# 計數 Counting

第六章

# Outline



- 計數的基礎 (The Basics of Counting)
- 鴿巢原理 (The Pigeonhole Principle)
- 排列與組合 (Permutations and Combinations)
- 二項式系數及恒等式 (Binomial Coefficients and Identities)
- 排列與組合的推廣 (Generalized Permutations and Combinations)

# 基本的計數原則 Basic Counting Principles (6.1)

- 乘積法則 The Product Rule：
  - 完成一個流程若需要完成 $k$ 個步驟，第一個步驟有 $m_1$ 個方式，第二個步驟有 $m_2$ 個方式，⋯，第 $k$ 個步驟 有 $m_k$ 個方式。則完成這個流程共有 $n = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_k$ 種方式。
- 求和法則 The Sum Rule：
  - 完成一個任務，有 $n$ 個流程，第一個流程有 $n_1$ 個方式，第二個流程有 $n_2$ 個方式，⋯，第 $j$ 個流程有 $n_j$ 個方式。則完成這個任務總共有$n_1 + n_2 + \cdots + n_j$ 種方式。

# + 例1

- A女士明天想要在澳門半島或氹仔的一家店裡逛一整天，澳門半島她有興趣的有兩家，氹仔她有興趣的有三家，她明天一共有多少種逛店的方式? 5=2+3

- B女士明天想要上午在澳門半島逛一家店，下午在氹仔逛一家店，澳門半島她有興趣的有兩家，氹仔她有興趣的有三家，她明天一共有多少種逛店的方式? 6=2*3

# 例2



1. 求以下運算完成後 $k$ 的值:

A.

```
k := 0
for i_1 := 1 to n_1
    for i_2 := 1 to n_2
            ...
              for i_m := 1 to n_m
                   k := k + 1
```

B.

```
k := 0
for i_1 := 1 to n_1
     k := k + 1
for i_2 := 1 to n_2
     k := k + 1
        ...
for i_m := 1 to n_m
     k := k + 1
```

2. 承上題, 現假設 $n_1 = n_2 = \cdots = n_m = n$, 求 A. 和 B. 複雜度 $f(n)$ 的最佳大O估算為何?

# 例3

A. 投擲硬幣 10 次的結果有多少個? 2^10 = 1024

B. 若 $|A| = 3, |B| = 7, |C| = 5$，則：

a) $|A\times B\times C| = ?$ 105

b) $|\mathcal{P}(B)| = ?$ 2^7= 128

C. 1至1000中有多少整數能被4或7整除？357 = （1000/4）+（1000/7）-（1000/28）

D. 前 1 位為字母，後 4 位為數字的 5 位 ID卡：

a) 若數字允許重複，可製作多少張不同的 ID卡?260000 =26 * 10^4

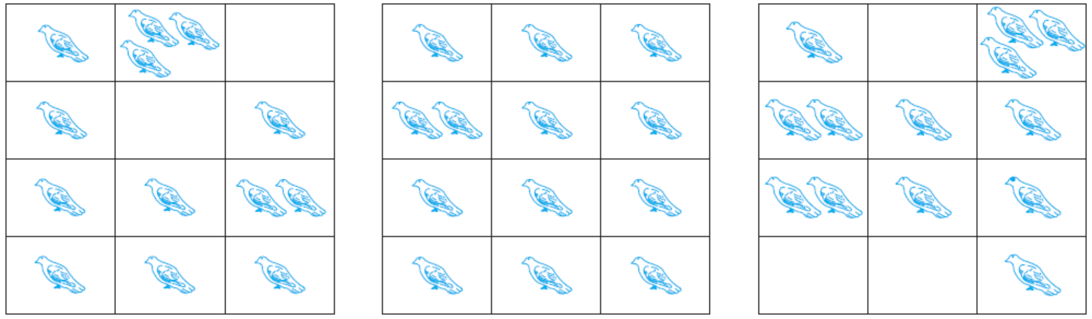
b) 若數字不允許重複，可製作多少張不同的 ID卡?131040 =26*10*9*8*7

E. 5個人坐成一排，有幾種不同的坐法? 5!= 5*4*3*2*1= 120

F. 5個人圍着一圓桌就坐，有多少種坐法? (左右相鄰都坐着相同的人視作相同坐法)24 =(5-1)! 圆排列公式（n-1）！ n为人数

# + 鴿巢原理 The Pigeonhole Principle (6.2)

- 鴿巢原理 (The Pigeonhole Principle)：
若 $k+1$ ($k \in \mathbf{Z}^+$)個物件需放進 $k$ 個盒子裡, 則起碼有一個盒子內有起碼兩個物件。
  - 例: 13隻鴿子到12個鴿巢棲息，起碼有一個鴿巢內有起碼兩隻鴿子。



(a) (b) (c)

