圖 Graphs

第十章

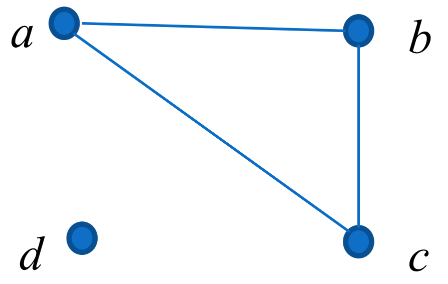
Outline

- 圖 Graphs
- 圖的表示 Representing Graphs
- 圖的同構 Graph Isomorphism
- 連通性 Connectivity
- 歐拉圖與哈密頓圖 Euler and Hamiltonian Graphs
- 平面圖 Planar Graph

圖 Graph (10.1)

- 一個圖$G = (V, E)$由頂點 (vertices) 集 V 和邊 (edges) 集 E 構成。

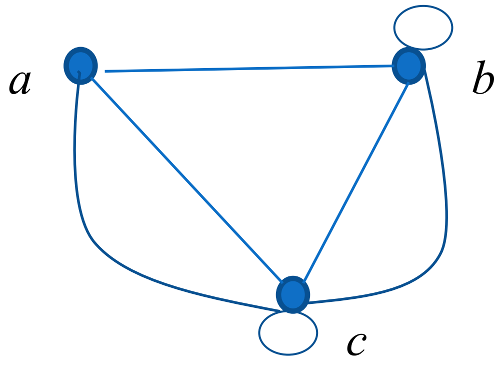
- 無限圖(infinite graph): 頂點集為無限集或有無限條邊。
- 有限圖(finite graph): 頂點集與邊集為有限集。
- 簡單圖(simple graph): 每條邊都連接兩個不同的頂點且沒有兩條不同的邊連接一對相同頂點。



- 多重圖(multigraph): 存在多條邊連接同一對頂點。

定義 Some Terminology

- 偽圖(pseudograph): 包含環或存在多重邊連接同一對頂點或同一個頂點。



- 有向圖(directed graph): 每條有向邊與一個頂點有序對(u, v)相關聯；否則為無向圖(undirected graph)。
- 混合圖(mixed graph): 既包含有向邊又包含無向邊的圖。

+ 圖術語

10.1表1:

類型	邊	允許多重邊?	允許環?
簡單圖 Simple graph	無向	否	否
多重圖 Multigraph	無向	是	否
偽圖 Pseudograph	無向	是	是
簡單有向圖 Simple directed graph	有向	否	否
有向多重圖 Directed multigraph	有向	是	是
混合圖 Mixed graph	有向和無向	是	是

例1

- 已知:
  A. $G=(V_1,E_1)$: $V_1=\{a,b,c,d\}$; $E_1=\{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}\}$
  B. $H=(V_2,E_2)$: $V_2=\{a,b,c,d\}$; $E_2=\{(a,c),(b,a),(b,d),(c,b),(d,c)\}$
- 畫出圖 G 和 H。

+ 基本術語(無向圖) (10.2)

無向圖 G = (V, E)中:

- 若 u, v 為 G 中的一條邊 e 的兩頂點,稱 u 和 v 在 G 裡鄰接或相鄰 (Adjacent or neighbors)，則稱邊 e “關聯” (incident)或連接(connect) 頂點 u 和 v。

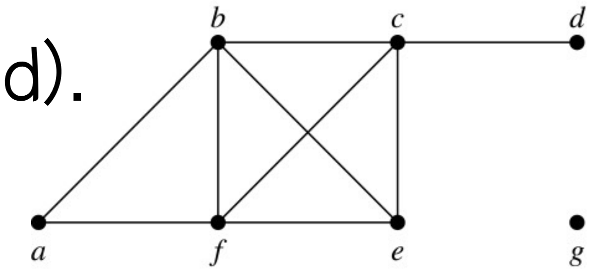
- v 的鄰居(Neighborhood of v), 記作 $N(v)$: 頂點 v 的所有相鄰頂點的集合。

- A 的鄰居(Neighborhood of set A), 記作 $N(A)$: 對於V的子集A, 與其中起碼一個頂點相鄰的所有點的集合。即 $N(A) = \bigcup_{v \in A} N(v)$.

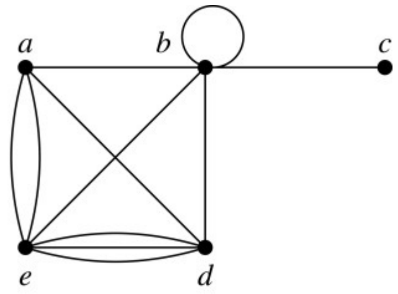
- v的度(degree of v), 記作 deg(v): 與該頂點 v 相關聯的邊的數目。
  - v為孤立的(isolated): deg(v) = 0
  - v為懸掛的(pendant): deg(v) = 1

例2

- 對於下列的圖G和H:
  A. 求各頂點的度(degree);
  B. 求各頂點的鄰居(neighborhood).



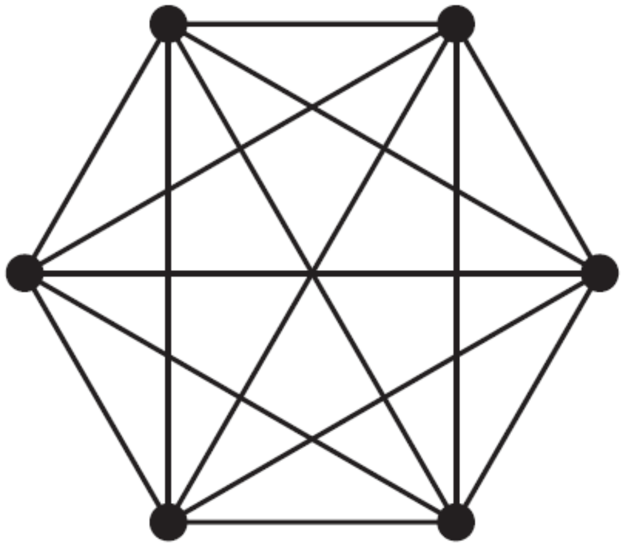
G



H

例3

- 在一個房間中的6人若都要跟其他所有人握手，總共有多少次“握手”?



握手定理 Handshaking Theorem

- 設 $G = (V, E)$ 為有 m 條邊的無向圖，則

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

定理

- 定理10.2.2:

  無向圖有偶數個度為奇數的頂點。

Proof: Let V_1 be the vertices of even degree and V_2 be the vertices of odd degree in an undirected graph $G = (V, E)$ with m edges.
Then

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v)$$

Then $\sum_{v \in V_1} \deg(v)$ must be even since $\deg(v)$ is even for each $v \in V_1$; and also

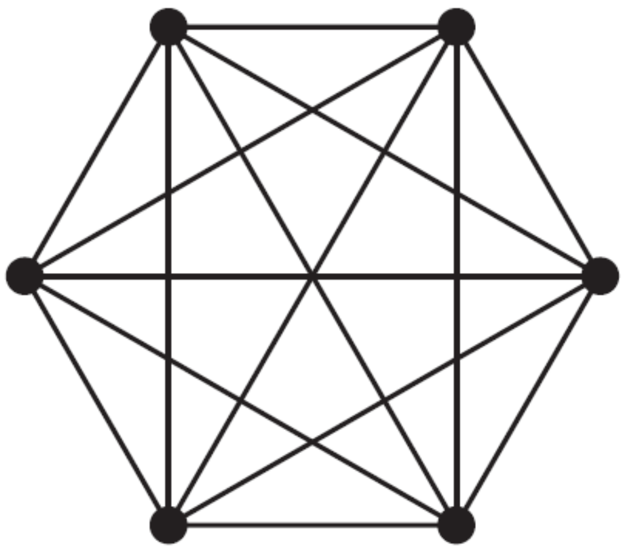
$\sum_{v \in V_2} \deg(v)$ must be even because $2m$ is even and $\sum_{v \in V_1} \deg(v)$ is also even.

Therefore, $|V_2|$ is even.

例3(續)

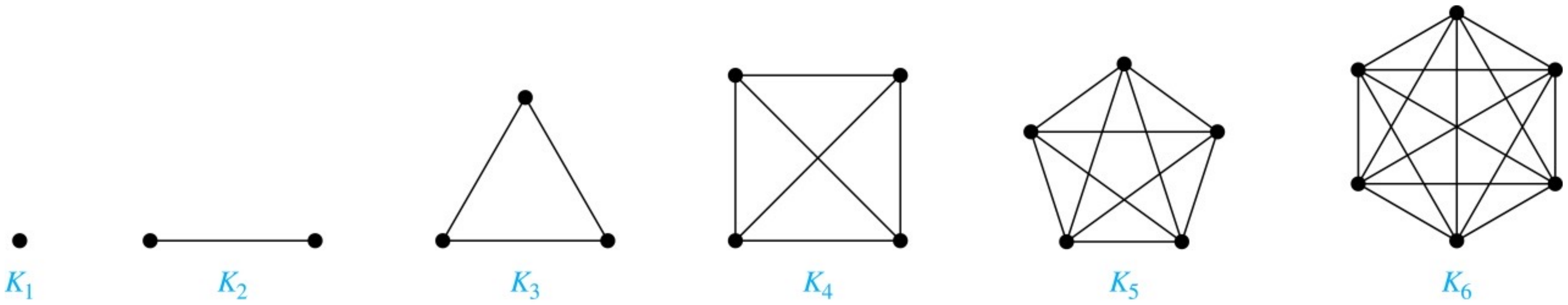
- 在一個房間中的6人若都要跟其他所有人握手，總共有多少次“握手”?

2m=6*5=30
m=15



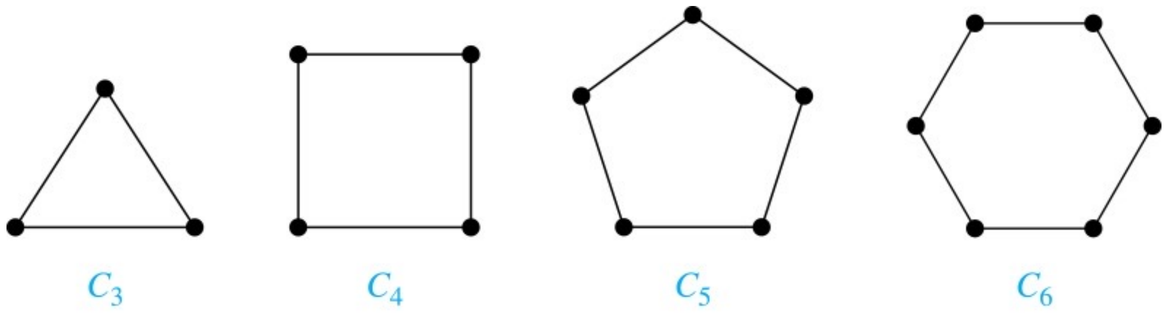
特殊的簡單圖

- 完全圖(Complete Graph), 記作K_n: n 個頂點的完全圖

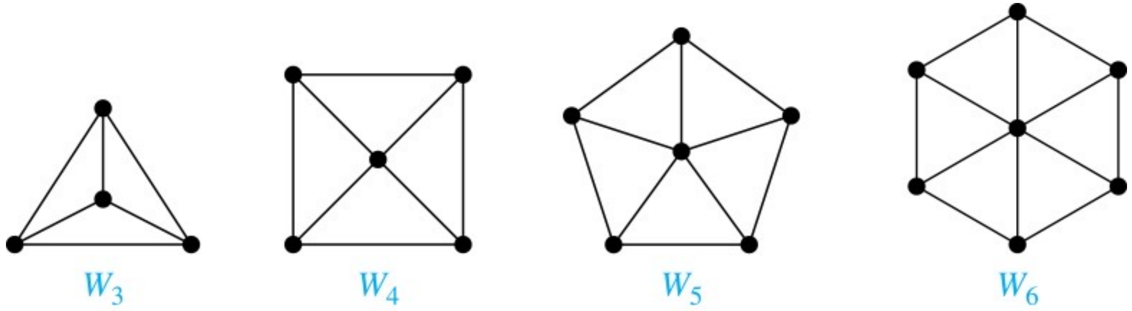


特殊的簡單圖(2)

- 圈圖(Cycle),記作 C_n $(n \geq 3)$: 由 n 個頂點及邊 $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$,⋯ , $\{v_{n\text{-}1}, v_n\}$, $\{v_n, v_1\}$組成.

