導數的應用

單元三

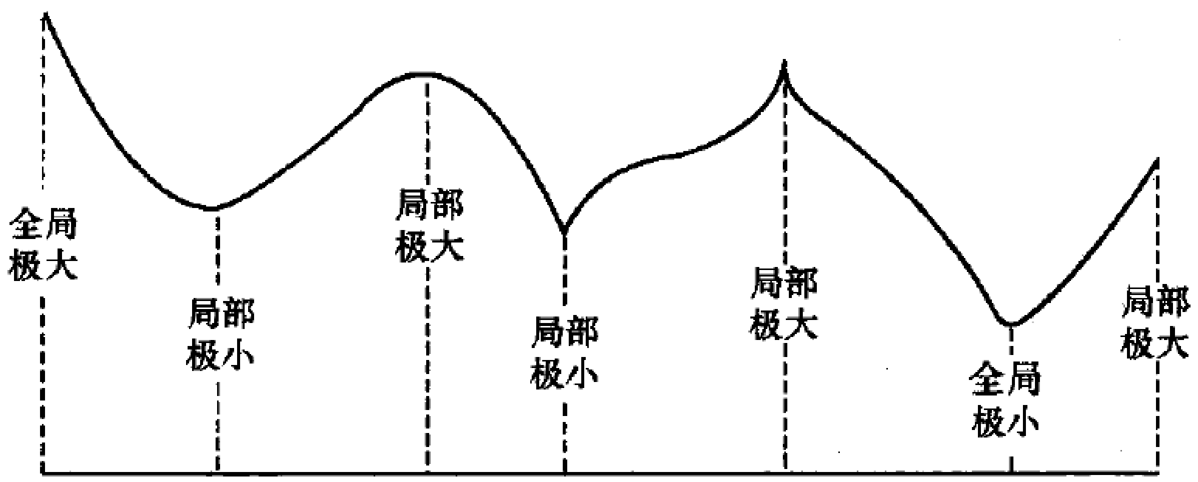
+ Outline

- 最值及極值
- 函數的單調性和凹凸性
- 最優化問題
- 函數的描繪
- 微分中值定理
- 不定積分

最值及極值 (3.1&3.3)

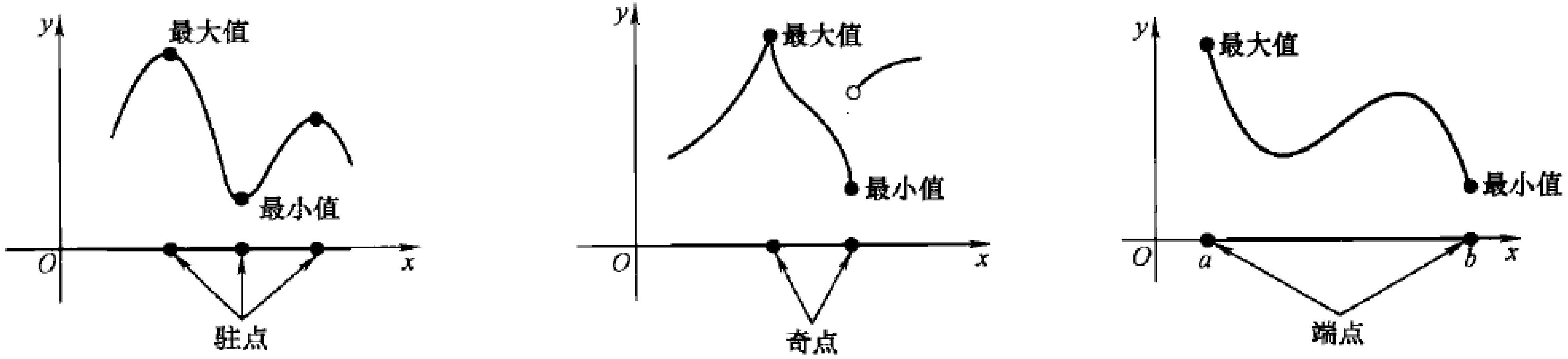
設在函數 f 的定義域 S 中存在一點 c, 稱 $f(c)$ 為 f 的:

