線性代數 作業 4

說明：請按題目要求作答。計算題要給出計算過程，證明題要給出證明過程。其中 P (Pass) 類為必做題，HD (High Distinction) 類為選做題。

P 1. 設 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}$，求向量$\boldsymbol{\gamma}$，使得$\boldsymbol{\gamma}$與$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$均正交.

解 向量$\boldsymbol{\gamma}$與$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$均正交， 則$\boldsymbol{\gamma}$滿足$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$ 且$\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$，$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$. 即

設$\boldsymbol{\gamma}=(x,y,z)^T$，則$\gamma$ 滿足

$$\begin{cases}x+y+2z=0,\\-4x+2y+2z=0,\end{cases}$$

由

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\-4&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{6}]{r_2+4r_1}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&\frac{5}{3}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{3}\\0&1&\frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

得

$$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{3}z,\\y=-\dfrac{5}{3}z,\end{cases}$$

取$z=3$，則$\boldsymbol{\gamma}=(-1,-5,3)^T$

P 2. 試用施密特法把下列向量組正交化

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix};$$

解

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

P 3. 求下列矩陣的特徵值和特徵向量

(1) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&2&0&7\\0&0&3&4\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

解 (1) 矩陣 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 的特徵多項式為

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda+1)^2,$$

所以 A 的全部特徵值為$\lambda_1=\lambda_2=-1$, $\lambda_3=2$.

當$\lambda_1=\lambda_2=-1$時, 解方程$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基礎解系

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

從而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$就是對應于$\lambda_1=\lambda_2=-1$的兩個線性無關的特徵向量, 並且對應于$\lambda_1=\lambda_2=-1$的全部特徵向量為$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ (k_1,k_2不同時為零).

當$\lambda_3=2$時, 解方程$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基礎解系

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

從而$\boldsymbol{\alpha}_3$就是對應于$\lambda_3=2$的特徵向量, 並且對應于$\lambda_3=2$的全部特徵向量為$k\boldsymbol{\alpha}_3(k\neq 0)$.

(2)矩陣 $A=\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&2&0&7\\0&0&3&4\\0&0&0&2\end{pmatrix}$ 的特徵多項式為

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&4&1\\0&2-\lambda&0&7\\0&0&3-\lambda&4\\0&0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-1)(\lambda-3),$$

所以 A 的全部特徵值為$\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=1,\lambda_4=3.$

當$\lambda_1=\lambda_2=2$時，解方程$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}$=**0** 得基礎解系

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

從而$\boldsymbol{\alpha_1}$就是對應于$\lambda_1=\lambda_2=2$的特徵向量，並且對應于$\lambda_1=\lambda_2=2$的全部特徵向量為$k\boldsymbol{\alpha_1}(k\neq 0)$**.**

當 $\lambda_3=1$時，解方程$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}$=**0** 得基礎解系

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

從而$\boldsymbol{\alpha_2}$就是對應于 $\lambda_3=1$的特徵向量，並且對應于 $\lambda_3=1$的全部特徵向量為$k\boldsymbol{\alpha_2}(k\neq 0)$**.**

當$\lambda_4=3$時，解方程$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}$=**0** 得基礎解系

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

從而$\boldsymbol{\alpha_3}$就是對應于$\lambda_4=3$的特徵向量，並且對應于 $\lambda_4=3$的全部特徵向量為$k\boldsymbol{\alpha_3}(k\neq 0)$**.**

P 4. 設 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ 求 A^{100}.

解

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&1\\0&1&1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2),$$

故 A 的特徵值為$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=2.$

解$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}$=**0**，得基礎解系$\boldsymbol{\xi_1}=(1,1,-1)^T$.

解$(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}$=**0**，得基礎解系$\boldsymbol{\xi_2}=(1,0,0)^T$.

解$(\boldsymbol{A}-\lambda_3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}$=**0**，得基礎解系$\boldsymbol{\xi_3}=(1,1,1)^T$.

令$P=(\boldsymbol{\xi_1},\boldsymbol{\xi_2},\boldsymbol{\xi_3})$，則有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\text{，且 }\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\1&-1&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

從而得，

$$\boldsymbol{A}^{100}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2^{100}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2^{99}-1&2^{99}\\0&2^{99}&2^{99}\\0&2^{99}&2^{99}\end{pmatrix}.$$

P 5. 判斷矩陣$A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$能否化為對角矩陣，并說明理由.

