

# 圖 Graphs

## 第十章

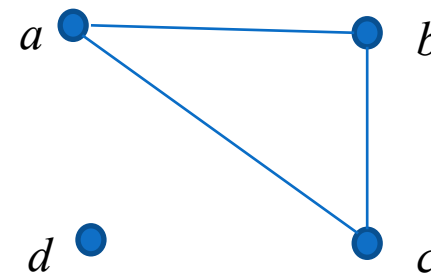
# + Outline

- 圖 Graphs
- 圖的表示 Representing Graphs
- 圖的同構 Graph Isomorphism
- 連通性 Connectivity
- 歐拉圖與哈密頓圖 Euler and Hamiltonian Graphs
- 平面圖 Planar Graph

# + 圖 Graph (9.1)

- 一個圖  $G = (V, E)$  由頂點 (vertices) 集  $V$  和邊 (edges) 集  $E$  構成。

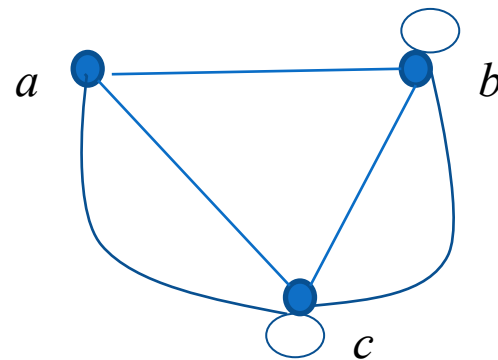
- 無限圖(infinite graph): 頂點集為無限集或有無限條邊。
- 有限圖(finite graph): 頂點集與邊集為有限集。
- 簡單圖(simple graph): 每條邊都連接兩個不同的頂點且沒有兩條不同的邊連接一對相同頂點。



- 多重圖(multigraph): 存在多條邊連接同一對頂點。

# + 定義 Some Terminology

- 偽圖(pseudograph): 包含環或存在多重邊連接同一對頂點或同一個頂點。



- 有向圖(directed graph): 每條有向邊與一個頂點有序對 $(u, v)$ 相關聯；否則為無向圖(undirected graph)。
- 混合圖(mixed graph): 既包含有向邊又包含無向邊的圖。

# + 圖術語

## 10.1表1:

類型	邊	允許多重邊?	允許環?
簡單圖 Simple graph	無向	否	否
多重圖 Multigraph	無向	是	否
偽圖 Pseudograph	無向	是	是
簡單有向圖 Simple directed graph	有向	否	否
有向多重圖 Directed multigraph	有向	是	是
混合圖 Mixed graph	有向和無向	是	是

# + 例1

■ 已知:

A.  $G = (V_1, E_1): V_1 = \{a, b, c, d\}; E_1 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$

B.  $H = (V_2, E_2): V_2 = \{a, b, c, d\}; E_2 = \{(a, c), (b, a), (b, d), (c, b), (d, c)\}$

■ 畫出圖  $G$  和  $H$ 。

# + 基本術語(無向圖) (9.2)

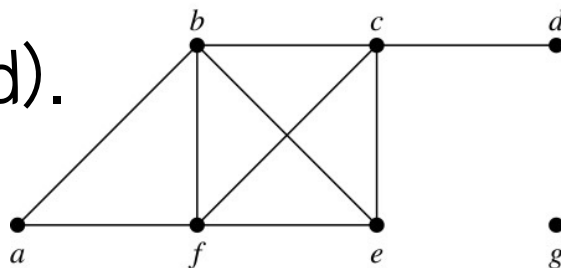
無向圖  $G = (V, E)$  中:

- 若  $u, v$  為  $G$  中的一條邊  $e$  的兩頂點, 稱  $u$  和  $v$  在  $G$  裡鄰接或相鄰 (Adjacent or neighbors), 則稱邊  $e$  “關聯” (incident) 或連接 (connect) 頂點  $u$  和  $v$ 。
- $v$  的鄰居 (Neighborhood of  $v$ ), 記作  $N(v)$ : 頂點  $v$  的所有相鄰頂點的集合。
- $A$  的鄰居 (Neighborhood of set  $A$ ), 記作  $N(A)$ : 對於  $V$  的子集  $A$ , 與其中起碼一個頂點相鄰的所有點的集合。即  $N(A) = \bigcup_{v \in A} N(v)$ 。
- $v$  的度 (degree of  $v$ ), 記作  $\deg(v)$ : 與該頂點  $v$  相關聯的邊的數目。
  - $v$  為孤立的 (isolated):  $\deg(v) = 0$
  - $v$  為懸掛的 (pendant):  $\deg(v) = 1$

## + 例2

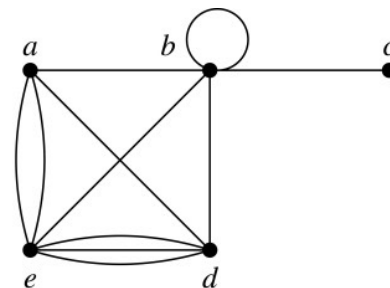
■ 對於下列的圖G和H:

- A. 求各頂點的度(degree);
- B. 求各頂點的鄰居(neighborhood).



G

簡單圖



H

偽圖



# + 握手定理 Handshaking Theorem

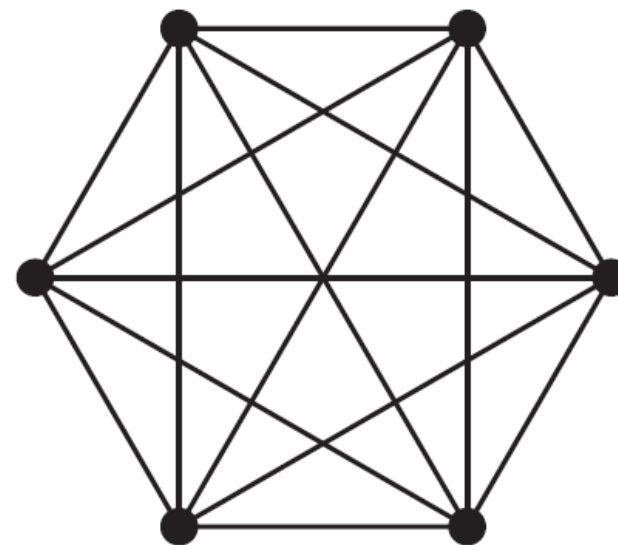
- 設  $G = (V, E)$  為有  $m$  條邊的無向圖，則

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

- 無向圖有偶數個度為奇數的頂點。

## + 例3

- 在一個房間中的6人若都要跟其他所有人握手，總共有多少次“握手”？



# + 特殊的簡單圖

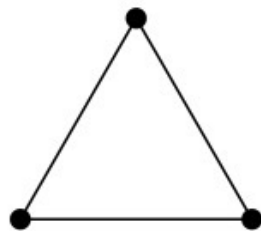
- 完全圖(Complete Graph), 記作 $K_n$ :  $n$  個頂點的完全圖



