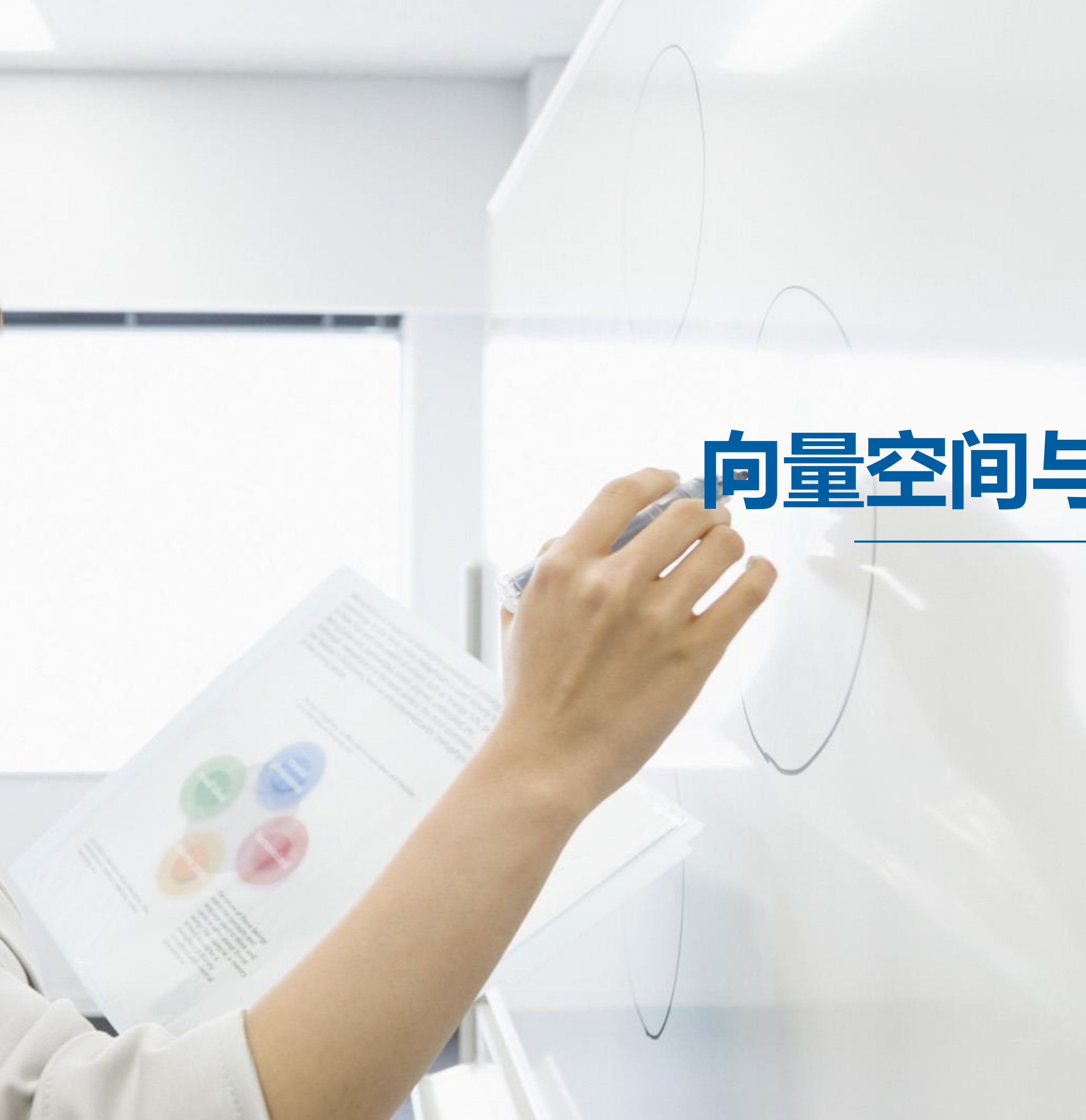

03

向量空间与线性方程组解的结构

《线性代数》

目录/Contents

目录/Contents

3.1 向量组及其线性组合

1. n 维向量的概念

定义1

由 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的有序数组称为 n 维向量.

若 n 维向量写成 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 的形式，称为 n 维列向量；

若 n 维向量写成 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的形式，称为 n 维行向量.

这 n 个数称为该向量的 n 个分量，其中 a_i 称为第 i 个分量.

我们常用 $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ 来表示 n 维列向量，而用 $\alpha^{\mathrm{T}},\beta^{\mathrm{T}},\gamma^{\mathrm{T}},\ldots$ 来表示 n 维行向量.

一、向量的概念及运算

当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是复数时， n 维向量称为 n 维复向量，

当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是实数时， n 维向量称为 n 维实向量.

今后我们所讨论的向量都是实向量.

分量都是零的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$， 即 $\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ 或 $\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)$.

向量 $\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\\vdots\\-a_n\end{pmatrix}$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{\alpha}$.

2. 向量的运算

设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$， $k\in\mathbf{R}$，则有

（1） $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}$；

（2） $k\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\\\vdots\\ka_n\end{pmatrix}$；

这两种运算称为向量的线性运算

（3） $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$； $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}$.

例1 设有线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

将第 i 个未知量 x_i 的系数写成一个 m 维列向量 $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} (i = 1, 2, \cdots, n)$，

常数写成一个 m 维列向量 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$， 则该方程组也可用向量的形式来表达：

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta.$$

定义 2

由若干个维数相同的向量构成的集合，称为向量组.

例如，例 1 中未知量的系数构成的 m 维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} (i = 1, 2, \cdots, n)$$ 的全体构成一个向量组.

例2 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$， 对矩阵 A 分块如下：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}(j=1,2,\cdots,n)$， $\boldsymbol{\beta}_i^{\mathrm{T}}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,m)$.

则 m 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组，

n 维向量组 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组.

反之，给定一个 m 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，

则得到一个以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为列的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$；

给定一个 n 维向量组 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}$，

则得到一个以 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}$ 为行的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$.

因此，一个所含向量个数有限的向量组总可与一个矩阵建立一一对应关系.

定义 3

给定 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，对于任意一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，表达式

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$$

称为该向量组的一个线性组合.

定义 4

给定 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和一个 n 维向量 β，如果存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n,$$

则称向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，

或者说向量 β 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的一个线性组合.

例如，给定向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，则向量

$$2\alpha_1-\alpha_2+\sqrt{3}\alpha_3,\quad \alpha_1+0\alpha_2+0\alpha_3\,(=\alpha_1),\quad 0\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_3\,(=\alpha_2),$$

$$0\alpha_1+0\alpha_2+\alpha_3\,(=\alpha_3),\quad 0\alpha_1+0\alpha_2+0\alpha_3\,(=\mathbf{0})$$

都是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合.

由此可见，一个向量组可以线性表示这个向量组中的每一个向量，

零向量是任意一个向量组的线性组合.

