洛必達法則與反常積分

單元八

Outline

- 不定型的極限與洛必達法則
- 反常積分

洛必達法則 L'Hospital's Rule (8.1&8.2)

- 假設 f 和 g 是可微的，且在包含 a 的開區間 I 中 $g'(x) \neq 0$ 。若：

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad 且 \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

或

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad 且 \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

(稱為不定型 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$)

則

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例1 (不定型的極限)

若存在，求下列極限:

A. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$

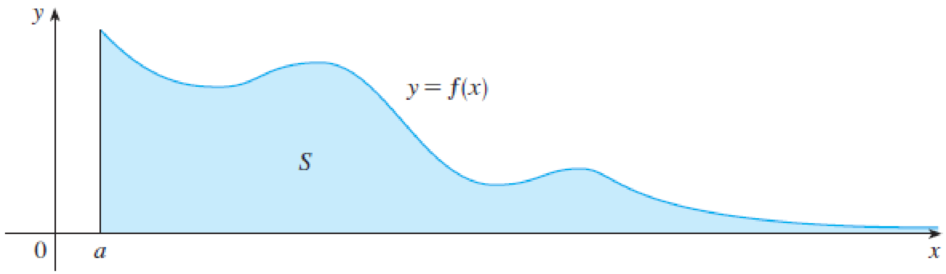
B. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$

C. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln x$

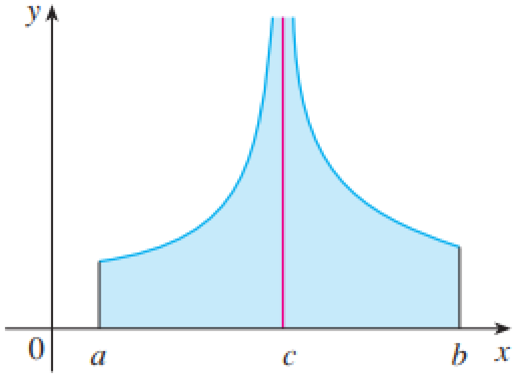
D. $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\sec x-\tan x)$

