线性代数复习题

一、选择题

1. 设 A 为n阶矩阵，则下列说法中正确的是(B).

A. 若 A 是非零矩阵，则 A 可逆　　B. 若 A 可逆，则 A 没有全零行

C. 若 A 没有全零行，则 A 可逆　　D. 若 A 可逆，k为任意实数，则kA可逆

2. 设非零阵 A 满足等式$A^3=O$，则下列说法正确的是(A).

A. 矩阵 E+A 与 E-A 均可逆　　B. 矩阵 E-A 可逆，矩阵 E-A 不可逆

C. 矩阵 E+A 不可逆，矩阵 E-A 可逆　　D. 矩阵 E+A 与 E-A 均不可逆

3. 以下结论或等式正确的是(D).

A. 若$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$，且$\mathrm{A}\neq 0$，则$\mathrm{B}=\mathrm{C}$　　B. 若$\mathrm{A}\neq 0, \mathrm{B}\neq 0$，则$\mathrm{AB}\neq 0$

C. 若 A, B 均为零矩阵，　则有$\mathrm{A}=\mathrm{B}$　　D. 对角矩阵是对称矩阵

4. 设 A, B, C 是n阶矩阵，且 ABC=E，则必有(B).

A. CBA=E　　B. BCA=E　　C. BAC=E　　D. ACB=E

5. 设 A 为 3 阶矩阵，$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$为可逆矩阵，使得$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$，则

$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=$ (B).

A. $\alpha_1+\alpha_2$　　B. $\alpha_2+2\alpha_3$　　C. $\alpha_2+\alpha_3$　　D. $\alpha_1+2\alpha_2$

6. 若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$都是 4 维列向量，且 4 阶行列式$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m, |\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n$，则 4 阶行列式$|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2|=$ (B).

A. $m-n$　　B. $n-m$　　C. $m+n$　　D. $-(m+n)$

7. 设 A, B 为 3 阶矩阵，且$|A|=3, |B|=2, |A^{-1}+B|=2$，则$|A+B^{-1}|=$ (C).

A. 2　　B. -2　　C. 3　　D -3

8. 设$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中$c_1,c_2,c_3,c_4$为任意常数，则下列向量线性相关的为(C).

A. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　B. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$　　C. $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　　D. $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

9. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是(A).

A. $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$　　B. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

C. $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$　　D. $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$

10. 设$\lambda=2$是可逆矩阵 A 的一个特征值，则矩阵$(\frac{1}{3}\mathrm{A}^2)^{-1}$有一个特征值等于(B).

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

11. 设 A, B 为同阶可逆矩阵，且 A 是对称矩阵，则下列等式不成立的是(D).

A. $(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{B})^{-1}=\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$　　B. $(\mathrm{AB})^{\mathrm{T}}=\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$

C. $(\mathrm{AB}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\mathrm{B}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{-1}$　　D. $(\mathrm{AB}^{\mathrm{T}})^{-1}=\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{B}^{-1})^{\mathrm{T}}$

12. 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$下的标准形为$y_1^2+2y_2^2-2y_3^2$，其中$P=$

(p_1,p_2,p_3)，若$Q=(p_2,p_3,-p_1)$，则$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$x=Qy$下的标准形为(A).

A. $2y_1^2-2y_2^2+y_3^2$　B. $2y_1^2+y_2^2-2y_3^2$　C. $2y_1^2-y_2^2-2y_3^2$　D. $2y_1^2+2y_2^2+y_3^2$

二、填空题

1. 设矩阵$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$等价，则$a$= __-2__.
2. 设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=3$，A^*为 A 的伴随矩阵，若交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B，则$|BA^*|=$__-27__.
3. 若 4 阶矩阵 A 与 B 相似，矩阵 A 的特征值为$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，则行列式$|B^{-1}-E|=$__24__.
4. 设 3 阶方阵 A 按列分块为$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，且$|A|=5$，设$B=(\alpha_1+2\alpha_2,3\alpha_1+4\alpha_3,5\alpha_2)$，则$|B|=$__-100__.
5. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均为 3 维列向量，记矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，若$|A|=1$，则$|B|=$__2__.
6. 设 3 阶矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，向量$\alpha=\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，已知$A\alpha$与$\alpha$线性相关，则$a$=__-1__.
7. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性无关的 3 维列向量组，则向量组$A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$的秩为__2__.
8. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，E 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足 BA=B+2E，则$|B|=$__2__.
9. 已知方程组$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$无解，则$a$=__-1__.
10. 若二次型$f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$为正定二次型，则$a$的取值范围是__-2<a<1__.
11. 已知$f=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$经正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$可化为标准形$f=6y_1^2$，则$a$= __2__.
12. 如果矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & 6 \\ 3 & 6 & a \end{pmatrix}$正定，则$a$的取值范围是__9<a__.
13. 齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+3x_3+4x_4-5x_5=0 \\ x_2-2x_3-3x_4+x_5=0 \end{cases}$的解空间的维数是__3__.
14. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 2，3，λ，若行列式$|2A|=-48$，则$\lambda=$__5__.
15. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$的一个特征向量为$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，则$a$=__-1__.

