中国科学技术大学

University of Science and Technology of China


# 测量的不确定度

物理实验教学中心

# 内容大纲

USTC

1 测量的概念和常用词汇

2 测量误差的来源和类别

3 从误差到不确定度

# 1. 测量的概念和常用词汇

USTC

- 测量
  - 直接测量：长度、质量、时间等
  - 间接测量：重力加速度、速度等
  - 等精度测量：同人、同法、同仪器、同条件下对同一物理量进行多次测量
  - 真值：物理量的真实值 （一般不知道）
- 测量误差 = 测量值 - 真值

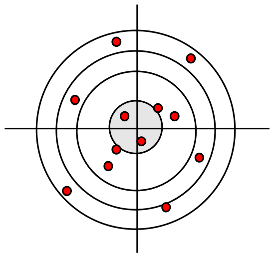
# 测量的正确度、精密度和精确度



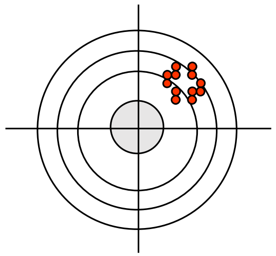
**正确度**：测量值与真值的接近程度。反映测量结果系统误差大小的术语。

**精密度**：重复测量所得测量结果相互接近的程度。反映测量结果随机误差大小的术语。

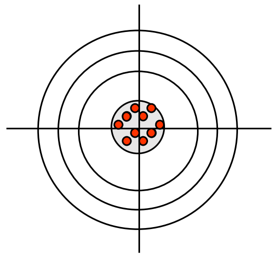
**精确度**：综合评定测量结果的重复性和接近真值的程度。反映随机误差和系统误差的综合效果。



正确度高
精密度低



精密度高
正确度低



精密度、正确度
精确度均高

# 2. 测量误差的来源和类别



## 测量误差的来源

- 方法误差

  测量方法或测量原理本身所引起的

- 仪器误差

  测量设备或仪器本身固有的各种因素的影响

- 环境误差

  周围环境的影响

- 主观误差

  测量操作人员素质的影响

# 误差的类别

USTC

- 系统误差
  - 公式近似
  - 仪器结构不完善
  - 生理、心理因素
- 随机误差
  - 环境振动，热起伏，空气扰动，电磁场干扰，气压及湿度的变化等因素以及它们的综合影响。具有随机性。

# 系统误差



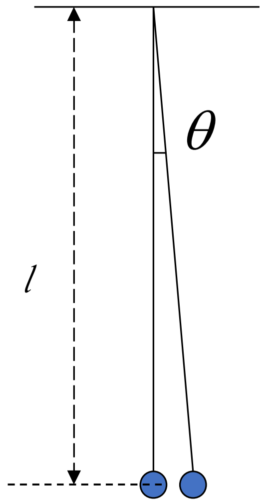
## 方法误差：公式近似

- 单摆周期公式：　$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2} + \cdots\right)} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}A}$$

