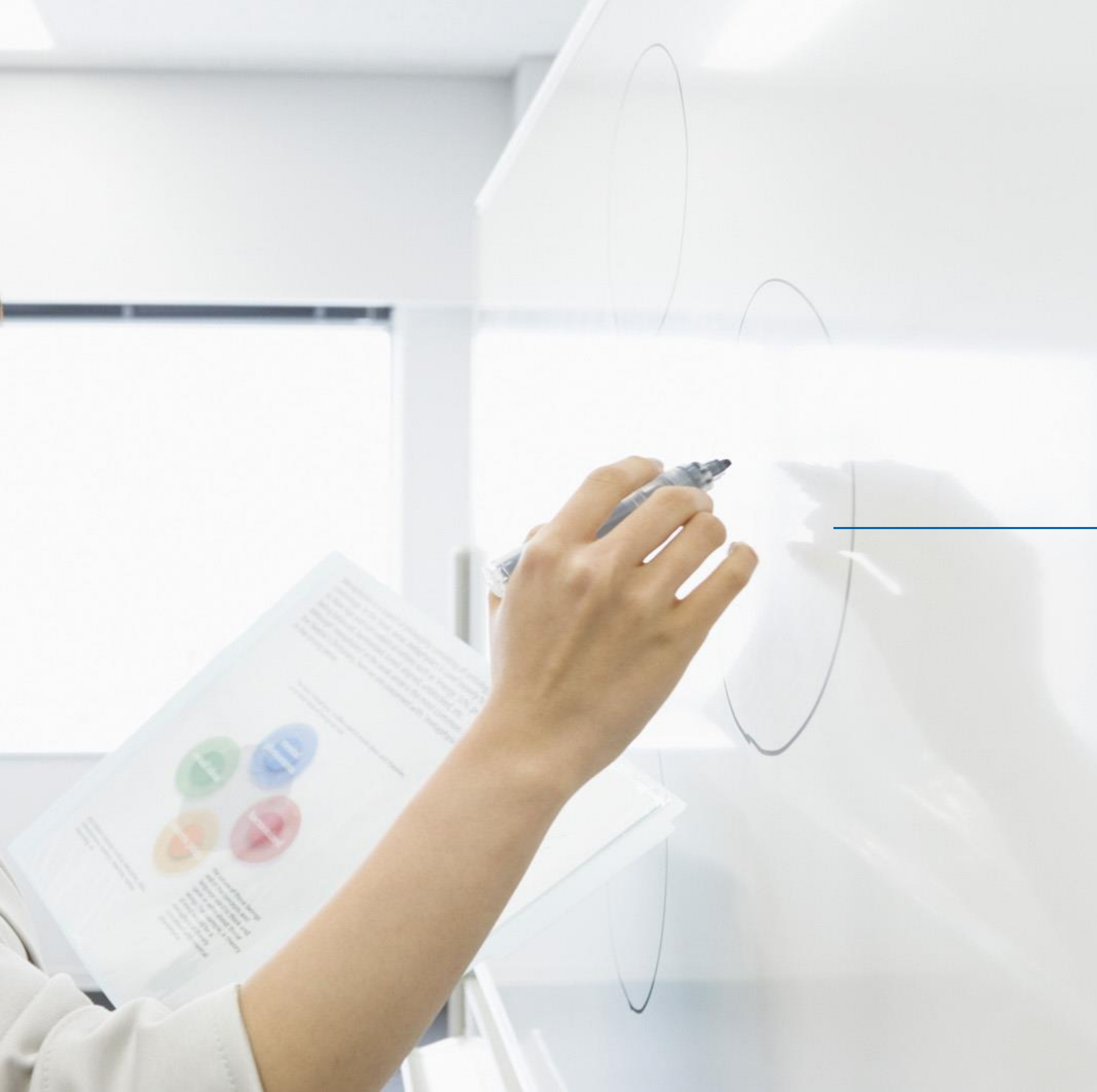

01

线性方程组与矩阵

《线性代数》

目录/Contents

目录/Contents

1.1 矩阵的概念及运算

一、矩阵的定义

由 m 个方程 n 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 构成的线性（即：一次）方程组可以表示为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

该线性方程组由常数 $a_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 和 $b_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 完全确定，

可以用一个 $m\times(n+1)$ 个数排成的 m 行 $n+1$ 列的数表

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

一、矩阵的定义

定义1 $m\times n$ 个数 $a_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $m\times n$ 矩阵，简记为 (a_{ij})，也记为 $(a_{ij})_{m\times n}$.

数 a_{ij} 位于矩阵 (a_{ij}) 的第 i 行第 j 列，称为矩阵的 (i,j) 元素，

其中 i 称为元素 a_{ij} 的行标， j 称为元素 a_{ij} 的列标.

一般地，常用英文大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\cdots$ 或字母 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$ 表示矩阵.

一、矩阵的定义

元素是实数的矩阵称为实矩阵， 元素是复数的矩阵称为复矩阵.

本书除特别指明外，都是指实矩阵.

01 OPTION

1×1 的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a)$ 就记为 $\boldsymbol{A}=a$.

02 OPTION

$1\times n$ 的矩阵 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为行矩阵，也称为 n 维行向量.

03 OPTION

$n\times 1$ 的矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 称为列矩阵，也称为 n 维列向量.

一、矩阵的定义

所有元素都是零的 $m\times n$ 矩阵称为零矩阵，记为 $O_{m\times n}$，或简记为 O .

$m\times n$ 矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 称为 n 阶方阵.

元素 $a_{ii}\ (i=1,2,\cdots,n)$ 所在的位置称为 n 阶方阵的主对角线.

一个 n 阶方阵主对角线上方的元素全为零，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

称该 n 阶方阵为下三角矩阵,其元素特点是：当 $i<j$ 时， $a_{ij}=0$.

一、矩阵的定义

类似地，有上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

其元素特点是：当 $i > j$ 时，$a_{ij} = 0$.

n 阶方阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

称为 n 阶对角矩阵，简称对角阵，记为 $diag(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

如果 n 阶对角矩阵 $diag(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 对角线上的元素全相等， 即 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$，则称其为数量矩阵.

当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ 时，这个数量矩阵就称为 n 阶单位矩阵，简称为单位阵，记为 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$ 即

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

定义2 两个矩阵的行数相等、列数也相等，则称这两个矩阵为同型矩阵.

