線性代數 作業 3

說明：請按題目要求作答。計算題要給出計算過程，證明題要給出證明過程。其中 P (Pass) 類為必做題，HD (High Distinction) 類為選做題。

P 1. 設 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$， 求$2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma}$.

解

$$2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=2\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\8\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\4\\-2\end{pmatrix}.$$

P 2. 設 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$， 問向量$\boldsymbol{\alpha}$能否由向量組$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$表示?

解 令$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3$，由

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\mid\boldsymbol{\alpha})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\1&1&-1&2\\1&-1&0&3\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&-2&1\\0&-1&-1&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\times\left(-\frac{1}{3}\right)]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&-2&1\\0&0&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+2r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{array}\right),$$

可得方程組有唯一解

$k_1=2$， $k_2=-1$， $k_3=-1$，

故$\boldsymbol{\alpha}$可由向量組$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$線性表示， 且表示式為$\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3$

P 3. 判斷下列向量組是線性相關還是線性無關:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}3\\6\\5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}6\\12\\10\end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{\gamma}_1=\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{pmatrix}6\\4\\7\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}_3=\begin{pmatrix}9\\11\\12\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}_4=\begin{pmatrix}7\\5\\1\end{pmatrix}$.

解 (1) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，由係數矩陣行列式

$$\begin{vmatrix}1&2&0\\1&0&1\\0&1&3\end{vmatrix}=-7\neq0$$

知$k_1=k_2=k_3=0$， 因此$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$線性無關.

(2)由于$\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{2}\boldsymbol{\beta}_2$， 于是有$0\cdot\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}$， 因此$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$線性相關.

(3)由第三章第二節推論 4 可知，4 個 3 維向量必定線性相關， 即$\boldsymbol{\gamma}_1$，$\boldsymbol{\gamma}_2$，$\boldsymbol{\gamma}_3$線性相關.

P 4. 設矩陣 $\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\-1&1&-2\end{pmatrix}$ 等價，則a= -2 .

解 由於等價的矩陣有相同的秩,而由

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\-1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可知這兩個矩陣的秩為 2，所以由

$$\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-a\\0&a-1&1-a\\0&0&a^2+a-2\end{pmatrix}$$

得$a^2+a-2=0$，且$a-1\neq0$，即$a=-2$，

P 5. 已知向量組 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\a\\0\end{pmatrix}$， 當$a$取何值時，向量組$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$線性相關？當$a$取何值時向量組$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$線性無關？

解 設$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1&a&2\\-1&2&a\\1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&2\\0&a+2&a+2\\0&1-a&-2\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}a+2&a+2\\1-a&-2\end{vmatrix}=(a+2)(a-3).$$

當$a=3$或$a=-2$時，方程組有非零解，因而$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$線性相關。

當$a\neq3$且$a\neq-2$時，方程組只有零解，因而$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$線性無關。

P 6. 求下列向量組的秩及一個極大無關組，并將不屬於極大無關組的向量由極大無關線性表示。

$$(1)\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-3\\-3\\-9\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\4\\-8\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}1\\5\\-1\end{pmatrix};$$

$$(2)\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\4\\-1\\5\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\0\\3\\1\end{pmatrix}.$$

解 (1)

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&1\\3&2&-3&4&5\\1&2&-9&-8&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&1\\0&-1&6&7&2\\0&1&-6&-7&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+r_2\\r_2\times(-1)}]{r_1+r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&3&6&3\\0&1&-6&-7&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以向量組的秩是 2，極大無關組為$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$.

$$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1-6\boldsymbol{\alpha}_2,$$
$$\boldsymbol{\alpha}_4=6\boldsymbol{\alpha}_1-7\boldsymbol{\alpha}_2,$$
$$\boldsymbol{\alpha}_5=3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2.$$

(2)

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1&1&2&1&2\\1&-1&4&1&0\\0&3&-1&2&3\\2&-1&5&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&2&1&2\\0&-2&2&0&-2\\0&3&-1&2&3\\0&-3&1&-2&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_3]{r_2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&2&1&2\\0&1&-1&0&1\\0&3&-1&2&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_2]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&3&1&1\\0&1&-1&0&1\\0&0&2&2&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_3\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&0&0&-2&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以向量組的秩是 3，極大無關組為$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.

$$\boldsymbol{\alpha}_4=-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,$$
$$\boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2.$$

P 7. 求下列矩陣的秩：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2 & 2\\ 3 & 1 & -4 & 4\end{pmatrix}$;　　(2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 3 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 6 & -2\\ 4 & 3 & 5 & -1 & -3\end{pmatrix}$.

