有限的时间范围内,系统的状态需要满足一定的要求,即短时间稳定性,为有限时间稳定性的出现奠定了基础。60 年代初,西方的学者 Dorato 详细地介绍了有限时间稳定性的概念,并阐述了与一般渐近稳定性的区别^[49]。随后,以 Amato 为首的一些研究学者在有限时间稳定性的基础上,不断地研究和发展,为了克服系统中的外界扰动,进一步提出了有限时间有界性的概念^[50]。有限时间稳定性和有限时间有界性反映的是系统的暂态性能,在实际工程的众多系统中都有着广泛的应用。

Kablar 等将有限时间稳定性的研究应用于奇异系统中,采用 Lyapunov 函数方法,研究了在自由和受迫状态下运行的时变线性奇异系统的有限时间稳定性问题^[51]。Xue 等在有限时间稳定的基础上,提出了容许有限时间稳定性的概念,给出了离散时间奇异系

统容许有限时间稳定性的充分判据,并在此基础上将其推广到不确定的情况,研究了一类不确定离散奇异系统的容许有限时间稳定问题^[52]。梁等设计了一种非奇异结构的观测器,给出了闭环系统有限时间有界的充分条件,研究了不确定奇异系统故障估计的有限时间观测器设计问题^[53]。Yao 等研究了时变线性奇异系统的输入输出有限时间镇定问题,在考虑两类干扰输入的情况下,设计了状态反馈控制器,以线性矩阵不等式的形式给出了闭环系统是输入输出有限时间稳定的判据^[54]。李等研究了时变参数不确定奇异系统的有限时间预见控制器设计问题,通过构建参数依赖的 Lyapunov 函数,引入两个辅助变量,同时利用离散提升技术,给出了闭环系统有限时间稳定的充分条件^[55]。

Zhang 等将有限时间稳定性的研究应用于随机系统中,利用模式相关平均驻留时间方法,通过构造 Lyapunov 函数,讨论了奇异切换系统的可解性条件,研究了奇异切换系统的有限时间稳定性和镇定问题^[56]。Feng 等将输入输出有限时间稳定性的概念扩展到奇异切换系统,通过使用平均滞留时间切换方法并在此基础上构造了多个 Lyapunov 函数,以线性矩阵不等式的形式给出了系统输入输出有限时间稳定的充分条件,研究了一类连续时间奇异切换系统的输入输出有限时间稳定性问题^[57]。魏等在考虑时滞和乘性噪声的情况下,研究了离散时间 MJSs 的基于观测器的有限时间控制问题,以线性矩阵不等式的形式给出了闭环误差系统有限时间有界且满足 H_∞ 性能的充分条件^[58]。刘等采用 Lyapunov 泛函的方法并结合线性矩阵不等式理论,给出了闭环系统有限时间 H_∞ 有界的充分条件,同时给出了一种部分依赖时滞的通用控制器的设计方法,研究了随机时滞 MJSs 的有限时间控制问题^[59]。Zhang 等研究了一类不确定 SMJSs 的鲁棒有限时间镇定问题,给出了奇异随机系统有限时间有界性的定义,并将结果推广到奇异随机系统族的 H_∞ 有限时间有界性^[60]。Liu 等研究了离散时间奇异切换正系统的有限时间稳定性问题,采用了模式依赖的平均驻留时间方法,给出了任意切换条件下系统有限时间稳定的 Lyapunov 定理^[61]。Li 等研究了一类具有部分未知转移概率的 SMJSs 的有限时间控制问题,给出了 SMJSs 有限时间有界并满足 H_∞ 性能指标的充分条件^[62]。Zhang 等研究了一类基于观测器的具有时变范数有界扰动的离散时间 SMJSs 的有限时间 H_∞ 控制问题,采用 Fridman 和 Shaked 提出的广义系统方法,设计出一个观测器和一个状态反馈控制器,并保证闭环误差系统是 H_∞ 有限时间镇定的充分判据^[63]。Ma 等研究了具有时变时滞和执行器饱和的离散时间 SMJSs 的鲁棒有限时间 H_∞ 控制问题,采用时滞相关 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法,给出了 SMJSs H_∞ 有限时间有界的充分条件,并采用凸优化算法,在满足 H_∞ 干扰衰减水平的条件下,给出了状态反馈控制器的设计方法^[64]。Wang 等采用 T-S 模糊逼近方法,研究了一类非线性非齐次 SMJSs 的有限时间 H_∞ 滤波问题,其中转移概率是时变且未知的,采用随机 Lyapunov 泛函的方法,给出了滤波误差系统 H_∞ 有限时间有界的充分条件,同时利用矩阵不等式解耦技术,设计出一种模糊滤波器,与现有的结果相比,具有更大的自由度^[65]。

1.2.3 事件触发机制的研究现状

随着网络通信技术与控制系统不断地研究和发展,数据丢包、数据乱序、带宽受限、传输时延等问题层出不穷,传统的时间触发方式的缺陷越来越明显,已经满足不

了实际应用的需求,然而,事件触发控制的出现改变了这一现状,引起了众多研究学者大范围的研究热潮。传统的时间触发控制方式是在时间间隔相等的离散时刻对系统的状态进行采样,由于采用了零阶保持器的缘故,保持控制信号不变的同时,更有利于系统控制器的设计和分析。随着数据传输量的逐渐增加,传统的时间触发方式的缺陷则显而易见。一方面当系统中没有任何的外加扰动的时,即系统能够按照理想的情况实际运行,此时,继续周期性地更新控制律,显然会造成不必要的计算机内存资源的浪费。另一方面,采样的测量信号和执行器的信号必定要通过网络进行传输,又会导致较大的负载量,降低了网络传输的效率。因此,Dorf 等于上世纪中期首次提出了事件触发的方式^[66]。随后,Åarzén 等将其应用于 PID 控制中,通过仿真和具体的实验,详细地阐述了事件触发机制的思想^[67]。与周期采样的时间触发方式相比,事件触发机制更为有效。在提高网络资源利用率方面,事件触发机制体现其独特的优越性。然而,在使用事件触发机制的过程中,难免也会遇到一些问题与挑战。在事件触发机制下对系统的状态进行采样,如果不存在最小的正的采样间隔时,那么在有限的时间区间内会出现无数次事件触发的情况,这种现象被称为芝诺现象,这时则没有必要使用事件触发方案。在实际生产情况下,现有的物理设备无法解决这个问题,而离散型事件触发机制却能够避免芝诺现象。Xu 等提出了一种基于模式的离散型事件触发方案,采用延迟划分技术,设计了具有模式无关的 H_∞ 滤波器,研究了基于事件触发方案的离散时间 SMJSs 的 H_∞ 滤波问题^[68]。离散型事件触发机制首先周期性对控制系统的状态信号进行采样,然后在预先给定的条件下,对采样的状态信号进行判断,如果满足这一条件,执行器则将传感器采样的数据传输至控制器。Xu 等采用了事件触发方案,考虑了网络时延,并且其分布特征由伯努利随机变量描述,研究了离散时间非线性奇异系统的 H_∞ 控制问题^[69]。Zhang 等采用了事件触发方案和量化控制机制,研究了离散时间 SMJSs 的 H_∞ 控制问题^[70]。Wang 等通过引入服从伯努利分布的随机变量,研究了事件触发方案下具有冗余通道的 SMJSs 的异步 H_∞ 控制问题^[71]。

随着对事件触发机制的不断研究和发展,可以将其分为两种类型,即静态事件触发和动态事件触发。Yan 等采用静态事件触发方案,研究了基于事件触发的线性离散时间网络控制系统的静态输出反馈控制问题,利用 Finsler 引理,在确保所需的性能的同时,以线性矩阵不等式的形式给出了基于事件触发机制的静态输出控制器的设计方法^[72]。Shi 等采用动态事件触发方案,降低了子系统与控制器之间的通信频率,设计了互连系统的局部动态事件触发控制器,同时证明了触发间隔是有严格的正下界,避免了芝诺现象^[73]。Gao 等提出了一种基于神经网络事件触发机制的自适应控制器设计方法,考虑了静态和动态事件触发机制,确保闭环系统时全局稳定的,同时也满足最小事件间隔有严格的正数下限^[74]。

Yao 等将事件触发机制应用于随机系统中,研究了基于事件触发的离散时间 MJSs 滑模控制问题,采用基于观测器和状态反馈的控制方案,分别设计了基于事件触发观测器的滑模控制器和基于事件触发状态反馈的滑模控制器,同时保证 MJSs 是 H_∞ 随机稳定的^[75]。对于带宽受限和模式失配情况下的离散时间 MJSs, Xiao 等考虑了含有额外动

态变量的事件触发方案, 引入了对角矩阵形式的特殊触发阈值, 同时建立了隐马尔可夫模型解释了控制器和系统之间的模式不匹配的异步现象, 设计了输出反馈控制律, 使目标系统具有的 H_∞ 性能的随机稳定性^[76]。Wang 等研究了基于事件触发的具有输出量化的 MJSs 的 H_∞ 滤波器设计问题, 采用了一种动态事件触发通信方案, 通过使用时间间隔分析方法将 MJSs 转换为一个新的具有时滞的马尔可夫跳变滤波误差系统, 设计了一种新型滤波器, 同时给出了目标系统 H_∞ 均方稳定的充分条件^[77]。

在事件触发机制下, 对于随机系统在有限时域内的控制问题, 近十年来也有着众多的研究成果。冯等引入事件触发方案, 通过构造合适的 Lyapunov 函数并利用平均驻留时间方法, 给出了闭环系统输入输出有限时间稳定的充分条件, 研究了奇异切换系统的输入输出有限时间稳定性问题^[78]。Shen 等研究了基于事件触发 T-S 模糊 MJSs 的有限时间 H_∞ 控制问题, 引入受到异步约束的前提变量, 减少了通信负担, 同时给出了闭环模糊系统 H_∞ 有限时间有界的充分条件^[79]。在存在网络攻击的情况下, Zha 等研究了基于事件触发的非线性 MJSs 的有限时间 H_∞ 异步状态估计问题, 为解决网络资源的容量约束问题, 引入一种自适应事件触发方案, 同时在假设受到的恶意网络攻击是随机的前提下, 建立了一个新的状态估计误差系统模型, 保证估计误差系统的 H_∞ 有限时间有界性, 并给出了异步估计器增益的设计方法^[80]。对于 SMJSs, Zhang 等通过构造随机 Lyapunov 泛函并引入松弛矩阵变量的方法, 设计 H_∞ 滤波器增益矩阵和触发增益矩阵, 同时采用分离变量的方法对矩阵不等式进行解耦, 保证滤波误差系统是 H_∞ 有限时间有界的^[81]。

1.3 本文主要工作

结合上述国内外研究现状, 确定本文的主题为基于事件触发的 SMJSs 的有限时间控制问题。主要研究内容有: 不确定离散时间 SMJSs 的有限时间控制、基于事件触发的离散时间 SMJSs 的异步有限时间控制和基于事件触发的离散时间 SMJSs 的异步有限时间输出反馈控制。本文主要结构如下:

第一章为该论文的绪论。围绕奇异系统和随机系统的相关理论和文献, 介绍了论文的研究背景和意义。其次, 结合国内外的研究现状, 分别介绍了 SMJSs、有限时间稳定和事件触发机制的研究现状以及相关的研究成果。

第二章给出了理论基础。详细介绍了奇异系统、MJSs 以及 SMJSs 的状态空间模型。同时, 给出了有限时间稳定、有限时间有界等相关概念。其次, 对事件触发机制进行了详细的阐述。然后, 列出了之后研究内容中所需要的引理, 为理论推导证明奠定了基础。

第三章讨论了具有时变时滞的离散时间 SMJSs 的有限时间控制问题。考虑转移概率完全已知和部分已知的情况下, 通过设计一个新的合适的李雅普诺夫泛函, 以严格的延迟相关线性矩阵不等式的形式给出了系统有限时间稳定的充分条件。最后, 给出了状态反馈控制器的设计方法。

第四章讨论了基于事件触发的离散时间 SMJSs 的有限时间异步控制问题。为了提高网络资源的利用率, 采用了事件触发机制。同时, 建立了隐马尔可夫模型, 解释了控制器与系统模式之间的异步现象, 提出了一种新的 Lyapunov 泛函, 以严格的矩阵不等式的形式给出了闭环系统有限时间有界, 且满足有限时间 H_∞ 性能的充分条件。最后,

给出了异步控制器的状态反馈控制增益矩阵的设计方法。

第五章讨论了基于事件触发的离散时间 SMJSs 的静态输出反馈有限时间控制问题。首先,同时考虑网络信号传输时延和事件触发机制,针对静态输出反馈控制律,建立了离散时间 SMJSs 的闭环系统模型,给出了闭环系统有限时间有界且满足有限时间 H_∞ 性能的充分条件。其次,提出了一种新的 Lyapunov-Krasovskii 泛函,降低了保守性。最后,基于矩阵分解算法,给出了静态输出反馈控制器的设计方法。

第六章为该论文的总结与展望。对本文的研究内容进行总结,同时对未来的研究方向进行展望。

第二章 理论基础

2.1 奇异马尔可夫跳变系统

奇异系统，也称为广义系统、微分代数系统、隐式系统和半状态系统。根据运行域，可以将其划分为连续时间奇异系统和离散时间奇异系统。本文讨论的是离散时间奇异系统，可以将其表示为：

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (2.1)$$

其中 $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态向量， $u(k) \in \mathbb{R}^m$ 为系统的控制输入，矩阵 E 是奇异矩阵，且满足 $\text{rank}(E) = r \leq n$ ，矩阵 A, B 是已知的系统矩阵。当 $\text{rank}(E) = n$ 时，系统则为标准系统。

首先，给出奇异系统的定义和引理。

定义 2.1 ^[26] 对于奇异系统 (2.1)，以下条件成立：

- (1) 如果 $\det(sE - A) \neq 0$ ，那么矩阵对 (E, A) 和系统是正则的。
- (2) 如果 $\deg(\det(sE - A)) = \text{rank}(E)$ ，那么矩阵对 (E, A) 和系统是因果的。

在研究奇异系统的过程中，通常需要对矩阵 E ，系统矩阵进行如下的分解。

引理 2.1 ^[26] 如果矩阵对 (E, A) 是正则且因果的，那么一定存在两个非奇异矩阵 M_L 和 M_R ，使得下列式子成立：

$$M_L E M_R = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_L A M_R = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

其中， I_r 为单位矩阵， $\text{rank}(I) = r$ 。

一般的状态空间系统仅具有有限极点的指数解，而奇异系统不仅包含有限极点的指数解，还具有无限极点的脉冲解。因此，在研究过程中需要给出引理来说明奇异系统 (2.1) 的解存在且唯一的条件。

引理 2.2 ^[26] 如果奇异系统 (2.1) 是正则且因果的，那么系统的解存在并且是唯一的。

当运行时域为离散时间时，MJSs 可以表示为：

$$x(k+1) = A(r_k)x(k) + B(r_k)u(k) \quad (2.3)$$

其中 $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态向量， $u(k) \in \mathbb{R}^m$ 为系统的控制输入。矩阵 $A(r_k), B(r_k)$ 是取决于 $r(k)$ 的系统矩阵。 $r(k)$ 是在有限空间 $\mathcal{K} = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ 中取值的离散马尔

可夫过程, 在概率空间 $(\Omega, \mathcal{J}, \mathcal{P})$ 内控制跳变的参数, 并符合以下的转移概率:

$$\Pr\{r_{k+1} = j | r_k = i\} = \pi_{ij} \quad (2.4)$$

其中, π_{ij} 是模态 i 跳变到模态 j 的转移概率, 并且 $0 \leq \pi_{ij} \leq 1$, 另外, $\sum_{j=1}^M \pi_{ij} = 1$, $\forall i, j \in \mathcal{K}$ 。

以上对于离散时间的奇异系统和 MJSSs 分别进行了描述。当系统存在外部扰动时, SMJSSs 可以表示为:

$$Ex(k+1) = A(r_k)x(k) + B(r_k)u(k) + C(r_k)\omega(k) \quad (2.5)$$

其中 $\omega(k) \in \mathbb{R}^p$ 为外部扰动, 矩阵 $C(r_k)$ 是已知的系统矩阵, 其它矩阵如上述所示。

2.2 有限时间控制

有限时间稳定性更为注重研究系统在有限时间范围内的动态行为, 确切地说, 给定初始的边界条件, 在有限的时间间隔内, 系统的状态轨迹不会超过某一给定的界限, 那么则称这个系统是有限时间稳定的。本小节将给出离散 SMJSSs 的有限时间稳定和有限时间有界的概念。

2.2.1 有限时间稳定

定义 2.2 ^[63] 考虑离散时间 SMJSSs (2.5), 并令扰动输入 $\omega(k) \equiv 0$ 。给定常数 $c_2 > c_1 > 0$, N , 对称正定矩阵 R , 如果对于任意的 $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, 系统是正则的、因果的, 且满足

$$\mathcal{E}\{x^T(0)E^T REx(0)\} < c_1^2 \Rightarrow \mathcal{E}\{x^T(k)E^T REx(k)\} < c_2^2 \quad (2.6)$$

则称这个系统关于 (c_1, c_2, N, R) 是有限时间稳定的。

2.2.2 有限时间有界

假设 2.1 ^[70] 外部扰动 $\omega(k)$ 满足有界条件, 即

$$\omega^T(k)\omega(k) \leq d, \quad \forall k \in \mathbb{N}_+, d \in \mathbb{N} \quad (2.7)$$

在考虑外部扰动满足假设 2.1 的情况下, 分析系统的有限时间有界性。

定义 2.3 ^[64] 考虑离散时间 SMJSSs (2.5), 并令扰动输入 $\omega(k)$ 满足条件 (2.7)。给定常数 $c_2 > c_1 > 0$, N , 对称正定矩阵 R , 如果对于任意的 $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, 系统是正则的、因果的, 且满足

$$\mathcal{E}\{x^T(0)E^T REx(0)\} < c_1^2 \Rightarrow \mathcal{E}\{x^T(k)E^T REx(k)\} < c_2^2 \quad (2.8)$$

则称这个系统关于 (c_1, c_2, N, R, d) 是有限时间有界的。

2.2.3 H_∞ 有限时间有界

定义 2.4 ^[64] 如果离散时间 SMJSs (2.5) 关于 (c_1, c_2, N, R, d) 是有限时间有界的, 外部扰动 $\omega(k)$ 满足 (2.7), $\gamma > 0$, 并且在零初始条件下满足条件

$$\mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^N z^T(k) z(k) \right\} < \gamma^2 \mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^N \omega^T(k) \omega(k) \right\} \quad (2.9)$$

则称系统关于 $(c_1, c_2, N, R, d, \gamma)$ 是 H_∞ 有限时间有界的。

2.3 事件触发

传统的数字控制技术中, 通常假设系统的控制器是按设定的周期运行, 系统的采样周期与系统的状态无关。然而, 事件触发机制不同于此, 它并不会在每个周期去计算和改变系统的控制输入, 而是通过判断是否满足条件, 从而决定采样的状态是否被传输至执行器。这在一定程度上减少了数据传输的总量, 降低了不必要的资源浪费, 提高了网络资源的利用率。本小节主要介绍事件触发机制。

2.3.1 事件触发机制

在预先给定阈值的情况下, 事件触发机制与系统的状态和采样信号的差值有关。在每个采样时刻, 采样的状态信号与最新传输的状态信号的差值决定了当前采样的状态信号是否被传输到执行器。事件触发机制表示为:

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= e^T(k) \Omega e(k) - \lambda x^T(k) \Omega x(k) > 0, \\ k_{s+1} &= \inf_{k \in \mathbb{N}_+} \{k > k_s | \Phi(k) > 0\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

其中 $e(k) = x(k) - x(k_s)$, $x(k_s)$ 是最新传输的状态, $\Omega > 0$ 是对称正定权重矩阵, λ 是预先设定的阈值。

事件发生器的释放时刻为 $k_s, (0, 1, 2, \dots, \infty, k_0 = 0)$, 则下一个传输时刻为 k_{s+1} 。事件触发机制中存在着一个重要的问题, 即使最小的正的采样间隔是否存在。如果不存在, 那么在有限时间区间上则会出现采样无数次的情况, 我们将这种现象称为芝诺现象, 然而, 物理设备无法实现这一点。上述的事件触发机制中, 有 $k_{s+1} = \inf_{k \in \mathbb{N}_+} \{k > k_s | \Phi(k) > 0\}$, 即 $\tau = k_{s+1} - k_s, k \in \mathbb{N}_+$, 使得一定存在正的采样间隔, 这样便排除了芝诺现象。

2.4 相关引理

引理 2.3 (Schur 补引理) ^[69] 给定对称矩阵 M , 其分块矩阵形式为

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

其中, $M_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $M_{12} = M_{21}^T$, 则下列条件是等价的:

(1) $M < 0$;

(2) $M_{11} < 0$, $M_{22} - M_{12}^T M_{11}^{-1} M_{12} < 0$;

(3) $M_{22} < 0$, $M_{11} - M_{12} M_{22}^{-1} M_{12}^T < 0$.

