定積分

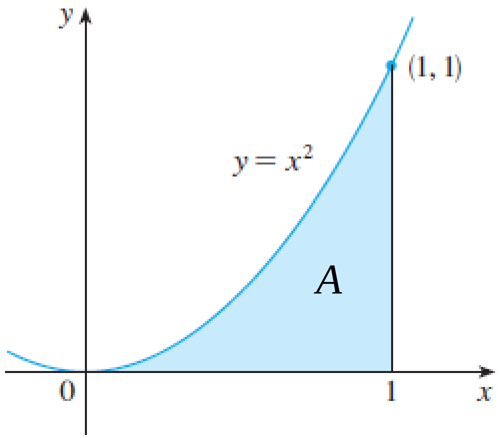
單元四

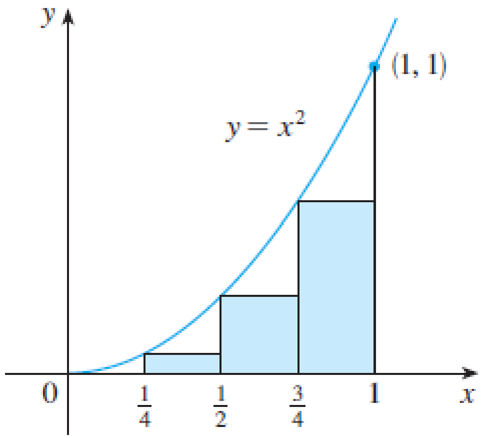
Outline

- 曲線下的面積
- 定積分
- 微積分基本定理
- 換元法
- 積分中值定理
- 對稱性的應用
- 曲線之間的面積
- 概率和隨機變量

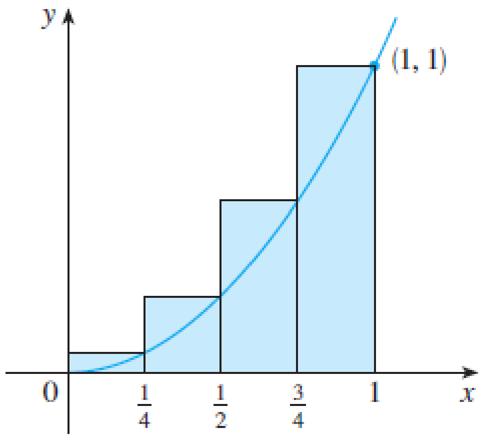
範例：曲線下的面積

- 問：A 的面積為多少?





(a) Using left endpoints



(b) Using right endpoints

求和公式 (4.1)

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

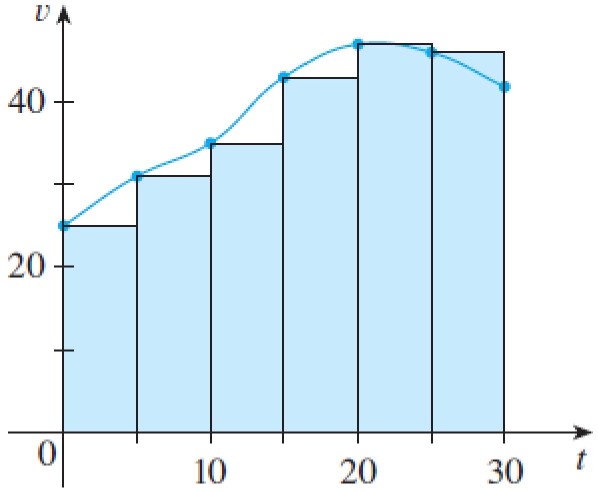
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