$$A = 1 \quad (\theta = 0°)$$

$$A = 1.0005 \quad (\theta = 5°)$$




- 绝热系统：补偿法

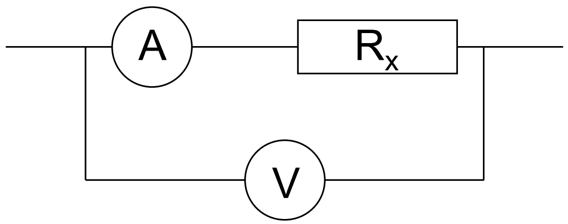
# 系统误差

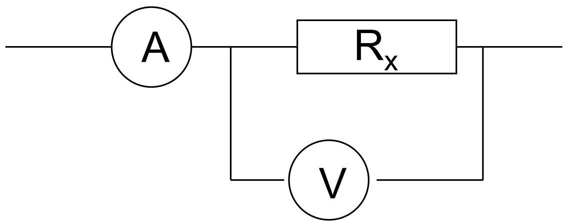


## 方法误差：公式近似

➢ 伏安法测电阻

- 内接法　$R_x > \sqrt{R_A \cdot R_V}$
- 外接法　$R_x < \sqrt{R_A \cdot R_V}$



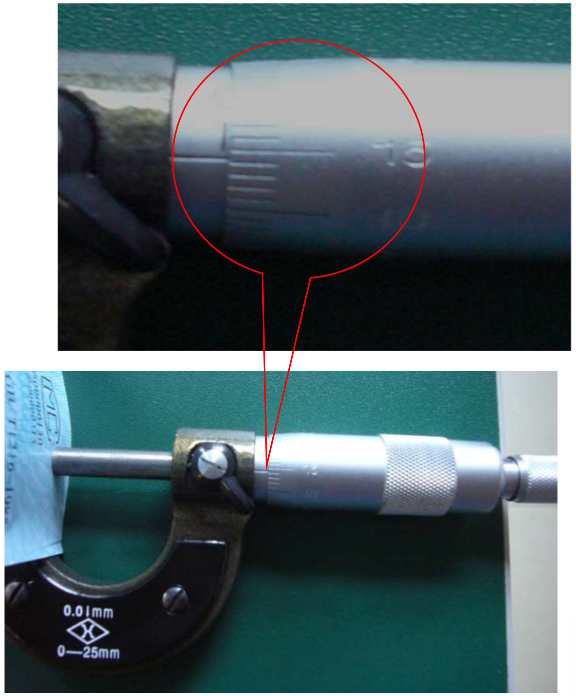




合理选择可减小电表内阻引入的误差

# 系统误差

## 仪器误差：结构不完善

- 螺旋测微计零点不准确　(零点校准)　$l = l_1 - l_0$

# 系统误差



## 仪器误差：结构不完善

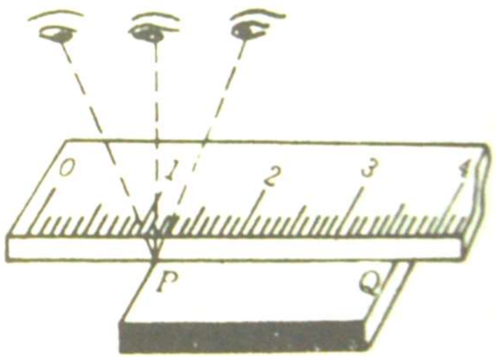
- 天平不等臂 (交换测量)　　$m=\sqrt{m_1\cdot m_2}$

# 系统误差

## 个人误差：生理、心理因素

按钮超前、滞后

斜视



# 随机误差



随机误差也称为偶然误差，是由于在测定过程中一系列有关因素微小的随机波动而形成的具有相互抵偿性的误差。

其产生的原因是分析过程中种种不稳定随机因素的影响，如室温、相对湿度和气压等环境条件的不稳定，环境振动和电磁场的干扰，分析人员操作的微小差异以及仪器的不稳定等。

单次测量的随机误差没有规律，但多次测量的随机误差却服从统计规律，通过对测量数据的统计处理，能在理论上估计其对测量结果的影响。

## 3. 从误差到不确定度



测量误差 = 测量值-真值

一般不知道!!

$$X = x \pm \Delta x$$

如何描述?

**测量误差 → 测量的不确定度**

$$X = x \pm U_p$$

不确定度$U_p$：代表测量值$x$不确定的程度，也是对测量误差的可能值的测度，对待测真值可能存在的范围的估计。

## 不确定度的分类



A类不确定度：

由观测列统计分析评定，也称统计不确定度（多次等精度测量）。

B类不确定度：

不按统计分析评定，也称非统计不确定度。

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China


# 感谢观看

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

# A类不确定度的评定

物理实验教学中心

# 内容大纲

# 1. 测量列的标准差

USTC

测量列：

对物理量$X$做$n$次等精度测量，得到包含$n$个测量值$x_1, x_2, \ldots, x_n$的一个测量列。

测量列的平均值：

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

平均值为最佳值，也称期望值，是最可靠的。

测量列的标准差：

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

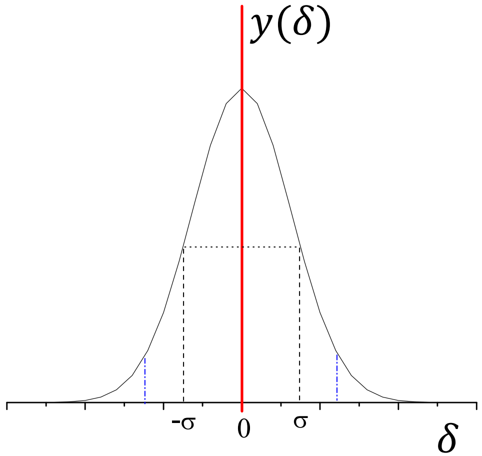
当测量次数足够多时，测量列中任一测量值与平均值的偏离落在[-σ,σ]区间的概率为68.3%。

# 高斯分布



当$n$趋于∞时，物理量$X$的质量指标$\delta$（$\delta = x - \bar{x}$）的概率密度分布为高斯函数。

$$y(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}$$



正态分布曲线

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} Y(\delta) d\delta = 0.683$$

$$\int_{-2\sigma}^{2\sigma} Y(\delta) d\delta = 0.954$$

$$\int_{-3\sigma}^{3\sigma} Y(\delta) d\delta = 0.997$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(\delta) d\delta = 1$$