如果两个同型矩阵

$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n}$ 中所有对应位置的元素都相等， 即 $a_{ij} = b_{ij}$，其中 $i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n$， 则称矩阵 A 和 $\boldsymbol{B}$ 相等，记为 $A = \boldsymbol{B}$.

二、矩阵的线性运算

1. 矩阵的加法

定义3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是两个同型矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，规定：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

矩阵的加法满足如下的运算规律： 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是任意三个 $m\times n$ 矩阵，则

1. 交换律： $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；
2. 结合律： $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；
3. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}_{m\times n}=\boldsymbol{O}_{m\times n}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

1. 矩阵的加法

对于矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，称矩阵 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 A 的负矩阵，记为 $-\boldsymbol{A}$.

显然，$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}_{m\times n}$.

定义矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 的减法为：

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=\left(a_{ij}-b_{ij}\right)_{m\times n}.$$

2. 矩阵的数乘

定义4 用一个数 k 乘矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的所有元素得到的矩阵 $(ka_{ij})_{m\times n}$ 称为矩阵的数乘，记为 kA 或者 Ak ，

即 $$kA = Ak = (ka_{ij})_{m\times n}.$$

矩阵的数乘运算满足如下的运算规律： 设 k, l 是任意两个数， A, B 是任意两个 $m\times n$ 矩阵，

1. $k(A+B)=kA+kB$
2. $(k+l)A=kA+lA$
3. $(kl)A=k(lA)=l(kA)$
4. $1A=A$
5. $(-1)A=-A$
6. $0A=O_{m\times n}$

矩阵的加法和矩阵的数乘统称为矩阵的线性运算.

2. 矩阵的数乘

例 1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&2\\1&3&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&2&3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 和 $2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

解

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&0&2\\1&3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-1&0+2&2+1\\1+0&3+2&4+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&5&7\end{pmatrix};$$

$$2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=2\begin{pmatrix}3&0&2\\1&3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times2&0\times2&2\times2\\1\times2&3\times2&4\times2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&2&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6+1&0-2&4-1\\2-0&6-2&8-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-2&3\\2&4&5\end{pmatrix}.$$

定义5

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 $m\times p$ 矩阵，矩阵 $B=(b_{ij})$ 是一个 $p\times n$ 矩阵，定义矩阵 A 与 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})$， 其中矩阵 $C=(c_{ij})$ 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 是由矩阵 A 的第 i 行元素 a_{i1}， a_{i2}， $\cdots$， a_{ip} 与矩阵 B 的第 j 列相应元素 b_{1j}， b_{2j}， $\cdots$， b_{pj} 乘积之和，即

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}.$$

例 2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&2&0\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&1\\2&1&-1\end{pmatrix}$ 的乘积 AB.

解 因为矩阵 A 是 2×3 矩阵，矩阵 B 是 3×3 矩阵， A 的列数等于 B 的行数，所以矩阵 A 与 B 可以相乘，乘积 AB 是一个 2×3 矩阵.

$$AB=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&1\\2&1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\times1+(-1)\times1+1\times2 & 3\times(-1)+(-1)\times1+1\times1 & 3\times0+(-1)\times1+1\times(-1)\\ 2\times1+2\times1+0\times2 & 2\times(-1)+2\times1+0\times1 & 2\times0+2\times1+0\times(-1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4&-3&-2\\4&0&2\end{pmatrix}.$$

例 3 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -6 & -3\end{pmatrix}$ 的乘积 AB 及 BA.

解

$$AB=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -6 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -4\\ 16 & 8\end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -6 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

注意： (1) 矩阵乘法不满足交换律，即在一般情况下， $AB\neq BA$.

(2) 尽管矩阵 A 与 B 满足 $AB=O$ ， 但是得不出 $A=O$ 或 $B=O$ 的结论.

三、矩阵的乘法

矩阵乘法满足下列运算规律（假设运算都是可行的）:

1. 结合律：$(AB)C=A(BC)$；
2. 矩阵乘法对矩阵加法的分配律：$A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$；
3. $(kA)B=A(kB)=k(AB)$；
4. $E_m A_{m\times n}=A_{m\times n}E_n=A_{m\times n}$；
5. $O_{m\times s}A_{s\times n}=O_{m\times n}$；$A_{m\times s}O_{s\times n}=O_{m\times n}$.

证明 （1）结合律

设矩阵 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times s$ 矩阵， 矩阵 $B=(b_{ij})$ 是一个 $s\times p$ 矩阵，矩阵 $C=(c_{ij})$ 是一个 $p\times n$ 矩阵.

由矩阵乘法的定义知，矩阵 $(A_{m\times s}B_{s\times p})C_{p\times n}$ 与 $A_{m\times s}(B_{s\times p}C_{p\times n})$ 都有意义，且都是 $m\times n$ 矩阵.

只需验证这两个矩阵在相应位置的元素相等即可.

矩阵 $A_{m\times s}B_{s\times p}$ 中第 i 行元素为 $\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{k1},\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{k2},\cdots,\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kp}$， 于是矩阵 $(A_{m\times s}B_{s\times p})C_{p\times n}$ 中 (i,j) 元素为

$$\left(\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{k1}\right)c_{1j}+\left(\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{k2}\right)c_{2j}+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kp}\right)c_{pj}=\sum_{t=1}^{p}\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kt}c_{tj}\text{.}$$

同理可以验证矩阵 $A_{m\times s}(B_{s\times p}C_{p\times n})$ 中 (i,j) 元素也是 $\sum_{t=1}^{p}\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kt}c_{tj}$， 所以矩阵乘法的结合律成立.

其余证明留给读者作为练习.

例 4 设有线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 称为该线性方程组的系数矩阵.

令 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 则有：$\boldsymbol{Ax} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$.

再根据矩阵相等的定义，该线性方程组可以用矩阵形式来表示：$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$

定义方阵的方幂如下： $A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k个}$ (这里 k 为正整数)，

并且规定：对非零方阵 A，有 $A^0 = E$.

方阵的方幂满足以下运算规律（这里 k, l 均为非负整数)：

$$A^kA^l = A^{k+l};\quad (A^k)^l = A^{kl}.$$

由于矩阵乘法不满足交换律，一般来讲 $(AB)^k \neq A^kB^k$， $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

只有当 A 与 B 可交换（即 $AB = BA$）时，公式

$(AB)^k = A^kB^k$, $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 等才成立.

