線性代數 作業 2

說明：要求給出計算過程，其中 P (Pass)類為必做題，HD (High Distinction) 類為選做題。

P 1. 設矩陣 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&5\\0&5&2\end{pmatrix}$, 求$A^2+3A+2B.$

解 $$\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}^2+3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&5\\0&5&2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&4\\0&4&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&6\\0&6&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-4&-10\\0&-10&-4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1+3-2&0&0\\0&5+3-4&4+6-10\\0&4+6-10&5+3-4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

P 2. 用初等行變換將下列矩陣化為行最簡形矩陣

(1) $\begin{pmatrix}2&2&0&2\\0&1&1&-1\\1&2&1&0\\2&5&3&-1\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\0&2&-3&1\\0&4&-7&-1\\0&3&-4&3\end{pmatrix}$;

解 (1) $$\begin{pmatrix}2&2&0&2\\0&1&1&-1\\1&2&1&0\\2&5&3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+(-1)r_1\\ r_4+(-2)r_1}]{\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&-1\\0&1&1&-1\\0&3&3&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+(-3)r_2]{r_3+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_1+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

(2) $$\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\0&2&-3&1\\0&4&-7&-1\\0&3&-4&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+(-4)r_1\\ r_4+(-3)r_1}]{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\0&0&-5&3\\0&0&-11&3\\0&0&-7&6\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1+(-1)r_2\\ r_3+11r_2\\ r_4+7r_2}]{-\frac{1}{5}r_2}\begin{pmatrix}0&1&0&-\frac{2}{5}\\0&0&1&-\frac{3}{5}\\0&0&0&-\frac{18}{5}\\0&0&0&\frac{9}{5}\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1+\frac{2}{5}r_3\\ r_2+\frac{3}{5}r_3\\ r_4+(-\frac{9}{5})r_3}]{-\frac{5}{18}r_3}$$
$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

P 3. 解下列齊次與非齊次線性方程

$$（1）\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0, \\ 3x_1+x_2+4x_3=0, \\ x_1-2x_2+3x_3=0; \end{cases} \quad （2）\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3-3x_4=0, \\ 2x_1+4x_2+2x_3+x_4=0, \\ 5x_1+3x_2+6x_3-x_4=0; \end{cases}$$

$$（3）\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+x_3=4, \\ x_1-x_2-x_3=6; \end{cases} \quad （4）\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4=1, \\ 2x_1-2x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2-2x_3-x_4=-1, \\ x_1-x_2+x_3+x_4=2. \end{cases}$$

解 （1）對該線性方程組的係數矩陣實施初等行變換，得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-3)r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1+(-1)r_2 \\ r_3+3r_2}]{-\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1+(-\frac{5}{2})r_3 \\ r_2+\frac{7}{2}r_3}]{-\frac{2}{13}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

原方程等價于 $\begin{cases} x_1=0, \\ x_2=0, \\ x_3=0. \end{cases}$

即為原方程的解。

（2）對該線性方程組的係數矩陣實施初等行變換，得

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+(-5)r_1]{r_2+(-2)r_1} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 14 & -2 & 7 \\ 0 & 28 & -4 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1+5r_2 \\ r_3+(-28)r_2}]{\frac{1}{14}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

從而原方程等價于 $\begin{cases} x_1+\frac{9}{7}x_3-\frac{1}{2}x_4=0, \\ x_2-\frac{1}{7}x_3+\frac{1}{2}x_4=0. \end{cases}$

移項，得原方程的解為 $\begin{cases} x_1=-\frac{9}{7}C_1+\frac{1}{2}C_2, \\ x_2=\frac{1}{7}C_1-\frac{1}{2}C_2, \\ x_3=C_1, \\ x_4=C_2, \end{cases}$

其中C_1, C_2為任意常數。

（3）對該線性方程組的增廣矩陣實施初等行變換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-3)r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1+(-2)r_2 \\ r_3+3r_2}]{-\frac{1}{8}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+\frac{1}{2}r_3]{-\frac{2}{3}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

從而原方程的解為 $\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=-2, \\ x_3=-3. \end{cases}$