解 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda+2&-4\\-2&4&-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+7)=0$

得特徵值$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-7$.

對應$\lambda_1=\lambda_2=2$，由齊次線性方程組$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$，可得其基礎解系

$$p_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},p_2=.\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

同理，對應$\lambda_3=-7$，由齊次線性方程組$(-7\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$，可得其基礎解系

$$p_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},$$

從而p_1,p_2,p_3線性無關，即 A 有 3 個線性無關的特徵向量，因此 A 可對角化。

P 5. 試求正交陣 P 將對稱陣$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}$化為對角陣.

解 矩陣的特徵多項式為

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\1&2-\lambda&0\\1&0&2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-2)(\lambda-3),$$

所以 **A** 的特徵值為$\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=3$.

當$\lambda_1=0$時，解方程$(\boldsymbol{A}-0\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得到特徵向量為 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$,

單位化得

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}.$$

當$\lambda_2=2$時，解方程$(\boldsymbol{A}-2\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$，由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得到特徵向量為

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},$$

單位化得

$$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

當$\lambda_3=3$時，解方程$(\boldsymbol{A}-3\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$，由

$$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得到特徵向量

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

單位化得

$$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix},$$

則

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

P 6. 試用矩陣記號表示下列二次型

(1) $f=2x_1^2-2x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+6x_2x_3$;

(2) $f=-x^2+2y^2-3z^2+2xy-6xz-4yz$;

(3) $f=x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2+6x_2x_3$.

解 （1）

$$f=(x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix};$$

（2）

$$f=(x,\ y,\ z)\begin{pmatrix}-1 & 1 & -3\\ 1 & 2 & -2\\ -3 & -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix};$$

（3）

$$f=(x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 3\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

P 7. 求一個正交變換把下列二次型化為標準型

$(1) f=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_2x_3$;

$(2) f=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

解 (1)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}.$$

由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&2-\lambda&-1\\0&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

得 A 的特徵值為$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$

對于$\lambda_1=1$，解方程$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$， 得特徵向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

單位化得

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}\cdot\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

對于$\lambda_2=2$，解方程$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$， 得特徵向量

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

取$\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$.

對于$\lambda_3=3$，解方程$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$， 得特徵向量

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},$$

單位化得

$$\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}\cdot\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

則在正交變換$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$下，二次型化為標準形$f=y_1^2+2y_2^2+3y_3^2$.

(2)

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},$$

由

$$|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

得 B 的特徵值為$\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=2$.

對于$\lambda_1=\lambda_2=-1$，解方程$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特徵向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

將$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$正交化，得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}.$$

將$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$單位化，得

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}\cdot\boldsymbol{\beta}_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}\cdot\boldsymbol{\beta}_2=\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\ -\frac{\sqrt{6}}{6},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{\mathrm{T}}.$$

對于$\lambda_3=2$，解方程$(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特徵向量

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

單位化，得

$$\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}\cdot\boldsymbol{\alpha}_3=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{\mathrm{T}}.$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix},$$

則在正交變換$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$下，二次型化為標準形$f=-y_1^2-y_2^2+2y_3^2$.

P 8. 判定下列二次型的正定性

(1) $f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$；

(2) $f=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$；

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$.

解 （1）二次型矩陣為

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix},$$

它的各階順利主子式為

$$a_{11}=-2<0,\quad \begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -6\end{vmatrix}=11>0,\quad \begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{vmatrix}=-38<0,$$

所以該二次型是負定的。

（2）二次型矩陣為

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 2 & -4\\ 2 & 1 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{pmatrix},$$

它的各階順序主子式為

$$a_{11}=5>0,\quad \begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1>0,\quad \begin{vmatrix}5 & 2 & -4\\ 2 & 1 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{vmatrix}=1>0,$$

所以該二次型是正定的。

（3）二次型矩陣為

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix},$$

它的各階順序主子式為

$$a_{11}=2>0,\quad \begin{vmatrix}2&0\\0&3\end{vmatrix}=6>0,\quad \begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{vmatrix}=10>0,$$

所以該二次型是正定的。

HD 1. 設 3 階矩陣 A 的特徵值為-1, 1, -2，求$|(2A)^*+3A-2E|$.