- 廣義鴿巢原理 (The Generalized Pigeonhole Principle)：
若 $N$ 個物件需放進 $k$ 個盒子裡, 則起碼有一個盒子內有起碼$\lceil N/k \rceil$物件。
  - 50隻鴿子到12個鴿巢棲息，起碼有一個鴿巢內有起碼五隻鴿子。

# 例4

- 從一副 52 張的撲克牌(standard poker deck)中最少需抽取多少張才能確保：

a) 抽到兩張相同花色(suit)? $5$

b) 抽到三張相同點數(rank)? $27$

# 排列(Permutation) (6.3)

- 從一個含有 $n$ 個不同元素的集合中取 $r$ 個排成一列，其所有可能排列的總數稱為 $r$-permutation ($r$ 排列)，以符號 $P(n,r)$ 表示：

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- 若順序改變, 即為不同的排列。(Order DOES matter!)
- 以下表示方式具相同意義:

$$P(n,r) = nPr = P_r^n$$

# 例5 (不同物的排列)

A. 將 A 到 J 十個英文字母排成一直線，有幾種排法? 3628800

B. 將 A 到 J 十個英文字母中取 4 個排成一直線，有幾種排法? 5040

Use the factorial notation for permutations: $10!$ represents the total number of ways to arrange 10 distinct objects

Compute the factorial: $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Calculate the number of ways to choose 4 out of 10 letters and arrange them in a line

Use the permutation formula for choosing r objects from n: $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

Apply the formula with $n = 10$ and $r = 4$: $P(10,4) = \frac{10!}{(10-4)!}$

Refer to the asksia-ll calculation list for the result: $P(10,4) = 5040$

# 例6 (綑綁法、插空法)

- 甲、乙、丙、丁等 7 人排成一列，試求下列排法各有幾種：
  A. 任意排；
  B. 甲、乙、丙三人須排在一起；
  C. 甲、乙、丙三人必須完全分開；
  D. 甲、乙相鄰，丙、丁不相鄰。

# + 組合 (Combination)

- 從一個含有 $n$ 個不同元素的集合中選取 $r$ 個，其所有可能組合的總數以符號$C(n,r)$表示，稱為 $r$-combination ($r$ 組合) ：

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

- 若順序改變, 仍為相同的組合。(Order does NOT matter!)
- 以下表示方式具相同意義:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = nCr = C_r^n$$

# 例7 (排列與組合)

A. 從 5 個人中組成一個三人小組,

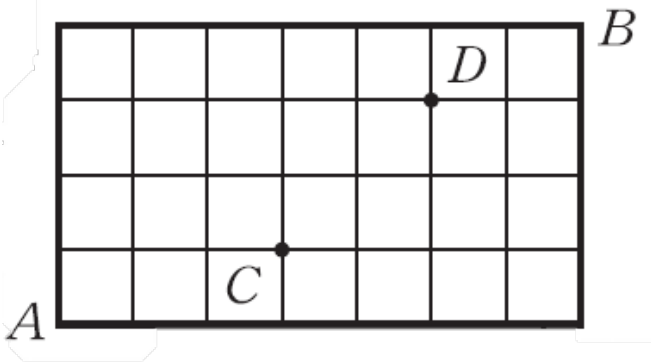
a) 此三人職責不同,共有多少種方法?

b) 此三人職責相同, 共有多少種方法?

B. 某公司春茗有50名員工參與抽獎，共有頭獎1名，二獎1名,三獎1名,安慰獎10名，問共有多少種可能的得獎名單?

# 例8 (捷徑)

- 由 A 地到 B 地的街道是棋盤式的(如圖)，某人沿著街道以走捷徑(shortest path)的方式從A地到B地，問：
  A. 有多少種走法?
  B. 必須經過 C 的走法有多少種?
  C. 必須不經過 D 的走法有多少種?



# + 例9 (多種選法)

- 從五位男生六位女生中，選出五人組成委員會，問:
  A. 共有多少種選法?
  B. 規定男女各至少有兩人，有多少種選法?
  C. 規定男生至少有一人，有多少種選法?