例1: 速度與距離

- 假設汽車的里程表損壞，我們利用測速器每 5 秒測一次車速，並記錄在下列表格中，試估計 30 秒內的行車距離：

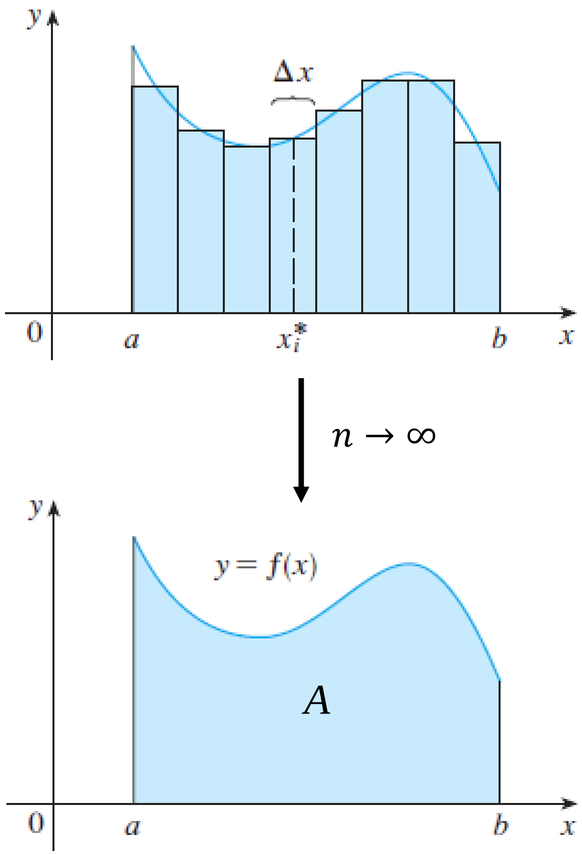
時間(秒)	0	5	10	15	20	25	30
速率 (公尺/秒)	7.5	9.4	10.6	12.8	14.2	13.9	12.5



黎曼和與定積分 (4.2)

- 一個定義在閉區間 $[a, b]$ 上的函數 f，若將區間分割成 n 份，近似矩形的面積和稱作黎曼和 (Riemann Sum)；A 之面積為當 $n \to \infty$ 時黎曼和的極限:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$



- 若此極限存在,則稱 f 在$[a, b]$ 上可積 (integrable)；且 ***f* 從 *a* 到 *b* 的定積分** (definite integral) 為：

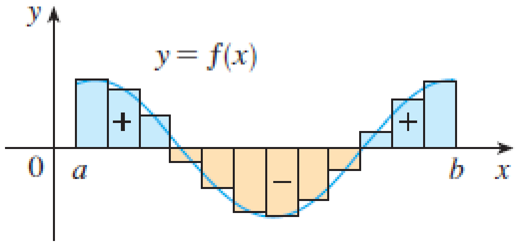
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

定積分

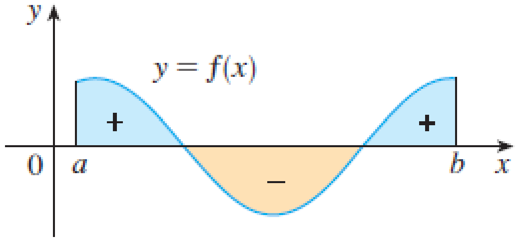
- 定積分$\int_a^b f(x)dx$ 中：
  - $\int$ – 積分記號
  - $f(x)$ – 被積函數
  - a, b – 定積分的界限
    a : 下限
    b : 上限
  - dx – 積分的自變量為 x

淨面積

- 若 $f(x)$ 的值有正有負，則所得之面積和可視作 x 軸上方的長方形減去 x 軸下方的矩形的**淨面積**：
  - 黎曼和: $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$



  - 定積分: $\int_a^b f(x)\,dx$



定積分的性質 (4.2&4.3)

已知 a, b, c 為任意常數,

- $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

例2

- 已知 $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ 及$\int_0^{8} f(x)dx = 12$，求 $\int_8^{10} f(x)dx$ 。

＋ 例3

- 利用區域面積的概念來求此定積分：$\int_0^3 (x-1)dx$

微積分基本定理 (The Fundamental Theorem of Calculus, 4.3)