例3 设向量组 $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，

则任一向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ 都可由 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性表示，

即

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+a_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$
$$=a_1\mathrm{e}_1+a_2\mathrm{e}_2+\cdots+a_n\mathrm{e}_n.$$

定理 1

向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ （唯一）线性表示的充分必要条件是线性方程组

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$ 有（唯一）解.

证明 如果向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，则存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$， 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=\beta.$$

这表明线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$ 有解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

反之，如果线性方程组

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 有解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$，

即 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}$，

从而向量β可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表示.

例4 设有向量 $\alpha=\begin{pmatrix}5\\3\\-6\end{pmatrix}$ 及向量组 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$，试问 α 能否由 β_1,β_2,β_3 线性表示.

解 设 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=\alpha$， 由

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&5\\1&2&1&3\\-1&1&2&-6\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+(-1)r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&5\\0&2&2&-2\\0&1&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+(-1)r_2]{\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&5\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

可知方程组有无穷多解： $\begin{cases}x_1=5+c,\\x_2=-1-c,\\x_3=c\end{cases}$，其中 c 为任意常数. 因此 α 能由 β_1,β_2,β_3 线性表示，

且表示式不唯一： $\alpha=(5+c)\beta_1+(-1-c)\beta_2+c\beta_3$，其中 C 为任意常数.

例5

设向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-5\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}-3\\2\\4\end{pmatrix}$， 而$\beta=\begin{pmatrix}5\\4\\-7\end{pmatrix}$，问：向量$\beta$能否由向量组$\alpha_1$，$\alpha_2$, α_3线性表示？若可以，求出线性表达式。

解 设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$， 由

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&5\\0&1&2&4\\-2&-5&4&-7\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&5\\0&1&2&4\\0&-1&-2&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&5\\0&1&2&4\\0&0&0&7\end{array}\right)$$

可知线性方程组无解，所以向量β不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

三、向量组的等价

定义 5

设 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 m 个 n 维向量组成的向量组，而 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是 s 个 n 维向量组成的向量组.

如果向量组 B 中每一个 向量 $\beta_j(j=1,2,\cdots,s)$ 均可由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，

则称向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

如果向量组 A 与向量组 B 可以相互线性表示，则称向量组 A 与向量组 B 等价.

若向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，

则对向量组 B 中每一个向量 $\beta_j(j=1,2,\cdots,s)$，存在一组数 $k_{1j},k_{2j},\cdots,k_{mj}$，使得

$$\beta_j=k_{1j}\alpha_1+k_{2j}\alpha_2+\cdots+k_{mj}\alpha_m=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}k_{1j}\\k_{2j}\\\vdots\\k_{mj}\end{pmatrix}\quad(j=1,2,\cdots,s).$$

三、向量组的等价

以向量$\begin{pmatrix} k_{1j} \\ k_{2j} \\ \vdots \\ k_{mj} \end{pmatrix}$为列，得到一个$m\times s$矩阵

$$K_{m\times s} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{ms} \end{pmatrix}.$$

矩阵$\boldsymbol{K}_{m\times s}$称为这一线性表示的系数矩阵.

令矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$，则有 $B = AK_{m\times s}$.

定理 2

设 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 m 个 n 维向量组成的向量组，而 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是 s 个 n 维向量组成的向量组.

令矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$，则向量组 B 可由向量组 A 线性表示的充分必要条件是矩阵方程 $AX=B$ 有解.

向量组 A 与向量组 B 等价的充分必要条件是矩阵方程 $AX=B$ 与 $BY=A$ 同时有解.

证明

向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示

1. 存在这一表示的系数矩阵 $\boldsymbol{K}_{m\times s}$，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}_{m\times s}$.
2. 若矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{K}_{m\times s}$，

向量组 A 与向量组 B 等价

1. 存在系数矩阵 $\boldsymbol{K}_{m\times s}$ 与 $\boldsymbol{M}_{s\times m}$，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}_{m\times s}$ 且 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{M}_{s\times m}=\boldsymbol{A}$.
2. 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{BY}=\boldsymbol{A}$ 同时有解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{K}_{m\times s}$，$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{M}_{s\times m}$.

例6 已知向量组 $A:\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ 和 $B:\beta_1=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$,

证明：向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 可由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2$ 线性表示.

证明 令矩阵 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2)$， $\boldsymbol{B}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，

向量组 B 可由向量组 A 线性表示的充分必要条件是矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解.

而该矩阵方程有解又等价于三个方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_j\ (j=1,2,3)$ 均有解.

对增广矩阵实施初等行变换，有

$$(\alpha_1,\alpha_2|\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\left(\begin{array}{cc|ccc}1&-2&3&-3&-1\\1&0&1&1&1\\-1&1&-2&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

可见，三个方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}_j\ (j=1,2,3)$的解分别为$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

于是有$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&1\end{pmatrix}$，使得$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$. 因此向量组$B$可由向量组$A$线性表示.

例7 已知向量组 $A:\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$ 和 $B:\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，

证明：向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 等价.

证明 令矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$， $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$， 设 $BX=A$． 由

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&-1&1\\1&1&0&0&1&2\\0&1&1&-1&2&5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&-1\\0&1&0&-1&2&3\\0&0&1&0&0&2\end{array}\right),$$

矩阵方程 $BX=A$ 有解 $X=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&2&3\\0&0&2\end{pmatrix}$，

因此，向量组 A 能由向量组 B 线性表示.

三、向量组的等价

另一方面，由于

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

所以矩阵$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$可逆，于是有$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \boldsymbol{B}$，

即向量组 B 能由向量组 A 线性表示，所以这两个向量组等价.

目录/Contents

目录/Contents

3.2 向量组及其线性组合

一、向量组的线性相关与线性无关

定 义

设有 m 个 n 维向量构成的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 如果存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关； 若当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时，才有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$, 则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

例1 对于向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}$ ，存在一组不全为零的数 $2,\ -1,\ 0$, 使得

$$2\alpha_1-\alpha_2+0\alpha_3=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}=0,$$

所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

一、向量组的线性相关与线性无关

而对于向量组 $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \cdots, e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，　对任意一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，有

$$k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n$$
$$=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+k_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}.$$

显然，当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 时，才有 $k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n=0$，

所以向量组 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 线性无关.

一、向量组的线性相关与线性无关

特别地，

01 OPTION

当向量组只含有一个向量 α 时，若 $\alpha \neq 0$ ，则只有 $k=0$ 时才有 $k\alpha = 0$，所以 α 线性无关；

02 OPTION

若 $\alpha = 0$ ，则对任意非零常数 k，都有 $k\alpha = 0$ ，所以 α 线性相关.

一、向量组的线性相关与线性无关

例 2 证明：任一含有零向量的向量组必定线性相关.

证 明

设向量组 $A: 0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ 是任一含有零向量的 n 维向量组，于是对任意非零常数 k，都有

$$k0 + 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + \cdots + 0 \cdot \alpha_m = 0$$

所以向量组 $A: 0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ 线性相关.

例 3 设有向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$，判断向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性相关性.