- 最大值 (global max) 若對於所有在定義域中的 x 滿足 $f(c) \geq f(x)$；
- 最小值 (global min) 若對於所有在定義域中的 x 滿足 $f(c) \leq f(x)$ ；
- 極大值 (local max) 若對於在 c 附近的 x 滿足 $f(c) \geq f(x)$；
- 極小值 (local min) 若對於在 c 附近的 x 滿足 $f(c) \leq f(x)$。



臨界點 (Critical Point)(3.1定理B)

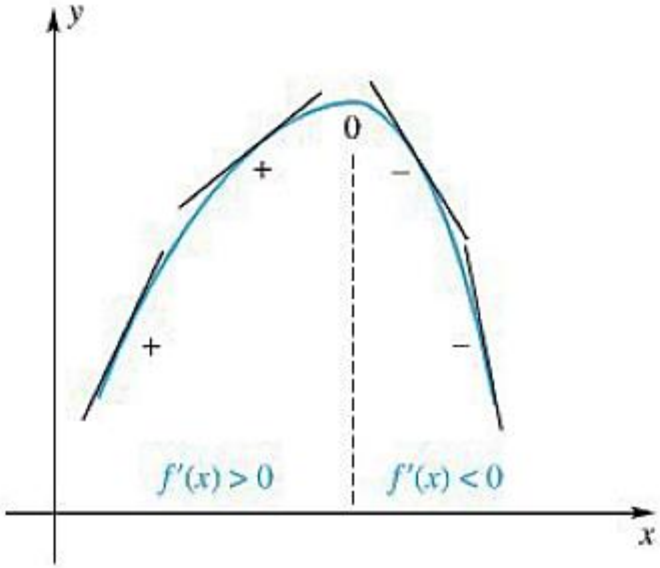
- 函數在區間 I 上的點 c 稱為**臨界點**若 c 是：
  - f 的一個駐點：$f'(c) = 0$ ；
  - f 的一個奇點：$f'(c)$ 不存在；
  - I 的一個端點。



單調性 (3.2定理A)

f 是定義在區間 I 上並在 I 內每一點都可導的連續函數。

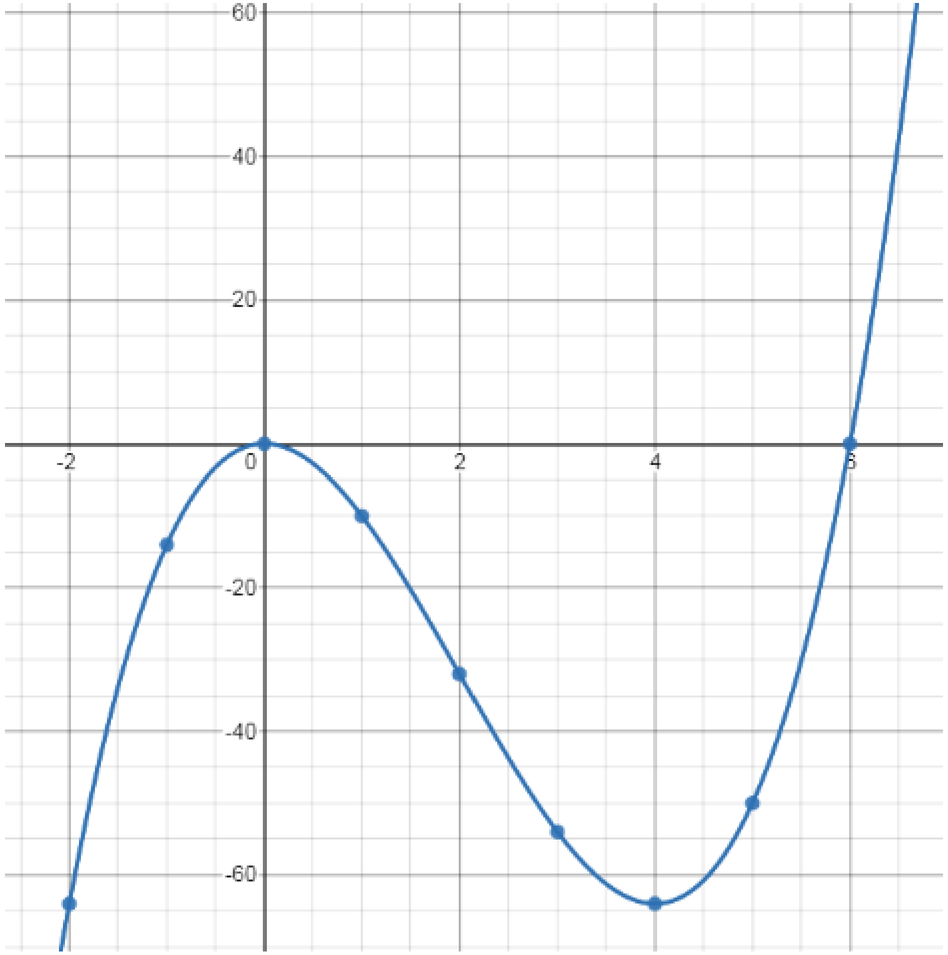
- 若在 I 上的所有 x 都有 $f'(x) > 0$,則 f 在 I 上遞增；
- 若在 I 上的所有 x 都有 $f'(x) < 0$,則 f 在 I 上遞減。