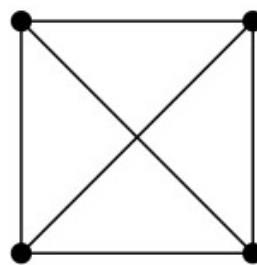
$K_1$



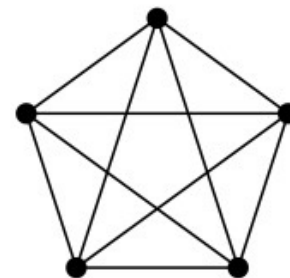
$K_2$



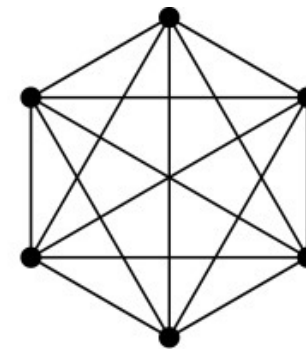
$K_3$



$K_4$



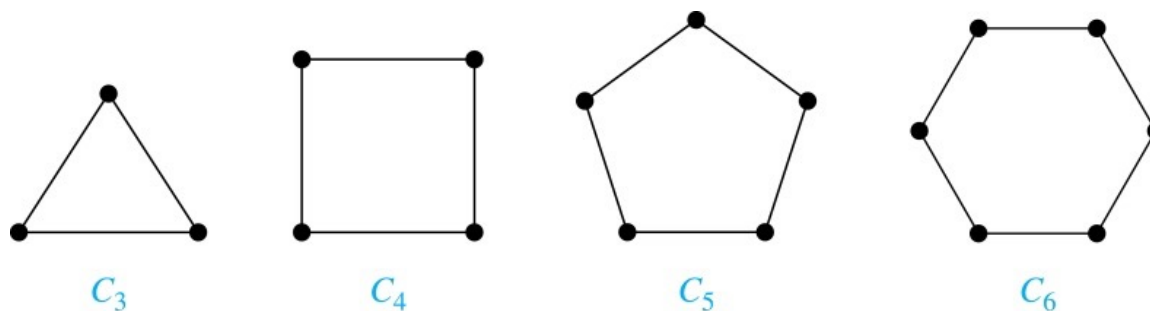
$K_5$



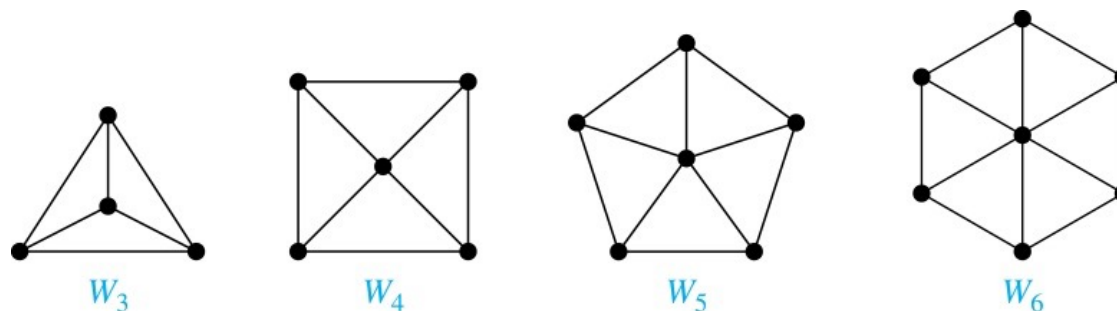
$K_6$

## + 特殊的簡單圖(2)

- 圈圖(Cycle), 記作  $C_n$  ( $n \geq 3$ ): 由  $n$  個頂點及邊  $\{v_1, v_2\}$ ,  $\{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$  組成.



- 輪圖(Wheel), 記作  $W_n$ : 在圈圖  $C_n$  上添加一頂點並把圈圖上的所有頂點與該點連接。

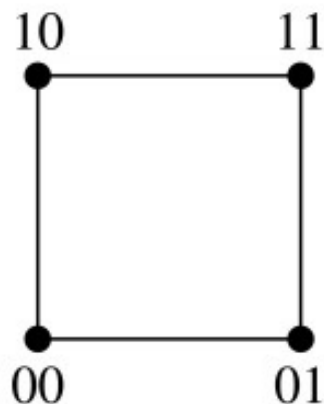


## + 特殊的簡單圖(3)

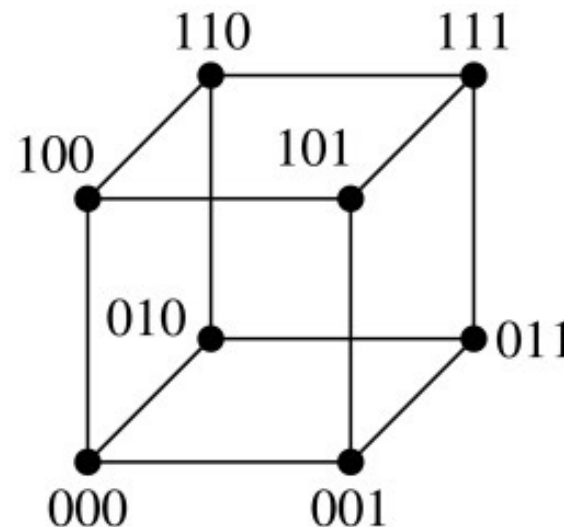
- $n$  立方體圖( $n$ -cube), 記作  $Q_n$ : 頂點表示  $2^n$  個長度為  $n$  的位串的圖, 兩頂點相鄰當且僅當位串恰有一位不同。



$Q_1$



$Q_2$

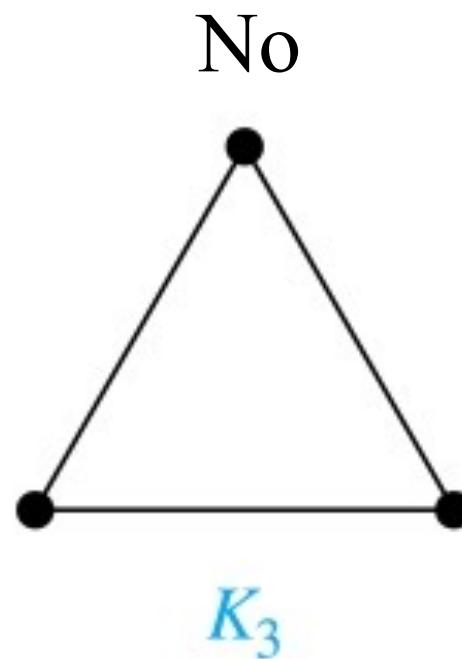
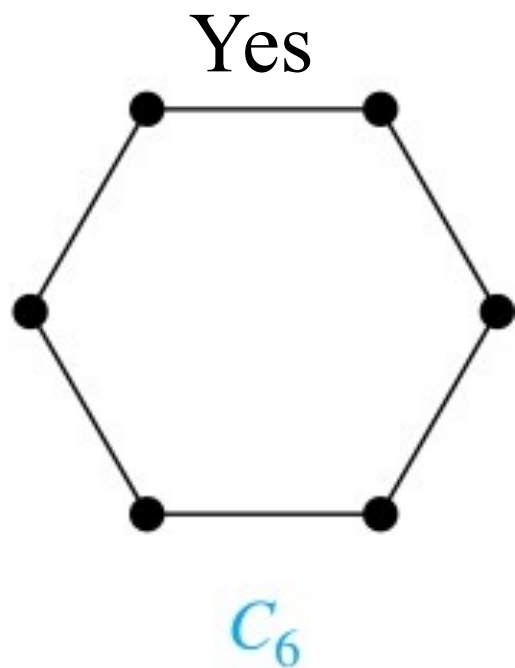


$Q_3$

## + 二分圖 Bipartite Graphs

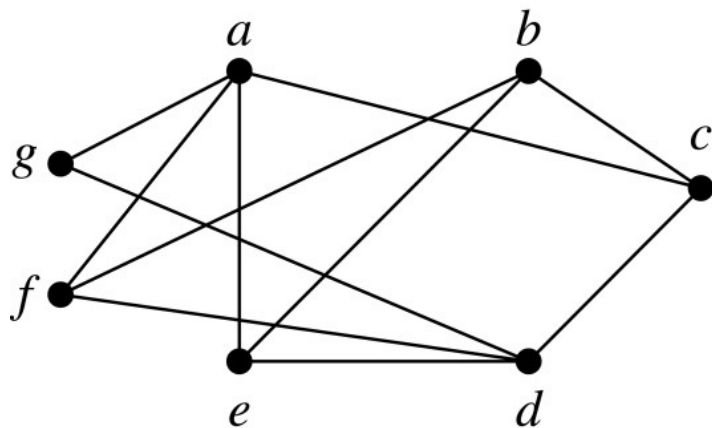
若簡單圖 $G$ 的頂點集可分成兩個不相交的非空集 $V_1$ 和 $V_2$ ，使得圖中的每條邊都連接 $V_1$ 中的一個頂點與 $V_2$ 中的一個頂點，則稱 $G$ 為二分圖(Bipartite graph)。