解 因 A 的特徵值全不為 0，所以 A 可逆，且$|A|=(-1)\times 1\times(-2)=2$.

于是$|2A|=2^3|A|=16$.

記$\varphi(A)=(2A)^*+3A-2E$

由于$(2A)^*\cdot 2A=|2A|E$，因此$(2A)^*=|2A|(2A)^{-1}=16\cdot\frac{1}{2}\cdot A^{-1}=8A^{-1}$

所以$\varphi(A)=8A^{-1}+3A-2E$

從而$\varphi(\lambda)=8\frac{1}{\lambda}+3\lambda-2$，即

$$\varphi(-1)=-13,\varphi(1)=9,\varphi(-2)=-12,$$

所以，$|(2A)^*+3A-2E|=\varphi(-1)\varphi(1)\varphi(-2)=1404.$

HD 2. 設 $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，求$\varphi(A)=A^{10}-6A^9+5A^8$.

解 由於 A 是實對稱矩陣，從而可以求一個正交矩陣$\boldsymbol{P}$，使得

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix},$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是 A 的全部特徵值. 于是

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A^{10}-6A^9+5A^8}&=(\boldsymbol{P\Lambda P^{-1}})^{10}-6(\boldsymbol{P\Lambda P^{-1}})^9+5(\boldsymbol{P\Lambda P^{-1}})^8\\&=\boldsymbol{P(\Lambda^{10}-6\Lambda^9+5\Lambda^8)P^{-1}}\end{aligned}$$

由 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&2\\1&2-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-5)=0$

得特徵值$\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=5$.

對于特徵值$\lambda_1=1$，解齊次線性方程組$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$A-E=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得特徵向量為

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

單位化得

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix}.$$

對于特徵值$\lambda_2=-1$，解齊次線性方程組$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&3&2\\2&2&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得特徵向量為

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},$$

單位化得

$$\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}.$$

對于特徵值$\lambda_3=5$，解齊次線性方程組$(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-3&1&2\\1&-3&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得特徵向量

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

單位化得

$$\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}.$$

令矩陣

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix},$$

則$\boldsymbol{P}$即為所求正交矩陣，且$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 5\end{pmatrix}$,

由于

$$\boldsymbol{\Lambda}^{10}-6\boldsymbol{\Lambda}^9+5\boldsymbol{\Lambda}^8=\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 5\end{pmatrix}^{10}-6\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 5\end{pmatrix}^{9}+5\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 5\end{pmatrix}^{8}$$

$$=\begin{pmatrix}1-6+5 & & \\ & 1+6+5 & \\ & & 5^{10}-6\cdot 5^9+5\cdot 5^8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 12 & \\ & & 0\end{pmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{10}-6\boldsymbol{A}^9+5\boldsymbol{A}^8=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Lambda}^{10}-6\boldsymbol{\Lambda}^9+5\boldsymbol{\Lambda}^8)\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & & \\ & 12 & \\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 2 & -4\\ 2 & 2 & -4\\ -4 & -4 & 8\end{pmatrix}.$$

HD 3. 已知二次型 $f=4x_1^2+\left(2+\frac{a}{2}\right)x_2^2+\left(2+\frac{a}{2}\right)x_3^2+(4-a)x_2x_3.$

(1) 求它所所對應的矩陣 A 及其秩 R(A);

(2) 當 R(A)=2 時求正交變換 x=Qy, 使得二次型可化為標準形.

解 (1)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 2+\frac{a}{2} & 2-\frac{a}{2}\\ 0 & 2-\frac{a}{2} & 2+\frac{a}{2}\end{pmatrix},$$

當$a=0$時,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 2+\frac{a}{2} & 2-\frac{a}{2}\\ 0 & 2-\frac{a}{2} & 2+\frac{a}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以 R(A)=2.

當$a \neq 0$時,

$$2+\frac{a}{2}\neq 2-\frac{a}{2},$$

于是 R(A)=3.

(2)當 R(A)=2 時,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}4-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 2\\ 0 & 2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-4)^2=0$$

得特徵值為$\lambda_1=\lambda_2=4, \lambda_3=0$.

對于特徵值$\lambda_1=\lambda_2=4$, 解齊次線性方程組$(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

取線性無關特徵向量為

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$正交，所以只需單位化，得

$$\boldsymbol{q}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{q}_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

對于特徵值$\lambda_3=0$，解齊次線性方程組$(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由