範例: 單調性和凹凸性

- $f(x) = 2x^3 - 12x^2$

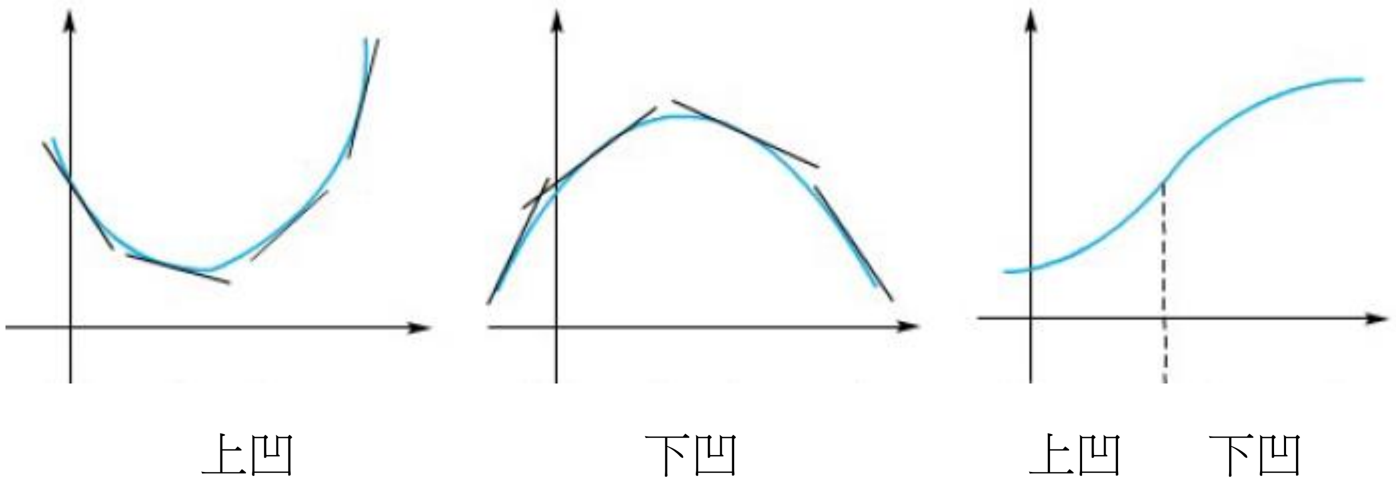
x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-2	-64	72	-48
-1	-14	30	-36
0	0	0	-24
1	-10	-18	-12
2	-32	-24	0
3	-54	-18	12
4	-64	0	24
5	-50	30	36
6	0	72	48



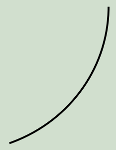
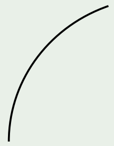
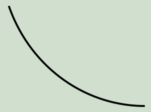
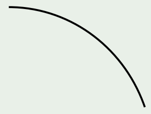
+ 凹凸性 (3.2定理B)

