# 線性代數 作業 5

說明：請按題目要求作答。計算題要給出計算過程，證明題要給出證明過程。其中 P (Pass) 類為必做題，HD (High Distinction) 類為選做題。

P 1. 在線性空間$P[x]_3$中定義線性變換$T$為$T\big(f(x)\big) = f(x+1) - f(x), \forall f(x) \in P[x]_3$，求線性變換$T$在基$\boldsymbol{\alpha_1} = 1, \boldsymbol{\alpha_2} = x, \boldsymbol{\alpha_3} = \frac{1}{2}x(x-1), \boldsymbol{\alpha_4} = \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$下的矩陣 A.

解

$$T(\boldsymbol{\alpha}_1) = 1-1 = 0 = 0\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\boldsymbol{\alpha}_2 + 0\boldsymbol{\alpha}_3 + 0\boldsymbol{\alpha}_4 = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$T(\boldsymbol{\alpha}_2) = (x+1) - x = 1 = 1\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\boldsymbol{\alpha}_2 + 0\boldsymbol{\alpha}_3 + 0\boldsymbol{\alpha}_4 = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$T(\boldsymbol{\alpha}_3) = \frac{1}{2}(x+1)x - \frac{1}{2}x(x-1) = x = 0\boldsymbol{\alpha}_1 + 1\boldsymbol{\alpha}_2 + 0\boldsymbol{\alpha}_3 + 0\boldsymbol{\alpha}_4 = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$T(\boldsymbol{\alpha}_4) = \frac{1}{6}(x+1)x(x-1) - \frac{1}{6}x(x-1)(x-2) = \frac{1}{2}x(x-1)$$

$$= 0\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\boldsymbol{\alpha}_2 + 1\boldsymbol{\alpha}_3 + 0\boldsymbol{\alpha}_4 = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

於是

$$T(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

即線性變換 T 在基$\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}, \boldsymbol{\alpha_4}$下的矩陣為

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

P 2. 設$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$R^3$上的一個基, 線性變換$T$在該基下的矩陣為 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2&0&2\\1&-3&-2\\-2&2&0\end{pmatrix}$，求$T$在新基$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$下的矩陣.

解 由題設得

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\2&0&1\end{pmatrix},$$

即從基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的過度過渡矩陣為

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\2&0&1\end{pmatrix}.$$

設 T 在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的矩陣為 B，則有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2&1&-1\\2&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&2\\1&-3&-2\\-2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-10&5\\11&12&-3\\8&16&-8\end{pmatrix}.$$

P 3. 設 A 為已知的$m\times n$向量$\mathrm{V}=\{\mathrm{A}x|x\in\mathrm{R}^n\}$.

(1) 驗證 V 對通常的矩陣加法和數乘運算構成線性空間；

(2) 當 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2&1&2&-2\\1&-2&3&-1\\3&-1&5&-3\end{pmatrix}$ 時， 求 V 的一個基.

**解** (1) 對任意$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，存在向量$x_1,x_2\in R^n$，使得$\boldsymbol{\alpha}=Ax_1,\boldsymbol{\beta}=Ax_2$.

于是$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=Ax_1+Ax_2=A(x_1+x_2),x_1+x_2\in R^n$，所以$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$.

對任意常數$k\in R,k\boldsymbol{\alpha}=k(Ax_1)=A(kx_1),kx_1\in R^n$，所以$k\boldsymbol{\alpha}\in V$. 因此$V$對通常的矩陣加法和數乘運算構成線性空間.

(2) 當 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&2&-2\\1&-2&3&-1\\3&-1&5&-3\end{pmatrix}$ 時, 將$A$列分塊為$\mathrm{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$,則

$$\mathrm{V}=\{\mathrm{A}x|x\in\mathrm{R}^4\}=\{x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4|x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T\in\mathrm{R}^4\},$$

即V是由向量組$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$生成的向量空間,所以要V的一個基,只需要求出向量組$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的一個極大無關組即可. 由

$$A=\begin{pmatrix}2&1&2&-2\\1&-2&3&-1\\3&-1&5&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-1\\0&5&-4&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

可得向量組$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_4}$,的一個極大無關組為

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}.$$

P 4. 設由 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\5\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\\6\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}-3\\-1\\-5\\-7\end{pmatrix}$ 生成的向量空間為V，求空間V的維數及它的一組基，并用基表示其餘向量.

