# 關係 Relations

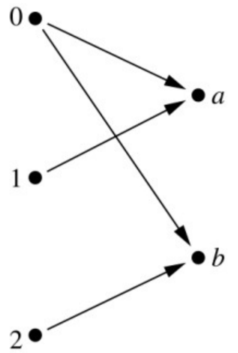
第九章

# Outline

- 關係及其性質 Relations and Their Properties
- 關係的表示 Representing Relations
- 等價關係 Equivalence Relations
- 偏序 Partial Orderings

# + 關係 Relations (9.1)

- 對於集合 $A$、$B$，一個從 $A$ 到 $B$ 的二元關係 (binary relation)，$R$ 是 $A \times B$ 的子集。
  若 $a \in A, b \in B, (a, b) \in R$，記作 $aRb$，稱 $a$ 與 $b$ 有關係 $R$ ($a$ “is related to” $b$)。
- 例如:
  - 已知 $A = \{0,1,2\}, B = \{a, b\}$,
    則 $R = \{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$ 是一個從 A 到 B 的關係 (relation)，其中:
    - $1Ra$
    - $1 \not R b$




| $R$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| 0 | × | × |
| 1 | × | |
| 2 | | × |

# 範例(三元關係)



- 已知: Man： $M = \{Allen, Ben, Chad\}$,

  Woman： $W = \{Leah, May, Nancy\}$,

  Kid： $K = \{Rick, Seth, Tiffany\}$.

則 Family：

$$F = \{(Allen, May, Tiffany), (Ben, Nancy, Rick), (Chad, Leah, Seth)\}$$

是 $M \times W \times K$ 的子集。

# 一個集合上的二元關係 Binary Relation on a Set

- 集合 $A$ 上的二元關係是 $A \times A$ 的子集。
  - 例如:
    已知 $A = \{a, b, c\}$, 則 $R = \{(a, a), (a, b), (a, c)\}$ 是一個在集合 $A$ 上的關係 (relation)。

# 關係的性質 Properties of Relations



- A relation R on Set A is reflexive(自反的) IFF
  $\forall a \in A$ :
$$aRa$$

- A relation R on Set A is symmetric(對稱的) IFF
  $\forall a, b \in A$:
$$aRb \rightarrow bRa$$

- A relation R on Set A is antisymmetric(反對稱的) IFF
  $\forall a, b \in A$:
$$(aRb) \land (bRa) \rightarrow (a = b)$$

- A relation R on Set A is transitive(傳遞的) IFF
  $\forall a, b, c \in A$ :
$$(aRb) \land (bRc) \rightarrow (aRc)$$

# 例1

已知 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, A 上的關係 $R = \{(a, b) |\ a 整除 b\}$:

A. 列出 $R$ 的元素。(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(2,2)(2,4)(3,3)(4,4)

B. 判斷 $R$ 是否:
(i) 自反的 (Reflexive) YES
(ii) 對稱的 (Symmetric) NO
(iii) 反對稱的 (Antisymmetric) YES
(iv) 傳遞的 (Transitive) YES

# + 例2

A. 判斷下列定義在 N 上的各關係(relation)是否
(i) 自反的(Reflexive), (ii) 對稱的(Symmetric),
(iii) 反對稱的(Antisymmetric), (iv) 傳遞的(Transitive):

a) $R_1 = \{(a,b) | \, a = b\}$

b) $R_2 = \{(a,b) | \, a \leq b\}$

c) $R_3 = \{(a,b) | \, a > b\}$

d) $R_4 = \{(a,b) | \, a + b \leq 3\}$

B. 承上題，求:

a) $R_1 \cap R_2$

b) $R_1 \cup R_2$

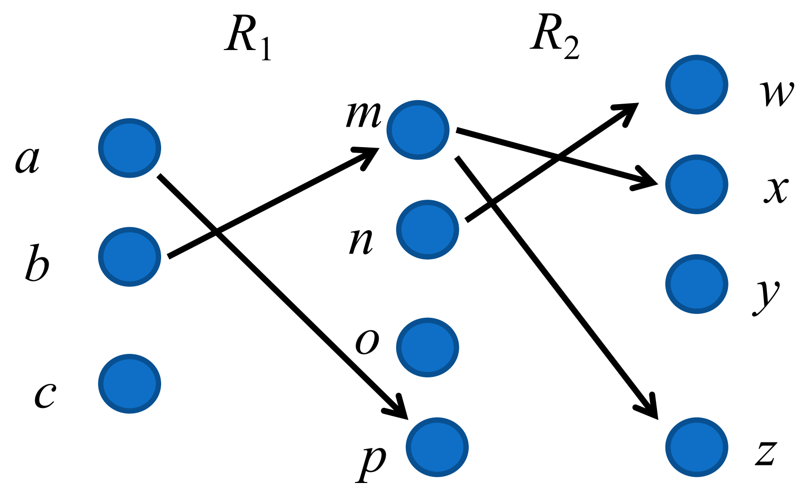
c) $R_2 - R_1$

# + 合成 Composition

- 已知:
  - $R_1$ 是一個從 A 到 B 的關係.
  - $R_2$ 是一個從 B 到 C 的關係.
- 則 $R_1$ 與$R_2$ 的合成(composite of $R_1$ and $R_2$)是一個從 A 到 C 的關係：
  - 若 $(x, y) \in R_1, (y, z) \in R_2$ ,則$(x, z) \in R_2 \circ R_1$.

