



無窮級數

單元十一

# + Outline

- 無窮數列
- 無窮級數
- 判別法:
  - ◆ 發散判別法
  - ◆ 有界判別法
  - ◆ 積分判別法
  - ◆ 比較判別法
  - ◆ 極限判別法
  - ◆ 絕對比率判別法

# + 無窮數列 (Infinite Sequences) (9.1)

■ 無窮數列 - 定義域為正整數集、值域為實數集的函數。

◆  $a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$

◆  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

◆  $\{a_n\}$

■ 如:  $1, 4, 7, 10, 13 \dots$

◆ 以上數列可以通項式 (Explicit formula) 表示:

$$a_n = 3n - 2, n \geq 1$$

◆ 也可以遞歸公式 (Recursion formula) 表示:

$$a_n = a_{n-1} + 3 \quad \text{其中 } a_1 = 1, n \geq 2$$

# + 例1

■ 求下列數列的通項式:

A.  $-5, -1, 3, 7, 11, \dots$

B.  $-1, 2, -4, 8, \dots$

C.  $1 \times 3, 3 \times 9, 5 \times 27, \dots$

D.  $3, 33, 333, 3333, \dots$

# + 收斂 (Convergent)

■ 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

則稱數列 $\{a_n\}$ 收斂(converge)的，否則稱它是發散(diverge)的。

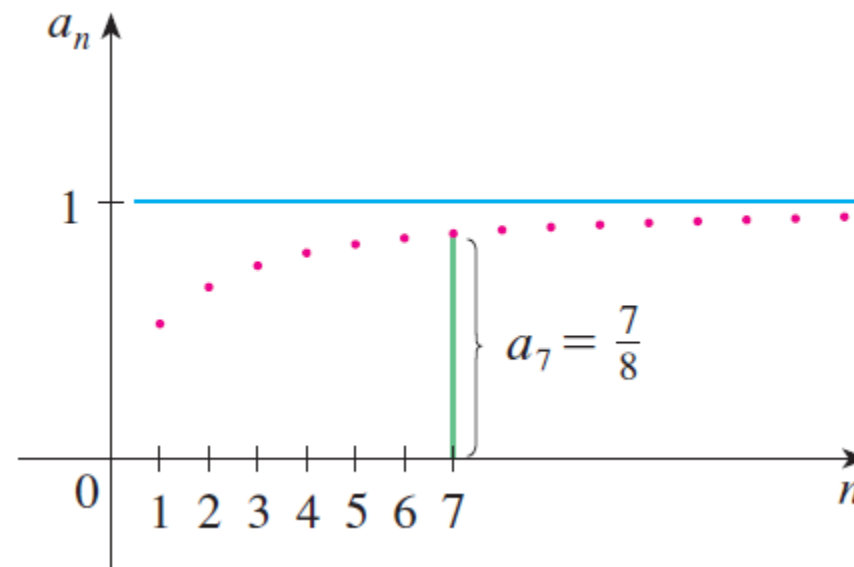
# + 範例

■  $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$  是否收斂?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = ?$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \text{ (收斂 Converges)}$$



■ 9.1例3 :

若  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ ,  $f(n) = a_n (n \in \mathbb{Z}^+)$ , 則  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ 。

## + 無窮數列的極限 (9.1 定理A&C)

若 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 是收斂數列， $k$ 為常數，則：

$$\blacksquare \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\blacksquare \lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\blacksquare \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\blacksquare \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \text{ 若 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$$

$$\blacksquare \text{若 } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0, \text{ 則 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

# + 單調數列

- ◆ 對於數列 $\{a_n\}$ ，若存在數  $M$  對任意  $n \geq 1$  有  $a_n \leq M$ ，則  $\{a_n\}$  有上界 (bounded above).
  - ◆ 對於數列 $\{a_n\}$ ，若存在數  $M$  對任意  $n \geq 1$  有  $a_n \geq M$ ，則  $\{a_n\}$  有下界 (bounded below).
  - ◆ 若一數列有上界或有下界，則此數列是有界的數列 (bounded sequence)。
- 每一個單調且有界的數列都是收斂的。



