離散概率 Discrete Probability

第七章

+ Outline

- 概率論 Probability Theory
- 貝葉斯定理 Bayes' Theorem
- 期望值和方差 Expected Value and Variance

樣本空間及事件 Sample Space & Event (7.1&7.2)

- 試驗(experiment)：從一組可能的結果(Outcomes)中得出一個結果的過程。
- 樣本空間 (sample space)：試驗中可能結果的集合；一般以 S 表示。
- 事件(Event)：樣本空間的一子集；一般以 E 表示。

例1

A. 求下列試驗的樣本空間(Sample Space)及對應事件(Event)：

a) 考察所有新生嬰兒的性別並出現嬰兒為女孩的結果。

b) 考察一個晶體管的壽命(小時)並出現壽命不超過 5 個小時的結果。

c) 考察不斷投擲一枚普通硬幣直到2正面或3反面為止並出現擲了4次的結果。

+ 事件的概率 Probability of Event

- 假設某試驗有樣本空間 S，對應事件 E 的數值 $p(E)$ 稱作事件 E 的概率並滿足:
    1. $0 \leq p(E) \leq 1$
    2. $\sum_{s \in S} p(s) = 1$
    3. 對任一列互斥的事件$E_1, \ldots, E_n$:

$$p(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = \sum_{i=1}^{n} p(E_i)$$

- (等可能結果) 如果樣本空間 S 裡的每一個結果發生的可能性相等, 則事件 E 發生的概率為:

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|}$$

例2

H – *Head* (正) / *T* – *Tail* (反)

A. 同時投擲甲、乙兩枚硬幣一次，並記錄其正反面出現之情形。試寫出此試驗：
   a) 的樣本空間 S；
   b) 結果皆為正面的事件 A 以及 $p(A)$。
   c) 結果皆為一正一反 的事件 B 以及 $p(B)$。

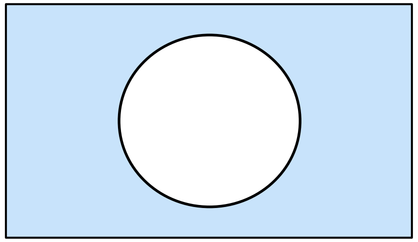
B. 擲兩個骰子得到點數和為 7 的概率為何?

C. 從一副 52 張撲克牌中抽取 5 張，得到 4 張相同點數的概率為何？

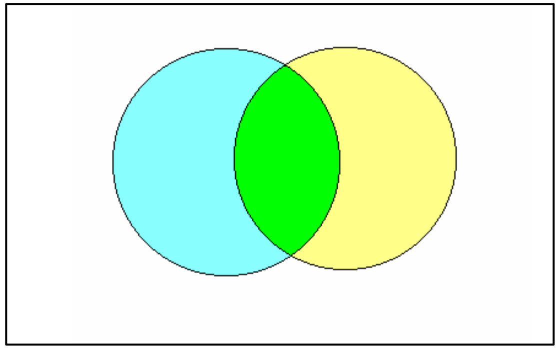
補事件及並事件的概率

- 補事件 (Complement Event) 的概率：

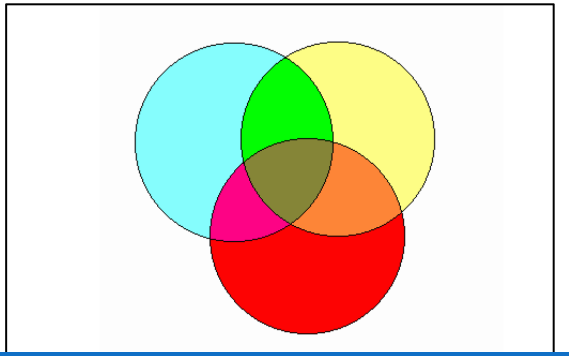
$$p(\bar{E}) = 1 - p(E)$$



- 並事件 (Union of Events) 的概率：
  - 兩事件：$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$