例：

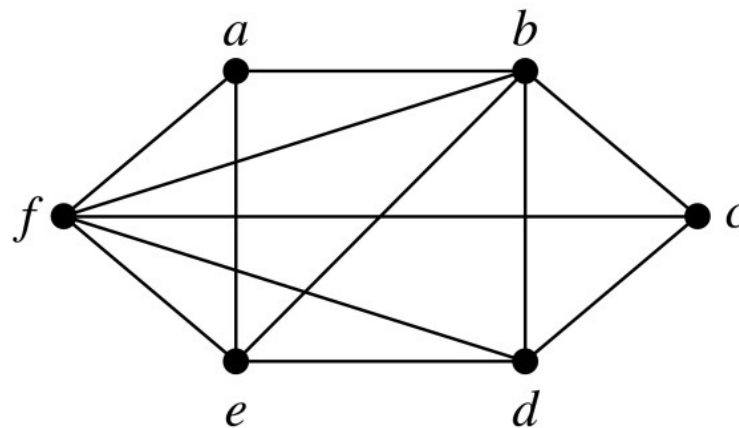


## + 例4

圖G和H是否為二分圖(Bipartite graphs)?



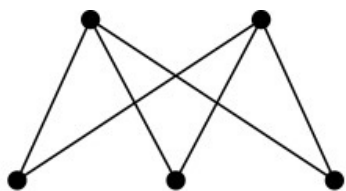
$G$



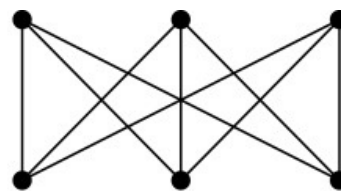
$H$

# + 完全二分圖 Complete Bipartite Graphs

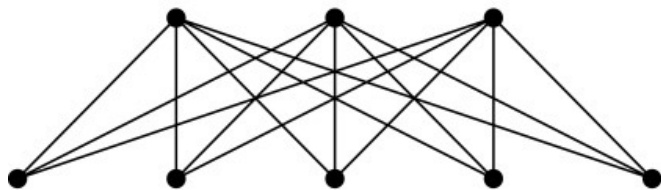
- 完全二分圖 (complete bipartite graph), 記作  $K_{m,n}$ : 頂點划分成分別含有  $m$  和  $n$  個頂點的兩子集  $V_1$  和  $V_2$  的圖, 且兩頂點間有邊當且僅當一頂點屬於  $V_1$  而另一頂點屬於  $V_2$ 。



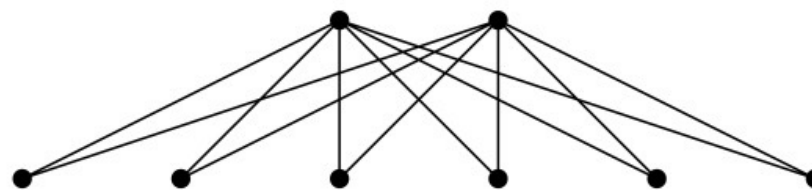
$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



$K_{3,5}$



$K_{2,6}$



## + 例5 (任務匹配)

■ 假設A, B, C, D, E五名員工受過一些工作培訓如下:

- A與C能完成工作1;
- B,C與E能完成工作2;
- D能完成工作3;
- C與E能完成工作4;
- E能完成工作5.

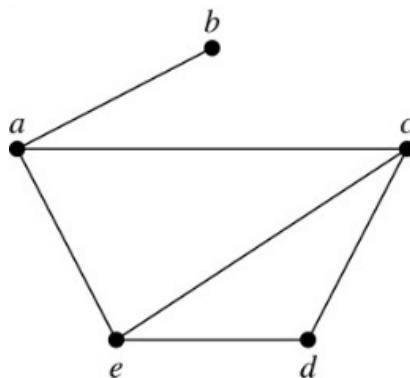
A. 完成各員工及相關工作能力的建模。

B. 若每項工作只能派遣一名員工且每名員工只負責一項工作, 應如何分配?

# + 鄰接表 Adjacency Lists (10.3)

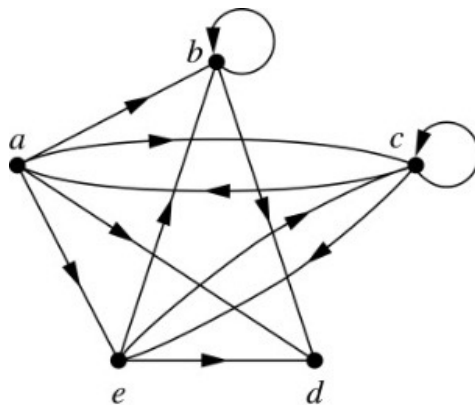
- 鄰接表(adjacency list): 可給出與(不帶重邊的)圖中每個頂點相鄰的頂點。

■ 例:



**TABLE 1** An Adjacency List for a Simple Graph.

Vertex	Adjacent Vertices
<i>a</i>	<i>b, c, e</i>
<i>b</i>	<i>a</i>
<i>c</i>	<i>a, d, e</i>
<i>d</i>	<i>c, e</i>
<i>e</i>	<i>a, c, d</i>



**TABLE 2** An Adjacency List for a Directed Graph.

Initial Vertex	Terminal Vertices
<i>a</i>	<i>b, c, d, e</i>
<i>b</i>	<i>b, d</i>
<i>c</i>	<i>a, c, e</i>
<i>d</i>	
<i>e</i>	<i>b, c, d</i>

# + 鄰接矩陣 Adjacency Matrices

已知圖  $G = (V, E)$  為簡單圖(simple graph) , 若  $|V| = n$  ,  
 $G$ 的鄰接矩陣 $A_G$ 為一  $n$  階方陣且

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } \{v_i, v_j\} \text{ is an edge of } G, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

## + 例6

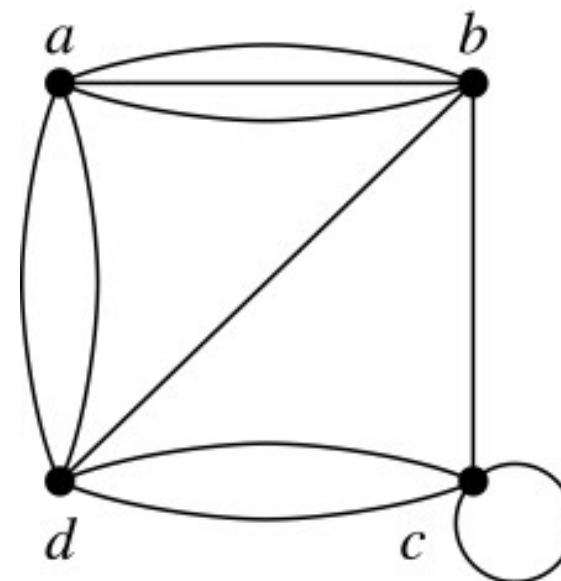
- 若以下為圖  $G = (V, E)$  的鄰接矩陣(Adjacency Matrix), 其中  $V = \{a, b, c, d\}$ , 畫出圖G (頂點順序排列為  $a, b, c, d$ ):

A. 
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B. 
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# + 鄰接矩陣 Adjacency Matrices

■ 範例 - 以鄰接矩陣表示偽圖:



$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

## + 關聯矩陣 Incidence Matrices

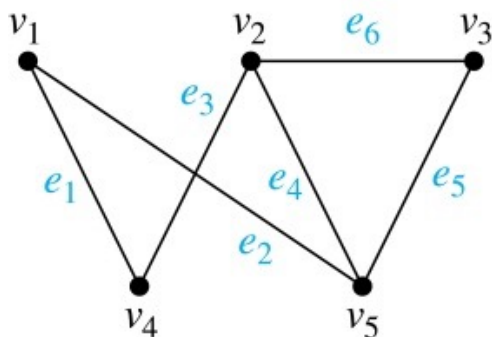
- 已知無向圖  $G = (V, E)$  有頂點  $v_1, v_2, \dots, v_n$  與邊  $e_1, e_2, \dots, e_m$ . 其關聯矩陣為對應  $V$  及  $E$  順序的  $n \times m$  矩陣  $M = [m_{ij}]$ , 即

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{when edge } e_j \text{ is incident with } v_i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

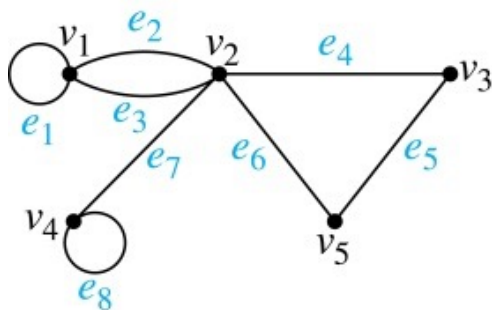
## + 例7

■ 求下列圖的對應關聯矩陣(incidence matrix):

A.

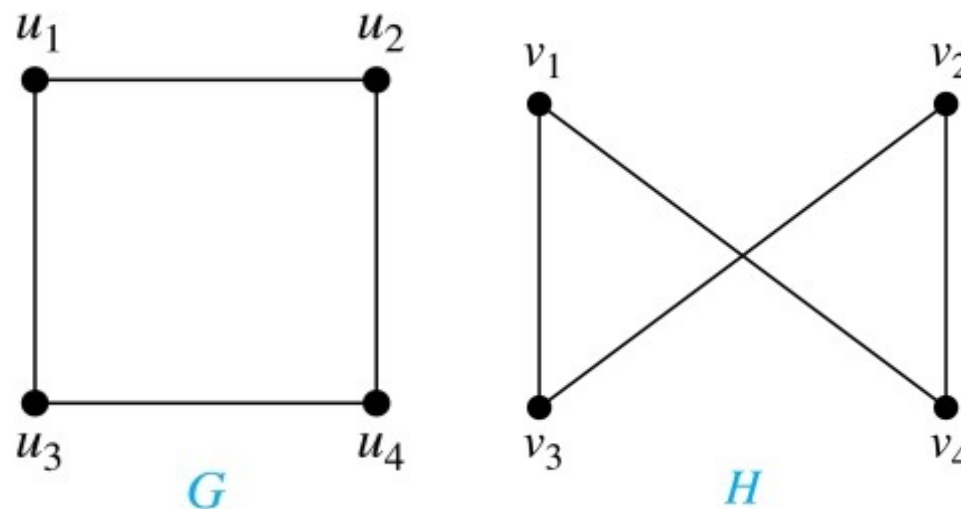


B.



# + 圖的同構 Isomorphism of Graphs

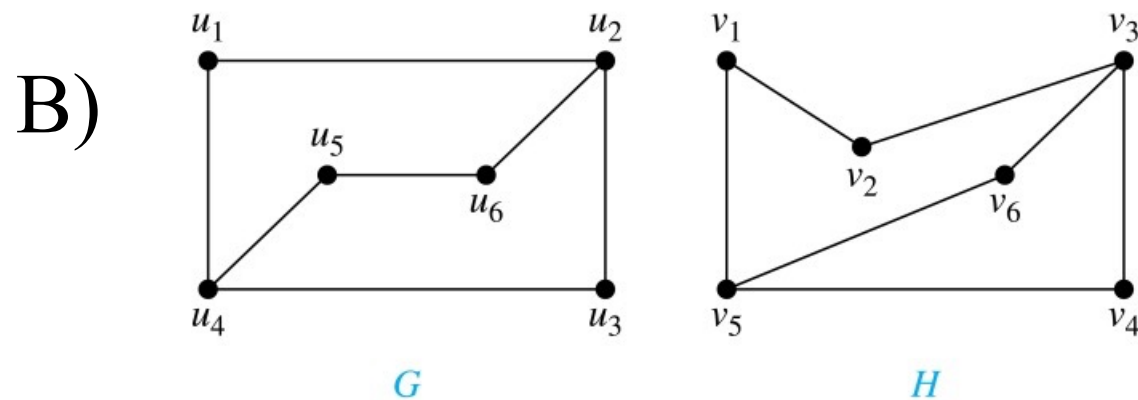
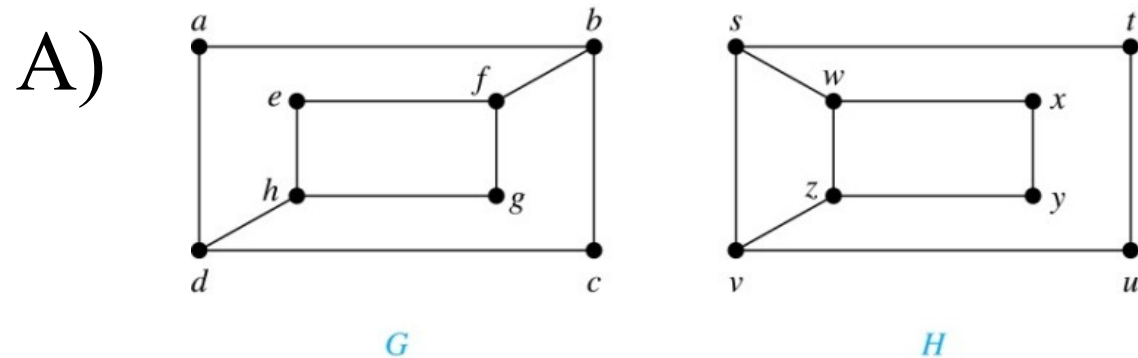
- 簡單圖  $G_1 = (V_1, E_1)$  與  $G_2 = (V_2, E_2)$  若存在從  $V_1$  到  $V_2$  一對一及映上的函數  $f$ , 其中  $\forall a, b \in V_1$ ,  $a$  和  $b$  在  $G_1$  中相鄰當且僅當  $f(a)$  和  $f(b)$  在  $G_2$  中相鄰, 則稱  $G_1$  與  $G_2$  同構的(isomorphic), 函數  $f$  稱為同構(isomorphism).
- 兩個簡單圖若不同構稱為非同構的(nonisomorphic).