解 按照向量组线性相关和线性无关的定义，我们只需验证使得等式 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ 成立的一组数 k_1,k_2,k_3 是不全为零还是全为零.

将等式 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ 改写为：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=0\,,\qquad \text{即}\quad \begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&3\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=0$$

一、向量组的线性相关与线性无关

于是，问题转化为齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

是有非零解,还是只有零解. 如果只有零解，则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，

若有非零解，则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

由于 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$ 方程组有非零解，所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

例 4

已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$，试证明：向量组 β_1,β_2,β_3 也线性无关.

证明

设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，将 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$ 代入并整理得：

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关知上式成立当且仅当 $\begin{cases}k_1+k_3=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\end{cases}$，由于 $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$，

所以只有零解 $k_1=k_2=k_3=0$，因此 β_1,β_2,β_3 也线性无关.

一、向量组的线性相关与线性无关

定理1

m 个 n 维向量构成的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关的充分必要条件是齐次线性方程组

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

有非零解； 线性无关的充分必要条件是上述齐次线性方程组只有零解

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$$

一、向量组的线性相关与线性无关

已知齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_1\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_1\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$， 将系数矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 实施初等行变换化为矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$，则齐次线性方程组 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_m\beta_m=\mathbf{0}$ 与齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_1\alpha_2+\cdots+x_1\alpha_m=\mathbf{0}$ 是同解线性方程组，从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 具有相同的线性相关性.

若矩阵 $A\overset{r}{\sim}B$， 则矩阵 A 的列向量组与矩阵 B 的列向量组有相同的线性相关性.

若矩阵 $A\overset{c}{\sim}B$， 则矩阵 A 的行向量组与矩阵 B 的行向量组有相同的线性相关性.

定理1

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\ (m\geq 2)$线性相关的充分必要条件是存在某一个向量$\boldsymbol{\alpha}_j(1\leq j\leq m)$可由其余向量线性表示.

证明 充分性：若存在某一个向量$\boldsymbol{\alpha}_j(1\leq j\leq m)$可由其余向量线性表示，

即存在一组数$k_1,\cdots,k_{j-1},k_{j+1},\cdots,k_m$，使得

$$\alpha_j=k_1\alpha_1+\cdots+k_{j-1}\alpha_{j-1}+k_{j+1}\alpha_{j+1}+\cdots+k_m\alpha_m,$$

移项得：

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_{j-1}\alpha_{j-1}+\alpha_j+k_{j+1}\alpha_{j+1}+\cdots+k_m\alpha_m=0,$$

显然这组数$k_1,\cdots,k_{j-1},1,k_{j+1},\cdots,k_m$不全为零，所以向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\ (m\geq 2)$线性相关.

必要性:

如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ $(m\geq 2)$线性相关， 则存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0.$$

在$k_1,k_2,\cdots,k_n$中不妨设$k_j\neq 0$，则对上式移项得

$$-k_j\alpha_j=k_1\alpha_1+\cdots+k_{j-1}\alpha_{j-1}+k_{j+1}\alpha_{j+1}+\cdots+k_m\alpha_m,$$

从而有:

$$\alpha_j=\frac{k_1}{-k_j}\alpha_1+\cdots+\frac{k_{j-1}}{-k_j}\alpha_{j-1}+\frac{k_{j+1}}{-k_j}\alpha_{j+1}+\cdots+\frac{k_m}{-k_j}\alpha_m,$$

即α_j可由其余向量线性表示.

推论 1 两个向量α_1,α_2线性相关的充分必要条件是它们的分量对应成比例.

例5

设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$, 则$\alpha_2=3\alpha_1$， 因此$\alpha_1,\alpha_2$线性相关.

而α_3与α_1的分量不对应成比例，α_3与α_2的分量也不对应成比例，

从而α_1,α_3线性无关，α_2,α_3也线性无关.

给定一个向量组后，从这个向量组中抽取一部分向量构成一个新的向量组，这个新的向量组称为原向量组的部分组.

设有 n 维向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 不妨设其部分组记为 $B:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r(1\le r<m)$.

推论 2 若部分组 B 线性相关，则向量组 A 也线性相关.

证明 若部分组 B 线性相关，则存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_r\alpha_r=0.$$

于是有 $$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_r\alpha_r+0\cdot\alpha_{r+1}+0\cdot\alpha_{r+2}+\cdots+0\cdot\alpha_m=0,$$

显然，$k_1,k_2,\cdots,k_r,0,\cdots,0$ 也是一组不全为零的数，因此向量组 A 也线性相关.

推论 2 可以说成：部分相关，则整体相关.

推论 3　若向量组 A 线性无关，则其部分组 B 也线性无关.

证明 反证法：

若部分组 B 线性相关，则向量组 A 线性相关，与已知条件矛盾. 所以部分组 B 也线性无关.

推论 3 也可说成：整体无关，则部分必无关.

推论 4　设 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 m 个 n 维向量组成的向量组，当 $n<m$ 时该向量组一定线性相关.特别地， $n+1$个 n 维向量一定线性相关.

证明

记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$， 当 $n<m$ 时，齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 中方程的个数小于未知量的个数，因此一定有非零解， 所以向量组 A 线性相关.

例6 设向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，而向量组 $A':\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关，则向量 β 一定能由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，且表示式是唯一的.

证明 因为向量组 $A':\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关，所以存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m,k$，

使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+k\beta=0.$$

在上式中一定有 $k\neq 0$. 这是因为如果 $k=0$，则 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为零，且上式变为

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0,$$

于是向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，这与已知条件矛盾，所以 $k\neq 0$.

于是上式改写为：

$$\beta=-\frac{k_1}{k}\alpha_1-\frac{k_2}{k}\alpha_2-\cdots-\frac{k_m}{k}\alpha_m.$$

所以向量 β 一定能由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

下面证明表示式是唯一的.

假设存在两组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 与 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m$，都满足:

$$\boldsymbol{\beta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m,\quad \boldsymbol{\beta}=\mu_1\boldsymbol{\alpha}_1+\mu_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\mu_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

将两式相减，得:

$$\mathbf{0}=(\lambda_1-\mu_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_2-\mu_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(\lambda_m-\mu_m)\boldsymbol{\alpha}_m,$$

但是向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，所以 $\lambda_1-\mu_1=0,\lambda_2-\mu_2=0,\cdots,\lambda_m-\mu_m=0$，

即 $\lambda_1=\mu_1,\lambda_2=\mu_2,\cdots,\lambda_m=\mu_m$.

因此表示式是唯一的.

例7

已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，向量组$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，证明：向量$\alpha_4$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

证明

因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，于是部分组$\alpha_2,\alpha_3$也线性无关.而向量组$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，于是向量$\alpha_4$可由向量组$\alpha_2,\alpha_3$线性表示，即存在一组数$k_2,k_3$，使

$$\alpha_4 = k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3,$$

从而有

$$\alpha_4 = 0\cdot\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3,$$

即：向量α_4可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

定理 3 设有两个 n 维向量组 A: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$； B: $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$，

如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，并且 $s>t$，

则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

证明

要证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，只需证明方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 有非零解即可.