高斯分布（或正态分布）的特点：

- 对称性
- 单峰性
- 有界性
- 抵偿性

3σ判据：

测量次数无限多时，测量误差的绝对值大于3σ的概率仅为0.3%。对于有限次测量，这种可能性是微乎其微，因此可以认为是测量失误，应予以剔除。

# 2. 测量列的A类标准不确定度



算数平均值的标准差：

$$u_A = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}}$$

$u_{\mathrm{A}}$为测量列的A类标准不确定度。

对正态分布：

$$P\left(X \in \left[\overline{x} - u_A, \overline{x} + u_A\right]\right) = 0.683$$

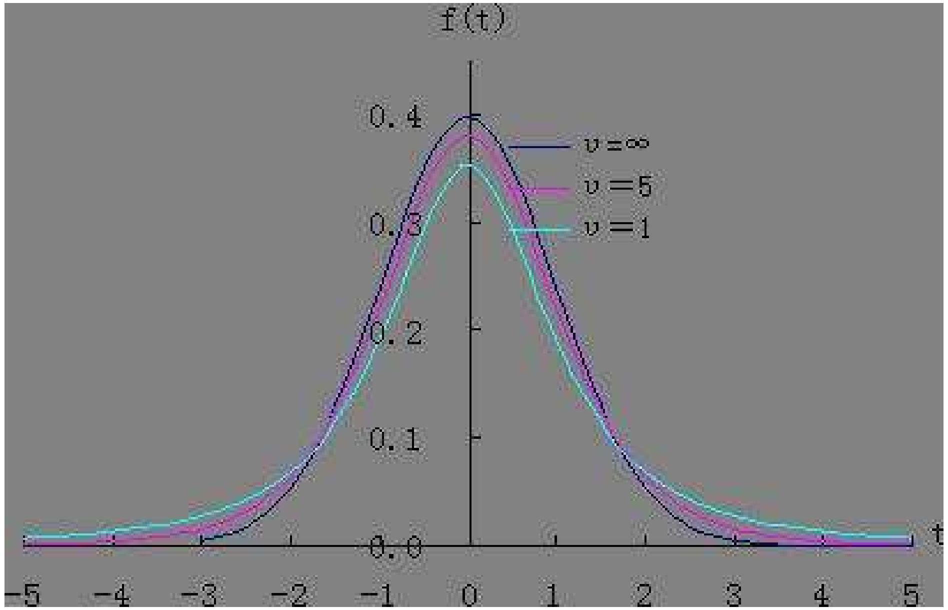
$$P\left(X \in \left[\overline{x} - 2u_A, \overline{x} + 2u_A\right]\right) = 0.954$$

$$P\left(X \in \left[\overline{x} - 3u_A, \overline{x} + 3u_A\right]\right) = 0.997$$

# 3. 有限次测量的情况和$t$因子



$t$分布：当测量次数有限时，概率密度曲线变得平坦，成为$t$分布。




$t$分布与正态分布比较

## $t$分布下的A类标准不确定度

为获得相同的置信概率，需扩大置信区间。

$$u_t = t_p u_A$$

$$\left[-t_p u_A, t_p u_A\right]$$

# $t_p$与测量次数n的关系



| n/t/p | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.68 | 1.32 | 1.20 | 1.14 | 1.11 | 1.09 | 1.08 | 1.07 | 1.06 | 1 |
| 0.90 | 2.92 | 2.35 | 2.13 | 2.02 | 1.94 | 1.86 | 1.83 | 1.76 | 1.65 |
| 0.95 | 4.30 | 3.18 | 2.78 | 2.57 | 2.46 | 2.37 | 2.31 | 2.26 | 1.96 |
| 0.99 | 9.93 | 5.84 | 4.60 | 4.03 | 3.71 | 3.50 | 3.36 | 3.25 | 2.58 |

# 4. 计算实例



题目：测量某一长度得到9个值：42.35，42.45，42.37，42.33，42.30，42.40，42.48，42.35, 42.29（单位均为 mm）。求该测量列的平均值、标准差和置信概率为0.68、0.95、0.99时的A类不确定度。

解：

平均值：$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=42.369\,\text{mm}$　　标准差：$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}=0.064\,\text{mm}$

平均值的标准差：$u_A=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}=0.021\text{mm}$