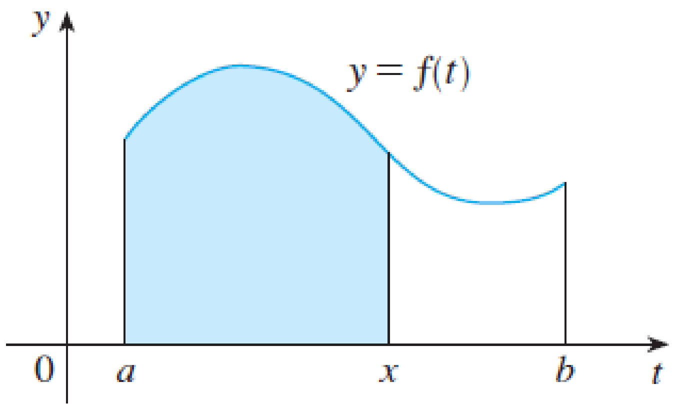
- **微積分基本定理**的命名在於它建立了微分及積分之間的關係。

速度是位移的導數,
而位移是速度的積分。

+ 微積分第一基本定理 (FTC1) (4.3)

- **FTC1:** 若 f 在區間$[a, b]$上連續, 且 $x \in [a, b]$, 則

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$



曲線下直到點 x 的區域面積的變化率，等於面積在該點的高。

例4

- 已知 $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$，求 $g'(x)$。

不定積分 vs. 定積分

- 定積分是一個數
- 不定積分是一個函數族

微積分第二基本定理 (FTC2) (4.4)

- 若 f 在區間$[a, b]$上連續, 且 $x \in [a, b]$, 則

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

其中 $F'(x) = f(x)$.

- 記法:

$$F(x)]_a^b = [F(x)]_a^b = \mathrm{F}(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

例5

計算: A. $\int_{-2}^{1} x^3 dx$

B. $\int_0^4 (4-t)\sqrt{t}\, dt$

C. $\int_0^2 (y-1)(2y+1)\, dy$

總結

- 微分與積分的程序是互逆的。

換元法 (Method of Substitution, 4.4)

- $\int 2x\sqrt{1+x^2}dx = ?$
  - 什麼函數的導數是 $2x\sqrt{1+x^2}$?
  - 令 $u = 1 + x^2$
  - 那麼 $\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2xdx$
  - 則有: $\int 2x\sqrt{1+x^2}dx$

$$= \int u^{1/2} du$$

$$= \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + C$$

Check:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C\right] = 2x\sqrt{1+x^2}$$

換元法 (4.4定理B&C)

- 不定積分：若 g 可導且 f 為函數 F 的導數，則

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F\big(g(x)\big) + C$$

- 定積分：若 $u = g(x)$ 可導，其值域為區間 $[a, b]$ 且 f 在 $[a, b]$ 連續，則

$$\int_a^b f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

例6

求: A. $\int x^3 \cos(x^4+2)\,dx$

B. $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

C. $\int \sqrt{1+x^2}\,x^5 dx$

例6 (續)

求: D. $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$

E. $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$

F. $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$

+ 積分中值定理 (4.5定理A)

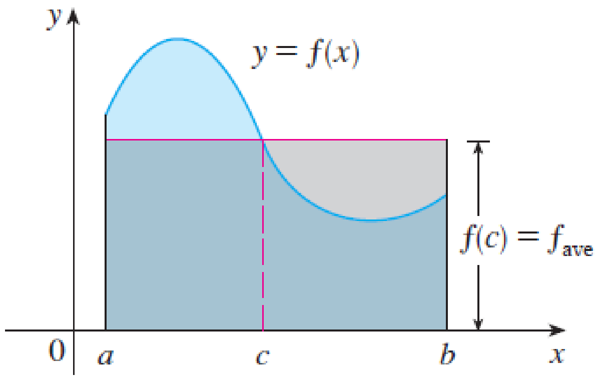
- 若函數 f 在區間$[a, b]$上連續, 則存在點 $c \in[a, b]$ 滿足

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

其中$f(c)$ 為 f 在區間$[a, b]$上的平均值。

或表示成:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$



+ 例7

- 已知 $f(x) = 1 + x^2$, 求:

A. $f(x)$ 在[-1, 2]上的平均值 f_{ave}；

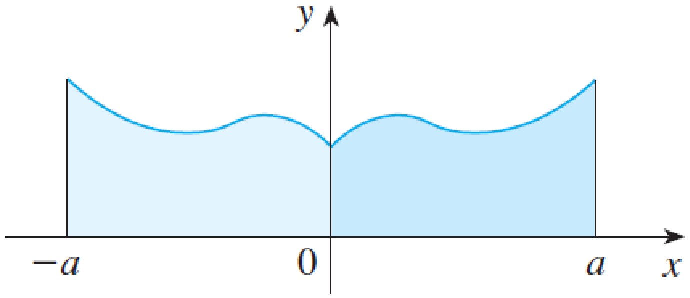
B. 能在[-1, 2]上滿足 $f(c) = f_{\text{ave}}$ 的 c 值。

對稱函數的積分

假如 f 在區間[-a, a]是連續的。

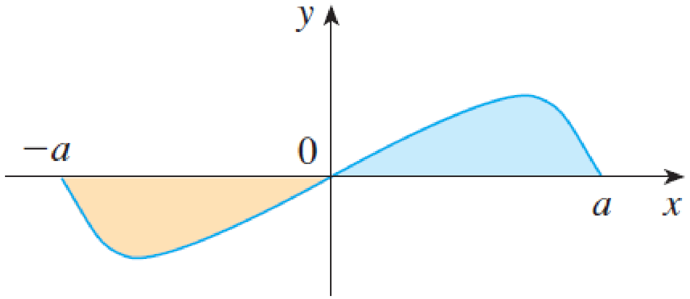
- 若 f 為偶函數，則:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$



- 若 f 為奇函數，則:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$



例8

- 計算:

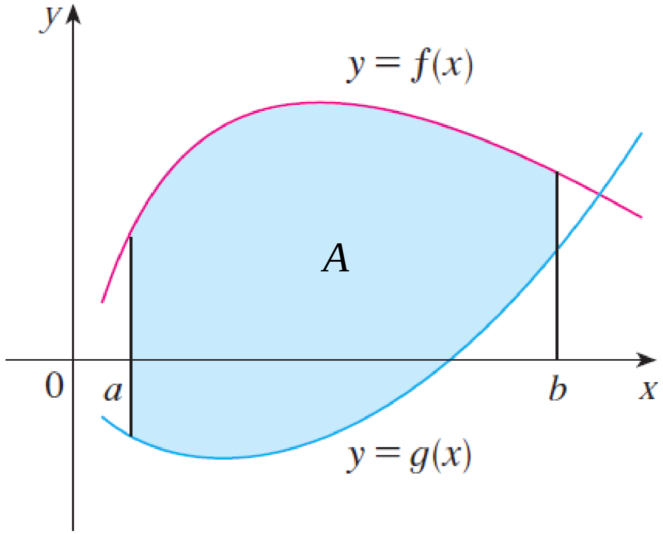
A. $\int_{-2}^{2}(x^4+2)dx$

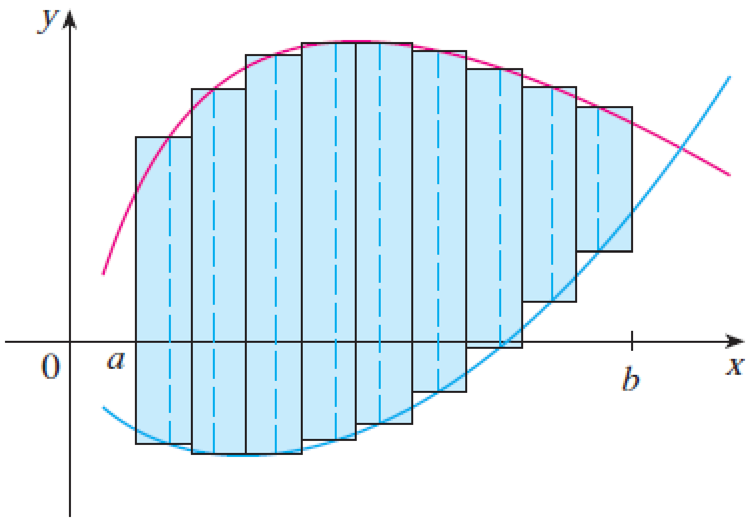
B. $\int_{-3}^{3}(x^3-3x)dx$

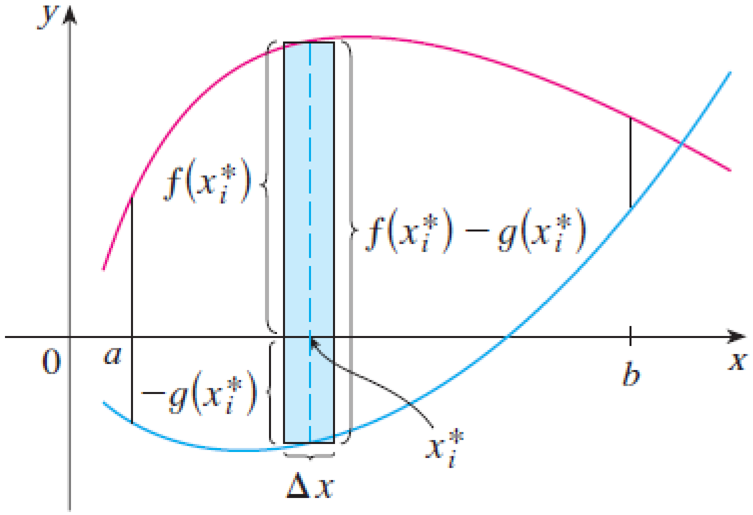
C. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^4 \sin x \, dx$

兩條曲線之間的面積 (5.1)

- A 的面積是？



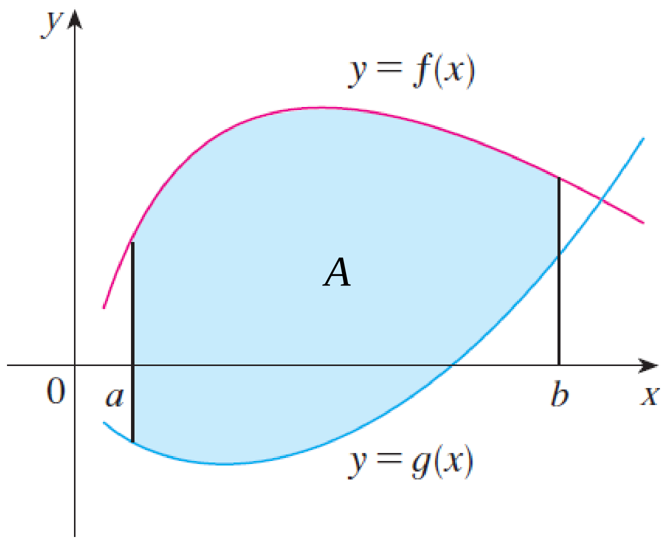




兩條曲線之間的面積

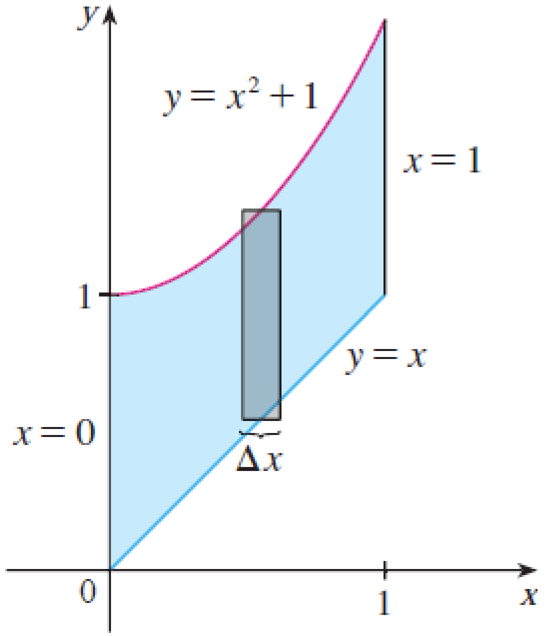
- 若 f 與 g 在$[a, b]$上連續且對於任意 $x \in [a, b]$ 都有 $f(x) > g(x)$，則被曲線 $y = f(x)$、 $y = g(x)$ 及直線 $x = a$、$x = b$ 圍成的區域 A 的面積為:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$



