線性代數 作業 2

說明：要求給出計算過程，證明題要給出證明過程。其中 P (Pass)類為必做題，HD (High Distinction) 類為選做題。

P 1. 求下列全排列的逆序數

（1） 634521；（2）53142；（3）123454321；（4）135⋯(2n-1) 2n (2n-2)⋯42;

解 （1）τ（634521）=1+1+1+4+5=12

（2）τ（53142）=1+2+1+3=7

（3）τ（123454321）=1+3+5+7=16

（4）τ（135⋯(2n-1) 2n (2n-2)⋯42）=2+4+6+⋯+(2n-2)=n(n-1)

P 2. 求多項式 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ x & x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3x \end{vmatrix}$ 中x^3與x^4的系數。

解 由 n 階行列式的定義可知，

$$f(x)=\sum_{p_1p_2p_3p_4}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4},$$

因此x^4只能出現在乘積項

$$(-1)^{\tau(1324)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=(-1)\cdot 2x\cdot x\cdot x\cdot 3x=-6x^4$$

所以x^4前的係數是-6.

x^3只能出現在乘積項

$$(-1)^{\tau(2314)}a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}=(-1)^2\cdot 1\cdot x\cdot x\cdot 3x=3x^3$$

所以x^3前的係數是 3.

P3. 用對角線法則求下列 3 階行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & a+b & 2b \\ a^2 & ab & b^2 \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\times1\times2+2\times0\times2+1\times3\times3-1\times1\times2-0\times3\times1-2\times3\times2=-3.$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2\times4\times3+5\times7\times(-2)+3\times0\times(-2)-3\times4\times(-2)-7\times(-2)\times2-3\times5\times0$

$=24-70+24+28=6.$

(3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = a\times c\times b+b\times a\times c+c\times b\times a-c\times c\times c-a\times a\times a-b\times b\times b=3abc-a^3-b^3-c^3.$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & a+b & 2b \\ a^2 & ab & b^2 \end{vmatrix} = (a+b)b^2+2ba^2+2aab-(a+b)a^2-2ab^2-2bab$

$=b^3-3ab^2+3a^2b-a^3$

$=(b-a)^3.$

P 4. 求下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & a & b & b \\ a & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$;

(4) $D_n = \begin{vmatrix} 2 & a & a & \cdots & a \\ a & 2 & a & \cdots & a \\ a & a & 2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 2 \end{vmatrix}$; (5) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2-6+8-3-8+4=-3.$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1\leftrightarrow r_4]{r_2-2r_1} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-2r_1]{r_3-3r_1} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 3 & 12 & -10 \\ 0 & 3 & 6 & -5 \end{vmatrix}$

$\xlongequal[r_3\leftrightarrow r_2]{r_4-r_3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 12 & -10 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-\frac{6}{5}r_3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 12 & -10 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 15.$

(3) 將第 1 行的-1 倍加到其他行

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & a & b & b \\ a & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ b-a & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_4} \begin{vmatrix} a+b & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+b)(a-b)^3.$$

（4）將第 1 行的-1 倍加到其他行，再將第 2 列至第 n 列均加到第 1 列

$$\begin{vmatrix} 2 & a & a & \cdots & a \\ a & 2 & a & \cdots & a \\ a & a & 2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a & a & \cdots & a \\ a-2 & 2-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-2 & 0 & 2-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a-2 & 0 & 0 & \cdots & 2-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & 2-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2-a \end{vmatrix}$$

$$=(2-a)^{n-1}[2+(n-1)a].$$

（5）將第 1 行的-i 倍加到第 i 行，再將第 i 列的 i 倍加到第 1 列

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2a & a & 0 & \cdots & 0 \\ -3a & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -na & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a+2+\cdots+n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\left[a+\frac{(1+n)n}{2}\right]a^{n-1}.$$

P5. 用克萊姆法則求解下列方程組：

$$(1)\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=-1, \\ -2x_1+3x_2+4x_3=2, \\ 2x_1-4x_2+3x_3=1; \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x_1-2x_2+\ x_3=-2, \\ x_1+\ x_2-2x_3=4, \\ -2x_1+\ x_2+2x_3=1. \end{cases}$$