因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示， 所以存在一个矩阵 $\boldsymbol{K}_{t\times s}$， 使得

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\mathrm{K}_{t\times s}.$$

于是方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 等价于

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\mathrm{K}_{t\times s}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}$$
$$=0.$$

齐次线性方程组 $\boldsymbol{K}_{t\times s}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}=\mathbf{0}$ 中方程的个数 t 小于未知量的个数 s，从而必有非零解，

即一定存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 $\boldsymbol{K}_{t\times s}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{pmatrix}=\mathbf{0}$. 因此

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)K_{t\times s}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$=0.$$

即方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 有非零解 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

二、向量组线性相关性的一些重要结论

推论 5　如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表示，并且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$s\le t$.

推论 6　如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$均线性无关，并且这两个向量组等价，则$s=t$.

目录/Contents

目录/Contents

3.3 向量组的秩与矩阵的秩

一、向量组秩的概念

定 义 1

设 A 是一个 n 维向量组（它可以包含无限多个向量），如果在 A 中取出 r 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 满足条件：

(1) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关；

(2) 对于 A 中任意的向量 β，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关，

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为向量组 A 的一个极大线性无关组，简称极大无关组.

一、向量组秩的概念

由极大无关组的定义可知，向量组 A 中任一向量都可由它的极大无关组线性表示. 反之，极大无关组作为向量组 A 的部分组，一定可由向量组 A 线性表示， 因而向量组 A 与它自身的极大无关组总是等价的. 向量组 A 中所含向量的个数有可能是无限多个，但是它的极大无关组所含向量的个数不会超过向量的维数，从而一定是有限的. 用向量组的极大无关组来代替向量组，会给我们的讨论带来极大的方便.

一、向量组秩的概念

例1

n 维单位坐标向量组 $E: \quad e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \cdots, e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 线性无关，

所以该向量组的极大无关组就是它本身.

例2

设向量组 $A:\quad \alpha_1=\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\12\\7\end{pmatrix},$ 向量 α_1 与 α_2 的分量不对应 成比例，

所以 α_1,α_2 线性无关. 另外，由于 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$， 所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

向量组 α_1,α_2 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的极大无关组.

一、向量组秩的概念

类似的讨论可知，向量组 α_2,α_3，向量组 α_1,α_3 都可作为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的极大无关组. 也就是说，一个向量组的极大无关组并不是唯一的. 向量组与其任意一个极大无关组是相互等价的，由向量组等价的传递性可知，向量组的任意两个极大无关组相互等价. 向量组的每一个极大无关组所含向量的个数总是相等的. 于是，我们引入如下定义：

定义2

向量组 A 的任意一个极大无关组所含向量的个数，称为这个向量组的秩，记为 R_A

一、向量组秩的概念

例如，例1中的向量组的秩 $R_E = n$ ，例2中的向量组的秩 $R_A = 2$.

如果一个向量组只含有零向量，则它没有极大无关组，此时我们规定它的秩为零.

定理1 等价的向量组有相同的秩.

证明 因为每个向量组都与它的极大无关组等价，根据向量组等价的传递性，任意两个等价的向量组的极大无关组也等价，因而有相同的秩.

例3

证明：一个向量组线性无关的充分必要条件是它的秩等于它所含向量的个数.

证明

如果一个向量组本身线性无关， 则这个向量组的极大无关组就是它自身，于是它的秩等于它所含向量的个数； 如果一个向量组的秩等于它所含向量的个数，则这个向量组显然是线性无关的.

例4

证明：任一n维向量组A的秩$R_A \leq n$.

证明

因为$n+1$个n维向量必定线性相关，

所以n维向量组A的极大无关组中所含向量个数不能超过n个，

即$R_A \leq n$.

定 义 3

在 $m\times n$ 矩阵 A 中，任取 k 行与 k 列（$k\le m$，$k\le n$），位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 A 中所处的位置次序而得的 k 阶行列式，称为矩阵 A 的 k 阶子式。

$m\times n$ 矩阵 A 中的 k 阶子式共有 $C_m^k\cdot C_n^k$ 个.

定 义 4

设在矩阵 A 中有一个不等于0的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于0，那么 D 称为矩阵 A 的最高阶非零子式， 数 r 称为矩阵 A 的秩，记作 $R(A)$.

并规定：

零矩阵的秩等于0.

由行列式按行（列）展开的性质可知，若 A 的所有 $r+1$ 阶子式全等于零，则所有高于 $r+1$ 阶的子式也全为0，因此，r 阶非零子式 D 被称为最高阶非零子式，而矩阵 A 的秩 $R(A)$ 就是非零子式的最高阶数．由此可得，若矩阵 A 中有某个 k阶子式不为0，则 $R(A) \geq k$；若矩阵 A 中所有 k阶子式全为0，则 $R(A) < k$．

对于 n 阶矩阵 A，因为 A 的 n 阶子式只有一个 $|A|$，所以，当 $|A| \neq 0$ 时，$R(A) = n$，当 $|A| = 0$ 时，$R(A) < n$．从而可逆矩阵的秩等于它的阶数，而不可逆矩阵的秩小于它的阶数.

因此，可逆矩阵又称为满秩矩阵，不可逆矩阵又称为降秩矩阵.

例 5

证明：矩阵 A 的秩与它的转置矩阵 A^{T} 的秩相等.

证明

由于矩阵 A^{T} 的子式都是矩阵 A 的子式的转置，根据行列式与其转置行列式相等这一性质，得到 $R(A)=R(A^{T})$.

例 6

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ 的秩

解

矩阵 A 没有4阶子式，它的所有3阶子式为：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

而 A 中有一个非零的二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$， 所以 $\boxed{A \text{ 的秩}.\ R(A) = 2}$

例 7

求矩阵 $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩

解

矩阵 B 是一个行阶梯形矩阵，非零行的行数为3，从而 B 的所有4阶子式全为0.

而 B 中存在一个3阶非零子式 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$,

于是 $\boxed{R(B) = 3}$.

定理 2 矩阵的初等行变换不改变矩阵的秩，即若 $\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{B}$，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

证明 先证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 通过一次初等行变换变为矩阵 $\boldsymbol{B}$，有 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r， D 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的 r 阶非零子式，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 t.

（1）若 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}\boldsymbol{B}$，

则在 $\boldsymbol{B}$ 中总能找到与 D 相对应的 r 阶子式 D_1， $D_1=D$ 或 $D_1=-D$，因此 $D_1\neq 0$，从而 $t\geq r$.

另一方面，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 通过一次初等行变换变为矩阵 $\boldsymbol{B}$，

则矩阵 $\boldsymbol{B}$ 通过一次初等行变换变为矩阵 $\boldsymbol{A}$， 同样的讨论可知 $r\geq t$，

所以 $R(\boldsymbol{A})=r=t=R(\boldsymbol{B})$.