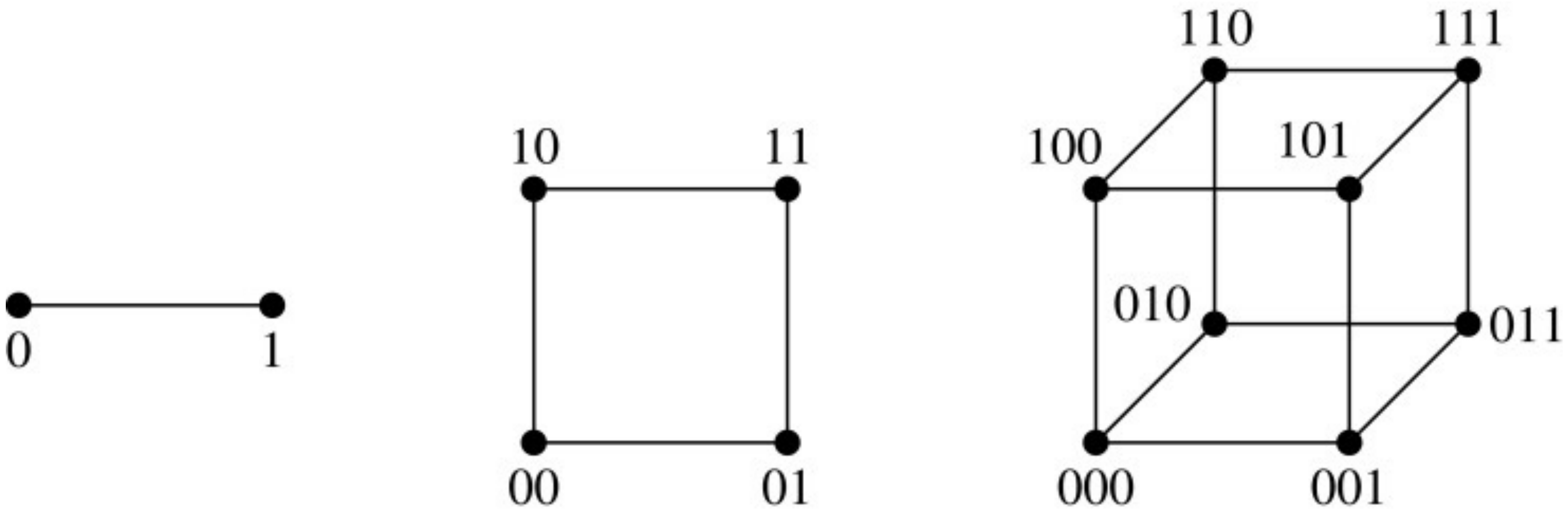


- 輪圖(Wheel), 記作 W_n: 在圈圖C_n上添加一頂點並把圈圖上的所有頂點與該點連接。



特殊的簡單圖(3)

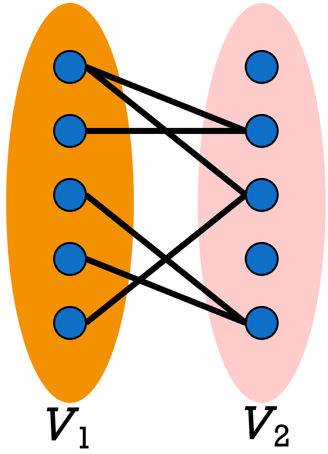
- n 立方體圖(*n-cube*), 記作 Q_n: 頂點表示2^n 個長度為n的位串的圖，兩頂點相鄰當且僅當位串恰有一位不同。



Q_1 Q_2 Q_3

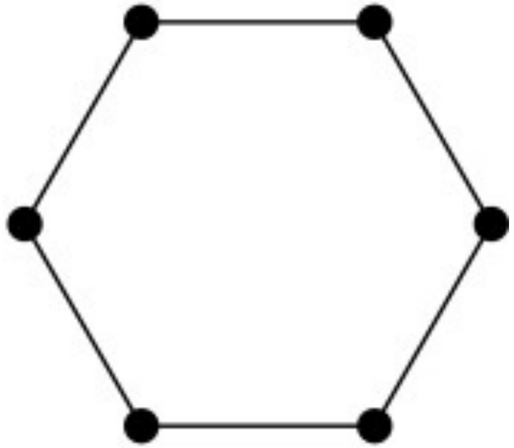
二分圖 Bipartite Graphs

若簡單圖G的頂點集可分成兩個不相交的非空集V_1和V_2，使得圖中的每條邊都連接V_1中的一個頂點與V_2中的一個頂點, 則稱G為二分圖(Bipartite graph)。



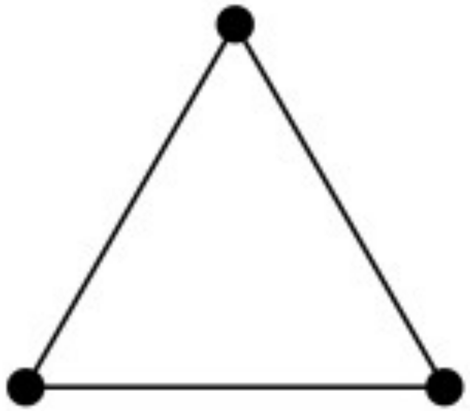
例:

Yes



C_6

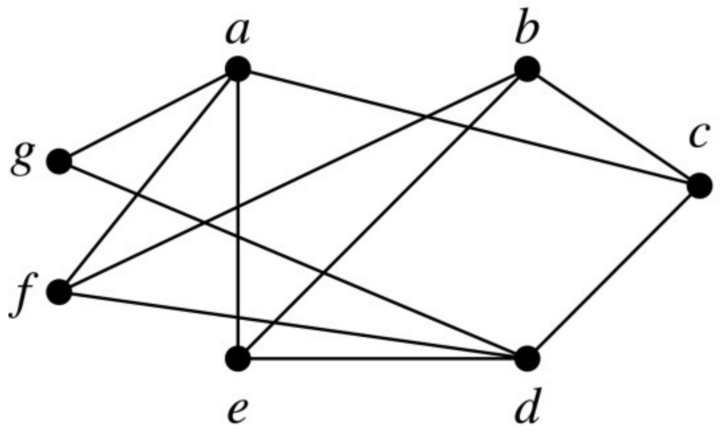
No



K_3

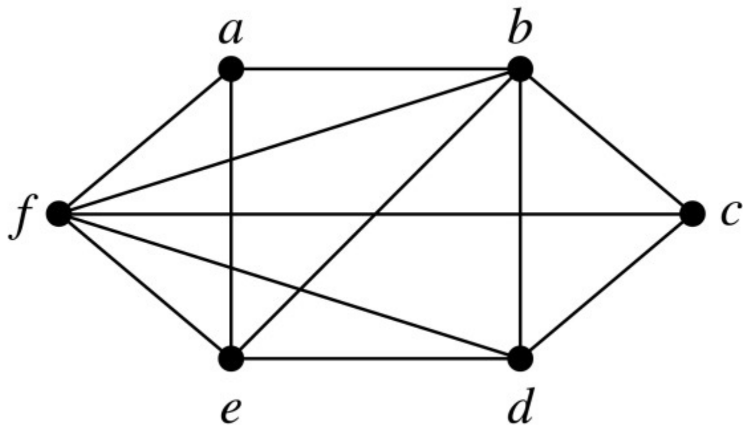
例4

圖G和H是否為二分圖(Bipartite graphs)?



G

是二分图

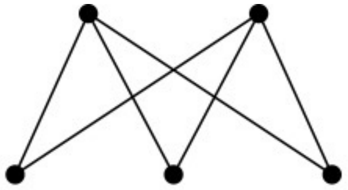


H

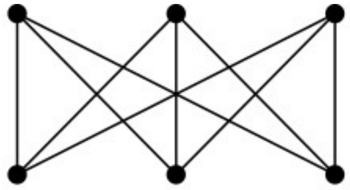
不是二分图

+ 完全二分圖 Complete Bipartite Graphs

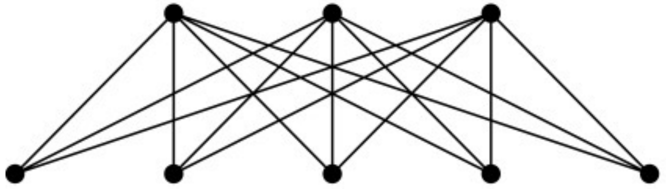
- 完全二分圖 (complete bipartite graph), 記作 $K_{m,n}$: 頂點劃分成分別含有m和n個頂點的兩子集V_1和V_2的圖, 且兩頂點間有邊當且僅當一頂點屬於V_1而另一頂點屬於V_2。



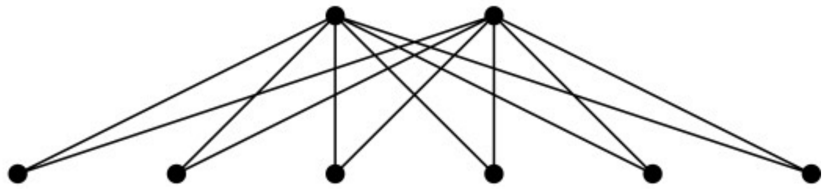
$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



$K_{3,5}$



$K_{2,6}$

例5 (任務匹配)

- 假設A, B, C, D, E五名員工受過一些工作培訓如下:
  - A與C能完成工作1;
  - B,C與E能完成工作2;
  - D能完成工作3;
  - C與E能完成工作4;
  - E能完成工作5.

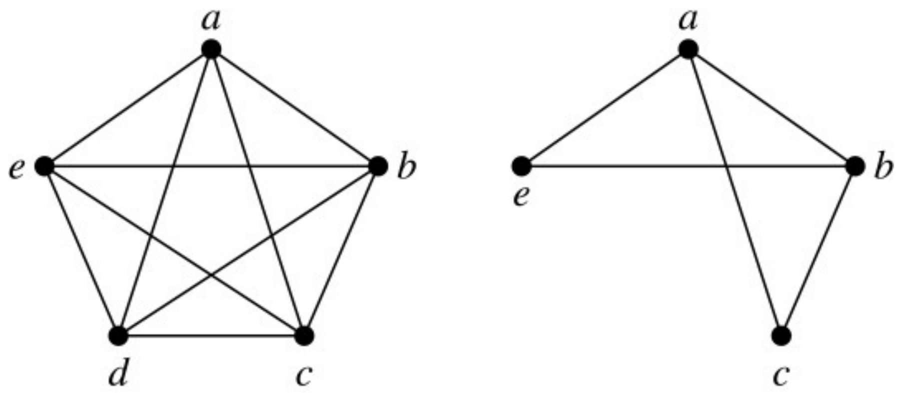
A. 完成各員工及相關工作能力的建模。

B. 若每項工作只能派遣一名員工且每名員工只負責一項工作, 應如何分配?

子圖 Subgraph

- 子圖 (Subgraph)：給定一圖 G = (V, E), 若 H = (W, F), 且 $W \subseteq V, F \subseteq E$，則稱 H 為 G 的子圖。

E.g.: 右圖為 K_5 和它的其中一個子圖：



鄰接表 Adjacency Lists (10.3)

- 鄰接表(adjacency list): 可給出與(不帶重邊的)圖中每個頂點相鄰的頂點。
  - 例:

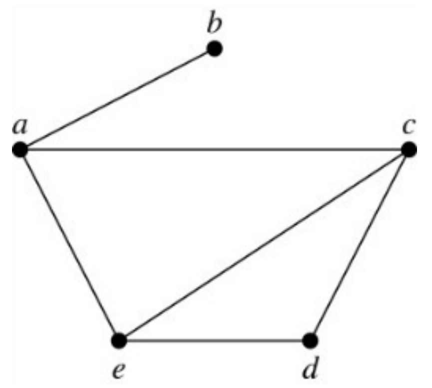


TABLE 1 An Adjacency List for a Simple Graph.