三、计算题、简答题与证明题

1. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，计算$(A-2E)^{-1}$

Solution

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

2. 计算行列式

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ x+1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}.$$

Solution

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ x+1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}\overset{c_2+c_1}{\underset{\substack{c_3+(-1)c_1\\ c_4+c_1}}{=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & x\\ 1 & 0 & x & 0\\ 1 & x & 0 & 0\\ x+1 & x & -x & x\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{按第 1 行展开}}{=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}0 & x & 0\\ x & 0 & 0\\ x & -x & x\end{vmatrix}-x\begin{vmatrix}1 & 0 & x\\ 1 & x & 0\\ x+1 & x & -x\end{vmatrix}$$

$$=-x^3-x[-x^2+x^2-x^2(x+1)]$$

$$=x^4.$$

3. 设在R^3中, 线性变换T关于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}$, 求$T$在新基$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$下的矩阵.

Solution

$$\begin{pmatrix}2 & 4 & 4\\ -3 & -4 & -6\\ 2 & 3 & 8\end{pmatrix}$$

4. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$R^3$上的一个基, 线性变换$T$在该基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 1 & -3 & -2\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix},$$

求T在新基$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_3,\beta_2=\alpha_1-\alpha_2,\beta_3=\alpha_2+\alpha_3$下的矩阵.

Solution 从基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

T在基β_1,β_2,β_3下的矩阵为

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2&1&-1\\2&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&2\\1&-3&-2\\-2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-10&5\\11&12&-3\\8&16&-8\end{pmatrix}.$$

5. 已知$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$是$R^3$的一组基,

(1) 证明$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$也是$R^3$的一组基;

(2) 求由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵.

Solution (1)由于$|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{vmatrix}=4\neq0$, 所以$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关,

因此它是三维空间R^3的一组基.

(2)

$$\mathrm{P}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$$

6. 设 A 为已知的$m\times n$向量, $\mathrm{V}=\{\mathrm{A}x|x\in\mathrm{R}^n\}$.

(3) 验证 V 对通常的矩阵加法和数乘运算构成线性空间;

(4) 当 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2&1&2&-2\\1&-2&3&-1\\3&-1&5&-3\end{pmatrix}$ 时, 求 V 的一个基.

Solution (1)对任意$\alpha,\beta\in V$, 存在向量$x_1,x_2\in\mathrm{R}^n$, 使得$\alpha=\mathrm{A}x_1,\beta=\mathrm{A}x_2$.

于是$\alpha+\beta=\mathrm{A}x_1+\mathrm{A}x_2=\mathrm{A}(x_1+x_2),x_1+x_2\in\mathrm{R}^n$, 所以$\alpha+\beta\in V$.

对任意常数$k\in\mathrm{R}$, $k\alpha=k(\mathrm{A}x_1)=\mathrm{A}(kx_1),kx_1\in\mathrm{R}^n$,所以$k\alpha\in V$.

因此 V 对通常的矩阵加法和数乘运算构成线性空间

(2)当将 A 列分块为$\mathrm{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, 则

$$\mathrm{V}=\{\mathrm{A}x|x\in\mathrm{R}^4\}=\{x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4|x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T\in\mathrm{R}^4\},$$

即 V 是由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$生成的向量空间, 所以要求 V 的一个基, 只需求出向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大无关组即可. 由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&2&-2\\1&-2&3&-1\\3&-1&5&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-1\\0&5&-4&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

即得向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极无关组为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}.$$

7. 若n阶矩阵A与B相似, 证明$\mathrm{R(A)}=\mathrm{R(B)}$且$|A|=|B|$.

Solution 由于A与B相似, 所以存在可逆矩阵 P 使得$B=P^{-1}AP$.

由 P 可逆可知，$P = P_1 P_1 \cdots P_t$，其中$P_1, P_1, \cdots, P_t$是初等矩阵，于是 A 与 B 等价，
故$\mathrm{R(A)} = \mathrm{R(B)}$.

$$|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = |A|$$

8. 设λ_1, λ_2是对称阵 A 的两个不同的特征值，α_1, α_2是对应的两个特征向量，证明α_1与α_2正交.

