



# 微積分 Calculus

## Exercise 2

Sue Kong

### A. 導數 (Varberg: 2.1-2.4, 2.6)

1. 求曲線於給定點的切線方程:

$$y = 4x - 3x^2, \quad (2, -4)$$

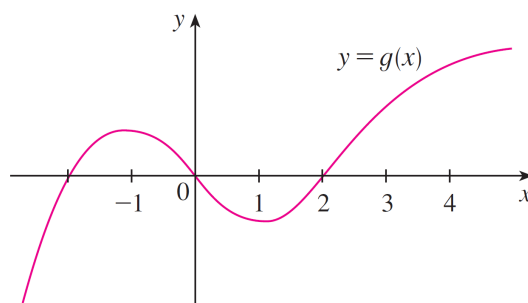
2. 已知曲線  $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ :

- (a) 求該曲線於點  $x = a$  上的切線斜率;  
(b) 求該曲線於點  $(1, 5)$  及點  $(2, 3)$  切線方程。

3. 若一個球以 40 英尺/秒的速度被拋向空中, 則  $t$  秒後球的高度為  $y = 40t - 16t^2$  英尺, 求球於  $t = 2$  時的速度。

4. 函數  $g$  的圖象如下, 將下列各值由小到大排序:

$$0 \quad g'(-2) \quad g'(0) \quad g'(2) \quad g'(4)$$



5. 求  $f'(a)$ :

$$f(t) = \frac{2t + 1}{t + 3}$$

6. 下列極限各代表某函數  $f$  於某點  $a$  上的導數, 求  $f$  及  $a$ 。

(a)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + h)^{10} - 1}{h}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2^x - 32}{x - 5}$

7. 某產品生產  $x$  單位的成本函數為  $C(x) = 5000 + 10x + 0.05x^2$  美元。

(a) 求當該產品的產量分別：

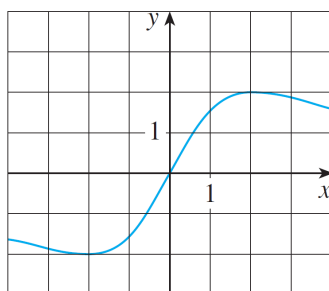
i. 由  $x = 100$  增加到  $x = 105$  時

ii. 由  $x = 100$  增加到  $x = 101$  時

$C$  對於  $x$  的平均變化率。

(b) 求  $C$  對於  $x$  在  $x = 100$  時的瞬時變化率（又稱邊際成本）。

8. 利用下圖估算下列各項：



(a)  $f'(-3)$

(d)  $f'(0)$

(g)  $f'(3)$

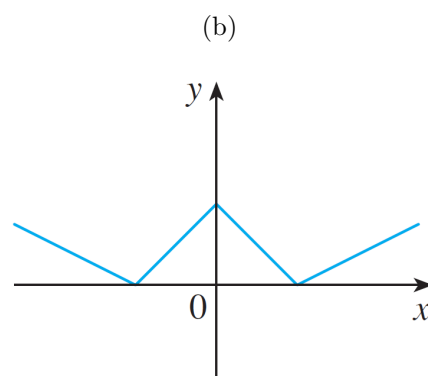
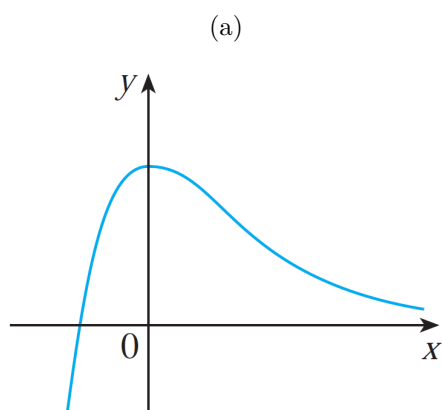
(b)  $f'(-2)$