三、矩阵的乘法

例 5 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，求 A^2 和 A^3.

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

四、矩阵的转置

定义 6 设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，把矩阵 A 的行换成同序数的列，

得到的 $n\times m$ 矩阵称为矩阵 A 的转置矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

矩阵的转置满足下面的运算规律（这里 k 为常数， $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵）：

1 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$

2 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

3 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

4 $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

例 6 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\1&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\\-1&1\end{pmatrix}$，求$(AB)^{\mathrm{T}}$.

解法一 $AB=\begin{pmatrix}2&-1&3\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&2\end{pmatrix}$， 所以$(AB)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-1&0\\-1&2\end{pmatrix}$.

解法二 $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\-1&2\end{pmatrix}$.

四、矩阵的转置

定义 7 n 阶方阵 A 如果满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，则称 A 为对称矩阵，如果满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，则称 A 为反对称矩阵.

由定义可知，

A 如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是对称矩阵，则 $a_{ij}=a_{ji}\ (i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$.

B 如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是反对称矩阵，

则 $a_{ij}=-a_{ji}\ (i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$，且 $a_{ii}=0\ (i=1,2,\cdots,n)$.

例 7 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，证明：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 都是对称矩阵.

证明 因为

$$\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\,,\quad \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\,,$$

所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 都是对称矩阵.

目录/Contents

目录/Contents

1.2 分块矩阵

一、分块矩阵的概念

二、分块矩阵的运算

一、分块矩阵的概念

对于行数和列数较高的矩阵 $\boldsymbol{A}$，运算时常用一些横线和竖线将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分划成若干个小矩阵，每一个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

一个矩阵的分块方式会有很多种，例如，

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right)$$

记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{21}=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{22}=\begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}.$$

一、分块矩阵的概念

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ \hdashline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right)$$

记为

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

其中

$$A_{11}=(a_{11},a_{12}),\quad A_{12}=(a_{13},a_{14}),\quad A_{13}=a_{15},$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},\quad A_{22}=\begin{pmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},\quad A_{23}=\begin{pmatrix} a_{25} \\ a_{35} \end{pmatrix}$$

$$A_{31}=(a_{41},a_{42}),\quad A_{32}=(a_{43},a_{44}),\quad A_{33}=a_{45}.$$

一、分块矩阵的概念

$$A=\left(\begin{array}{c:c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right)$$

记为

$$A=(A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}),$$

矩阵的按列分块

其中

$$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix},\quad A_{12}=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{pmatrix},\quad A_{13}=\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{pmatrix},\quad A_{14}=\begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \end{pmatrix},\quad A_{15}=\begin{pmatrix} a_{15} \\ a_{25} \\ a_{35} \\ a_{45} \end{pmatrix}.$$

一、分块矩阵的概念

对于线性方程组 $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

按列分块

$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，

增广矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

按列分块

$A = (A|\beta)$，或 $A = (A, \beta) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta)$，

其中 $\alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ 表示 A 的第 j 列，$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

（1）分块矩阵加（减）运算：

设 A、B 都是 $m\times n$ 矩阵，对两个矩阵的行和列采用相同的分块方式，不妨设

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix},$$

其中 A_{ij} 和 B_{ij} 的行数相同、列数相同，则有

$$A\pm B=\begin{pmatrix} A_{11}\pm B_{11} & A_{12}\pm B_{12} & \cdots & A_{1t}\pm B_{1t} \\ A_{21}\pm B_{21} & A_{22}\pm B_{22} & \cdots & A_{2t}\pm B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1}\pm B_{s1} & A_{s2}\pm B_{s2} & \cdots & A_{st}\pm B_{st} \end{pmatrix}.$$

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\2&0&0&0\\1&1&0&3\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}-2&0&1&0\\0&-1&0&1\\1&1&-4&2\\2&1&3&-1\end{pmatrix}$ 的和 $A+B$.

解 将矩阵 A 与 B 写成分块矩阵如下:

$$A=\left(\begin{array}{c:ccc}1&0&0&0\\0&0&0&0\\2&0&0&0\\ \hdashline 1&1&0&3\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\A_2&A_3\end{pmatrix},\quad B=\left(\begin{array}{c:ccc}-2&0&1&0\\0&-1&0&1\\1&1&-4&2\\ \hdashline 2&-1&0&-3\end{array}\right)=\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{pmatrix}$$

于是,
$$A+B=\begin{pmatrix}A_1&O\\A_2&A_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1+B_1&O+B_2\\A_2+B_3&A_3+B_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1+B_1&B_2\\A_2+B_3&A_3+B_4\end{pmatrix}.$$

而
$$A_1+B_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix},\quad A_2+B_3=1+2=3,\quad A_3+B_4=(1,0,3)+(-1,0,-3)=(0,0,0),$$

所以
$$A+B=\left(\begin{array}{c|ccc}-1&0&1&0\\0&-1&0&1\\3&1&-4&2\\ \hline 3&0&0&0\end{array}\right).$$

(2) 分块矩阵的数乘运算:

矩阵的分块方式没有特别规定，对任意的分块 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}$，都有

$$kA=\begin{pmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1t} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ kA_{s1} & kA_{s2} & \cdots & kA_{st} \end{pmatrix}.$$

在矩阵的数乘运算中，对矩阵的分块可以根据矩阵本身的特点而定.

（3）分块矩阵的乘法：

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $s\times n$ 矩阵，要求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列分块方式与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行分块方式保持一致，而对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行分块方式及矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列分块方式没有任何要求和限制.

不妨设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1k} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{t1} & \boldsymbol{A}_{t2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{tk} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1u} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2u} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{k1} & \boldsymbol{B}_{k2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{ku} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{i1},\boldsymbol{A}_{i2},\cdots,\boldsymbol{A}_{ik}$ 的列数分别等于 $\boldsymbol{B}_{1j},\boldsymbol{B}_{2j},\cdots,\boldsymbol{B}_{kj}$ 的行数，则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1u} \\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22} & \cdots & \boldsymbol{C}_{2u} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{C}_{t1} & \boldsymbol{C}_{t2} & \cdots & \boldsymbol{C}_{tu} \end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{C}_{ij}=\sum_{t=1}^{k}\boldsymbol{A}_{it}\boldsymbol{B}_{tj}=\boldsymbol{A}_{i1}\boldsymbol{B}_{1j}+\boldsymbol{A}_{i2}\boldsymbol{B}_{2j}+\cdots+\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}.$$

例 2 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&1&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\-2&1&0&0\\1&0&0&-1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}$，求 AB .