引理 2.4 (离散 Jensen 不等式) ^[68] 对于给定的标量 $a_2 > a_1 > 0$, 对称正定矩阵 W , 下列不等式成立,

$$\left(\sum_{l=a_1}^{a_2} x(l) \right)^T W \left(\sum_{l=a_1}^{a_2} x(l) \right) \leq (a_2 - a_1 + 1) \sum_{l=a_1}^{a_2} x^T(l) W x(l)$$

引理 2.5 ^[39] 对于给定的适当维度的矩阵 X, Y, Z , 并且矩阵 Y 是对称矩阵, 如果存在一个标量 $\rho > 0$ 且 $\rho I + Y > 0$, 则下列不等式成立,

$$-X^T Z - Z^T X - Z^T Y Z \leq X^T (\rho I + Y)^{-1} X + \rho Z^T Z$$

当矩阵 $Y > 0$ 时, ρ 可取值为 0。

引理 2.6 ^[71] 对于具有适当维度的常数矩阵 L_1, L_2, L_3 , $\nu(t) \in [\nu_1, \nu_2]$, 下列不等式成立,

$$(\nu(t) - \nu_1)L_1 + (\nu_2 - \nu(t))L_2 + L_3 < 0$$

当且仅当

$$(\nu_2 - \nu_1)L_1 + L_3 < 0,$$

$$(\nu_2 - \nu_1)L_2 + L_3 < 0$$

引理 2.7 ^[70] 令 $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 为列满秩矩阵, 奇异值分解为 $B = \mathcal{U} \mathcal{B} \mathcal{V}^T$, 其中, 矩阵 \mathcal{U} 和 \mathcal{V} 是正交矩阵, 矩阵 $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 是对角线为正实数的矩阵。对于矩阵 $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 存在矩阵 $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 使得 $ZB = BL$, 当且仅当矩阵 Z 的形式为

$$Z = \mathcal{U} \begin{bmatrix} Z_1 & Z_3 \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix} \mathcal{U}^T$$

其中, $Z_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $Z_2 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$, $Z_3 \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$ 。

2.5 本章小结

本章节给出了与后续章节研究内容相关的理论基础。首先, 介绍了离散时间 SMJSs 的基本概念, 其次, 给出了有限时间稳定性的相关的定义, 然后, 介绍了事件触发机制, 最后, 给出了后续章节证明过程中所用的相关引理。

第三章 具有时变时滞的离散奇异马尔可夫跳变系统的有限时间控制

3.1 引言

随着现代控制理论的不断研究和发展,近年来奇异系统和随机系统的研究逐渐成为了热点,吸引了众多研究学者的兴趣并发表了大量的研究成果。Gao 等研究了具有异步切换的离散时间 SMJSs 的可容许性问题,在控制器与子系统的切换是异步的情况下,将开关延迟和状态延迟建模为马尔可夫链,给出了闭环系统具有正则性、因果性和稳定性的一个新的充要条件^[82]。Wu 等研究了具有时变时滞的离散时间 SMJSs 的时滞相关的稳定性问题,其中转移概率是部分未知的,给出了延迟相关的判据以确保闭环系统是正则、因果且随机稳定的^[83]。众所周知,经典李雅普诺夫稳定性更关注系统在无限时间区间上的渐近模式。然而,在许多实际系统中,人们越来越倾向于考虑系统在有限区间中的行为。Zhang 等通过滑模方法研究了具有传感器故障和随机非线性的不确定离散时间 SMJSs 的有限时间 H_∞ 控制问题,首先基于状态估计器,给出了闭环系统是滑模有限时间有界且满足 H_∞ 性能的充分条件,然后综合了滑模控制律,此外,利用解耦技术解决了线性矩阵不等式的可行性问题,给出了状态反馈控制器以及状态估计器的增益矩阵^[84]。然而,关于具有时变时滞的离散时间 SMJSs 的有限时间控制问题仍没有得到充分的研究。

本章讨论了具有时变时滞的离散时间 SMJSs 的有限时间控制问题。首先,考虑了转移概率完全已知和部分已知的两种情况。其次,通过设计一个新的合适的李雅普诺夫泛函,以严格的延时相关线性矩阵不等式的形式给出了系统有限时间稳定的充分条件。最后,给出了状态反馈控制器的设计方法。

3.2 问题描述

考虑如下的带有时变时延的离散时间 SMJSs:

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= A(r_k)x(k) + A_{di}(r_k)x(k-d(k)) + B(r_k)u(k), \\ x(k) &= \phi(\theta), \theta \in [-d_2, 0] \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态向量, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ 为系统的控制输入。 $d(k)$ 是时变延迟且满足 $0 < d_1 \leq d(k) \leq d_2$, $\phi(\theta)$ 为初始值, $r(k)$ 是在有限空间 $\mathcal{I} = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ 中取值的离散马尔可夫过程,在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 内控制跳变的参数。矩阵 E 是奇异矩阵,且满足 $\text{rank}(E) = r \leq n$ 。 $A(r_k)$, $A_{di}(r_k)$, $B(r_k)$ 是已知的适当维数的矩阵,对于任意的 $r_k = i$, 可以分别简写为 A_i , A_{di} , B_i 。

在系统 (3.1) 中, 马尔可夫过程 r_k 由以下的转移概率控制:

$$\Pr\{r_{k+1} = j | r_k = i\} = \pi_{ij} \quad (3.2)$$

其中, $0 \leq \pi_{ij} \leq 1$, $\sum_{j=1}^N \pi_{ij} = 1$, $\forall i, j \in \mathcal{I}$ 。

假设转移概率是未知但有界的, 且满足

$$0 \leq \underline{\pi}_i \leq \pi_{ij} \leq \bar{\pi}_i \leq 1 \quad (3.3)$$

其中 $\bar{\pi}_{ij}$ 和 $\underline{\pi}_{ij}$ 分别对应每个模态转移概率的上下界。

本章的目的是研究具有时变时滞的离散时间 SMJSs 的有限时间控制问题。首先在转移概率完全已知的情况下, 以延迟相关的线性矩阵不等式的形式给出了系统具有正则性、因果性且有限时间稳定性的充分条件。其次在此基础上考虑转移概率部分已知的情况, 给出了状态反馈控制器的设计方法, 使得闭环系统随机有限时间稳定。

为了方便后续的研究, 首先在这里给出一些定义。

定义 3.1 ^[60] 对于系统 (3.1), 以下成立:

1. 矩阵对 (E, A_i) 是正则的, 如果对于任意 $i \in \mathcal{I}$, $\det(zE - A_i) \neq 0$ 。
2. 矩阵对 (E, A_i) 是因果的, 如果对于任意 $i \in \mathcal{I}$, $\deg(\det(zE - A_i)) = \text{rank}(E)$ 。
3. 系统 (3.1) 中, $u(k) = 0$, 系统是正则和因果的, 如果对于任意 $i \in \mathcal{I}$, 矩阵对 (E, A_i) 是正则和因果的。

定义 3.2 ^[64] 对于给定的标量 $0 < c_1 < c_2$, $N^* > 0$, 对称正定矩阵 R , 如果系统 (3.1) 是正则的、因果的, 对于任意的 $k_1 \in \{-d_2, d_2 + 1, \dots, 0\}$, $k_2 \in \{1, 2, \dots, N^*\}$, 满足

$$\mathcal{E}\{x^T(k_1)E^T R E x(k_1), \|E\|^2 x^T(k_1) R x(k_1)\} \leq c_1^2 \Rightarrow \mathcal{E}\{x^T(k_2)E^T R E x(k_2)\} \leq c_2^2 \quad (3.4)$$

那么称系统关于 (c_1, c_2, N^*, R) 是有限时间稳定的。

在本章节中, 设计状态反馈控制器为 $u(k) = K_i x(k)$, 则可以将闭环系统表示为:

$$\begin{aligned} E x(k+1) &= (A_i + B_i K_i) x(k) + A_{di}(r_k) x(k-d(k)), \\ x(k) &= \phi(\theta), \theta \in [-d_2, 0] \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.3 主要结论

3.3.1 有限时间稳定性分析

定理 3.1 对于给定的标量 $d_1, d_2 (0 \leq d_1 < d_2)$, 对称正定矩阵 R , 如果存在对称正定矩阵 P_i, M_1, M_2 , 对称矩阵 Q_i 以及适当维数的矩阵 T_{i1}, T_{i2} , 使得下列不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{i11} & \Lambda_{i12} & d_2 \mu^{d_2} T_{i1} \\ * & \Lambda_{i22} & d_2 \mu^{d_2} T_{i2} \\ * & * & -d_2 \mu^{d_2} M_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (3.6a)$$

$$0 < M_j < \theta_j R (j = 1, 2), \quad (3.6b)$$

$$(\alpha + \lambda_{\max}(\tilde{P}_i)) c_1^2 < \mu^{-N^*} \lambda_{\min}(\tilde{P}_i) c_2^2 \quad (3.6c)$$

那么当 $u(k) = 0$ 系统关于 (c_1, c_2, N^*, R) 是有限时间稳定的。其中, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足 $E^T S = 0$, $\text{rank}(S) = n - r$,

$$\begin{aligned}\Lambda_{i11} &= A_i^T \bar{P}_i A_i - A_i^T S^T \bar{Q}_i S A_i - \mu E^T P_i E + \delta M_1 + \text{He}\{\mu^{d_2} T_{i1} E\} + d_2 (A_i - E)^T M_2 (A_i - E), \\ \Lambda_{i12} &= A_i^T \bar{P}_i A_{di} - A_i^T S^T \bar{Q}_i S A_{di} - \mu^{d_2} (T_{i1} E - E^T T_{i2}^T) + d_2 (A_i - E)^T M_2 A_{di}, \\ \Lambda_{i22} &= A_{di}^T \bar{P}_i A_{di} - A_{di}^T S^T \bar{Q}_i S A_{di} - \mu^{d_1} M_1 - \text{He}\{\mu^{d_2} T_{i2} E\} + d_2 (A_{di} - E)^T M_2 (A_{di} - E), \\ \bar{P}_i &= \sum_{j=1}^M \pi_{ij} P_j, \tilde{P}_i = R^{-\frac{1}{2}} P_i R^{-\frac{1}{2}}, \bar{Q}_i = \sum_{j=1}^M \pi_{ij} Q_j, d_{12} = d_2 - d_1, \delta = d_{12} - 1, \\ \alpha &= (\theta_1 \eta_1 + \theta_1 \eta_2 + \theta_2 \eta_3), \eta_1 = \frac{\mu^{d_1} - 1}{(\mu - 1) \|E\|^2}, \eta_2 = \frac{\mu^{d_2} - \mu^{d_1} - d_{12} \mu + d_{12}}{(\mu - 1)^2 \|E\|^2}, \eta_3 = \frac{\mu^{d_2+1} - (d_2 + 1) \mu + d_2}{(\mu - 1)^2 \|E\|^2}\end{aligned}$$

证明: 首先, 证明当 $u(k) = 0$ 时系统的正则性和因果性。

由 $\Lambda_{i11} < 0$, 并且 $P_i > 0$, $M_1 > 0$, $M_2 > 0$, $d_2 > 0$ 和 $\delta > 0$, 可以得到

$$-A_i^T S^T \bar{Q}_i S A_i - E^T P_i E + \mu^{d_2} (T_{i1} E + E^T T_{i1}^T) < 0 \quad (3.7)$$

因为 $\text{rank}(E) = r \leq n$, 因此一定存在两个非奇异的矩阵 \mathcal{W}_1 和 \mathcal{W}_2 满足

$$\mathcal{W}_1 E \mathcal{W}_2 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

相应地, 可以将矩阵表示为

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_1 A_i \mathcal{W}_2 &= \begin{bmatrix} A_{i1} & A_{i2} \\ A_{i3} & A_{i4} \end{bmatrix}, \mathcal{W}_1^{-T} P_i \mathcal{W}_1^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{i1} & \tilde{P}_{i2} \\ \tilde{P}_{i3} & \tilde{P}_{i4} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{W}_2^T T_{i1} \mathcal{W}_1^{-1} &= \begin{bmatrix} T_{i11} & T_{i12} \\ T_{i13} & T_{i14} \end{bmatrix}, S \mathcal{W}_1^{-1} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix}\end{aligned} \quad (3.9)$$

由于 $E^T S = 0$, $\text{rank}(S) = n - r$ 可以得到 $S_1 = 0$ 。对式 (4.13) 左乘 \mathcal{M}_2^T , 右乘 \mathcal{M}_2 , 可以得到

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & -A_{i4}^T S_2^T \bar{Q}_i S_2 A_{i4} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.10)$$

其中 $*$ 表示与后续讨论无关的矩阵块元素, 其表达式从略。因此, 根据式 (3.10) 可以得到 $-A_{i4}^T S_2^T \bar{Q}_i S_2 A_{i4} < 0$, 由此可知, A_{i4} 一定是非奇异的, 否则一定会存在一个非零的向量 $\zeta_i \in \mathbb{R}^{n \times n-r}$ 使得 $A_{i4} \zeta_i = 0$, 这与式 (3.10) 相矛盾。因此, 可以得到当 $u(k) = 0$ 时系统是正则且因果的。

接着证明系统的有限时间稳定性。

构造如下的 Lyapunov-Krasovskii 泛函:

$$V(k, x(k), r_k) = \sum_{j=1}^4 V_j(k, x(k), r_k), \quad (3.11)$$

其中,

$$V_1(k, x(k), r_k) = x^T(k) E^T P_i E x(k),$$

$$\begin{aligned}
V_2(k, x(k), r_k) &= \sum_{i=k-d_1}^{k-1} \mu^{k-i-1} x^T(i) M_1 x(i), \\
V_3(k, x(k), r_k) &= \sum_{m=-d_2+1}^{-d_1} \sum_{i=k+m}^{k-1} \mu^{k-i-1} x^T(i) M_1 x(i), \\
V_4(k, x(k), r_k) &= \sum_{m=-d_2+1}^0 \sum_{i=k+m-1}^{k-1} \mu^{k-i-1} y^T(i) E^T M_2 E y(i)
\end{aligned}$$

同时, $y(i) = x(i+1) - x(i)$ 。

定义

$$\mathcal{E}\{\Delta V(k)\} \triangleq \mathcal{E}\{V(x(k+1), r_{k+1} = j, k+1 | r_k = i) - V(x(k), r_k = i, k)\} \quad (3.12)$$

然后可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\{\Delta V_1(k)\} - (\mu - 1)V_1(k) &= x^T(k+1) E^T \bar{P}_i E x(k+1) - \mu x^T(k) E^T P_i E x(k) \\
&= (A_i x(k) + A_{di} x(k-d(k)))^T \bar{P}_i (A_i x(k) + A_{di} x(k-d(k))) \\
&\quad - \mu x^T(k) E^T P_i E x(k) \quad (3.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\{\Delta V_2(k)\} - (\mu - 1)V_2(k) &= x^T(k) M_1 x(k) - \mu^{d_1} x^T(k-d(k)) M_1 x(k-d(k)) \\
&\quad + \sum_{i=k-d(k)+1}^{k-1} \mu^{k-i} x^T(i) M_1 x(i) - \sum_{i=k-d(k)+1}^{k-1} \mu^{k-i} x^T(i) M_1 x(i) \\
&\leq x^T(k) M_1 x(k) - \mu^{d_1} x^T(k-d(k)) M_1 x(k-d(k)) \\
&\quad + \sum_{i=k-d_1+1}^{k-1} x^T(i) M_1 x(i) - \sum_{i=k-d_2+1}^{k-1} x^T(i) M_1 x(i) \\
&= x^T(k) M_1 x(k) - \mu^{d_1} x^T(k-d(k)) M_1 x(k-d(k)) \\
&\quad + \sum_{i=k-d_2+1}^{k-d_1} \mu^{k-i} x^T(i) M_1 x(i) \quad (3.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\{\Delta V_3(k)\} - (\mu - 1)V_3(k) &= \sum_{i=-d_2+1}^{-d_1} x^T(i) M_1 x(i) - \sum_{i=-d_2+1}^{-d_1} \mu^{k-i} x^T(k+i) M_1 x(k+i) \\
&= d_{12} x^T(i) M_1 x(i) - \sum_{i=k-d_2+1}^{k-d_1} \mu^{k-i} x^T(i) M_1 x(i) \quad (3.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\{\Delta V_4(k)\} - (\mu - 1)V_4(k) &= \sum_{m=-d_2+1}^0 \sum_{i=k+m}^k \beta^{k-i} y^T(i) E^T M_2 E^T y(i) \\
&\quad - \sum_{m=-d_2+1}^0 \sum_{i=k+m-1}^{k-1} \beta^{k-i} y^T(i) E^T M_2 E^T y(i) \\
&\leq d_2 (E x(k+1) - E x(k))^T M_2 (E x(k+1) - E x(k)) \\
&\quad - \mu^{d_2} \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} y^T(i) E^T M_2 E^T y(i) \quad (3.16)
\end{aligned}$$

注意到 $y(i) = x(i+1) - x(i)$, 可得 $\sum_{i=k-d(k)}^{k-1} y(i) = x(k) - x(k-d(k))$ 。对于任意适当维度的矩阵 T_{i1} , T_{i2} , 使用自由权矩阵的方法, 可以得到

$$2\mu^{d_2} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d(k)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T_{i1} \\ T_{i2} \end{bmatrix} \left[Ex(k) - Ex(k-d(k)) - \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} Ey(i) \right] = 0 \quad (3.17)$$

由引理 2.5 可知, 对于适当维度的实矩阵 T_{i1} , T_{i2} 以下不等式成立

$$\begin{aligned} & -2\mu^{d_2} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d(k)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T_{i1} \\ T_{i2} \end{bmatrix} \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} Ey(i) \\ & \leq d_2 \mu^{d_2} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d(k)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T_{i1} \\ T_{i2} \end{bmatrix} M_2^{-1} \begin{bmatrix} T_{i1} \\ T_{i2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d(k)) \end{bmatrix} \\ & + \mu^{d_2} \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} y(i)^T E^T M_2 Ey(i) \end{aligned} \quad (3.18)$$

由于 $E^T S = 0$, 对于任意的适合维度的对称正定矩阵 Q_i 有

$$-x^T(k+1)E^T S^T \bar{Q}_i S Ex(k+1) = 0 \quad (3.19)$$

进一步可得

$$-(A_i x(k) + A_{di} x(k-d(k)))^T S^T \bar{Q}_i S (A_i x(k) + A_{di} x(k-d(k))) = 0 \quad (3.20)$$

由式 (3.13) 至 (3.20) 可得

$$\mathcal{E}\{\Delta V(k)\} - (\mu - 1)V(k) \leq \begin{bmatrix} x^T(k) & x^T(k-d(k)) \end{bmatrix} \Upsilon_i \begin{bmatrix} x^T(k) & x^T(k-d(k)) \end{bmatrix}^T \quad (3.21)$$

其中,

$$\Upsilon_i = \begin{bmatrix} \Lambda_{i11} & \Lambda_{i12} \\ * & \Lambda_{i22} \end{bmatrix} + d_2 \mu^{d_2} \begin{bmatrix} T_{i1} \\ T_{i2} \end{bmatrix} M_2^{-1} \begin{bmatrix} T_{i1} \\ T_{i2} \end{bmatrix}^T \quad (3.22)$$

由 Schur 补引理可知, 式 (3.6a) 可以确保 $\Upsilon_i < 0$ 。同时由式 (3.21) 且 $\mu > 1$, 可以得到

$$\mathcal{E}\{\Delta V(k)\} < \mu V(k) < \dots < \mu^k V(0) \quad (3.23)$$

对于系统的初始状态有,

$$\mathcal{E}\{V_1(0)\} = \mathcal{E}\{x^T(0)E^T P_i Ex(0)\} \leq \lambda_{\max}(\tilde{P}_i) c_1^2,$$

$$\mathcal{E}\{V_2(0)\} = \sum_{i=-d_1}^{k-1} \mu^{-i-1} x^T(i) M_1 x(i) \leq \theta_1 \eta_1 c_1^2,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\{V_3(0)\} &= \sum_{m=-d_2+1}^{-d_1} \sum_{i=m}^{-1} \mu^{-i-1} x^T(i) M_1 x(i) \leq \theta_1 \eta_2 c_1^2, \\ \mathcal{E}\{V_4(0)\} &= \sum_{m=-d_2+1}^0 \sum_{i=m-1}^{-1} \mu^{-i-1} (x^T(i+1) - x^T(i)) E^T N_2 E (x(i+1) - x(i)) \\ &\leq \theta_2 \eta_3 c_1^2\end{aligned}$$

可得

$$\mathcal{E}\{V(0)\} \leq (\alpha + \lambda_{\max}(\tilde{P}_i)) c_1^2 \quad (3.24)$$

然后, 易得

$$\mathcal{E}\{V(k)\} \geq \mathcal{E}\{x^T(k) E^T P_i E x(k)\} \geq \lambda_{\min}(\tilde{P}_i) \mathcal{E}\{x^T(k) E^T R E x(k)\} \quad (3.25)$$

由式 (3.23) 至 (3.25), 可以得到

$$\mathcal{E}\{x^T(k) E^T R E x(k)\} < c_2^2 \quad (3.26)$$

因此, 根据定义 3.2, 当 $u(k) = 0$ 系统 3.1 关于 (c_1, c_2, N^*, R) 是有限时间稳定的, 证毕。□

注释 3.1 定理 3.1 讨论了 $u(k) = 0$ 时 SMJSs 有限时间稳定性问题, 首先证明了系统是正则且因果的, 随后利用自由权矩阵的方法处理了证明过程中的时滞项, 以线性矩阵不等式的形式给出了系统有限时间稳定的充分条件。其次, 提出了一种新的 Lyapunov 泛函, 在 Lyapunov 泛函中引入了能量函数 μ^{k-i} , 从而在证明过程中, 可以得到 $V(k) < \mu V(k-1)$, 进一步可以得到 $V(k) < \mu^{N^*} V(0)$ 。然而, 在许多相关的有限时间控制的研究工作中经常忽视了能量函数的使用, 这些研究中往往用 $\Delta V(k) < (\mu - 1)V_1(k) < (\mu - 1)V(k)$ 来代替, 这在一定程度上增加了保守性。

定理 3.2 对于给定的标量 $d_1, d_2 (0 \leq d_1 < d_2)$, 对称正定矩阵 R , 如果存在标量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \rho > 0$, 对称正定矩阵 P_i, M_1, M_2 , 对称矩阵 Q_i 以及适当维数的矩阵 T_{i1}, T_{i2} , 使得下列不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Pi_{i11} & \Pi_{i12} & d_2 \mu^{d_2} T_{i1} & d_2 (A_i - E)^T & \varepsilon_1 I_n & \rho A_i^T S^T & A_i^T Z_i \\ * & \Pi_{i22} & d_2 \mu^{d_2} T_{i2} & d_2 A_{di}^T & \varepsilon_2 I_n & \rho A_{di}^T S^T & A_{di}^T Z_i \\ * & * & -d_2 \mu^{d_2} M_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Pi_{i44} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\rho I - \bar{Q}_i & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\rho I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\bar{H}_i \end{bmatrix} < 0, \quad (3.27a)$$

$$0 < M_j < \theta_j R (j = 1, 2), \quad (3.27b)$$

$$\sigma R^{-1} < H_i < R^{-1}, \quad (3.27c)$$

$$(\alpha + 1) c_1^2 < \sigma \mu^{-N^*} c_2^2 \quad (3.27d)$$

那么当 $u(k) = 0$ 系统关于 (c_1, c_2, N^*, R) 是有限时间稳定的。其中, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足 $E^T S = 0$, $\text{rank}(S) = n - r$,

$$\begin{aligned}\Pi_{i11} &= \delta M_1 + \mu \varepsilon_3^2 H_i + \text{He}\{\mu^{d_2} T_{i1} E\} + \text{He}\{\mu \varepsilon_3 E\} + \text{He}\{\varepsilon_1 A_i^T S^T\}, \\ \Pi_{i12} &= -\mu^{d_2} T_{i1} E + \mu^{d_2} E^T T_{i2}^T + \varepsilon_2 A_i^T S^T + \varepsilon_1 S A_{di}, \\ \Pi_{i22} &= -\mu^{d_1} M_1 - \text{He}\{\mu^{d_2} T_{i2} E\} + \text{He}\{\varepsilon_2 A_{di}^T S^T\}, \Pi_{i44} = d_2 \varepsilon_4^2 M_2 - 2d_2 \varepsilon_4 I, \\ Z_i &= \begin{bmatrix} \sqrt{\pi_{i1}} I & \sqrt{\pi_{i2}} I & \cdots & \sqrt{\pi_{iN}} I \end{bmatrix}, \\ \bar{H}_i &= \text{diag}\{H_1, H_2, \dots, H_N\}\end{aligned}$$

证明: 由引理 2.5, 对于任意的标量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, 存在标量 $\rho > 0$ 使得

$$\rho I + \bar{Q}_i > 0 \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}- \begin{bmatrix} A_i^T \\ A_{di}^T \end{bmatrix} S^T \bar{Q}_i S \begin{bmatrix} A_i^T \\ A_{di}^T \end{bmatrix}^T &\leq \begin{bmatrix} A_i^T \\ A_{di}^T \end{bmatrix} S^T \begin{bmatrix} \varepsilon_1 I \\ \varepsilon_2 I \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 I \\ \varepsilon_2 I \end{bmatrix} (\rho I + \bar{Q}_i)^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 I \\ \varepsilon_2 I \end{bmatrix}^T \\ &\quad + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 I \\ \varepsilon_2 I \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} A_i^T \\ A_{di}^T \end{bmatrix}^T + \rho \begin{bmatrix} A_i^T \\ A_{di}^T \end{bmatrix} S^T S \begin{bmatrix} A_i^T \\ A_{di}^T \end{bmatrix}^T\end{aligned} \quad (3.29)$$

由式 (3.6a) 可知, $P_i > 0$, 根据引理 2.5, 对于任意一个标量 ε_4 以下不等式成立

$$-\mu E^T P_i E \leq \mu \varepsilon_3 E^T + \mu \varepsilon_3 E + \mu \varepsilon_3^2 H_i \quad (3.30)$$

其中 $H_i = P_i^{-1}$ 。

注意到 $M_2 > 0$, 同理可得

$$-d_2 M_2^{-1} \leq d_2 \varepsilon_4^2 M_2 - 2d_2 \varepsilon_4^2 I \quad (3.31)$$

由式 (3.28) 至 (3.30), 结合式 (3.6a), 可得

$$\Lambda_i < \bar{\Lambda}_i = \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_{i11} & \bar{\Lambda}_{i12} & d_2 \mu^{d_2} T_{i1} \\ * & \bar{\Lambda}_{i22} & d_2 \mu^{d_2} T_{i2} \\ * & * & -d_2 \mu^{d_2} U \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

其中,

$$\begin{aligned}\bar{\Lambda}_{i11} &= \Pi_{i11} + A_i^T \bar{P}_i A_i + d_2 (A_i - E)^T M_2 (A_i - E) + \varepsilon_1^2 (\rho I + \bar{Q}_i)^{-1} + \rho A_i^T S^T S A_i, \\ \bar{\Lambda}_{i12} &= \Pi_{i12} + A_i^T \bar{P}_i A_{di} + d_2 (A_i - E)^T M_2 A_{di} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 (\rho I + \bar{Q}_i)^{-1} + \rho A_i^T S^T S A_{di}, \\ \bar{\Lambda}_{i22} &= \Pi_{i22} + A_{di}^T \bar{P}_i A_{di} + d_2 A_{di}^T M_2 A_{di} + \varepsilon_2^2 (\rho I + \bar{Q}_i)^{-1} + \rho A_{di}^T S^T S A_{di}\end{aligned}$$

根据 Schur 补引理, 如果条件 (3.27a) 成立, 那么可以得到式 (3.29) 中 $\bar{\Lambda}_i < 0$, 则进一步可以保证式 (3.6a) 成立。