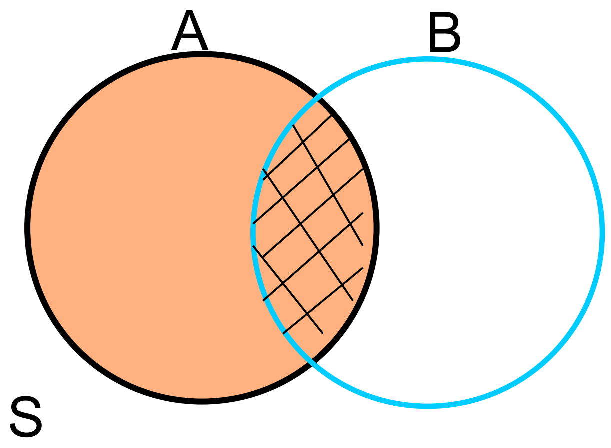
  - 三事件：$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C)$
$$-p(A \cap B) - p(B \cap C)$$
$$-p(A \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$



條件概率 Conditional Probability

- 在 "已知 A 事件發生的情況下 B 事件發生" 的**條件概率**，記作 $p(B|A)$，讀作 "Conditional probability of B given A"，為:

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$



條件概率的性質

- 設 A, B, C 為樣本空間 S 中之任意三事件，且 $P(C) \neq 0$ ，則有
  1. $P(\emptyset|C) = 0$
  2. $P(C|C) = 1$
  3. $0 \leq P(A|C) \leq 1$
  4. $P(\bar{A}|C) = 1 - P(A|C)$
  5. $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$
  6. 若$A \subseteq B$, 則$P(A|C) \leq P(B|C)$

例3

- 在共有100人的問卷調查中右表為問題“你有每周跑步的習慣嗎?”的答覆:

	Yes	No
Male	19	31
Female	13	37

A. 若隨機選一人，此人有每周跑步的習慣的概率是多少?
B. 若隨機選一男性，此人有每周跑步的習慣的概率是多少?
C. 若隨機選一人，此人為男性的概率是多少?
D. 若隨機選一有每周跑步的習慣的人，此人為男性的概率是多少?
E. 對於任意事件 A 與 B, $p(A|B) = p(B|A)$ 是否恆成立?

+ 例4

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

A. 蘇珊做了兩個測驗。她兩個測驗都及格的概率為0.6。她第一個測驗及格的概率是0.8。若已知她的第一個測驗及格，那麼她第二個測驗也及格的概率有多大?

B. A、B為兩事件，$p(A) = \frac{1}{4}$, $p(B) = \frac{1}{3}$, $p(A \cup B) = \frac{5}{12}$，求：

a) $p(B|A)$

b) $p(A|B)$

c) $p(\bar{A}|\bar{B})$

例5

- 從一個裝有14支綠筆、6支紅筆的筆盒中抽出2支筆(每次不放回)。
  - A. 求抽出兩支紅筆的概率；
  - B. 求已抽出一支紅筆後再抽一支紅筆的概率；
  - C. 求抽出僅一支為紅筆的概率。

$$\frac{C(6,2)}{C(20,2)}$$

step 10 Calculate the probability of drawing one red pen and one green pen in either order

step 11 The number of ways to draw one red pen and one green pen is $C(6,1) \times C(14,1)$

step 12 Since the pens can be drawn in any order, multiply the result by 2

step 13 The total number of ways to draw one red and one green pen in either order is $2 \times C(6,1) \times C(14,1)$

step 14 Divide the number of ways to draw one red and one green pen by the total number of ways to draw 2 pens to find the probability

step 15 The probability of drawing one red and one green pen in either order is $\frac{2\times C(6,1)\times C(14,1)}{C(20,2)}$

+ 獨立事件 Independent Events

- 若 A 與 B 為同一樣本空間的兩事件，而 B 發生與否不影響A發生的概率，則 A 與 B 互為**獨立事件** (independent events)，即:

$$\text{A 與 B 獨立} \leftrightarrow p(A|B) = p(A) \qquad (1)$$

  - 否則兩事件互為**相依事件**(dependent events)。

- 從上述關係可得一常用性質：

$$\text{A 與 B 獨立} \leftrightarrow p(A \cap B) = p(A)p(B) \qquad (2)$$

+ 例6

A. 在一個有兩個小孩的家庭中，令 A 為起碼有一個男孩的事件，B 為兩個小孩皆為男孩的事件：

a) 求 $p(B|A)$。

b) 問 A 與 B 是否獨立(independent)?