Vertex	*Adjacent Vertices*
a	b, c, e
b	a
c	a, d, e
d	c, e
e	a, c, d

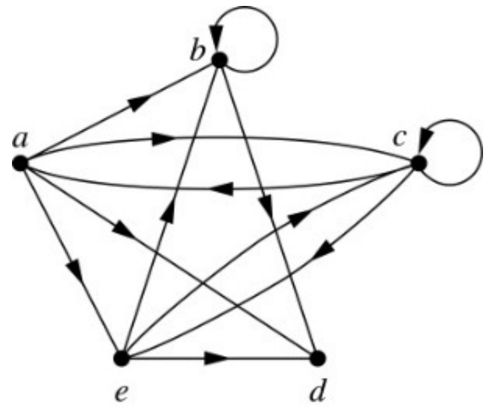


TABLE 2 An Adjacency List for a Directed Graph.

Initial Vertex	*Terminal Vertices*
a	b, c, d, e
b	b, d
c	a, c, e
d	
e	b, c, d

鄰接矩陣 Adjacency Matrices

已知圖 $G = (V, E)$ 為簡單圖(simple graph)，若 $|V| = n$，G的鄰接矩陣A_G為一 n 階方陣且

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } \{v_i, v_j\} \text{ is an edge of } G, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

例6

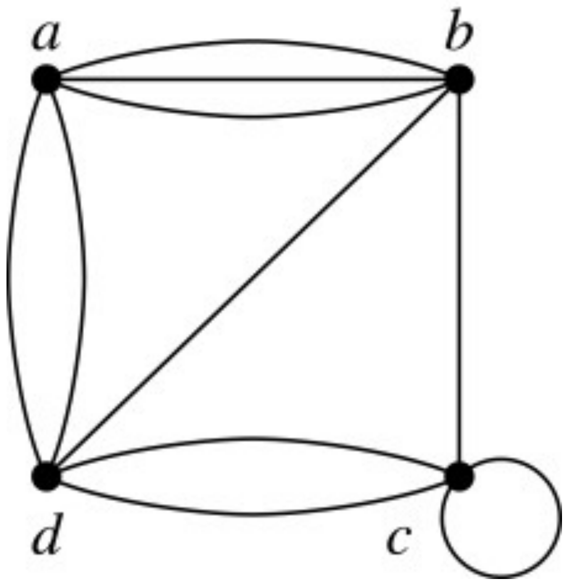
- 若以下為圖 $G = (V, E)$ 的鄰接矩陣(Adjacency Matrix), 其中 $V = \{a, b, c, d\}$, 畫出圖G (頂點順序排列為 a, b, c, d):

A. $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B. $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

鄰接矩陣 Adjacency Matrices

- 範例 - 以鄰接矩陣表示偽圖:



$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

關聯矩陣 Incidence Matrices

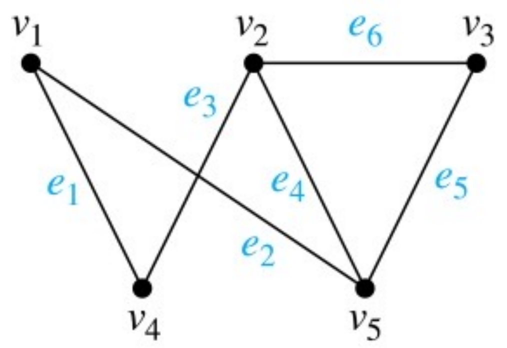
- 已知無向圖 $G = (V, E)$ 有頂點 $v_1, v_2, \ldots v_n$ 與邊 $e_1, e_2, \ldots e_m$. 其關聯矩陣為對應 V 及 E 順序的 $n \times m$ 矩陣 $\mathrm{M} = [m_{ij}]$, 即

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{when edge } e_j \text{ is incident with } v_i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

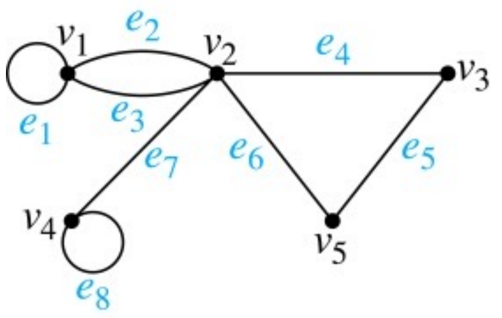
例7

- 求下列圖的對應關聯矩陣(incidence matrix):

A.

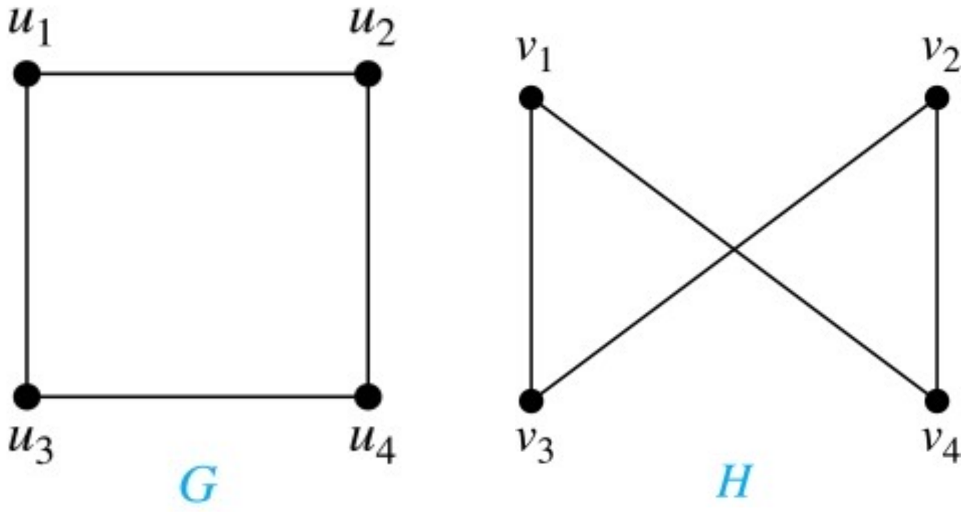


B.



圖的同構 Isomorphism of Graphs

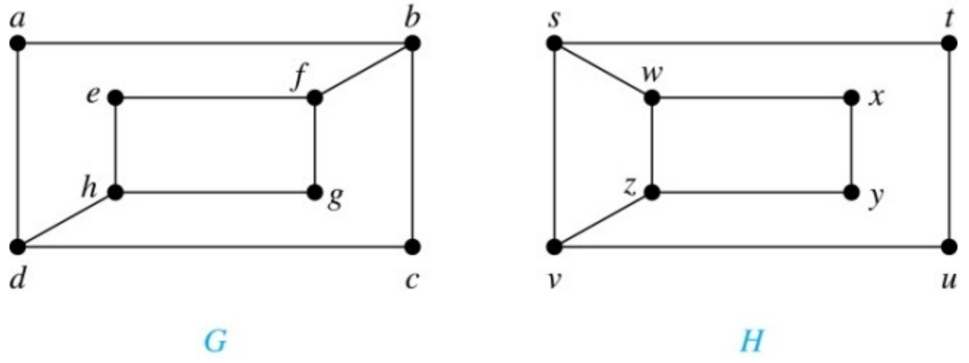
- 簡單圖$G_1=(V_1,E_1)$ 與 $G_2=(V_2,E_2)$ 若存在從 V_1 到 V_2 一對一及映上的函數 f, 其中 $\forall a,b\in V_1, a$和b在G_1中相鄰當且僅當 $f(a)$ 和$f(b)$ 在G_2 中相鄰, 則稱G_1 與 G_2 同構的(isomorphic), 函數 f 稱為同構(isomorphism).
- 兩個簡單圖若不同構稱為非同構的(nonisomorphic).



例8

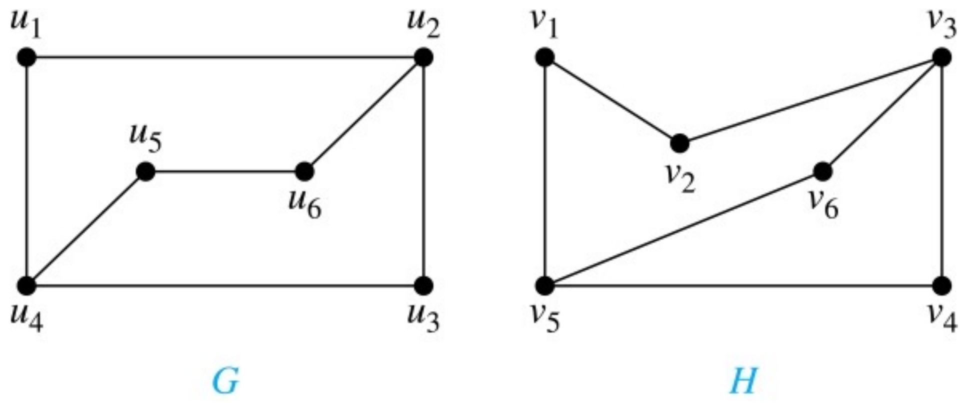
- 判斷圖G和H是否同構的(isomorphic):

A)



不同构

B)



同构

連通性 Connectivity (10.4)

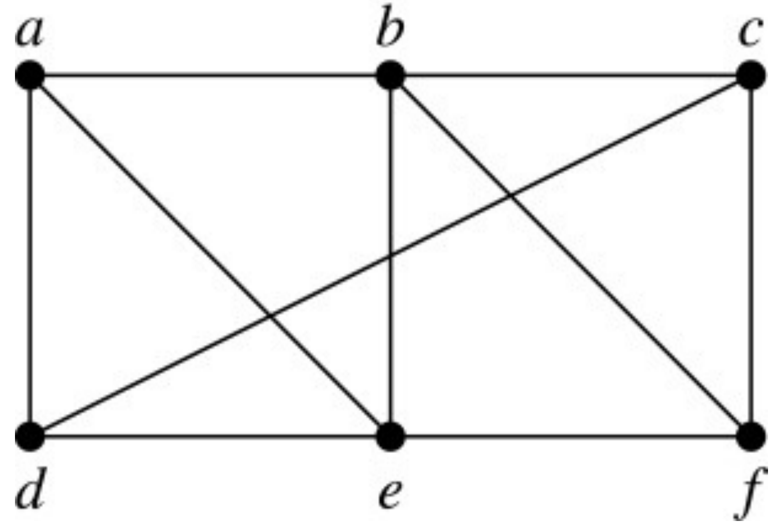
令 n 為一自然數, G 為一無向圖。 圖 G 中從 u 到 v 長度為 n 的通路(Path) 是 G 的 n 條邊 $e_1, \ldots, e_n$ 的序列，其中 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 為其端點。若G為簡單圖，通路可以 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 表示。

- 回路(Circuit) :閉合通路, 即 $n > 0$ 且 $u = v$。
- 稱通路經過 (pass through) 頂點 $x_1, x_2, \ldots, x_{n\text{-}1}$ 且遍歷 (traverse) 邊 $e_1, \ldots, e_n$。
- 若通路不包含重覆的邊，稱其為簡單的(Simple)。

類似術語亦應用於有向圖中 (詳見教材)

範例

- a, d, c, f, e 是長度為 4 的簡單通路(simple path)。
- d, e, c, a 不是通路。
- b, c, f, e, b 是長度為 4 的簡單回路。
- a, b, e, d, a, b 是長度為 5 的通路，但不是簡單通路。