由式 (3.27c) 可知

$$\sigma I < \tilde{P}_i^{-1} < I \quad (3.33)$$

其意味着 $0 < \sigma < \lambda_{\min}(\tilde{P}_i^{-1}) < \lambda_{\max}(\tilde{P}_i^{-1}) < 1$, 结合式 (3.6c), 可以得到

$$\begin{aligned}\lambda_{\max}(\tilde{P}_i^{-1})c_1^2 &< c_1^2 \\ &< \sigma(\mu^{-N^*}c_2^2 - \alpha c_1^2) \\ &< \lambda_{\min}(\tilde{P}_i^{-1})(\mu^{-N^*}c_2^2 - \alpha c_1^2)\end{aligned}\quad (3.34)$$

这表示式可以确保式 (3.27d) 成立。则定理 3.2 证毕。□

注释 3.2 定理 3.2 通过将耦合的变量进行处理, 将其变为可解的不等式条件, 同时在此基础上引入矩阵 H_i , 并令其满足预先给定的范围, 给出了系统正则、因果和有限时间稳定的可解的线性矩阵不等式条件。

注释 3.3 同时需要指出的是, 当 μ 趋近于 1 时, 定理 3.2 中式 (3.27a) 则变为了离散时间 SMJSs 的正则、因果和随机稳定性的判据, 对于特定的 SMJSs 而言, 与其有限时间稳定性的判据存在相似之处, 但是, 并不能表明 Lyapunov 渐近稳定和上述有限时间稳定两者之间的关系, 因为它们是各自完全不同的两个概念。

3.3.2 有限时间控制器设计

上一小节讨论了当 $u(k) = 0$ 时系统的有限时间稳定性, 本小节将在上一小节的基础上引入状态反馈控制律, 进一步讨论闭环系统的有限时间稳定性。

定理 3.3 对于给定的标量 $d_1, d_2 (0 \leq d_1 < d_2)$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \rho > 0$, 对称正定矩阵 R , 如果存在对称正定矩阵 P_i, M_1, M_2 , 对称矩阵 Q_i 以及适当维数的矩阵 K_i, T_{i1}, T_{i2} , 使得下列不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Pi}_{i11} & \bar{\Pi}_{i12} & d_2\mu^{d_2}T_{i1} & d_2(A_{ki} - E)^T & \varepsilon_1 I_n & \rho A_{ki}^T S^T & A_i^T Z_i \\ * & \Pi_{i22} & d_2\mu^{d_2}T_{i2} & d_2 A_{di}^T & \varepsilon_2 I_n & \rho A_{di}^T S^T & A_{di}^T Z_i \\ * & * & -d_2\mu^{d_2}M_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Pi_{i44} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\rho I - \bar{Q}_i & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\rho I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\bar{H}_i \end{bmatrix} < 0, \quad (3.35a)$$

$$0 < M_j < \theta_j R (j = 1, 2), \quad (3.35b)$$

$$\sigma R^{-1} < H_i < R^{-1}, \quad (3.35c)$$

$$(\alpha + 1)c_1^2 < \sigma\mu^{-N^*}c_2^2 \quad (3.35d)$$

其中, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足 $E^T S = 0$, $\text{rank}(S) = n - r$,

$$A_{ki} = A_i + B_i K_i,$$

$$\bar{\Pi}_{i11} = \delta M_1 + \mu\varepsilon_3^2 H_i + \text{He}\{\mu^{d_2} T_{i1} E\} + \text{He}\{\mu\varepsilon_3 E\} + \text{He}\{\varepsilon_1 A_{ki}^T S^T\},$$

$$\bar{\Pi}_{i12} = -\mu^{d_2} T_{i1} E + \mu^{d_2} E^T T_{i2}^T + \varepsilon_2 A_{ki}^T S^T + \varepsilon_1 S A_{di}$$

其他相同的量在定理 3.2 中定义, 那么闭环系统关于 (c_1, c_2, N, R) 是有限时间稳定的, 而状态反馈异步控制器给定为 $u(k) = K_i x(k)$ 。

注释 3.4 定理 3.3 在上述讨论的基础上给出了闭环系统正则、因果和有限时间稳定的线性矩阵不等式条件。需要指出的是, 在对其中一项 $d_2 \begin{bmatrix} T_{i1}^T & T_{i2}^T \end{bmatrix}^T M_2^{-1} \begin{bmatrix} T_{i1}^T & T_{i2}^T \end{bmatrix}$ 进行处理时, 由引理 2.5, 可得 $-d_2 M_2^{-1} \leq d_2 \varepsilon_4^2 M_2 - 2d_2 \varepsilon_4^2 I$, 从而可得出求解的条件, 这在一定程度上存在着保守性, 我们也可以令 $Y = M_2^{-1}$, 即 $Y M_2 = I$, 然后再利用锥互补方法求得最优值。

推论 3.1 对于给定的标量 $d_1, d_2 (0 \leq d_1 < d_2)$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \rho > 0$, 对称正定矩阵 R , 如果存在对称正定矩阵 P_i, M_1, M_2 , 对称矩阵 Q_i 以及适当维数的矩阵 K_i, T_{i1}, T_{i2} , 使得下列不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Pi}_{i11} & \bar{\Pi}_{i12} & d_2 \mu^{d_2} T_{i1} & d_2 (A_{ki} - E)^T & \varepsilon_1 I_n & \rho A_{ki}^T S^T & A_i^T \bar{Z}_i \\ * & \bar{\Pi}_{i22} & d_2 \mu^{d_2} T_{i2} & d_2 A_{di}^T & \varepsilon_2 I_n & \rho A_{di}^T S^T & A_{di}^T \bar{Z}_i \\ * & * & -d_2 \mu^{d_2} M_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Pi_{i44} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\tau_i I - \bar{Q}_i & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\rho I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\bar{H}_i \end{bmatrix} < 0, \quad (3.36a)$$

$$0 < M_j < \theta_j R (j = 1, 2), \quad (3.36b)$$

$$\sigma R^{-1} < H_i < R^{-1}, \quad (3.36c)$$

$$(\alpha + 1)c_1^2 < \sigma \mu^{-N^*} c_2^2 \quad (3.36d)$$

其中, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足 $E^T S = 0$, $\text{rank}(S) = n - r$,

$$A_{ki} = A_i + B_i K_i, \hat{P}_i = \sum_{j=1}^N \bar{\pi}_j P_j,$$

$$\bar{Z}_i = \begin{bmatrix} \sqrt{\bar{\pi}_i} I & \sqrt{\bar{\pi}_i} I & \cdots & \sqrt{\bar{\pi}_i} I \end{bmatrix}$$

其他相同的量在定理 3.3 中定义, 那么闭环系统关于 (c_1, c_2, N^*, R) 是有限时间稳定的, 而状态反馈异步控制器给定为 $u(k) = K_i x(k)$ 。

证明: 由定理 3.1 中式 (3.6a) 和式 (3.3) 可知

$$\Lambda_i < \tilde{\Lambda}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\Lambda}_{i11} & \tilde{\Lambda}_{i12} & d_2 \mu^{d_2} T_{i1} \\ * & \tilde{\Lambda}_{i22} & d_2 \mu^{d_2} T_{i2} \\ * & * & -d_2 \mu^{d_2} U \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

其中,

$$\tilde{\Lambda}_{i11} = \Pi_{i11} + A_i^T \hat{P}_i A_i + d_2 (A_i - E)^T M_2 (A_i - E) + \varepsilon_1^2 (\rho I + \bar{Q}_i)^{-1} + \rho A_i^T S^T S A_i,$$

$$\tilde{\Lambda}_{i12} = \Pi_{i12} + A_i^T \hat{P}_i A_{di} + d_2 (A_i - E)^T M_2 A_{di} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 (\rho I + \bar{Q}_i)^{-1} + \rho A_i^T S^T S A_{di},$$

$$\tilde{\Lambda}_{i22} = \Pi_{i22} + A_{di}^T \hat{P}_i A_{di} + d_2 A_{di}^T M_2 A_{di} + \varepsilon_2^2 (\rho I + \bar{Q}_i)^{-1} + \rho A_{di}^T S^T S A_{di}$$

根据 Schur 补引理, 如果条件 (3.36a) 成立, 那么可以得到式 (3.37) 中 $\tilde{\Lambda}_i < 0$, 则进一步可以保证式 (3.6a) 成立。

同时注意到 $\rho I + Q_j > 0$, 可以得到

$$\begin{aligned}\rho I + \bar{Q}_i &= \sum_{j=1}^N \pi_{ij}(\rho I + Q_j) \geq \sum_{j=1}^N \pi_i(\rho I + Q_j) \\ &= \tau_i I + \tilde{Q}_i\end{aligned}\quad (3.38)$$

其中, $\tau_i = N\pi_i\rho$, $\tilde{Q}_i = \sum_{j=1}^N \pi_i Q_j$ 。

按照定理 3.2 中相同的证明方法, 根据引理 2.5 对式 (3.29) 至式 (3.31) 进行相同的处理, 并将 A_i 替换成 $A_{ki} = A_i + B_i K_i$, 那么可以得到闭环系统关于 (c_1, c_2, N^*, R) 是有限时间稳定的。则证毕。□

注释 3.5 推论 3.1 结合式 (3.3) 考虑了转移概率部分未知且有着上下界的情况, 通过对式含有转移概率的相关项进行讨论, 给出了具有转移概率部分未知的闭环系统的正则、因果和有限时间稳定的充分条件。

3.4 数值仿真

例 3.1 考虑 (3.1) 形式的 SMJSs, 其中系统包含两个模态。系统参数给定如下:

$$\begin{aligned}E &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, A_{d1} = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_{d2} &= \begin{bmatrix} 0.1 & -0.2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

为了研究系统的有限时间稳定问题, 给定如下的参数:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mu = 1.02, c_1 = 2, c_2 = 4, N^* = 4$$

转移概率矩阵和矩阵 S 给定为

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.65 & 0.35 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

同时, 给出其他已知的参数。其中, $\varepsilon_1 = -12$, $\varepsilon_2 = 0.01$, $\varepsilon_3 = -1.2$, $\varepsilon_4 = 2.5$, 传输时滞 $d_1 = 1$, $d_2 = 4$ 。通过求解定理 3.3 中的线性矩阵不等式, 可以得到一组可行解为

$$\begin{aligned}H_1 &= \begin{bmatrix} 0.8521 & -0.1267 \\ -0.1267 & 0.8539 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0.8649 & 0.0018 \\ 0.0018 & 0.8544 \end{bmatrix}, \\ M_1 &= \begin{bmatrix} 0.3709 & -0.0542 \\ -0.0542 & 0.3971 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0.2870 & 0.0168 \\ 0.0168 & 0.3230 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

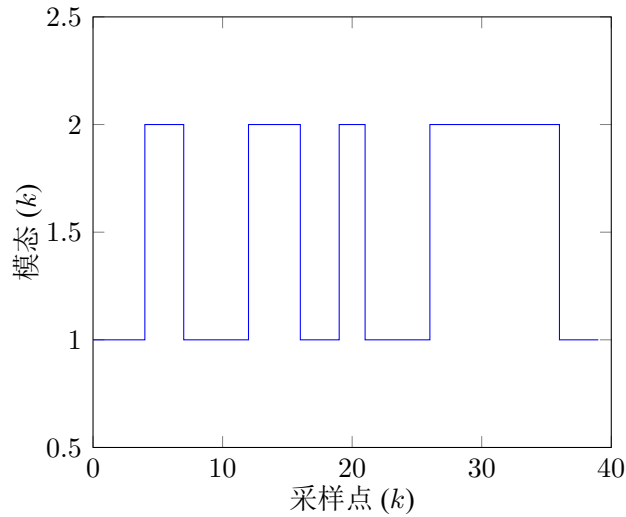


图 3.1 跳变模态

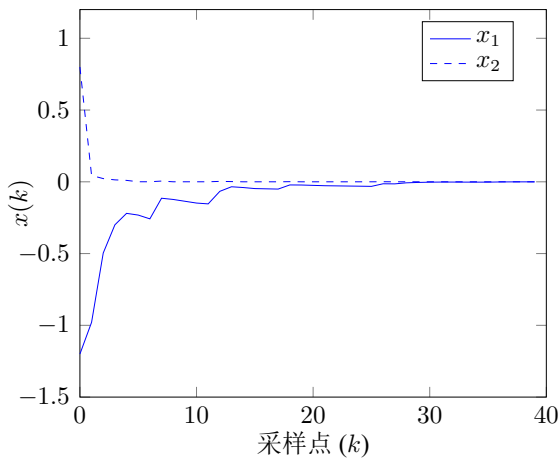
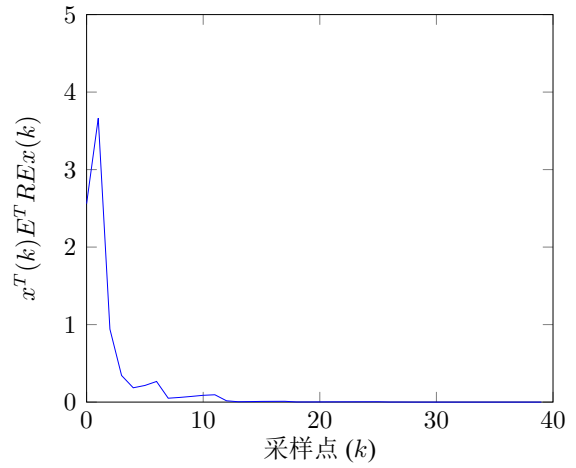


图 3.2 状态轨迹


 图 3.3 $x^T(k)E^T R E x(k)$ 的轨迹

因此, 可得系统的状态反馈增益为

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.6082 & -0.9613 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 1.0026 & 1.2432 \end{bmatrix}$$

根据上述给定的转移概率矩阵, 马尔可夫模态如图 3.1 所示, 在此跳变模态下, 闭环系统的状态轨迹如图 3.2 所示, 与此同时, 有限时间指标 $x^T(k)E^T R E x(k)$ 的轨迹如图 3.3 所示。

当系统的转移概率不确定且满足 $0.25 \leq \pi_{1j} \leq 0.60$, $0.3 \leq \pi_{2j} \leq 0.7$ 时, 取上述相同的其他参数, 根据推论 3.1, 可以得到一组可行解为

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.8736 & 0.0632 \\ 0.0632 & 0.8797 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0.8698 & 0.0011 \\ 0.0011 & 0.8587 \end{bmatrix},$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0.3521 & -0.0586 \\ -0.0586 & 0.4537 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0.2883 & 0.0168 \\ 0.0168 & 0.3194 \end{bmatrix}$$

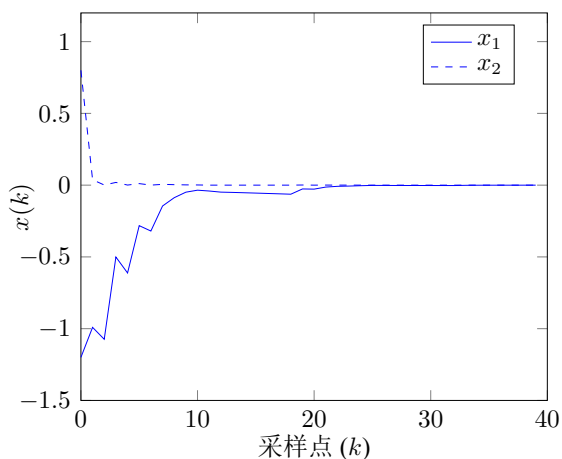
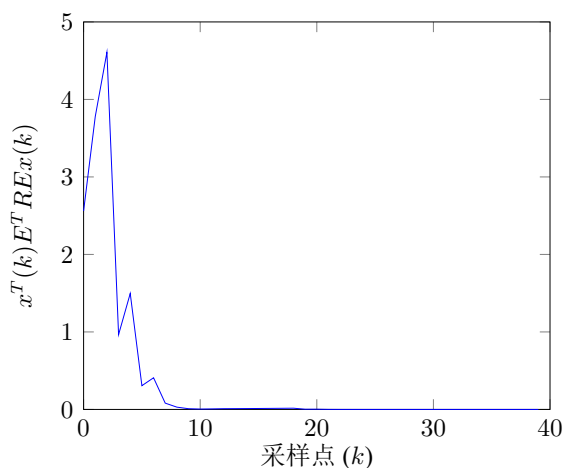


图 3.4 不确定转移概率状态轨迹

图 3.5 不确定转移概率 $x^T(k)E^T R E x(k)$ 轨迹

此时系统的状态反馈增益为

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.6185 & -0.9353 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 1.0015 & 1.1619 \end{bmatrix}$$

取与图 3.1 相同的跳变模态，此时，闭环系统的状态轨迹如图 3.4 所示，有限时间指标 $x^T(k)E^T R E x(k)$ 的轨迹如图 3.5 所示。

3.5 本章小结

本章讨论了具有时变延时的离散时间 SMJSs 的有限时间控制问题。首先，考虑转移概率完全已知和部分已知的两种情况，通过设计一个新的合适的 Lyapunov 泛函，以严格的延时相关线性矩阵不等式的形式给出了系统有限时间稳定的充分条件。其次，利用自由权矩阵以及相关的引理，处理了矩阵不等式中时滞项和非线性项，给出了状态反馈控制器的设计方法，同时也为后续章节处理时滞相关的问题奠定了基础。

第四章 基于事件触发的离散奇异马尔可夫跳变系统的异步有限时间控制

4.1 引言

上一节介绍了具有时变时滞的离散 SMJSs 的有限时间控制的研究,在本节,将进一步研究在事件触发机制下离散 SMJSs 的异步有限时间控制问题。在事件触发方案中,当传感器采集到信号之后,会首先对采样的信号进行处理,如果满足预先设定好的事件触发方案的阈值条件时,传感器才会将采样的信号传输至控制器,有效地减少了信号传输的数量,提高了资源的利用率。与此同时,数值舍入误差、数据传输延迟和限制的现象也经常出现在许多系统中,这使得控制器的实际切换时刻与系统的切换时刻不匹配。在实际应用中,很多情况下系统的模态并不能实时监测到,导致控制器模式与系统模式之间的存在异步现象。因此,在异步情况下的控制问题的研究十分具有实际意义。Tao 等采用了隐马尔可夫模型估计系统模式,研究了基于事件触发的离散时间 SMJSs 的异步输出反馈控制器设计问题^[85]。在有限时域内, Si 等研究了具有执行器饱和的 MJS 的有限时间异步滑模控制问题,采用了隐马尔可夫模型描述控制器模态和系统模态的异步现象,得到了系统的随机有限时间稳定的充分条件^[86]。Ren 等采用了一种新型的事件触发条件,研究了网络化切换线性系统异步有限时间控制问题,得到了闭环系统同时具有有限时间有界和输入输出有限时间稳定的充分条件^[87]。但是,在事件触发方案下,关于离散时间 SMJSs 的有限时间控制问题还没有得到充分的研究。

本章节研究了基于事件触发的离散时间 SMJSs 的有限时间异步 H_∞ 控制问题。为了节省网络带宽,提高网络资源的利用率,采用了事件触发机制。同时,建立了隐马尔可夫模型,解释了控制器模式与系统模式之间的异步现象,提出了一种新的 Lyapunov 泛函,以严格的矩阵不等式的形式给出了闭环系统有限时间有界,且满足有限时间 H_∞ 性能的充分条件。最后,给出了异步控制器的状态反馈控制增益矩阵的设计方法。

4.2 问题描述

考虑如下的离散奇异 Markov 跳变系统:

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= A(r_k)x(k) + B(r_k)u(k) + F(r_k)\omega(k), \\ z(k) &= C(r_k)x(k) + D(r_k)u(k) + G(r_k)\omega(k) \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中 $x(k) \in \mathbb{R}^{p_1}$ 为系统的状态向量, $u(k) \in \mathbb{R}^{p_2}$ 为系统的控制输入, $\omega(k) \in \mathbb{R}^{p_3}$ 为外部扰动。 $r(k)$ 是在有限空间 $\mathcal{K} = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ 中取值的离散马尔可夫过程,在概率空间 $(\Omega, \mathcal{J}, \mathcal{P})$ 内控制跳变的参数,并符合以下的转移概率:

$$\Pr\{r_{k+1} = j | r_k = i\} = \pi_{ij} \quad (4.2)$$

其中, $0 \leq \pi_{ij} \leq 1$, $\sum_{j=1}^M \pi_{ij} = 1, \forall i, j \in \mathcal{K}$ 。矩阵 E 是奇异矩阵, 且满足 $\text{rank}(E) = r \leq n$ 。 $A(r_k), B(r_k), C(r_k), D(r_k), F(r_k)$ 和 $G(r_k)$ 是适当维数的已知矩阵, 对于任意的 $r(k) = i$, 可以分别简写为 A_i, B_i, C_i, D_i, F_i 和 G_i 。

在本章节中, 为了节省有限的网络资源, 采用了事件触发机制。假定事件发生器的释放时刻为 $k_m, (0, 1, 2, \dots, \infty, k_0 = 0)$, 则下一个传输时刻为

$$k_{m+1} = \inf_{k \in \mathbb{N}_+} \{k > k_m | \Phi(k) > 0\} \quad (4.3)$$

其中, 事件触发的条件为

$$\Phi(k) = e^T(k) \Omega(r_k) e(k) - \lambda(r_k) x^T(k) \Omega(r_k) x(k) > 0 \quad (4.4)$$

其中 $e(k) = x(k) - x(k_m)$, $x(k_m)$ 是最新传输的状态, $\Omega_i > 0$ 是对称正定权重矩阵, λ_i 是预先设定的阈值。

基于事件触发方案, 在每个采样时刻, 采样的状态信号是否被传输由传感器决定。如果条件满足, 采样的状态信号将被传输。数据信号在传输的过程中, 需要考虑信号传输的时延。采用与 Xu 等^[68] 相类似的方法, 将信号区间 $[k_m + v_{m_l}, k_{m+1} + v_{k_{m+1}})$ 划分为:

$$[k_m + v_{m_l}, k_{m+1} + v_{k_{m+1}}) = \bigcup_{l=0}^{\bar{l}-1} \Gamma(l, k) + \Gamma(\bar{l}, k)$$

其中, $\Gamma(l, k) = [k_m + l + v_{k_m+l}, k_m + l + 1 + v_{k_m+l+1}]$, $l = 0, 1, \dots, \bar{l} - 1$, $\bar{l} = k_{m+1} - k_m - 1$, $\Gamma(\bar{l}, k) = [k_m - 1 + v_{k_m-1}, k_{m+1} + v_{k_{m+1}})$ 。定义 $d(k) = k - (k_m + l)$, $e(k) = x(k_m) - x(k_m + l)$, 然后可得 $0 < d_1 \leq d(k) \leq d_2 = \bar{v} + 1$ 。所以, $x(k_m)$ 可以被描述为

$$x(k_m) = x(k - d(k)) + e(k) \quad (4.5)$$

进一步, 设计异步状态反馈控制器如下:

$$u(k) = K_{(\delta_k)} x(k_m), k \in [k_m + v_{k_m}, k_m + v_{k_{m+1}}) \quad (4.6)$$

其中 $K_{(\delta_k)}$ 为控制器的增益, δ_k 为控制器的模式, 同时条件概率矩阵 $\Theta = \theta_{is}$ 表示如下:

$$\Pr\{\delta_k = s | r_k = i\} = \theta_{is} \quad (4.7)$$

其中, 对于任意的 $i \in \mathcal{K}$, $s \in \mathcal{Z}$, 有 $\theta_{is} \in [0, 1]$, 并且 $\sum_{s=1}^M \theta_{is} = 1$ 。

注释 4.1 事件触发机制中存在着一个重要的问题, 即最小的正的采样间隔是否存在。如果不存在, 则会出现事件在有限时间区间上被触发无数次的情况, 这种现象称为 Zeno 现象, 本章节采用的为离散型事件触发机制, 有 $k_{m+1} = \inf_{k \in \mathbb{N}_+} \{k > k_m | \Phi(k) > 0\}$, 即 $\tau^* = k_{m+1} - k_m, k \in \mathbb{N}_+$, 使得一定存在正的采样间隔, 这样便排除了 Zeno 现象。

注释 4.2 在实际应用中, 由于数据传输的限制和参数无法及时识别的问题, 控制器

无法准确接收到系统的实际模式，导致控制器的模式与系统的模式不同步。为了跟踪 SMJSs 的模式，提出了异步控制器 (4.6)。根据条件概率矩阵，控制器的模式由随机变量 δ_k 表示，它依赖于马尔可夫链 r_k 。此外，对于给定的条件概率矩阵，异步控制器 (4.6) 可以转变为其他类型。如果 $M = 1$, $\theta_{i1} = 1$, $i \in \mathcal{K}$ ，那么控制器的模式与系统的模式无关；如果 $M = N$ ，并且当 $i = s$ 时， $\theta_{is} = 1$ ，当 $i \neq s$ 时， $\theta_{is} = 0$ ，那么控制器与原系统是同步的。