B. 判定下列的 A 和 B 是否獨立 (independent)：

a) $p(A) = 0.75, p(B) = 0.85, p(A \cap B) = 0.7$ not independent

b) $p(A) = 0.7, p(B) = 0.5, p(A \cup B) = 0.85$ independent

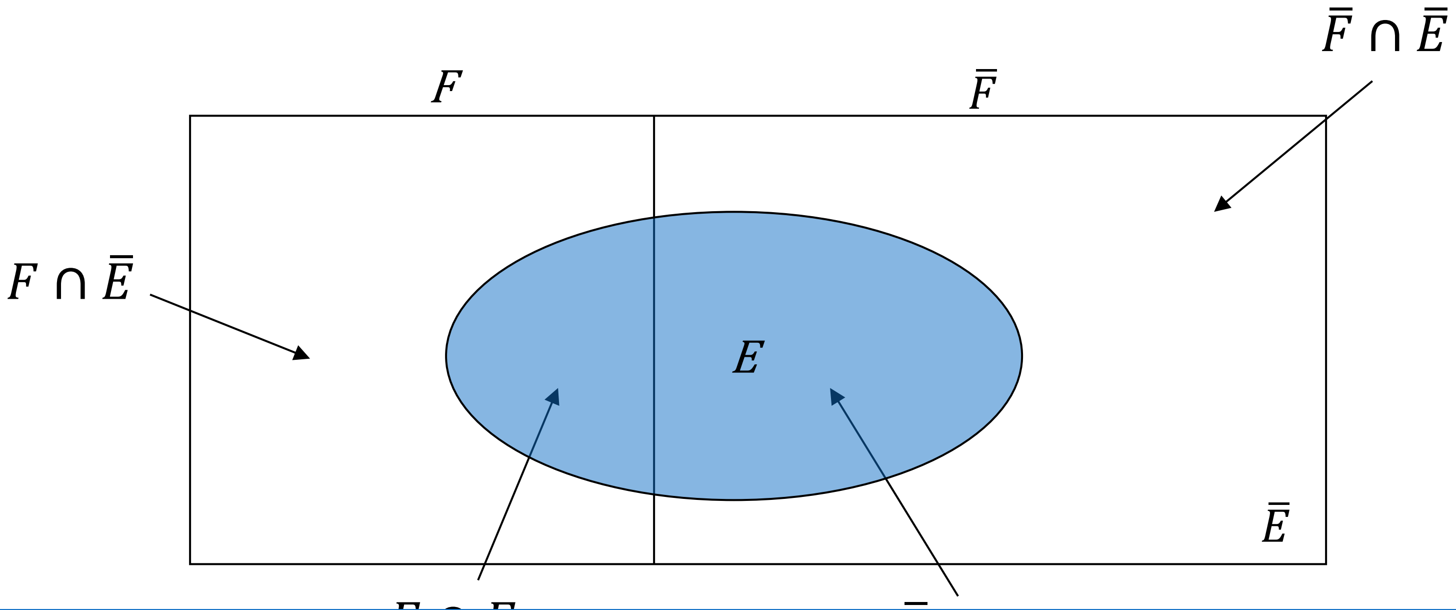
C. 在某辦公室中設有兩個獨立運作的火警鈴，每個火警鈴在火警中正常運作的概率為 0.95。求當火警發生時起碼一個火警鈴會正常運作的概率。

