邏輯 Logic

單元一

Outline

- Propositional Logic 命題邏輯
- Predicate Logic 謂詞邏輯

論證、前提與結論(Argument, premise, conclusion)

- **邏輯的簡單定義**：研究有效論證的科學。

  論證(argument)：論證包含了一組陳述句，其中有些陳述句（前提）宣稱為其他陳述句（結論）提供支持的證據或理由。

- **定義**：一個「論證」是由 n 個（n 為整數且≧0）命題(proposition)做前提(premise)，一個命題做結論(conclusion)所構成的推理方式。

命題 (Propositions)

- 命題 (Propositions) 是一個陳述語句，它或真或假，但不能既真又假。

- 命題範例:
  a) 巴黎是加拿大的首都。
  b) $0 + 0 = 2$
  c) $1 + 0 = 1$

- 非命題範例:
  a) 幾點了?
  b) $x + 1 = 2$
  c) $x + y = z$

命題邏輯 (Propositional Logic)

- 命題邏輯 (Propositional Logic)：又稱為語句邏輯 (Sentential Logic)，它的基本元素是命題。
  - 命題邏輯只考慮命題和命題之間的關係，而不考慮命題主詞的量。
- 命題可依「複雜程度」區分為原子命題和複合命題。
  - 原子命題：是命題的最小單位。
    例如：「我是人」、「這裡是澳門」、「1 + 1 = 3」。
  - 複合命題：由一個（或一個以上）的原子命題，再加上「連接詞」所組成。
    例如：「如果我是人，那麼我應該為自己的行為負責」、「現在是清晨而且這裡是澳門」、「1 + 1 = 2 或者 1 + 1 = 3」。

連接詞 (Connectives)

- 五種語句連接詞：

	符號	優先級
Negation (否定)	$\neg$	1
Conjunction (合取)	$\wedge$	2
Disjunction (析取) (Inclusive or)	$\vee$	3
Implication (條件語句)	$\rightarrow$	4
biconditional (雙條件語句)	$\leftrightarrow$	5

真值表 (Truth Table)

一. 否定 (Negation):

- “Not p”
- “Negation p”

p	¬ p
T	F
F	T

- 範例:
  - 例：「美國的首都不是巴黎。」的原子命題為
    P ＝「美國的首都是巴黎。」；即全句可翻成 ¬P

真值表 (Truth Table)

二. 合取 (Conjunction):

- "p and q"

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

- 範例:
  - 在多數狀況下，符合我們日常語言的使用。

    例1：「我今天穿了一件長褲且戴了一頂帽子」翻成 $A \wedge B$
  - 日常語言中先後順序有影響，但 Conjunction不區分。
  - 表達關係的日常語句不可翻成 Conjunction，要翻成原子語句。

    例2：「張三和李四是朋友」不可翻成 $C \wedge L$，而是翻成 F。

真值表 (Truth Table)

三. 析取 (Disjunction):

- "p or q"

p	q	p ∨ q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- 範例:
  - ∨ 是 Inclusive Or (兼容的)，它並不排除兩個選項都成立。
    例1：「餐牌上的飲料可選茶或咖啡。」
  - 若要表示Exclusive Or (排斥的)，可引用另一連接詞 ⊕。
    例2：「我現在人在澳門或者我現在人在美國。」

p	q	p ⊕ q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- Disjunction 的前後項順序不影響其邏輯真值。

+ 真值表 (Truth Table)

"if p, then q"
"if p, q"
"p is sufficient for q"
"q if p"
"q when p"
"a necessary condition for p is q"
"q unless $\neg p$"
"p implies q"
"p only if q"
"a sufficient condition for q is p"
"q whenever p"
"q is necessary for p"
"q follows from p"

四. 條件語句 (Implication):

- "If p then q"
- "p implies q"
- "p only if q"

p	q	p → q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- 範例: G→E (E: 你通過考試；G: 你能畢業)
  - Implication 的前件為後件的sufficient condition(充分條件)，而後件則為前件的necessary condition(必要條件) :

例3：「如果你能畢業，那麼你通過考試。」、
「你能畢業是你通過考試的充分條件。」、
「你通過考試是你能畢業的必要條件。」邏輯上等值。

+ 逆命題、反命題、逆否命題

- 由條件句 $p \longrightarrow q$ 可構成下列新的條件句:
  - $q \rightarrow p$ 是 $p \rightarrow q$ 的逆命題 **(converse)**
  - $\neg p \rightarrow \neg q$ 是 $p \rightarrow q$ 的反命題 **(inverse)**
  - $\neg q \rightarrow \neg p$ 是 $p \rightarrow q$ 的逆否命題 **(contrapositive)**