- 若在某區間中 $f''(x) > 0$, 則在此區間中 f 是上凹的。
- 若在某區間中 $f''(x) < 0$, 則在此區間中 f 是下凹的。

若函數於 $x = c$ 處由上凹變下凹或由下凹變上凹，則稱點 $(c, f(c))$ 為**拐點**。

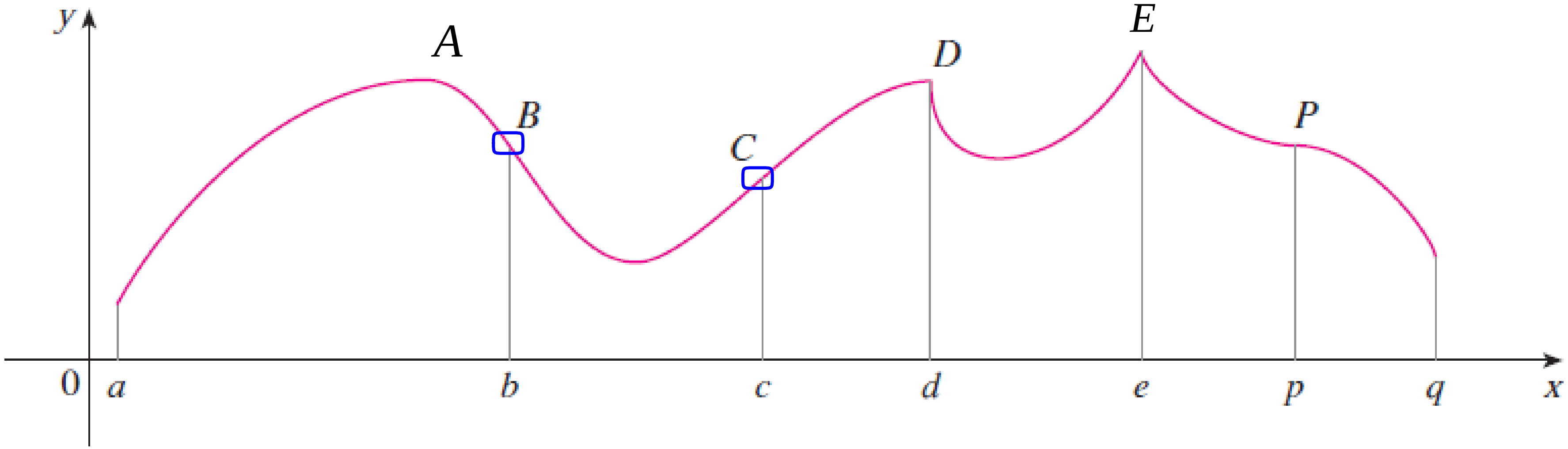


總結

$f'(x)$ 的符號	單調性	$f''(x)$ 的符號	凹凸性	圖象形狀
+	增	+	上凹	
+	增	-	下凹	
-	減	+	上凹	
-	減	-	下凹	

例1

- 判斷以下函數凹凸的區間及其拐點。



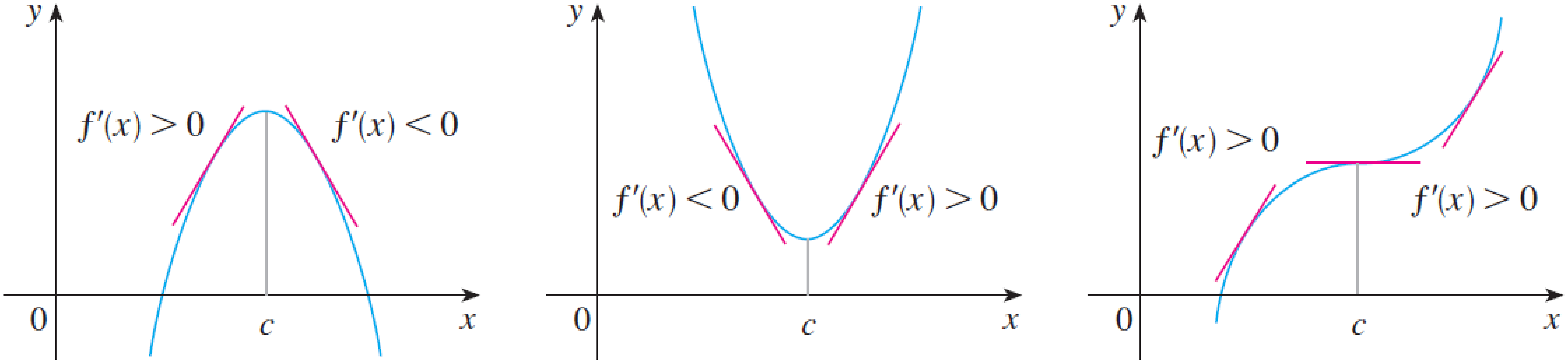
一階導數法則(3.3定理A)