例7

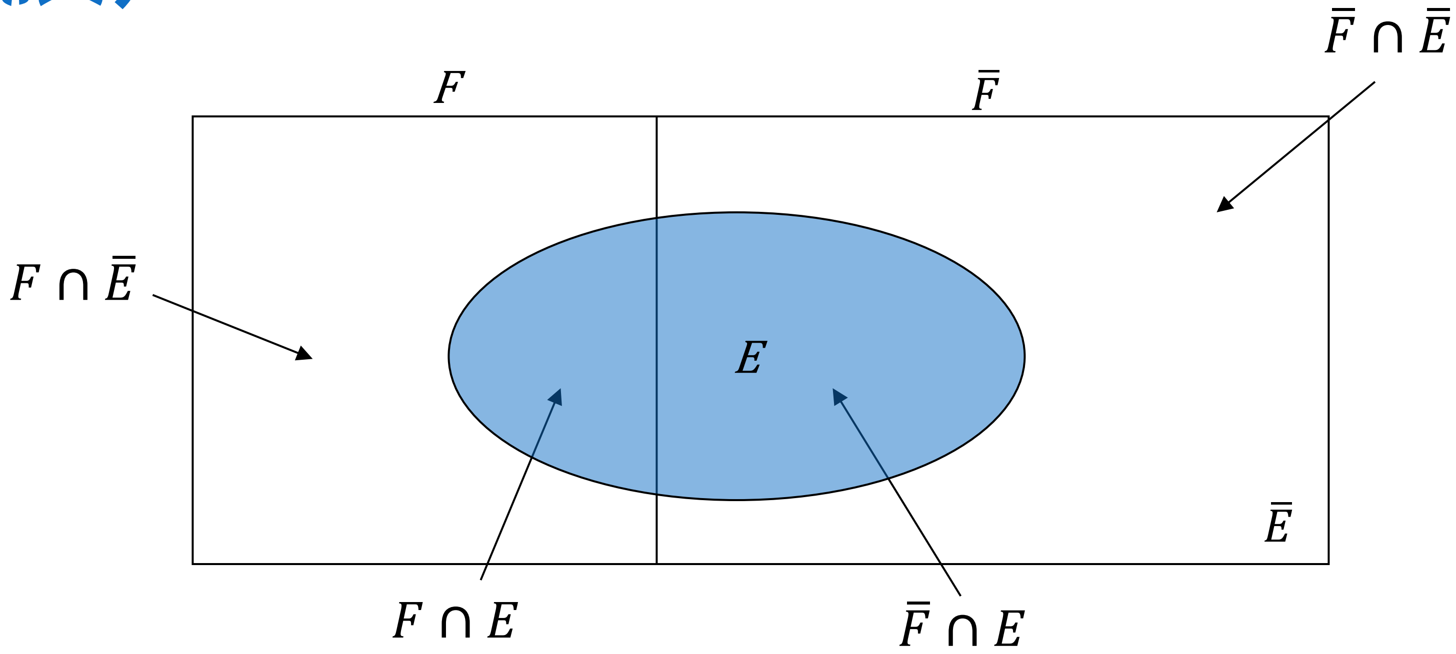
試驗：擲一枚骰子並記錄其結果	事件 A 和 B 之間的關係是否:		
	Complement? 互補?	Mutually Exclusive? 互斥?	Independent? 獨立?
A – 結果大於 3 B – 結果小於 3	互补	互斥	不独立
A – 結果大於等於 3 B – 結果小於 3	互补	互斥	不独立
A – 結果大於等於 2 B – 結果小於 3	不互补	不互斥	不独立
A – 結果大於 3 B – 結果小於 10	不互补	不互斥	独立

+ 貝葉斯定理 Bayes' Theorem (7.3)

- 範例: 某保險公司把客戶分為兩類：那些事故多發的和那些不是的。統計顯示，事故多發的客戶有40%的機率將在1年以內發生事故，而那些不容易發生事故的客戶有20%的機會在第一年內發生事故。如果人口的30%是事故多發的，問:
  a) 一個新的投保人在 1 年內發生事故的概率為何？
  b) 現有一投保人在 1 年內發生了事故，他為事故多發的人的概率是多少?
  - 設 F 為事故多發的人群
    設 E 為在一年內某人發生事故的事件