例1

A. 判斷下列命題的真值:

a) If 1+1 = 2, then 2+2=4. T

b) If 1+1 = 2, then 2+2=3. F

c) If 1+1 = 3, then 2+2=4. T

d) If 1+1 = 3, then 2+2=3. T

B. 找出 “If it is raining, then the road is wet.” 的逆命題(converse)、反命題(inverse)及逆否命題(contrapositive)，並以語句表述。

If the road is wet then it is raining(逆命題)

If it is not raining then the road is not wet(反命題)

If the road is not wet then it is not raining(逆否命題)

真值表 (Truth Table)

五. 雙條件語句 (Biconditional):

- "p if and only if q"

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

- 範例: $M \leftrightarrow E$ (M: 三角形等邊 / E : 三角形等角)
  - 例：「三角形等邊若且唯若三角形等角。」

- Biconditional 的前後項順序不影響其邏輯真值。

例2

- 若命題 P:「對消息進行病毒掃瞄」 ;
  Q:「消息來自一個未知的系統」 ,
  翻譯以下語句成邏輯表達式:

A. 當接收到一條來自未知系統的消息, 則會對其進行病毒掃瞄。$q \to p$
B. 接收到了一條來自未知系統的消息但並沒有對其進行病毒掃瞄。$q \wedge \neg p$
C. 當接收到一條不是來自未知系統的消息,則不會對其進行病毒掃瞄。

$\neg q \to \neg p$

例3

- 建構 $(p \vee q) \rightarrow \neg r$ 的真值表 (Truth Table)。

p	q	r	$\neg r$	$p \vee q$	
T	T	T	F	T	F
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	T	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	F
F	T	F	T	T	T
F	F	T	F	F	T
F	F	F	T	F	T

真值表法用於複合語句

- 假設A、B為真，Y、Z為假，P、Q的真值不確定，請判斷以下命題的真值：

1. $A \vee P$ T
2. $Q \rightarrow A$ T
3. $P \leftrightarrow \neg P$ F
4. $(P \rightarrow A) \rightarrow Z$ F
   T
5. $\neg(P \rightarrow Y) \vee (Z \rightarrow Q)$ T
   X F

動動腦:真假島

- 一個名為「真假島」的神秘小島上的居民僅可分為兩類: 永遠都說真話的老實人以及永遠說假話的說謊者。某探險者登島後遇見了兩位原住民，其中一位對他說: 「我是一位說謊者或者我旁邊這位是老實人。」

- 問: 兩位原住民是說謊者還是老實人?

單一命題的分類(1.3)

- 永真式 (Tautology)：它在真值表的所有可能情況中都為真。例: 「$p \vee \neg p$」、「 $((G \rightarrow H) \wedge G) \rightarrow H$」
- 矛盾式 (Contradiction)：它在真值表的所有可能情況中都為假。例: 「$p \wedge \neg p$」、「$(G \vee H) \leftrightarrow (\neg G \wedge \neg H)$」
- 可能式 (Contingency)：它在真值表的某些情況下為真，在另一些情況下為假。例: 「$p \wedge q$」

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F

等價式

- 邏輯上等價 (Logically equivalent)：兩個命題的真值表下每一橫列的真值都相同。以“≡”表示兩命題等價，
例如: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

- 德摩根律(DeMorgan's Laws):

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

+ 等價式

TABLE 6 Logical Equivalences.

Equivalence	*Name*
$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	Identity laws
$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	Domination laws
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Idempotent laws
$\neg(\neg p) \equiv p$	Double negation law
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Commutative laws
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Associative laws
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributive laws
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	De Morgan's laws
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Absorption laws
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$	Negation laws

等價式

TABLE 7 Logical Equivalences Involving Conditional Statements.

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$$

$$p \vee q \equiv \neg p \to q$$

$$p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$$

$$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$$

$$(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$$

$$(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$$

$$(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$$

$$(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$$

TABLE 8 Logical Equivalences Involving Biconditional Statements.

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$$

例4

1. 利用下列方法證明$\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$和$\neg p \wedge \neg q$邏輯上等價 (Equivalent)：

A. 真值表

B. 邏輯恒等式

例4 (續)

1. 利用下列方法證明 $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ 是永真式 (Tautology)：

A. 真值表

B. 邏輯恒等式

謂詞邏輯 Predicates Logic (1.4)

- 謂詞邏輯以下列形式表示：
  - 變量 (Variable): x, y, z
  - 謂詞 (Predicates): $P(x), M(x,y)$
  - 量詞 (Quantifiers): $\exists, \forall$
  - 論域 (Domain): U
- 範例: 令 $P(x)$ 表示語句 “$x > 0$”，U 為所有整數。則:
  - P(-3) is false.
  - P(0) is false.
  - P(3) is true.
- 命題邏輯中的連接詞可在謂詞邏輯中沿用。