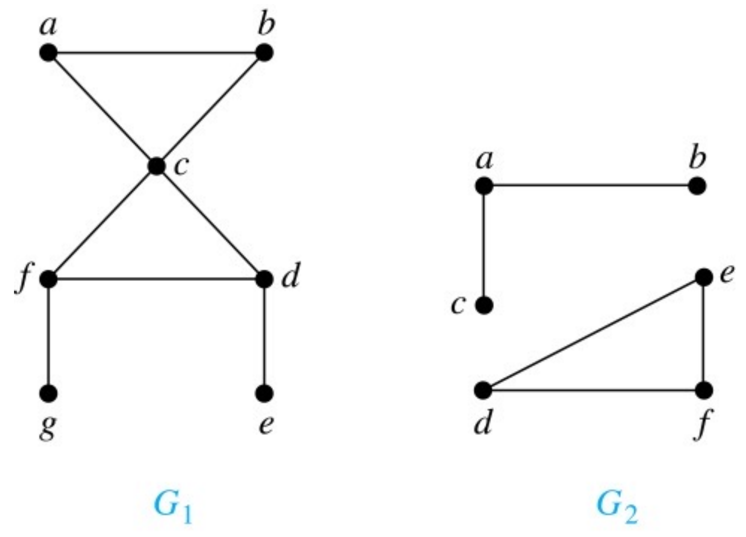


連通分支(Connected component)

- 已知$G = (V, E)$, 定義在 V 上的關係R 其中 $u\mathrm{R}v$ 表示頂點 u 和 v 之間存在通路。
  - R 為一等價關係(Equivalence relation); 自反，对称，传递
  - 存在對應 R 的等價類(Equivalence Class)，稱作連通分支(connected component);

無向圖的連通性

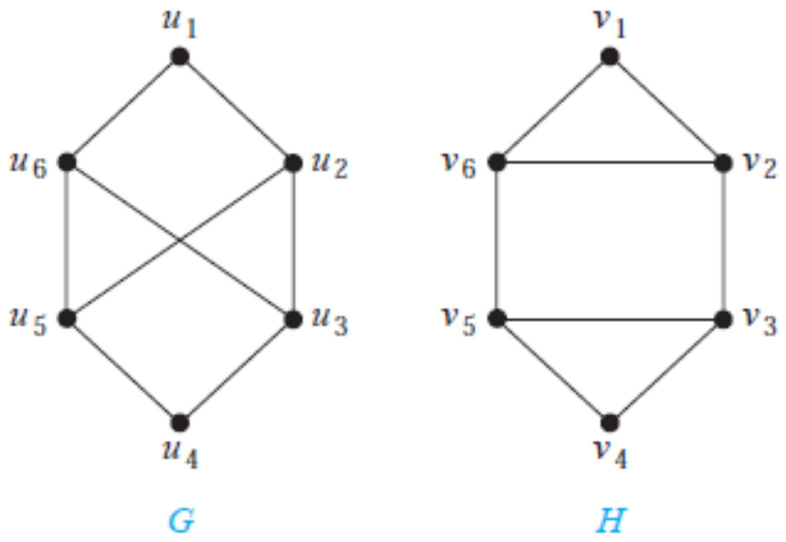
- 只有一個分支的無向圖，即若無向圖中一對不同的頂點之間都有通路，該圖稱為連通的(connected)。不是連通的無向圖稱為不連通的(disconnected)。我們可通過刪除頂點或邊得到不連通的子圖(subgraph)。
- 例:
  - G_1 connected
  - G_2 disconnected



例9

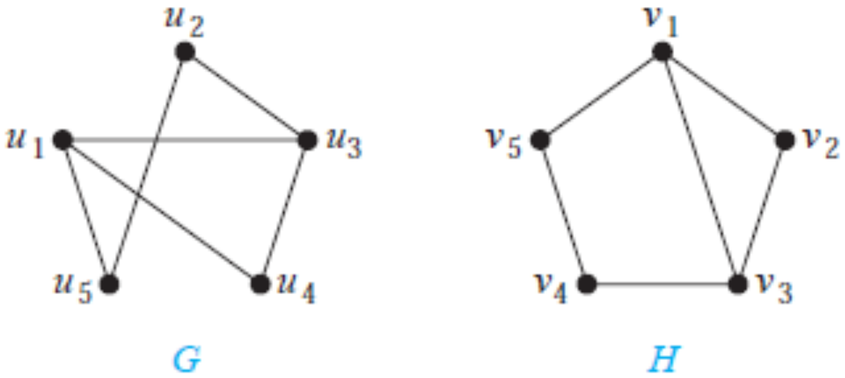
- 通過回路(Circuit)及通路(Path)判斷下列圖G與圖H是否同構:

A.



不同构

B.



同构

頂點之間的通路數

- 若圖G的鄰接矩陣 A 的頂點為 $v_1, v_2, \dots v_n$，從 v_i 到 v_j 長度為 r 的不同通路的數目等於 A^r 的第(i,j)項。

範例

無向圖 $G=(V, E)$ 中, $V=\{a, b, c, d\}$; 已知其鄰接矩陣為 $A=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}$,

則 a 到 d 長度為 4 的通路根據 $A^4=\begin{bmatrix}8&0&0&8\\0&8&8&0\\0&8&8&0\\8&0&0&8\end{bmatrix}$

其中，通路分別為：

a, b, a, b, d $\qquad$ a, b, a, c, d

a, b, d, b, d $\qquad$ a, b, d, c, d

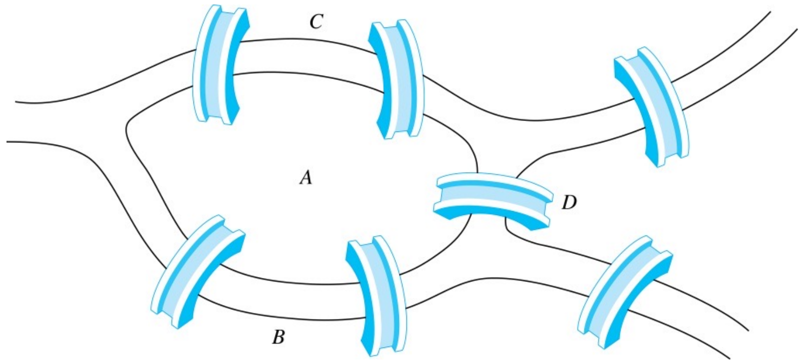
a, c, a, b, d $\qquad$ a, c, a, c, d

a, c, d, b, d $\qquad$ a, c, d, c, d

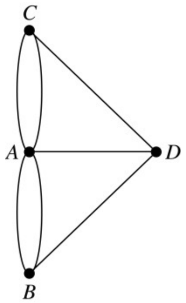
+ 歐拉通路和回路 Euler Paths and Circuits (10.5)

- 普魯士的哥尼斯堡鎮(Königsberg) （今俄羅斯加林格勒Kalingrad, Russia ）被普雷格爾河(Pregel river)的支流分為四個部分。 於 18 世紀，由七座橋樑連接這些地區。
- 是否存在沿著一條可走遍這七座橋並只通過每座橋一次且返回起點的路線?
- 瑞士數學家倫納德歐拉(Leonard Euler)證明了不存在這樣子的路線。該結果一般被認為是圖論中第一個被證明的定理。

Leonard Euler
(1707-1783)



The 7 Bridges of Königsberg



Königsberg橋的多重圖模型

歐拉通路和回路 Euler Paths and Circuits

- 圖G中的歐拉回路(Euler circuit) 是包含G的每一條邊的簡單回路。
  - 具有歐拉回路的圖稱爲歐拉圖(Eulerian Graph)。
- 圖G中的歐拉通路(Euler path) 是包含G的每一條邊的簡單通路。
  - 具有歐拉通路而無歐拉回路的圖稱爲半歐拉圖(Semi-Eulerian Graph)。
- 應用:
  - 郵遞員所負責投遞的街道路線
  - 電路布線等

例10

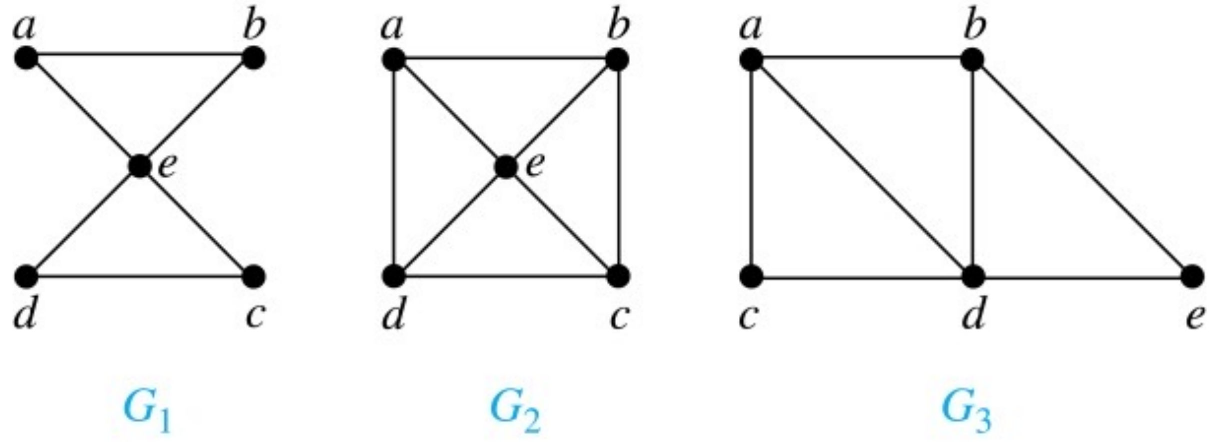
A. 對於無向圖G_1, G_2, 和 G_3:

a) 試找出何者有歐拉回路 (Euler circuit)? G1

b) 若無歐拉回路，試找出何者有歐拉通路 (Euler path)?

G3 Euler path

G2 does not have an Euler path

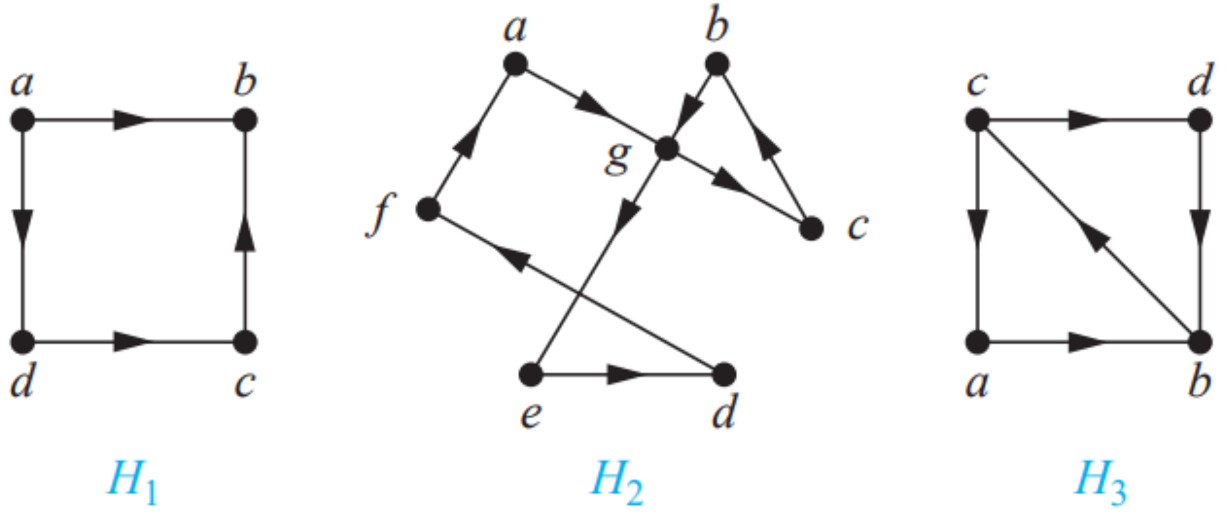


例2(續)

B. 對於有向圖H_1, H_2, 和 H_3:

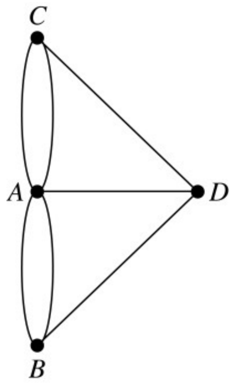
a) 試找出何者有歐拉回路 (Euler circuit)?

b) 若無歐拉回路，試找出何者有歐拉通路 (Euler path)?