根据上述讨论，结合式 (4.1)，(4.5)，(4.6)，可以将闭环系统表示为

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= A_i x(k) + B_i K_s (x(k-d(k)) + e(k)) + F_i \omega(k), \\ z(k) &= C_i x(k) + D_i K_s (x(k-d(k)) + e(k)) + G_i \omega(k), \\ x(\theta) &= \phi(\theta), \theta \in [-d_2, 0] \end{aligned} \quad (4.8)$$

本章的主要目的是考虑事件触发机制 (4.4) 的情况下，建立隐马尔可夫模型，解释控制器模式与系统模式之间的异步现象，然后为系统 (4.8) 设计状态反馈异步控制器 (4.6)，使得闭环系统 (4.8) 是正则的、因果的和 H_∞ 有限时间有界的。

为了方便下面的研究，这里给出一些相关的定义。

定义 4.1 ^[64] 对于给定的标量 $c_2 > c_1 > 0$ ， $\sum_{k=0}^{k^*} \omega^T(k) \omega(k) \leq d$ ，正定对称矩阵 R ，如果对于任意的 $k \in \{1, 2, \dots, k^*\}$ ，系统是正则的、因果的，且满足

$$\mathcal{E}\{x^T(k_1) E^T R E x(k_1), \|E\|^2 x^T(k_1) R x(k_1)\} \leq c_1^2 \Rightarrow \mathcal{E}\{x^T(k_2) E^T R E x(k_2)\} \leq c_2^2 \quad (4.9)$$

其中， $k_1 \in \{-d_2, d_2 + 1, \dots, 0\}$ ， $k_2 \in \{1, 2, \dots, k^*\}$ ，那么称系统关于 (c_1, c_2, k^*, R, d) 是有限时间有界的。

定义 4.2 ^[64] 对于给定的标量 $c_2 > c_1 > 0$ ， $\sum_{k=0}^{k^*} \omega^T(k) \omega(k) \leq d$ ，正定对称矩阵 R ，如果对于任意的 $k \in \{1, 2, \dots, k^*\}$ ，系统关于 (c_1, c_2, k^*, R, d) 是有限时间有界的，并且在零初始条件下控制输出 $z(k)$ 满足以下条件：

$$\mathcal{E}\left\{\sum_{k=0}^{k^*} z^T(k) z(k)\right\} < \gamma^2 \mathcal{E}\left\{\sum_{k=0}^{k^*} \omega^T(k) \omega(k)\right\} \quad (4.10)$$

其中， $\gamma > 0$ ，那么称系统关于 $(c_1, c_2, k^*, R, d, \gamma)$ 是有限时间 H_∞ 有界的。

4.3 主要结论

4.3.1 有限时间有界分析

本节考虑了事件触发方案，对闭环系统进行了有限时间有界性分析，给出了系统 (4.8) 关于 (c_1, c_2, k^*, R, d) 是有限时间有界的充分条件。

定理 4.1 对于给定的标量 $d_1, d_2 (0 \leq d_1 < d_2)$ ， $\lambda_i \in [0, 1)$ ，对称正定矩阵 R ，如果存在

对称正定矩阵 $P_i, M_1, M_2, N_1, N_2, \Omega_i, G_i, Z_{is}, V, Y_i$ 以及适当维数的矩阵 K_s, T_1, T_2, T_3 , 对于任意的 $i \in \mathcal{K}$ 和 $s \in \mathcal{Z}$, 使得下列不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -Z_{is} & \Upsilon_{12} \\ * & \Upsilon_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.11a)$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} + \Lambda + \Lambda^T & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} & \Pi_{15}(j) \\ * & \Pi_{22} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Pi_{33} & 0 & 0 \\ * & * & * & \Pi_{44} & 0 \\ * & * & * & * & \Pi_{55}(j) \end{bmatrix} < 0, j = 1, 2, \quad (4.11b)$$

$$(\mu + \lambda_{\max}(\tilde{P}_i))c_1^2 + \lambda_{\max}(Y_i)d^2 < \beta^{-k^*} \lambda_{\min}(\tilde{P}_i)c_2^2 \quad (4.11c)$$

那么闭环系统 (4.8) 关于 (c_1, c_2, k^*, R, d) 是有限时间有界的。其中, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足 $E^T S = 0$, $\text{rank}(S) = n - r$,

$$\begin{aligned} \Upsilon_{12} &= [\sqrt{\pi_{i1}} \mathcal{A}^T V^T \quad \sqrt{\pi_{i2}} \mathcal{A}^T V^T \quad \cdots \quad \sqrt{\pi_{iN}} \mathcal{A}^T V^T], \\ \Upsilon_{22} &= \text{diag}\{-VP_1^{-1}V^T, -VP_2^{-1}V^T, \dots, -VP_N^{-1}V^T\}, \\ \mathcal{A} &= [A_i \quad 0 \quad B_i K_s \quad 0 \quad B_i K_s \quad F_i], \\ \mathcal{B} &= [A_i - E \quad 0 \quad B_i K_s \quad 0 \quad B_i K_s \quad F_i], \\ \Lambda &= [\beta^{d_1} T_1 E + \beta^{d_2} T_3 E \quad -\beta^{d_1} T_1 E \quad \beta^{d_2} T_2 E - \beta^{d_2} T_3 E \quad -\beta^{d_2} T_2 E \quad 0 \quad 0], \\ \Pi_{11} &= \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 & \Sigma_{13} & 0 & \Sigma_{15} & \Sigma_{16} \\ * & \Sigma_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Sigma_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Sigma_{44} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Sigma_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & \Sigma_{66} \end{bmatrix}, \\ \Sigma_{11} &= M_1 + M_2 - \beta E^T P_i E + A_i^T S V + V^T S^T A_i, \\ \Sigma_{22} &= -\beta^{d_1} M_1, \Sigma_{33} = \lambda_i \Omega_i, \Sigma_{44} = -\beta^{d_2} M_2, \Sigma_{55} = -\Omega_i, \Sigma_{66} = -Y_i, \\ \Sigma_{13} &= \Sigma_{15} = V^T S^T B_i \sum_{l=1}^M \theta_{il} K_s, \Sigma_{16} = V^T S^T F_i, \\ \Pi_{12} &= [\sqrt{\theta_{i1}} I \quad \sqrt{\theta_{i2}} I \quad \cdots \quad \sqrt{\theta_{iM}} I], \\ \Pi_{22} &= \text{diag}\{-Z_{i1}^{-1}, -Z_{i2}^{-1}, \dots, -Z_{iM}^{-1}\}, \\ \Pi_{13} &= [\sqrt{\theta_{i1} d_1} \mathcal{B}^T V^T \quad \sqrt{\theta_{i2} d_1} \mathcal{B}^T V^T \quad \cdots \quad \sqrt{\theta_{iM} d_1} \mathcal{B}^T V^T], \\ \Pi_{33} &= \underbrace{\text{diag}\{-VN_1^{-1}V^T, -VN_1^{-1}V^T, \dots, -VN_1^{-1}V^T\}}_M, \\ \Pi_{14} &= [\sqrt{\theta_{i1} d_2} \mathcal{B}^T V^T \quad \sqrt{\theta_{i2} d_2} \mathcal{B}^T V^T \quad \cdots \quad \sqrt{\theta_{iM} d_2} \mathcal{B}^T V^T], \\ \Pi_{44} &= \underbrace{\text{diag}\{-VN_2^{-1}V^T, -VN_2^{-1}V^T, \dots, -VN_2^{-1}V^T\}}_M, \\ \Pi_{15}(1) &= [\sqrt{d_1 \beta^{d_1}} T_1 \quad \sqrt{(d_2 - d_1) \beta^{d_2}} T_2 \quad \sqrt{d_1 \beta^{d_2}} T_3], \\ \Pi_{55}(1) &= \text{diag}\{-N_1, -N_2, -N_2\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_{15}(2) &= \begin{bmatrix} \sqrt{d_1}\beta^{d_1}T_1 & \sqrt{d_2}\beta^{d_2}T_3 \end{bmatrix}, \\
 \Pi_{55}(2) &= \text{diag}\{-N_1, -N_2\}, \\
 \mu &= \alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2 + 2\alpha_3\eta_3 + 2\alpha_4\eta_4, \\
 \tilde{P}_i &= R^{-\frac{1}{2}}P_iR^{-\frac{1}{2}}, \alpha_1 = \lambda_{\max}\left(R^{-\frac{1}{2}}M_1R^{-\frac{1}{2}}\right), \alpha_2 = \lambda_{\max}\left(R^{-\frac{1}{2}}M_2R^{-\frac{1}{2}}\right), \\
 \alpha_3 &= \lambda_{\max}\left(R^{-\frac{1}{2}}N_1R^{-\frac{1}{2}}\right), \alpha_4 = \lambda_{\max}\left(R^{-\frac{1}{2}}N_2R^{-\frac{1}{2}}\right), \\
 \eta_1 &= \frac{\beta^{d_1}-1}{(\beta-1)\|E\|^2}, \eta_2 = \frac{\beta^{d_2}-1}{(\beta-1)\|E\|^2}, \eta_3 = \frac{\beta^{d_1+1}-(d_1+1)\beta+d_1}{(\beta-1)^2\|E\|^2}, \eta_4 = \frac{\beta^{d_2+1}-(d_2+1)\beta+d_2}{(\beta-1)^2\|E\|^2}
 \end{aligned}$$

证明: 首先, 证明系统 (4.8) 的正则性和因果性。

由 $\Pi_{11} < 0$, 可得

$$M_1 + M_2 - \beta E^T P_i E + A_i^T S V + V^T S^T A_i < 0 \quad (4.12)$$

由于 $M_1 > 0$, $M_2 > 0$, 可以得到

$$-\beta E^T P_i E + A_i^T S V + V^T S^T A_i < 0 \quad (4.13)$$

因为 $\text{rank}(E) = r \leq n$, 因此一定存在两个非奇异的矩阵 \mathcal{M}_1 和 \mathcal{M}_2 满足

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_1 E \mathcal{M}_2 &= \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{M}_1 A_i \mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{i1} & \tilde{A}_{i2} \\ \tilde{A}_{i3} & \tilde{A}_{i4} \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{M}_1^{-T} P_i \mathcal{M}_1^{-1} &= \begin{bmatrix} \tilde{P}_{i1} & \tilde{P}_{i2} \\ \tilde{P}_{i3} & \tilde{P}_{i4} \end{bmatrix}, S^T \mathcal{M}_1^{-1} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix}, V \mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

由于 $E^T S = 0$, 可以得到 $S_1 = 0$ 。对式 (4.13) 左乘 \mathcal{M}_2^T , 右乘 \mathcal{M}_1^T , 可以得到

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & \tilde{A}_{i4}^T S_2^T V_2 + V_2^T S_2 \tilde{A}_{i4} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.14)$$

其中 $*$ 表示与后续讨论无关的矩阵块元素, 其表达式从略。因此, 可以得到 $\tilde{A}_{i4}^T S_2^T V_2 + V_2^T S_2 \tilde{A}_{i4} < 0$, 由此可知, \tilde{A}_{i4} 一定是非奇异的。根据定义, 可以得到闭环系统是正则且因果的。

接着证明系统的有限时间有界性。

构造如下的 Lyapunov-Krasovskii 泛函:

$$V(k, x(k), r_k) = \sum_{j=1}^4 V_j(k, x(k), r_k) \quad (4.15)$$

其中,

$$\begin{aligned}
 V_1(k, x(k), r_k) &= x^T(k) E^T P_i E x(k), \\
 V_2(k, x(k), r_k) &= \sum_{i=k-d_1}^{k-1} \beta^{k-i-1} x^T(i) M_1 x(i) + \sum_{i=k-d_2}^{k-1} \beta^{k-i-1} x^T(i) M_2 x(i),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_3(k, x(k), r_k) &= \sum_{m=-d_1+1}^0 \sum_{i=k+m-1}^{k-1} \beta^{k-i-1} y^T(i) E^T M_1 E y(i) \\
&+ \sum_{m=-d_2+1}^0 \sum_{i=k+m-1}^{k-1} \beta^{k-i-1} y^T(i) E^T M_2 E y(i)
\end{aligned}$$

同时, $y(i) = x(i+1) - x(i)$ 。

定义

$$\mathcal{E}\{\Delta V(k)\} \triangleq \mathcal{E}\{V(x(k+1), r_{k+1} = j, k+1 | r_k = i) - V(x(k), r_k = i, k)\} \quad (4.16)$$

然后可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\{\Delta V_1(k)\} - (\beta - 1)V_1(k) &= \mathcal{E}\{x^T(k+1)E^T \bar{P}_i E x(k+1)\} - \beta x^T(k)E^T P_i E x(k) \\
&= \sum_{l=1}^M \theta_{il} \zeta^T(k) \mathcal{A}^T \bar{P}_i \mathcal{A} \zeta(k) - \beta x^T(k)E^T P_i E x(k) \quad (4.17)
\end{aligned}$$

其中, $\bar{P}_i = \sum_{j=1}^M \pi_{ij} P_j$,

$$\zeta(k) = \begin{bmatrix} x^T(k) & x^T(k-d_1) & x^T(k-d(k)) & x^T(k-d_2) & e^T(k) & \omega^T(k) \end{bmatrix}$$

令

$$Z_{il} = \mathcal{A}^T \bar{P}_i \mathcal{A} + \rho I \quad (4.18)$$

其中, $\rho > 0$, 可得

$$\mathcal{A}^T \bar{P}_i \mathcal{A} < Z_{is} \quad (4.19)$$

然后式 (4.17) 可以被重写为

$$\mathcal{E}\{\Delta V_1(k)\} - (\beta - 1)V_1(k) \leq \sum_{l=1}^M \theta_{il} \zeta^T(k) Z_{is} \zeta(k) - \beta x^T(k)E^T P_i E x(k) \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\{\Delta V_2(k)\} - (\beta - 1)V_2(k) &= \mathcal{E} \left\{ \sum_{i=k+1-d_1}^k \beta^{k-i} x^T(k) M_1 x(k) \right\} - \sum_{i=k-d_1}^k \beta^{k-i} x^T(k) M_1 x(k) \\
&+ \mathcal{E} \left\{ \sum_{i=k+1-d_2}^k \beta^{k-i} x^T(k) M_2 x(k) \right\} - \sum_{i=k-d_2}^k \beta^{k-i} x^T(k) M_2 x(k) \\
&= x^T(k) (M_1 + M_2) x(k) - \beta^{d_1} x^T(k-d_1) M_1 x(k-d_1) \\
&- \beta^{d_2} x^T(k-d_2) M_2 x(k-d_2) \quad (4.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\{\Delta V_3(k)\} - (\beta - 1)V_3(k) &= \mathcal{E} \left\{ \sum_{m=-d_1+1}^0 \sum_{i=k+m}^k \beta^{k-i} y^T(i) E^T N_1 E^T y(i) \right\} \\
&- \sum_{m=-d_1+1}^0 \sum_{i=k+m-1}^{k-1} \beta^{k-i} y^T(i) E^T N_1 E^T y(i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mathcal{E} \left\{ \sum_{m=-d_2+1}^0 \sum_{i=k+m}^k \beta^{k-i} y^T(i) E^T N_2 E^T y(i) \right\} \\
 & - \sum_{m=-d_2+1}^0 \sum_{i=k+m-1}^{k-1} \beta^{k-i} y^T(i) E^T N_2 E^T y(i) \\
 & \leq \mathcal{E} \{ d_1 y^T(k) E^T N_1 E^T y(k) + d_2 y^T(k) E^T N_2 E^T y(k) \} \\
 & - \beta^{d_1} \sum_{i=k-d_1}^{k-1} y^T(i) E^T N_1 E^T y(i) \\
 & - \beta^{d_2} \sum_{i=k-d_2}^{k-1} y^T(i) E^T N_2 E^T y(i)
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

注意到

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{E} \{ d_1 y^T(k) E^T N_1 E^T y(k) + d_2 y^T(k) E^T N_2 E^T y(k) \} \\
 & = \xi^T(k) \left\{ \sum_{s=1}^M \theta_{is} [d_1 \mathcal{B}^T N_1 \mathcal{B} + d_2 \mathcal{B}^T N_2 \mathcal{B}] \right\} \xi(k)
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

式 $-\beta^{d_2} \sum_{i=k-d_2}^{k-1} y^T(i) E^T N_2 E^T y(i)$ 可以被重写为

$$\begin{aligned}
 & - \beta^{d_2} \sum_{i=k-d_2}^{k-1} y^T(i) E^T N_2 E^T y(i) \\
 & = - \beta^{d_2} \sum_{i=k-d_2}^{k-d(k)-1} y^T(i) E^T N_2 E^T y(i) - \beta^{d_2} \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} y^T(i) E^T N_2 E^T y(i)
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

对于任意适当维度的矩阵 T_1, T_2, T_3 , 使用自由权矩阵的方法, 可以得到

$$\begin{aligned}
 & 2\beta^{d_1} \xi^T(k) T_1 \left[Ex(k) - Ex(k-d_1) - \sum_{i=k-d_1}^{k-1} E^T y(i) \right] = 0, \\
 & 2\beta^{d_2} \xi^T(k) T_2 \left[Ex(k-d(k)) - Ex(k-d_2) - \sum_{i=k-d_2}^{k-d(k)-1} E^T y(i) \right] = 0, \\
 & 2\beta^{d_2} \xi^T(k) T_3 \left[Ex(k) - Ex(k-d(k)) - \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} E^T y(i) \right] = 0
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

由引理 2.4 和引理 2.5 可知, 对于适当维度的实矩阵 T_1, T_2 以下不等式成立

$$\begin{aligned}
 & -2\beta^{d_1} \xi^T(k) T_1 \sum_{i=k-d_1}^{k-1} E y(i) \leq d_1 \beta^{d_1} \xi^T(k) T_1 M_1^{-1} T_1^T \xi(k) \\
 & + \beta^{d_1} \sum_{i=k-d_1}^{k-1} y^T(i) E^T M_1 E y(i),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2\beta^{d_2}\xi^T(k)T_2 \sum_{i=k-d_2}^{k-d(k)-1} Ey(i) &\leq (d_2 - d(k))\beta^{d_2}\xi^T(k)T_2M_2^{-1}T_2^T\xi(k) \\
&\quad + \beta^{d_2} \sum_{i=k-d_2}^{k-d(k)-1} y^T(i)E^TM_2Ey(i), \\
-2\beta^{d_2}\xi^T(k)T_3 \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} Ey(i) &\leq d(k)\beta^{d_2}\xi^T(k)T_3M_2^{-1}T_3^T\xi(k) \\
&\quad + \beta^{d_2} \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} y^T(i)E^TM_2Ey(i)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

由式 (4.26), 可以得到

$$\begin{aligned}
&2\beta^{d_1}\xi^T(k)T_1 [Ex(k) - Ex(k - d_1)] + 2\beta^{d_2}\xi^T(k)T_2 [Ex(k - d(k)) - Ex(k - d_2)] \\
&\quad + 2\beta^{d_2}\xi^T(k)T_3 [Ex(k) - Ex(k - d(k))] \\
&= \xi^T(k)(\Lambda + \Lambda^T)\xi(k)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

其中, Λ 在定理 4-1 中已经给出。由于 $E^TS = 0$, 可得

$$\mathcal{E} \{2x^T(k)V^TS^TEx(k+1)\} = 0 \tag{4.28}$$

其中, $V = V^T$ 。由式 (4.29), 进一步可得

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}\{2x^T(k)V^TS^TEx(k+1)\} \\
&= \sum_{s=1}^M \theta_{is} \{x^T(k)[V^TS^TA_i + A_i^TSV]x(k) + x^T(k)V^TS^TB_iK_sx(k - d(k)) \\
&\quad + x^T(k - d(k))K_s^TB_i^TSVx(k) + x^T(k)V^TS^TB_iK_se(k) \\
&\quad + e^T(k)K_s^TB_i^TSVx(k) + x^T(k)V^TS^TD_i\omega(k) \\
&\quad + \omega^T(k)D_i^TSVx(k)\}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

考虑事件触发机制 (4.4), 由式 (4.20) 至式 (4.29) 可得

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}\{\Delta V(k)\} - (\beta - 1)V(k) - \omega^T(k)Y_i\omega(k) \\
&\leq \mathcal{E}\{\Delta V(k)\} - (\beta - 1)V(k) - \omega^T(k)W_i\omega(k) - e^T(k)\Omega(r_k)e(k) + \lambda(r_k)x^T(k)\Omega(r_k)x(k) \\
&\leq \xi^T(k)(\Omega_{11} + \varphi + \varphi^T)\xi(k) + \xi^T(k) \left\{ \sum_{s=1}^M \theta_{is} [d_1\mathcal{B}^TN_1\mathcal{B} + d_2\mathcal{B}^TN_1\mathcal{B}] \right\} \xi(k) \\
&\quad + d_1\beta^{d_1}\xi^T(k)T_1M_1^{-1}T_1^T\xi(k) + (d_2 - d(k))\beta^{d_2}\xi^T(k)T_2M_2^{-1}T_2^T\xi(k) \\
&\quad + d(k)\beta^{d_2}\xi^T(k)T_3M_2^{-1}T_3^T\xi(k)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

根据引理 2.6 和 Schur 补引理, 由式 (4.11), 可以得到

$$\mathcal{E}\{\Delta V(k)\} - (\beta - 1)V(k) - \omega^T(k)Y_i\omega(k) < 0 \quad (4.31)$$

进一步, 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{V(k)\} &< \beta \mathcal{E}\{V(k-1)\} + \lambda_{\max}(Y_i) \mathcal{E}\{\omega^T(k-1)\omega(k-1)\} \\ &< \beta^2 \mathcal{E}\{V(k-2)\} + \lambda_{\max}(Y_i) \beta \mathcal{E}\{\omega^T(k-2)\omega(k-2)\} \\ &\quad + \lambda_{\max}(Y_i) \mathcal{E}\{\omega^T(k-1)\omega(k-1)\} \\ &< \cdots \\ &< \beta^k \mathcal{E}\{V(0)\} + \sum_{j=0}^{k-1} \beta^{k-j-1} \omega^T(j)\omega(j) \end{aligned} \quad (4.32)$$

由于 $\beta > 1$, 从式 (4.32) 可得

$$\mathcal{E}\{V(k)\} < \beta^{k*} \mathcal{E}\{V(0)\} + \lambda_{\max}(Y_i) \beta^{k*} d \quad (4.33)$$

对于系统的初始状态, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{V_1(0)\} &= \mathcal{E}\{x^T(0)E^T P_i E x(0)\} \leq \lambda_{\max}(\tilde{P}_i) c_1^2, \\ \mathcal{E}\{V_2(0)\} &= \sum_{i=-d_1}^{-1} \beta^{-i-1} x^T(i) M_1 x(i) + \sum_{i=-d_2}^{-1} \beta^{-i-1} x^T(i) M_2 x(i) \leq (\alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2) c_1^2, \\ \mathcal{E}\{V_3(0)\} &= \sum_{m=-d_1+1}^0 \sum_{i=m-1}^{-1} \beta^{-i-1} y^T(i) E^T N_1 E^T y(i) + \sum_{m=-d_2+1}^0 \sum_{i=m-1}^{-1} \beta^{-i-1} y^T(i) E^T N_2 E^T y(i) \\ &= \sum_{m=-d_1+1}^0 \sum_{i=m-1}^{-1} \beta^{-i-1} (x^T(i+1) - x^T(i)) E^T N_1 E (x(i+1) - x(i)) \\ &\quad + \sum_{m=-d_2+1}^0 \sum_{i=m-1}^{-1} \beta^{-i-1} (x^T(i+1) - x^T(i)) E^T N_2 E (x(i+1) - x(i)) \\ &\leq 2\alpha_3 \eta_3 c_1^2 + 2\alpha_4 \eta_4 c_1^2 \end{aligned}$$

可得

$$\mathcal{E}\{V(0)\} \leq (\mu + \lambda_{\max}(\tilde{P}_i)) c_1^2 \quad (4.34)$$

然后, 易得

$$\mathcal{E}\{V(k)\} \geq \mathcal{E}\{x^T(k)E^T P_i E x(k)\} \geq \lambda_{\min}(\tilde{P}_i) \mathcal{E}\{x^T(k)E^T R E x(k)\} \quad (4.35)$$

由式 (4.33) 至 (4.35), (4.11c), 可以得到

$$\mathcal{E}\{x^T(k)E^T R E x(k)\} < c_2^2 \quad (4.36)$$

因此, 闭环系统 (4.8) 关于 (c_1, c_2, k^*, R, d) 是有限时间有界的, 证毕。□

注释 4.3 定理 4.2 在引入了事件触发方案 (4.4) 的基础上, 考虑了控制器模式与系统模式的异步现象, 建立了隐马尔可夫模型, 将离散时间 SMJSs 建模为异步的闭环时滞系统。同时, 利用自由权矩阵的方法对不等式中的时滞项进行了处理, 给出了闭环系统有限时间有界的充分条件。