Solution 已知$\mathrm{A}\alpha_1 = \lambda_1 \alpha_1$，$\mathrm{A}\alpha_2 = \lambda_2 \alpha_2$，$\lambda_1 \neq \lambda_2$, A 为对称矩阵，于是

$\lambda_1 \alpha_1^T \alpha_2 = (\lambda_1 \alpha_1^T)\alpha_2 = (\lambda_1 \alpha_1)^T \alpha_2 = (A\alpha_1)^T \alpha_2 = \alpha_1^T \mathrm{A}^\mathrm{T} \alpha_2 = \alpha_1^T (\mathrm{A}^\mathrm{T} \alpha_2) = \alpha_1^T (\lambda_2 \alpha_2) = \lambda_2 \alpha_1^T \alpha_2$,

所以 $(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_1^T \alpha_2 = 0$,

故 $\alpha_1^T \alpha_2 = 0$，即α_1与α_2正交.

9. 设n阶方阵 A 满足 $\mathrm{A}^2 - \mathrm{A} - 2\mathrm{E} = \mathrm{O}$，证明矩阵 A 和 A＋2E 均可逆，并求出$\mathrm{A}^{-1}$ 和 $(\mathrm{A} + 2\mathrm{E})^{-1}$.

Solution

$$\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O},$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) - 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O},$$
$$\boldsymbol{A} \cdot \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E},$$

所以 A 可逆，且$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{2}(\mathrm{A} - \mathrm{E})$.

又由 $A^2 - A - 2E = O$ 得$A^2 - A - 6E + 4E = O$,

即$(A - 3E)(A + 2E) = -4E$，$\frac{1}{4}(3\mathrm{E} - \mathrm{A})(A + 2E) = E$,

所以$A + 2E$可逆，且$(A + 2E)^{-1} = \frac{1}{4}(3\mathrm{E} - \mathrm{A})$.

10. 求一个正交变换把下列二次型化为标准型

(1) $f = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2 x_3$;

(2) $f = 2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3$;

Solution (1)

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

得 A 的特征值为$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

对应特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

将特征向量单位化，得正交变换矩阵

$$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\ \frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix},$$

在正交变换$x=Py$下，二次型化为标准形

$$f=y_1^2+2y_2^2+3y_3^2.$$

（2）$|A-\lambda E|=-(1+\lambda)^2(\lambda-2)$

得 A 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=2.$

特征向量为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

将特征向量正交化、单位化，得正交变换矩阵

$$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt3}{3}\\ \frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt3}{3}\\ 0&\frac{\sqrt6}{3}&\frac{\sqrt3}{3}\end{pmatrix},$$

在正交变换$x=Py$下，二次型化为标准形

$$f=-y_1^2-y_2^2+2y_3^2.$$

11. 已知$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\a\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\0\\b\\1\end{pmatrix}$，讨论参数$a,b$ 取何值时，

(1) β不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示；

(2) β能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表达式唯一；

(3) β能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表达式不唯一，并写出此表达式.

Solution 设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，对$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\beta)$做初等行变换，有

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\mid\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&b\\2&3&a&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&-1&2&b-2\\0&1&a-2&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&0&a&0\\0&0&0&b-3\end{array}\right),$$

(1)当$b\neq3$时，线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$无解，从而$\beta$不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示；

(2)当$b=3$且$a\neq0$时，由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,|\,\boldsymbol{\beta})\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&0&a&0\\0&0&0&b-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

知，线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$有唯一解，从而$\beta$能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一线性表示，表达式为

$$\beta=2\alpha_1-\alpha_2+0\cdot\alpha_3.$$

(3)当$b=3$且$a=0$时，由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,|\,\boldsymbol{\beta})\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&0&a&0\\0&0&0&b-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

知，线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$有无穷多解，

$$\begin{cases}x_1=2-3c,\\x_2=-1+2c,\\x_3=c,\end{cases}\quad c\text{ 为任意常数.}$$

从而β能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表达式不唯一，即

$$\beta=(2-3c)\alpha_1+(-1+2c)\alpha_2+c\alpha_3.$$

12. 设有向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$ 和向量组$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}-2\\a\\4\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}-2\\a\\a\end{pmatrix}$，确定常数$a$，使得向量组A能由向量组B线性表示，但是向量组B不能由向量组A线性表示.

Solution

(1)当$a+2\neq0$且$a-4\neq0$时，矩阵方程$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)X$有解. 即当$a\neq-2$且$a\neq4$时,向量组 A 可由向量组 B 线性表示.

(2)当$a-1=0$或$2-a-a^2=0$时，矩阵方程$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)X$无解. 即当$a=1$或$a=-2$时，向量组B不能由向量组A线性表示.

13. 设 A 为n阶实对称矩阵，且满足$A^3+A^2+A=3E$，证明 A 是正定矩阵.

Solution 求得 A 的全部特征值为 1（n 重），故 A 是正定矩阵.

14. 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和为 3，向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$是线性方程组$Ax=0$的两个解.

(1) 求 A 的特征值和特征向量；

(2) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵Λ，使得$Q^TAQ=\Lambda$.

Solution

(1) 特征值为 3，特征向量为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

(2)

$$\boldsymbol{Q}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{pmatrix}.$$