**解** 對$(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_4},\boldsymbol{\alpha_5})$作初等行變換,可得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\1&-1&3&-2&-1\\2&1&3&5&-5\\3&1&5&6&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-3r_1}]{r_2-r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&-2&2&-6&2\\0&-1&1&-3&1\\0&-2&2&-6&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1-r_2\\ r_3+r_2\\ r_4+2r_2}]{r_2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}\begin{pmatrix}1&0&2&1&-2\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2}$是V的一組基, dim(V) = 2，且

$$\boldsymbol{\alpha_3}=2\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_4}=\boldsymbol{\alpha_1}+3\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_5}=-2\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_2}.$$

$$\mathrm{V}=\{\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2}|k_1,k_2\in R\}.$$

P 5. 設向量$\eta$在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 與 基 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 下有相同的座標，則$\eta=$ ____________.

解 $k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2}+k_3\boldsymbol{\alpha_3}=k_1\boldsymbol{\beta_1}+k_2\boldsymbol{\beta_2}+k_3\boldsymbol{\beta_3}$

即 $k_1(\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\beta_1})+k_2(\boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\beta_2})+k_3(\boldsymbol{\alpha_3}-\boldsymbol{\beta_3})=\mathbf{0}$

由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbf{R},$$

從而

$$\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbf{R}.$$

HD 1. 在$R^3$中取兩個基

ⅰ：$\boldsymbol{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$

(1) 求基ⅰ到基ⅱ的過渡矩陣 P;

(2) 向量在基ⅰ下的座標為$\begin{pmatrix} 1 \\ 19 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求該向量在基ⅱ下的座標.

解 (1)令$\mathrm{A} = (\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}, \boldsymbol{\alpha_4}), \mathrm{B} = (\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}, \boldsymbol{\beta_3}, \boldsymbol{\beta_4})$, 設由基ⅰ到基ⅱ的過渡矩陣為 P, 則 B=AP, 故

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \frac{16}{13} & 1 & 1 & 1 \\ \frac{19}{13} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{20}{13} & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{9}{13} & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2)設向量在基ⅱ的座標為

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \text{ 則 } \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 19 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 19 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -23 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

HD 2. 在線性空間$P[x]_3$中取兩個基

ⅰ：$1, x, x^2, x^3$和ⅱ：$1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3$.

(1) 求從基ⅰ到基ⅱ的過渡矩陣 P;

(2) 已知$f(x)\in P[x]_3$在基 i 下的座標為$\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\5\end{pmatrix}$, $g(x)\in P[x]_3$在基 ii 下的座標為$\begin{pmatrix}7\\0\\8\\2\end{pmatrix}$, 求

$f(x)+g(x)$分別在基 i 和基 ii 下的座標.

解

$$(1)\ (1,\ 1+x,\ 1+x+x^2,\ 1+x+x^2+x^3)=(1,\ x,\ x^2,\ x^3)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

故

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

(2)由於

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

故

$$f(x)=(1,\ x,\ x^2,\ x^3)\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\5\end{pmatrix}=(1,\ 1+x,\ 1+x+x^2,\ 1+x+x^2+x^3)\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\5\end{pmatrix}$$

$$=(1,\ 1+x,\ 1+x+x^2,\ 1+x+x^2+x^3)\begin{pmatrix}1\\2\\-7\\5\end{pmatrix},$$

$$g(x)=(1,\ x,\ x^2,\ x^3)\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}7\\0\\8\\2\end{pmatrix}=(1,\ x,\ x^2,\ x^3)\begin{pmatrix}17\\10\\10\\2\end{pmatrix}.$$

$f(x)+g(x)$的基 i 的座標為

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}17\\10\\10\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18\\10\\8\\7\end{pmatrix}.$$

在基 ii 下的座標為

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-7\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\0\\8\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\2\\1\\7\end{pmatrix}.$$

HD 3. 設$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots$，$\boldsymbol{\alpha}_n$是線性空間$V_n$的一個基，證明$\boldsymbol{2\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_3, \dots$，$\boldsymbol{n\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1$ 也是$V_n$的一個基，并求由基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots$，$\boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{2\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_3, \dots$，$\boldsymbol{n\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1$的過渡矩陣 P.

證明

$$(2\boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, n\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n & 0 \end{pmatrix},$$

由

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \cdot n! \neq 0$$

可知，矩陣 $\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可逆，於是$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{2\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_3, \dots, \boldsymbol{n\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1) \cdot K^{-1}$.

因此向量組$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots$，$\boldsymbol{\alpha}_n$與向量組$\boldsymbol{2\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_3, \dots$，$\boldsymbol{n\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1$等價，從而$\boldsymbol{2\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_3, \dots$，$\boldsymbol{n\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1$也是$V_n$的一個基，並且過渡矩陣為

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n & 0 \end{pmatrix}.$$