Solutions of Electromagnetic (II) Midterm Ex.

1. 當 r<10cm 時，根據右手定則 $\vec{B}$ 為-$\vec{a}_\phi$ 方向，

使用安培環路定律 $\oint \vec{B}d\vec{l}$ =μ0I ⇒2πr|$\vec{B}$|=0.2πμ0⇒|$\vec{B}$|=4π×10^{-8}×r^{-1}⇒ $\vec{B}$ =-$\vec{a}_\phi \dfrac{40\pi}{r}$ (nT)

有當 r>10cm 時，$\oint \vec{B}d\vec{l}$ =μ0(I -2πrJ_s)⇒ 2πr|$\vec{B}$|=μ0(0.2π-0.3π)=-0.1πμ0⇒|$\vec{B}$|=2π×10^{-8}×r^{-1}

⇒電流和為 z 方向，根據右手定則 $\vec{B}$ 為 $\vec{a}_\phi$ 方向因此⇒ $\vec{B}$ = $\vec{a}_\phi \dfrac{20\pi}{r}$ (nT)

2. 當 r<8cm 時 $\oint \vec{B}d\vec{l}$ =0⇒ $\vec{B}$ =0

當 r>10cm 時 $\oint \vec{B}d\vec{l}$ =μ0 (10I-10I)⇒ $\vec{B}$ =0

當 8cm<r<10cm 時，根據右手定則 $\vec{B}$ 為-$\vec{a}_\phi$ 方向且 $\oint \vec{B}d\vec{l}$ =μ012I⇒2πr|$\vec{B}$|=0.12×4π×10^{-7}

因此 $\vec{B}$ =-$\vec{a}_\phi \dfrac{24}{r}$ (nT)

3. 畢歐沙瓦定律$\vec{B}$= ($\vec{B}_1$+$\vec{B}_2$+$\vec{B}_3$) $\vec{B}_{1\sim3}$ 為三線段電流所形成的$\vec{B}$，

因為 dl 與$\vec{R}$同向因此 dl×**R**=0 $\vec{B}_1$=$\vec{B}_3$= 0

$\vec{B}_2$= $\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_\pi^0 \frac{\vec{a}_\phi r d\phi \times \vec{a}_r}{r^2}$=$\vec{a}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_\pi^0 \frac{d\phi}{a}$=-$\vec{a}_z\frac{\mu_0 I}{4a}$=-$\vec{a}_z$π×10^{-7}(T)

$\vec{B}$在原點為 -$\mathbf{a_z}$ π×10^{-7} (T)

4. $\overrightarrow{M}$ = $\vec{a}_n$SI, xy 平面順時針方向電流⇒ $\vec{a}_n$=-$\vec{a}_z$，因此

$\overrightarrow{M}$ =-$\vec{a}_z$ 5×4×0.01 (A·m^2) = $\vec{a}_z$0.2(A·m^2)

在+y 軸上的磁位向量 $\vec{A}$ 及磁通密度 $\vec{B}$

$\vec{A}$ = $\dfrac{\mu_0 \overrightarrow{M} \times \vec{a}_y}{4\pi y^2}$ = $\vec{a}_x$ 2×10^{-8}×y^{-2} (Wb/m)

若 $\overrightarrow{M}$ 為+z 方向時使用下式計算各處的磁通密度

$\vec{B}$ = $\dfrac{\mu_0 |\overrightarrow{M}|}{4\pi y^3}$($\vec{a}_r$2cosθ+ $\vec{a}_\theta$sinθ)|(θ=90°)=-$\vec{a}_z$2×10^{-8}×y^{-3} (T)；

但 $\overrightarrow{M}$ 為-z 方向，因此 $\vec{B}$ = $\vec{a}_z$2×10^{-8}×y^{-3} (T)

$\vec{B}$ =∇× $\vec{A}$ = $\vec{a}_z \dfrac{\partial A_x}{\partial y}$ =-$\vec{a}_z$4×10^{-8}×y^{-3} (T)；

但只取+y 磁通密度 $\vec{B}$ ⇒ $\vec{a}_z$2×10^{-8}×y^{-3} (T)

5. $\vec{J}_{mv}$=∇×$\overrightarrow{M}$ ($\vec{a}_z(x+2y)$)=$\vec{a}_x(\dfrac{\partial(x+2y)}{\partial y}) - \vec{a}_y(\dfrac{\partial(x+2y)}{\partial x}) = 2\vec{a}_x - \vec{a}_y$ (A/m^2)

$\vec{J}_{ms}$=$\overrightarrow{M}$×$\vec{a}_n$ 在 z=1 與 z=-1 平面 $\vec{a}_n = \pm\vec{a}_z$ ；$\vec{J}_{ms}$=0

在 x=1, $\vec{J}_{ms}$=$\vec{a}_z(x+2y)\big|_{x=1} \times \vec{a}_x = \vec{a}_y(2y+1)$ (A/m^2)

在 x=-1, $\vec{J}_{ms}$=$\vec{a}_z(x+2y)\big|_{x=-1} \times -\vec{a}_x = -\vec{a}_y(2y-1)$ (A/m^2)

在 y=1, $\vec{J}_{ms}$=$\vec{a}_z(x+2y)\big|_{y=1} \times \vec{a}_y = -\vec{a}_x(x+2)$ (A/m^2)

在 y=-1, $\vec{J}_{ms}$=$\vec{a}_z(x+2y)\big|_{y=-1} \times -\vec{a}_y = \vec{a}_x(x-2)$ (A/m^2)