假設連續函數 f 在 $x = c$ 有臨界點，亦即 $f'(c) = 0$：

a) 若 f' 在該處符號由 “+” 變 “–” ，則 $f(c)$ 為局部極大值；

b) 若 f' 在該處符號由 “–” 變 “+” ，則 $f(c)$ 為局部極小值；

c) 若 f' 在該處符號未改變符號，則 $f(c)$ 不是局部極值。



例2

- 找出函數 $f(x)$ 在以下區間的最大值和最小值：

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad x \in [-\frac{1}{2}, 4]$$

二階導數法則(3.3定理B)

假設連續函數 f 在 $x = c$ 有 $f'(c) = 0$：

a) 若 $f''(c) < 0$，則 $f(c)$ 為局部極大值；

b) 若 $f''(c) > 0$，則 $f(c)$ 為局部極小值；

c) 若 $f''(c) = 0$，則沒有定論。

+ 例3: 最優化問題

- 一個農夫想要用總長為1200公尺的籬笆沿着一直線的河岸圍出一塊矩形區域，而且靠河的那邊不需要籬笆。問如何才能圍出最大面積？

例4: 作圖

- 對於函數： (1) $f(x) = x^4 - 4x^3$, 求以下各項並作圖:

A. 定義域

B. 對稱性

C. 截距

D. 漸近線

E. 單調區間及極值點

F. 凹凸性和拐點

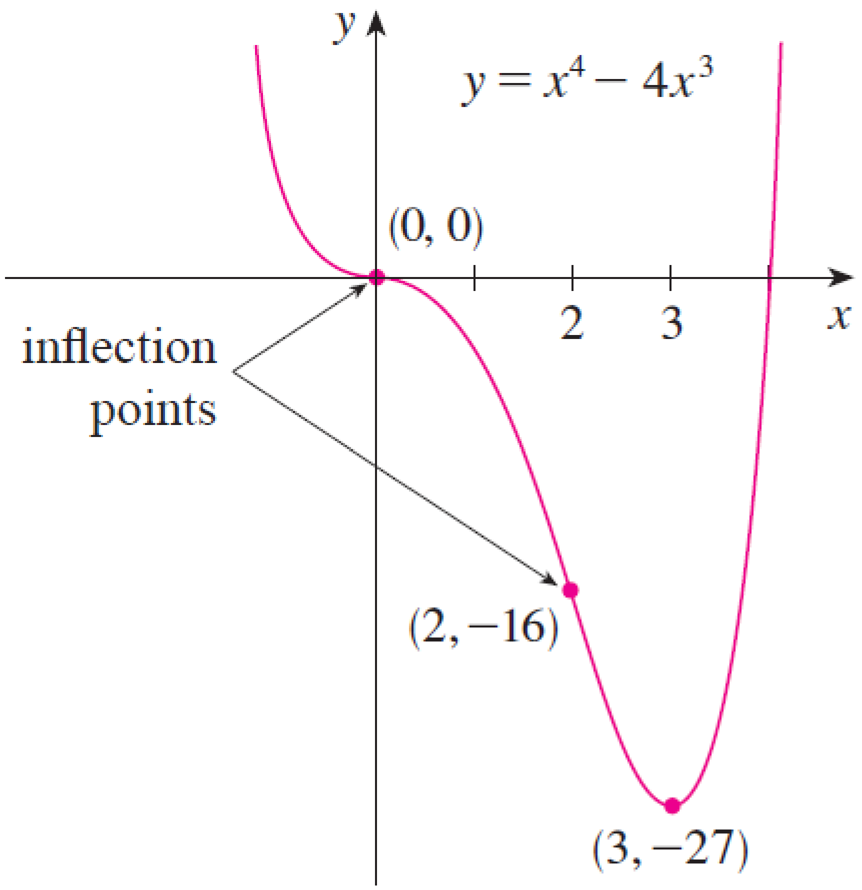
例4: 作圖 (續)