# + 例8

- 判斷圖G和H是否同構的(isomorphic):



## + 連通性 Connectivity (10.4)

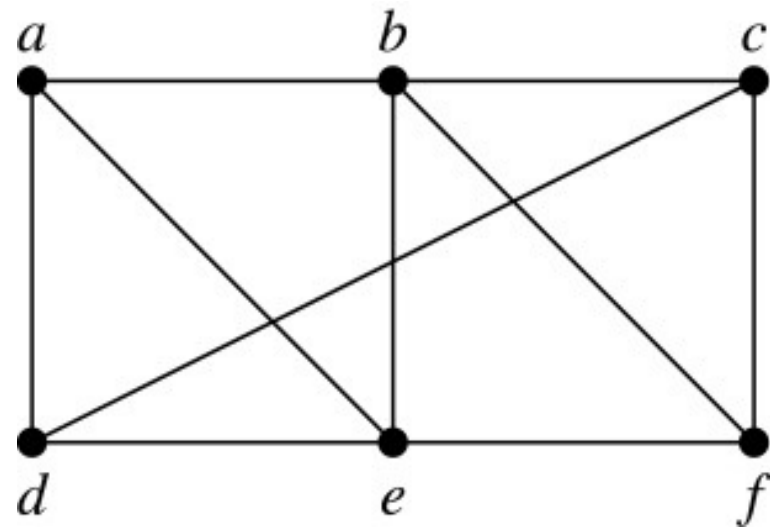
令  $n$  為一自然數,  $G$  為一無向圖。圖  $G$  中從  $u$  到  $v$  長度為  $n$  的**通路(Path)** 是  $G$  的  $n$  條邊  $e_1, \dots, e_n$  的序列, 其中  $x_0, x_1, \dots, x_n$  為其端點。若  $G$  為簡單圖, 通路可以  $x_0, x_1, \dots, x_n$  表示。

- **回路(Circuit)**: 閉合通路, 即  $n > 0$  且  $u = v$ 。
- 稱通路**經過 (pass through)** 頂點  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  且**遍歷 (traverse)** 邊  $e_1, \dots, e_n$ 。
- 若通路不包含重覆的邊, 稱其為**簡單的(Simple)**。

類似術語亦應用於有向圖中 (詳見教材)

## + 範例

- $a, d, c, f, e$  是長度為 4 的簡單通路 (simple path)。
- $d, e, c, a$  不是通路。
- $b, c, f, e, b$  是長度為 4 的簡單回路。
- $a, b, e, d, a, b$  是長度為 5 的通路，但不是簡單通路。



# + 連通分支(Connected component)

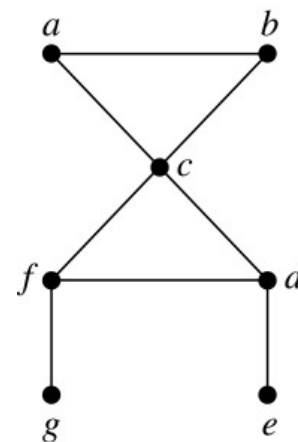
- 已知  $G = (V, E)$ , 定義在  $V$  上的關係  $R$  其中  $uRv$  表示頂點  $u$  和  $v$  之間存在通路。
- $R$  為一等價關係(Equivalence relation);
- 存在對應  $R$  的等價類(Equivalence Class), 稱作連通分支(connected component);

# + 無向圖的連通性

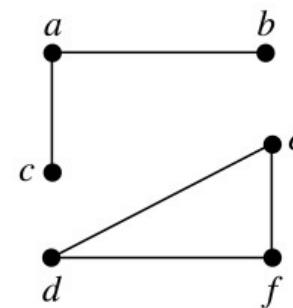
- 只有一個分支的無向圖，即若無向圖中一對不同的頂點之間都有通路，該圖稱為連通的(*connected*)。不是連通的無向圖稱為不連通的(*disconnected*)。我們可通過刪除頂點或邊得到不連通的子圖(*subgraph*)。

■ 例:

- $G_1$  connected
- $G_2$  disconnected



$G_1$

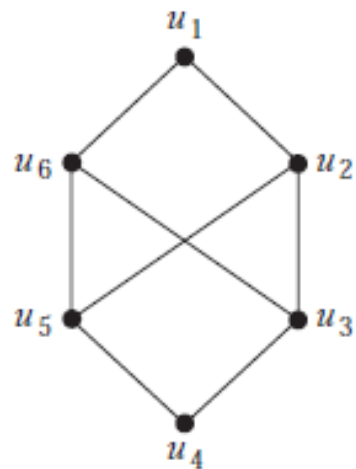


$G_2$

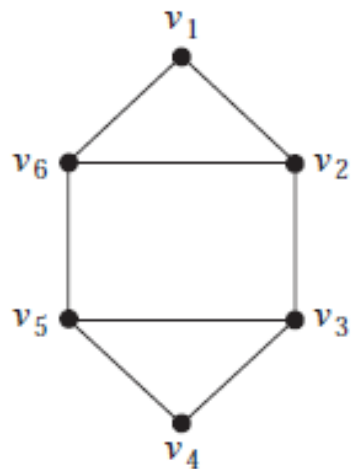
# + 例9

- 通過回路(Circuit)及通路(Path)判斷下列圖G與圖H是否同構:

A.

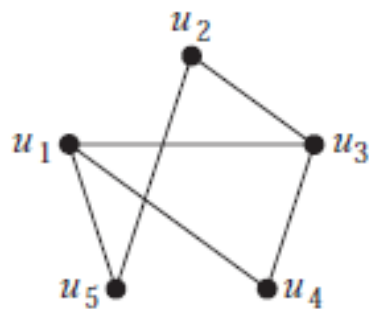


G

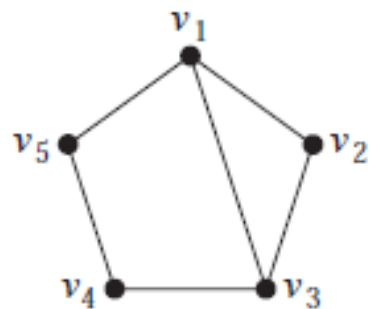


H

B.



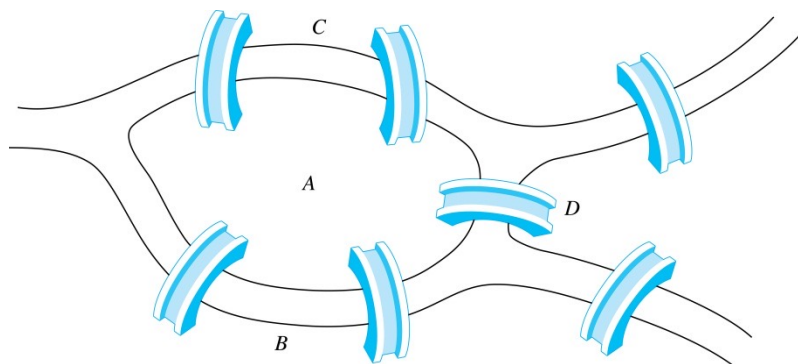
G



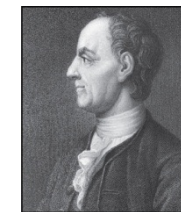
H

# + 歐拉通路和回路 Euler Paths and Circuits (10.5)

- 普魯士的哥尼斯堡鎮(Königsberg) (今俄羅斯加林格勒Kalingrad, Russia) 被普雷格爾河(Pregel river)的支流分為四個部分。於 18 世紀，由七座橋樑連接這些地區。
- 是否存在沿著一條可走遍這七座橋並只通過每座橋一次且返回起點的路線？
- 瑞士數學家倫納德歐拉(Leonard Euler)證明了不存在這樣子的路線。該結果一般被認為是圖論中第一個被證明的定理。



**The 7 Bridges of Königsberg**



**Leonard Euler**  
(1707-1783)

# + 歐拉通路和回路 Euler Paths and Circuits

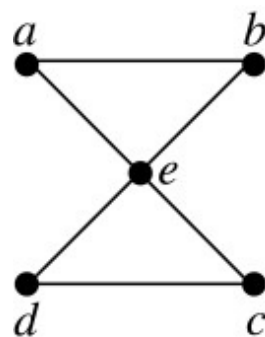
- 圖 $G$ 中的歐拉回路(Euler circuit) 是包含 $G$ 的每一條邊的簡單回路。
  - 具有歐拉回路的圖稱為歐拉圖(Eulerian Graph)。
- 圖 $G$ 中的歐拉通路(Euler path) 是包含 $G$ 的每一條邊的簡單通路。
  - 具有歐拉通路而無歐拉回路的圖稱為半歐拉圖(Semi-Eulerian Graph)。
- 應用:
  - 郵遞員所負責投遞的街道路線
  - 電路布線等