$n$=9，查表得不同置信概率下的A类不确定度$t_p u_A$分别为：

P=0.68时，　$t_p$= 1.07，　$t_p u_A$=1.07X0.021 mm = 0.022 mm。

P=0.95时，　$t_p$= 2.31，　$t_p u_A$=2.31X0.021 mm = 0.048 mm。

P=0.99时，　$t_p$= 3.36，　$t_p u_A$=3.36X0.021 mm = 0.070 mm。

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China


# 感谢观看

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

# B类不确定度的评定

物理实验教学中心

# 内容大纲



1. 测量仪器的最大允差
2. 测量的估计误差
3. B类不确定度的评定

# 1. 测量仪器的最大允差



B类不确定度：测量中不符合统计规律的不确定度。

- 测量仪器的最大允差
- 测量的估计误差

# 测量仪器的最大允差



## 仪器的最大允许偏差 $\Delta_{仪}$

- 包含了仪器的系统误差，也包含了环境以及测量者自身可能出现的变化（具随机性）对测量结果的影响。
- 最大允差可从仪器说明书中得到，它表征同一规格型号的合格产品，在正常使用条件下，可能产生的最大误差。
- 测量值与真值的误差在[$-\Delta_{仪}$, $\Delta_{仪}$]范围内的置信概率为1。
- 一般而言，为仪器最小刻度所对应的物理量的数量级（但不同类型的仪器差别很大）。

## 常用仪器的最大允差



- 钢卷尺：1m/1mm ±0.8mm；2m/1mm ±1.2mm
- 游标卡尺： 125mm/0.02mm ±0.02mm
  300mm/0.02mm ±0.05mm
- 螺旋测微器： 25mm/0.01mm ±0.004mm

- 指针电表级别：5.0、2.0、1.5、1.0、0.5、0.2、0.1等
- 指针电表：量程×级别 %
- 数字电表：读数×C%+稳定显示后一位的几个单位

# 常用仪器的最大允差



电阻箱:

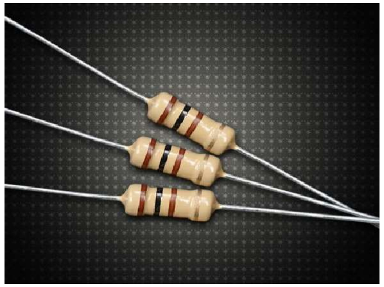
ZX38p/11 型交直流电阻箱

标准代号：JB/T10057-1999 . JB/T8225-1999 15······20······25℃

| 盘　名 | X10kΩ | X1kΩ | X100Ω | X10Ω | X1Ω | X0.1Ω |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 准确度等级指数 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 | 1 | 2 |
| 测试电流 | 4mA | 45mA | 45mA | 140mA | 450mA | 450mA |
| 时间常数（μS） | <1 | <0.1 | <0.1 | <0.1 | <1 | —— |

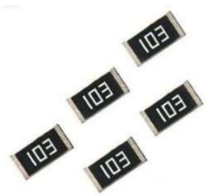
0···0.2···0.5W　　$R_0$ = 20mΩ ± 10mΩ　　$L_0$ = 2μH


色环电阻:



- 最后一环表示误差，常用有：银色（10%）、金色（5%）、棕色（1%）。

贴片电阻:




- 阻值误差精度常用的是±1%和±5%
- ±5%精度的常用3位数来表示

  103代表10 KΩ（±5%）
- ±1%精度的常用4位数来表示

# 量程对最大允差的影响

USTC

模拟式仪表： $\Delta_{仪}$=量程×级别%

量程为100 V的1.0级电压表，测量一个电池的电动势为1.5 V。则仪表的最大允差为1.0 V。若量程为10V，则降低到0.1 V。

数字式仪表： $\Delta_{仪}$=读数×**C%** + 稳定显示后一位的几个单位

某精度为1.0级的三位半电表，用20.00 V量程测量电池电动势，读数为1.50 V。按其说明书，C为1，假设末位数字跳动5个单位，则测量结果的最大允差为：

(0.015+0.05) =0.065 V。

若改用2.000 V量程，则为（0.015+0.005）= 0.020 V。

# 2. 测量的估计误差

USTC

## 一般情况 $\Delta_{估}<\Delta_{仪}$

模拟式仪表： $\Delta_{估}$<最小分度的一半

数字式仪表： $\Delta_{估}=0$

## 特殊情况 $\Delta_{估}>\Delta_{仪}$

- 秒表计时的估计误差（开始和结束的判断），$\Delta_{估}=0.2$ s 远大于$\Delta_{仪}=0.01$ s
- 难以将被测物两端与测量仪器的刻线对齐（实验装置原因）
- 几何光学实验中测量光学元件间距（暗室）