（2）若 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{kr_i} \boldsymbol{B}$ ，

则在 $\boldsymbol{B}$ 中总能找到与 D 相对应的 r 阶子式 D_1， $D_1 = D$ 或 $D_1 = kD$，

因此 $D_1 \neq 0$，从而 $t \geq r$.

与（1）同样的讨论可知 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$.

（3）若 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_i + kr_j} \boldsymbol{B}$ ，分两种情形讨论：

（i）如果非零子式 D 不包含 $\boldsymbol{A}$ 中的第 i 行，则在 $\boldsymbol{B}$ 中能找到 r 阶子式 D_1，使得 $D_1 = D$.

（ii）如果非零子式 D 包含 $\boldsymbol{A}$ 中的第 i 行，

则在 $\boldsymbol{B}$ 中能找到与 D 相对应的 r 阶子式 D_1，且 D_1 的第 i 行是两个数之和的形式，

按照行列式的拆分性质，D_1 可以写成两个行列式之和，

$$D_1 = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{ip_1} + ka_{jp_1} & \cdots & a_{ip_r} + ka_{jp_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{ip_1} & \cdots & a_{ip_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{jp_1} & \cdots & a_{jp_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = D + kD_2 \text{，}$$

三、矩阵秩的求法

如果非零子式 D 包含 $\boldsymbol{A}$ 中的第 j 行， 则 $D_2=0$， $D_1=D\neq 0$.

如果非零子式 D 不包含 $\boldsymbol{A}$ 中的第 j 行，则 D_2 也是 $\boldsymbol{B}$ 中的 r 阶子式，

并且由 $D_1-kD_2=D\neq 0$ 知 D_1 与 D_2 不同时为零， 所以在 $\boldsymbol{B}$ 中定能找到非零的 r 阶子式，

从而 $t\geq r$.

另一方面，由 $\boldsymbol{B}\xrightarrow{r_i-kr_j}\boldsymbol{A}$ 以及同样的讨论可知 $r\geq t$ ，

所以 $R(\boldsymbol{A})=r=t=R(\boldsymbol{B})$.

经过一次初等行变换不改变矩阵的秩，则经过有限次初等行变换也不改变矩阵的秩.

定理 3 矩阵的初等变换不改变矩阵的秩，即若$A \sim B$，则$R(A) = R(B)$.

已知矩阵的初等行变换不改变矩阵的秩. 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 实施初等列变换变为矩阵 $\boldsymbol{B}$ ，

相当于对矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 实施初等行变换变为矩阵 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ ，又知 $R(\boldsymbol{A}) = R\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)$， $R(\boldsymbol{B}) = R\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right)$，

所以对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 实施初等列变换变为矩阵 $\boldsymbol{B}$ ，仍旧有 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$.

因此，若$A \sim B$，则$R(A) = R(B)$.

例8

求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -2 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 3 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 1 & 6 & 0\end{pmatrix}$ 的秩.

解

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -2 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 3 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 1 & 6 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 3 & 2 & 0\\ 3 & 0 & -2 & -1 & 3\\ 2 & -2 & 1 & 6 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 0 & -5 & 2 & 0\\ 0 & -2 & -1 & 8 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 0 & -5 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=3$.

定理 4　矩阵的行向量组的秩与它的列向量组的秩相等，都等于矩阵的秩.

证明　设 $m\times n$ 矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix}$ 的行向量组是 $\boldsymbol{\beta}_1^T,\boldsymbol{\beta}_2^T,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m^T$，

列向量组是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$. 且行向量组的秩记为 R_{row}，列向量组的秩记为 R_{col}，

我们先证明 $R_{col}=R(\boldsymbol{A})$.

设 $R(\boldsymbol{A})=r$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中存在一个 r 阶子式不为零，而所有阶数大于 r 的子式全为零.

不妨设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行、r 列构成的 r 阶子式是非零子式，

$$D_r=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

下面我们证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 个列向量就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组从而有 $R_{col}=R(\boldsymbol{A})$.

由 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$ 知齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}=\mathbf{0} \qquad (1)$$

只有零解，

因而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_j'=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{rj} \end{pmatrix}(j=1,2,\cdots,r)$ 线性无关. 又因为齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}=\mathbf{0} \qquad (2)$$

的解一定是方程组（1）的解，

由方程组(1)只有零解可知，齐次线性方程组(2)一定也只有零解，

所以（由向量组$\alpha_j' = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{rj} \end{pmatrix} (j=1,2,\cdots,r)$的每个向量填加若干分量所得的）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$也线性无关.

接下来证明矩阵 A 的每一个列向量α_k $(k=1,2,\cdots,n)$均可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示.

当$1\le k\le r$时，显然α_k可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示. 当$r+1\le k\le n$时，构作矩阵

$$A' = (\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_k) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} & a_{mk} \end{pmatrix},$$

A' 中的所有子式均是 A 中的子式.

从而 A' 中存在一个不为零的 r 阶子式 D_r，所有 $r+1$ 阶子式均为零，因此 $R(A')=r$.

四、向量组的秩与矩阵的秩的关系

考虑齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} & a_{mk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{r+1} \end{pmatrix} = 0,$$

由于系数矩阵的秩 $R(\boldsymbol{A}')=r$，小于未知量的个数 $r+1$，

所以该齐次线性方程组一定有非零解，

从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性相关， 因此， $\boldsymbol{\alpha}_k$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示.

由以上的讨论可知，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组，

从而有 $R_{col}=r=R(\boldsymbol{A})$.

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组是矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列向量组， 所以有 $R_{row}=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{A})$.

例9 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}5\\0\\15\\-10\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-2\\1\\-6\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\0\\5\\-4\end{pmatrix}$

的秩和一个极大无关组，并把不属于极大无关组的向量用极大无关组线性表示.

解 令矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$，对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 实施初等行变换化为行最简形矩阵 $\boldsymbol{R}$：

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&-1&5&-2&2\\2&-1&0&1&0\\3&-3&15&-6&5\\0&1&-10&5&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&5&-2&2\\0&1&-10&5&-4\\0&0&0&0&-1\\0&1&-10&5&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-5&3&0\\0&1&-10&5&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$
$$=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)=R,$$

由 $R(\boldsymbol{R})=3$ 可知 $R(\boldsymbol{A})=3$． $\boldsymbol{R}$ 中的3阶非零子式为 $\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq0$，

所以β_1,β_2,β_5是$\boldsymbol{R}$的列向量组的极大无关组， 且

$$\beta_3=-5\beta_1-10\beta_2+0\cdot\beta_5，\quad \beta_4=3\beta_1+5\beta_2+0\cdot\beta_5 .$$

由于向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$与向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$有相同的线性相关性，

所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的极大无关组，

且有

$$\alpha_3=-5\alpha_1-10\alpha_2+0\cdot\alpha_5，\quad \alpha_4=3\alpha_1+5\alpha_2+0\cdot\alpha_5 .$$

目录/Contents

目录/Contents

3.4 线性方程组解的结构

一、线性方程组有解的判定定理

n 元非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$Ax = \beta$

n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的导出组

$Ax = 0$

其中 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$， $\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} (1 \le j \le n)$， $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

增广矩阵记为 $\tilde{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n | \beta)$.