解

$$(1)\ |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_1]{r_2+2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

所以方程組有唯一解。又

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+2r_1} \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-6r_2} \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -43 \end{vmatrix} = -43,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_1]{r_2+2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -24,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_1]{r_2+2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3.$$

所以

$$x_1 = \frac{D_1}{|\boldsymbol{A}|} = -43,\ x_2 = \frac{D_2}{|\boldsymbol{A}|} = -24,\ x_3 = \frac{D_3}{|\boldsymbol{A}|} = -3.$$

$$(2)\ |\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&-2&1\\1&1&-2\\-2&1&2\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+2r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&-2&1\\0&3&-3\\0&-3&4\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_2}\begin{vmatrix}1&-2&1\\0&3&-3\\0&0&1\end{vmatrix}=3\neq0,$$

所以方程組有唯一解。又

$$D_1=\begin{vmatrix}-2&-2&1\\4&1&-2\\1&1&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix}1&1&2\\4&1&-2\\-2&-2&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+2r_1]{r_2-4r_1}-\begin{vmatrix}1&1&2\\0&-3&-10\\0&0&5\end{vmatrix}=15,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&-2&1\\1&4&-2\\-2&1&2\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+2r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&-2&1\\0&6&-3\\0&-3&4\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix}1&-2&1\\0&-3&4\\0&6&-3\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+2r_2}-\begin{vmatrix}1&-2&1\\0&-3&4\\0&0&5\end{vmatrix}=15,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-2&-2\\1&1&4\\-2&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+2r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&-2&-2\\0&3&6\\0&-3&-3\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_2}\begin{vmatrix}1&-2&-2\\0&3&6\\0&0&3\end{vmatrix}=9.$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{|\boldsymbol{A}|}=5,\ x_2=\frac{D_2}{|\boldsymbol{A}|}=5,\ x_3=\frac{D_3}{|\boldsymbol{A}|}=3.$$

P6. 用求逆公式求矩陣 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$ 的逆矩陣。

解

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&2&-1\\0&3&-1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-\frac{3}{2}r_2}\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&2&-1\\0&0&\frac{1}{2}\end{vmatrix}=1\neq0,$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}=-1,\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix}=2,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1&1\\1&0\end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=1,\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=2,$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\cdot\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&-1&1\\-1&-3&2\end{pmatrix}.$$

P7. 計算 n 階行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\2&2^2&2^3&\cdots&2^n\\3&3^2&3^3&\cdots&3^n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\n&n^2&n^3&\cdots&n^n\end{vmatrix}.$

解 注意到，該行列式的第 2 行到第 n 行均有公因子。將公因子提到行列式符號的外面，就得到范德蒙行列式的轉置行列式，再由行列式與其轉置行列式相等即得結果

$$D_n=2\times3\times\cdots\times n\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&2^2&\cdots&2^{n-1}\\1&3&3^2&\cdots&3^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&n&n^2&\cdots&n^{n-1}\end{vmatrix}=n!\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(i-j)=\prod_{k=1}^{n}(k!).$$

HD 1. 設矩陣 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{pmatrix}$，當 a 為何值時，方程 AX=B 無解？有唯一解？有無窮多解？在有解時求此方程的解。

解

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)(a-1),$$

當|A|≠ 0，即$a\neq-2$且$a\neq-1$時，矩陣 A 可逆，從而方程$AX=B$有唯一解$X=A^{-1}B$.
當$a\neq-2$且$a\neq-1$時，由

$$(A,B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\2&a&1&1&a\\-1&1&a&-a-1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3&-3&a-4\\0&0&a-1&1-a&0\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&0&1&2\\0&a+2&0&0&a-4\\0&0&1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&0&1&2\\0&1&0&0&\frac{a-4}{a+2}\\0&0&1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&\frac{3a}{a+2}\\0&1&0&0&\frac{a-4}{a+2}\\0&0&1&-1&0\end{array}\right)$$

得唯一解為

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1&\frac{3a}{a+2}\\0&\frac{a-4}{a+2}\\-1&0\end{pmatrix}.$$