解 (1)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2 & 2\\ 3 & 1 & -4 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 2 & 3\\ 0 & 4 & -4 & 7\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -6 & 4\end{pmatrix},$$

所以矩陣 A 的秩是 3.

(2)

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 3 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 6 & -2\\ 4 & 3 & 5 & -1 & -3\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\ r_4-4r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -3 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 5 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -5 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_3]{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以矩陣 B 的秩是 3.

P 8. 已知方程組 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & a+2\\ 1 & a & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$ 無解，則a=___-1___.

解 方程組無解的充要條件是係數矩陣的秩不等於增廣矩陣的秩，故先對增廣矩陣作初等行變換．由于

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & a+2 & 3\\ 1 & a & -2 & 0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & a & 1\\ 0 & a-2 & -3 & -1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & a & 1\\ 0 & 0 & a^2-2a-3 & a-3\end{array}\right),$$

因此當$a^2-2a-3=(a-3)(a+1)=0$ 且$a-3\neq 0$時，即$a=-1$時，係數矩陣的秩$r(A)=2$，而增廣矩陣的秩$r(\tilde{A})=3$，從而方程組無解.

P 9. 求下列其次線性方程組的通解（用基礎解系表示）:

(1) $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3-2x_4=0,\\ x_2+x_3+2x_4=0,\\ 2x_1-x_2+5x_3-2x_4=0;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x_1-3x_2+x_3+x_4=0,\\ 2x_1-5x_2+x_3+2x_4=0,\\ 5x_1-7x_2-3x_3+5x_4=0.\end{cases}$

解 (1)係數矩陣

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2&-2\\0&1&1&2\\2&-1&5&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&-1&2&-2\\0&1&1&2\\0&1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}
$$

自由未知量為x_3,x_4，于是有

$$
\begin{cases}x_1=-3x_3\,,\\x_2=-x_3-2x_4\,,\end{cases}
$$

依次取

$$
\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},
$$

代入原方程組得

$$
\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix},
$$

基礎解系為

$$
\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}.
$$

原方程組的通解為 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta_1}+k_2\boldsymbol{\eta_2},k_1,k_2\in\mathbf{R}$

(2)係數矩陣

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-3&1&1\\2&-5&1&2\\5&-7&-3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&-3&1&1\\0&1&-1&0\\0&8&-8&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-8r_2]{r_1+3r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}
$$

自由未知量為x_3,x_4，于是有

$$
\begin{cases}x_1=2x_3-x_4\,,\\x_2=x_3\,,\end{cases}
$$

依次取

$$
\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},
$$

代入原方程組得

$$
\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},
$$

基礎解系為

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

原方程組的通解為 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2, k_1, k_2\in\mathbf{R}$

P 10. 求下列非其次線性方程組的通解（要求寫出導出組的基礎解系）:

$$(1)\begin{cases}x_1+4x_2-3x_3+4x_4=-2,\\2x_1+x_2+x_3+x_4=3,\\3x_1-2x_2+5x_3-2x_4=8;\end{cases}\qquad(2)\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=1,\\x_1+3x_2-9x_3-7x_4=1,\\3x_1+x_2-3x_3+3x_4=3.\end{cases}$$

解 (1)增廣矩陣

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&4&-3&4&-2\\2&1&1&1&3\\3&-2&5&-2&8\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&4&-3&4&-2\\0&-7&7&-7&7\\0&-14&14&-14&14\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\times\left(-\frac{1}{7}\right)]{r_3-2r_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&4&-3&4&-2\\0&1&-1&1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-4r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&2\\0&1&-1&1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

自由未知量為x_3, x_4，于是有 $\begin{cases}x_1=-x_3+2,\\x_2=x_3-x_4-1,\end{cases}$

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$,

于是得原方程的一個特解 $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}.$

方程組的導出組為 $\begin{cases}x_1=-x_3,\\x_2=x_3-x_4,\end{cases}$

取 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,

得導出組的基礎解系為

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

因此原方程的通解為 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta$，k_1, k_2為任意常數.