(e)  $f'(1)$

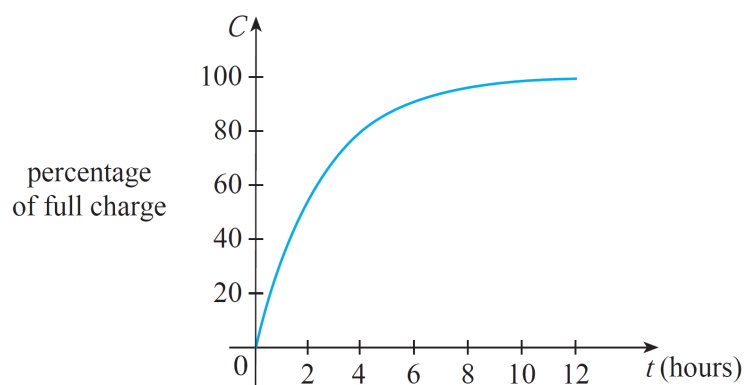
(c)  $f'(-1)$

(f)  $f'(2)$

9. 給定下列函數  $f$  的圖象，利用單元二課件例二的方法繪制其對應的  $f'$  圖象：



10. 將一可充電電池充電，下圖所示為其在  $t$  小時後電池充滿電量的比例  $C(t)$ 。



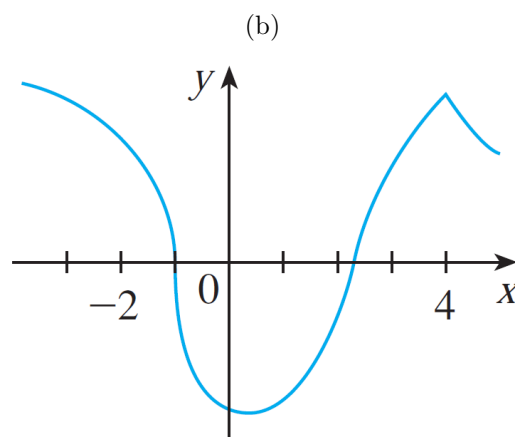
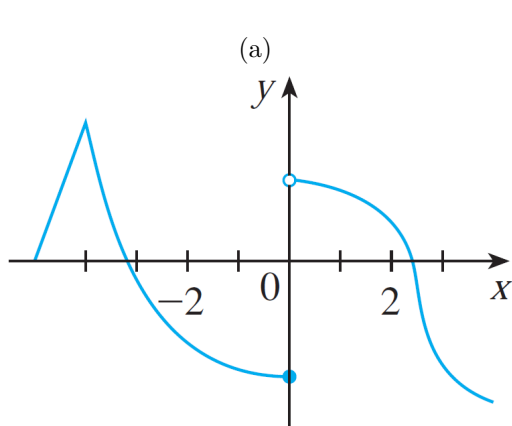
問其導數  $C'(t)$  的意義為何？

11. 用導數的定義求下列函數的導數，並分別求函數及其導數的定義域：

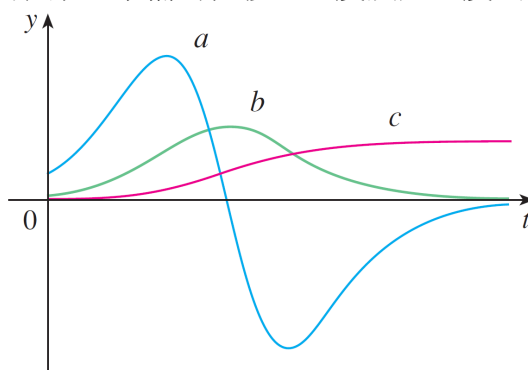
(a)  $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

(b)  $G(t) = \frac{1-2t}{3+t}$

12. 利用下列給定的函數圖象  $f$ ，求  $f$  不可微的點並作說明。



13. 下圖中的三條曲線分別代表某一車輛的位移、速度及加速度函數，試找出對應曲線。



14. 微分下列函數:

(a)  $f(x) = 2^{40}$

(g)  $S(p) = \sqrt{p} - p$

(b)  $f(t) = 2 - \frac{2}{3}t$

(h)  $R(a) = (3a + 1)^2$

(c)  $f(x) = x^3 - 4x + 6$

(i)  $y = \frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$

(d)  $g(x) = x^2(1 - 2x)$

(e)  $g(t) = 2t^{-3/4}$

(j)  $f(t) = \frac{2t}{2 + \sqrt{t}}$

(f)  $A(s) = -\frac{12}{s^5}$

15. 求函數於給定點的切線方程:

$$y = \frac{2x}{x+1}, \quad (1, 1)$$

16. 求函數於給定點的切線方程及法線方程:

(法線指平面上垂直于曲線在某點的切線的一條線)

$$y = \frac{3x+1}{x^2+1}, \quad (1, 2)$$

17. 求函數的一階及二階導數:

$$f(x) = \frac{x^2}{1+2x}$$

18. 已知  $f(5) = 1, f'(5) = 6, g(5) = -3, g'(5) = 2$ , 求下列各值:

(a)  $(fg)'(5)$

(b)  $(f/g)'(5)$

(c)  $(g/f)'(5)$

19. 微分下列函數:

(a)  $f(x) = 3x^2 - 2\cos x$

(b)  $y = \sec \theta \tan \theta$

(c)  $y = \frac{x}{2 - \tan x}$

(d)  $y = \frac{t \sin t}{1+t}$

20. 求函數於給定點的切線方程:

$$y = \sec x, \quad (\pi/3, 2)$$

21. 求曲線  $y = 2x \sin x$  於點  $(\pi/2, \pi)$  的切線方程。

22. 已知  $H(\theta) = \theta \sin \theta$ , 求  $H'(\theta)$  和  $H''(\theta)$ 。

## B. 鏈式法則/連鎖律 (Varberg: 2.5)

1. 求下列函數的導數:

(a)  $y = \cos(a^3 + x^3)$

(b)  $y = \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^3$

(c)  $F(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$

(d)  $y = \sin(\tan 2x)$

(e)  $y = [x^2 + (1 - 3x)^5]^3$

(f)  $y = \cos \sqrt{\sin(\tan \pi x)}$

2. 求函數的一階及二階導數:

$$H(t) = \tan 3t$$

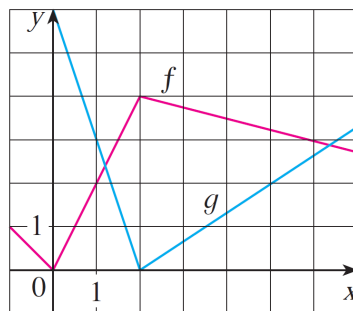
3. 求函數於給定點的切線方程:

$$y = \sin(\sin x), \quad (\pi, 0)$$

4. 給定  $F(x) = f(g(x))$ , 其中  $f(-2) = 8$ 、 $f'(-2) = 4$ 、 $f'(5) = 3$ 、 $g(5) = -2$  且  $g'(5) = 6$ , 求  $F'(5)$  的值。

5. 已知  $f$  和  $g$  的圖象如下, 令  $u(x) = f(g(x))$ 、 $v(x) = g(f(x))$ 、 $w(x) = g(g(x))$ 。求下列各值:

(a)  $u'(1)$       (b)  $v'(1)$       (c)  $w'(1)$



6. 已知  $r(x) = f(g(h(x)))$ , 其中  $h(1) = 2$ 、 $g(2) = 3$ 、 $h'(1) = 4$ 、 $g'(2) = 5$  且  $f'(3) = 6$ , 求  $r'(1)$  的值。

### C. 隱微分法 (Varberg: 2.7)

1. 利用隱微分法求  $dy/dx$  :

(a)  $x^3 + y^3 = 1$

(b)  $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$

(c)  $4 \cos x \sin y = 1$

(d)  $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$

2. 已知  $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$  且  $f(1) = 2$ , 求  $f'(1)$  的值。

### D. 相關變化率 (Varberg: 2.8)

1. 在時間  $t$  秒時高度為  $h = 2 + 24.5t - 4.9t^2$  的火箭以初始速度每秒的影片 24.5 公尺自高於地面 2 公尺向上發射。

(a) 求 2 秒及 4 秒後的速度。

(b) 問火箭何時到達最高點?

(c) 問火箭的最大高度為何?

(d) 問火箭何時落地?

(e) 問火箭落地時的速度為何?

2. 一個圓柱形水槽的半徑為 5 公尺。若水以每分鐘 3 立方公尺的速度注入此水槽, 問水的高度上升有多快?

3. 兩部車同時從同一地點出發。一部以每小時 60 英里的速度往南, 另一部以每小時 25 英里的速度往西。求在出發兩小時後兩車間的距離的變代率。

4. 一個 10 公尺長的水槽的橫切面為底寬 30 公分頂寬 80 公分且高 50 公分的等腰梯形。假如水以每分鐘 0.2 立方公尺的速度注入此水槽, 問水深為 30 公分時水面上升的速度有多快?