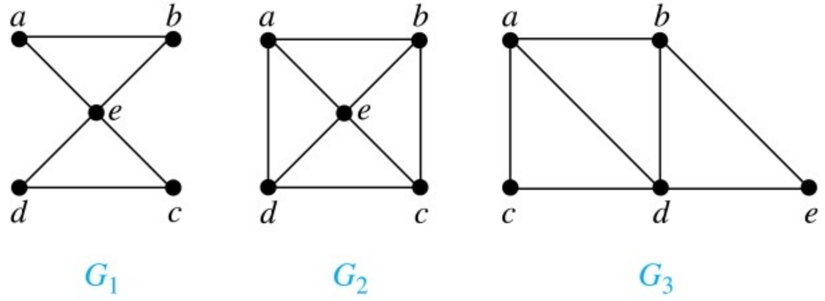


+ 歐拉通路和回路 Euler Paths and Circuits

- (10.5定理1:) 含有至少2個頂點的連通多重圖具有歐拉回路當且僅當它的每個頂點的度都為偶數。
  - 例如: 尼斯堡鎮的七橋問題



- (10.5定理2:) 連通多重圖具有歐拉通路但無歐拉回路當且僅當它恰有2個度有奇數的頂點。
  - 例如: 例2的圖G_3



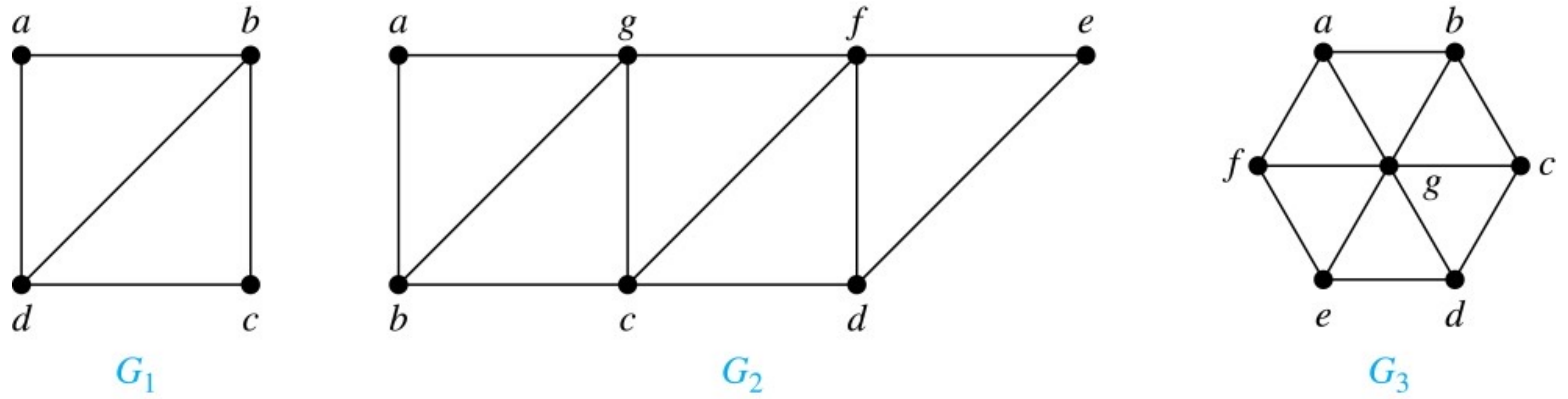
例3

- 對於無向圖G_1, G_2, 和 G_3, 通過判斷各頂點的度, 求:

A. 何者有歐拉回路 (Euler circuit)? NONE

B. 若無歐拉回路，何者有歐拉通路 (Euler path)?

G1 G2



哈密頓通路和回路 Hamilton Paths and Circuits

- 哈密頓回路 (Hamilton circuit): 經過圖G中每一個頂點恰好一次的簡單回路。
  - 具有哈密頓回路的圖稱爲哈密頓圖(Hamiltonian Graph)。
- 哈密頓通路 (Hamilton Path): 經過圖G中每一個頂點恰好一次的簡單通路。
  - 具有哈密頓通路而無哈密頓回路的圖稱爲半哈密頓圖(Semi-Hamiltonian Graph)。

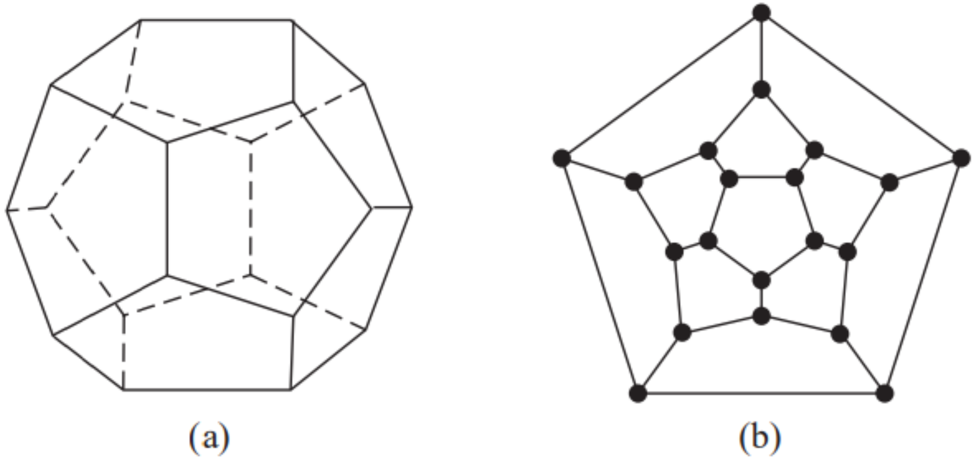
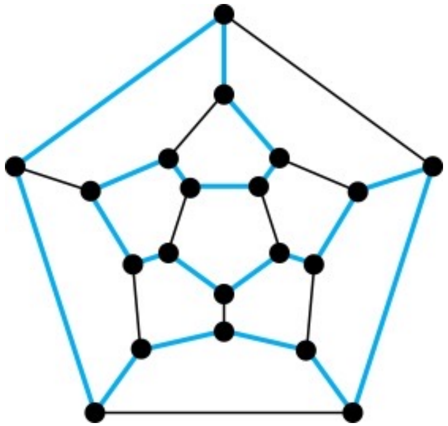
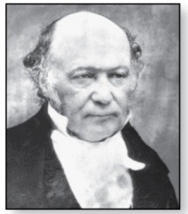


FIGURE 8 Hamilton's "A Voyage Round the World" Puzzle.





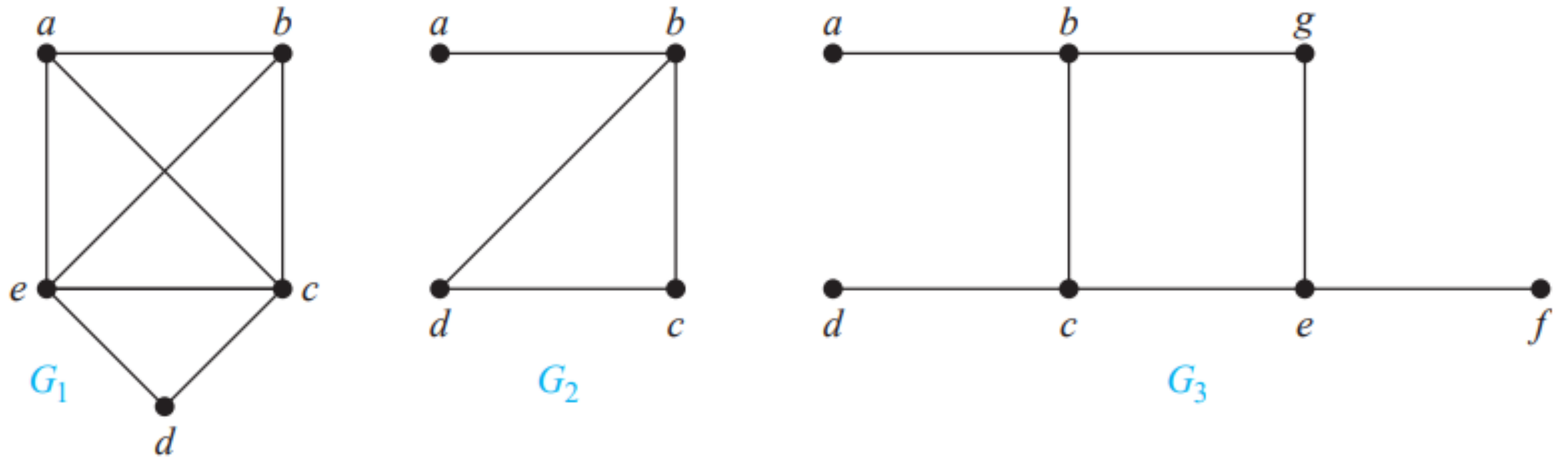
William Rowan Hamilton (1805- 1865)

例4

- 對於無向圖G_1, G_2, 和 G_3:

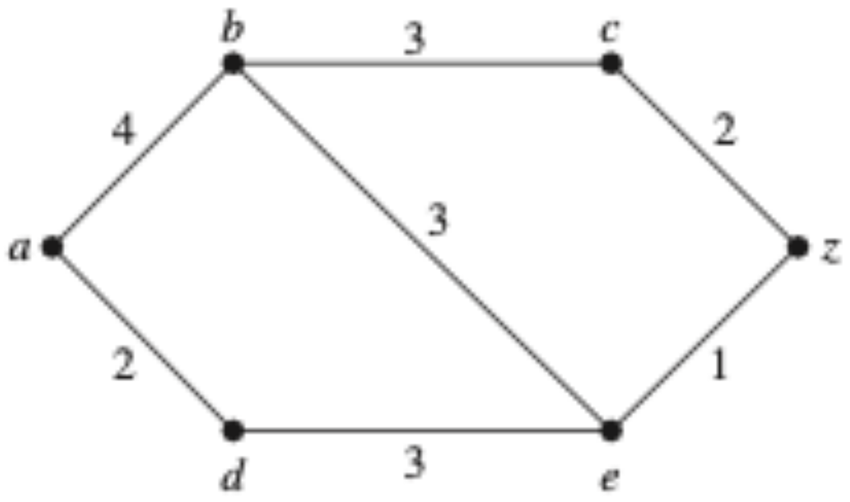
A. 試找出何者有哈密頓回路 (Hamilton circuit)? G1

B. 若無哈密頓回路，試找出何者有哈密頓通路 (Hamilton path)?
G2



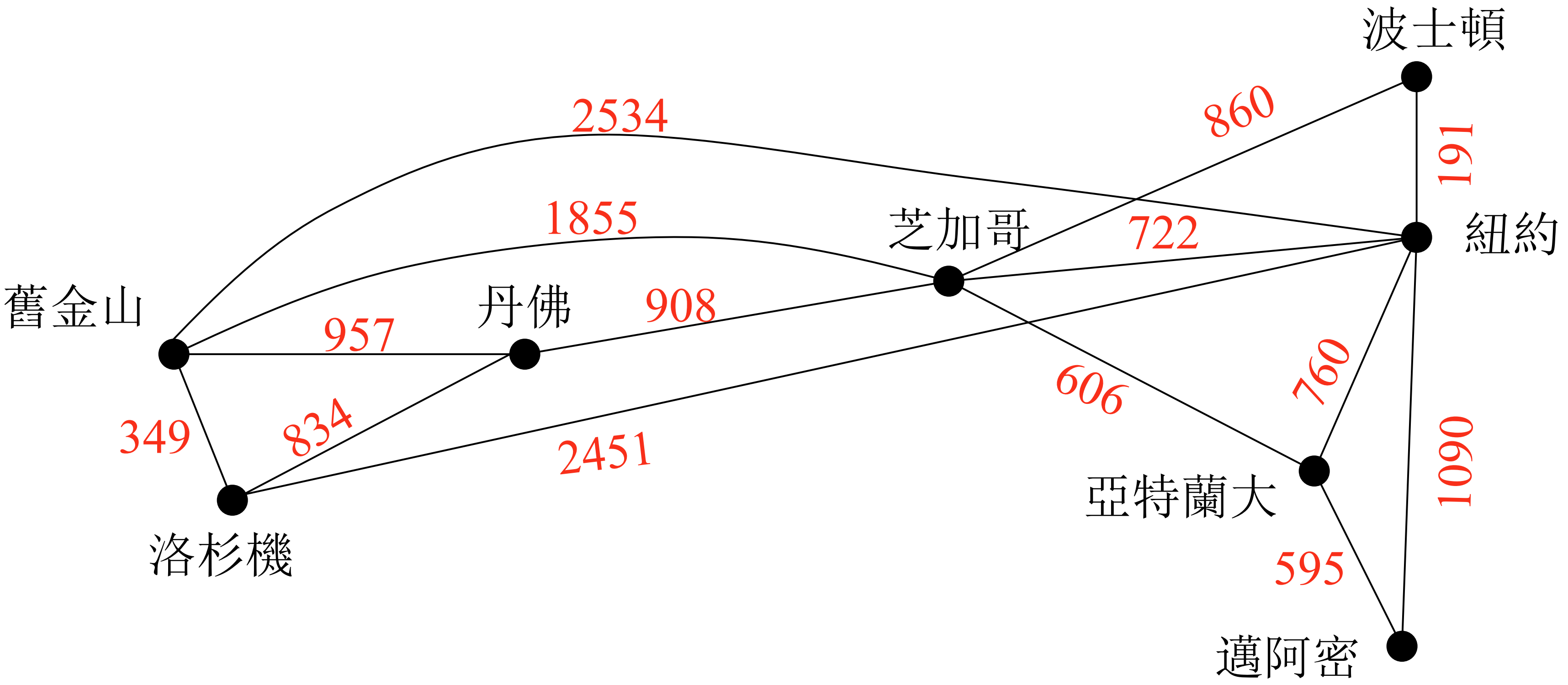
+ 加權圖 Weighted Graphs (10.6)

- 加權圖(weighted graphs)：給每條邊賦上一個數的圖。
  - 一個加權圖就是每條邊 e 都有一個實數權重 $w(e)$ 的圖。
  - 權重可以表示距離、成本、時間、容量等。



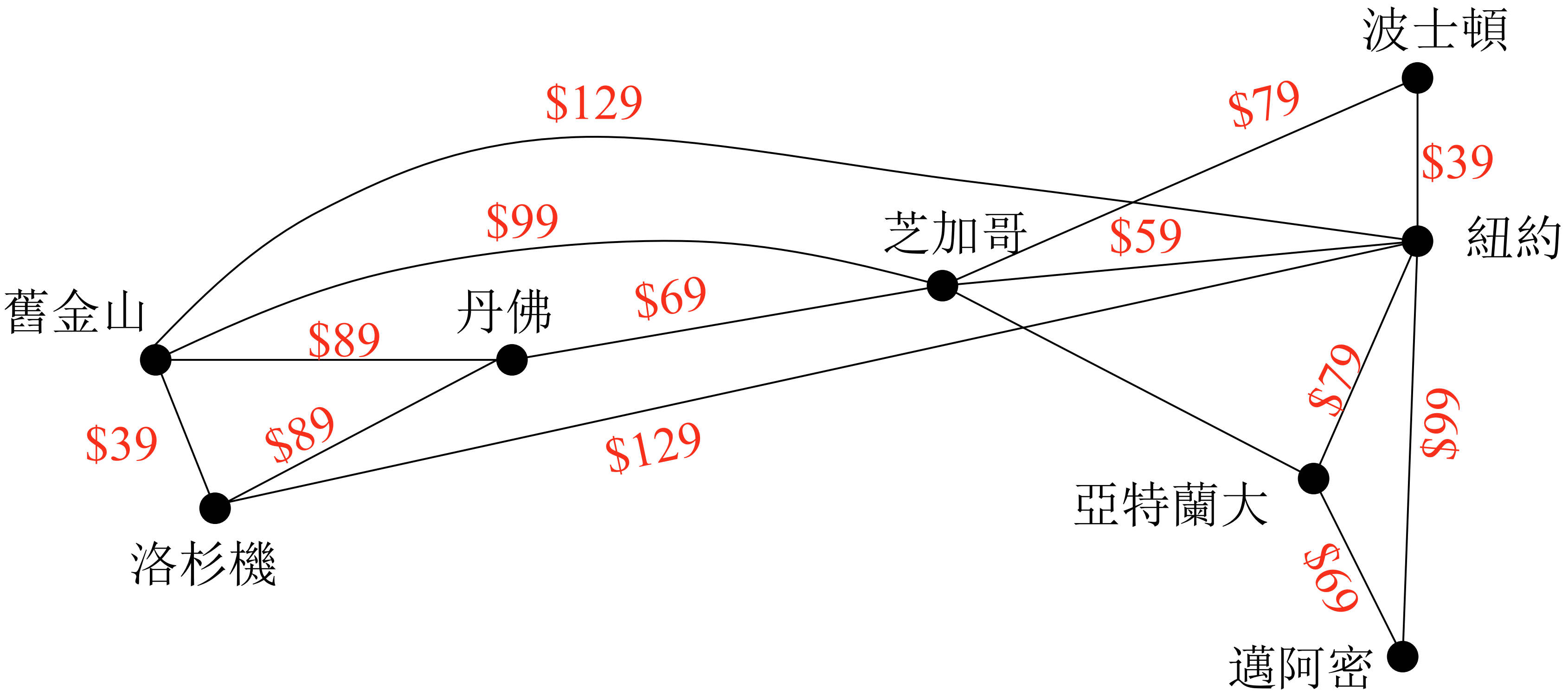
加權圖 Weighted Graphs

- 例如：里程(Miles)



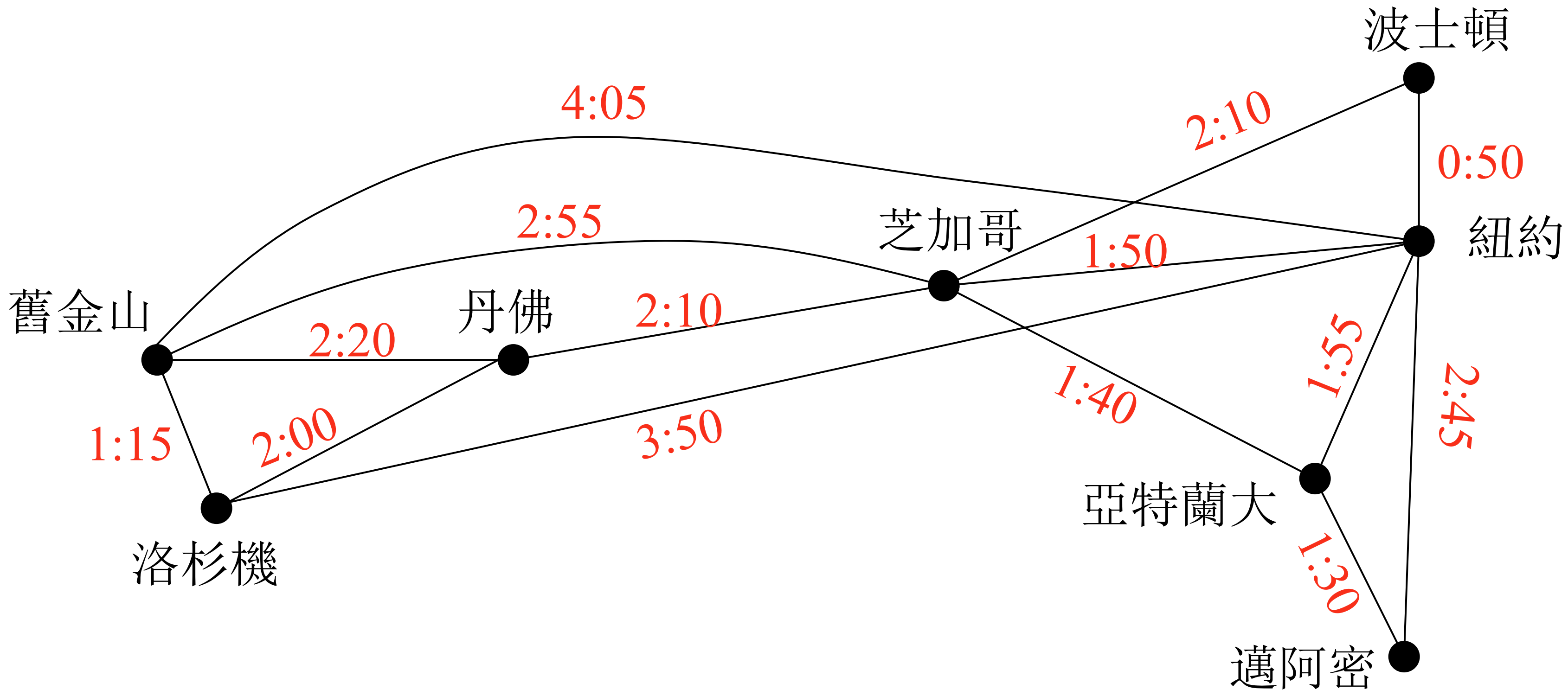
+ 加權圖 Weighted Graphs

- 例如：票價(Fares)



加權圖 Weighted Graphs

- 例如：飛行時間(Flight Times)



最短通路問題 The Shortest Path Problem

- 加權圖中一條通路的長度是這條通路上各條邊的權的總和。
- 兩點之間長度最小的通路稱為兩點之間的最短通路(不一定唯一)。

迪克斯特拉算法 Dijkstra's Algorithm

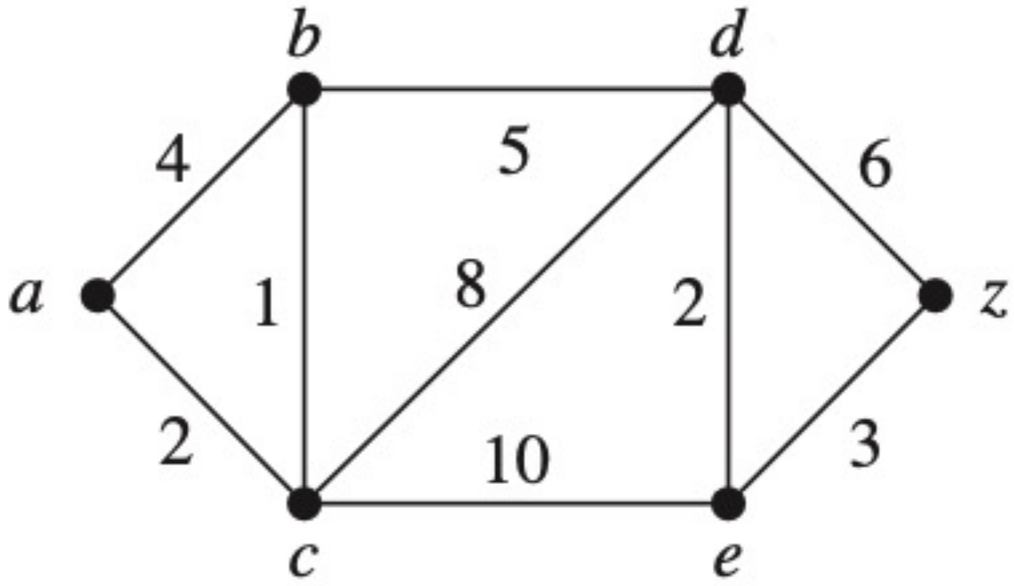
- 可求出連通簡單無向加權圖中兩頂點之間最短通路的長度。
- 算法原理：
  - 頂點a到v的最短通路若為 a,…,u,v, 則 a,…,u 是s到u的最短通路
  - 反之，可由近及遠的計算a到所有點的最短路徑
  - (n-1)條最短通路按照由近及遠(長度的非減次序)求得，設它們的相應端點分別為$u_1, \ldots u_{n-1}$，最短通路長度記為$d(s, u_i), i=1,\ldots,n-1$
- 每一步驟：選擇最近的未知點並加入到已知點集合，更新a到其他未知點的距離
- 假設前i條最短路徑已知，第(i+1)條最短路徑長度：

$$d(a, ui+1)=\min\{d(a, u_j) +w(u_j, u_i+1) \mid j=1,\ldots i\}$$

- 本質是一个貪婪算法，即每一步找當前的最優解

例5

- 用迪克斯特拉算法(Dijkstra's Algorithm)求所示的加權圖中頂點 a 與 z 之間最短通路的長度。



+ 迪克斯特拉算法 Dijkstra's Algorithm

- 偽代碼：

ALGORITHM 1 Dijkstra's Algorithm.