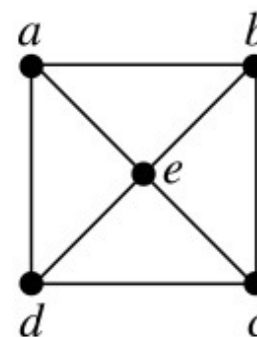
# + 例10

A. 對於無向圖 $G_1$ ,  $G_2$ , 和  $G_3$ :

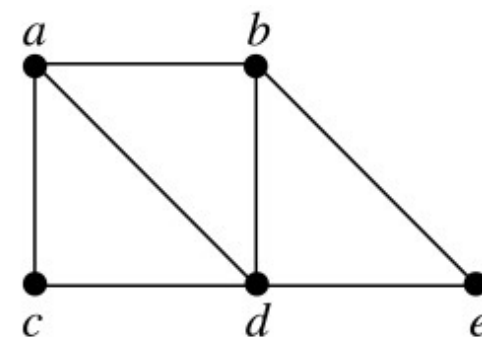
- a) 試找出何者有歐拉回路 (Euler circuit)?
- b) 若無歐拉回路，試找出何者有歐拉通路 (Euler path)?



$G_1$



$G_2$

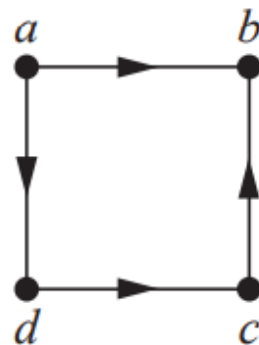


$G_3$

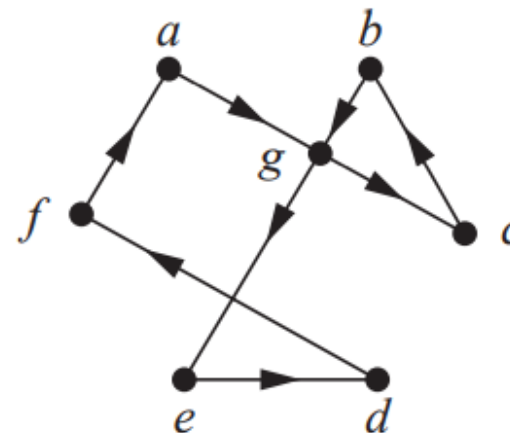
## + 例2(續)

B. 對於有向圖 $H_1$ ,  $H_2$ , 和  $H_3$ :

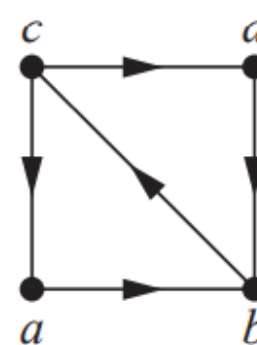
- a) 試找出何者有歐拉回路 (Euler circuit)?
- b) 若無歐拉回路，試找出何者有歐拉通路 (Euler path)?



$H_1$



$H_2$

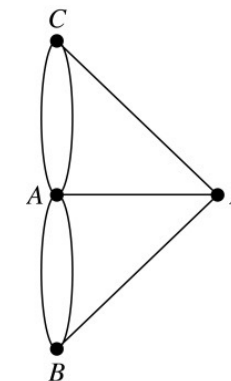


$H_3$

# + 歐拉通路和回路 Euler Paths and Circuits

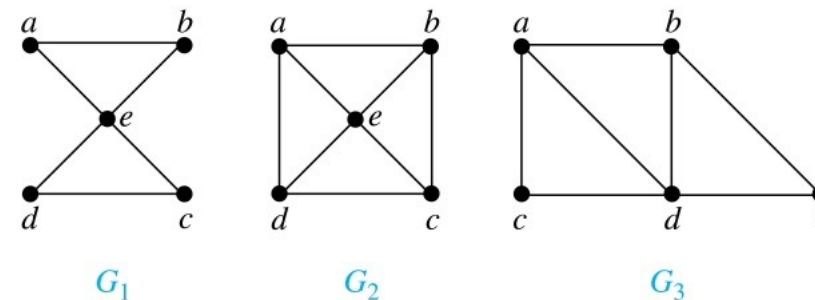
- (10.5定理1:) 含有至少2個頂點的連通多重圖具有歐拉回路當且僅當它的每個頂點的度都為偶數。

- 例如: 尼斯堡鎮的七橋問題



- (10.5定理2:) 連通多重圖具有歐拉通路但無歐拉回路當且僅當它恰有2個度有奇數的頂點。

- 例如: 例2的圖 $G_3$

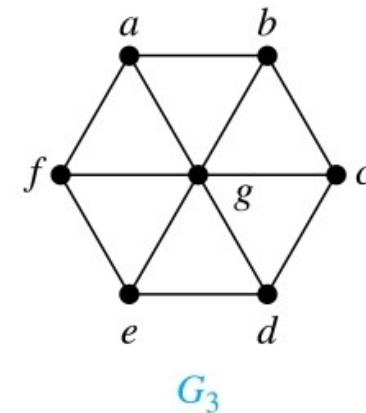
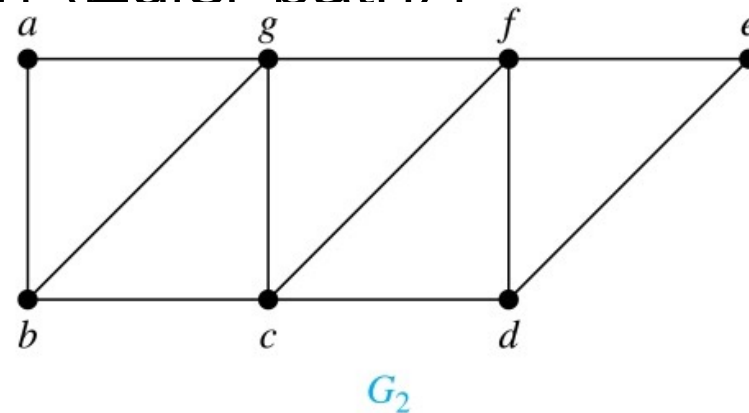
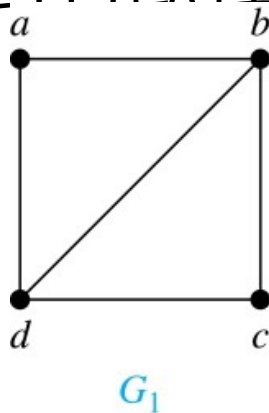


## + 例3

■ 對於無向圖 $G_1$ ,  $G_2$ , 和  $G_3$ , 通過判斷各頂點的度, 求:

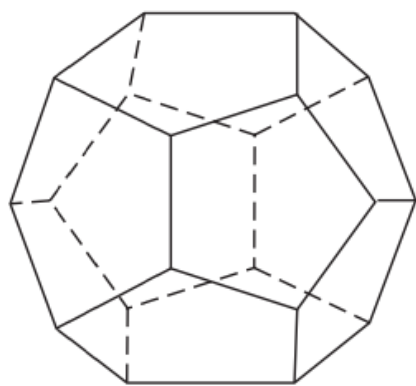
A. 何者有歐拉回路 (Euler circuit)?