# 3. B类不确定度的评定



## ➢ B类不确定度的最大值

$$\Delta_{\mathrm{B}} = \sqrt{\Delta_{仪}{}^2 + \Delta_{估}{}^2}$$

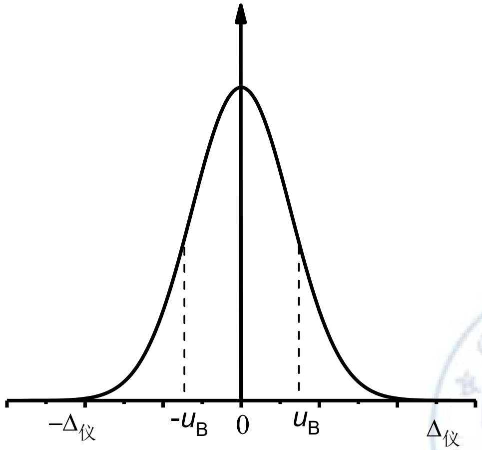
如果一个分量小于另一个分量的三分之一，可以忽略较小的分量，通常取$\Delta_B$等于$\Delta_{仪}$。

## ➢ B类标准不确定度

$$u_B = \frac{\Delta_B}{C}$$

正态分布：$C = 3$

$[-u_B, u_B]$，$P = 0.68$



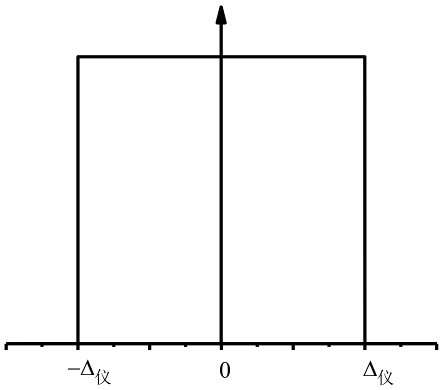

正态分布

# 均匀分布与三角分布



均匀分布：$C=\sqrt{3}$

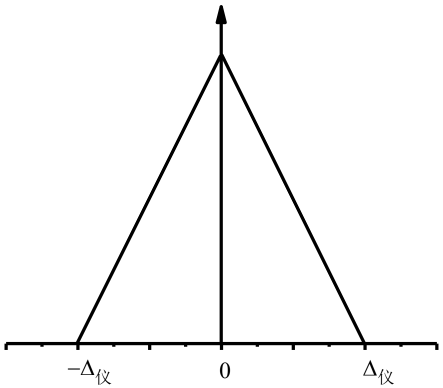
$[-u_B, u_B]$，$P=0.58$




均匀分布

三角分布：$C=\sqrt{6}$

$[-u_B, u_B]$，$P=0.65$




三角分布

# 几种常见仪器的误差分布与置信系数



几种常见仪器的误差分布与置信系数

| 仪器 | 米尺 | 游标卡尺 | 千分尺 | 物理天平 | 秒表 |
|---|---|---|---|---|---|
| 误差分布 | 正态 | 均匀 | 正态 | 正态 | 正态 |
| 置信系数C | 3 | $\sqrt{3}$ | 3 | 3 | 3 |

# 不同置信概率下的B类不确定度



不同置信概率下的B类不确定度： $k_P \dfrac{\Delta_B}{C}$

三种分布下置信概率P与置信因子$k_p$的关系

| $k_p$ \ P | 0.500 | 0.577 | 0.650 | 0.683 | 0.900 | 0.950 | 0.955 | 0.990 | 0.997 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 正态分布 | 0.675 | | | 1.000 | 1.650 | 1.960 | 2.000 | 2.580 | 3.000 |
| 均匀分布 | 0.877 | 1.000 | | 1.183 | 1.559 | 1.645 | 1.654 | 1.715 | 1.727 |
| 三角分布 | 0.717 | 0.862 | 1.000 | 1.064 | 1.675 | 1.901 | 1.929 | 2.204 | 2.315 |

# 计算实例



题目：用天平称量一个圆柱体的质量为14.00 g，天平的最大允差为0.04 g。求置信概率为0.95时，圆柱体质量测量的B类不确定度。

解：天平的仪器误差分布属于正态分布，查表P = 0.95 时：$k_p$=1.96

$$u_B = k_P \frac{\Delta_B}{C} = 1.96 \times \frac{0.04}{3} = 0.026\,\mathrm{g} \quad (\mathrm{P} = 0.95)$$