令$X=(X_1,X_2)$，$B=(\beta_1,\beta_2)$，則 $AX=B\Leftrightarrow A(X_1,X_2)=(\beta_1,\beta_2)\ \Leftrightarrow AX_1=\beta_1$且$AX_2=\beta_2$.
于是方程$AX=B$有解當且僅當$AX_1=\beta_1$和$A\,X_2=\beta_2$均有解。

當$a=-2$時，由

$$(A,\beta_2)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&2\\2&-2&1&-2\\-1&1&-2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&2\\0&0&3&-6\\0&0&-3&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&2\\0&0&3&-6\\0&0&0&-6\end{array}\right)$$

可知，$AX_2=\beta_2$無解，因而當$a=-2$時，方程$AX=B$無解。

當$a=1$時，由

$$(A,B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\2&1&1&1&1\\-1&1&1&-2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\0&3&3&-3&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&1\\0&1&1&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

可知，$AX_1=\beta_1$有無窮多解 $X_1=(1,-k_1-1,k_1)^{\mathrm{T}}$，$AX_2=\beta_2$有無窮多解 $X_2=(1,-k_2-1,k_2)^{\mathrm{T}}$，其中$k_1$，$k_2\in R$， 所以方程$AX=B$有無窮多解。

HD 2. 設$A=(a_{ij})$是三階非零矩陣，$|A|$ 是A的行列式，A_{ij}是a_{ij}的代數餘子式，若$A_{ij}+a_{ij}$ $=0$ （$i,j=1,2,3$），則$|A|=$ ______.

解 $a_{ij}+A_{ij}=0\Rightarrow A_{ij}=-a_{ij}\Rightarrow A^*=-A^T\Rightarrow AA^*=-AA^T=|A|E$, 等式兩邊取行列式得 $-|A|^2=|A|^3$，于是$|A|=0$或$|A|=-1$.
當$|A|=0$時，由$-AA^T=0$得$a_{i1}^2+a_{i2}^2+a_{i3}^2=0(i=1,2,3)$，從而$a_{i1}=a_{i2}=a_{i3}=0(i=1,2,3)$，即$A=O$，與$A$是非零矩陣矛盾，所以$|A|=-1$.

HD 3. 求行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+\cos\alpha & 1+\cos\beta & 1+\cos\gamma & 1+\cos\theta \\ \cos\alpha+\cos^2\alpha & \cos\beta+\cos^2\beta & \cos\gamma+\cos^2\gamma & \cos\theta+\cos^2\theta \\ \cos^2\alpha+\cos^3\alpha & \cos^2\beta+\cos^3\beta & \cos^2\gamma+\cos^3\gamma & \cos^2\theta+\cos^3\theta \end{vmatrix}$.

解 該行列式每行的冪次是遞增的，從第 2 行開始，每行加上前一行的-1 倍，就得到一個范德蒙行列式

$$D_4 \xlongequal[r_4-r_3]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & \cos\theta \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma & \cos^2\theta \\ \cos^3\alpha & \cos^3\beta & \cos^3\gamma & \cos^3\theta \end{vmatrix}$$

$$=(\cos\theta-\cos\gamma)(\cos\theta-\cos\beta)(\cos\theta-\cos\alpha)(\cos\gamma-\cos\beta)(\cos\gamma-\cos\alpha)(\cos\beta-\cos\alpha).$$

HD 4. 設 n 階方陣 A 滿足 $A^2-A-2E=O$，證明矩陣A和$A+2E$ 均可逆，並求出A^{-1}和 $(A+2E)^{-1}$.

證明

$$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O},$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O},$$
$$\boldsymbol{A}\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E},$$

所以 A 可逆，且$\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{E})$.

又由 $A^2-A-2E=O$ 得$A^2-A-6E+4E=O$，即$(A-3E)(A+2E)=-4E$,

$\frac{1}{4}(3\mathrm{E}-\mathrm{A})(A+2E)=E$，所以$A+2E$可逆，且 $(A+2E)^{-1}=\frac{1}{4}(3\mathrm{E}-\mathrm{A})$.