一、线性方程组有解的判定定理

定理 1 (1) 线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})<R\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)$；

(2) 线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)$

且当 $R(\boldsymbol{A})=R\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)=n$ 时有唯一解，当 $R(\boldsymbol{A})=R\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)=r<n$ 时有无穷多解.

证明 对增广矩阵 $\tilde{A}$ 实施初等行变换，化为行最简形矩阵 $\tilde{\boldsymbol{R}}$， 为叙述方便，不妨设 $\tilde{\boldsymbol{R}}$ 为：

$$\tilde{\mathrm{R}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} & d_1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_{2n} & d_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} & d_r\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix},$$

于是，$\tilde{\mathrm{R}}$的前n列就是系数矩阵的行最简形.

线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$无解的充分必要条件是$\tilde{\boldsymbol{R}}$的首元出现在$\tilde{\boldsymbol{R}}$的最后一列，即$d_{r+1}\neq 0$，此时$R(\boldsymbol{A})=r$，而$R\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)=r+1$.

而线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$一定有解的充分必要条件是$\tilde{\boldsymbol{R}}$的首元不出现在$\tilde{\boldsymbol{R}}$的最后一列，即$d_{r+1}=0$，此时$R(\boldsymbol{A})=R\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)$. 且当$R(\boldsymbol{A})=R\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)=n$时，$\tilde{\boldsymbol{R}}$的首元的个数等于未知量的个数，从而线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$有唯一解；当$R(\boldsymbol{A})=R\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)=r<n$时，首元的个数小于未知量的个数，线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$有无穷多解.

定理 3

(1) 线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$只有零解的充分必要条件是$R(\boldsymbol{A})=n$；

(2) 线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解的充分必要条件是$R(\boldsymbol{A})=r<n$.

一、线性方程组有解的判定定理

定理 3 矩阵方程 $AX=B$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,B)$.

证明

设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $m\times t$ 矩阵，X 为 $n\times t$ 矩阵. 将 X 和 B 按列分块，

记为 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_t)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$，则矩阵方程 $AX=B$ 等价于 t 个向量方程 $Ax_j=\beta_j\ (j=1,2,\cdots,t)$.

又设 $R(A)=r$，且 A 的行最简形为 $\tilde{A}$，则 $\tilde{A}$ 有 r 个非零行，且 $\tilde{A}$ 的后 $m-r$ 行全为零.

再对分块矩阵 (A,B) 实施初等行变换，$(A,B)=(A,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\overset{r}{\sim}(\tilde{A},\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2,\cdots,\tilde{\beta}_t)$，

于是 $(A,\beta_j)\overset{r}{\sim}(\tilde{A},\tilde{\beta}_j)\ (j=1,2,\cdots,t)$.

因此，矩阵方程 $AX=B$ 有解 $\Leftrightarrow Ax_j=\beta_j\ (j=1,2,\cdots,t)$ 有解 $\Leftrightarrow R(A,\beta_j)=R(A)\ (j=1,2,\cdots,t)$

$\Leftrightarrow \tilde{\beta}_j\ (j=1,2,\cdots,t)$ 的后 $m-r$ 个元全为零 $\Leftrightarrow (\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2,\cdots,\tilde{\beta}_t)$ 的后 $m-r$ 行全为零

$\Leftrightarrow R(A,B)=r=R(A)$.

例 1 已知向量组 $A:\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$ 和 $B:\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，证明：向量组 A 和向量组 B 等价.

证明

令矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$， $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$. 要证明向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 等价，只需证明矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{BY}=\boldsymbol{A}$ 均有解，也就是要证明 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 且 $R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})$. 而 $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})$， 于是需要证明 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 即可. 由

$$(A,B)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&1\\0&1&2&1&1&0\\-1&2&5&0&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&1\\0&1&2&1&1&0\\0&0&4&0&0&2\end{array}\right)$$

可知 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=3$，另外单独计算矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩得 $R(\boldsymbol{B})=3$，所以这两个向量组等价.

如果 $x_1=k_1, x_2=k_2, \cdots, x_n=k_n$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解， 则向量

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

称为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，也称为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

记方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量的全体所成的集合为 S， 即

$$S=\{\xi|\mathrm{A}\xi=0\},$$

我们来讨论方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量的性质，以及向量组 S 的秩和极大无关组.

二、齐次线性方程组解的结构

性质 1 设α,β为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的任意的两个解，则$\alpha+\beta$仍为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解.

证明 由α,β均为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，有$\boldsymbol{A}\alpha=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}\beta=\boldsymbol{0}$，于是

$$A(\alpha+\beta)=A\alpha+A\beta=0+0=0,$$

所以$\alpha+\beta$仍为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解.

性质 2 设α为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的任意解，则对任意实数$k$，$k\alpha$仍为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解.

证明 由α为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，有$\boldsymbol{A}\alpha=\boldsymbol{0}$. 于是对于任意数$k$，有

$$A(k\alpha)=k(A\alpha)=k0=0,$$

所以$k\alpha$仍为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解.

二、齐次线性方程组解的结构

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$都是齐次线性方程组$Ax=0$的解，则对于任意一组数$k_1,k_2,\cdots,k_t$，

线性组合 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t$ (*)

仍为$Ax=0$的解.

因此，在$Ax=0$有非零解的情况下，如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$是解集$S$的极大无关组，则表达式(*)称为方程组$Ax=0$的通解.

齐次线性方程组的解集S的极大无关组称为齐次线性方程组的基础解系.

定理 4 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩 $R(A)=r<n$，则 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 一定有基础解系，并且基础解系中所含向量的个数为 $n-r$，从而解集 S 的秩 $R_S=n-r$.

证明 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=r<n$，不妨设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 个列向量线性无关，

于是 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形矩阵具有形式：

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

矩阵 $\boldsymbol{R}$ 对应的方程组为：

$$\begin{cases} x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = 0, \\ x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = 0, \\ \quad\cdots \quad\quad \cdots \quad\quad \cdots \quad\quad \cdots \\ x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = 0. \end{cases}$$

二、齐次线性方程组解的结构

将矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的非零行的首元对应的未知量看成固定未知量，留在等号的左端，其余的未知量看成自由未知量，放在等号右端，

上面的方程组写为：

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n, \\ x_2 = -c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n. \end{cases} \qquad (**)$$

令 $\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 分别取

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{共 } n-r \text{ 个}}, \qquad (***)$$

代入方程组(**)，相应地有

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c_{1,r+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \end{pmatrix}.$$

于是，得到$n-r$个解向量：

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-c_{1,r+1}\\-c_{2,r+1}\\\vdots\\-c_{r,r+1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}-c_{1,r+2}\\-c_{2,r+2}\\\vdots\\-c_{r,r+2}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \cdots,\ \xi_{n-r}=\begin{pmatrix}-c_{1n}\\-c_{2n}\\\vdots\\-c_{rn}\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

下面我们证明向量组$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$就是$n$元齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系.