解 把矩阵 A 与 B 如下分块：$A=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&0\\-1&1&0&1\\\hline -1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11}&E\\-E&O\end{pmatrix}$，$B=\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&0&0\\-2&1&0&0\\\hline 1&0&0&-1\\0&1&-1&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}B_{11}&O\\E&B_{22}\end{pmatrix}$.

$$AB=\begin{pmatrix}A_{11}&E\\-E&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&O\\E&B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}+E^2&A_{11}O+EB_{22}\\-EB_{11}+OE&-EO+OB_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}+E&B_{22}\\-B_{11}&O\end{pmatrix}.$$

而 $A_{11}B_{11}+E=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-3&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\-3&0\end{pmatrix}$，$-B_{11}=\begin{pmatrix}-1&-2\\2&-1\end{pmatrix}$，

所以 $AB=\left(\begin{array}{cc|cc}2&2&0&-1\\-3&0&-1&0\\\hline -1&-2&0&0\\2&-1&0&0\end{array}\right)$.

（4）分块矩阵的转置：

$$\text{设 } A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{tk} \end{pmatrix}, \qquad \text{则 } A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{t1}^{\mathrm{T}} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{t2}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1k}^{\mathrm{T}} & A_{2k}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{tk}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

（5）分块对角阵

设 A 是 n 阶方阵，若 A 的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块，且这些非零子块都是方阵，而其余子块都是零矩阵，

$$\text{即} \qquad A=\begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_t \end{pmatrix},$$

其中 $A_i\ (i=1,2,\cdots,t)$ 都是方阵， 这样的分块阵称为分块对角阵.

例 3 设 $\boldsymbol{e}_i=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)^{\mathrm{T}}$ 为第 i 个分量为 1 而其余元素全为 0 的列向量，则 n 阶单位矩阵可以分块为 $\boldsymbol{E}_n=(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n)$. 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{A}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{A}_n)$，其中 $\boldsymbol{A}_k$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 k 个列向量，则有

$$(\boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{A}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{A}_n)=\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n),$$

从而有
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_k=\boldsymbol{A}_k\ (k=1,2,\cdots,n),$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_k$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 k 列.

同理，$\boldsymbol{e}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 k 行. 易知 $\boldsymbol{e}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_l=a_{kl}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 (k,l) 元素.

例 4 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，如果对任意的 $n\times 1$ 矩阵 $\boldsymbol{\alpha}$ 都有 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{O}$，证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

证明 由矩阵 $\boldsymbol{\alpha}$ 的任意性，可选取 $\boldsymbol{\alpha}$ 分别等于 $\boldsymbol{e}_j\ (j=1,2,\cdots,n)$，根据例 3 则有

$$\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{Ae}_j=\boldsymbol{A}_j=\boldsymbol{O}\ (j=1,2,\cdots,n),$$

所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

目录/Contents

目录/Contents

1.3 线性方程组与矩阵的初等变换

例1 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

解

▶ 线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

▶ 对应的增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

一、矩阵的初等变换

- 交换方程组的第一个方程和第二个方程

1

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 \qquad = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

- 对应的增广矩阵正好是交换第一行和第二行

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- 把方程组的第一个方程乘以-2 加到第二个方程和第三个方程上

2

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ \qquad 3x_2 - 2x_3 = -5, \\ \qquad 3x_2 - 3x_3 = -9. \end{cases}$$

- 对应的增广矩阵正好是把第一行的每个元素乘以 -2分别加到第二行、第三行对应位置的元素上

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

一、矩阵的初等变换

- 第二个方程乘以 -1加到第三个方程上，第三个方程乘以 -1

3

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_2 - 2x_3 = -5, \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

- 对应的增广矩阵正好是把第二行的每个元素乘以-1加到第三行对应位置的元素上，第三行每个元素乘以 -1

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- 第三个方程乘以2 加到第二个方程上，第二个方程乘以 $\frac{1}{3}$

4

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

- 对应的增广矩阵正好是把第三行的每个元素乘以2加到第二行对应位置的元素上，第二行每个元素乘以 $\frac{1}{3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵

- 第三个方程乘以-1加到第一个方程上，第二个方程乘以1加到第一个方程上

5

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

- 对应的增广矩阵正好是把第三行的每个元素乘以-1，第二行的每个元素乘以 1，都加到第一行对应位置的元素上

行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

最后一个方程组有唯一解，它和原方程组是同解方程组，所以原方程组有唯一解：

$x_1 = 1$ ， $x_2 = 1$， $x_3 = 4$

一、矩阵的初等变换

上面解方程组的过程中，我们主要用到了下列三种方程之间的变换：

（1）交换两个方程；
（2）一个方程乘上一个非零数；
（3）一个方程乘上一个非零数加到另一个方程上.

而从此例看到，对方程组实施上面三种变换，等价于对方程组的增广矩阵的行实施了类似地三种变换，即交换两行、某一行乘以一个非零数（即某一行的每个元素都乘以同一个数）、某一行的 k 倍加到另一行上（即某一行的每个元素都乘以数 k 再加到另一行的对应元素上）.

一、矩阵的初等变换

由此可见，对矩阵实施这些变换是十分必要的，为此，我们引入如下定义：

定义1 下面三种矩阵的变换：称为矩阵的初等行变换

1 交换矩阵的某两行，我们用 $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换矩阵的第 i、j 两行；

2 矩阵的某一行乘以非零数，用 $k\,r_i$ 表示矩阵的第 i 行元素乘以非零数 k；

3 将矩阵的某一行的倍数加到另一行，用 $r_j + k\,r_i$ 表示将矩阵第 i 行的 k 倍加到第 j 行.

一、矩阵的初等变换

将上面定义中的“行”换成“列”（记号由“r”换成“c”），就得到了矩阵的初等列变换的定义.

矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的初等变换.

显然，三种初等行（列）变换都是可逆的（简单的说，就是变换可以还原的），它们的逆变换分别为：

变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换就是其本身；

变换 $k\,r_i$ 的逆变换是 $\frac{1}{k} r_i$；

变换 $r_j + k\,r_i$ 的逆变换是 $r_j + (-k) r_i$.