（4）對該線性方程組的增廣矩陣實施初等行變換

$$\begin{pmatrix}1&-1&2&-1&1\\2&-2&1&0&1\\1&1&-2&-1&-1\\1&-1&1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+(-1)r_1\\r_4+(-1)r_1}]{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1&1\\0&0&-3&2&-1\\0&2&-4&0&-2\\0&0&-1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1&1\\0&2&-4&0&-2\\0&0&-3&2&-1\\0&0&-1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{\frac{1}{2}r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&2&-1&1\\0&1&-2&0&-1\\0&0&-1&2&1\\0&0&-3&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_4+(-3)r_3\\(-1)r_3}]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&-2&0&-1\\0&0&1&-2&-1\\0&0&0&-4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[(-\frac{1}{4})r_4]{r_2+2r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-4&-3\\0&0&1&-2&-1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2+4r_4\\r_3+2r_4}]{r_1+r_4}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix},$$

從而原方程的解為 $\begin{cases}x_1=1,\\x_2=1,\\x_3=1,\\x_4=1.\end{cases}$

P 4. 求下列矩陣的逆矩陣

(1) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}2&2&1\\3&4&3\\1&2&3\end{pmatrix}$;

解 (1) $\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0&0\\1&-1&1&0&1&0\\-1&1&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+(-1)r_1}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0&0\\0&-2&2&-1&1&0\\0&2&0&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1+(-1)r_2\\r_3+(-2)r_2}]{(-\frac{1}{2})r_2}$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&2&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{(\frac{1}{2})r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

所以逆矩陣為 $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix}2&2&1&1&0&0\\3&4&3&0&1&0\\1&2&3&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2+(-3)r_1\\r_3+(-1)r_1}]{\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}1&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}&1&0\\0&1&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-1)r_2]{r_1+(-1)r_2}$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&2&-1&0\\0&1&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}&1&0\\0&0&1&1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+(-\frac{3}{2})r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&3&-2&1\\0&1&0&-3&\frac{5}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&1&1&-1&1\end{pmatrix},$$

所以逆矩陣為 $\begin{pmatrix}3&-2&1\\-3&\frac{5}{2}&-\frac{3}{2}\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

P 5. 解下列矩陣方程

(1) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&5&-4\\2&4&-5\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0&3\\4&8\\1&9\end{pmatrix}$； (2) $X\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&0\\2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\2&1&4\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\\-1&2\end{pmatrix}$.

解 (1) $\left(\begin{array}{ccc|cc}1&1&-1&0&3\\2&5&-4&4&8\\2&4&-5&1&9\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&1&-1&0&3\\0&3&-2&4&2\\0&2&-3&1&3\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&1&-1&0&3\\0&1&1&3&-1\\0&2&-3&1&3\end{array}\right)$

$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-2&-3&4\\0&1&1&3&-1\\0&0&-5&-5&5\end{array}\right)\xrightarrow{r_3\times(-\frac{1}{5})}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-2&-3&4\\0&1&1&3&-1\\0&0&1&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1+2r_3}$

$\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&-1&2\\0&1&0&2&0\\0&0&1&1&-1\end{array}\right)$,

所以 $X=\begin{pmatrix}-1&2\\2&0\\1&-1\end{pmatrix}$.

(2) $\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&2&1&2\\-1&1&1&-1&1\\1&0&-1&3&4\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&2&1&2\\0&3&3&0&3\\0&-2&-3&2&2\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{3}}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&2&1&2\\0&1&1&0&1\\0&-2&-3&2&2\end{array}\right)$

$\xrightarrow[r_3+2r_2]{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1\\0&0&-1&2&4\end{array}\right)\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&0\\0&1&0&2&5\\0&0&1&-2&-4\end{array}\right)$,

所 以 $X^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0\\2&5\\-2&-4\end{pmatrix}$, 於是 $X=\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&5&-4\end{pmatrix}$.