注释 4.4 需要指出的是, 定理 4.2 在式 (4.28) 中使用了零和等式证明了闭环系统的正则性、因果性和有限时间有界性, 其中矩阵 V 是未知的对称矩阵, 矩阵 S 是需要预先给定的。预先给定的矩阵 S 是否会影响式 (4.13) 对于闭环系统正则性、因果性的证明, 显然是否定的。在给定矩阵 S 的情况下, 假设式 (4.13) 存在可行解 P_i , V 和 β 。若这时给定另一个矩阵 \bar{S} , 由于矩阵 S 和 \bar{S} 有着相同的维数和秩, 所以一定存在一个非奇异矩阵 $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得 $\bar{S} = SU$, 即 $\bar{S}V = SUV$ 。因此, 给定的矩阵 $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 只需满足 $E^T S = 0$, $\text{rank}(S) = n - r$ 即可。

4.3.2 H_∞ 有限时间有界分析

上一小节在考虑事件触发机制的情况下, 对系统进行了有限时间有界性分析, 本小节以上一小节为基础, 给出了系统 H_∞ 有限时间有界的充分条件。

定理 4.2 对于给定的标量 $d_1, d_2 (0 \leq d_1 < d_2)$, $\lambda_i \in [0, 1)$, 对称正定矩阵 R , 如果存在对称正定矩阵 $P_i, M_1, M_2, N_1, N_2, \Omega_i, Y_i, Z_{is}, V$ 以及适当维数的矩阵 K_s, T_1, T_2, T_3 , 对于任意的 $i \in \mathcal{K}$ 和 $s \in \mathcal{Z}$, 使得下列不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -Z_{is} & \Upsilon_{12} \\ * & \Upsilon_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.37a)$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} + \Lambda + \Lambda^T & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} & \tilde{\Pi}_{15} & \tilde{\Pi}_{16}(j) \\ * & \Pi_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Pi_{44} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \tilde{\Pi}_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & \tilde{\Pi}_{66}(j) \end{bmatrix} < 0, j = 1, 2, \quad (4.37b)$$

$$(\mu + \lambda_{\max}(\tilde{P}_i))c_1^2 + \gamma^2 \beta^{-k^*} d^2 < \beta^{-k^*} \lambda_{\min}(\tilde{P}_i) c_2^2 \quad (4.37c)$$

其中, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足 $E^T S = 0$, $\text{rank}(S) = n - r$,

$$C = \begin{bmatrix} C_i & 0 & D_i K_l & 0 & D_i K_l & G_i \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Pi}_{15} = \begin{bmatrix} \sqrt{\theta_{i1}} C^T & \sqrt{\theta_{i2}} C^T & \cdots & \sqrt{\theta_{iM}} C^T \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Pi}_{55} = \text{diag}\{\underbrace{-I, -I, \dots, -I}_M\},$$

$$\tilde{\Pi}_{16}(1) = \begin{bmatrix} \sqrt{d_1 \beta^{d_1}} T_1 & \sqrt{(d_2 - d_1) \beta^{d_2}} T_2 & \sqrt{d_1 \beta^{d_2}} T_3 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Pi}_{66}(1) = \text{diag}\{-N_1, -N_2, -N_2\},$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}_{16}(2) &= \begin{bmatrix} \sqrt{d_1}\beta^{d_1}T_1 & \sqrt{d_2}\beta^{d_2}T_3 \end{bmatrix}, \\ \tilde{\Pi}_{66}(2) &= \text{diag}\{-N_1, -N_2\}\end{aligned}$$

同时, $Y_i = \gamma^2\beta^{-k^*}I_{p_3}$, 其他相同的量在定理4.1中定义, 那么闭环系统 (4.8) 关于 $(c_1, c_2, k^*, R, d, \gamma)$ 是 H_∞ 有限时间有界的。

证明: 从闭环系统 (4.8) 可知

$$z^T(k)z(k) = \xi^T(k) \left\{ \sum_{s=1}^M \theta_{is} \mathcal{C}^T \mathcal{C} \right\} \xi(k) \quad (4.38)$$

按照定理4.1的相同处理方法, 由式 (4.37a) 可得

$$\mathcal{E}\{\Delta V(k) - (\beta - 1)V(k) + z^T(k)z(k) - \gamma^2\beta^{-k^*}\omega^T(k)\omega(k)\} < 0 \quad (4.39)$$

然后, 可得

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\{V(k)\} &< \beta^{k^*}\mathcal{E}\{V(k)\} - \mathcal{E}\left\{\sum_{j=0}^{k^*-1} \beta^{k-j-1} z^T(j)z(j)\right\} \\ &\quad + \gamma^2\beta^{-k^*}\mathcal{E}\left\{\sum_{j=0}^{k^*-1} \beta^{k-j-1} \omega^T(j)\omega(j)\right\}\end{aligned} \quad (4.40)$$

在零初始条件下, 有 $V(k) > 0$, 由式 (4.40) 可得

$$\mathcal{E}\left\{\sum_{j=0}^{k^*-1} \beta^{k-j-1} z^T(j)z(j)\right\} < \gamma^2\mathcal{E}\left\{\sum_{j=0}^{k^*-1} \beta^{k-j-1} \omega^T(j)\omega(j)\right\} \quad (4.41)$$

由于 $\beta > 1$, 所以下列不等式成立

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\left\{\sum_{k=0}^{k^*} z^T(k)z(k)\right\} &< \mathcal{E}\left\{\sum_{j=0}^{k-1} \beta^{k-j-1} z^T(j)z(j)\right\}, \\ \gamma^2\beta^{-k^*}\mathcal{E}\left\{\sum_{j=0}^{k-1} \beta^{k-j-1} \omega^T(j)\omega(j)\right\} &< \gamma^2\mathcal{E}\left\{\sum_{k=0}^{k^*} \omega^T(k)\omega(k)\right\}\end{aligned}$$

进一步, 可得

$$\mathcal{E}\left\{\sum_{k=0}^{k^*} z^T(k)z(k)\right\} < \gamma^2\mathcal{E}\left\{\sum_{k=0}^{k^*} \omega^T(k)\omega(k)\right\} \quad (4.42)$$

因此, 闭环系统 (4.8) 关于 $(c_1, c_2, k^*, R, d, \gamma)$ 是 H_∞ 有限时间有界的。则证毕。 \square

注释 4.5 定理4.2 在定理4.1基础上考虑了输出的零初始条件, 给出了闭环系统有限时间有界且满足 H_∞ 性能指标的充分条件。

4.3.3 异步有限时间 H_∞ 控制器设计

上一小节对系统进行了 H_∞ 有限时间有界分析, 本小节在上一小节的基础上, 给出了异步有限时间 H_∞ 控制器的设计方法。

定理 4.3 对于给定的标量 $d_1, d_2 (0 \leq d_1 < d_2)$, $\lambda_i \in [0, 1)$, 对称正定矩阵 R , 如果存在对称正定矩阵 $H_i, \bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{\Omega}_i, \bar{Z}_{is}, \tilde{V}$ 以及适当维数的矩阵 $\tilde{K}_s, \bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3$, 对于任意的 $i \in \mathcal{K}$ 和 $s \in \mathcal{Z}$, 使得下列不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -2\varepsilon_1 \tilde{V}_6 + \varepsilon_1^2 \bar{Z}_{is} & \bar{\Upsilon}_{12} \\ * & \bar{\Upsilon}_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.43a)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Pi}_{11} + \bar{\Lambda} + \bar{\Lambda}^T & \bar{\Pi}_{12} & \bar{\Pi}_{13} & \bar{\Pi}_{14} & \bar{\Pi}_{15} & \bar{\Pi}_{16}(j) \\ * & \bar{\Pi}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \bar{\Pi}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \bar{\Pi}_{44} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \bar{\Pi}_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & \bar{\Pi}_{66}(j) \end{bmatrix} < 0, j = 1, 2, \quad (4.43b)$$

$$\sigma R^{-1} < H_i < R^{-1}, \quad (4.43c)$$

$$(\mu + 1)c_1^2 + \sigma\gamma^2\beta^{-k^*}d^2 < \beta^{-k^*}\sigma c_2^2 \quad (4.43d)$$

其中, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足 $E^T S = 0$, $\text{rank}(S) = n - r$,

$$\bar{\Lambda} = \begin{bmatrix} \beta^{d_1} \bar{T}_1 + \beta^{d_2} \bar{T}_3 & -\beta^{d_1} \bar{T}_1 & \beta^{d_2} \bar{T}_2 - \beta^{d_2} \bar{T}_3 & -\beta^{d_2} \bar{T}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Upsilon}_{12} = \begin{bmatrix} \sqrt{\pi_{i1}} \tilde{V}^T A_i^T & \sqrt{\pi_{i2}} \tilde{V}^T A_i^T & \cdots & \sqrt{\pi_{iN}} \tilde{V}^T A_i^T \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{\pi_{i1}} \tilde{V}^T \tilde{K}_s^T B_i^T & \sqrt{\pi_{i2}} \tilde{V}^T \tilde{K}_s^T B_i^T & \cdots & \sqrt{\pi_{iN}} \tilde{V}^T \tilde{K}_s^T B_i^T \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{\pi_{i1}} \tilde{V}^T \tilde{K}_s^T B_i^T & \sqrt{\pi_{i2}} \tilde{V}^T \tilde{K}_s^T B_i^T & \cdots & \sqrt{\pi_{iN}} \tilde{V}^T \tilde{K}_s^T B_i^T \\ \sqrt{\pi_{i1}} \tilde{V}^T F_i^T & \sqrt{\pi_{i2}} \tilde{V}^T F_i^T & \cdots & \sqrt{\pi_{iN}} \tilde{V}^T F_i^T \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Upsilon}_{22} = \text{diag}\{-H_1, -H_2, \dots, -H_N\},$$

$$\bar{\Pi}_{11} = \begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_{11} & 0 & \bar{\Sigma}_{13} & 0 & \bar{\Sigma}_{15} & \bar{\Sigma}_{16} \\ * & \bar{\Sigma}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \bar{\Sigma}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \bar{\Sigma}_{44} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \bar{\Sigma}_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & \bar{\Sigma}_{66} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Sigma}_{11} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \beta \tilde{V}^T E^T + \beta H_i + \beta E \tilde{V} + A_i^T S \tilde{V} + \tilde{V}^T S^T A_i,$$

$$\bar{\Sigma}_{22} = -\beta^{d_1} \bar{M}_1, \bar{\Sigma}_{33} = \lambda_i \bar{\Omega}_i, \bar{\Sigma}_{44} = -\beta^{d_2} \bar{M}_2, \bar{\Sigma}_{55} = -\bar{\Omega}_i, \bar{\Sigma}_{66} = -\beta^{-k^*} \gamma^2 I,$$

$$\bar{\Sigma}_{13} = \bar{\Sigma}_{15} = S^T B_i \sum_{s=1}^M \theta_{is} \tilde{K}_s, \bar{\Sigma}_{16} = S^T F_i,$$

$$\bar{\Pi}_{12} = \begin{bmatrix} \sqrt{\theta_{i1}} \tilde{V}_6 & \sqrt{\theta_{i2}} \tilde{V}_6 & \cdots & \sqrt{\theta_{iM}} \tilde{V}_6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Pi}_{22} &= \text{diag}\{-\bar{Z}_{i1}, -\bar{Z}_{i2}, \dots, -\bar{Z}_{iM}\}, \\
\bar{\Pi}_{13} &= \begin{bmatrix} \sqrt{\theta_{i1}d_1}\tilde{V}^T(A_i^T - E) & \sqrt{\theta_{i2}d_1}\tilde{V}^T(A_i^T - E) & \dots & \sqrt{\theta_{iM}d_1}\tilde{V}^T(A_i^T - E) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{\theta_{i1}d_1}\tilde{V}^T\tilde{K}_s^TB_i^T & \sqrt{\theta_{i2}d_1}\tilde{V}^T\tilde{K}_s^TB_i^T & \dots & \sqrt{\theta_{iM}d_1}\tilde{V}^T\tilde{K}_s^TB_i^T \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{\theta_{i1}d_1}\tilde{V}^T\tilde{K}_s^TB_i^T & \sqrt{\theta_{i2}d_1}\tilde{V}^T\tilde{K}_s^TB_i^T & \dots & \sqrt{\theta_{iM}d_1}\tilde{V}^T\tilde{K}_s^TB_i^T \\ \sqrt{\theta_{i1}d_1}\tilde{V}^TF_i^T & \sqrt{\theta_{i2}d_1}\tilde{V}^TF_i^T & \dots & \sqrt{\theta_{iM}d_1}\tilde{V}^TF_i^T \end{bmatrix}, \\
\bar{\Pi}_{33} &= \text{diag}\{\underbrace{-2\varepsilon_2\tilde{V} + \varepsilon_2^2\bar{N}_1, -2\varepsilon_2\tilde{V} + \varepsilon_2^2\bar{N}_1, \dots, -2\varepsilon_2\tilde{V} + \varepsilon_2^2\bar{N}_1}_M\}, \\
\bar{\Pi}_{14} &= \begin{bmatrix} \sqrt{\theta_{i1}d_2}\tilde{V}^T(A_i^T - E) & \sqrt{\theta_{i2}d_2}\tilde{V}^T(A_i^T - E) & \dots & \sqrt{\theta_{iM}d_2}\tilde{V}^T(A_i^T - E) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{\theta_{i1}d_2}\tilde{V}^T\tilde{K}_s^TB_i^T & \sqrt{\theta_{i2}d_2}\tilde{V}^T\tilde{K}_s^TB_i^T & \dots & \sqrt{\theta_{iM}d_2}\tilde{V}^T\tilde{K}_s^TB_i^T \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{\theta_{i1}d_2}\tilde{V}^T\tilde{K}_s^TB_i^T & \sqrt{\theta_{i2}d_2}\tilde{V}^T\tilde{K}_s^TB_i^T & \dots & \sqrt{\theta_{iM}d_2}\tilde{V}^T\tilde{K}_s^TB_i^T \\ \sqrt{\theta_{i1}d_2}\tilde{V}^TF_i^T & \sqrt{\theta_{i2}d_2}\tilde{V}^TF_i^T & \dots & \sqrt{\theta_{iM}d_2}\tilde{V}^TF_i^T \end{bmatrix}, \\
\bar{\Pi}_{44} &= \text{diag}\{\underbrace{-2\varepsilon_3\tilde{V} + \varepsilon_3^2\bar{N}_2, -2\varepsilon_3\tilde{V} + \varepsilon_3^2\bar{N}_2, \dots, -2\varepsilon_3\tilde{V} + \varepsilon_3^2\bar{N}_2}_M\}, \\
\bar{\Pi}_{15} &= \begin{bmatrix} \sqrt{\theta_{i1}}\tilde{V}^TC_i^T & \sqrt{\theta_{i2}}\tilde{V}^TC_i^T & \dots & \sqrt{\theta_{iM}}\tilde{V}^TC_i^T \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{\theta_{i1}}\tilde{V}^T\tilde{K}_s^TD_i^T & \sqrt{\theta_{i2}}\tilde{V}^T\tilde{K}_s^TD_i^T & \dots & \sqrt{\theta_{iM}}\tilde{V}^T\tilde{K}_s^TD_i^T \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{\theta_{i1}}\tilde{V}^T\tilde{K}_s^TD_i^T & \sqrt{\theta_{i2}}\tilde{V}^T\tilde{K}_s^TD_i^T & \dots & \sqrt{\theta_{iM}}\tilde{V}^T\tilde{K}_s^TD_i^T \\ \sqrt{\theta_{i1}}\tilde{V}^TG_i^T & \sqrt{\theta_{i2}}\tilde{V}^TG_i^T & \dots & \sqrt{\theta_{iM}}\tilde{V}^TG_i^T \end{bmatrix}, \\
\bar{\Pi}_{55} &= \text{diag}\{\underbrace{-I, -I, \dots, -I}_M\}, \\
\bar{\Pi}_{16}(1) &= \begin{bmatrix} \sqrt{d_1\beta^{d_1}}\bar{T}_1 & \sqrt{d_{12}\beta^{d_2}}\bar{T}_2 & \sqrt{d_1\beta^{d_2}}\bar{T}_3 \end{bmatrix}, \bar{\Pi}_{66}(1) = \text{diag}\{-\bar{N}_1, -\bar{N}_2, -\bar{N}_2\}, \\
\bar{\Pi}_{16}(2) &= \begin{bmatrix} \sqrt{d_1\beta^{d_1}}\bar{T}_1 & \sqrt{d_2\beta^{d_2}}\bar{T}_3 \end{bmatrix}, \bar{\Pi}_{66}(2) = \text{diag}\{-\bar{N}_1, -\bar{N}_2\}, \\
\bar{M}_1 &= \tilde{V}^TM_1\tilde{V}, \bar{M}_2 = \tilde{V}^TM_2\tilde{V}, \bar{N}_1 = \tilde{V}^TN_1\tilde{V}, \bar{N}_2 = \tilde{V}^TN_2\tilde{V} \\
\bar{\Omega}_i &= \tilde{V}^T\Omega_i\tilde{V}, \bar{T}_1 = \tilde{V}_5^TT_1E\tilde{V}_5, \bar{T}_2 = \tilde{V}_5^TT_2E\tilde{V}_5, \bar{T}_3 = \tilde{V}_5^TT_3E\tilde{V}_5
\end{aligned}$$

同时, M 代表重复的次数, 其他相同的量在定理 4.2 中定义, 那么闭环系统 (4.8) 关于 $(c_1, c_2, k^*, R, d, \gamma)$ 是 H_∞ 有限时间有界的, 而状态反馈异步控制器增益给定为

$$K_s = \tilde{K}_s\tilde{V}^{-1} \quad (4.44)$$

证明: 定义 $H_i = P_i^{-1}$, $\tilde{V} = V^{-1}$, $\tilde{V}_6 = \text{diag}\{\underbrace{\tilde{V}, \dots, \tilde{V}}_6\}$, $\tilde{V}_5 = \text{diag}\{\tilde{V}, \tilde{V}, \tilde{V}, \tilde{V}, \tilde{V}, I\}$, $\tilde{V}_N = \text{diag}\{\underbrace{\tilde{V}, \dots, \tilde{V}}_N\}$, $\bar{Z}_{is} = Z_{is}^{-1}$, $\tilde{K}_{is} = K_s\tilde{V}$, 由引理 2.5, 可得

$$-\tilde{V}_6Z_{is}\tilde{V}_6 = -\tilde{V}_6\bar{Z}_{is}^{-1}\tilde{V} \leq -2\varepsilon_1\tilde{V}_6 + \varepsilon_1^2\bar{Z}_{is} \quad (4.45)$$

在式 (4.37a) 左乘 $\text{diag}\{\tilde{V}_6, \tilde{V}_N\}$, 右乘其转置, 可得式 (4.43a), 这表示式 (4.43a) 可以确保式 (4.37a) 成立。

同理, 可得

$$\begin{aligned} -\tilde{V}^T N_1^{-1} \tilde{V} &\leq -2\varepsilon_2 \tilde{V} + \varepsilon_2^2 N_1, \\ -\tilde{V}^T N_2^{-1} \tilde{V} &\leq -2\varepsilon_3 \tilde{V} + \varepsilon_3^2 N_2 \end{aligned} \quad (4.46)$$

在式 (4.46) 左乘 $\text{diag}\{\tilde{V}_5, I, \tilde{V}_l, \tilde{V}_l, \tilde{V}_l, I, \tilde{V}_l\}$, 右乘其转置, 可得

$$-\beta \tilde{V}^T E^T P_i E \tilde{V} \leq \beta \tilde{V}^T E^T + \beta E \tilde{V} + \beta H_i \quad (4.47)$$

这表示式 (4.47) 可以确保式 (4.37a) 成立。

由式 (4.43c) 可知

$$\sigma I < \tilde{P}_i^{-1} < I \quad (4.48)$$

其意味着 $0 < \sigma < \lambda_{\min}(\tilde{P}_i^{-1}) < \lambda_{\max}(\tilde{P}_i^{-1}) < 1$, 结合式 (4.43d), 可以得到

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(\tilde{P}_i^{-1}) c_1^2 &< c_1^2 \\ &< \sigma(\beta^{-k^*} c_2^2 - \mu c_1^2 - \gamma^2 \beta^{-k^*} d^2) \\ &< \lambda_{\min}(\tilde{P}_i^{-1}) (\beta^{-k^*} c_2^2 - \mu c_1^2 - \gamma^2 \beta^{-k^*} d^2) \end{aligned} \quad (4.49)$$

这表示式 (4.43d) 可以确保式 (4.37c) 成立。则证毕。 \square

注释 4.6 本小节对于定理 4.2 中的一些耦合量进行了处理, 利用 Schur 补引理和矩阵变换, 以线性矩阵不等式的形式给出了一个可解的充分条件, 保证闭环系统是有限时间有界的且满足 H_∞ 性能指标。同时上述定理中设计控制器的方法不仅适用于设计异步控制器, 还可以用来设计模式无关的控制器和同步控制器, 这为 SMJSs 的控制器设计提供了一种有效的方法。

4.4 数值仿真

为了验证上述结论, 在本节中给出了一个数值示例, 考虑 (4.1) 形式的离散时间 SMJSs, 其包含两个模态为

模态 1:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} -1.3 & 0 \\ 0.2 & 1.2 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

模态 2:

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.1 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

假设转移概率矩阵 Ψ 为

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

设计的控制器的条件概率矩阵为

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

给定矩阵 $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 可以选择参数矩阵 $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 。同时, 为了设计系统在事件触发机制下的异步有限时间控制器, 给出以下已知参数。传输时滞 $d_1 = 1, d_2 = 3$, 事件触发系数 $\lambda_1 = 0.08, \lambda_2 = 0.12$ 。另外, 选择有限时间参数 $c_1 = 1, c_2 = 6, k^* = 10, d = 6, \beta = 1.2$ 。

首先, 系统的马尔可夫跳变模态如图 4.1 所示, 控制器模式如图 4.2 所示。

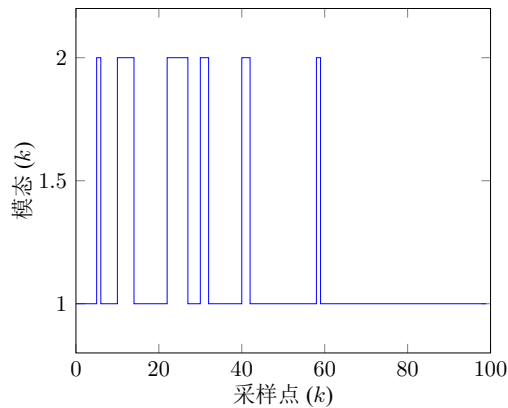


图 4.1 跳变模态

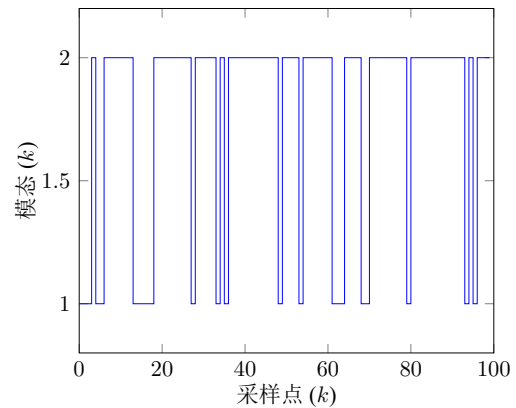


图 4.2 控制器模态

根据定理 4.3, 通过求解线性矩阵不等式, 可以得到一组可行解为

$$\tilde{K}_1 = \begin{bmatrix} 0.1787 & -0.0887 \end{bmatrix}, \tilde{K}_2 = \begin{bmatrix} 0.1776 & -0.0891 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} 0.2509 & -0.0129 \\ -0.0129 & 0.2089 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 0.7527 & -0.0172 \\ -0.0172 & 0.7827 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0.6833 & 0.0220 \\ 0.0220 & 0.7220 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} 14.9285 & 12.2818 \\ 12.2818 & 15.7827 \end{bmatrix}, \Omega_2 = \begin{bmatrix} 19.9071 & 5.0988 \\ 5.0988 & 11.7558 \end{bmatrix}$$

然后可得系统的状态反馈增益为

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.6925 & -0.3820 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 0.6881 & -0.3842 \end{bmatrix}$$