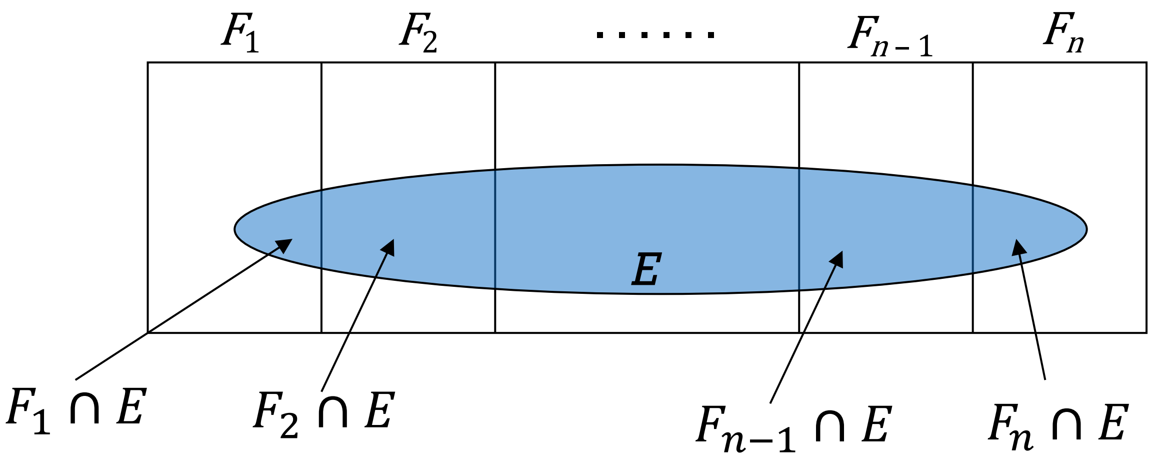
+ 範例(續)



a) $$\begin{aligned} P(E) &= P(F \cap E) + P(\bar{F} \cap E) \\ &= P(E|F)P(F) + P(E|\bar{F})P(\bar{F}) \\ &= (0.40)(0.30) + (0.20)(0.70) \\ &= 0.26 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(F|E) &= \frac{P(E|F)P(F)}{P(E|F)P(F)+P\left(E\middle|\bar{F}\right)P(\bar{F})} \\ &= \frac{(0.40)(0.30)}{(0.40)(0.30) + (0.20)(0.70)} \\ &= \frac{0.12}{0.26} \\ &\approx 0.46 \end{aligned}$$

貝葉斯定理 Bayes' Theorem



$$p(E) = \sum_{i=1}^{n} p(F_i \cap E) = \sum_{i=1}^{n} p(E|F_i) \cdot p(F_i)$$

- 若樣本空間能分割為 n 個事件 $F_1, F_2, \ldots F_n$，而 E 為另一事件，則在已知 E 發生下 $F_k (1 \le k \le n)$ 發生的條件概率為:

$$p(F_k|E) = \frac{p(E|F_k) \cdot p(F_k)}{\sum_{i=1}^{n} p(E|F_i) \cdot p(F_i)}$$

例8

A. 假設借款人中有百分之七十五的償還(repay)了他們的債務。在這些有償債的人當中, 40%的人具有大學學歷(college degree)。而在那些未償債的人當中有10%具有大學學歷。從所有的借款人隨機選取一人。如果這個人具有大學學歷，那麼此人會償還債務的機率為何？

例8(續)

B. 醫生為某種癌症給病人提供測試。該試驗的結果出來之前，醫生可以告訴測試者的是，每1000個人裡有一個有這種癌症。過去的研究指出，99%癌症病患者的測試結果為陽性，而95%非癌症病患者的測試結果為陰性。

a) 如果一個測試結果呈陽性，醫生應該告知測試者患有該癌症的機率為多少？

b) 在那些呈陽性的報告裡誤報的佔多少百分比？

例9

- 已知王經理從 A、B、C 三位員工中隨機選取一人晉升為副理，但是在人事命令發佈之前，經理不能透露晉升的人選。此時 A 問經理能否告訴他另外二位員工 (B、C) 中哪一 位沒有獲得晉升，經理認為這並沒有違反他不能在人事命令發佈之前透漏晉升的人選的公司規定，於是便告訴他 C 不會獲得晉升。由於已知 C 不會獲得晉升，此時 A 於是推論他獲得晉升的機會將會從 1/3 上升到 1/2。 請問:
  a) A 的推論是否正確。
  b) 請使用貝葉斯定理來支持你在 a) 小題的論述。