中国科学技术大学

University of Science and Technology of China


# 感谢观看

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China


# 不确定度的合成

物理实验教学中心

# 内容大纲



1. 合成标准不确定度和展伸不确定度
2. 测量结果的表示
3. 不确定度评定实例

# 1. 合成标准不确定度和展伸不确定度



## 合成标准不确定度

$$U = \sqrt{u_A{}^2 + u_B{}^2}$$

（A类不确定度和B类不确定度是相互独立的）

$t$因子修正后有（$P$=0.68）

$$U_{0.68} = \sqrt{\left(\mathrm{t}_{0.68} u_A\right)^2 + u_B{}^2} = \sqrt{\left(\mathrm{t}_{0.68} u_A\right)^2 + \left(\Delta_{\mathrm{B}}/\mathrm{C}\right)^2}$$

# 展伸不确定度



展伸不确定度：增大置信概率的不确定度，也叫扩展不确定度

$$U_{\mathrm{P}} = \sqrt{\left(\mathrm{t_P} u_A\right)^2 + \left(\mathrm{k_P}\Delta_{\mathrm{B}}/\mathrm{C}\right)^2}$$

相同置信概率的A、B类不确定度才可以按平方和来合成

$$U_{0.95} = \sqrt{\left(\mathrm{t}_{0.95} u_A\right)^2 + \left(\frac{k_{0.95}\Delta_{\mathrm{B}}}{C}\right)^2}$$

$$U_{0.99} = \sqrt{\left(\mathrm{t}_{0.99} u_A\right)^2 + \left(\frac{k_{0.99}\Delta_{\mathrm{B}}}{C}\right)^2}$$

# 2. 测量结果的表示

USTC

测量结果的最终表达式

$$X = \left(\overline{x} \pm U_{0.95}\right) \text{ 单位} \qquad (P=0.95)$$

也可以用相对不确定度的形式表示

$$X = \overline{x}(1 \pm U_{\mathrm{r}}) \text{ 单位}, \quad U_{\mathrm{r}} = \frac{U_{0.95}}{\overline{x}} \times 100\%$$

如果没有标明置信水平，一般默认P=0.95。

# 3. 不确定度评定实例

USTC

题目：用千分尺测量一个球的直径$D$，测量了10次，结果如下表，求该球的直径及其不确定度。

| $D$/mm | 12.337 | 12.349 | 12.333 | 12.353 | 12.339 | 12.352 | 12.345 | 12.348 | 12.356 | 12.340 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

解：

平均值：$\overline{D}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}D_i=12.345\,\mathrm{mm}$　　标准差：$\sigma_D=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(D_i-\overline{D})^2}{n-1}}=0.008\,\mathrm{mm}$

千分尺最大允差：$\Delta_B=0.004\ \ \mathrm{mm}$

查表 $n=10$，$\mathrm{P}=0.95$ 时：$t_{\mathrm{p}}=2.26,\ k_{\mathrm{p}}=1.96$

$$U_{0.95}=\sqrt{\left(\mathrm{t}_{0.95}\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}\right)^2+\left(\frac{k_{0.95}\Delta_{\mathrm{B}}}{C}\right)^2}=\sqrt{\left(2.26\times\frac{0.008}{\sqrt{10}}\right)^2+\left(1.96\times\frac{0.004}{3}\right)^2}=0.007\,\mathrm{mm}$$

测量结果最终表示为

$$D=(12.345\pm0.007)mm\qquad(P=0.95)$$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China



# 感谢观看

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

# 间接测量量的不确定度

物理实验教学中心

# 内容大纲

# 1. 不确定度的传递与合成



间接测量物理量：

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_{\mathrm{n}})$$

如果$x_1$、$x_2$、…、$x_{\mathrm{n}}$ 为相互独立的直接测量的量，则有

$$U_P^2(y) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 u_P^2(x_i)$$

$u_p(x_i)$为直接测量量$x_i$在置信概率为$P$时的不确定度。

# 常用函数不确定度传递公式



函数表达式　传递（合成）公式

$$W = x \pm y \qquad U_x = \sqrt{U_x^2 + U_y^2}$$

$$W = x \cdot y \qquad \frac{U_W}{W} = \sqrt{(\frac{U_x}{x})^2 + (\frac{U_y}{y})^2}$$

$$W = \frac{x}{y} \qquad \frac{U_W}{W} = \sqrt{(\frac{U_x}{x})^2 + (\frac{U_y}{y})^2}$$

$$W = \frac{x^k y^n}{z^m} \qquad \frac{U_W}{W} = \sqrt{k^2(\frac{U_x}{x})^2 + n^2(\frac{U_y}{y})^2 + m^2(\frac{U_z}{z})^2}$$

$$W = kx \qquad U_W = kU_x, \qquad \frac{U_W}{W} = \frac{U_x}{x}$$

$$W = k\sqrt{x} \qquad \frac{U_W}{W} = \frac{1}{2}\frac{U_x}{x}$$

$$W = \sin x \qquad U_W = |\cos x| U_x$$

$$W = \ln x \qquad U_W = \frac{U_x}{x}$$

# 求不确定度传递公式的流程



1. 对函数求全微分（对加减法），或先取对数再求全微分（对乘除法）；
2. 合并同一分量的系数。合并时，有的项可以相互抵消，从而得到最简单的形式；
3. 系数取绝对值；
4. 将微分符号变为不确定度符号；
5. 求平方和。