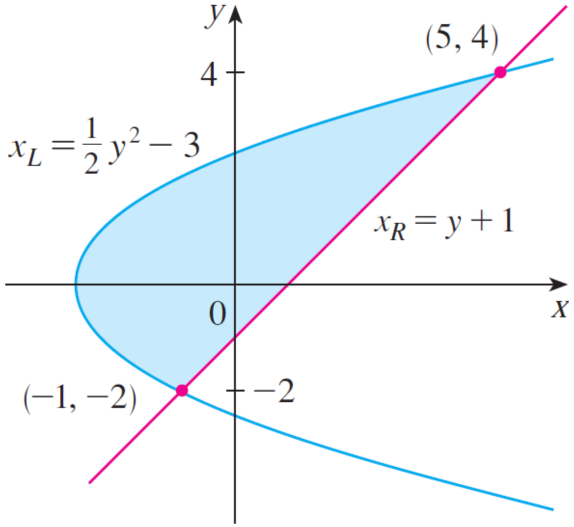
例9

- 求由 $y = x^2 + 1$ 、$y = x$ 、 $x = 0$ 與 $x = 1$ 所圍成的區域面積。



例10 (水平切割)

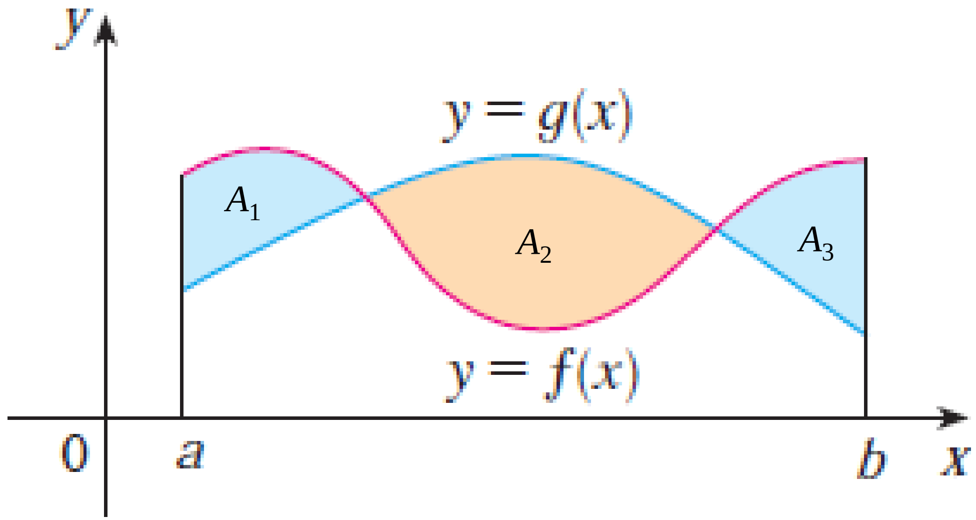
- 求直線 $y = x - 1$ 與拋物線 $y^2 = 2x + 6$ 構成的區域面積。



兩條曲線之間的面積 (2)

- 若在區間[a, b]上並不是所有 x 值皆有 $f(x) > g(x)$，則由兩函數圖象所圍成的區域面積為:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$



例11

- 一粒子以 $v(t) = t^2 - t - 6$ (公尺/秒) 的速度沿直線運動。求:
  A. 此粒子在時間 $1 \le t \le 4$ 範圍內的位移。
  B. 此粒子在時間 $1 \le t \le 4$ 所行經的距離。

+ 教材對應閱讀章節及練習

- 第 3 章 4.1-4.3(除例4), 4.4-4.5, 5.1
- 對應習題: (可視個人情況定量)
  - 4.1: 43-48, 53-56
  - 4.2: 17-22, 27-30
  - 4.3: 1-6, 9-20
  - 4.4: 1-62
  - 4.5: 15-24, 35-36
  - 5.1: 1-34