(3) $\left(\begin{array}{ccc|cc}-1&1&1&1&2\\1&-1&1&1&0\\1&1&-1&-1&2\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|cc}-1&1&1&1&2\\0&0&2&2&2\\0&2&0&0&4\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\times(-1)}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&-1&-2\\0&2&0&0&4\\0&0&2&2&2\end{array}\right)\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{2}]{r_2\times\frac{1}{2}}$

$\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&-1&-2\\0&1&0&0&2\\0&0&1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_1+r_3]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&2\\0&0&1&1&1\end{array}\right)$,

得 $X\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\\1&1\end{pmatrix}$.

因此 $\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\\1&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$,

即 $\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}X^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&2&1\end{pmatrix}$.

再由 $\left(\begin{array}{cc|ccc}2&5&0&0&1\\1&3&1&2&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{cc|ccc}1&3&1&2&1\\2&5&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{cc|ccc}1&3&1&2&1\\0&-1&-2&-4&-1\end{array}\right)$

$\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_1+3r_2}\left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&-5&-10&-2\\0&1&2&4&1\end{array}\right)$

得 $X^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-5&-10&-2\\2&4&1\end{pmatrix}$,

所以 $X=\begin{pmatrix}-5&-10&-2\\2&4&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-5&2\\-10&4\\-2&1\end{pmatrix}$.

HD 1. 設 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，且$n\geq 2$為正整數，求$A^n-2A^{n-1}$

解 因為

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=2A.$$

所以 $A^n-2A^{n-1}=A^{n-2}(A^2-2A)=O$

HD 2. 設有齊次線性方程組 $\begin{cases}x_1+x_2+\lambda x_3=0,\\x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\\lambda x_1+x_2+x_3=0,\end{cases}$ 問當λ取何值時該方程組有零解？當λ取何值時該方程組有非零解？并在有非零解時求出全部解。

解 對該線性方程組的系數矩陣實施初等行變換，得

$$\begin{pmatrix}1&1&\lambda\\1&\lambda&1\\\lambda&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-\lambda)r_1]{r_2+(-1)r_1}\begin{pmatrix}1&1&\lambda\\0&\lambda-1&1-\lambda\\0&1-\lambda&1-\lambda^2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&\lambda\\0&\lambda-1&1-\lambda\\0&0&-(\lambda+2)(\lambda-1)\end{pmatrix}.$$

$\lambda\neq-2$且$\lambda\neq 1$時

$$\begin{pmatrix}1&1&\lambda\\0&\lambda-1&1-\lambda\\0&0&-(\lambda+2)(\lambda-1)\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&\lambda\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

所以只有零解。

當$\lambda=-2$或$\lambda=1$時有非零解。

當$\lambda=-2$時，

$$\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

非 零 解 為 $\begin{cases}x_1=c,\\x_2=c,\\x_3=c,\end{cases}$ 其中 c 為任意常數。

當$\lambda=1$時， $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$

非零解為其中 $\begin{cases}x_1=-c_1-c_2,\\x_2=c_1,\\x_3=c_2,\end{cases}$ c_1,c_2為任意常數。

HD 3. 設有非齊次線性方程組 $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0,\\2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1,\\3x_1+2x_2+px_3+7x_4=-1,\\x_1-x_2-6x_3-x_4=t,\end{cases}$ 討論 p,t 的取值對該方程組解的影響，并在有無窮多解時求其解。

解 對該線性方程組的系數矩陣實施初等行變換，得

$$\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&p&7&-1\\1&-1&-6&-1&t\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+(-3)r_1\\r_4+(-1)r_1}]{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\0&-1&-2&-2&-1\\0&-1&6+p&-2&-1\\0&-2&-4&-4&t\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1+(-1)r_2\\r_3+r_2\\r_4+2r_2}]{(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&0&-4&1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&8+p&0&0\\0&0&0&0&t+2\end{pmatrix},$$

當$t \neq -2$時，方程組無解。

當$t = -2$時，方程組有無窮多解。

當$t = -2$，$p \neq -8$時，原方程等價于 $\begin{cases} x_1 - 4x_3 + x_4 = -1, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ (8+p)x_3 = 0, \end{cases}$

移項，得原方程的解為 $\begin{cases} x_1 = -1 - c, \\ x_2 = 1 - 2c, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = c, \end{cases}$ 其中 c 為任意常數。