+ 隨機變量(Random Variable)(7.4)

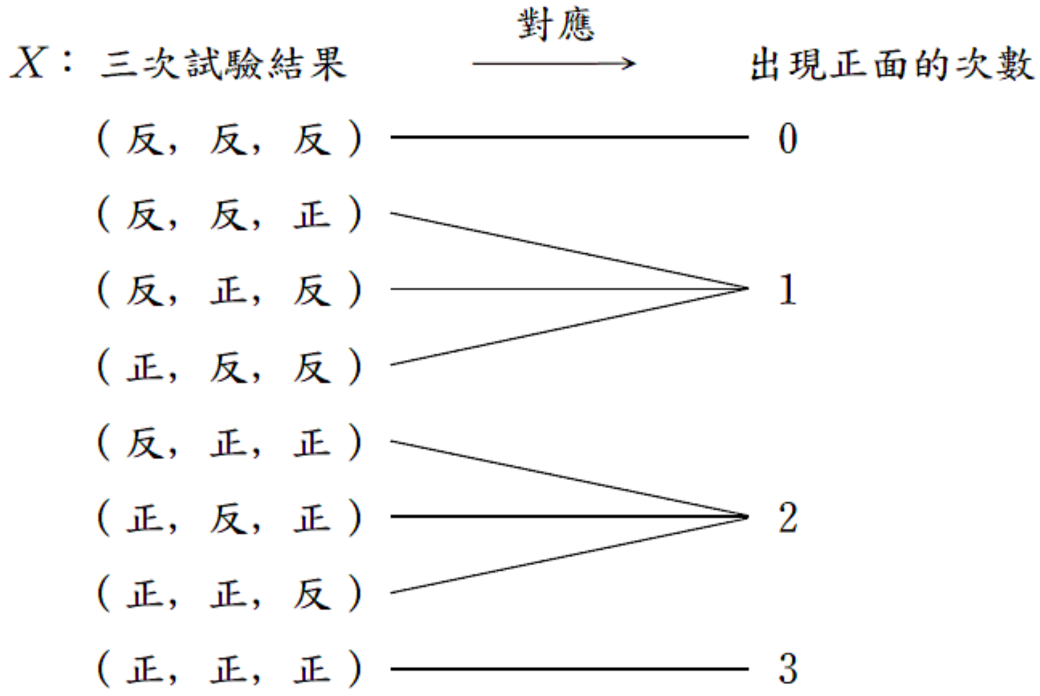
- 在前面的課程提到，樣本空間為做一試驗所有可能結果所成的集合。對於試驗結果, 有些以數值表示(如擲骰子看點數), 有些以符號或文字表示(如丟硬幣看正反面), 對於以符號或文字描述的試驗結果處理較麻煩，通常將試驗結果依某種特性賦予數值，这就是我們接下來要介紹的隨機變量，其定義如下:

將一試驗的每種結果(樣本點)分別對應一個“數值”，此種對應的函數關係即為隨機變量。

- 換句話說，隨機變量是定義在某一個樣本空間上的實數值函數。
- 隨機變量中的“隨機”表示結果的不可預知, 而“變量”表示每次結果會有不同的變化。通常隨機變量以英文大寫字母 X, Y 等表示。

+ 離散型隨機變量 Discrete Random Variable

- 當隨機變量 X 對應的數值(可能值)為有限多個，稱 X 為離散型隨機變量(Discrete Random Variable)。
  - 如:擲一枚硬幣3次，令 X 為出現正面的次數，則 X 的可能值只有4個。



- 可得:
  - $P(X=0)=\frac{1}{8}$
  - $P(X=1)=\frac{3}{8}$
  - $P(X=2)=\frac{3}{8}$
  - $P(X=3)=\frac{1}{8}$

概率分佈 Probability Distribution

- 隨機變量之概率分佈(probability distribution)，是以表格、圖表或公式，將隨機變量所有可能值而成的事件之機率一一列出。
- 若 X 為離散型隨機變量，則其機率分佈 $p(X=x)=p(x)$ 有下列性質:
  - $\forall x \in X(0 \leq p(x) \leq 1)$
  - $\sum_{x \in X} p(x) = 1$