6. 假設有電流 I 在內金屬柱上應用安培環路定律兩柱間的磁通密度等於

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \vec{a}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

在兩柱單位長度所包括的磁通量為

$$\Phi = \int \vec{B} d\vec{s} = \int_{0.2}^{0.5} \int_{z}^{z+1} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dz dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(2.5)$$

磁通連結$\Lambda=\Phi \Rightarrow$等效電感(L)= $\Lambda/I=2\times10^{-7}\times\ln(2.5)= 0.1832$ (μH)

7. 兩種材料在 x-y 平面相接且在 z>0 的磁導率分別為$\mu_1=9\mu_0$ 磁通密度為 $\vec{B}=\vec{a}_x 9+\vec{a}_z 8$(nT)，若 z<0 的磁導率$\mu_2=4\mu_0$ 請問在(a)接面上無表面電流(b)表面電流為 $\vec{J}_s=\vec{a}_x 1$ (mA/m²)時；z<0 的磁通密度分別為何?

Ans:(a) $B_{z2}=B_{z1}=8$, $B_{x2}=4\mu_0 B_{x1}/9\mu_0=4$(nT)，z<0 的 $\vec{B}=\vec{a}_x 4+\vec{a}_z 8$(nT) (7%)

(b) $B_{z2}=B_{z1}=8$, $B_{x2}=4\mu_0 B_{x1}/9\mu_0=4$(nT)，$B_{y2}/4\mu_0-B_{y1}/9\mu_0=1\times10^{-3} \Rightarrow B_{y2}=4\mu_0\times10^{-3}$(T)

z<0 的 $\vec{B}=\vec{a}_x 4+\vec{a}_y 1.6\pi+\vec{a}_z 8$ (nT)=$\vec{a}_x 4+\vec{a}_y 5.02+\vec{a}_z 8$(nT) (3%)

8.長導線在長方形線圈形成的磁通密度相等

$$\Lambda_{12} = \int_{s_2} B_1 dS_2, \vec{B}_1 = \vec{B}_{1L} + \vec{B}_{1R} = 2\vec{B}_{1L}$$

$$\Lambda_{12} = 2\int_d^{4d} \frac{\mu_0 Ih}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 Ih}{\pi} \int_d^{4d} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 Ih}{\pi} \ln 4$$

$L_{12}=5\Lambda_{12}/I =5\times\ln4\times10^{-8}$ (H)=69.31 (nH)

9. 在內金屬柱的磁通密度為$\oint \vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0 I r^2}{a^2} \Rightarrow \vec{B} = \vec{a}_\phi \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$

兩導管間的磁通密度為$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \vec{a}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$，

單位長度所儲存的磁能為

$$W_m=\frac{1}{2\mu_0}\int \vec{B}^2 dz r d\phi dr = \frac{2\pi\mu_0 I^2}{2}\int_0^a \frac{r^2}{(2\pi a^2)^2} r dr + \int_a^b \frac{1}{(2\pi r)^2} r dr$$

$$=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\int_0^{0.2} \frac{r^3}{0.2^4} dr + \int_{0.2}^{0.8} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln 4$$，

$W_m=(0.25+\ln4)\times10^{-5}=1.636\times10^{-5}$(J)

10. 在 x=2 與 x=-2 的電流分別為-$\vec{a}_y$I 與$\vec{a}_y$I ，與 x 方向磁通密度產生的力 F_1 與 F_3 分別為 $\vec{a}_z I\times1\times B_0$ 與-$\vec{a}_z I\times1\times B_0$ 且矩臂為 2m，

因此所形成的力矩為 $\vec{T}_y = -2\vec{a}_y I\times1\times B_0\times2 = \vec{T}_y = -\vec{a}_y 40B_0$

在 y=1 與 y=-1 的電流分別為$\vec{a}_x$I 與-$\vec{a}_x$I ，與 x 方向磁通密度產生的力 F_3 與 F_4 分別為 $\vec{a}_z I\times2\times B_0$ 與-$\vec{a}_z I\times2\times B_0$ 且矩臂為 1m，

因此所形成的力矩為 $\vec{T}_x = 2\vec{a}_x I\times2\times B_0\times1 = \vec{T}_x = \vec{a}_x 40B_0$

總力矩 $\vec{T}=\vec{T}_x+\vec{T}_y = \vec{a}_x 40B_0 - \vec{a}_y 40B_0$

10. (正確)

在 x=2 與 x=-2 的電流分別為-$\vec{a}_y$I 與 $\vec{a}_y$I ，與 x 方向磁通密度產生的力 F_1 與 F_3

分別為 $\vec{a}_z I\times 1\times B_0$ 與-$\vec{a}_z I\times 1\times B_0$ 且矩臂為 2m，

因此所形成的力矩為 $\vec{T}_y = 2\times(-2\vec{a}_y I\times 1\times B_0\times 2) = \vec{T}_y = -\vec{a}_y 80B_0$

在 y=1 與 y=-1 的電流分別為 $\vec{a}_x$I 與-$\vec{a}_x$I ，與 x 方向磁通密度產生的力 F_3 與 F_4

分別為 $\vec{a}_z I\times 2\times B_0$ 與-$\vec{a}_z I\times 2\times B_0$ 且矩臂為 1m，

因此所形成的力矩為 $\vec{T}_x = 2\times(2\vec{a}_x I\times 2\times B_0\times 1) = \vec{T}_x = \vec{a}_x 80B_0$

總力矩 $\vec{T} = \vec{T}_x + \vec{T}_y = \vec{a}_x 80B_0 - \vec{a}_y 80B_0$