在例 1 中，线性方程组(3)、(4)、(5)对应的增广矩阵有一个共同特点，就是：可画一条阶梯线，线的下方全为零；每个台阶只有一行，台阶数就是非零行的行数；每一非零行的第一个非零元素位于上一行首元的右侧，

即 $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

这样的矩阵，我们称为行阶梯形矩阵.

对于最后一个矩阵，它的非零行的第一个非零元素全为1，并且这些非零元素所在的列的其余元素全为零，这样的阶梯形矩阵，我们称为行最简形矩阵.

例2

01 OPTION

矩阵$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$不是行阶梯形矩阵，因为第一行首元$2$下方有非零元素$4$；

02 OPTION

矩阵$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$也不是行阶梯形矩阵，因为第二行首元$3$不在上一行首元$1$的右侧；

03 OPTION

矩阵$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$也不是行阶梯矩阵，因为全零行（第二行）下面有非全零行（第三行）；

04 OPTION

矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$是行阶梯形矩阵，并且是行最简形矩阵.

例3

试用矩阵的初等行变换将矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-3&1&-1&2\\2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\-1&4&-3&2&2\end{pmatrix}$ 先化为行阶梯形矩阵，再进一步化为行最简形矩阵.

解

$$\begin{pmatrix}2&-3&1&-1&2\\2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\-1&4&-3&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\2&-3&1&-1&2\\-1&4&-3&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_1]{\substack{r_2+(-1)r_3\\ r_3+(-2)r_1}}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&2&-2&2&0\\0&-5&5&-3&-6\\0&5&-5&3&6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_3]{\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&-5&5&-3&-6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+5r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&2&-6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵

一、矩阵的初等变换

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+(-1)r_3]{r_2+(-1)r_3}\begin{pmatrix}1&1&-2&0&7\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行最简形矩阵

对于行最简形矩阵再实施初等列变换，可变成一种形状更简单的矩阵．例如，将上面的行最简形矩阵再实施初等列变换

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3+c_2]{c_3+c_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0&4\\0&1&0&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[c_5+3c_4]{\substack{c_5+(-4)c_1\\c_5+(-3)c_2}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3\leftrightarrow c_4}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=F$$

最后一个矩阵 称为矩阵 的标准形，写成分块矩阵的形式，则有 $F=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_3&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$

一、矩阵的初等变换

对于一般的矩阵，我们有下面的结论：

01 OPTION

任意一个 $m \times n$ 矩阵总可以经过若干次初等行变换化为行阶梯形矩阵；

02 OPTION

任意一个 $m \times n$ 矩阵总可以经过若干次初等行变换化为行最简形矩阵；

03 OPTION

任意一个 $m \times n$ 矩阵总可以经过若干次初等变换化为它标准形 $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$，

04 OPTION

其中 r 为行阶梯形矩阵中非零行的行数.

定义 2 若矩阵 A 经过有限次初等行（列）变换化为矩阵 B，则称矩阵 A 与矩阵 B 行（列）等价；若矩阵 A 经过有限次初等变换化为矩阵 B，则称矩阵 A 与矩阵 B 等价.

我们用 $A \overset{r}{\sim} B$ 表示矩阵 A 与矩阵 B 行等价，用 $A \overset{c}{\sim} B$ 表示矩阵 A 与矩阵 B 列等价，用 $A \sim B$ 表示矩阵 A 与矩阵 B 等价.

注：矩阵间的行（列）等价以及矩阵间的等价是一个等价关系， 即满足：

1 自反性：任意矩阵 A 与自身等价；

2 对称性：若矩阵 A 与矩阵 B 等价，则矩阵 B 与矩阵 A 等价；

3 传递性：若矩阵 A 与矩阵 B 等价，矩阵 B 与矩阵 C 等价，则矩阵 A 与矩阵 C 等价.

二、求解线性方程组

对于 n 元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$ ，

如果 $b_i\ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 不全为零，则该线性方程组称为 n 元非齐次线性方程组.

如果 $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ 即形如 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$ ，则该线性方程组称为 n 元齐次线性方程组.

显然，齐次线性方程组一定有解 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$，这个解称为齐次线性方程组的零解.

如果齐次线性方程组有唯一解，则这个唯一解必定是零解.

当齐次线性方程组有无穷多解时，我们称齐次线性方程组有非零解.

解 n 元非齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$ 的具体步骤为：

01 OPTION

写出线性方程组的增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$；

02 OPTION

对 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 实施初等行变换，化为行最简形矩阵 $\tilde{\boldsymbol{R}}$;

03 OPTION

写出以 $\tilde{\boldsymbol{R}}$ 为增广矩阵的线性方程组；

04 OPTION

以首元为系数的未知量作为固定未知量，留在等号的左边，其余的未知量作为自由未知量，移到等号右边，并令自由未知量为任意常数，从而求得线性方程组的解.

例4 解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ \quad\;\; x_2 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 \qquad\quad - 4x_4 = 3. \end{cases}$$

解 对该线性方程组的增广矩阵实施初等行变换，

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+(-1)r_1]{r_3+(-2)r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\left(-\frac{1}{2}\right)r_4]{r_3+(-1)r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+(-2)r_3]{r_2+(-1)r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而原方程组等价于 $\begin{cases} x_1 \quad\quad - 3x_4 = 3, \\ \quad x_2 \quad + x_4 = 0, \\ \quad\quad x_3 + x_4 = -1, \\ \quad\quad\quad 0 = 0. \end{cases}$ 令 $x_4 = c$，移项，

得原方程组的解为: $\begin{cases} x_1 = 3 + 3c, \\ x_2 = -c, \\ x_3 = -1 - c, \\ x_4 = c \end{cases}$，其中 c 为任意常数

例5 解方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 = -2, \\ 7x_1 + 2x_2 - 21x_3 = 13. \end{cases}$$

解 对该线性方程组的增广矩阵实施初等行变换，得：

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & -2 \\ 7 & 2 & -21 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+(-7)r_1]{r_2+(-3)r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & -5 \\ 0 & -5 & -7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

从而原方程组等价于
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 5x_2 + 7x_3 = -5 \\ 0 = 1 \end{cases},$$

最后一个方程为矛盾方程，所以原方程组无解.