+ 例5

A. 令 $R(x, y, z)$: "$x + y = z$" ，U 為整數集，求下列命題真值：

a) R(2,-1,5) F

b) R(3,4,7) T

c) R(x, 3, z) N/A

B. 令 $Q(x)$: "$x > 0$" ，U 為整數集.求下列命題真值：

a) $Q(3) \vee Q(-1)$ T

b) $Q(3) \wedge Q(-1)$ F

c) $Q(3) \rightarrow Q(-1)$ F

d) $Q(-1) \rightarrow Q(-2)$ T

+ 量詞 Quantifiers

- 全稱量詞 *Universal Quantifier*, "對所有(For all)," 符號: ∀
  - $\forall x\ P(x)$ 表示 "論域中的所有 x , 滿足 $P(x)$"
  - 例: $\forall x \in Z^{+}(x > 0)$. "For all x in Z^{+}, x is greater than 0."
- 存在量詞 *Existential Quantifier*, "存在(There exists)," 符號: ∃
  - $\exists x\ P(x)$ 表示 "論域中存在一個 x , 滿足 $P(x)$"
  - 例: $\exists x \in R(x^2 > 100)$. "There exists x in R such that x squared is greater than 100."

命題	何時真?	何時假?
$\forall x\ P(x)$	對所有 x，$P(x)$ 都為真	存在一個 x 使 $P(x)$為假
$\exists x\ P(x)$	存在一個 x 使 $P(x)$為真	對所有 x，$P(x)$ 都為假

- 可得出以下否定式:
  - $\neg\forall x\ P(x) \equiv \exists x\ \neg P(x)$
  - $\neg\exists x\ P(x) \equiv \forall x\ \neg P(x)$

例6

A. 全稱 Universal:

a) 若$P(x)$: “$x > 0$”且 U: Z , 那麼 $\forall x$ P(x) 的真值是? F

b) 若$P(x)$: “$x > 0$”且 U: Z^+, 那麼 $\forall x$ P(x) 的真值是? T

c) 若$P(x)$: “x 是偶數”且 U : Z ,那麼 $\forall x$ P(x) 的真值是? F

B. 存在 Existential:

a) 若$Q(x)$: “$x > 0$”且 U: Z , 那麼 $\exists x$ P(x) 的真值是? T

b) 若$Q(x)$: “$x < 0$”且 U: Z^+, 那麼 $\exists x$ P(x) 的真值是? F

c) 若$Q(x)$: “x 是偶數”且 U : Z ,那麼 $\exists x$ P(x) 的真值是? T

例7

- 以謂詞邏輯形式翻譯語句: 1) A, B 和 2) A, B

1. U 為這個班的學生;
2. U 為任何人;

A. “每一個在這個班的學生都學過微積分。”
B. “有些在這個班的學生喜歡踢球。”

嵌套量詞 Nested Quantifiers (1.5)

- 對於命題:
  $\forall x \, \exists y \, (x + y = 0)$
  - 可看作: $\forall x \, Q(x)$,
    - 其中 $Q(x) : \exists y \, P(x, y)$
      - 而 $P(x, y) : x + y = 0$

+ 例8

1. 令 $U:\mathbb{R}$ 且 $P(x,y): x \cdot y = 0$，判斷下列命題的真值：
   A. $\forall x \forall y\, P(x,y)$ F
   B. $\forall x \exists y\, P(x,y)$ T
   C. $\exists x \forall y\, P(x,y)$ T
   D. $\exists x \exists y\, P(x,y)$ T

2. 令 $U:\mathbb{R}$ 且 $Q(x,y): x / y = 1$，判斷下列命題的真值：
   A. $\forall x \forall y\, Q(x,y)$ F
   B. $\forall x \exists y\, Q(x,y)$ F(x=0)
   C. $\exists x \forall y\, Q(x,y)$ F (y=0)
   D. $\exists x \exists y\, Q(x,y)$ T

+ 例8

1. 謂詞邏輯形式翻譯語句: “The sum of two positive integers is always positive.”

   $\forall x \forall y((x > 0) \land (y > 0) \rightarrow (x + y > 0))$

2. 重寫以下語句, 使否定詞只緊跟在謂詞(Predicates)前:

   A. $\neg\exists y \exists x P(x, y)$

   B. $\neg\forall y \exists x P(x, y)$

   C. $\neg\exists y(\exists x R(x, y) \lor \forall x S(x, y))$

+ 語意及語法蘊含 (1.6)

- 真值表法所談論的是命題之間的語意蘊涵關係 (semantic entailment relation) - 前提與結論的真假值之間的關係。

- 接下來，我們要介紹的是命題之間的語法蘊涵關係 (syntactic entailment relation) - 證明命題之間的推論關係。

證明命題之間的推論關係

◈可用規則可分為兩類：

1. **推理規則 (Rules of Inferences)**：這類規則本身就是一個有效論證，從前提可以導出結論，但不能從結論逆推回前提。(單向) *(1.6的內容)*

2. **置換規則 (Rules of Replacement)**：以邏輯等價的形式來陳述規則，在 ≡ 兩邊的語句是邏輯上等價的，可以彼此置換。(雙向) *(1.3的內容)*

推理規則

TABLE 1 Rules of Inference.