procedure *Dijkstra*(G: weighted connected simple graph, with
    all weights positive)
{G has vertices $a = v_0, v_1, \ldots, v_n = z$ and lengths $w(v_i, v_j)$
    where $w(v_i, v_j) = \infty$ if $\{v_i, v_j\}$ is not an edge in G}
for $i := 1$ **to** n
    $L(v_i) := \infty$
$L(a) := 0$
$S := \emptyset$
{the labels are now initialized so that the label of a is 0 and all
    other labels are ∞, and S is the empty set}
while $z \notin S$
    $u :=$ a vertex not in S with $L(u)$ minimal
    $S := S \cup \{u\}$
    for all vertices v not in S
        if $L(u) + w(u, v) < L(v)$ **then** $L(v) := L(u) + w(u, v)$
        {this adds a vertex to S with minimal label and updates the
        labels of vertices not in S}
return $L(z)$ {$L(z) =$ length of a shortest path from a to z}

例5

利用圖：其中 $L(v)$ 為點 a 到 v 的長度。

a) S = Ø
L(a) = 0

b) Path: a
L(a) = 0+0=0

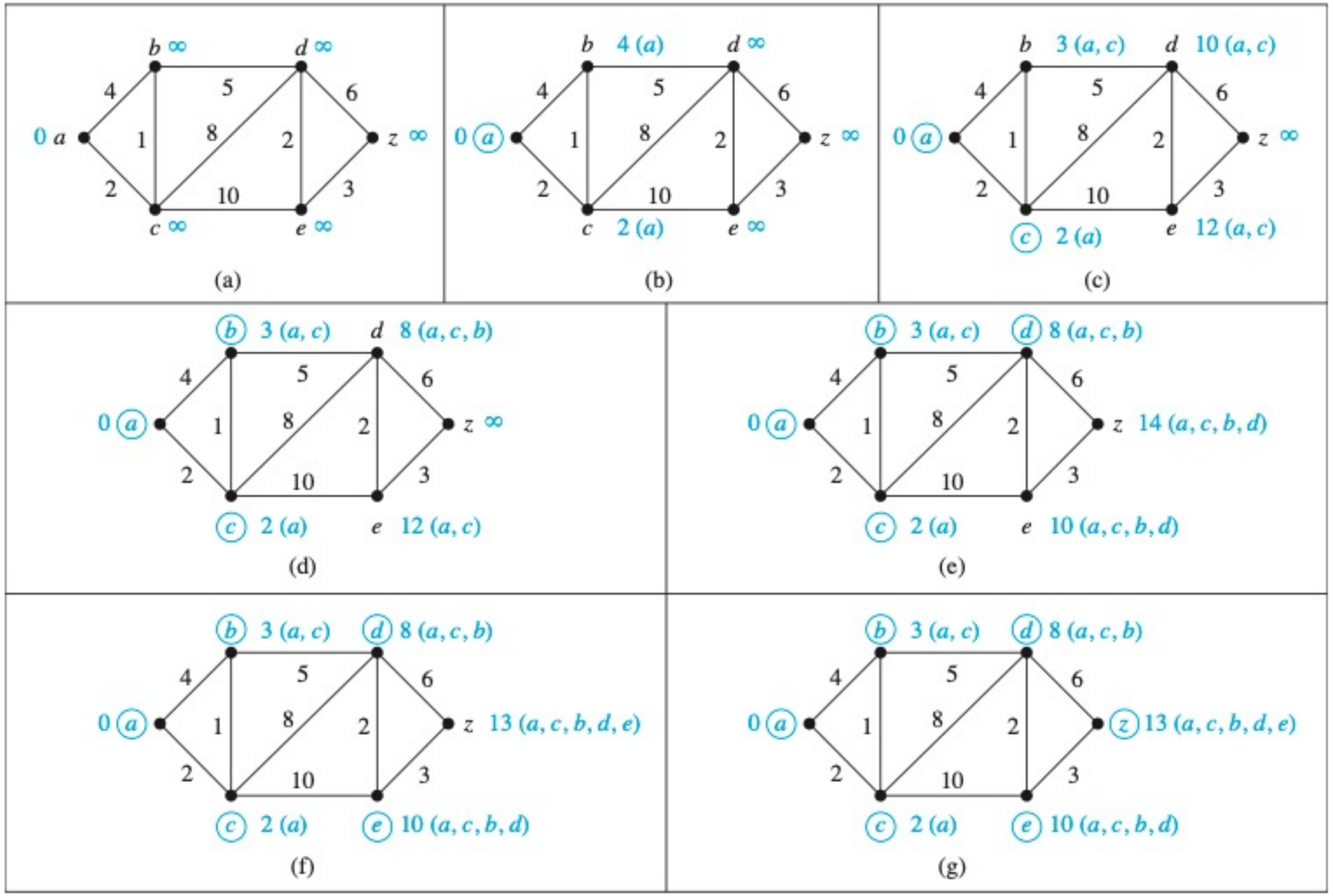
c) Path: a, c
L(c) = L(a)+w(a, c)=0+2=2

d) Path: a, c, b
L(b) = L(c)+w(c, b)=2+1=3

e) Path: a, c, b, d
L(d) = L(b)+w(b, d)=3+5=8

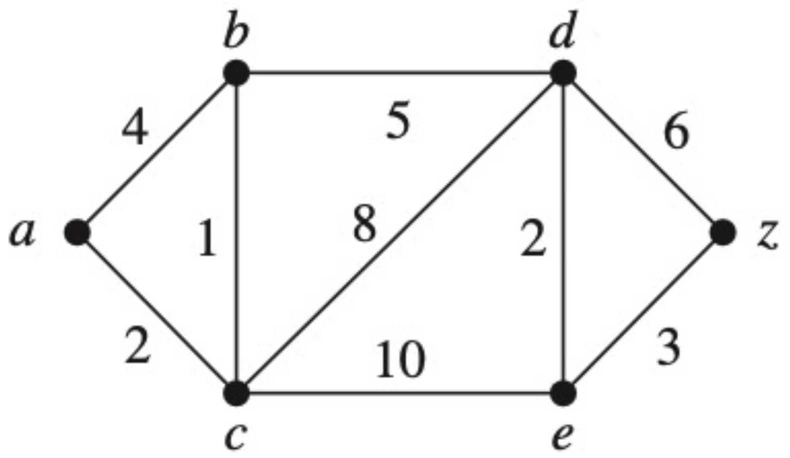
f) Path: a, c, b, d, e
L(e) = L(d)+w(d, e)=8+2=10

g) Path: a, c, b, d, e, z
L(z) = L(e)+w(e, z)=10+3=13



例5

利用表：其中 $L(v)$ 為點 a 到 v 的長度。



Step	S	$L(a)$	$L(b)$	$L(c)$	$L(d)$	$L(e)$	$L(z)$	u	$S \cup \{u\}$
0	∅	0	∞	∞	∞	∞	∞	a	a
1	a	0	4	2	∞	∞	∞	c	a,c
2	a,c	0	3	2					a,c,b
3	a,c,b	0							a,c,b,d
4	a,c,b,d	0							a,c,b,d,e
5	a,c,b,d,e	0							a,c,b,d,e,z

旅行商問題 The Traveling Salesman Problem (TSP)

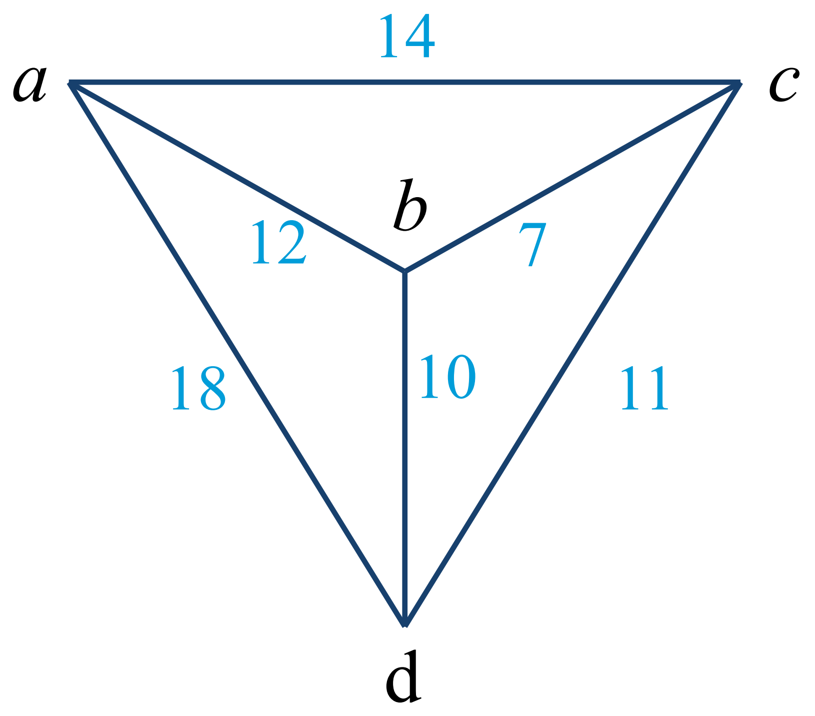
- n 個城市間均有道路，但距離不等，旅行商從某地出發，走過其它 $n-1$ 城市各一次，最後回到原地，如何選擇最短路線？