此时, 最优的性能指标 $\gamma^* = 1.2163$ 。同时, 系统的初始状态为 $x(0) = [-0.6, 0.4]^T$, 外部扰动为 $\omega(k) = e^{-0.2k} \sin 0.5k$ 。在上述的异步控制器的作用下, 系统的轨迹如图 4.3 所示, $x^T(k)E^T R E x(k)$ 的轨迹如图 4.4 所示, 最后, 基于事件触发方案, 系统的触发时刻和间隔如图 4.5 所示。

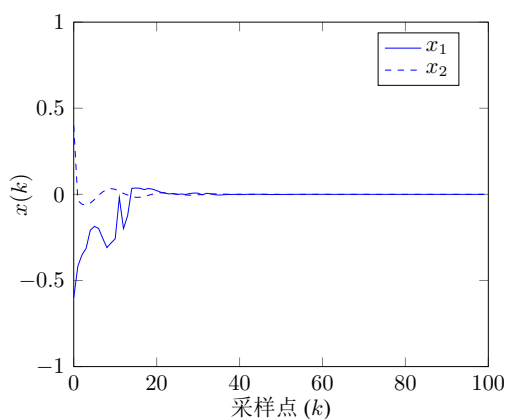


图 4.3 状态轨迹

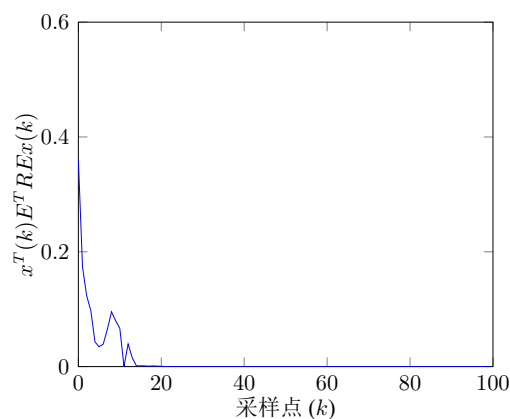


图 4.4 $x^T(k)E^T R E x(k)$ 的轨迹

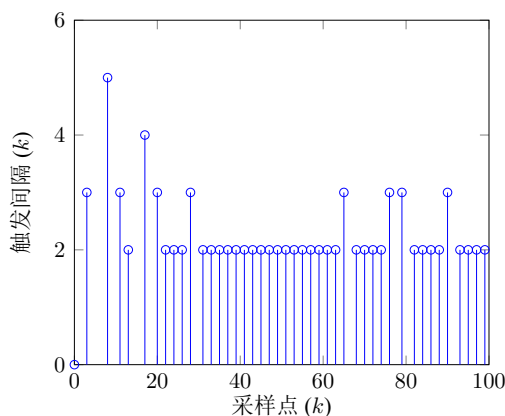


图 4.5 触发时刻和触发间隔

4.5 本章小结

本章研究了基于事件触发的 SMJSs 的异步有限时间 H_∞ 控制问题。考虑了信号传输的事件触发机制和网络传输延迟, 建立了隐马尔可夫模型, 解释了控制器模式与系统模式之间的异步现象, 给出了异步控制器的状态反馈控制增益矩阵的设计方法。提出了一种新的合适的 Lyapunov 泛函, 给出了闭环系统有限时间有界, 且满足有限时间 H_∞ 有界的充分条件。最后, 给出了一个数值例子, 验证了该方法的正确性和有效性。

第五章 基于事件触发的离散奇异马尔可夫跳变系统的有限时间输出反馈控制

5.1 引言

前两个章节讨论了 SMJSs 的状态反馈控制问题, 本章节将继续采用上一章节的事件触发方案, 在有限时域内, 对 SMJSs 的静态输出反馈控制问题进行研究。在控制系统的设计中, 状态反馈和输出反馈是两种主要的反馈方式。前者是将观测到的状态作为反馈量从而构成反馈律, 实现对闭环系统的控制。在现代控制理论的状态空间分析法中, 通常情况下, 大多采用状态反馈的方式。因为状态空间分析法中采用的模型为状态空间模型, 控制系统的内部动态特性可由状态变量完整的描述, 另外, 对于状态变量, 可获得的关于系统的信息更加的完全、充分。然而, 在有些情况下, 系统的状态变量并不能被观测到, 这时输出反馈则彰显出它的优势。Wang 等通过马尔可夫跳变最优滤波理论和平均场方法, 提出了分布式输出反馈控制法, 研究了马尔可夫跳变多代理系统的分布式输出反馈控制^[88]。Li 等研究了 MJSs 的输出反馈 H_∞ 控制问题, 给出了 H_∞ 次优控制器存在的 Riccati 型充分必要条件^[89]。Su 等研究了受异步模式信息和欺骗攻击的 MJSs 的静态输出反馈控制问题, 通过构造模式依赖的 Lyapunov 函数, 给出了闭环系统在随机发生的欺骗攻击和外部干扰下是随机均方指数有界的充分条件^[90]。在有限时域内, Zhao 等研究了不确定的马尔可夫跳变非线性系统的输出反馈跟踪控制问题, 给出了一个基于指令滤波反步法和自适应神经网络技术的有限时间控制方案^[91]。Wang 等研究了具有时变转移概率的非线性离散时间 SMJSs 的有限时间有界性和稳定性问题^[92]。Shen 等研究了 MJSs 的有限时间 H_∞ 静态输出反馈控制问题, 通过引入与原系统状态和输出相关的两个新变量, 给出了闭环系统有限时间 H_∞ 有界的充分条件^[93]。

本章节在上述研究成果的基础上, 研究了基于事件触发的离散时间 SMJSs 的静态输出反馈有限时间 H_∞ 控制问题, 其中系统的模态跳变概率精确已知, 外部扰动满足幅值有界条件。首先, 同时考虑网络信号传输时延和事件触发机制, 针对静态输出反馈控制律, 建立了离散时间 SMJSs 的闭环系统模型, 给出了闭环系统有限时间有界, 且满足有限时间 H_∞ 性能的充分条件。其次, 提出了一种新的 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 降低了保守性。最后, 基于矩阵分解算法, 给出了静态输出反馈控制增益矩阵的设计方法。

5.2 问题描述

考虑如下的离散时间 SMJSs:

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= A(r_k)x(k) + B(r_k)u(k) + D(r_k)\omega(k), \\ y(k) &= C(r_k)x(k), \\ z(k) &= F(r_k)x(k) + G(r_k)\omega(k) \end{aligned} \quad (5.1)$$

其中, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态向量, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ 是系统的输入向量, $y(k) \in \mathbb{R}^{q_1}$ 是系统的输出向量, $z(k) \in \mathbb{R}^{q_2}$ 是系统的测量输出向量, $\omega(k) \in \mathbb{R}^{q_3}$ 是系统的外部扰动输入。 $r(k)$ 是在有限空间 $\mathcal{I} = \{1, 2, 3, \dots, M\}$ 中取值的离散马尔可夫链, 在概率空间 $(\Omega, \mathcal{J}, \mathcal{P})$ 内控制跳变的参数, 并符合如下的转移概率:

$$\Pr\{r_{k+1} = j | r_k = i\} = \pi_{ij} \quad (5.2)$$

其中, $0 \leq \pi_{ij} \leq 1$, $\sum_{j=1}^M \pi_{ij} = 1$, $\forall i, j \in \mathcal{I}$ 。 E 是奇异矩阵, 且满足 $\text{rank}(E) = r \leq n$ 。 $A(r_k), B(r_k), C(r_k), D(r_k), F(r_k)$ 和 $G(r_k)$ 是已知的适当维数的矩阵, 对于任意的 $r_k = i$, 可以分别简写为 A_i, B_i, C_i, D_i, F_i 和 G_i 。

本章采用的事件触发方案为

$$[y(k) - y(k_l)]^T \Omega_i [y(k) - y(k_l)] > \delta_i y^T(k) \Omega_i y(k) \quad (5.3)$$

其中 $\Omega_i > 0$ 是对称正定权重矩阵, $\delta_i \in [0, 1)$ 是预先设定的阈值。 $y(k)$ 是当前的采样状态, $y(k_l)$ 是最新传输的状态, k_l 是释放时刻。在上述事件触发方案下, 如果满足条件 (5.3), 那么最新的状态 $y(k_l)$ 将被传输至控制器中。

在数据的传输过程中, 往往存在着传输时延的问题。由于存在信号传输引起的延迟, 这些信号将在 $k_0 + d_{k_0}, k_1 + d_{k_1}, \dots$ 时刻被传输至控制器。为了进一步分析信号传输的延迟特性, 针对不同的时间间隔分别进行讨论。

当考虑 $k_{l+1} + d_{k_{l+1}} \leq k_l + \tilde{d} + 1$ 时, 令 $d(k) = k - d_{k_l}$, 可知, 对于任意的 $k \in [k_l + d_{k_l}, k_{l+1} + d_{k_{l+1}} - 1]$, 可以得到 $d(k)$ 使得 $d_{k_l} \leq d(k) \leq (d_{k_{l+1}} - d_{k_l}) + d_{k_{l+1}} - 1$ 成立。

当考虑 $k_{l+1} + d_{k_{l+1}} < k_l + \tilde{d} + 1$ 时, 将这个区间划分为下面两个子区间: $[k_l + d_{k_l}, k_{l+1} + \tilde{d}]$ 和 $[k_l + \tilde{d} + q, k_{l+1} + \tilde{d} + q + 1]$, $q \in \mathbb{Z}_+$, 可知存在一个标量 $p > 0$ 使得 $k_l + \tilde{d} + p < k_{l+1} + d_{k_{l+1}} \leq k_l + \tilde{d} + p + 1$, 同时满足:

$$[y(k_l + q) - y(k_l)]^T \Omega_i [y(k_l + q) - y(k_l)] \leq \delta_i y^T(k_l + q) \Omega_i y(k_l + q) \quad (5.4)$$

其中 $q = 1, 2, \dots, p$ 。

然后, 我们可以将区间 $[k_l + d_{k_l}, k_{l+1} + d_{k_{l+1}} - 1]$ 划分成如下几个子区间:

$$[k_l + d_{k_l}, k_{l+1} + d_{k_{l+1}} - 1] = \Xi_0 \cup \left\{ \bigcup_{q=1}^{p-1} \Xi_q \right\} \cup \Xi_p \quad (5.5)$$

其中 $\Xi_0 = [k_l + d_{k_l}, k_l + \tilde{d} + 1)$, $\Xi_q = [k_l + \tilde{d} + q, k_l + \tilde{d} + q + 1)$, $\Xi_p = [k_l + \tilde{d} + p, k_{l+1} + d_{k_{l+1}} - 1)$ 。

根据上述划分的区间, 我们可以将 $d(k)$ 定义为:

$$d(k) = \begin{cases} k - k_l, & k \in \Xi_0, \\ k - k_l - q, & k \in \Xi_q, \\ k - k_l - p, & k \in \Xi_p \end{cases} \quad (5.6)$$

同时, 可以将 $e(k)$ 定义为:

$$e(k) = \begin{cases} 0, & k \in \Xi_0, \\ y(k_l) - y(k_l + q), & k \in \Xi_q, \\ y(k_l) - y(k_l + p), & k \in \Xi_p \end{cases} \quad (5.7)$$

根据上述分析, 对于任意的 $k \in [k_l + d_{k_l}, k_{l+1} + d_{k_{l+1}} - 1]$, 可以得到 $d_1 \leq d(k) \leq d_2$ 。其中 $d_1 = \min\{d_{k_l}\}$, $d_2 = \tilde{d} + 1$, $\tilde{d} = \max\{d_{k_l}\}$ 。

结合事件触发方案 (5.3), 对于任意的 $k \in [k_l + d_{k_l}, k_{l+1} + d_{k_{l+1}} - 1]$, 可以得到:

$$e^T(k)\Omega_i e(k) \leq \delta_i y^T(k - d(k))\Omega_i y(k - d(k)) \quad (5.8)$$

在此基础上, 设计静态输出反馈控制律为:

$$u(k) = K_i y(k_l) = K_i C_i (x(k - d(k)) + e(k)) \quad (5.9)$$

注释 5.1 在采用事件触发方案时, 需要考虑是否会出现事件在有限的时间区间内被触发无数次的情况, 本章节采用离散型事件触发机制, 有 $k_{l+1} = \inf_{k \in \mathbb{N}_+} \{k > k_l | \Phi(k) > 0\}$, 即 $\bar{\tau} = k_{l+1} - k_l, k \in \mathbb{N}_+$, 则一定存在正的采样间隔, 避免了 Zeno 现象。

结合式 (5.1), (5.3), (5.7) 和 (5.8), 则系统 (5.1) 可以被重新描述为:

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= A_i x(k) + A_{di} x(k - d(k)) + A_{yi} e(k) + D_i \omega(k), \\ z(k) &= F_i x(k) + G_i \omega(k), \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), \theta \in [-d_2, 0] \end{aligned} \quad (5.10)$$

其中 $A_{di} = B_i K_i C_i$, $A_{yi} = B_i K_i$, 时延 $d(k)$ 满足 $d_1 \leq d(k) \leq d_2$, 记 $d_{12} = d_2 - d_1$ 。 $\varphi(\theta)$ 是在区间 $[-d_2, 0]$ 上状态向量 $x(k)$ 初始向量值的离散序列。定义 $\bar{y}(\theta) = x(\theta + 1) - x(\theta)$, 且满足 $\bar{y}^T(\theta)\bar{y}(\theta) \leq \sigma$, $\sigma > 0$ 。

关于系统的扰动输入, 假设对于任意的 $i \in \mathcal{I}$ 或 $i \in [-d_2, 0]$, 都存在标量 $\rho > 0$ 使得扰动输入 $\omega(i)$ 满足下列幅值有界条件:

$$\omega^T(i)\omega(i) \leq \rho \quad (5.11)$$

本章的目的是研究事件触发机制下离散 SMJSs 的静态输出反馈有限时间控制问题, 考虑事件触发方案和网络传输延时, 使得闭环系统是正则、无脉冲和有限时间有界的且满足 H_∞ 性能指标, 利用矩阵分解算法, 给出静态输出反馈控制器的设计方法。

为了方便下面的讨论, 这里给出相关的定义。

定义 5.1 ^[60] 对于系统 (5.10), 以下成立:

1. 矩阵对 (E, A_i) 是正则的, 如果对于任意 $i \in \mathcal{I}$, $\det(zE - A_i) \neq 0$ 。

2. 矩阵对 (E, A_i) 是因果的, 如果对于任意 $i \in \mathcal{I}$, $\deg(\det(zE - A_i)) = \text{rank}(E)$ 。
3. 当 $\omega(i) = 0$ 时, 系统是正则和因果的, 如果对于任意 $i \in \mathcal{I}$, 矩阵对 (E, A_i) 是正则和因果的。

定义 5.2 ^[64] 对于给定的标量 $0 < c_1 < c_2$, $N > 0$, $\rho > 0$, 对称正定矩阵 R , 如果系统是正则、因果的, 同时满足

$$\mathcal{E}\{x^T(k_1)E^T R E x(k_1), \|E\|^2 x^T(k_1)R x(k_1)\} \leq c_1^2 \Rightarrow \mathcal{E}\{x^T(k_2)E^T R E x(k_2)\} \leq c_2^2 \quad (5.12)$$

其中 $k_1 \in \{-d_2, -d_2 + 1, \dots, 0\}$, $k_2 \in \{1, 2, \dots, N\}$, 那么该系统关于 (c_1, c_2, N, R, ρ) 是有限时间有界的。

定义 5.3 ^[64] 对于给定的标量 $0 < c_1 < c_2$, $N > 0$, $\rho > 0$, $\gamma > 0$, 对称正定矩阵 R , 如果系统关于 (c_1, c_2, N, R, ρ) 是有限时间有界的, 并且在零初始条件下满足

$$\mathcal{E}\left\{\sum_{k=0}^N z^T(k)z(k)\right\} < \gamma^2 \mathcal{E}\left\{\sum_{k=0}^N \omega^T(k)\omega(k)\right\} \quad (5.13)$$

那么该系统关于 $(c_1, c_2, N, R, \rho, \gamma)$ 是有限时间 H_∞ 有界的。

5.3 主要结论

5.3.1 有限时间有界分析

定理 5.1 对于给定的标量 $c_2 > c_1 > 0$, $N > 0$, $\sigma > 0$, $\delta_i \in [0, 1)$, 对称正定矩阵 R , 如果存在标量 $\tau_{ki}(k = 1, 2)$, $\mu > 1$, $\varepsilon_j > 0$, ($j = 1, 2$), 对称正定矩阵 P_i , Q_1 , Q_2 , Q_3 , M_1 , M_2 , Ω_i , W_i 以及适当维数的矩阵 H_i , V_i , K_i , 使得下列不等式成立

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ * & \Phi_4 & \Phi_5 \\ * & * & \Phi_6 \end{bmatrix} < 0, \quad (5.14a)$$

$$\varepsilon_1 R < P_i < \varepsilon_2 R, \quad (5.14b)$$

$$0 < Q_j < \theta_j R (j = 1, 2, 3), \quad (5.14c)$$

$$0 < M_1 < \theta_4 R, 0 < M_2 < \theta_5 R, \quad (5.14d)$$

$$\mu^N((\alpha_1 + \varepsilon_2)c_1^2 + \alpha_2\sigma) + \lambda_{\max}(W_i)\bar{\rho} < \varepsilon_1 c_2^2 \quad (5.14e)$$

那么系统 (5.10) 关于 (c_1, c_2, N, R, ρ) 是有限时间有界的, 其中, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足 $E^T S = 0$, $\text{rank}(S) = n - r$,

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & 0 & \tau_{1i}H_i B_i K_i C_i \\ * & \Phi_{12} & \mu^{d_1+1}E^T M_2 E \\ * & * & \Phi_{13} \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{11} = E^T(\bar{P}_i - \mu P_i - \mu M_1)E + Q_1 + Q_2 + (d_{12} + 1)Q_3 + \text{He}\{\tau_{1i}H_i(A_i - E)\},$$

$$\Phi_{12} = -\mu^{d_1}Q_1 - \mu^{d_1+1}E^T M_2 E,$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{13} &= -\mu^{d_2} Q_3 - 2\mu^{d_1+1} E^T M_2 E + \delta_i C_i^T \Omega_i C, \\
\Phi_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \tau_{1i} H_i B_i K_i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Phi_3 = \begin{bmatrix} \tau_{1i} H_i D_i & \Phi_{32} \\ 0 & 0 \\ 0 & \tau_{2i} C_i^T K_i^T B_i^T H_i^T \end{bmatrix}, \\
\Phi_{32} &= -\tau_{1i} Z_i + \tau_{2i} (A_i - E)^T H_i^T + E^T \bar{P}_i + V_i^T S^T, \\
\Phi_4 &= \begin{bmatrix} -\mu^{d_2} Q_2 - \mu E^T M_1 E - \mu^{d_1+1} E^T M_2 E & 0 \\ 0 & -\Omega_i \end{bmatrix}, \\
\Phi_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_{2i} K_i^T B_i^T H_i^T \end{bmatrix}, \Phi_6 = \begin{bmatrix} -W_i & \tau_{2i} D_i^T H_i^T \\ 0 & \bar{P}_i + d_2^2 M_1 + d_{12}^2 M_2 - \text{He}\{\tau_{2i} H_i\} \end{bmatrix}, \\
\mathcal{T}_1 &= \begin{bmatrix} \tau_{1i} I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{2i} I_n \end{bmatrix}, \\
\mathcal{T}_2 &= \begin{bmatrix} A_i - E & 0 & B_i K_i C_i & 0 & B_i K_i & D_i & -I_n \end{bmatrix}, \\
\bar{P}_i &= \sum_{j=1}^M \pi_{ij} P_j, \bar{\rho} = \frac{\mu^N - 1}{\mu - 1} \rho, \alpha_1 = \frac{\theta_1 \eta_1 + \theta_2 \eta_2 + \theta_3 \eta_2 + \theta_3 \eta_3}{\|E\|^2}, \alpha_2 = \theta_4 \eta_4 + \theta_5 \eta_5, \\
\tilde{P}_i &= R^{-\frac{1}{2}} P_i R^{-\frac{1}{2}}, \theta_j = \lambda_{\max}\{R^{-\frac{1}{2}} Q_j R^{-\frac{1}{2}}\}, j = 1, 2, 3, 4, 5, \\
\eta_1 &= \frac{\mu^{d_1} - 1}{\mu - 1}, \eta_2 = \frac{\mu^{d_2} - 1}{\mu - 1}, \eta_3 = \frac{\mu^{d_2} - \mu^{d_1} - d_{12}\mu + d_{12}}{(\mu - 1)^2}, \\
\eta_4 &= \frac{\mu^{d_2+1} - (d_2 + 1)\mu + d_2}{(\mu - 1)^2}, \eta_5 = \frac{\mu^{d_2+1} - \mu^{d_1+1} - d_{12}\mu + d_{12}}{(\mu - 1)^2}
\end{aligned}$$

证明: 首先证明该系统的正则性和因果性。由式 (5.14), 同时借助 Schur 补引理, 可以得到

$$\Pi_i = \begin{bmatrix} \Pi_{i11} & \Pi_{i12} \\ * & \Pi_{i22} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.15)$$

其中,

$$\Pi_{i11} = E^T (\bar{P}_i - \mu P_i - \mu M_1) E + Q_1 + Q_2 + (d_{12} + 1) Q_3 + \text{He}\{\tau_{1i} H_i (A_i - E)\},$$

$$\Pi_{i12} = E^T \bar{P}_i^T + V_i S^T + \tau_{2i} (A_i - E)^T H_i - \tau_{1i} H_i,$$

$$\Pi_{i22} = \bar{P}_i - \text{He}\{\tau_{2i} H_i\} + d_2^2 M_1 + d_{12}^2 M_2. \text{ 注意到 } Q_j > 0, (j = 1, 2, 3), M_1 > 0, M_2 > 0,$$

从而可以得到

$$\bar{\Pi}_i = \begin{bmatrix} \bar{\Pi}_{i11} & \bar{\Pi}_{i12} \\ * & \bar{\Pi}_{i22} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.16)$$

其中,

$$\bar{\Pi}_{i11} = E^T (\bar{P}_i - \mu P_i - \mu M_1) E + \text{He}\{\tau_{1i} H_i (A_i - E)\},$$

$$\bar{\Pi}_{i12} = E^T \bar{P}_i^T + V_i S^T + \tau_{2i} (A_i - E)^T H_i - \tau_{1i} H_i,$$

$$\bar{\Pi}_{i22} = \bar{P}_i - \text{He}\{\tau_{2i} H_i\}$$

令

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} E & I_n \\ A_i - E & I_n \end{bmatrix}, \tilde{V}_i = \begin{bmatrix} V_i & \tau_{1i} H_i \\ 0_{n \times n} & \tau_{2i} H_i \end{bmatrix},$$

$$\tilde{E} = \text{diag}\{E, 0_{n \times n}\}, \tilde{S} = \text{diag}\{S, I_n\},$$

$$\tilde{P}_0 = \text{diag}\{\bar{P}_i, 0_{n \times n}\}, \tilde{P}_i = \text{diag}\{P_i + \mu M_1, 0_{n \times n}\}$$

可以将式 (5.16) 分解为

$$\text{He}\{\tilde{A}_i^T \tilde{S} \tilde{V}_i^T\} - \tilde{E}^T \tilde{P}_i \tilde{E} + \tilde{A}_i^T \tilde{P}_0 \tilde{A}_i < 0 \quad (5.17)$$

根据 $P_i \geq 0$, 有 $\tilde{A}_i^T \tilde{P}_0 \tilde{A}_i \geq 0$, 可得

$$\text{He}\{\tilde{A}_i^T \tilde{S} \tilde{V}_i^T\} - \tilde{E}^T \tilde{P}_i \tilde{E} < 0 \quad (5.18)$$

由于 $\text{rank}(E) = r \leq n$, 所以一定存在两个非奇异矩阵 \bar{M} , \bar{N} 使得

$$\bar{M} \tilde{E} \bar{N} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{M} \tilde{A}_i \bar{N} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{i11} & \bar{A}_{i12} \\ \bar{A}_{i21} & \bar{A}_{i22} \end{bmatrix}$$

相应地, 可以将上述的矩阵分解为

$$\bar{M}^{-T} \tilde{P}_i \bar{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{i11} & \bar{P}_{i12} \\ \bar{P}_{i21} & \bar{P}_{i22} \end{bmatrix}, \bar{N}^T \tilde{V}_i = \begin{bmatrix} \bar{V}_{i1} \\ \bar{V}_{i2} \end{bmatrix}, \bar{M}^{-T} \tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{S}_{21} \end{bmatrix}$$