# 例3

A. 根據右圖求 $R_2 \circ R_1$。




B. 若 $R, S$ 為某集合上的關係且
$R = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$, $S = \{(2,1),(4,2),(4,3)\}$, 求:

a) $R \circ S$

b) $S \circ R$

# 關係的表示



- 矩陣 (matrix)
- 有向圖(digraph)

# + 用矩陣表示關係 Representing Relations Using Matrices

- 已知 $R$ 是在集合 A 到 B 上的關係，$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ , $B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } (a_i, b_j)\in R,\\ 0 & \text{if } (a_i, b_j)\notin R.\end{cases}$$

- 當$a_i R b_j$ 則矩陣的 $(i, j)$ 項為1, 否則為 0。

# 例4

以下$M_R$的行和列對應於按增序列出的整數:

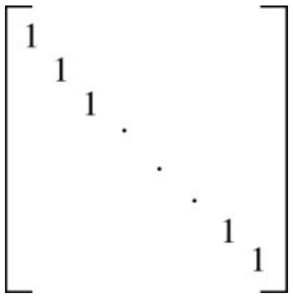
A. $A = \{1,2,3\},\ B = \{1,2\}. R = \{(a,b)|a > b\}$為從 A 到 B 上的關係, 找出表示 $R$ 的矩陣$M_R$。

B. $A = \{1,2,3\},\ B = \{1,2,3,4,5\}$, 列出以下矩陣所表示的關係 $R$ 的元素:

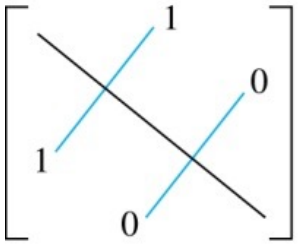
$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# + 表示關係的矩陣性質 Matrices of Relations

- R is reflexive (自反的) :
  - $For\ all\ i,\quad m_{ii} = 1$

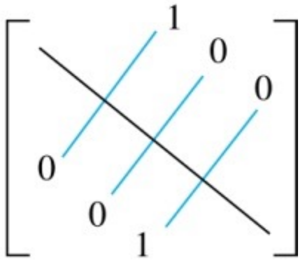


- R is symmetric (對稱的) :
  - $For\ all\ i, j,\quad m_{ij} = mji$ OR $M_R = (M_R)^T$




(a) Symmetric

- R is antisymmetric (反對稱的) :
  - $For\ all\ i, j,\quad m_{ij} = mji = 1 \rightarrow i = j$




(b) Antisymmetric

# 例5

- 以下矩陣所表示為某集合上的關係 R，問 R 是否:

  (i) Reflexive (自反的) YES

  (ii) Symmetric (對稱的) YES

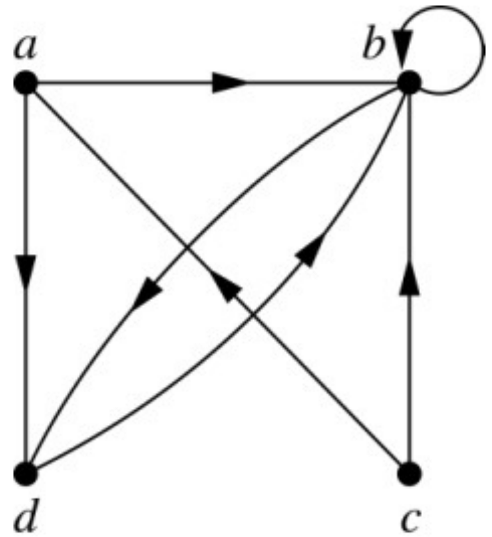
  (iii) Antisymmetric (反對稱的) NO

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# + 用圖表示關係 Representing Relations Using Digraphs

- 一個有向圖(directed graph)由頂點(vertices)集 $V$ 和邊(edges)集 $E$ 組成，其中邊集是 $V$ 中元素的有序對的集合。頂點 $a$ 叫做邊 $(a, b)$ 的始點 (initial vertex), 頂點$b$ 叫做邊 $(a, b)$ 的終點 (terminal vertex).
  - $(a, a)$ 叫做環($loop$).