B. 若無歐拉回路, 何者有歐拉通路 (Euler path)?

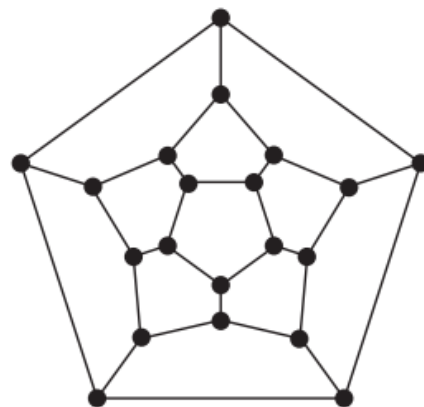


# + 哈密頓通路和回路 Hamilton Paths and Circuits

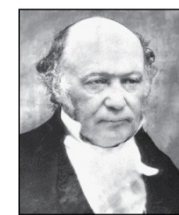
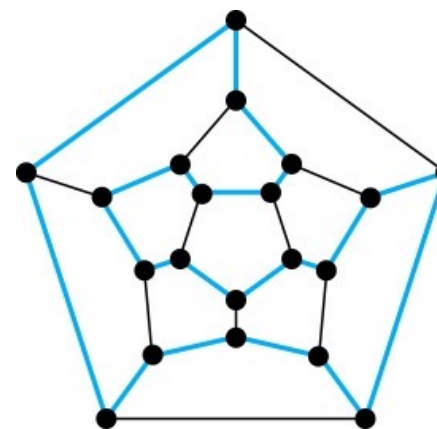
- 哈密頓回路 (Hamilton circuit): 經過圖 $G$ 中每一個頂點恰好一次的簡單回路。
- 具有哈密頓回路的圖稱為哈密頓圖(Hamiltonian Graph)。
- 哈密頓通路 (Hamilton Path): 經過圖 $G$ 中每一個頂點恰好一次的簡單通路。
- 具有哈密頓通路而無哈密頓回路的圖稱為半哈密頓圖(Semi-Hamiltonian Graph)。



(a)



(b)



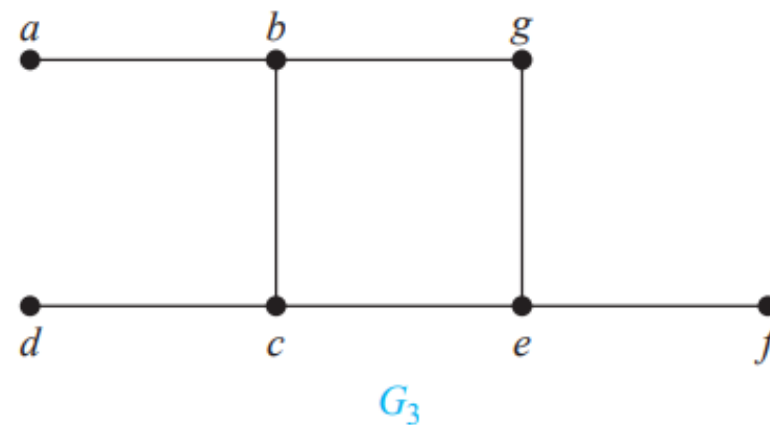
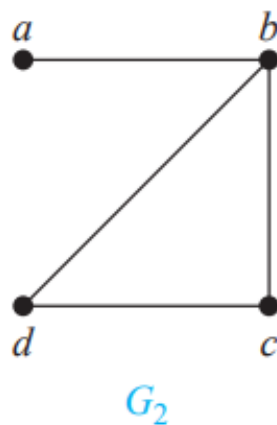
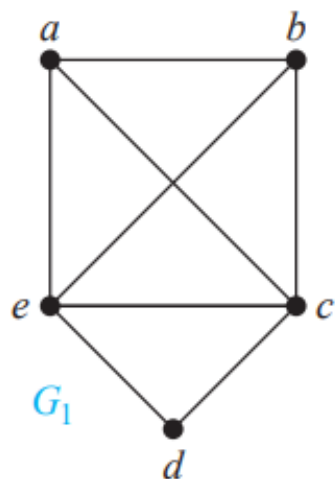
William Rowan  
Hamilton (1805- 1865)

## + 例4

■ 對於無向圖 $G_1$ ,  $G_2$ , 和  $G_3$ :

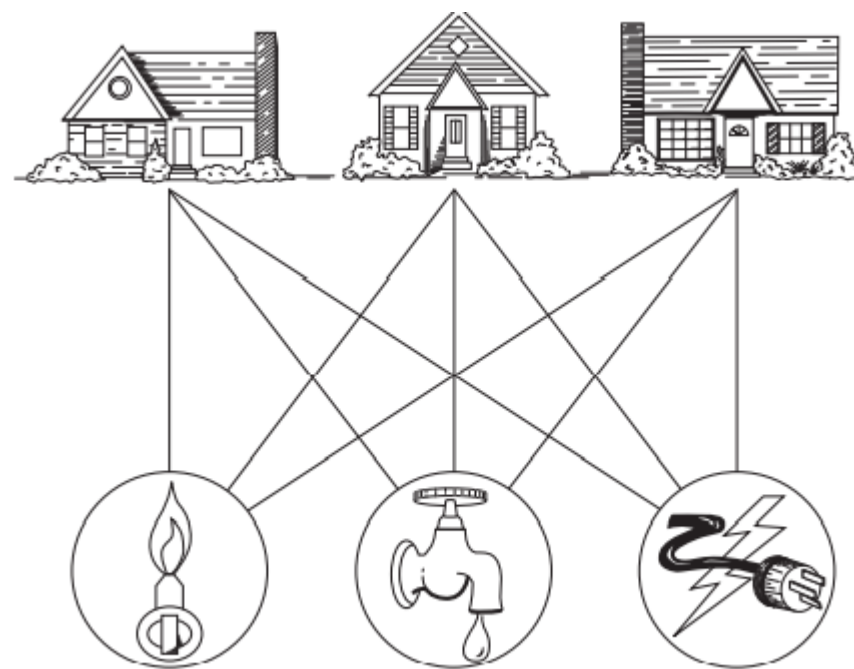
A. 試找出何者有哈密頓回路 (Hamilton circuit)?

B. 若無哈密頓回路，試找出何者有哈密頓通路 (Hamilton path)?



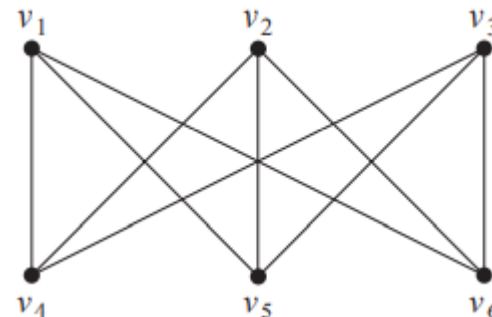
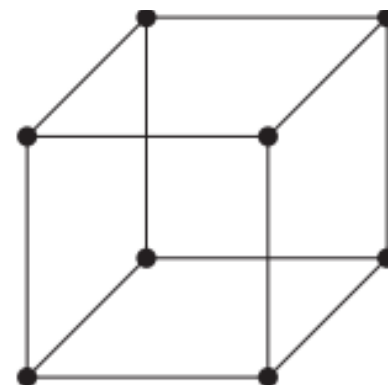
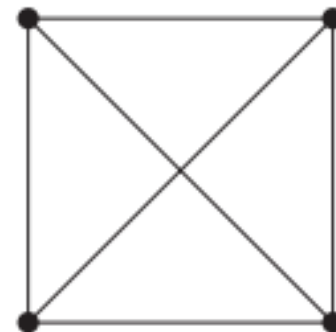
# + 平面圖 Planar Graphs (10.7)

- 平面圖 (Planar Graphs) : 可在平面中畫出一個圖而沒有任何交叉。
- 應用:
  - 電子電路設計
  - 公路網



## + 例5

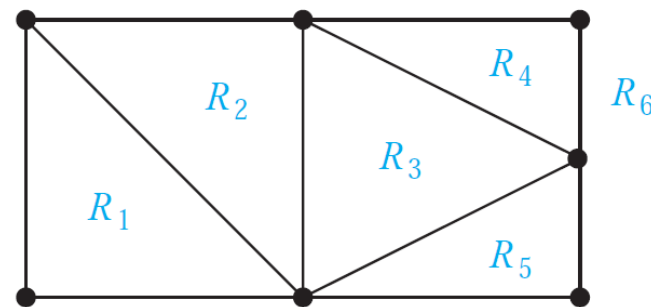
- 判斷  $K_4$ 、 $Q_3$  和  $K_{3,3}$  是否平面圖？