以上是操作过程，不是数学推导。所谓“不确定度符号”，可以指各直接测量量的最大允差、标准差或合成不确定度等，但同一式中必须性质相同，具有相同的置信概率。这样，间接测量结果的置信概率不变。

# 求不确定度传递公式实例



用流体静力称衡法测固体密度，公式为

$$\rho = \frac{m}{m - m_1}\rho_0$$

求测量结果的不确定度表达式。

解： 两边取对数得： $\ln\rho = \ln m + \ln\rho_0 - \ln(m - m_1)$

求全微分得： $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dm}{m} + \frac{d\rho_0}{\rho_0} - \frac{d(m - m_1)}{m - m_1}$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dm}{m} + \frac{d\rho_0}{\rho_0} - \frac{dm}{m - m_1} + \frac{dm_1}{m - m_1}$$

# 求不确定度传递公式实例



合并同类项：
$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{-m_1 dm}{m(m-m_1)}+\frac{d\rho_0}{\rho_0}+\frac{dm_1}{m-m_1}$$

系数取绝对值并改成不确定度符号：

$$\frac{u_\rho}{\rho}=\left|\frac{m_1}{m(m-m_1)}\right|u_m+\left|\frac{1}{\rho_0}\right|u_{\rho_0}+\left|\frac{1}{m-m_1}\right|u_{m_1}$$

求平方和：
$$\left(\frac{u_\rho}{\rho}\right)^2=\left[\frac{m_1}{m(m-m_1)}u_m\right]^2+\left[\frac{1}{\rho_0}u_{\rho_0}\right]^2+\left[\frac{1}{m-m_1}u_{m_1}\right]^2$$

$$\frac{u_\rho}{\rho}=\sqrt{[\frac{m_1}{m(m-m_1)}]^2u_m^2+\frac{u_{\rho_0}^2}{\rho_0^2}+(\frac{1}{m-m_1})^2u_{m_1}^2}$$

## 2. 最大不确定度的合成（仅用于实验设计！）

USTC

在很多情况下，往往只需粗略估计不确定的大小，可采用较为保守的线性(算术)合成法则。

函数式

$$w = f(x, y, z, \ldots)$$

最大不确定度

$$\Delta w = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \cdot \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \cdot \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \cdot \Delta z + \cdots$$

$$\frac{\Delta w}{w} = \left|\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right| \cdot \Delta x + \left|\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right| \cdot \Delta y + \left|\frac{\partial \ln f}{\partial z}\right| \cdot \Delta z + \cdots$$

# 常用函数的最大不确定度算术合成公式

USTC

| 物理量的函数式 | 最大不确定度 | 相对不确定度 |
| --- | --- | --- |
| $W = x + y + z + \cdots$ | $\Delta x + \Delta y + \Delta z + \cdots$ | $\dfrac{\Delta x + \Delta y + \Delta z + \cdots}{x + y + z + \cdots}$ |
| $W = x \pm y$ | $\Delta x + \Delta y$ | $\dfrac{\Delta x + \Delta y}{x \pm y}$ |
| $W = kx$（$k$为常数） | $k\Delta x$ | $\dfrac{\Delta x}{x}$ |
| $W = xy$ | $x\Delta y + y\Delta x$ | $\dfrac{\Delta x}{x} + \dfrac{\Delta y}{y}$ |
| $W = x^n, (n = 1,2,3, \cdots)$ | $nx^{n-1}\Delta x$ | $n\dfrac{\Delta x}{x}$ |
| $W = \dfrac{x}{y}$ | $\dfrac{y\Delta x + x\Delta y}{y^2}$ | $\dfrac{\Delta x}{x} + \dfrac{\Delta y}{y}$ |
| $W = \sin x$ | $\cos x\, \Delta x$ | $\cot x\, \Delta x$ |
| $W = \tan x$ | $\dfrac{\Delta x}{\cos^2 x}$ | $\dfrac{2\Delta x}{\sin 2x}$ |
| $W = \ln x$ | $\dfrac{\Delta x}{x}$ | $\dfrac{\Delta x}{x \ln x}$ |