- 如: 右圖為表示 $R = \{(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, \mathrm{a}), (c, b), (d, b)\}$ 的有向圖:



# 表示關係的有向圖性質 Directed graph of Relations

- Reflexive (自反的) : 每個頂點都有環
- Symmetric (對稱的) : 若存在邊 $(x, y)$, 則存在邊 $(y, x)$.
- Antisymmetric (反對稱的) : 兩頂點間不存在兩個方向相反的邊
- Transitive (傳遞的) : 若存在邊 $(x, y)$ 和邊$(y, z)$ , 則存在邊 $(x, z)$.

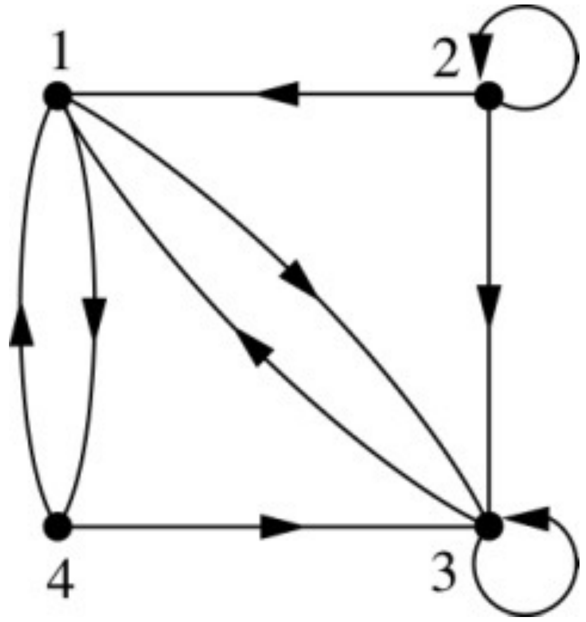
# 例6

- 以下有向圖(directed graph) 表示關係 $R$：

A. 列出 $R$ 的元素；

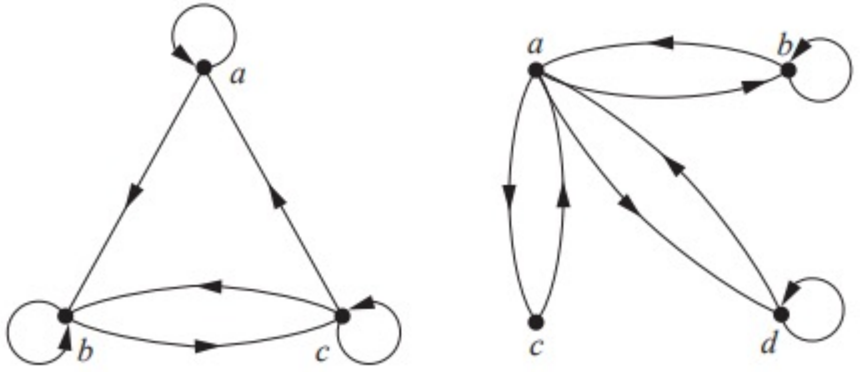
B. 判斷 $R$ 是否:

(i) Reflexive (自反的) NO
(ii) Symmetric (對稱的) YES
(iii) Antisymmetric (反對稱的) NO
(iv) Transitive (傳遞的) NO



# 例7

- 以下有向圖所表示為某集合上的關係 R 和 S，問 R 和 S 是否:
  - (i) Reflexive (自反的)
  - (ii) Symmetric (對稱的)
  - (iii) Antisymmetric (反對稱的)
  - (iv) Transitive (傳遞的)




(a) Directed graph of *R*

Reflexive

(b) Directed graph of *S*

Symmetric

# 等價關係 Equivalence Relations (9.5)

- 若 $R$ 為集合 $S$ 上的關係且 $R$ 滿足以下性質:
  - 自反的(Reflexive)、
  - 對稱的(Symmetric)、
  - 傳遞的(Transitive)，

  則稱 $R$ 為對應集合 $S$ 上的等價關係 (Equivalence relation)，

- 若 $R$ 為某集合上的等價關係，且 $a\,R\,b$，則稱 $a$ 和 $b$ 是等價的元素，記作 $a \sim b$。

# 例8

- 下列關係是否在對應集合 A 上的等價關係(equivalence relation)?