# + 歐拉公式 (Euler's Formula)

- 一個圖的平面表示把平面分割成一些面(region)。
  - 例如:



- 面  $R$  的度(degree of region  $R$ ), 記作  $\deg(R)$ :  $R$  的邊界的邊的最短回路之長度。
  - 則:

$$2|E| = \sum \deg(R)$$

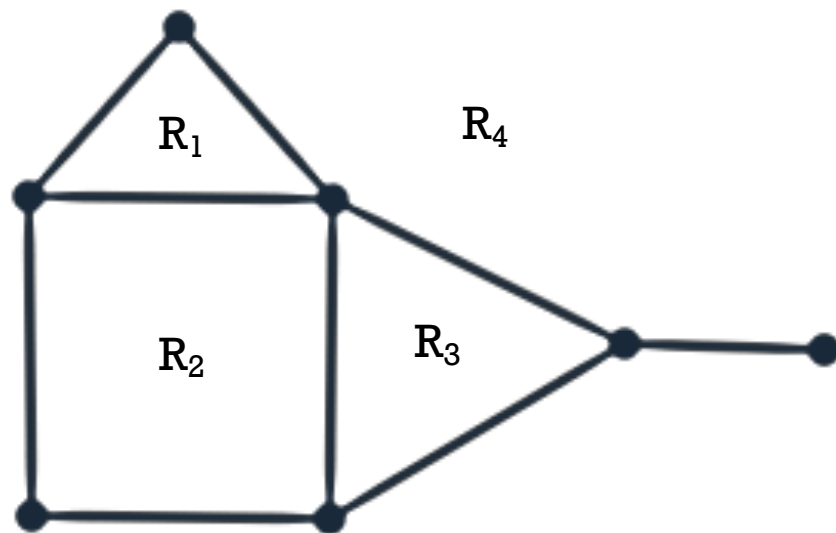
- 歐拉公式 (Euler's Formula): 圖  $G = (V, E)$  中, 令  $r$  表示  $G$  的平面圖的面數。  
則有:

$$r = |E| - |V| + 2$$

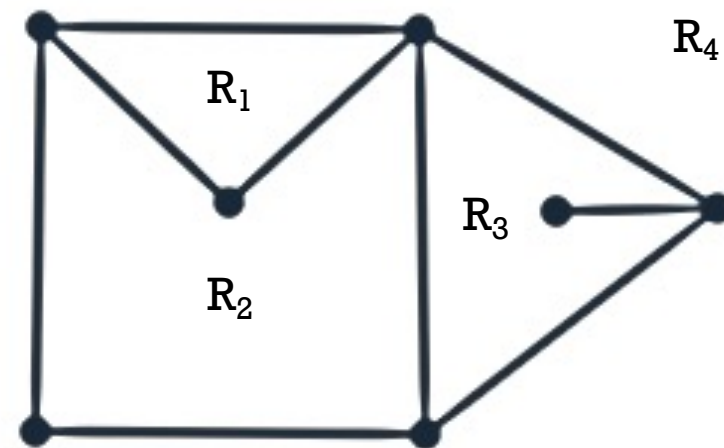
## + 例6

■ 求圖  $G$  各平面(region)的度：

A.



B.



## + 例7

- 已知圖  $G = (V, E)$  為一連通平面簡單圖 (connected planar simple graph),  $|V| = 20$ , 且  $\forall v \in V, \deg(v) = 3$ , 求以平面表示的圖  $G$  的面數  $r$ 。

## + 推論 Corollaries

- 若圖  $G = (V, E)$  為一連通平面簡單圖且  $|V| \geq 3$ , 則:

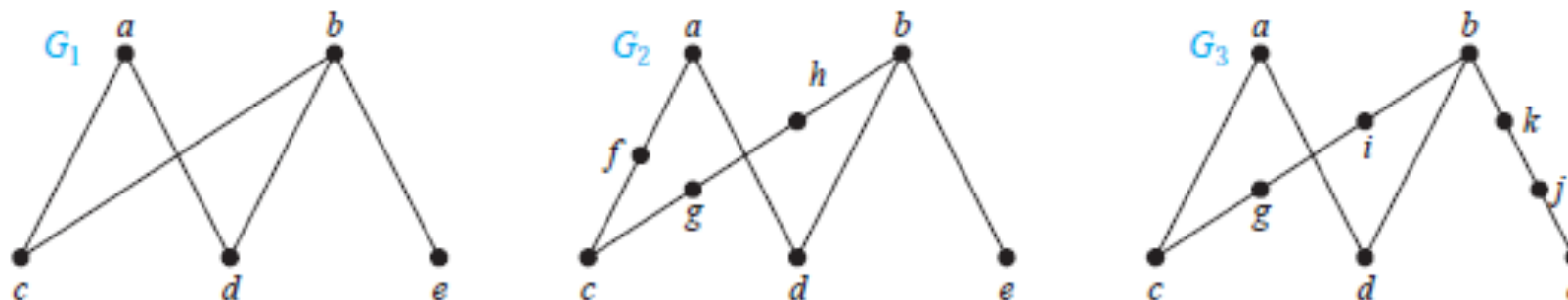
$$|E| \leq 3|V| - 6$$

- 若圖  $G$  為一連通平面簡單圖，則  $G$  中有度數不超過 5 的頂點。

## + 例8

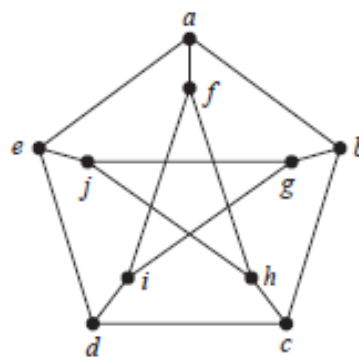
- $K_5$  是否平面圖(Planar graph)?

# + 同胚圖 Homeomorphic Graphs

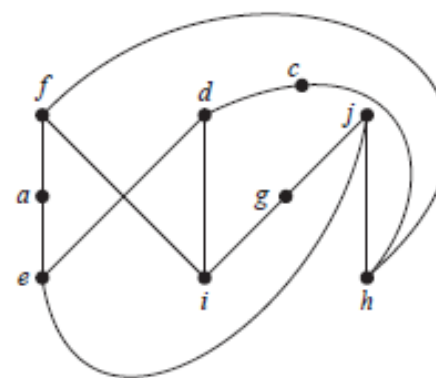


- (10.7定理2:) 一個圖為非平面圖當且僅當其包含一同胚於 $K_5$ 或 $K_{3,3}$ 的子圖。

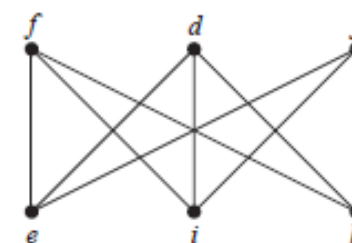
■ 如:



(a)



(b)  $H$



(c)  $K_{3,3}$

# + 教材對應閱讀章節及練習

- 10.1(~Example 16), 10.2(~Example 17), 10.3, 10.4(~Example 6, 13), 10.5, 10.6, 10.7
- 對應習題: (可視個人情況定量)
  - 10.1: 3-9
  - 10.2: 1-9, 20-27, 28ab
  - 10.3: 1-27, 34-44
  - 10.4: 1-3, 20-23
  - 10.5: 1-8, 13-15, 18-23, 26-28, 30-45
  - 10.7: 1-9, 12-14