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China


# 感谢观看

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

# 有效数字

物理实验教学中心

# 内容大纲



1 有效数字及其保留规则

2 计算实例

# 1. 有效数字及其保留规则

USTC

- 测量结果中可靠的几位数加上不确定的一位数

  测量只写到开始有误差的那一位，该位数后：四舍六入五凑偶。

- 有效数字的位数与小数点无关

  0.123 V和123 mV（同为3位有效数字，与物理量单位无关）

  0.123 和0.1230 （分别为3位和4位有效数字）

  1.35和1.3500（分别为3位和5位有效数字）

# 物理量的有效数字

USTC

- 直接测量：仪器的最小分度+1位估读位
- 间接测量：与运算方式有关
  - 加减运算：最大不确定度分量决定：

    432.3+0.1263-2=430
  - 乘除运算：最少有效数字分量决定：

    $48 \mathrm{X} 3.2345/1.73^2=52$

    $48 \mathrm{X} 3.2345/0.173^2=5.2\mathrm{x}10^3$

# 其他情况下的有效数字

USTC

- 常数（如π等）多保留1位
- 中间计算结果的有效数字：可多保留1位

# 不确定度的有效数字



- 不确定度的有效数字

  保留1到2位有效数字；

- 最终结果的有效数字

  物理量的有效数字与不确定度对齐。

# 2. 计算实例



测量圆柱体合金的密度，求标准不确定度

已知：$m$ =14.00 g，允差0.04 g

直径$D$用千分尺，高$H$用游标卡尺

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $D$/mm | 10.502 | 10.488 | 10.516 | 10.480 | 10.495 | 10.470 |
| $H$/mm | 20.00 | 20.02 | 19.98 | 20.00 | 20.00 | 20.02 |

# 直径的不确定度



| $D$/mm | 10.502 | 10.488 | 10.516 | 10.480 | 10.495 | 10.470 |
|---|---|---|---|---|---|---|

$\bar{D}=10.4918 \quad mm$ 中间结果可多保留一位

$$u_{AD}=\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}=0.007 \quad mm$$

$$u_{BD}=\frac{\Delta_D}{C}=\frac{0.004}{3}=0.0013 \quad mm$$

$$u_D=\sqrt{\left(t_p\times u_{AD}\right)^2+u_{BD}{}^2}$$

$$=\sqrt{\left(1.11\times 0.007\right)^2+0.0013^2}$$

$$=0.008 \quad mm$$

$$D=\bar{D}\pm u_D=(10.492\pm 0.008) \quad mm \quad \left(P=0.683\right)$$

# 高的不确定度

USTC

| $H$/mm | 20.00 | 20.02 | 19.98 | 20.00 | 20.00 | 20.02 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |

$$\bar{H} = 20.003 \quad mm$$

中间结果可多保留一位

$$u_{AH} = \frac{\sigma_H}{\sqrt{n}} = 0.006 \quad mm$$

$$u_{BH} = \frac{\Delta_H}{C} = \frac{0.02}{\sqrt{3}} = 0.0115 = 0.012 \quad mm$$

$$u_H = \sqrt{\left(t_p \times u_{AH}\right)^2 + \left(k_p \times u_{BH}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(1.11 \times 0.006)^2 + (1.183 \times 0.012)^2}$$

$$= 0.016 \quad mm$$

$$H = \bar{H} \pm u_H = (20.003 \pm 0.016) \quad mm \quad (P = 0.683)$$

# 质量的不确定度



$m$ =14.00 g，允差0.04 g

$$u_{Bm} = \frac{0.04}{3} \approx 0.013 \quad g$$

$$\begin{aligned} u_m &= \sqrt{u_{Am}^2 + u_{Bm}^2} \\ &= \frac{0.04}{3} \\ &\approx 0.01 \quad g \end{aligned}$$

$$m = (14.00 \pm 0.01) \quad g \qquad (P = 0.683)$$

# 密度的不确定度



$$\rho = \frac{4m}{\pi D^2 H} = \frac{4\times 14.00}{3.1416\times 10.492^2\times 20.003} = 8.094\times 10^{-3}\, g/mm^3 \quad = 8.094\, g/cm^3$$

常数多取一位 3.1416

$$\frac{u_\rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{u_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2u_D}{\overline{D}}\right)^2 + \left(\frac{u_H}{\overline{H}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{0.01}{14.00}\right)^2 + \left(\frac{2\times 0.008}{10.492}\right)^2 + \left(\frac{0.016}{20.003}\right)^2}$$

$$= 0.0018$$

$$u_\rho = 8.094\times 0.0018 = 0.014\, g/cm^3$$

$$\rho = (8.094 \pm 0.014)\, g/cm^3 \quad (P = 0.683)$$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China


# 感谢观看