- 課本中提及的離散型分佈:
  - 二項分佈 (Binomial distribution)
    - 如:投擲硬幣3次得到正面的次數
  - 幾何分佈 (Geometric Distribution)
    - 如:投擲硬幣直至得到1次正面的次數

期望值 Expected Value

- 若 X 為一離散隨機變量，而 $x_1, \ldots, x_n$ 為 X 的所有取值，$p_1, \ldots, p_n$ 為對應 x_i 發生的概率，則 X 的數學期望值為：

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kp(X = k)$$

- 如：擲一枚硬幣3次，令 X 為出現正面的次數：

$$E(X) = 0\times\frac{1}{8} + 1\times\frac{1}{8} + 2\times\frac{1}{8} + 3\times\frac{1}{8} = 1.5(次)$$

x	0	1	2	3
$p(X=x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

例10

A. 某次彩券發行 2000 張，其中 2 張獎金各 30000元，4 張各 5000 元，10 張各 500 元，20 張各 100 元，其餘沒有獎金。求每張彩券的獲利期望值。

B. 設高三學生能再活一年的機率為 0.9999，某高三學生參加 20 萬元的平安保險，一年期保費 100 元，求保險公司獲利的期望值。

C. 箱中有三顆紅球與三顆白球。一摸彩遊戲是從箱中隨機同時抽出兩顆球。如果抽出的兩球顏色不同，則得獎 100 元；如果兩球顏色相同，則無獎金。請問此遊戲獎金的期望值為何?

+ 隨機變量的函數

- 有時候我們並不是對隨機變量 X 的期望值感興趣，而是對 f(X) 的期望值感興趣，而隨機變量的函數亦為隨機變量。
    - 如: Y = f(X) 的為某路公車相應收益，而 X 為公車的乘車人數。

- $Y = f(X)$為隨機變量 X 的函數，則 Y 的期望值為：

$$E(Y) = E[f(X)] = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)p_i$$

+ 期望值的性質

- X 與 Y 為隨機變量，a 和 b 為常數：

1. $E(aX+b)=aE(X)+b$
2. $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
3. $E(XY)=E(X)E(Y)$，若 X 和 Y 相互獨立

+ 方差 Variance

- 離散型隨機變量 X 的方差 (Variance) 定義為：

$$V(X) = E([X - E(X)]^2)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} [X(k) - E(X)]^2 p(k)$$

  - 而 $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ 稱為 X 的標準差 (Standard Deviation)。
    在應用問題理解時一般利用標準差更容易解釋。

- 在研究隨機變量的分佈時，除卻其期望值可以給予一維隨機變量的集中趨勢外，測量其方差能幫助了解其分佈的離散趨勢。

方差的性質

X 與 Y 為隨機變量，a 和 b 為常數:

1. $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
2. $V(aX + b) = a^2V(X)$
3. $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$，其中 X 與 Y 相互獨立。

例11

- X=每週在某銀行分行獲批准的房屋貸款數量(右表)

A. 每週獲批准房屋貸款數量的期望值是多少?

B. 每週獲批准房屋貸款數量的標準差是多少?

x	$p(X = x)$
0	0.10
1	0.10
2	0.20
3	0.30
4	0.15
5	0.10
6	0.05

例12

A. 已知 $E(X)=1, V(X)=5$, 求 a) $E[(2+X)^2]$; b) $V(4+3X)$的值。

B. 某一學年的概率論期中考試，某班的成績平均為 60分，方差為16。

a) 若老師每人的成績加10分，則調整後的全班平均分及方差為多少?

b) 若老師每人的成績加10%, 則全班平均分及方差為多少?

教材對應閱讀章節及練習

- 7.1(~Example 7), 7.2(~Example 7), 7.3(~Theorem 2), 7.4(~Example9)
- 對應習題: (可視個人情況定量)
  - 7.1: 1-38
  - 7.2: 1-5,18-21, 23-24, 27-28
  - 7.3: 1-11, 13-14, 16
  - 7.4: 1-8, 10-13, 27-29