在式 (5.18) 左边和右边分别乘 \bar{N}^T 和 \bar{N} , 可得

$$\begin{bmatrix} \diamond & \diamond \\ \diamond & \bar{A}_{i22}^T \bar{S}_{21} \bar{V}_{i2}^T + \bar{V}_{i2} \bar{S}_{21}^T \bar{A}_{i22} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.19)$$

其中 \diamond 表示与后续讨论无关的矩阵块元素, 其表达式从略。从式 (5.19) 可知, \bar{A}_{i22} 一定非奇异的, 进一步可得

$$\det(zE - A) = \det(z\tilde{E} - \tilde{A}_i) = \det(\bar{M}^{-1}(z\bar{E} - \bar{A}_i)\bar{N}^{-1}), \quad (5.20)$$

因此, 闭环系统 (5.10) 是正则且因果的。

然后证明闭环系统的有限时间有界性。构造如下的 Lyapunov-Krasovskii 泛函:

$$V(k, x(k), r_k) = \sum_{i=1}^4 V_i(k, x(k), r_k) \quad (5.21)$$

其中,

$$\begin{aligned} V_1(k, x(k), r_k) &= x^T(k) E^T P_i E x(k), \\ V_2(k, x(k), r_k) &= \sum_{i=k-d_1}^{k-1} \mu^{k-i-1} x^T(i) Q_1 x(i) + \sum_{i=k-d_2}^{k-1} \mu^{k-i-1} x^T(i) Q_2 x(i), \\ V_3(k, x(k), r_k) &= \sum_{m=-d_2+2}^{-d_1+1} \sum_{i=k+m-1}^{k-1} \mu^{k-i-1} x^T(i) Q_3 x(i) + \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} \mu^{k-i-1} x^T(i) Q_3 x(i), \\ V_4(k, x(k), r_k) &= d_2 \sum_{m=-d_2+1}^0 \sum_{i=k+m-1}^{k-1} \mu^{k-i-1} \bar{y}^T(i) E^T M_1 E \bar{y}(i) \end{aligned}$$

$$+ d_{12} \sum_{m=-d_2+1}^{-d_1} \sum_{i=k+m-1}^{k-1} \mu^{k-i-1} \bar{y}^T(i) E^T M_2 E \bar{y}(i)$$

令

$$\mathcal{E}\{\Delta V(k)\} = \mathcal{E}\{V(x(k+1), r_{k+1}=j, |r_k=i)\} - V\{x(k), r_k=i\} \quad (5.22)$$

可得,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{\Delta V_1(k)\} - (\mu-1)V_1(k) &= x^T(k+1)E^T \tilde{P}_i E x(k+1) - \mu x^T(k)E^T P_i E x(k) \\ &= (E\bar{y}(k) + Ex(k))^T \tilde{P}_i (E\bar{y}(k) + Ex(k)) - \mu x^T(k)E^T P_i E x(k) \\ &= x^T(k)(E^T \tilde{P}_i E - \mu E^T P_i E)x(k) + 2\bar{y}^T(k)E^T \tilde{P}_i E^T x(k) \\ &\quad - \mu x^T(k)E^T P_i E x(k) \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{\Delta V_2(k)\} - (\mu-1)V_2(k) &\leq x^T(k)(Q_1 + Q_2)x(k) \\ &\quad - \mu^{d_1} x^T(k-d_1)Q_1 x(k-d_1) \\ &\quad - \mu^{d_2} x^T(k-d_2)Q_2 x(k-d_2) \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{\Delta V_3(k)\} - (\mu-1)V_3(k) &\leq (d_{12}+1)x^T(k)Q_3 x(k) \\ &\quad - \mu^{d_1} x^T(k-d(k))Q_3 x(k-d(k)) \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{\Delta V_4(k)\} - (\mu-1)V_4(k) &= \bar{y}^T(k)E^T(d_2^2 M_1 + d_{12}^2 M_2)E\bar{y}(k) \\ &\quad - d_2 \sum_{i=k-d_2}^{k-1} \mu^{k-i} \bar{y}^T(k)E^T M_1 E \bar{y}(k) \\ &\quad - d_{12} \sum_{i=k-d_2}^{k-d_1-1} \mu^{k-i} \bar{y}^T(k)E^T M_2 E \bar{y}(k) \end{aligned} \quad (5.26)$$

同时,

$$-d_2 \sum_{i=k-d_2}^{k-1} \mu^{k-i} \bar{y}^T(k)E^T M_1 E \bar{y}(k) \leq -\mu d_2 \sum_{i=k-d_2}^{k-1} \bar{y}^T(k)E^T M_1 E \bar{y}(k) \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} -d_{12} \sum_{i=k-d_2}^{k-d_1-1} \mu^{k-i} \bar{y}^T(k)E^T M_2 E \bar{y}(k) &\leq -\mu^{d_1+1} d_{12} \sum_{i=k-d_2}^{k-d_1-1} \bar{y}^T(k)E^T M_2 E \bar{y}(k) \\ &= -\mu^{d_1+1} d_{12} \sum_{i=k-d(k)}^{k-d_1-1} \bar{y}^T(k)E^T M_2 E \bar{y}(k) \\ &\quad - \mu^{d_1+1} d_{12} \sum_{i=k-d_2}^{k-d(k)-1} \bar{y}^T(k)E^T M_2 E \bar{y}(k) \end{aligned} \quad (5.28)$$

根据引理 2.4 可得,

$$-d_{12} \sum_{i=k-d_2}^{k-d_1-1} \bar{y}^T(k)E^T M_1 \bar{y}(k) \leq -\left(\sum_{i=k-d_2}^{k-1} E\bar{y}(k)\right)^T M_1 \left(\sum_{i=k-d_2}^{k-1} E\bar{y}(k)\right)$$

$$= \zeta_1^T(k) \begin{bmatrix} -E^T M_1 E & E^T M_1 E \\ E^T M_1 E & -E^T M_1 E \end{bmatrix} \zeta_1(k) \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} -d_{12} \sum_{i=k-d(k)}^{k-d_1-1} \bar{y}^T(k) E^T M_2 E \bar{y}(k) &\leq -\frac{d_{12}}{d(k)-d_1} \left(\sum_{i=k-d(k)}^{k-d_1-1} E \bar{y}(k) \right)^T M_2 \left(\sum_{i=k-d(k)}^{k-d_1-1} E \bar{y}(k) \right) \\ &\leq \zeta_2^T(k) \begin{bmatrix} -E^T M_2 E & E^T M_2 E \\ E^T M_2 E & -E^T M_2 E \end{bmatrix} \zeta_2(k) \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} -d_{12} \sum_{i=k-d_2}^{k-d(k)-1} \bar{y}^T(k) E^T M_2 E \bar{y}(k) &\leq -\frac{d_{12}}{d_2-d(k)} \left(\sum_{i=k-d_2}^{k-d(k)-1} E \bar{y}(k) \right)^T M_2 \left(\sum_{i=k-d_2}^{k-d(k)-1} E \bar{y}(k) \right) \\ &\leq -\zeta_3^T(k) \begin{bmatrix} -E^T M_2 E & E^T M_2 E \\ E^T M_2 E & -E^T M_2 E \end{bmatrix} \zeta_3(k) \end{aligned} \quad (5.31)$$

其中,

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= [x^T(k) \quad x^T(k-d_2)]^T, \\ \zeta_2 &= [x^T(k-d_1) \quad x^T(k-d(k))]^T, \\ \zeta_3 &= [x^T(k-d(k)) \quad x^T(k-d_2)]^T \end{aligned}$$

根据 $E^T S = 0$ 和 $\bar{y}(k) = x(k+1) - x(k)$, 可得

$$\begin{aligned} 2x^T(k+1)E^T S V_i x(k) &\equiv 0, \\ 2\zeta^T(k) \mathcal{T}_1^T H_i \mathcal{T}_2 \zeta(k) &\equiv 0 \end{aligned} \quad (5.32)$$

其中, $\zeta = [x^T(k) \quad x^T(k-d_1) \quad x^T(k-d(k)) \quad x^T(k-d_2) \quad e^T(k) \quad \omega^T(k) \quad \bar{y}^T(k) E^T]^T$
根据上述的分析, 结合事件触发方案 (5.3), 可得,

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}\{\Delta V(k) - (\mu-1)V(k) - \omega^T(k)W_i\omega(k)\} \\ &\leq \mathcal{E}\{\Delta V(k) - (\mu-1)V(k) - \omega^T(k)W_i\omega(k) - e^T(k)\Omega_i e(k) \\ &\quad + \delta_i y^T(k-d(k))\Omega_i y(k-d(k)) + 2x^T(k+1)E^T S V_i x(k) + 2\zeta^T(k)\mathcal{T}_1^T H_i \mathcal{T}_2 \zeta(k)\} \\ &\leq \zeta^T(k)\Phi\zeta(k) \end{aligned} \quad (5.33)$$

然后可得

$$\mathcal{E}\{\Delta V(k) - (\mu-1)V(k) - \omega^T(k)W_i\omega(k)\} < 0 \quad (5.34)$$

根据式 (5.34), 进一步可得

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}\{V(k)\} \\ &< \mu \mathcal{E}\{V(k-1)\} + \lambda_{\max}(W_i) \mathcal{E}\{\omega^T(k-1)\omega(k-1)\} \\ &< \mu^2 \mathcal{E}\{V(k-2)\} + \mu \lambda_{\max}(W_i) \mathcal{E}\{\omega^T(k-2)\omega(k-2)\} \\ &\quad + \lambda_{\max}(W_i) \mathcal{E}\{\omega^T(k-1)\omega(k-1)\} \\ &< \dots \end{aligned}$$

$$\leq \mu^k \mathcal{E}\{V(0)\} + \lambda_{\max}(W_i) \sum_{j=0}^{k-1} \mu^{k-j-1} \omega^T(j) \omega(j) \quad (5.35)$$

因此, 可以得到 $\mathcal{E}\{V(k)\} < \mu^k \mathcal{E}\{V(0)\} + \lambda_{\max}(W_i) \bar{\rho}$ 。

对于系统的初始状态, 有

$$\mathcal{E}\{V_1(0)\} = \mathcal{E}\{x^T(0) E^T P_i E x(0)\} \leq \lambda_{\max}(\tilde{P}_i) c_1 \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{V_2(0)\} &= \sum_{i=-d_1}^{-1} \mu^{-i-1} x^T(i) Q_1 x(i) + \sum_{i=-d_2}^{-1} \mu^{-i-1} x^T(i) Q_2 x(i) \\ &\leq (\theta_1 \eta_1 + \theta_2 \eta_2) c_1 \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\mathcal{E}\{V_3(0)\} = \sum_{m=-d_2+2}^{-d_1+1} \sum_{i=m-1}^{-1} \mu^{-i-1} x^T(i) Q_3 x(i) + \sum_{i=-d(0)}^{-1} \mu^{-i-1} x^T(i) Q_3 x(i) \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{V_4(0)\} &= d_2 \sum_{m=-d_2+1}^0 \sum_{i=m-1}^{-1} \mu^{-i-1} \bar{y}^T(i) E^T M_1 E \bar{y}(i) \\ &\quad + d_{12} \sum_{m=-d_2+1}^{-d_1} \sum_{i=m-1}^{-1} \mu^{-i-1} \bar{y}^T(i) E^T M_2 E \bar{y}(i) \\ &\leq (\theta_3 \eta_2 + \theta_3 \eta_3) c_1 \\ &\leq (\theta_4 \eta_4 + \theta_5 \eta_5) \sigma \end{aligned} \quad (5.39)$$

由式 (5.36) 至 (5.39), 可以得到

$$\mathcal{E}\{V(0)\} \leq \alpha_1 + \lambda_{\max}(\tilde{P}_i) c_1^2 + \alpha_2 \sigma \quad (5.40)$$

进一步可得,

$$\mathcal{E}\{V(k)\} \leq \mu^N ((\alpha_1 + \lambda_{\max}(\tilde{P}_i)) c_1^2 + \alpha_2 \sigma) + \lambda_{\max}(W_i) \bar{\rho} \quad (5.41)$$

然后, 容易得到

$$\mathcal{E}\{V(k)\} \geq \mathcal{E}\{x^T(k) E^T P_i E x(k)\} \geq \lambda_{\min}(\tilde{P}_i) \mathcal{E}\{x^T(k) E^T R E x(k)\} \quad (5.42)$$

由式 (5.14e), 如果 $\mathcal{E}\{x^T(0) E^T R E x(0)\} \leq c_1^2$, 可以推导得到 $\mathcal{E}\{x^T(k) E^T R E x(k)\} \leq c_2^2$ 。因此, 闭环系统 (5.10) 是正则且因果的, 并且关于 (c_1, c_2, N, R, ρ) 是有限时间有界的。□

注释 5.2 在定理 5.1 中, 结合事件触发方案, 将系统变换为一个时滞系统, 研究了离散 SMJSs 静态输出反馈的有限时间控制问题, 通过利用式 (5.32) 两个零和等式, 同时借助矩阵分解和变量分离的方法, 证明了闭环系统的正则性和因果性, 然后在其基础上证明了闭环系统的有限时间有界性。

5.3.2 有限时间 H_∞ 有界分析

定理 5.2 对于给定的标量 $c_2 > c_1 > 0$, $N > 0$, $\sigma > 0$, $\delta_i \in [0, 1)$, 对称正定矩阵 R , 如果存在标量 τ_{ki} , ($k = 1, 2$), $\mu > 1$, $\varepsilon_j > 0$, ($j = 1, 2$), 对称正定矩阵 P_i , Q_1 , Q_2 , Q_3 ,

M_1, M_2, Ω_i 以及适当维数的矩阵 H_i, V_i, K_i , 且满足式 (5.14b) 至 (5.14d), 使得下列不等式成立

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_1 & \Phi_2 & \bar{\Phi}_3 \\ * & \Phi_4 & \Phi_5 \\ * & * & \bar{\Phi}_6 \end{bmatrix} < 0, \quad (5.43a)$$

$$\mu^N((\alpha_1 + \varepsilon_2)c_1^2 + \alpha_2\sigma) + \gamma^2\rho < \varepsilon_1 c_2^2 \quad (5.43b)$$

其中, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足 $E^T S = 0$, $\text{rank}(S) = n - r$,

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{11} &= E^T(\bar{P}_i - \mu P_i - \mu M_1)E + Q_1 + Q_2 + (d_{12} + 1)Q_3 + \text{He}\{\tau_{1i}H_i(A_i - E)\} + F_i^T F_i, \\ \bar{\Phi}_3 &= \begin{bmatrix} \tau_{1i}H_i D_i + F_i^T G_i & \Phi_{32} \\ 0 & 0 \\ 0 & \tau_{2i}C_i^T K_i^T B_i^T H_i^T \end{bmatrix}, \\ \Phi_{32} &= -\tau_{1i}Z_i + \tau_{2i}(A_i - E)^T H_i^T + E^T \bar{P}_i + V_i^T S^T, \\ \bar{\Phi}_6 &= \begin{bmatrix} -\bar{\gamma}^2 I + G_i^T G_i & \tau_{2i}D_i^T H_i^T \\ 0 & \bar{P}_i + d_2^2 M_1 + d_{12}^2 M_2 - \text{He}\{\tau_{2i}H_i\} \end{bmatrix}, \\ W_i &= \bar{\gamma}^2 I, \gamma = \sqrt{\frac{\mu^N - 1}{\mu - 1}} \bar{\gamma}^2 \end{aligned}$$

同时, 其他相同的量在定理 5.1 中定义, 那么闭环系统 (5.10) 关于 $(c_1, c_2, N, R, \rho, \gamma)$ 是有限时间 H_∞ 有界的。

证明: 由式 (5.43), 有

$$\mathcal{E}\{\Delta V(k) - (\mu - 1)V(k) + z^T(k)z(k) - \bar{\gamma}^2 \omega^T(k)\omega(k)\} < 0 \quad (5.44)$$

进一步可知

$$\mathcal{E}\{V(k)\} < \mu^N \mathcal{E}\{V(k)\} - \mathcal{E}\left\{\sum_{j=0}^{k-1} \mu^{k-j-1} z^T(j)z(j)\right\} + \bar{\gamma}^2 \mathcal{E}\left\{\sum_{j=0}^{k-1} \mu^{k-j-1} \omega^T(j)\omega(j)\right\} \quad (5.45)$$

由于系统在零初始条件下 $V(0) > 0$, 从式 (5.45) 可得

$$\mathcal{E}\left\{\sum_{j=0}^{k-1} \mu^{k-j-1} z^T(j)z(j)\right\} < \bar{\gamma}^2 \mathcal{E}\left\{\sum_{j=0}^{k-1} \mu^{k-j-1} \omega^T(j)\omega(j)\right\}$$

同时, 因为 $\mu > 1$, 所以下列不等式成立,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\left\{\sum_{k=0}^N z^T(k)z(k)\right\} &< \mathcal{E}\left\{\sum_{j=0}^{k-1} \mu^{k-j-1} z^T(j)z(j)\right\}, \\ \bar{\gamma}^2 \mathcal{E}\left\{\sum_{j=0}^{k-1} \mu^{k-j-1} \omega^T(j)\omega(j)\right\} &< \gamma^2 \mathcal{E}\left\{\sum_{k=0}^N \omega^T(k)\omega(k)\right\} \end{aligned}$$

然后可以得到

$$\mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^N z^T(k) z(k) \right\} < \gamma^2 \mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^N \omega^T(k) \omega(k) \right\} \quad (5.46)$$

因此, 系统关于 $(c_1, c_2, N, R, \rho, \gamma)$ 是有限时间 H_∞ 有界的。即证毕。 \square

注释 5.3 本小节在上一小节的基础上考虑了系统输出的零初始条件, 并将矩阵 W_i 替换为 $\gamma^2 I$, 从而确保闭环系统是有限时间有界的且满足 H_∞ 性能指标。

5.3.3 控制器设计

定理 5.3 对于给定的标量 $c_2 > c_1 > 0$, $N > 0$, $\sigma > 0$, $\delta_i \in [0, 1)$, 对称正定矩阵 R , 如果存在标量 τ_{ki} , $(k = 1, 2)$, $\mu > 1$, $\varepsilon_j > 0$, $(j = 1, 2)$, 对称正定矩阵 P_i , Q_1 , Q_2 , Q_3 , M_1 , M_2 , Ω_i 以及适当维数的矩阵 $H_i = \mathcal{M}_i \begin{bmatrix} H_{i11} & H_{i12} \\ 0 & H_{i22} \end{bmatrix} \mathcal{M}_i^T$, V_i , K_i , 且满足式 (5.14b) 至 (5.14d), 使得下列不等式成立

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_1 & \tilde{\Phi}_2 & \tilde{\Phi}_3 \\ * & \tilde{\Phi}_4 & \tilde{\Phi}_5 \\ * & * & \tilde{\Phi}_6 \end{bmatrix} < 0, \quad (5.47a)$$

$$\mu^N((\alpha_1 + \varepsilon_2)c_1^2 + \alpha_2\sigma) + \gamma^2\rho < \varepsilon_1 c_2^2 \quad (5.47b)$$

其中, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足 $E^T S = 0$, $\text{rank}(S) = n - r$,

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1 &= \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{11} & 0 & \tau_{1i} B_i Y_i C_i \\ * & \tilde{\Phi}_{12} & \mu^{d_1+1} E^T M_2 E \\ * & * & \tilde{\Phi}_{13} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\Phi}_{12} &= -\mu^{d_1} Q_1 - \mu^{d_1+1} E^T M_2 E, \\ \tilde{\Phi}_{13} &= -\mu^{d_2} Q_3 - 2\mu^{d_1+1} E^T M_2 E + \delta C_i^T \Omega_i C_i, \\ \tilde{\Phi}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \tau_{1i} B_i Y_i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{\Phi}_3 = \begin{bmatrix} \tau_{1i} H_i D_i & \tilde{\Phi}_{31} \\ 0 & 0 \\ 0 & \tau_{2i} C_i^T Y_i^T B_i^T \end{bmatrix}, \\ \tilde{\Phi}_{31} &= -\tau_{1i} H_i + \tau_{2i} (A_i - E)^T H_i^T + E^T \bar{P}_i + V_i^T S^T, \\ \tilde{\Phi}_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_{2i} Y_i^T B_i^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

同时, 其他相同的量在定理 5.1 中定义, 那么闭环系统 (5.10) 关于 $(c_1, c_2, N, R, \rho, \gamma)$ 是有限时间 H_∞ 有界的。而输出反馈控制器增益给定为

$$K_i = (B_i^T H_i B_i)^{-1} B_i^T B_i Y_i \quad (5.48)$$

证明: 由于 B_i 为列满秩矩阵, 根据引理 2.6, 对其进行奇异值分解, 一定存在两个正交矩阵 \mathcal{M}_i 和 \mathcal{N}_i 使得

$$B_i = \mathcal{M}_i \begin{bmatrix} B_{i1} \\ 0 \end{bmatrix} \mathcal{N}_i^T, H_i B_i = B_i L_i$$

然后可得,

$$B_i^T B_i = \mathcal{N}_i B_{i1}^2 \mathcal{N}_i^T, \quad (5.49)$$

$$B_i^T H_i B_i = \mathcal{N}_i B_{i1} H_{i11} B_{i1} \mathcal{N}_i^T, \quad (5.50)$$

$$(B_i^T B_i)^{-1} B_i^T H_i B_i = \mathcal{N}_i B_{i1}^{-1} H_{i11} B_{i1} \mathcal{N}_i^T \quad (5.51)$$

由式 (5.48), 有

$$Y_i = (B_i^T B_i)^{-1} B_i^T H_i B_i K_i \quad (5.52)$$

因此,

$$\begin{aligned} B_i L_i K_i &= B_i Y_i \\ &= B_i (B_i^T B_i)^{-1} B_i^T H_i B_i K_i \\ &= \mathcal{M}_i \begin{bmatrix} H_{i11} B_{i1} \\ 0 \end{bmatrix} \mathcal{N}_i^T K_i \\ &= H_i B_i K_i \end{aligned} \quad (5.53)$$

这意味着控制器增益 (5.48) 可以确保 (5.47a) 成立。则证毕。 \square

注释 5.4 在本章节中, 利用奇异值分解的方法, 设计出矩阵 H_i , 使得 $B_i L_i K_i = H_i B_i K_i$ 成立, 解决了不等式条件中的耦合问题, 给出了静态输出反馈控制增益的设计方法。

注释 5.5 在本章节中, 可以看出定理 5.3 中的式 (5.47), 式 (5.14b) 至式 (5.14d) 并非严格的线性矩阵不等式, 但是通过给定标量 τ_{1i} 和 τ_{2i} , 可将其转换成线性矩阵不等式得以求解。因此, 离散时间奇异马尔可夫系统的有限时间事件触发输出反馈增益设计算法可以转化为以下基于线性矩阵不等式的优化问题。

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma^2 \\ & P_i, H_i, K_i, V_i, \delta_i, \varepsilon_j, i \in \mathcal{I} \\ \text{s.t.} \quad & (5.47), (5.14b) - (5.14d) \end{aligned}$$

5.4 数值仿真

本章节考虑 Boukas 等^[94] 使用的直流电机模型来进行仿真实例, R 代表电枢的电阻, K_w 代表电动势常数, K_t 代表扭矩常数, J_i 代表惯性矩, b 代表阻尼比。其模型可以表示为如下带有两个子系统的 SMJSs:

$$\begin{aligned} Ex(k) &= A_i x(k) + B_i u(k) + D_i \omega(k), \\ y(k) &= C_i x(k), \\ z(k) &= F_i x(k) + G_i \omega(k) \end{aligned} \quad (5.54)$$

其中, $x_1(k)$ 代表电枢的电流, $x_2(k)$ 代表轴的速度, $u(k)$ 代表电枢的电压。

$$A_i = \begin{bmatrix} R_s & K_l \\ \frac{K_s T^*}{J_i} & 1 - \frac{b}{J_i} \end{bmatrix}, B_i = D_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T^*}{J_i} \end{bmatrix}$$

同时, 系统的参数可以给定为

$$E = \text{diag}\{0, 1\}, C_i = [0.5 \quad 1], F_i = [1 \quad 1], G_i = 0.2,$$

$$J_1 = 6.1, J_2 = 6.2, K_l = 2.4, K_s = 1, b = 1, T^* = 0.1, R_s = 3$$

根据矩阵 E , 可以选择参数矩阵 $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 取转移概率矩阵为 $\pi_{ij} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$ 。为了设计该系统的有限时间静态输出反馈控制器, 结合事件触发方案, 给出其他已知的参数。其中, 传输时滞 $d_1 = 1, d_2 = 3$, 事件触发的系数为 $\delta_1 = 0.08, \delta_2 = 0.12$ 。另外, 根据定理 5.3, 选择有限时间参数为 $c_1 = 1, c_2 = \sqrt{5}, N = 8, \rho = 0.56, \sigma = 0.1, R = \text{diag}\{1, 1\}, \mu = 1.11, \gamma = 0.7235$, 可以得到一组可行解为

$$Z_1 = \begin{bmatrix} -0.3823 & 0 \\ 0.0615 & -1.8604 \end{bmatrix}, Z_2 = \begin{bmatrix} 0.3887 & 0 \\ -0.0572 & 1.8131 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = 6.8848, L_2 = -6.6406, \Omega_1 = 12.5799, \Omega_2 = 19.8233$$

