積分技巧二

單元七

Outline

- 有理代換法
- 部分分式法
- 積分的策略

有理代換法 Rationalizing Substitution (7.4)

- E.g. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\, dx$

令 $u = 9 - x^2$?

則 $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx = \int \frac{\sqrt{u}}{u^2+9} \cdot -\frac{du}{2x}$

❌

- 可利用三角函數的恆等式，如:
  - $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
  - $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$
- 則:
  - 令 $x = 3\sin\theta \left(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$ $(\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta)$
  - $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9(1-\sin^2\theta)} = 3\sqrt{\cos^2\theta} = 3\cos\theta = \cdots$

三角函數代換表

表示式	變數變換	恆等式
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\sin\theta,\quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$	$1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\tan\theta,\quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec\theta,\quad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ or $\pi \leqslant \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

例6

- 計算:

A. $$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$$

例6 (續)

B. $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx$

例6 (續)

c. $$ {}_{0}^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx $$

部分分式法 (7.5)

- 試求有理函數的積分，如 $\dfrac{x+5}{x^2+x-2}dx$
  - 若已知 $\dfrac{x+5}{x^2+x-2} = \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x+2}$, 則此積分可以輕易計算得到。

回顧:多項式的除法

- 對於多項式 $\boldsymbol{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$
  - n 為正整數或零：$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ 為實數
  - 其中 **deg *f*(*x*) = *n*** 表示 $f(x)$ 的**次數**

- **除法定理**：設 $f(x)$，$g(x)$ 為任意兩個多項式，且 $g(x)$ 不為零多項式，則恰有一組多項式 $q(x)$ 和 $r(x)$ 滿足：

$$\boldsymbol{f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)}$$

被除式　　除式　　商式　　餘式

對應：$\dfrac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \dfrac{r(x)}{g(x)}$

其中 **$r(x) = 0$** 或 **$deg\ r(x) < deg\ g(x)$**

+ 範例:部分分式分解

- 長除法 (Long Division):
  - $(3x^3 - 4x^2 - 3x + 5) \div (x - 2)$

例7: 部分分式分解

- 求：

A. $(x^2 - 5x + 4) \div (x + 1)$
B. $(3x^3 - 11x^2 + 18x - 3) \div (3x + 2)$
C. $(2x^3 + 4x + 17) \div (x^2 + 2x + 5)$
D. $(4x^5 - 17x^3 + 24x - 3) \div (x^2 - 5x + 6)$

對於有理函數 $f(x) = P(x)/Q(x)$

- **Step 1:** 檢查 $f(x)$ 是否真分式 [即 deg(P) < deg(Q)]
  - 否則用長除法令 $f(x) = S(x) + R(x)/Q(x)$，其中 $R(x) / Q(x)$ 為真分式.
- **Step 2:**
  - **情況 1:** Q(x)的因式皆為線性且不重複 : $Q(x) = (a_1x + b_1) \ldots (a_kx + b_k)$.

    則, $\dfrac{R(x)}{Q(x)} = \dfrac{A_1}{(a_1x+b_1)} + \cdots + \dfrac{A_k}{(a_kx+b_k)}$

    - 如: $\dfrac{3x-2}{x^2-5x+6} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-3}$
  - **情況 2:** Q(x)的因式皆為線性但含有重複因式 : $Q(x) = (a_1x + b_1)^r \ldots (a_kx + b_k)$.

    則, $\dfrac{R(x)}{Q(x)} = \dfrac{A_1}{(a_1x+b_1)^1} + \dfrac{A_2}{(a_1x+b_1)^2} \ldots + \dfrac{A_r}{(a_1x+b_1)^r} \ldots + \dfrac{B_k}{(a_kx+b_k)}$

    - 如: $\dfrac{3x-2}{(x-2)^2(x+3)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{\mathrm{B}}{(x-2)^2} + \dfrac{C}{x+3}$

對於有理函數 $f(x) = P(x)/Q(x)$ (續)

- **Case 3:** $Q(x)$的因式含有不可約分且相異的二次因式，但不重複：
  $Q(x) = (a_1x + b_1) \ldots (a_kx + b_k)(ax^2 + bx + c).$ (其中 $b^2 - 4ac < 0$)
  則, $\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(a_1x+b_1)} + \cdots + \frac{A_k}{(a_kx+b_k)} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$
  - 如: $\frac{3x-2}{(x-2)(x^2+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$

- **Case 4:** $Q(x)$的因式皆為含有重覆且不可約分的二次因式:
  $Q(x) = (ax^2 + bx + c)^r \ldots (a_kx + b_k).$ (其中 $b^2 - 4ac < 0$)
  則, $\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)^1} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} \ldots + \frac{A_rx+B_r}{(ax^2+bx+c)^r} \ldots + \frac{B_k}{(a_kx+b_k)}$
  - 如: $\frac{3x-2}{(x-2)(x^2+2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$

例8

- 計算下列積分：

A. $\int \frac{x^3+x}{x-1} dx$

+ 例8 (續)

B. $$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$$

例8 (續)

c. $\displaystyle \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

例8 (續)

D. $\dfrac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx$

積分的策略 (7.6)

步驟:

1. 化簡
2. 找明顯的代換
3. 看是否以下形式:
   a) 有理函數: 兩個多項式相除
   b) 分部積分: 兩個函數相乘
   c) 根式函數: $\sqrt{\pm x^2 \pm a^2}$
4. **一試再試：**

   記住積分計算基本上就兩種方式：換元法與分部積分法。

教材對應閱讀章節及練習

- 7.4, 7.5(~例8),7.6(到例2前)
- 對應習題: (可視個人情況定量)
  - 7.4: 1-26
  - 7.5: 1-40
  - 7.6: 1-24