(2) 增廣矩陣

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -3 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -9 & -7 & 1\\ 3 & 1 & -3 & 3 & 3\end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -6 & -6 & 0\\ 0 & -2 & 6 & 6 & 0\end{array}\right) \xrightarrow[r_2\times\frac{1}{2}]{r_3+r_2}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

自由未知量為x_3, x_4，于是有 $\begin{cases} x_1 = -2x_4 + 1, \\ x_2 = 3x_3 + 3x_4, \end{cases}$

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

得原方程的一個特解

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

導出組為 $\begin{cases} x_1 = -2x_4, \\ x_2 = 3x_3 + 3x_4, \end{cases}$

取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

得導出組的基礎解系為

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此原方程的通解為 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \eta$，$k_1, k_2$為任意常數.

P 11. 判斷下列集合對通常的向量加法和數乘運算是否構成線性空間，并說明理由：

(1) $V_1 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T | x_1, x_2, \dots, x_n \in R$且滿足$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$;

(2) $V_2 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T | x_1, x_2, \dots, x_n \in R$且滿足$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1\}$;

(3) $V_3 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T | x_1, x_2, \dots, x_n \in R$且滿足$x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$.

解 (1)構成.

$$\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in V_1$$
$$\forall \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in V_1$$

有

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)^T$$
$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_n + y_n) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = 0$$

所以

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V_1$$
$$\forall k \in \mathbf{R}, k\boldsymbol{x} = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n)^T,$$

$$kx_1+kx_2+\cdots+kx_n=k(x_1+x_2+\cdots+x_n)=0$$
所以
$$k\boldsymbol{x}\in V_1,$$
所以V_1對通常的向量加法和數乘運算構成線性空間.
(2)不構成.
$$\forall \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T\in V_2$$
$$\forall \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)^T\in V_2$$
有
$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)^T$$
$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\cdots+(x_n+y_n)=(x_1+x_2+\cdots+x_n)+(y_1+y_2+\cdots+y_n)$$
$$=1+1=2$$
所以
$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\notin V_2$$
$$\forall k\in\mathbf{R}, k\boldsymbol{x}=(kx_1,kx_2,\dots,kx_n)^T,$$
$$kx_1+kx_2+\cdots+kx_n=k(x_1+x_2+\cdots+x_n)=k$$
所以
$$k\boldsymbol{x}\notin V_2.$$
所以V_2對通常的向量加法和數乘運算不構成線性空間.
(3)構成.
$$\forall \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T\in V_3$$
$$\forall \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)^T\in V_3,\ 以及\forall k\in\mathbf{R}$$
有
$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)^T$$
$$k\boldsymbol{x}=(kx_1,kx_2,\dots,kx_n)^T,$$
由$x_1=x_2=\cdots=x_n, y_1=y_2=\cdots=y_n$，有
$$x_1+y_1=x_2+y_2=\cdots=x_n+y_n$$
$$kx_1=kx_2=\cdots=kx_n$$
所以
$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, k\boldsymbol{x}\in V_3.$$
所以V_3對通常的向量加法和數乘運算構成線性空間.

P 12. 設向量組 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix}$, 求向量空間

$$\mathfrak{L}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\{\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4+k_5\boldsymbol{\alpha}_5\mid k_1,k_2,k_3,k_4,k_5\in\mathbf{R}\}$$

的基與維數。

解

因為向量組$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_5$的極大無關組就是向量空間$\mathfrak{L}(\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_5)$的基,
向量組$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_5$的秩就是向量空間$\mathfrak{L}(\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_5)$的維數.
所以由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)\begin{pmatrix}1&2&2&3&-1\\2&2&3&2&-1\\3&2&1&1&2\\-1&-1&1&-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1&1\\0&1&0&2&0\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可知，向量空間$\mathfrak{L}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5)$的基為$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$，維數為 3.