由于向量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$可看成是表达式(***)中的$n-r$个向量分别添加了$r$个分量后所得到，而表达式(***)中的$n-r$个向量线性无关，从而向量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$也是线性无关的.

因此只需证明：齐次线性方程组的任一解向量都可由$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性表示.

假设n元齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的任一解向量：$\eta=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}$,

则 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 一定会满足方程组(**)， 即：

$$\begin{cases} k_1 = -c_{1,r+1}k_{r+1} - \cdots - c_{1n}k_n, \\ k_2 = -c_{2,r+1}k_{r+1} - \cdots - c_{2n}k_n, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ k_r = -c_{r,r+1}k_{r+1} - \cdots - c_{rn}k_n. \end{cases}$$

于是，

$$\eta = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \\ k_{r+1} \\ k_{r+2} \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_{1,r+1}k_{r+1} - \cdots - c_{1n}k_n \\ -c_{2,r+1}k_{r+1} - \cdots - c_{2n}k_n \\ \vdots \\ -c_{r,r+1}k_{r+1} - \cdots - c_{rn}k_n \\ k_{r+1} \\ k_{r+2} \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = k_{r+1}\begin{pmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_{r+2}\begin{pmatrix} -c_{1,r+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + k_n\begin{pmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

即任一解向量 η 均可由 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性表示 $\eta = k_{r+1}\xi_1 + k_{r+2}\xi_2 + \cdots + k_n\xi_{n-r}$.

所以向量组 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 就是 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系.

例 2 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$ 的基础解系.

解 对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 实施初等行变换，化为行最简形矩阵 $\boldsymbol{R}$：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R,$$

由于 $R(\boldsymbol{A}) = 2 < 5$， 所以该齐次线性方程组有非零解.

$\boldsymbol{R}$ 对应的方程组为： $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

行最简形矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的首元在第1列和第3列，所以自由未知量为 x_2, x_4, x_5.

将自由未知量移至等号右端，有 $\begin{cases} x_1 = -x_2 - 2x_4 + x_5, \\ x_3 = 2x_4 + x_5. \end{cases}$

二、齐次线性方程组解的结构

分别取 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 代入上式， 依次得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

1 从而基础解系为：

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2 原方程组的通解为：

$$\mathrm{x} = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3.$$

性质 3 设ξ,η是$Ax=\beta$的任意两个解，则$\xi-\eta$是导出组$Ax=0$的解.

证明 因为ξ,η是$Ax=\beta$的任意两个解，即：$A\xi=\beta$，$A\eta=\beta$， 所以

$$A(\xi-\eta)=A\xi-A\eta=\beta-\beta=0,$$

即：$\alpha-\beta$是导出组$Ax=0$的解.

性质 4 设ξ是$Ax=\beta$的任意解， η是导出组$Ax=0$的任意解，则$\xi+\eta$是$Ax=\beta$的解.

证明 由题设可知， $A\xi=\beta$， $A\eta=0$. 于是，

$$A(\xi+\eta)=A\xi+A\eta=\beta+0=\beta,$$

即： $\xi+\eta$是$Ax=\beta$的解.

定理 5 如果 η 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 任意给定的一个解（通常称为特解），

$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解可以表示为：

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta,$$ 其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 是任意实数.

由性质 4 可知，$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta$ 确实是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的解.

证明 下面证明 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的任一解都能写成这种形式.

设 γ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的任一解，则 $\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\eta}$ 是导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，

从而存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$，使得 $\gamma-\eta = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r},$

因此，

$$\gamma = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta.$$

推论 在非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有解的情形下，解唯一的充分必要条件是它的导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

证明 （充分性）

假设方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有两个不同的解，则这两个解的差就是导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解，与导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解矛盾．所以由导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解可知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解.

（必要性）

设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解 η．假设导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 γ，则 $\gamma+\eta$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的异于 η 的另一个解，这与方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解矛盾. 所以导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

行最简形矩阵$\tilde{R}$的首元在第1列和第2列， 所以自由未知量为x_3, x_4.

于是有

$$\begin{cases} x_1 = -3x_3, \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 - 1. \end{cases}$$

令$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$， 代入上式，得$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，

于是得原方程组的一个特解为：

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

三、非齐次线性方程组解的结构

再写出方程组 $\begin{cases} x_1 = -3x_3, \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 - 1 \end{cases}$ 导出组:

$$\begin{cases} x_1 = -3x_3, \\ x_2 = -x_3 - 2x_4, \end{cases}$$

分别令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，代入导出组，得到导出组的基础解系为:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此，原方程组的通解为:

$\boldsymbol{x} = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \eta$， k_1, k_2 为任意常数.

目录/Contents

目录/Contents

3.5 向量空间

定义 1 设V是n维向量的集合，如果对于任意$\boldsymbol{\alpha}\in V$，$\boldsymbol{\beta}\in V$，都有$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$，

则称V对向量的加法封闭；

如果对任意$\boldsymbol{\alpha}\in V$及任意$k\in\mathbf{R}$，都有$k\boldsymbol{\alpha}\in V$， 则称$V$对向量的数乘封闭.

例1 集合$V_1=\left\{\begin{pmatrix}0\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\middle| a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}\right\}$， 对任意$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\in V$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}\in V$，任意$k\in\mathbf{R}$，有

$$\alpha+\beta=\begin{pmatrix}0\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}\in V,\qquad k\alpha=k\begin{pmatrix}0\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ka_2\\\vdots\\ka_n\end{pmatrix}\in V,$$

所以V_1对向量的加法和数乘运算封闭.

例2

集合 $V_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\middle| a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}\right\}$，对任意 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\in V$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}\in V$，任意 $k\in\mathbf{R}$，有

$$\alpha+\beta=\begin{pmatrix}1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}\notin V,\qquad k\alpha=k\begin{pmatrix}1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\ka_2\\\vdots\\ka_n\end{pmatrix}\notin V(k\neq 0),$$

所以 V_2 对向量的加法和数乘运算均不封闭.

定义 2 设V是n维向量的集合，且V非空，如果V对向量的加法和数乘两种运算都封闭，则称集合V为向量空间.

例如，例 1、例 2 中的集合均为非空的，因为$\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\in V_1$，$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\in V_2$.

但是V_1对向量的加法和数乘运算封闭，所以V_1是向量空间，

但是V_2对向量的加法和数乘运算均不封闭，所以V_2不是向量空间.

例3 n维向量的全体组成的集合 $$\mathbb{R}^n=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\middle|\, x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\right\}$$

对向量的加法和数乘运算均封闭，所以是一个向量空间.

一、向量空间及其子空间

例4 n 元齐次线性方程组的解集 $S=\{x|Ax=0\}$ 对向量的加法和数乘运算封闭，

所以是一个向量空间. 这个向量空间我们称为齐次线性方程组的解空间.