反常積分

- 直到目前為止所涉及的積分的條件為:
  - 函數在閉區間[a, b]上是連續的。
- 反常積分(或瑕積分):
  - 第一型: 無窮區間

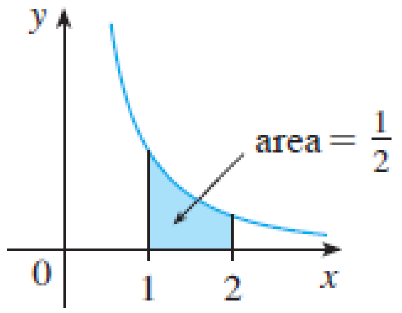


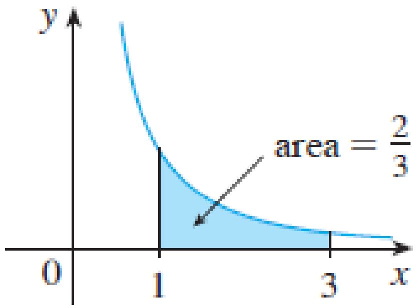
  - 第二型: 在閉區間[a, b]上無界。

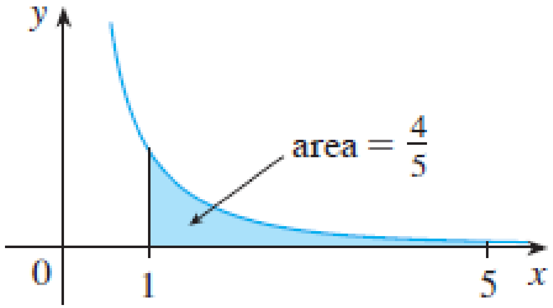


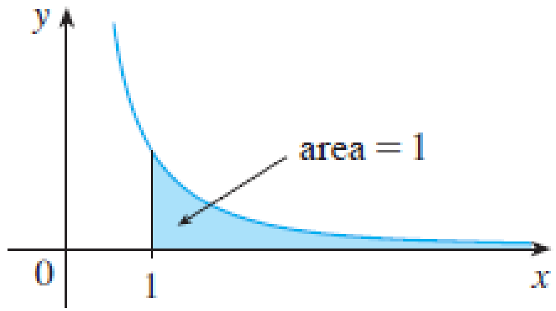
+ 範例: 無窮區間

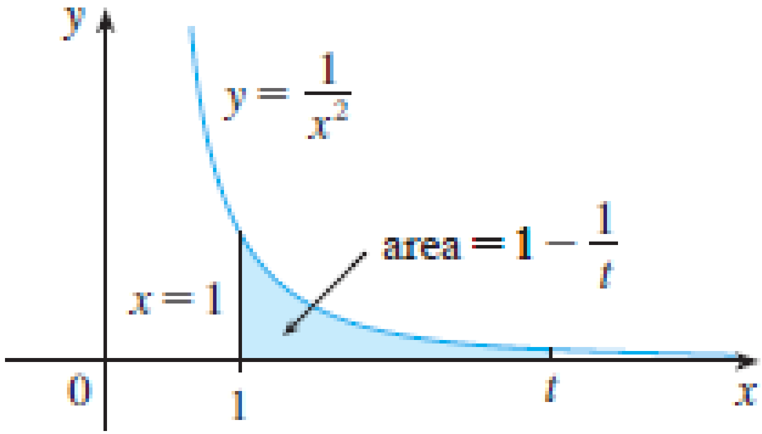
- 考慮曲線 $y = 1/x^2$ 和 x 軸間於 $[1, +\infty)$ 的面積 :











+ 第一型反常積分 (8.3)

a) 若對任意$t \geq a$, $\int_a^t f(x)dx$ 都存在, 則

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)dx$$

b) 若對任意$t \leq b$, $\int_t^b f(x)dx$ 都存在, 則

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx$$

c) 若 a) 和 b) 的極限都存在，則定義

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$$

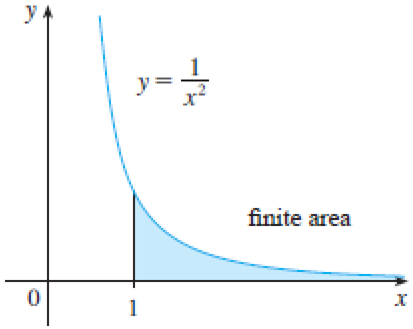
- 若對應極限存在，則稱瑕積分收斂 (convergent);
- 若對應極限不存在，則稱瑕積分發散(divergent).

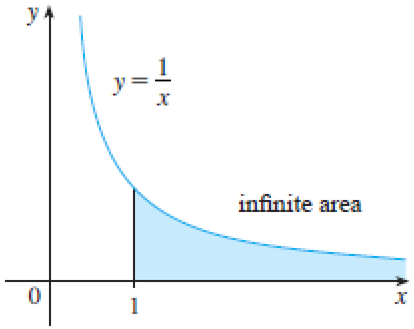
例2

- 判別下列積分是收斂的或是發散的?

A. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$

B. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$





$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ 的收斂與發散

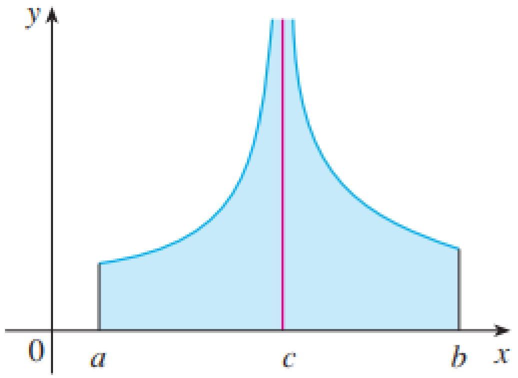
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \infty, & p \le 1 \\ \dfrac{1}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$$

- 即:
  - $p \le 1$時: $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ 發散.
  - $p > 1$時: $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ 收斂.

第二型反常積分(8.4)

- 若 f 在 $[a, b]$ 上連續而在 $x = c$ 上不連續, 其中 $a < c < b$，若$\lim_{x\to c}|f(x)| = \infty$，定義

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



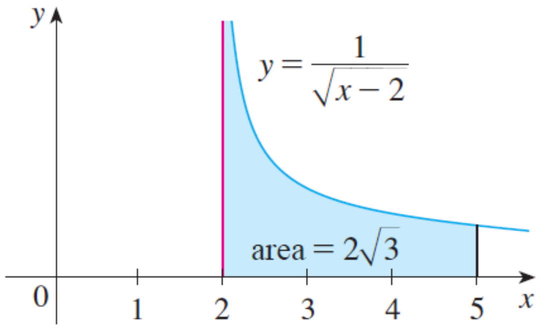
其中:

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{t\to c^-} \int_a^t f(x)dx$$

$$\int_c^b f(x)dx = \lim_{t\to c^+} \int_t^b f(x)dx$$

- 若$\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 均收斂，則 $\int_a^b f(x)dx$ 收斂，否則 $\int_a^b f(x)dx$ 發散。

例3



- 求下列積分:

A. $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$

B. $\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx$

例4

- 求下列積分: (單元六例3B)

$$\int_0^1 \ln x \, dx$$

教材對應閱讀章節及練習

- 8.1-8.4
- 對應習題: (可視個人情況定量)
  - 8.1: 1-18
  - 8.2: 1-10
  - 8.3: 1-18
  - 8.4: 1-18