Rule of Inference	*Tautology*	*Name*
p $p \to q$ $\therefore q$	$(p \land (p \to q)) \to q$	Modus ponens
$\neg q$ $p \to q$ $\therefore \neg p$	$(\neg q \land (p \to q)) \to \neg p$	Modus tollens
$p \to q$ $q \to r$ $\therefore p \to r$	$((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$	Hypothetical syllogism
$p \lor q$ $\neg p$ $\therefore q$	$((p \lor q) \land \neg p) \to q$	Disjunctive syllogism
p $\therefore p \lor q$	$p \to (p \lor q)$	Addition
$p \land q$ $\therefore p$	$(p \land q) \to p$	Simplification
p q $\therefore p \land q$	$((p) \land (q)) \to (p \land q)$	Conjunction
$p \lor q$ $\neg p \lor r$ $\therefore q \lor r$	$((p \lor q) \land (\neg p \lor r)) \to (q \lor r)$	Resolution

TABLE 2 Rules of Inference for Quantified Statements.

Rule of Inference	*Name*
$\forall x P(x)$ $\therefore P(c)$	Universal instantiation
$P(c)$ for an arbitrary c $\therefore \forall x P(x)$	Universal generalization
$\exists x P(x)$ $\therefore P(c)$ for some element c	Existential instantiation
$P(c)$ for some element c $\therefore \exists x P(x)$	Existential generalization

推理規則 Rules of Inferences (1.6表1&2)

- 表1:

假言推理 (MP) $p \to q$ p $\therefore q$	取拒式 (MT) $p \to q$ $\neg q$ $\therefore \neg p$	假言三段論 (HS) $p \to q$ $q \to r$ $\therefore p \to r$
析取三段論 (DS) $p \vee q$ $\neg p$ $\therefore q$	附加律 (Add) p $\therefore p \vee q$	化簡律 (Simp) $p \wedge q$ $\therefore p$
合取律 (Conj) p q $\therefore p \wedge q$	消解律 (Res) $p \vee q$ $\neg p \vee r$ $\therefore q \vee r$	

表2:

全稱實例(UI) $\forall x P(x)$ $\therefore P(c)$	全稱引入 (UG) $P(c)$, for any c $\therefore \forall x P(x)$
存在實例(EI) $\exists x P(x)$ $\therefore P(c)$ for some c	存在引入(EG) $P(c)$, for some c $\therefore \exists x P(x)$

例9A (命題邏輯)

- 證明：$(p \wedge (p \to q)) \to q$

1. $p \wedge (p \to q)$
2. p simp
3. $p \to q$
4. q 2.3 MP

例9B (命題邏輯)

- 將論證翻譯成命題邏輯並證明：

  It is not sunny this afternoon and it is colder than yesterday. $\neg p \land q$

  We will go swimming only if it is sunny. $r \to p$

  If we do not go swimming, then we will go hiking. $\neg r \to s$

  If we go hiking, then we will be home by sunset. $s \to t$

  Therefore, we will be home by sunset.

  t

例9C (謂詞邏輯)

- 將論證翻譯成謂詞邏輯並證明：

  A student in this class has not read the book.
  Everyone in this class passed the midterm exam.
  Therefore, someone who passed the midterm exam has not read the book.

證明方法(1.7): $p \to q$

- 直接證明法 (Direct proof)：

$$p \to q$$

  - E.g. For integer n, if n is odd, then n^2 is odd.

- 間接證明法 / 反證法 (Proof by contraposition)：

$$\neg q \to \neg p$$

  - E.g. For integer n, if $3n+2$ is odd, then n is odd.

+ 教材對應閱讀章節及練習

- 閱讀章節:
  - 1.1(~Example 21),
  - 1.2(~Example 5),
  - 1.3(~Example 8),
  - 1.4(~Example 15),
  - 1.5(~Example 5),
  - 1.6(~Example 7).
  - 1.7
- 對應習題: (可視個人情況定量)
  - 1.1: 1-32
  - 1.2: 1-8
  - 1.3: 1-33
  - 1.4: 1-18,59,60
  - 1.5: 9-13, 25-27
  - 1.6: 1-24