# 二項式定理 (The Binomial Theorem)(6.4)

- $n$ 為自然數：

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

# 範例: $(a+b)^4$

通項: $T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)\\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\\ &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^{4-k} b^k\end{aligned}$$

- 其展式中的 $a^3b$ 可視作 4 個 $a$ 中選出三個 $a$ 的組合方法 (或 4 個 $b$ 中選出一個 $b$ 的組合方法), 故$a^3b$的係數為 $C(4,3) = C(4,1) = 4$。

| 1st $(a+b)$ | 2nd $(a+b)$ | 3rd $(a+b)$ | 4th $(a+b)$ | |
|---|---|---|---|---|
| $b$ | $a$ | $a$ | $a$ | $baaa = a^3b$ |
| $a$ | $b$ | $a$ | $a$ | $abaa = a^3b$ |
| $a$ | $a$ | $b$ | $a$ | $aaba = a^3b$ |
| $a$ | $a$ | $a$ | $b$ | $aaab = a^3b$ |

# + 帕斯卡三角形 Pascal's Triangle

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 1 | | 1 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | 1 | | 2 | | 1 | | | | | | | | |
| | | | | | | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | | | | | | |
| | | | | | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | | | | | | |
| | | | | | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 | | | | | |
| | | | | 1 | | 6 | | 15 | | 20 | | 15 | | 6 | | 1 | | | | |
| | | | 1 | | 7 | | 21 | | 35 | | 35 | | 21 | | 7 | | 1 | | | |
| | | 1 | | 8 | | 28 | | 56 | | 70 | | 56 | | 28 | | 8 | | 1 | | |
| | 1 | | 9 | | 36 | | 84 | | 126 | | 126 | | 84 | | 36 | | 9 | | 1 | |
| 1 | | 10 | | 45 | | 120 | | 210 | | 252 | | 210 | | 120 | | 45 | | 10 | | 1 |

**推論 Corollaries:**

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
2. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

# 例10 (求展開式)

A. 求 $(x+y)^5$ 的展開式(expansion)。

B. 求 $(3x-2y)^4$ 的展開式(expansion)。

# + 例11 (求某項係數)

A. 求 $(x+y)^{25}$ 展開式中 $x^{12}y^{13}$ 的係數(coefficient) $c_1$ 。

B. 求 $(2x+1)^{8}$ 展開式中 $x^{4}$ 的係數(coefficient) $c_2$ 。

# 例11 (求某項係數) (續)



C. 求出 $\left(x-\frac{2}{x}\right)^{10}$ 展開式中 $x^6$ 的係數(coefficient) $c_3$ 和常數項(constant term) $c_4$。

D. 求出 $\left(3x^2+\frac{5}{x}\right)^4$ 展開式中 $x^4$ 的係數(coefficient) $c_5$。

# 例12

A. 在 $(2+x)^9(1-3x)^8$ 展開式中，試求 $x^2$ 的係數 $c$。

# 例12(續)



B. 在$(2+x)^n$展開式中，其中 $n \geq 3$且$n$為一整數， $x^3$ 的項係數與 $x$的項係數之比是$7:4$，求$n$的值。

# + 例12(續)

C. 若 $(1+2x+kx^2)^n = 1 + 8x + 44x^2 +$ 其他 $x$ 較高次冪的項，求 $k$ 和 $n$ 的值。

# 例13

A. 求$7^{103}$除以25的余數 $r$。

B. $99^{50} + 100^{50}$ 與 $101^{50}$，兩者哪個較大?

C. $32^{32}$的個位數字是多少?

# 例14 (隔板法: 相同物件分組)(6.5)



A. (i) 8 塊相同的黑板分給 4 所學校，一共有多少種分法?
(ii) 承上題, 若要求每所學校至少分到 1 塊黑板, 則分法有多少種?

# 例14 (續)

B. (i) $x+y+z=11$ 之非負整數解有幾個？ C（13, 2）

(ii) $x+y+z=11$ 之正整數解有幾個？ C（10, 2）

# 例15 (有相同物的排列)

A. 用 6 個字母 PEPPER 進行排列，共有多少種不同的排列方式?
B. 把 ARRANGE 排成一列，共有多少種不同的排法?
C. 把 aaaabbbcc 排成一列，共有多少種排法?
D. 有相同的白球 5 個、紅球 2 個、黑球 1 個。將此 8 球排成一列，兩端都是白球的排法有幾種?

A. 6!/3!*2! = 60
B. 7!/2!*2! = 1260
C. 9!/4!*3!*2!= 1260
D. 6!/3!*2! = 60

step 1 考虑两端的白球，我们先将它们放置在两端。

step 2 剩下的 3 个白球、2 个红球和 1 个黑球，共 6 个球，可以自由排列。

step 3 这 6 个球的排列数是它们的阶乘，即 $6!$。

step 4 由于有重复的球，我们需要除以重复球的阶乘，即 $3!$（白球）和 $2!$（红球）。

step 5 因此，排列的总数是 $\frac{6!}{3!2!}$。

step 6 计算得到排列总数为 $\frac{720}{12} = 60$ 种。

# 教材對應閱讀章節及練習

- 6.1,6.2(~Example 9), 6.3, 6.4(~Theorem 2), 6.5(~Example 3)
- 對應習題: (可視個人情況定量)
  - 6.1: 1-46
  - 6.2: 1-4,15-16
  - 6.3: 1-40
  - 6.4: 3-9
  - 6.5: 1-16, 30-40