二、求解线性方程组

对于 n 元非齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$ ，我们有下列命题:

01 OPTION 该线性方程组有解的充分必要条件是首元不出现在 $\boldsymbol{R}$ 的最后一列;

02 OPTION 该线性方程组有唯一解的充分必要条件是首元不出现在 $\boldsymbol{R}$ 的最后一列，且首元的个数等于未知量的个数;

03 OPTION 该线性方程组有无穷多解的充分必要条件是首元不出现在 $\boldsymbol{R}$ 的最后一列，且首元的个数小于未知量的个数.

证明

只需证明条件的充分性，因为(1)、(2)、(3)的必要性可分别由(2)、(3)，(1)、(3)和(1)、(2)的充分性利用反证法得到.

对线性方程组的增广矩阵 $\tilde{A}$ 实施初等行变换，化为行最简形矩阵 $\boldsymbol{R}$ ，为了书写方便，不妨设 $\boldsymbol{R}$ 为:

$$\tilde{\boldsymbol{R}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{21} & \cdots & c_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r1} & \cdots & c_{r,n-r} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 如果首元出现在最后一列，即 $\boldsymbol{d}_{r+1}=1$，于是 $\tilde{\boldsymbol{R}}$ 的第 r 行对应矛盾方程 $0=1$，从而线性方程组无解.

(2) 当 $\boldsymbol{d}_{r+1}=0$ （或 $\boldsymbol{d}_{r+1}$ 不出现），且首元的个数等于未知量的个数时， $\tilde{\boldsymbol{R}}$ 变为：

$$\tilde{\boldsymbol{R}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & d_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\tilde{\boldsymbol{R}}$ 对应的方程组为： $\begin{cases} x_1 = d_1, \\ x_2 = d_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = d_n. \end{cases}$，从而线性方程组有唯一解.

(3) 当 $\boldsymbol{d}_{r+1}=0$ （或 $\boldsymbol{d}_{r+1}$ 不出现），且首元的个数小于未知量的个数时， $\tilde{\boldsymbol{R}}$ 变为：

$$\tilde{\boldsymbol{R}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{21} & \cdots & c_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r1} & \cdots & c_{r,n-r} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\tilde{R}$ 对应的方程组为：
$$\begin{cases} x_1 = -c_{11}x_{r+1} - c_{12}x_{r+2} - c_{1,n\text{-}r}x_n + d_1, \\ x_2 = -c_{21}x_{r+1} - c_{22}x_{r+2} - c_{2,n\text{-}r}x_n + d_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_r = -c_{r1}x_{r+1} - c_{r2}x_{r+2} - c_{r,n\text{-}r}x_n + d_r. \end{cases},$$

令自由未知数 $x_{r+1} = k_1, x_{r+2} = k_2, \cdots, x_n = k_{n\text{-}r}$，即得线性方程组的含有 $n-r$ 个参数的解

$$\begin{cases} x_1 = -c_{11}k_1 - c_{12}k_2 - c_{1,n\text{-}r}k_{n-r} + d_1, \\ x_2 = -c_{21}k_1 - c_{22}k_2 - c_{2,n\text{-}r}k_{n-r} + d_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_r = -c_{r1}k_1 - c_{r2}k_2 - c_{r,n\text{-}r}k_{n-r} + d_r, \\ x_{r+1} = k_1, \\ x_{r+2} = k_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = k_{n\text{-}r}. \end{cases}$$

从而线性方程组有无穷多解.

二、求解线性方程组

例6 解线性方程组 $\begin{cases} 3x_1+2x_2+5x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+6x_3=0, \\ 2x_1+5x_3=0. \end{cases}$

解 对该线性方程组的系数矩阵实施初等行变换，得：

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+(-1)r_2]{\frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 3 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+(-3)r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+\frac{5}{8}r_3]{r_2+\left(-\frac{3}{8}\right)r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\left(-\frac{1}{4}\right)r_3]{\left(-\frac{1}{2}\right)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以该线性方程组只有零解.

例7 解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

解 对该线性方程组的系数矩阵实施初等行变换，得：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 7 \\ 4 & -6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+(-4)r_1]{\substack{r_2+(-2)r_1 \\ r_3+(-3)r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -10 & 10 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -10 & 10 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}r_3]{r_4+2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_4]{\left(-\frac{1}{10}\right)r_4}\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&-3&3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+3r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+(-1)r_3]{r_4+r_3}\begin{pmatrix}1&1&-2&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

从而原方程组等价于$\begin{cases}x_1-x_3=0,\\x_2-x_3=0,\\x_4=0.\end{cases}$

令 $x_3=c$，移项，得原方程组的解为：$\begin{cases}x_1=c,\\x_2=c,\\x_3=c,\\x_4=0.\end{cases}$，其中 c 为任意常数.

目录/Contents

目录/Contents

1.4 初等矩阵与矩阵的逆矩阵

1. 逆矩阵的定义

定 义 1

设 A 为 n 阶方阵，如果存在 n 阶方阵 B 使得

$$AB = BA = E,$$

其中 E 为 n 阶单位方阵，则称矩阵 A 是可逆的，矩阵 B 称为 A 的逆矩阵；否则称 A 是不可逆的.

如果矩阵 A 可逆，则 A 的逆矩阵一定是唯一的.

这是因为， 若矩阵 B 、 C 都满足 $AB = BA = E$， $AC = CA = E$， 于是 $C = CE = C(AB) = (CA)B = EB = B$.

所以 A 的逆矩阵一定是唯一的. A 的逆矩阵记为 A^{-1}.

2. 逆矩阵的性质

1 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，并且 $(A^{-1})^{-1}=A$；

2 若矩阵 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 都可逆，则它们的乘积 $A_1A_2\cdots A_s$ 也可逆，并且 $(A_1A_2\cdots A_s)^{-1}=A_s^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$；

3 若 A 可逆，则 A^{T} 也可逆，并且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$；

4 若 A 可逆并且数 $k\neq 0$，则 kA 也可逆，并且 $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$.

证明　我们用逆矩阵的定义验证性质(3)，其余性质留给读者自己验证.

由 A 可逆推出 A^{-1} 存在，且 $AA^{-1}=A^{-1}A=E$，于是有 $(AA^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{-1}A)^{\mathrm{T}}=E^{\mathrm{T}}$.