## + 例2

■ 判斷下列 $\{a_n\}$  是否收斂，若收斂請求出其收斂值：

A.  $a_n = \frac{\ln n}{n}$

B.  $a_n = (-1)^n$

C.  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

## + 無窮級數 (Infinite Series) (9.2)

- 當我們說：以無限小數來表示一個數是什麼意思？如：

$$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ \dots$$

意即小數點以後的數能用無限個數的和來表示：

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \dots$$

- 無窮級數 **Infinite Series** (或簡稱 **級數 Series**)：  
將無窮數列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  的每一項相加所得。

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

## + 幾何級數 (Geometric Series)

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \dots, \text{其中 } a \neq 0$$

■ 若  $S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$ , 則  $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ ,

■ 可知:

◆  $|r| < 1$ 時, 收斂於  $\frac{a}{1-r}$

◆  $|r| \geq 1$ 時, 發散

## + 例3

- 判斷級數  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$  是否收斂或發散，若收斂求級數和：

## + 例4

■ 求下列循環小數的值：

A.  $0.4444444\ldots$

B.  $1.6737373737373 \ldots$

## + 發散判別法 (Test for Divergence)(9.2定理A)

$$\text{若 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收斂, 則 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

同理,

$$\text{若 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \text{ 或不存在, 則 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 發散}$$

■ 注：  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

◆ 如：調和級數(harmonic series):  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

## + 例5

■ 判斷級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$  是否收斂或發散。

## + 收斂級數的線性性質

■ 假設  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收斂,  $c$  為常數, 則:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$



## + 例6

■ 求下列級數的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right)$$

## + 有界判別法 (**Bounded Sum Test**) (9.3定理A)

■ 正項級數  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  收斂

若且唯若

其部分和  $S_n$  有上界(bounded above)。

## + 例7

■ 證明下列級數收斂：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

## + 積分判別法 (Integral Test) (9.3定理B)

- 假設  $f$  在區間  $[1, \infty)$  上為連續、正的、非遞增函數，同時對於所有正整數  $k$  有  $a_k = f(k)$ ；那麼

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收斂}$$

若且唯若

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \text{ 收斂.}$$

## + 例8

$p$ -級數:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  收斂若  $p > 1$ .

- 判斷級數是否收斂或發散，若收斂求級數和：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

## + 正項級數的判別法 (9.4)

### ■ 比較判別法(定理A):

已知對於任意  $n > N$  有  $0 \leq a_n \leq b_n$ , 那麼:

- ◆ 若  $\sum b_n$  收斂, 則  $\sum a_n$  也收斂;
- ◆ 若  $\sum a_n$  發散, 則  $\sum b_n$  也發散.

### ■ 極限比較法 (定理B):

假設  $a_n \geq 0, b_n > 0$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ .

- ◆ 若  $0 < L < \infty$ , 則  $\sum a_n$  和  $\sum b_n$  斂散性相同(同時收斂或同時發散).
- ◆ 若  $L = 0$  且  $\sum b_n$  收斂, 則  $\sum a_n$  收斂.

## + 例9

■ 判斷級數是否收斂或發散：

A.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$

B.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

## + 絕對比率判別法

- 對於級數  $\sum a_n$ ，若  $\sum |a_n|$  收斂，稱  $\sum a_n$  為絕對收斂的 (absolute convergent)。
- 若  $\sum a_n$  絕對收斂，則  $\sum a_n$  收斂。(9.5定理B)
- 絕對比率判別法(9.5定理C):  
令  $\sum a_n$  為一非零項級數，且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$ .
  - ◆ 若  $\rho < 1$ ，則  $\sum a_n$  絕對收斂(因而收斂)。
  - ◆ 若  $\rho > 1$ ，則  $\sum a_n$  發散。
  - ◆ 若  $\rho = 1$ ，則不能判斷。



## + 例10

■ 判斷級數是否收斂或發散：

A.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$

B.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

## + 冪級數 **Power Series (9.6)**

- 以下為以函數項  $x$  的冪級數形式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x \dots$$

- 其收斂集 (**Convergence Set**): 冪級數收斂的  $x$  取值的集合。

## + 例11

■ 求以下冪級數的收斂集並以函數形式表示其級數：

A.  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

B.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$

# + 教材對應閱讀章節及練習

■ 9.1-9.4(~例3), 9.5, 9.6

■ 對應習題: (可視個人情況定量)

◆ 9.1: 1-12, 21-24

◆ 9.2: 1-6, 15-18

◆ 9.3: 1-12

◆ 9.4: 1-10

◆ 9.5: 7-12

◆ 9.6: 1-28