例5 n 元非齐次线性方程组的解集 $S=\{x|Ax=\beta\}$ 不是一个向量空间，这是由于，

01 OPTION

如果非齐次线性方程组无解，则解集 S 是一个空集，从而不是向量空间；

02 OPTION

如果解集 S 是非空的，则对任意的 $\eta\in S$ 以及任意常数 $k\neq 1$， $A(k\eta)=k(A\eta)=k\beta\neq\beta$.

例 6 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s \in \mathbf{R}^n$，我们将向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$所有可能的线性组合$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$构成的集合记为 $\mathfrak{L}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\{\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s|k_1,k_2,\cdots,k_s\in\mathbb{R}\}$，

容易验证，$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$是一个向量空间， 我们称之为由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$所张成的向量空间.

性质 3

设有向量空间V_1与V_2，如果$V_1\subseteq V_2$（即V_1是V_2的子集），则称向量空间V_1是V_2的子空间.

例如， 例 1 中的向量空间V_1、例 4 中的向量空间S均为n维向量空间$\mathbf{R}^n$的子空间.

对于任何由n维向量组成的集合V，总有$V\subseteq\mathbf{R}^n$. 所以只要V是向量空间，

那么V就是$\mathbf{R}^n$的子空间.

定义 4　向量空间 V 中的 r 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 如果满足下列条件：

1 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关；

2 向量空间 V 中任一向量都可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为向量空间 V 的一个基.

数 r 称为向量空间的维数，记为 $\dim(V)=r$，并称 V 为 r 维向量空间.

向量空间 V 如果只含有一个零向量，则这个向量空间没有基，它的维数为 0.

例7　向量组

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

就是 $\mathbf{R}^n$ 的一个基，

因此，$dim(\mathbf{R}^n)=n$. $\mathbf{R}^n$称为n维向量空间.

向量空间

$$V_1=\left\{\begin{pmatrix}0\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\middle| a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{R}\right\}$$ 的一个基可取为 $$e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

所以V_1是$n-1$维向量空间.

如果n元齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的系数矩阵的秩$R(\boldsymbol{A})=r$，它的基础解系为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$，则$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$就是解空间$S$的基，解空间$S$的维数为$\dim(S)=n-r=n-R(\boldsymbol{A})$.

向量空间

$$\mathfrak{L}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\{\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s|k_1,k_2,\cdots,k_s\in\mathbb{R}\}$$ 与向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$等价，

因此向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的极大无关组就是向量空间$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$的基，

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩就是向量空间$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$的维数.

命题 1

如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量空间$V$的一个基，则$V$中任一向量$\beta$均可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$唯一线性表示.

证明 由基的定义可知，V中任一向量β均可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示.

下面证明表示式是唯一的.

设存在数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$及$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r$，

使得 $\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r$ 以及 $\beta=\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2+\cdots+\mu_r\alpha_r$,

两式相减得 $0=(\lambda_1-\mu_1)\alpha_1+(\lambda_2-\mu_2)\alpha_2+\cdots+(\lambda_r-\mu_r)\alpha_r$.

由基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关可得 $\lambda_1=\mu_1,\ \lambda_2=\mu_2,\ \cdots,\ \lambda_r=\mu_r$,

因此向量β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$唯一的线性表示.

定义 5 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量空间$V$的一个基，如果$V$中任一向量$\beta$可唯一线性表示为

$$\beta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_r\alpha_r,$$

则称常数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$为向量$\beta$在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$下的坐标.

取$\mathbf{R}^n$的一个基为$e_1,e_2,\cdots,e_n$，则$\mathbf{R}^n$中任一向量

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

在基$e_1,e_2,\cdots,e_n$下的坐标就是向量α的n个分量$a_1,a_2,\cdots,a_n$.

例8 验证$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$是$\mathbf{R}^3$的一个基，并求向量$\beta=\begin{pmatrix}2\\-1\\6\end{pmatrix}$在这组基下的坐标.

解

要验证$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$\mathbf{R}^3$的一组基，只要验证$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，也就是只要验证$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\overset{r}{\sim}E$即可.

设β在这组基下的坐标为x_1,x_2,x_3，即$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\beta$，记作$Ax=\beta$.

对矩阵$(A|\beta)$作行初等变换，若A能变成E，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$\mathbf{R}^3$的一组基，

且当A变成E时，β变成了$x=A^{-1}\beta$.

$$(A|\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&2\\0&1&1&-1\\1&-1&-3&6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&2\\0&1&1&-1\\0&-3&-2&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&2\\0&1&1&-1\\0&0&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&7\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\end{array}\right),$$

因为$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\overset{r}{\sim}E$，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$\mathbf{R}^3$的一个基，且向量$\beta=\begin{pmatrix}2\\-1\\6\end{pmatrix}$在这组基下的坐标为$\begin{pmatrix}7\\-2\\1\end{pmatrix}$.

定义 6 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是$n$维向量空间$V$的两个基，存在系数矩阵$\boldsymbol{P}_{n\times n}$，使得

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P,$$

矩阵$\boldsymbol{P}_{n\times n}$称为从基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵.

显然，从基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵$\boldsymbol{P}_{n\times n}$是可逆矩阵.

例9 取定$\mathbf{R}^3$中两组基$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$和$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$，求从基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵$\boldsymbol{P}$.

解 记矩阵$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\boldsymbol{B}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则从自然基$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$到基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的过渡矩阵就是$\boldsymbol{A}$，从基$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵就是$\boldsymbol{B}$.

于是有:

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{B}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}.$$

记 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$， 则矩阵 $\boldsymbol{P}$ 就是从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵.

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&1&-1\\1&0&1&1&2&2\\0&1&1&-2&3&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&0&0\\0&1&0&-1&1&-1\\0&0&1&-1&2&2\end{array}\right),$$

因此,

$$P=A^{-1}B=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&1&-1\\-1&2&2\end{pmatrix}.$$

三、基变换与坐标变换

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的两个基，任一向量 $\alpha\in\mathbf{R}^n$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标分别为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，即

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \alpha=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}.$$

令矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$， $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$， 则有 $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}.$

于是得到：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=A^{-1}B\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\quad\text{或}\quad\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=B^{-1}A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

从坐标 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 到坐标 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 的坐标变换公式

从坐标 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 到坐标 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 的坐标变换公式

其中 $P=A^{-1}B$ 是从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵.

例10

已知向量 $\alpha \in \mathbb{R}^3$ 在基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 下的坐标是 $\begin{pmatrix}8\\-2\\4\end{pmatrix}$，求 α 在基 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ 下的坐标.

解

设 α 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 $(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 $P=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&1&-1\\-1&2&2\end{pmatrix}$，

易求得 $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\\frac{3}{8}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\-\frac{1}{8}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$， 于是

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\mathrm{P}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\\frac{3}{8}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\-\frac{1}{8}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}.$$