- 依題意得：此為K_n並找出其權最小的哈密頓回路!
  - K_n有(n-1)!/2條哈密頓回路，從當中找出最短的一條。

例6

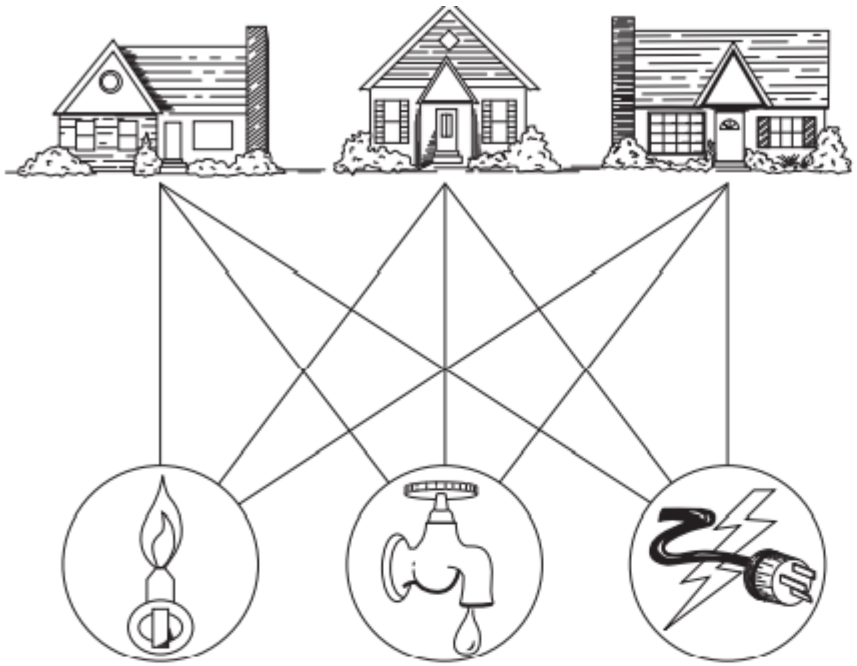
- 一個銷售員生活在城市 a，現需訪問城市 b, c, d 然後回到 a，求如何以最短路程完成這次訪問。

a,c,b,d,a=49
a,b,c,d,a=48
a,b,d,c,a=47



平面圖 Planar Graphs (10.7)

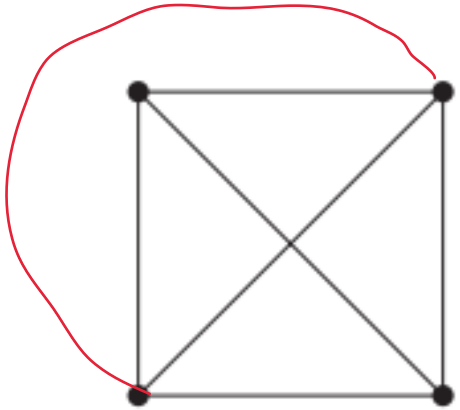
- 平面圖 (Planar Graphs) :可在平面中畫出一個圖而沒有任何交叉。
- 應用:
  - 電子電路設計
  - 公路網

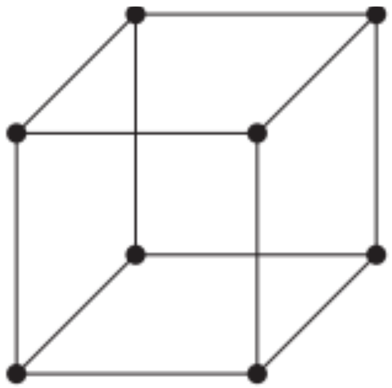


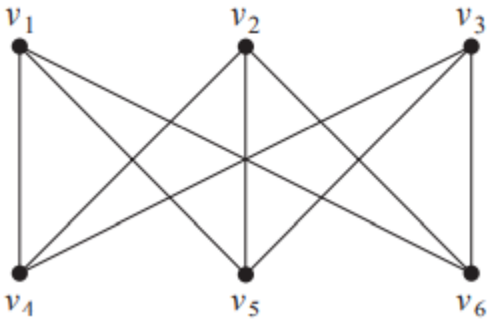
+ 例5

- 判斷 K_4、Q_3 和 $K_{3,3}$ 是否平面圖?

K3是平面图
Q3是平面图
K3,3不是平面图

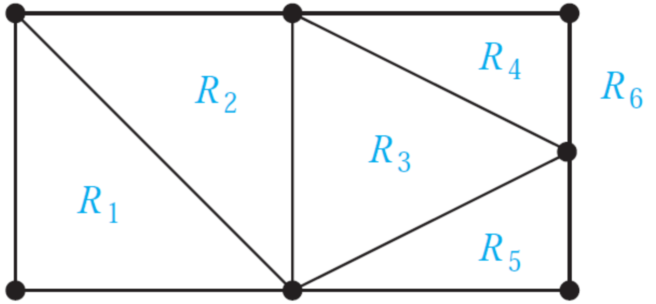






歐拉公式 (Euler's Formula)

- 一個圖的平面表示把平面分割成一些面(region)。
  - 例如:



- 面 R 的度(degree of region R), 記作 $\deg(R)$: R 的邊界的邊的最短回路之長度。
  - 則:

$$2|E| = \sum \deg(R)$$

- 歐拉公式 (Euler's Formula): 圖 $G = (V, E)$ 中, 令 r 表示 G 的平面圖的面數。

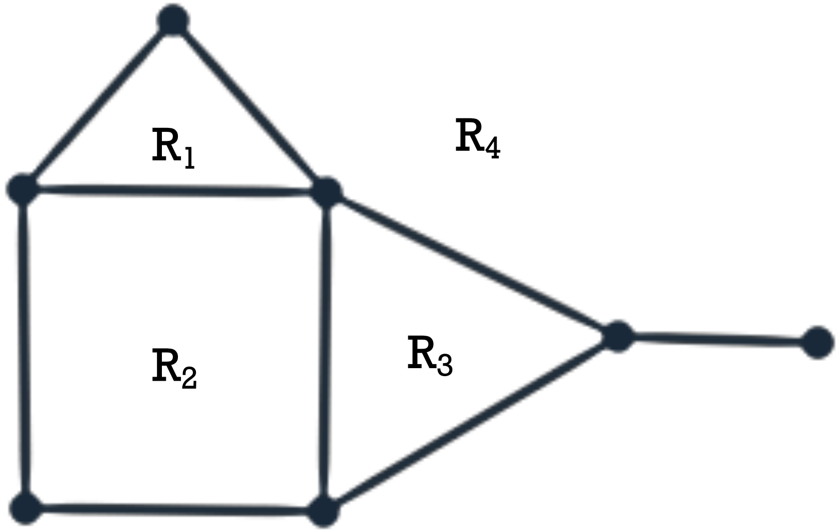
則有:

$$r = |E| - |V| + 2$$

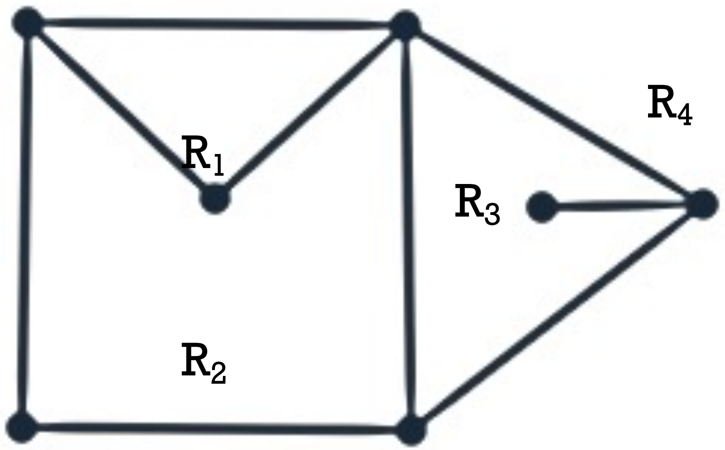
例6

- 求圖 G 各平面(region)的度：

A.



B.



Solutions:

A. $\deg(R_1) = 3, \deg(R_2) = 4, \deg(R_3) = 3, \deg(R_4) = 8.$

B. $\deg(R_1) = 3, \deg(R_2) = 5, \deg(R_3) = 5, \deg(R_4) = 5.$

例7

- 已知圖 $G=(V,E)$ 為一連通平面簡單圖(connected planar simple graph), $|V|=20$, 且 $\forall v\in V, \deg(v)=3$, 求以平面表示的圖 G 的面數 r。

握手定理

推論 Corollaries

- 若圖 $G = (V, E)$ 為一連通平面簡單圖且$|V| \geq 3$,
則:

$$|E| \leq 3|V| - 6$$

- 若圖 G 為一連通平面簡單圖，則 G 中有度數不超過 5 的頂點。

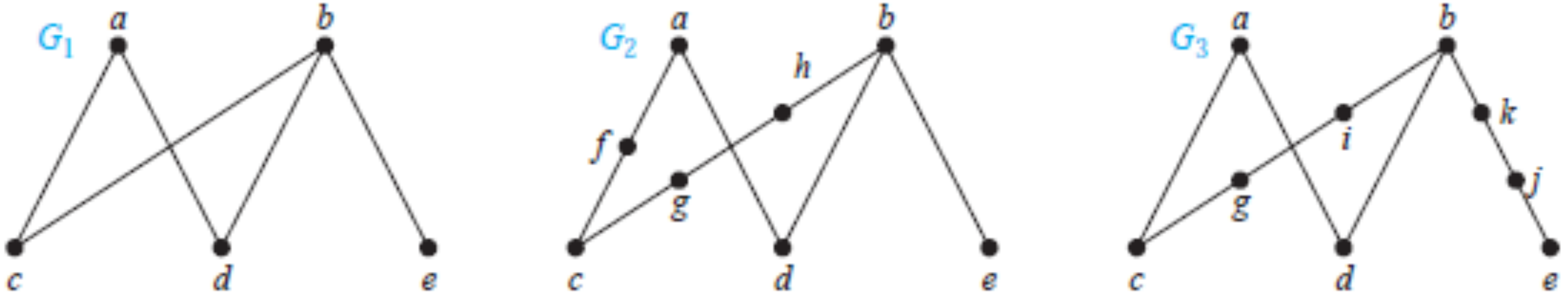
例8

- K_5 是否平面圖(Planar graph)?

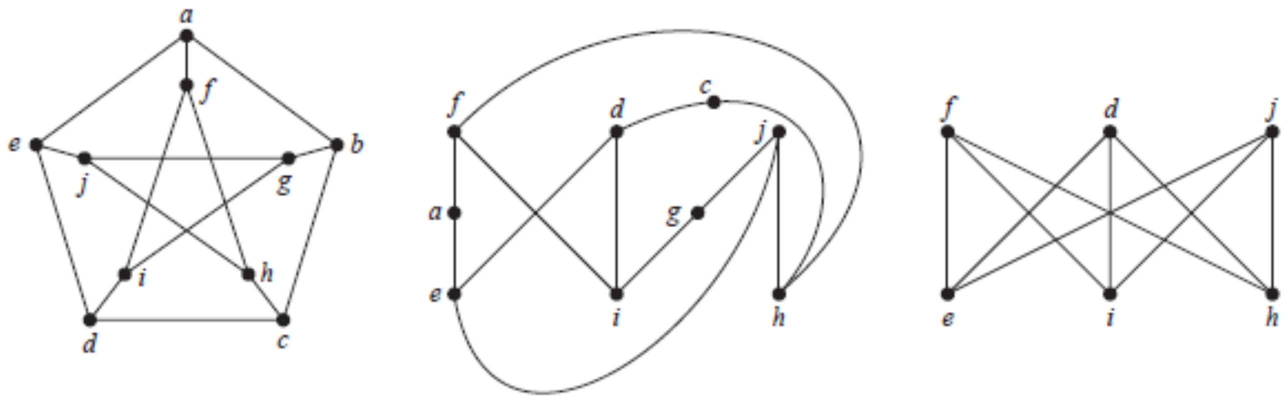
Dis P758 Example-5

K5不是平面图，有重疊，
3V < E

同胚圖 Homeomorphic Graphs



- (10.7定理2:) 一個圖為非平面圖當且僅當其包含一同胚於K_5或$K_{3,3}$的子圖。
  - 如:



(a) (b) H (c) $K_{3,3}$

教材對應閱讀章節及練習

- 10.1(~Example 16), 10.2(~Example17),10.3, 10.4(~Example 6, 13), 10.5,10.6,10.7
- 對應習題: (可視個人情況定量)
  - 10.1: 3-9
  - 10.2: 1-9,20-27,28ab
  - 10.3: 1-27,34-44
  - 10.4: 1-3, 20-23
  - 10.5: 1-8,13-15,18-23, 26-28, 30-45
  - 10.6: 2-13,17,25-28
  - 10.7: 1-9, 12-14