然后, 可得系统的输出反馈增益为

$$K_1 = -3.7008, K_2 = -3.5634$$

假设系统的初始状态为 $x(k_0) = [-0.6 \quad 0.75]^T$, 外部扰动为 $\omega(k) = e^{-0.2k} \sin 0.5k$ 。首先, 闭环系统的马尔可夫跳变模态如图 5.1 所示, 结合事件触发方案, 触发时刻和触发间隔如图 5.2 所示。而图 5.2 中的仿真显示, 只有 17 次被触发和传输, 与其他相关的研究工作相比, 大大降低了网络传输频率, 节约了网络资源。

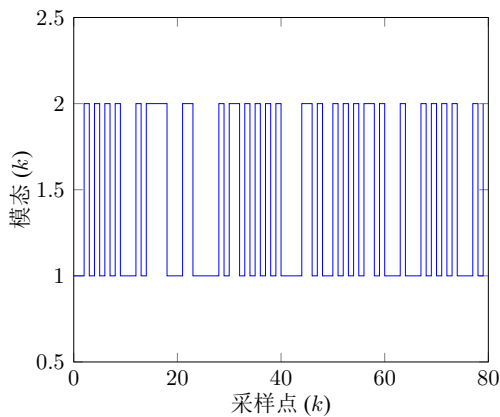


图 5.1 跳变模态

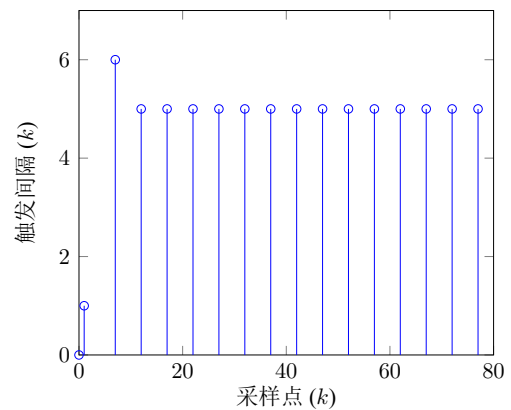


图 5.2 触发时刻和触发间隔

然后，在静态输出反馈控制器的作用下，闭环系统的状态响应轨迹如图 5.3 所示，与之相对应地，系统的有限时间指标 $x^T(k)E^T REx(k)$ 的轨迹如图 5.4 所示。

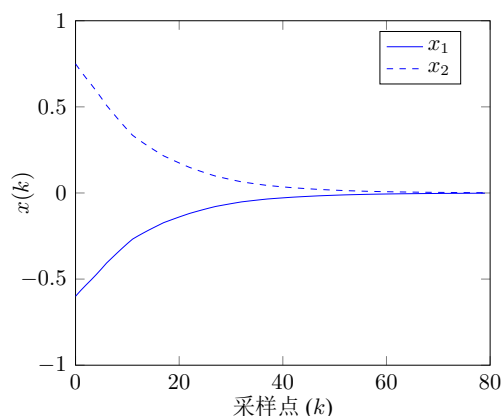


图 5.3 状态轨迹

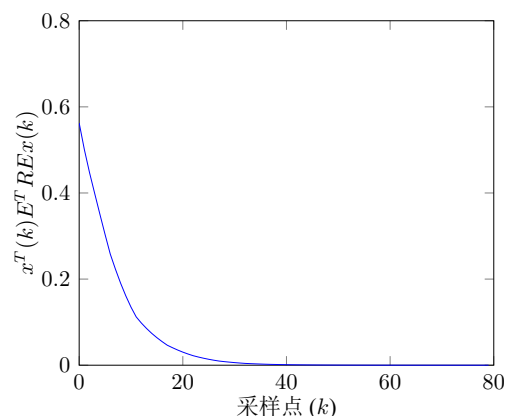


图 5.4 $x^T(k)E^T REx(k)$ 的轨迹

5.5 本章小结

本章节针对一类模态跳变概率已知和外部扰动满足幅值有界条件的离散 SMJSs，讨论了静态输出反馈有限时间 H_∞ 控制问题，给出了静态输出反馈控制增益矩阵的设计方法。考虑信号传输的事件触发机制和网络传输延迟，建立了静态输出反馈下的闭环系统模型，给出了闭环系统有限时间 H_∞ 有界的充分条件。同时，基于矩阵分解算法，以线性矩阵不等式形式给出了静态输出反馈控制增益矩阵的设计方法。最后，给出了一个仿真实例，验证了所提出方法的正确性和有效性。

第六章 结论与展望

6.1 结论

实际的控制系统在运行的过程中, 由于系统繁杂的结构以及一些其它的因素, 往往会出现参数突变等问题, 随机系统则可以用来描述这一类特殊且复杂的现象, 最为典型的则是 MJSs。不同于状态空间系统, 奇异系统既包含具有动态特性的动态层, 同时也包含具有静态特性的静态层, 是一种由动态系统和静态系统相结合共同描述的复杂大系统。在综合奇异系统和 MJSs 的基础上, SMJSs 是一类特殊且复杂的混杂系统, 更具有研究意义。

本文结合了奇异系统和 MJSs 的一些研究成果, 研究了 SMJSs 在有限的时域内的暂态性能, 以 Lyapunov 泛函和随机系统相关理论为手段, 以线性矩阵不等式为工具, 主要研究了:

- (1) 具有时变延时的离散时间 SMJSs 的有限时间控制问题。首先在转移概率完全已知的情况下, 通过构造新的合适的 Lyapunov 泛函, 得到了开环系统具有正则性、因果性且有限时间稳定性的充分条件。其次通过 Schur 补引理以及其他引理对时滞项中非线性变量进行处理, 将其转换为可解的严格矩阵不等式形式。然后在此基础上考虑转移概率部分已知的情况, 给出了状态反馈控制器的设计方法, 使得闭环系统随机有限时间稳定。
- (2) 基于事件触发的离散时间 SMJSs 的有限时间异步 H_∞ 控制问题。通过采用事件触发机制, 能够更好地节省网络带宽, 进一步提高网络资源的利用率。同时建立了隐马尔可夫模型, 解释了控制器模式与系统模式之间的异步现象。首先考虑网络时延的情况下, 将系统建模为时滞系统。然后构造了一种新的 Lyapunov 泛函, 给出了闭环系统正则、因果和有限时间有界, 且满足有限时间 H_∞ 性能的充分条件。最后, 通过矩阵变换和构造以严格的线性矩阵不等式的形式给出了异步控制器的状态反馈控制增益矩阵的设计方法。
- (3) 基于事件触发的离散时间奇异马尔可夫跳变系统的有限时间输出反馈 H_∞ 控制问题。首先, 同时考虑网络信号传输时延和事件触发机制, 针对静态输出反馈控制律, 建立了离散时间 SMJSs 的闭环系统模型。其次通过矩阵分解和构造以及变量分离的方法, 给出了闭环系统正则、因果、有限时间有界, 且满足有限时间 H_∞ 性能的充分条件。然后提出了一种新的 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 降低了保守性。最后, 基于矩阵分解方法, 给出了静态输出反馈控制增益矩阵的设计方法。

6.2 展望

本文对于 SMJSs 的有限时间控制的研究取得了一些进展, 但是还是很基础的, 还存在着很多问题值得探讨, 也是未来研究的方向:

- (1) 本文是以严格的线性矩阵不等式的形式作为充分条件。在处理线性矩阵不等式中的非线性项时, 采用的方法仍然存在着一定的保守性, 对于进一步降低保守性的方法

还需考虑。

- (2) 本文考虑的转移概率仅仅是部分未知且是有界的，存在着一定的局限性，对于完全未知的情况，如何去分析和分类讨论有待进一步去研究。
- (3) 本文研究是离散时间 SMJSs 的控制问题，没有考虑到其他的性能指标，仅仅考虑了系统的 H_∞ 性能。在实际的系统中，其他的许多性能指标同样具有研究价值，例如 L_2 、 $L_2 - L_\infty$ 、耗散性、可容许性、均方稳定性等。
- (4) 本文研究的基于事件触发机制的 SMJSs 控制问题仅仅是网络化系统研究的基础部分，在结合事件触发机制的情况下，加入量化机制或着网络攻击等方面的研究值得进一步去讨论。

参考文献

- [1] 杨华. 随机分析与综合[M]. 太原山西科学技术出版社, 2013.
- [2] 解学军, Mukaidani H, 张维海. 随机系统控制与分析专题简介[J]. 中国科学 (信息科学), 2021(10): 1775-1776.
- [3] Briggs A, Sculpher M. An introduction to Markov modelling for economic evaluation[J]. Pharmacoeconomics, 1998, 13(4): 397-409.
- [4] Pippel W, Philipp G. Utilization of Markov chains for simulation of dynamics of chemical systems[J]. Chemical engineering science, 1977, 32(5): 543-549.
- [5] Do Valle Costa O L, Fragoso M D, Todorov M G. Continuous-time Markov jump linear systems[M]. Springer Science & Business Media, 2012.
- [6] Van Casteren J F, Bollen M H, Schmieg M E. Reliability assessment in electrical power systems: the Weibull-Markov stochastic model[J]. IEEE Transactions on industry applications, 2000, 36(3): 911-915.
- [7] Bernhard P. On singular implicit linear dynamical systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1982, 20(5): 612-633.
- [8] Dziurla B. The drazien inverse and semi-state equations[C]. Proceedings of the International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems. Delft, Netherland, 1979. 283-289.
- [9] Brennan K E, Campbell S L, Petzold L R. Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations[M]. SIAM, 1995.
- [10] Krasovskii N N, Lidskii E A. Analytical design of controllers in stochastic systems with velocity-limited controlling action[J]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1961, 25(3): 627-643.
- [11] 杜津名, 林娜, 田中大, 等. 随机时变时滞马尔可夫跳变系统的镇定研究[J]. 信息与控制, 2016(4): 391-396.
- [12] Guo Y. Stabilization of positive Markov jump systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2016, 353(14): 3428-3440.
- [13] 周超洁, 栾小丽, 刘飞. 连续时间马尔可夫跳变系统多频段多指标控制[J]. 信息与控制, 2018(4): 499-504.
- [14] Li M, Deng F, Zheng X, et al. Mean-square stability of stochastic system with Markov jump and lévy noise via adaptive control[J]. Journal of the Franklin Institute, 2021, 358(2): 1291-1307.
- [15] Guo Y. Stability and stabilization of Markov jump systems with generally uncertain transition rates[J]. Journal of the Franklin Institute, 2021, 358(3): 1765-1781.
- [16] Chen Y, Chen Z, Chen Z, et al. Observer-based passive control of non-homogeneous Markov jump systems with random communication delays[J]. International Journal of

- Systems Science, 2020, 51(6): 1133-1147.
- [17] Fang M, Dong S, Wu Z. Asynchronous H_∞ filtering of continuous-time Markov jump systems[J]. International Journal of Robust & Nonlinear Control, 2020, 30(2): 685-698.
- [18] Zhang Y. Stability of discrete-time delay Markovian jump systems with stochastic nonlinearity and impulses[J]. IET Control Theory & Applications, 2013, 7(18): 2178-2187.
- [19] Yan Z, Su F. Mean-square strong stability and stabilization of discrete-time Markov jump systems with multiplicative noises[J]. Mathematics, 2022, 10(6): 979.
- [20] Tian Z, Li S. Design of unknown input observer for discrete time nonlinear generalized Markov jump systems under fault conditions[J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2022, 44(7): 1359-1372.
- [21] 周子龙, 李晓航. 离散马尔可夫跳变系统的降维观测器设计[J]. 电光与控制, 2022(4): 77-82.
- [22] Liu W, Zhang H, Wang Z, et al. State estimation for discrete-time Markov jump linear systems based on orthogonal projective theorem[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2012, 10(5): 1049-1054.
- [23] Yin Y, Shi P, Liu F, et al. Filtering for discrete-time nonhomogeneous Markov jump systems with uncertainties[J]. Information Sciences, 2014, 259: 118-127.
- [24] Rosenbrock H H. Structure properties of linear dynamical systems[J]. International Journal of Control, 1974, 20: 191-202.
- [25] Luenberger D. Dynamic equations in descriptor form[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1977, 22(3): 312-321.
- [26] Dai L. Singular control systems[M]. BerlinSpringer-Verlag, 1989.
- [27] 王娟, 张秀华. 基于 LMI 的一类不确定奇异系统的鲁棒控制[J]. 控制工程, 2013(4): 691-693.
- [28] 蔡壮, 张国良, 宋海涛, 等. 基于干扰观测器的一类奇异系统 H_∞ 控制[J]. 控制理论与应用, 2017(4): 551-556.
- [29] 乔梁, 李琳琳, 任俊超. 基于代数判据的奇异系统输出反馈设计新方法[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2022(1): 1-7.
- [30] 李丙新, 赵相飞, 张雪峰, 等. 输入时滞分数阶 ($0 < \alpha < 1$) 奇异系统的观测器控制[J]. Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering, 2022(12): 1862-1871.
- [31] 何召兰, 高岑, 武俊峰. 不确定时滞切换奇异系统的鲁棒 H_∞ 控制[J]. 北京化工大学学报(自然科学版), 2012(1): 89-92.
- [32] Zhou L, Ho D W, Zhai G. Stability analysis of switched linear singular systems[J]. Automatica, 2013, 49(5): 1481-1487.
- [33] 史书慧, 黎虹, 袁哲理. 一类切换奇异系统的相容控制[J]. 控制工程, 2018(8): 1451-1456.
- [34] Men B, Zhang Q, Wang G, et al. Stabilization of discrete-time switched linear singular

- systems via a stochastic approach[J]. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 2013, 7(21): 631-637.
- [35] Wang B, Zhu Q, Li S. Stability analysis of switched singular stochastic linear systems[J]. *International Journal of Control*, 2020, 93(6): 1381-1387.
- [36] Ma S, Zhang C, Zhu S. Robust stability for discrete-time uncertain singular Markov jump systems with actuator saturation[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2011, 5(2): 255-262.
- [37] Guerrero J C, Chávez-Fuentes J R, Casavilca-Silva J E, et al. A novel bounded real lemma for discrete-time Markov jump linear singular systems[J]. *IEEE Control Systems Letters*, 2022, 6: 2281-2286.
- [38] Fu X, Geng X. Fault estimation and robust fault-tolerant control for singular Markov switching systems with mixed time-delays and UAV applications[J]. *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*, 2021, 23(2): 53-66.
- [39] Ma S, Boukas E K, Chinniah Y. Stability and stabilization of discrete-time singular Markov jump systems with time-varying delay[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2010, 20(5): 531-543.
- [40] Zhuang H, Sun Q, Chen Z. 具有部分未知转移概率的广义马尔可夫跳变系统的变结构控制[J]. *Journal of Southeast University(English Edition)*, 2018(4): 466-473.
- [41] Zhao Y, Zhang W. New results on stability of singular stochastic Markov jump systems with state-dependent noise[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, 26(10): 2169-2186.
- [42] Wu Z, Park J H, Su H, et al. Delay-dependent passivity for singular Markov jump systems with time-delays[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, 18(3): 669-681.
- [43] Zhou J, Lai H, Liu C, et al. H_∞ controller design for singular markov jump systems with time-delays[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 2022, 236(8): 1566-1577.
- [44] Zhao Y, Zhang W. Observer-based controller design for singular stochastic Markov jump systems with state dependent noise[J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2016, 29(4): 946-958.
- [45] Zhao Y, Ma Y. Asynchronous H_∞ control for hidden singular Markov jump systems with incomplete transition probabilities via state decomposition approach[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2021, 407(15): 126304.
- [46] 王国良, 孙广兢, 薄海英. 广义马尔科夫跳变系统的部分模态依赖观测器设计[J]. *控制与决策*, 2015(4): 733-738.
- [47] Yin Y, Zhuang G, Xia J, et al. Asynchronous H_∞ filtering for singular Markov jump neural networks with mode-dependent time-varying delays[J]. *Neural Processing Letters*, 2022,

- 54: 5439-5456.
- [48] Tian Y, Wang Z. Dissipative filtering for singular Markovian jump systems with generally hybrid transition rates[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2021, 411: 126492.
- [49] Dorato P. An overview of finite-time stability[M]. BostonSpringer, 2006.
- [50] Amato F, Ambrosino R, Ariola M, et al. Finite-time stability and control[M]. Springer, 2014.
- [51] Kablar N A, Debelikovic D L. Finite-time stability of time-varying linear singular systems [C]. *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*. Tampa, FL, USA, 1998. 3831-3836.
- [52] Xue W, Mao W. Admissible finite-time stability and stabilization of uncertain discrete singular systems[J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2013, 135 (3): 031018.
- [53] 梁天添, 刘鑫, 郑祥, 等. 一类不确定广义系统故障估计的有限时间鲁棒观测器设计 [J]. *中国惯性技术学报*, 2021(3): 414-420.
- [54] Yao J, Feng J, Sun L, et al. Input-output finite-time stability of time-varying linear singular systems[C]. *Proceedings of the 30th Chinese Control Conference*. Yantai, China, 2011. 62-66.
- [55] 李丽, 卢延荣. 时变参数不确定广义系统的有限时间预见控制器设计[J]. *应用数学学报*, 2022(5): 712-731.
- [56] Zhang Y, Wu B, Wang Y e, et al. Finite-time stability for switched singular systems[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(17): 170205.
- [57] Feng T, Wu B, Wang Y, et al. Input-output finite-time stability of switched singular continuous-time systems[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2021, 19(5): 1828-1835.
- [58] 魏雪雪, 刘凝哲, 刘西奎, 等. 基于观测器的时滞离散时间马尔可夫跳变系统有限时间 H_∞ 控制[J]. *山东理工大学学报 (自然科学版)*, 2022(4): 17-27.
- [59] 刘西奎, 刘文成, 李艳, 等. 随机时滞马尔可夫跳跃系统的有限时间 H_∞ 控制[J]. *山东科技大学学报 (自然科学版)*, 2022(4): 75-84.
- [60] Zhang Y, Liu C, Mu X. Robust finite-time stabilization of uncertain singular Markovian jump systems[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2012, 36(10): 5109-5121.
- [61] Liu T, Wu B, Liu L, et al. Finite-time stability of discrete switched singular positive systems [J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2017, 36: 2243-2255.
- [62] Li L, Zhang Q. Finite-time H_∞ control for singular Markovian jump systems with partly unknown transition rates[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, 40(1): 302-314.
- [63] Zhang Y, Shi P, Nguang S K. Observer-based finite-time H_∞ control for discrete singular stochastic systems[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2014, 38: 115-121.
- [64] Ma Y, Jia X, Liu D. Robust finite-time H_∞ control for discrete-time singular Markovian

- jump systems with time-varying delay and actuator saturation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2016, 286: 213-227.
- [65] Wang J, Ma S, Zhang C, et al. Finite-time H_∞ filtering for nonlinear singular systems with nonhomogeneous Markov jumps[J]. *IEEE transactions on cybernetics*, 2018, 49(6): 2133-2143.
- [66] Dorf R, Farren M, Phillips C. Adaptive sampling frequency for sampled-data control systems[J]. *Automatic Control, IRE Transactions on*, 1962, 7: 38-47.
- [67] Åarzen K. A simple event-based pid controller[J]. *IFAC Proceedings Volumes*, 1992, 32(2): 8687-8692.
- [68] Xu Q, Zhang Y, Zhang B. Network-based event-triggered H_∞ filtering for discrete-time singular markovian jump systems[J]. *Signal Processing*, 2018, 145: 106-115.
- [69] Xu Q, Zhang Y, He W, et al. Event-triggered networked H_∞ control of discrete-time nonlinear singular systems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, 298: 368-382.
- [70] Zhang Y, Li Y, Yan J, et al. Event-triggered finite-time quantized stabilization of discrete singular jump systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2022, 32(13): 7488-7501.
- [71] Wang Y, Zhuang G, Chen F. A dynamic event-triggered H_∞ control for singular Markov jump systems with redundant channels[J]. *International Journal of Systems Science*, 2020, 51(1): 158-179.
- [72] Yan S, Zhang G, Li T, et al. H_∞ static output control of discrete-time networked control systems with an event-triggered scheme[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2018, 37: 553-568.
- [73] Shi L, Wang X, Huang L, et al. Dynamic event-triggered decentralized control of interconnected systems[J]. *International Journal of Control*, 2022, 32(15): 8628-8645.
- [74] Gao H, Song Y, Wen C. Event-triggered adaptive neural network controller for uncertain nonlinear system[J]. *Information Sciences*, 2020, 506: 140-160.
- [75] Yao D, Zhang B, Li P, et al. Event-triggered sliding mode control of discrete-time Markov jump systems[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 2018, 49(10): 2016-2025.
- [76] Xiao Z, Chen J, Xu M, et al. Asynchronous output feedback control for Markov jump systems under dynamic event-triggered strategy[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2022, 32(18): 10087-10100.
- [77] Wang H, Zhang D, Lu R. Event-triggered H_∞ filter design for Markovian jump systems with quantization[J]. *Nonlinear Analysis*, 2019, 28: 23-41.
- [78] 冯娜娜, 吴保卫. 切换奇异系统事件触发控制的输入输出有限时间稳定[J]. *山东大学学报 (理学版)*, 2019(3): 75-84.

- [79] Shen H, Li F, Yan H, et al. Finite-time event-triggered H_∞ control for T-s fuzzy Markov jump systems[J]. IEEE Transactions on fuzzy systems, 2018, 26(5): 3122-3135.
- [80] Zha L, Liao R, Liu J, et al. Finite-time adaptive event-triggered asynchronous state estimation for Markov jump systems with cyber-attacks[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2022, 32(2): 583-599.
- [81] Zhang Y, Shi P, M.V. B. Event-based finite-time H_∞ filtering of discrete-time singular jump network systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2022, 32(6): 4038-4054.
- [82] Gao X, He H, Qi W. Admissibility analysis for discrete-time singular Markov jump systems with asynchronous switching[J]. Applied Mathematics and Computation, 2021, 313: 431-441.
- [83] Wu Z, Shi P, Su H, et al. Delay-dependent stability analysis for discrete-time singular Markovian jump systems with time-varying delay[J]. International Journal of Systems Science, 2012, 43(11): 2095-2106.
- [84] Liu Y, Ma Y, Wang Y. Reliable sliding mode finite-time control for discrete-time singular Markovian jump systems with sensor fault and randomly occurring nonlinearities[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2018, 28(2): 381-402.
- [85] Tao Y y, Wu Z g, Huang T, et al. Asynchronous event-triggered output-feedback control of singular Markov jump systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022: 1-11.
- [86] Si Y, Nie L, Chen D, et al. Finite-time asynchronous sliding mode control for Markov jump systems with actuator saturation[J]. Systems Science & Control Engineering, 2021, 9(1): 748-763.
- [87] Ren H, Zong G, Li T. Event-triggered finite-time control for networked switched linear systems with asynchronous switching[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2018, 48(11): 1874-1884.
- [88] Wang B, Zhang J. Distributed output feedback control of Markov jump multi-agent systems[J]. Automatica, 2013, 49(5): 1397-1402.
- [89] Li L, U. V A. On necessary and sufficient conditions for H_∞ output feedback control of Markov jump linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 7: 1287-1292.
- [90] Su L, Ye D. Static output feedback control for discrete-time hidden markov jump systems against deception attacks[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2019, 29(18): 6616-6637.
- [91] Xu Z, Zhao L. Adaptive finite-time output feedback control for Markov jumping nonlinear systems[J]. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2021, 35(12): 2406-2422.
- [92] Wang J, Ma S, Zhang C. Finite-time stabilization for nonlinear discrete-time singular

- Markov jump systems with piecewise-constant transition probabilities subject to average dwell time[J]. Journal of the Franklin Institute, 2017, 354(3): 2102-2124.
- [93] Shen M, Yan S, Zhang G, et al. Finite-time H_∞ static output control of Markov jump systems with an auxiliary approach[J]. Applied Mathematics and Computation, 2016, 273: 553-561.
- [94] Boukas E K. Control of singular systems with random abrupt changes[M]. Springer Science & Business Media, 2008.