由矩阵转置的运算规律得：$(A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}=E$. 所以 $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

一、方阵的逆矩阵

例1 若矩阵 A 有全零行（全零列），那么矩阵 A 一定不可逆.

证明　假设矩阵 A 的第 i 行是全零行，则对任何一个矩阵 B，矩阵 AB 的第 i 行总是全为零，从而不存在矩阵 B 使得 $AB = BA = E$， 所以矩阵 A 不可逆.

类似可证，若矩阵 A 有全零列，那么矩阵 A 一定不可逆.

例2

设 $A^k=O$（k 为正整数），证明：$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

证明　因为 $A^k=O$，于是

$$(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=E(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})-A(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$$

$$=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}-A-A^2-\cdots-A^{k-1}-A^k=E-A^k=E,$$

$$(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})(E-A)=(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})E-(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})A$$

$$=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}-A-A^2-\cdots-A^{k-1}-A^k=E-A^k=E,$$

所以 $E-A$ 可逆，且 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

定 义 2

对 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 实施一次初等变换得到的矩阵称为 n 阶初等矩阵.

由于初等变换有三种, 对 n 阶单位矩阵$\boldsymbol{E}$ 实施一次初等变换得到的初等矩阵也有三类:

(1)

交换单位阵 E 的第 i 行和第j 行，或交换 的第 i 列和第j 列，得到的初等矩阵记为$\boldsymbol{E}(i, j)$. 即

$$\boldsymbol{E}(i,j)=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&&1&&\\&&&\ddots&&&\\&&1&&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \text{第 } j \text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}$$

二、初等矩阵

(2)

用非零的数 k 乘单位阵 E 的第 i 行或第 i 列得到的初等矩阵记为 $E(i(k))$，即

$$E(i(k))=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&k&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\\\\\\text{第 } i \text{ 行}\\\\\\\\\end{array}$$

(3)

将单位阵 E 的第 i 行乘以 k 加到第 j 行（或将单位阵 E 的第 i 列乘以 k 加到第 i 列）得到的矩阵记为 $E(i(k),j)$. 即

$$E(i(k),j)=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&0&&\\&&&\ddots&&&\\&&k&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\\\text{第 } i \text{ 行}\\\\\text{第 } j \text{ 行}\\\\\\\end{array}$$

二、初等矩阵

命题1

初等矩阵都是可逆的，并且初等矩阵的逆矩阵仍为同一类型的初等矩阵， 即：

$$\boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)\,,\qquad \boldsymbol{E}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{E}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right),\qquad \boldsymbol{E}(i(k),j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i(-k),j)$$

证明 直接计算得:

$$\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{E}(i,j)=\boldsymbol{E}\,,\ \boldsymbol{E}(i(k))\boldsymbol{E}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)=\boldsymbol{E}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)\boldsymbol{E}(i(k))=\boldsymbol{E}\,,\ \boldsymbol{E}(i(k),j)\boldsymbol{E}(i(-k),j)=\boldsymbol{E}(i(-k),j)\boldsymbol{E}(i(k),j)=\boldsymbol{E}\,.$$

所以

$$\boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)\,,\quad \boldsymbol{E}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{E}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right),\quad \boldsymbol{E}(i(k),j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i(-k),j)\,.$$

命题2

设$\boldsymbol{A}$是一个$m\times n$矩阵，对$\boldsymbol{A}$施行一次初等行变换，相当于在$\boldsymbol{A}$的左边乘以相应的m阶初等矩阵；对$\boldsymbol{A}$施行一次初等列变换，相当于在$\boldsymbol{A}$的右边乘以相应的n阶初等矩阵.

证明　只需理解初等变换的意义，然后用矩阵乘法直接验证即可.

具体验证留给读者.

例3 设 $A=(a_{ij})$ 是一个三阶方阵，试求一个 3 阶可逆矩阵 P，使得

$$PA=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+ka_{11} & a_{32}+ka_{12} & a_{33}+ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

解 矩阵 PA 可看成是先对矩阵 $A=(a_{ij})$ 实施一次交换矩阵 A 的第 2 行和第 3 行的变换，再实施一次矩阵 A 的第 1 行乘以数 k 加到第 2 行的变换所得到的.

这相当于先后用初等矩阵 $E(2,3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$、$E(1(k),2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 左乘矩阵 A，即 $PA=E(1(k),2)E(2,3)A$，

所以

$$P=E(1(k),2)E(2,3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

例3 设 $A=(a_{ij})$ 是一个三阶方阵，试求一个 3 阶可逆矩阵 P，使得

$$PA=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+ka_{11} & a_{32}+ka_{12} & a_{33}+ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

解 另外，矩阵 PA 也可看成是先对矩阵 $A=(a_{ij})$ 实施一次矩阵 A 的第 1 行乘以数 k 加到第 3 行的变换，再实施一次交换矩阵 A 的第 2 行和第 3 行的变换所得到的.

即 $PA=E(2,3)E(1(k),3)A$，

所以

$$P=E(2,3)E(1(k),3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

定理 1 下面命题互相等价:

1. n 阶方阵 A 可逆;
2. 方阵 A 行等价于 n 阶单位矩阵 E;
3. 方阵 A 可表为一些初等方阵的乘积.

证明 为了证明的方便，我们采取 $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$ 的方式来证明.

$(1) \Rightarrow (2)$：

方阵 A 经过若干次初等行变换可化为行最简形矩阵 R .

这相当于存在若干个初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ ， 使得 $P_s \cdots P_2 P_1 A = R$.

由于初等矩阵都可逆， 若 A 可逆，则 $P_s \cdots P_2 P_1 A = R$ 可逆，从而行最简形矩阵 R 没有全零行，

这迫使 $R = E$ ， 即 $P_s \cdots P_2 P_1 A = E$ ，

所以方阵 A 行等价于 n 阶单位矩阵 E .

$(2) \Rightarrow (3)$：

若方阵 A 行等价于 n 阶单位矩阵 E，则存在若干个初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$，使得 $P_s \cdots P_2 P_1 A = E$.

由于初等矩阵都可逆且其逆矩阵仍为初等矩阵， 记 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ 的逆矩阵分别为 $P_1^{-1}, P_2^{-1}, \cdots, P_s^{-1}$，

于是 $P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1} (P_s \cdots P_2 P_1 A) = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1} E$，

即 $A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1}$. 也就是说， A 可表为初等方阵 $P_1^{-1}, P_2^{-1}, \cdots, P_s^{-1}$ 的乘积.

