線性代數 作業 5

說明：請按題目要求作答。計算題要給出計算過程，證明題要給出證明過程。其中 P (Pass) 類為必做題，HD (High Distinction) 類為選做題。

P 1. 在線性空間$P[x]_3$中定義線性變換T為$T\big(f(x)\big) = f(x+1) - f(x), \forall f(x) \in P[x]_3$，求線性變換$T$在基$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = x, \alpha_3 = \frac{1}{2}x(x-1), \alpha_4 = \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$下的矩陣 A.

P 2. 設$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$是$R^3$上的一個基, 線性變換$T$在該基下的矩陣為$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，求$T$在新基$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$下的矩陣.

P 3. 設 A 為已知的$m \times n$向量，$\mathrm{V} = \{\mathrm{A}x | x \in \mathrm{R}^n\}$.

(1) 驗證 V 對通常的矩陣加法和數乘運算構成線性空間；

(2) 當 $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ 時， 求 V 的一個基.

P 4. 設 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_5 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$ 由生成的向量空間為 V, 求空間 V 的維數及它的一組基, 并用基表示其餘向量.

P 5. 設向量η在基 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 與 基 $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下有相同的座標, 則$\eta =$ ____________.

HD 1. 在R^3中取兩個基

i：$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_4=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\2\end{pmatrix}$,

(1) 求基ⅰ到基ⅱ的過渡矩陣 P;

(2) 向量在基ⅰ下的座標為$\begin{pmatrix}1\\19\\0\\1\end{pmatrix}$, 求該向量在基ⅱ下的座標.

HD 2. 在線性空間$P[x]_3$中取兩個基

ⅰ：$1,x,x^2,x^3$和ⅱ：$1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3$.

(1) 求從基ⅰ到基ⅱ的過渡矩陣 P;

(2) 已知$f(x)\in P[x]_3$在基ⅰ下的座標為$\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\5\end{pmatrix}$, $g(x)\in P[x]_3$在基ⅱ下的座標為$\begin{pmatrix}7\\0\\8\\2\end{pmatrix}$, 求

$f(x)+g(x)$分別在基ⅰ和基ⅱ下的座標.

HD 3. 設$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$是線性空間$V_n$的一個基, 證明$\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_3,\dots,\boldsymbol{n}\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1$也是$V_n$的一個基, 并求由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$到基$\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_3,\dots,\boldsymbol{n}\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1$的過渡矩陣 P.