無窮級數

單元十一

Outline

- 無窮數列
- 無窮級數
- 判別法:
  - 發散判別法
  - 有界判別法
  - 積分判別法
  - 比較判別法
  - 极限判別法
  - 絕對比率判別法

無窮數列 (Infinite Sequences) (9.1)

- 無窮數列 - 定義域為正整數集、值域為實數集的函數。
  - $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$
  - $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
  - $\{a_n\}$

- 如: 1, 4, 7, 10, 13…
  - 以上數列可以**通項式 (Explicit formula)** 表示:

$$a_n = 3n - 2, n \geq 1$$

  - 也可以**遞歸公式 (Recursion formula)** 表示:

$$a_n = a_{n-1} + 3 \qquad \text{其中 } a_1 = 1, n \geq 2$$

例1

- 求下列數列的通項式:

A. $-5, -1, 3, 7, 11, \ldots$

B. $-1, 2, -4, 8, \ldots$

C. $1\times3, 3\times9, 5\times27, \ldots..$

D. $3, 33, 333, 3333, \ldots$

收斂 (Convergent)

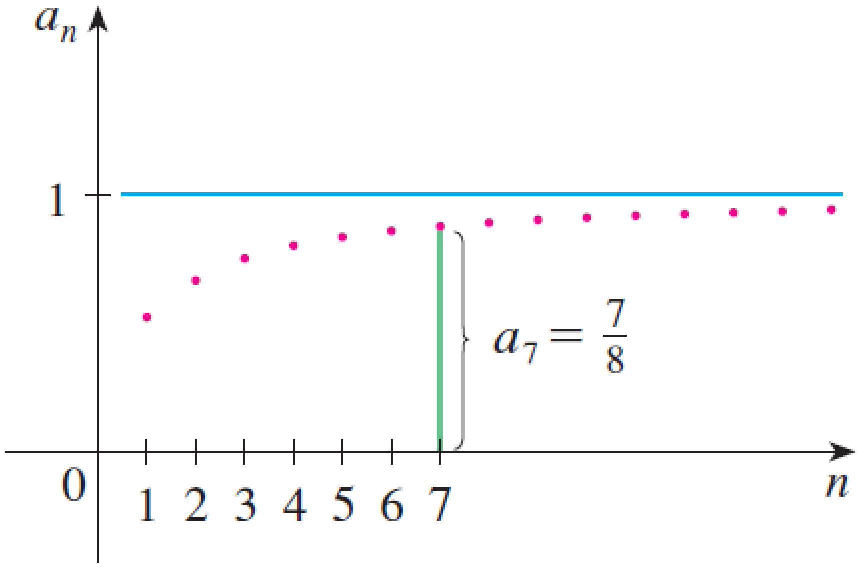
- 若

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

則稱數列$\{a_n\}$收斂的，否則稱它是發散的。

+ 範例

- $\{\frac{n}{n+1}\}$ 是否收斂?



- 若 $\lim_{x\to\infty} f(x) = L, f(n) = a_n (n \in \mathbb{Z})$,則 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$。

無窮數列的極限 (9.1定理A&C)

若$\{a_n\}$與$\{b_n\}$是收斂數列，k 為常數，則：

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$
- 若$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0,$則 $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = 0$

單調數列

- 對於數列$\{a_n\}$，若存在數 M 對任意 $n \geq 1$ 有 $a_n \leq M$，則 $\{a_n\}$ 有上界 (bounded above).
- 對於數列$\{a_n\}$，若存在數 M 對任意 $n \geq 1$ 有 $a_n \geq M$，則 $\{a_n\}$ 有下界 (bounded below).
- 若一數列有上界或有下界，則此數列是有界的數列 (bounded sequence)。

- 每一個單調且有界的數列都是收斂的。

+ 例2

- 判斷下列$\{a_n\}$是否收斂，若收斂請求出其收斂值:

A. $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$

B. $a_n = (-1)^n$

C. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

無窮級數 (Infinite Series) (9.2)

- 當我們說: 以無限小數來表示一個數是什麼意思? 如：
  π = 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 . . .
  意即小數點以後的數能用無限個數的和來表示：

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \cdots$$

- 無窮級數(或簡稱級數)：
  將無窮數列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$的每一項相加所得。

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

幾何級數 (Geometric Series)

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots, \text{其中 } a \neq 0$$

- 若 $S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$，則 $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$，
- 可知:
  - $|r| < 1$時，收斂於 $\frac{a}{1-r}$
  - $|r| \geq 1$時，發散

例3

- 判斷級數$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n}$是否收斂或發散，若收斂求級數和：

發散判別法 (Test for Divergence)(9.2定理A)

$$若\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收斂, 則 } \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

同樣地，

$$若\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \text{ 或不存在 , 則 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 發散}$$

- 調和級數(**harmonic series**): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

例4

- 判斷級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5n^2+4}$ 是否收斂或發散。

收斂級數的線性性質

- 假設 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收斂， c為常數， 則:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

例5

- 求下列級數的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)$$

有界判別法 (Bounded Sum Test) (9.3定理A)

- 正項級數 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$收斂

若且唯若

其部分和 S_n 有上界。

例6

- 證明下列級數收斂:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

積分判別法 (Integral Test) (9.3定理B)

- 假設 f 在區間$[1,\infty)$ 上為連續、正的、非遞增函數，同時對於所有正整數 k 有 $a_k = f(k)$；那麼

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收斂}$$

若且唯若

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \text{ 收斂.}$$

+ 例7

p-級數: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收斂若 $p > 1$.

- 判斷級數是否收斂或發散，若收斂求級數和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

正項級數的判別法 (9.4)

- 比較判別法(定理**A**):
  已知對於任意 $n > N$ 有 $0 \le a_n \le b_n$, 那麼:
  - 若 $\sum b_n$ 收斂, 則 $\sum a_n$ 也收斂;
  - 若 $\sum a_n$ 發散, 則 $\sum b_n$ 也發散.

- 極限比較法 (定理**B**):
  假設 $a_n \ge 0, b_n > 0$ 且 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.
  - 若 $0 < L < \infty$, 則 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 斂散性相同(同時收斂或同時發散).
  - 若 $L = 0$ 且 $\sum b_n$ 收斂, 則 $\sum a_n$收斂.

例8

- 判斷級數是否收斂或發散:

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

絕對比率判別法

- 對於級數 $\sum a_n$，若 $\sum|a_n|$ 收斂，稱 $\sum a_n$ 為絕對收斂的。
- 若 $\sum a_n$ 絕對收斂，則$\sum a_n$ 收斂。(9.5定理B)

- 絕對比率判別法(9.5定理C):
  令 $\sum a_n$為一非零項級數，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho.$
  - 若 $\rho < 1,$ 則 $\sum a_n$ 絕對收斂(因而收斂).
  - 若 $\rho > 1,$ 則 $\sum a_n$ 發散.
  - 若 $\rho = 1,$ 則不能判斷.

例9

- 判斷級數是否收斂或發散:

A. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{3^n}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

教材對應閱讀章節及練習

- 9.1-9.4(~例3), 9.5
- 對應習題: (可視個人情況定量)
  - 9.1: 1-12, 21-24
  - 9.2: 1-6, 15-18
  - 9.3: 1-12
  - 9.4: 1-10
  - 9.5: 7-12