$(3) \Rightarrow (1)$：

设方阵 $A = P_1 P_2 \cdots P_s$， 其中 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ 均为初等矩阵， 由于初等矩阵均可逆，

于是它们的乘积 $A = P_1 P_2 \cdots P_s$ 也可逆.

由定理 1 的证明可知，

若 n 阶方阵 A 可逆，则存在一个可逆阵 $P = P_s \cdots P_2 P_1$，使得 $PA = E$.

于是，$$A^{-1} = \left(P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1}\right)^{-1} = P_s \cdots P_2 P_1 = P.$$

构造一个分块矩阵 $(A|E)$，做分块矩阵的乘法：

$$P(A|E) = (PA|PE) = (E|P) = (E|A^{-1}),$$

上式等价于对分块矩阵 $(A|E)$ 实施了若干次初等行变换，当 A 变成 E 时，E 就变成了 A^{-1}.

判别矩阵 A 是否可逆，并在可逆时求 A^{-1} 的具体步骤为：

01 OPTION

首先构造分块矩阵 $(A|E)$；

02 OPTION

对矩阵 $(A|E)$ 实施初等行变换，将 $(A|E)$ 化为行最简形矩阵；

03 OPTION

如果 A 不能行等价于 E，则矩阵 A 不可逆；若 A 能行等价于 E，则 A 可逆，且 E 就行等价于 A^{-1} .

例4 判断下列矩阵是否可逆？若可逆则求其逆矩阵.

$$(1)\begin{pmatrix}1&1&-2\\2&-1&-1\\3&6&-9\end{pmatrix}\qquad(2)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix}$$

解 (1)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-2&1&0&0\\2&-1&-1&0&1&0\\3&6&-9&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+(-3)r_1]{r_2+(-2)r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-2&1&0&0\\0&-3&3&-2&1&0\\0&3&-3&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-2&1&0&0\\0&-3&3&-2&1&0\\0&0&0&-5&1&1\end{array}\right),$$

由于阶梯阵$\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&0&0\end{pmatrix}$最后一行全为零，所以矩阵$\begin{pmatrix}1&1&-2\\2&-1&-1\\3&6&-9\end{pmatrix}$不可逆.

例4 判断下列矩阵是否可逆？若可逆则求其逆矩阵.

$$(1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix} \qquad (2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

解 **(2)**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-1)r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3+(-2)r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1+(-1)r_3]{r_2+(-2)r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&2&-1\\0&1&0&-3&5&-2\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+(-1)r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&-3&1\\0&1&0&-3&5&-2\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right)$$

所以矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix}$ 可逆，并且 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3&-3&1\\-3&5&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}$

利用逆矩阵还可以求解矩阵方程 $AX=B$、$XA=B$ 和 $AXB=C$.

若矩阵 A 可逆，则有

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B\Rightarrow\left(A^{-1}A\right)X=A^{-1}B\Rightarrow X=A^{-1}B.$$

$$(XA)A^{-1}=BA^{-1}\Rightarrow X\left(AA^{-1}\right)=BA^{-1}\Rightarrow X=BA^{-1}.$$

若矩阵 A、B 可逆均可逆，则有

$$A^{-1}(AXB)B^{-1}=A^{-1}CB^{-1}\Rightarrow\left(A^{-1}A\right)X\left(BB^{-1}\right)=A^{-1}CB^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}.$$

也可以用初等行变换的方法解矩阵方程.

用初等行变换解矩阵方程 $AX = B$ 的具体步骤为：

01
OPTION
首先构造分块矩阵 $(A|B)$；

02
OPTION
对矩阵 $(A|B)$ 实施初等行变换，将 $(A|B)$ 化为行最简形矩阵；

03
OPTION
若 A 能行等价于 E，则 A 可逆，且 B 就变成了 $X = A^{-1}B$.

例5 解下列矩阵方程：(1) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{X} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解 (1)

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} -1 & 4 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)r_1]{r_2+(-2)r_1} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -4 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)r_2]{r_1+(-4)r_2} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 10 & -7 & 29 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 8 \end{array}\right)$$

所以 $\boxed{\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 29 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}}$

(2) 对于方程 $XA=B$，可以先用初等行变换求解方程 $A^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}$，再转置求出 X.

$$\left(A^{\mathrm{T}}\middle|B^{\mathrm{T}}\right)=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-2&-1&1\\0&-2&-1&1&2\\-2&1&5&0&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_1}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-2&-1&1\\0&-2&-1&1&2\\0&1&1&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_2+2r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-2&-1&1\\0&1&1&-2&1\\0&0&1&-3&4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1+2r_3]{r_2+(-1)r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&-7&9\\0&1&0&1&-3\\0&0&1&-3&4\end{array}\right)$$

所以 $X^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-7&9\\1&-3\\-3&4\end{pmatrix}$，从而 $X=\begin{pmatrix}-7&1&-3\\9&-3&4\end{pmatrix}$.

(3) 此题是 $AXB=C$ 类型的方程. 令 $XB=Y$，先求解方程 $AY=C$，然后求解方程 $B^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}=Y^{\mathrm{T}}$，最后转置求出 X .

$$(A|C)=\left(\begin{array}{cc|ccc}1&1&1&-1&0\\-1&-2&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+r_1}\left(\begin{array}{cc|ccc}1&1&1&-1&0\\0&-1&0&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow[(-1)r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&1&-2&1\\0&1&0&1&-1\end{array}\right),$$

于是得 $Y=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$. 再由

$$(B^{\mathrm{T}}|Y^{\mathrm{T}})=\left(\begin{array}{ccc|cc}-1&0&1&1&0\\1&1&0&-2&1\\0&-1&-2&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|cc}-1&0&1&1&0\\0&1&1&-1&1\\0&-1&-2&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[(-1)r_3]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}-1&0&1&1&0\\0&1&1&-1&1\\0&0&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2+(-1)r_3]{\substack{r_1+(-1)r_3\\(-1)r_1}}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&1\\0&0&1&0&0\end{array}\right)$$

可知 $X^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\\0&0\end{pmatrix}$，从而 $X=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

定理 2 对于任意 $m\times n$ 矩阵 A，均存在一个 m 阶可逆方阵 P 和一个 n 可逆方阵 Q，使得 PAQ 为标准型.