積分技巧一

單元六

+ Outline

- 反三角函數
- 分部積分
- 三角函數的積分

反三角函數 Inverse Trigonometric Functions (6.8)

- 例： $f(x) = \sin x$ 與 $g(x) = \sin^{-1} x$ (在限制區間內) 互為反函數。

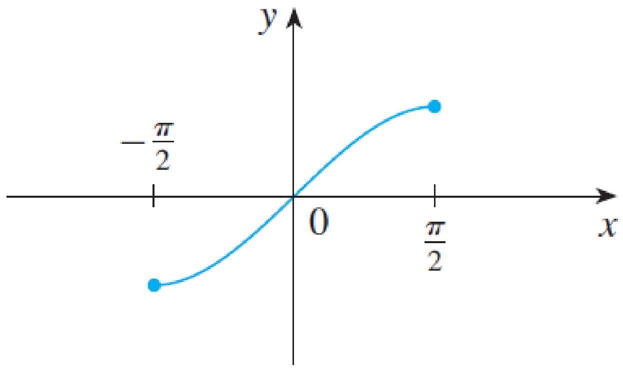

FIGURE 2 $y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

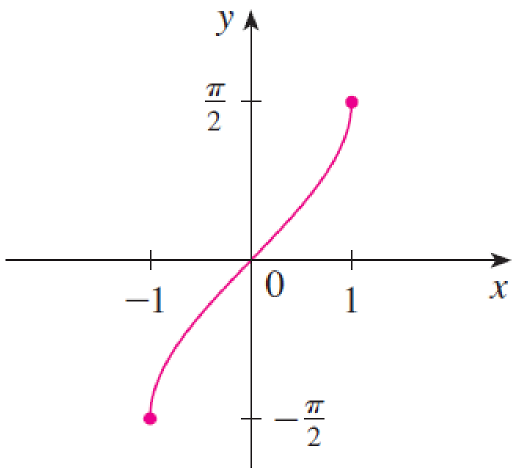

FIGURE 4
$y = \sin^{-1} x = \arcsin x$

- 稱 $y = \sin^{-1} x = \arcsin x$ 為反正弦函數 (inverse sine function) 。
- 其他三角函數也能作相似定義。

+ 反餘弦函數與反正切函數 Arccosine & Arctangent

- Cosine & arccosine:

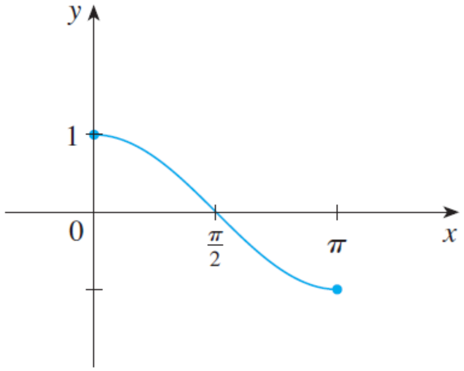

FIGURE 6
$y = \cos x,\ 0 \leq x \leq \pi$

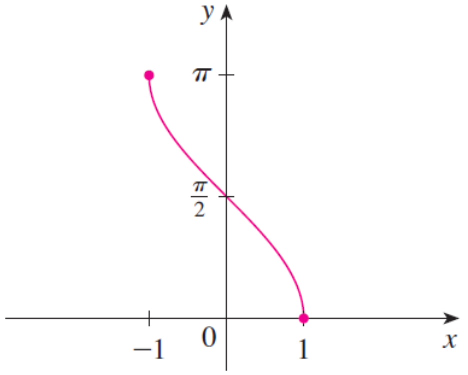

FIGURE 7
$y = \cos^{-1} x = \arccos x$

- Tangent & arctangent:

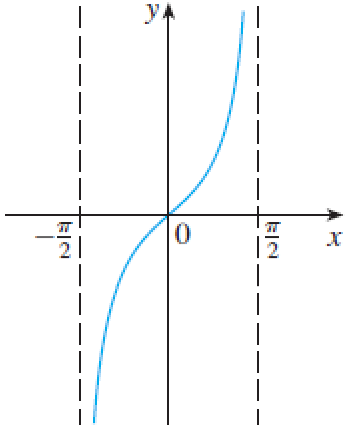

FIGURE 8
$y = \tan x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

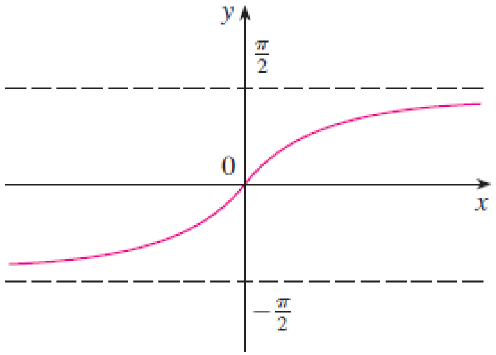

FIGURE 10
$y = \tan^{-1} x = \arctan x$

較常見的反三角函數

反三角函數	定義域	值域
$y = \arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$y = \arctan x$	$(-\infty, \infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

反三角函數的導數

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

例1

- 求:

A. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\arcsin x}\right)$

B. $\frac{d}{dx}(\arccos(3-2x))$

+ 例1 (續)

C. $\int_0^{1/4} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

D. $\int \frac{x}{x^4+9} dx$

積分公式 (7.1)

1. $\int k\, du = ku + C$
2. $\int u^r du = \begin{cases} \frac{u^{r+1}}{r+1} + C,\ r \neq -1 \\ \ln|u| + C, r = -1 \end{cases}$
3. $\int e^u du = e^u + C$
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, a \neq 1, a > 0$
5. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$
6. $\int \cos u\, du = \sin u + C$
7. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$
8. $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$
9. $\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$
10. $\int \csc u \cot u\ du = -\csc u + C$
11. $\int \tan u\, du = -\ln|\cos u| + C$
12. $\int \cot u\, du = \ln|\sin u| + C$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}} du = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
14. $\int \frac{1}{a^2+u^2} du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
15. $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}} du = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{|u|}{a}\right) + C$
    $= \frac{1}{a}\cos^{-1}\left(\frac{a}{|u|}\right) + C$

例2

A. $\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$

B. $\int \frac{t^2\cos(t^3-2)}{\sin^2(t^3-2)}\,dt$

分部積分法 (7.2)

- 令 $u = f(x), v = g(x)$, 則

$$\int \boldsymbol{udv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{vdu}$$

- 定積分公式:

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$$

例3

- 求:

A. $\int x \sin x \, dx$

B. $\int \ln x \ \, dx$

C. $\int t^2 e^t \, dt$

D. $\int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$

例4: 循環積分

- 求 $\int e^x \sin x \, dx$.

例5: 綜合

- 求:

A. $\int \cos\sqrt{x}\,dx$

B. $\int_0^{\pi} e^{\cos t}\sin 2t \; dt$

C. $\int \sin(\ln x)\,dx$

三角函數的積分 (7.3)

- 某些類型的三角函數可引用等式代換求解。
  - 例: $\int \cos^3 x \, dx = ?$

+ 三角恆等式

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
- $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
- $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
- $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

+ 例6: 求 $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ 的策略

- 求:

A. $\int \cos^3 x \, dx$

B. $\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx$

C. $\int_0^\pi \sin^2 x \, dx$

> $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$
> **m 或 n 為奇數：保留一個 sin 或 cos 項.**
> **m 和 n 皆為偶數：使用半角公式.**

例7: 求 $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ 的策略

- 求:

A. $\int \tan^6 x \sec^4 x \, dx$

B. $\int \tan^5 x \sec^7 x \, dx$

$\int \tan^m x \sec^n x \, dx$

m 為奇數 : 保留一個 $\sec x \tan x$ 項.

n 為偶數 : 保留一個 $\sec^2 x$ 項.

其他有用的三角積分公式

- $\int \tan x \, dx = \ln|\sec x| + C$
- $\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

例7: (續)

C. $\int \tan^3 x \, dx$

D. $\int \sec^3 x \, dx$

教材對應閱讀章節及練習

- 6.8; 7.1-7.3.
- 對應習題: (可視個人情況定量)
  - 6.8: 1-10, 19-22, 39-72
  - 7.1: 1-28
  - 7.2: 1-38
  - 7.3: 1-28