P 13. 設 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$与$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ 是R^2的兩個基，求從基α_1，α_2到β_1，β_2的過渡矩陣。

解

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{3}&\frac{5}{3}\\0&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

過渡矩陣為

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{5}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

HD 1. 已知向量組$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m\ (m\ge 2)$線性無關，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\dots,\beta_{m-1}=\alpha_{m-1}+\alpha_m$，$\beta_m=\alpha_m+\alpha_{m+1}$，討論向量組$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m$的線性相關性。

解 設$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_m\beta_m=0$

$$(k_1+k_m)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+\cdots+(k_{m-1}+k_m)\alpha_m=0$$

由$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$線性無關得齊次線性方程組

$$\begin{cases}k_m+k_1=0,\\k_1+k_2=0,\\k_2+k_3=0,\\\quad\vdots\\k_{m-1}+k_m=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=\mathbf{0},$$

而

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+(-1)^{m-1},$$

若 m 為偶數，行列式等於 0，線性方程組有非零解，于是$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$線性相關.
若 m 為奇數，行列式等於 2，線性方程組只有零解$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$，于是$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$線性無關.

HD 2. 設有向量組 A: $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和向量組 B: $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ a \end{pmatrix}$，確定常數$a$，使得向量組 A 能由向量組 B 線性表示，但是向量組 B 不能由向量組 A 線性表示.

解 因為向量組 A: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$可由向量組 B: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$線性表示，所以矩陣方程$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)X$有解.
由

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3 \mid \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & a & 1 & a & 1 \\ a & 4 & a & a & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - ar_1]{r_2 - r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & a \\ 0 & a+2 & a+2 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 2a+4 & 3a & 0 & 1-a & 1-a^2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & a \\ 0 & a+2 & a+2 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & a-4 & 0 & 3-3a & -(a-1)^2 \end{array}\right)$$

可知，當$a + 2 \neq 0$且$a - 4 \neq 0$時，矩陣方程$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)X$有解. 即當$a \neq 2$且$a \neq 4$時,向量組 A 可由向量組 B 線性表示.

向量組 B: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$不能由向量組 A: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$線性表示，所以矩陣方程$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)X$有解. 由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 \mid \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3,) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & -2 & -2 \\ 1 & a & 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a & 4 & a \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - ar_1]{r_2 - r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & -2 & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 0 & 2a+4 & 3a \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & -2 & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 0 & 3a+6 & 4a+2 \end{array}\right)$$

可知，當$a - 1 = 0$或$2 - a - a^2 = 0$時，矩陣方程$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)X$無解. 即當$a = 1$或$a = -2$時，向量組B不能由向量組A線性表示.

HD 3. 設向量組$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是$R^3$的一個基，$\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_2, \beta_2 = 2\alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$.
（1）證明向量組$\beta_1, \beta_2, \beta_3$是$R^3$的一個基;
（2）當 k 為何值時，存在非零向量ξ在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$與基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$下的座標相同，并求出所有的$\xi$.

證明 (1)由已知條件知，$\beta_1, \beta_2, \beta_3$可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$線性表示，且

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}.$$

而

$$\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&1\\2k&k+1\end{vmatrix}=4\neq 0,$$

從而矩陣 $\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}$ 可逆，于是

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}^{-1},$$

即$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$線性表示，所以$\beta_1,\beta_2,\beta_3$與$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$等價，故$\beta_1,\beta_2,\beta_3$是$R^3$的一個基.

(2)由題設知，$\xi\neq 0$且ξ在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$與$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的坐標均為$k_1,k_2,k_3$，即

$$\xi=k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3,k_i\neq 0(i=1,2,3).$$

即

$$k_1(\beta_1-\alpha_1)+k_2(\beta_2-\alpha_2)+k_3(\beta_3-\alpha_3)=0,$$
$$k_1(2\alpha_1+2k\alpha_3-\alpha_1)+k_2(2\alpha_2-\alpha_2)+k_3(\alpha_1+(k+1)\alpha_3-\alpha_3)=0,$$
$$k_1(\alpha_1+2k\alpha_3)+k_2\alpha_2+k_3(\alpha_1+k\alpha_3)=0,$$

有非零解.

而該方程組有非零解的充分必要條件為系數行列式等於零，即

$$\left|\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3\right|=\left|\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\right|\cdot\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k\end{vmatrix}=\left|\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\right|\cdot(-k)=0,$$

又$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$線性無關，$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\neq 0$，所以得$k=0$.

于是，$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_1=0$，即$(k_1+k_3)\alpha_1+k_2\alpha_2=0$,

由於α_1,α_2線性無關，得$k_1+k_3=0,k_2=0$.

因而所求的非零向量為

$$\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=k_1\alpha_1-k_1\alpha_3,\ k_1\neq 0.$$