A. $R_1 = \{(a, b) |\ a\text{整除}b\}$ , A : $\mathbf{Z}^+$.

B. $R_2 = \{(a, b) | a \equiv b (mod\ m)\}$其中 $m \in \mathbf{Z}^+$, A : $\mathbf{Z}$.

# + 等價類 Equivalence Classes



- 設 $R$ 為在集合A上的等價關係。與 $A$ 中的一個元素 $a$ 有關係的所有元素的集合叫做a的等價類(equivalence class), 記作$[a]_{\mathrm{R}}$，即

$$\forall b \in A(b \sim a \rightarrow b \in [a]_R)$$

或

$$[a]_R = \{b \mid (a, b) \in R\}.$$

- 且下列命題同時成立或同時不成立：

1. $aRb$
2. $[a] = [b]$
3. $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

# 例9

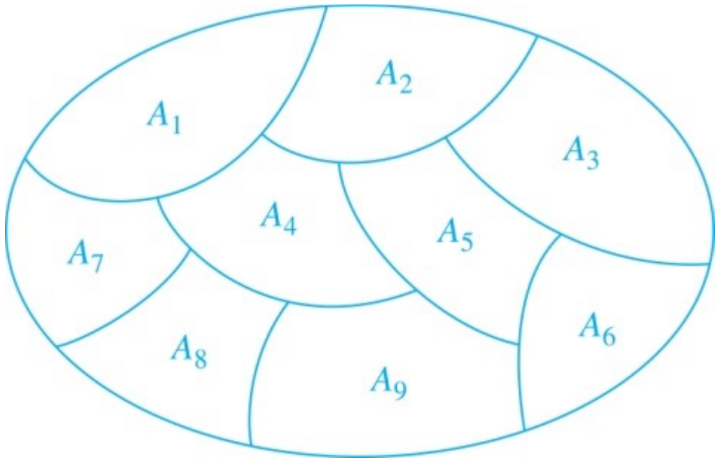
- 已知 $R = \{(a, b) | a \equiv b (mod\ 5)\}$ 其中 $m \in \mathbf{Z}^+$, 為整數集上的等價關係 (equivalence relation), 求 $R$ 的等價數類(equivalence class)。

# + 模$m$同余類 (Congruence classes modulo m)

- $[a]_m$, 即 $[a]_m = \{\dots, a - 2m, a - m, a + 2m, a + 2m, \dots\}$.
  如:
  - $[0]_4 = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$
  - $[1]_4 = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$
  - $[2]_4 = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$
  - $[3]_4 = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}$

# + 集合的划分 Partition of a Set

- 集合 S 的划分 (a partition of a set S) 是 S 的不相交的非空子集構成的集合且其並集為 S，即:
  - $A_i \neq \emptyset$ , $i \in I$,
  - $A_i \cap A_j = \emptyset$ 其中 $i \neq j$,
  - 且 $\bigcup_{i \in I} A_i = S$




A Partition of a Set

# + 等價類與划分 Equivalence Class & Partition

- (9.5定理2) 設 R 是在集合 $S$ 上的等價關係，則 R 的等價類(equivalence class) 構成 S 的划分(partition)；反過來，若$\{A_i | i \in I\}$為 S 的一個划分，存在一個等價關係 $R$ 以 $A_i$ 作為它的等價類。

# 偏序 Partial Orderings (9.6)

- 定義在集合 $S$ 上的關係 $R$ 稱為偏序(partial ordering) 若 $R$:
  - 自反的 (Reflexive),
  - 反對稱的 (Antisymmetric),
  - 傳遞的 (Transitive).
- 集合 $S$ 與定義在其上的偏序 $R$ 一起稱為偏序集 (partially ordered set, poset), 記作 $(S, R)$.

# 例10

- 證明: “大於或等於≥”是在整數集合上的偏序(partial ordering)。

# 可比 Comparability

符號 $\preccurlyeq$ 表示偏序集中的關係

- 偏序集 $(S,\preccurlyeq)$ 中的元素 $a$ 和 $b$ 稱為可比的(Comparable)，若 $a \preccurlyeq b$ 或 $b \preccurlyeq a$。當 $a, b \in S$ 但 $a \preccurlyeq b$ 和 $b \preccurlyeq a$ 都不成立, 則 $a, b$ 是不可比的(incomparable)。

# 例11

- 在偏序集 $(Z^+, |)$中，3和9可比嗎? 5和7可比嗎?

step 1 Identify the partial order set $(Z^+, |)$ and understand its meaning

step 2 In the set $(Z^+, |)$, the notation $a \mid b$ means that $a$ divides $b$ without leaving a remainder

step 3 Determine if 3 divides 9 in the set $(Z^+, |)$

step 4 Since $3 \times 3 = 9$, we can conclude that 3 divides 9

step 5 Determine if 5 divides 7 in the set $(Z^+, |)$

step 6 Since there is no integer $k$ such that $5 \times k = 7$, we can conclude that 5 does not divide 7

**[question 1] Answer**

3 and 9 are comparable because 3 divides 9. 5 and 7 are not comparable because 5 does not divide 7.

# 教材對應閱讀章節及練習

- 9.1(~Example 16), 9.3, 9.5(~Example 12),9.6(~Example5, 12-13)
- 對應習題: (可視個人情況定量)
  - 9.1: 1a-1d, 2-30, 36,37
  - 9.3: 1-10, 18-28
  - 9.5: 1-28
  - 9.6: 1-11