- 對於函數：(2) $g(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$，求以下各項並作圖:

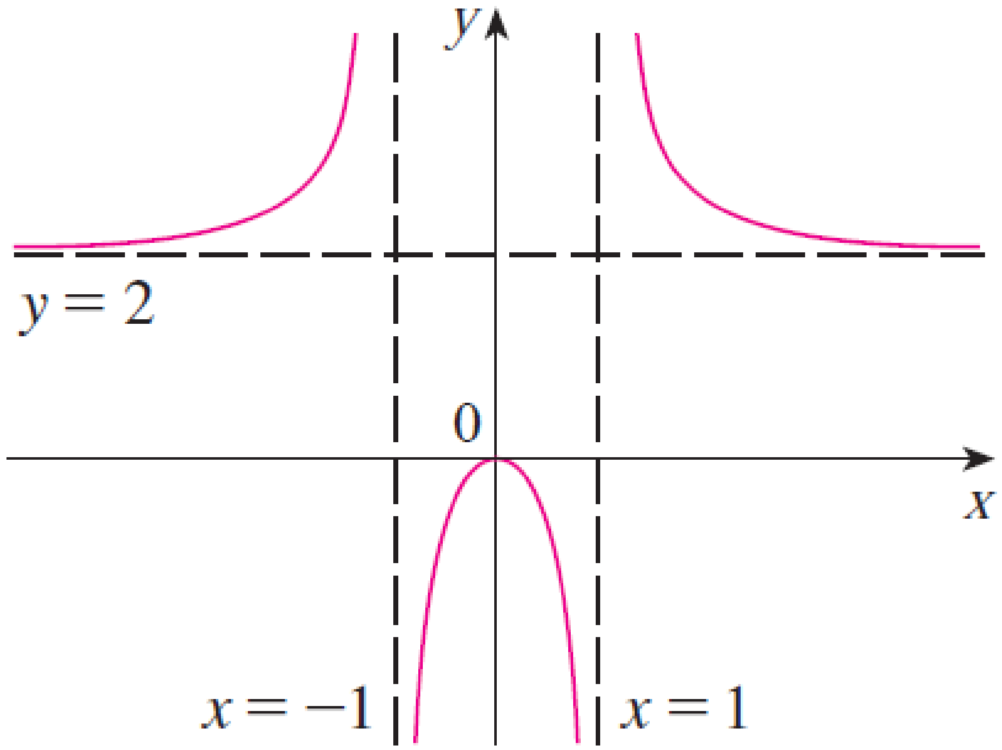
A. 定義域
B. 對稱性
C. 截距
D. 漸近線
E. 單調區間及極值點
F. 凹凸性和拐點

例4 圖象

- (1)



(2)



微分中值定理 (3.6)

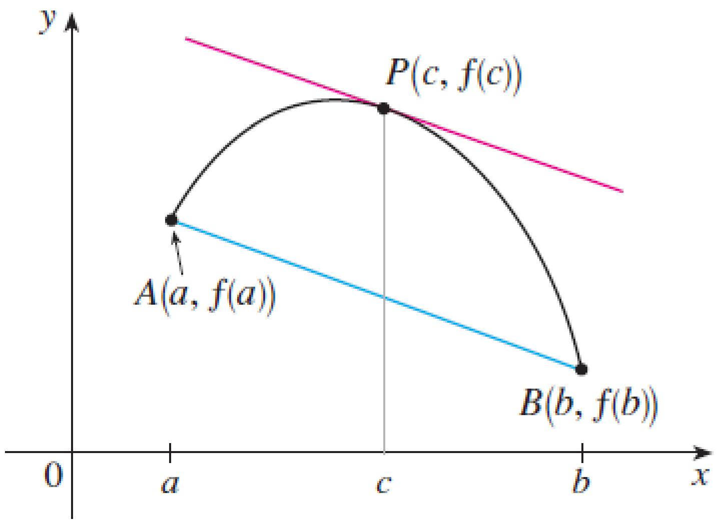
- 若函數 f 滿足下列條件:
  - f 在閉區間$[a, b]$ 連續
  - f 在開區間(a, b) 可微，則:

在開區間 (a, b) 上存在點 c 使

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

或寫作:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$



+ 例5

- 在某城市的高速公路的限速為 70公里/小時。上周一，Peter 下午 2:00 途經該市 A 收費站，並在下午 2:30 經過該市 B 收費站。已知兩個收費站之間相距 42 公里，且中間並未設置測速器。但在幾天後 Peter 收到了一張超速罰單，請問罰單是否合理?

不定積分 (Indefinite Integral)

- 若在區間 I 的所有 x 滿足 $F'(x) = f(x)$，則稱 F 為 f 在 I 的不定積分。
- 若 F 為 f 在區間 I 上的不定積分，則其通式為:

$$F(x) + C$$

其中 C 為任意常數

$F(x) + C$

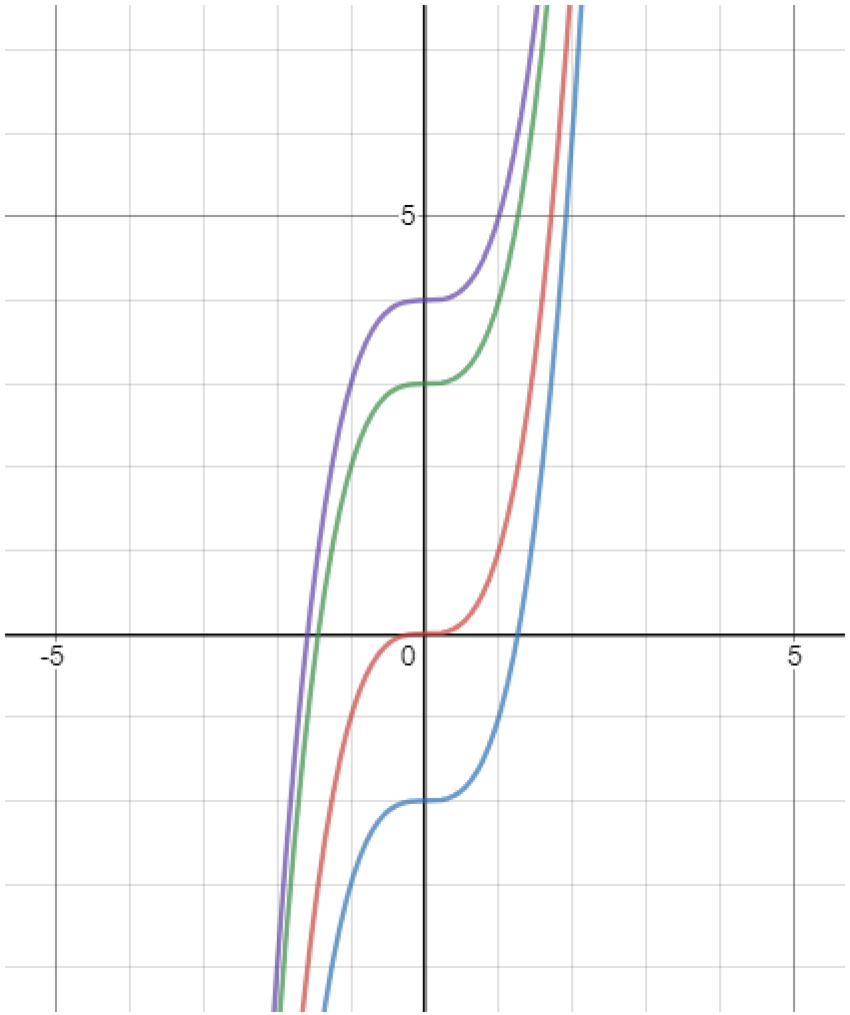
- $f(x) = 3x^2$
- 满足 $F'(x) = f(x)$ 的例子:

2 $F_1(x) = x^3$

3 $F_2(x) = x^3 - 2$

4 $F_3(x) = x^3 + 3$

5 $F_4(x) = x^3 + 4$

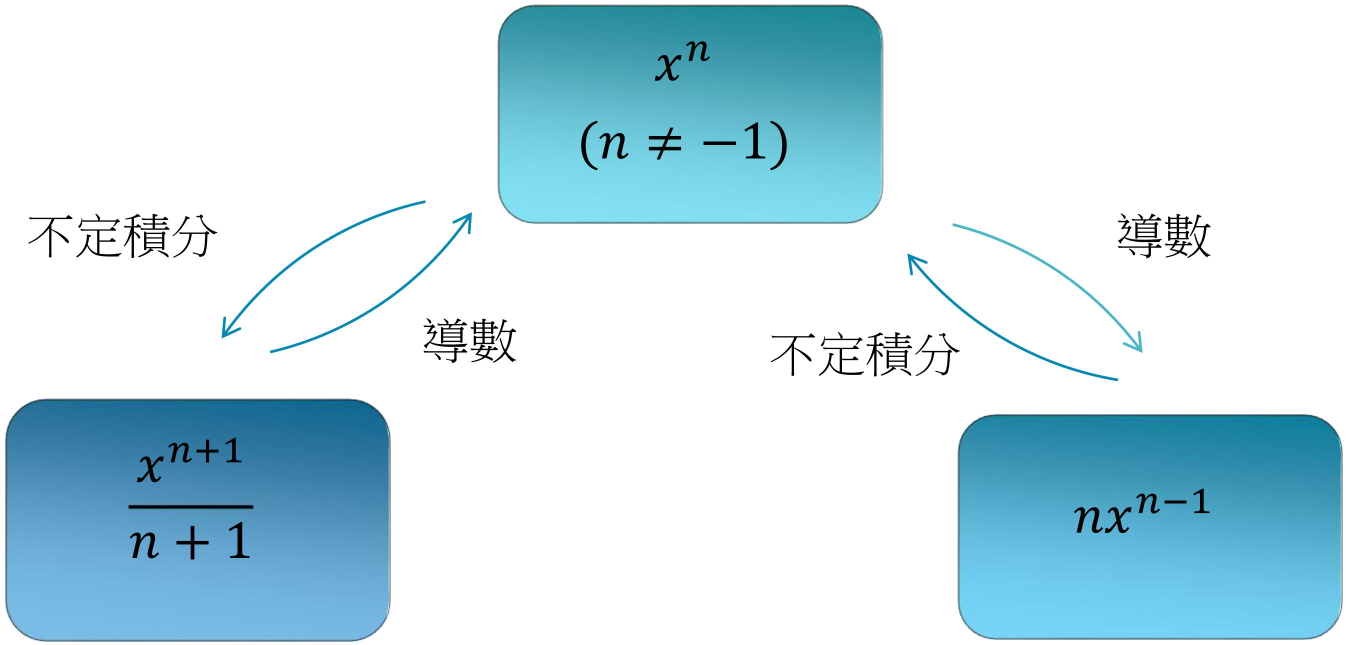


積分的記號

- 不定積分$\int f(x)dx$ 中：
  - $\int$ – 積分號
  - $f(x)$ – 被積函數
  - dx – 積分的自變數為 x

+ 導數 vs. 不定積分

- 我們接觸過的導數公式亦可應用於不定積分中，例如：



+ 例6

- 求下列函數的不定積分:

A. $f(x) = 2$

B. $f(x) = \sin x$

C. $f(x) = x^n, n \geq 0$

D. $f(x) = 4\sin x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$

+ 例7

A. 若 $f'(x) = x\sqrt{x}$ 且 $f(1) = 2$，求 f 。

B. 若 $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4,\ f(0) = 4$ 和 $f(1) = 1$，求 f 。

教材對應閱讀章節及練習

- 第 3 章 3.1-3.6, 3.8(~例4)
- 對應習題: (可視個人情況定量)
  - 3.1: 1-26
  - 3.2: 1-18
  - 3.3: 1-18
  - 3.4: 1-16
  - 3.5: 1-16
  - 3.6: 1-20
  - 3.8: 1-26