多元函數的微分

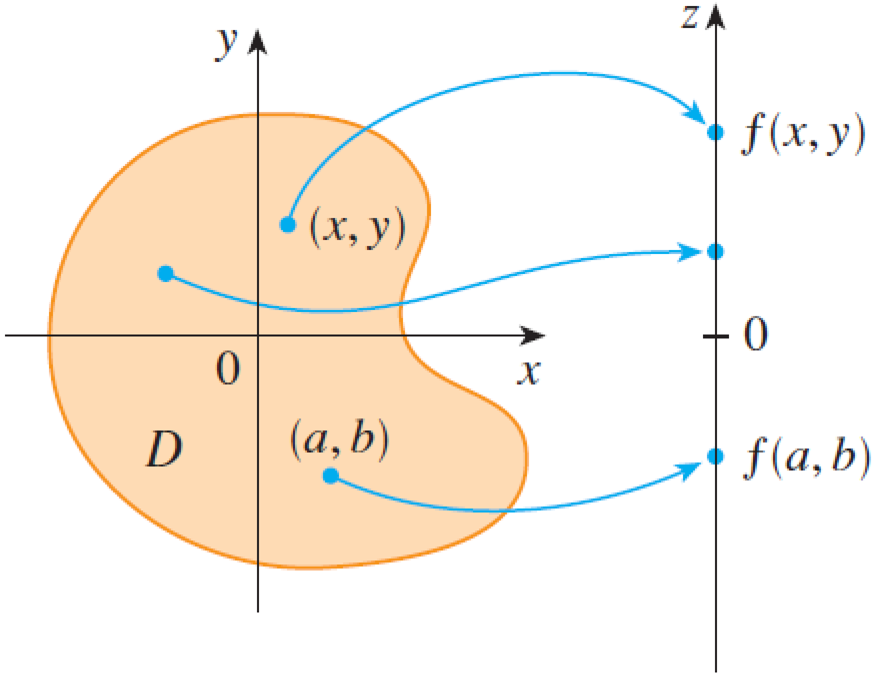
單元九

+ Outline

- 多元函數
- 偏導數
- 鏈式法則
- 最大值最小值
- 拉格朗日乘數法

雙變量函數 (Functions of Two Variables) 12.1

- 一個雙變量函數 f 是對集合 D 中的每個數 (x, y) 指定一個實數 z，記作 $z = f(x, y)$。其中集合 D 稱為函數 f 的定義域， f 的值域則為所有 $f(x, y)$ 的集合。
  - 自變量: x, y
  - 因變量: z



例1

- 求以下函數的定義域及 $f(3,2)$:

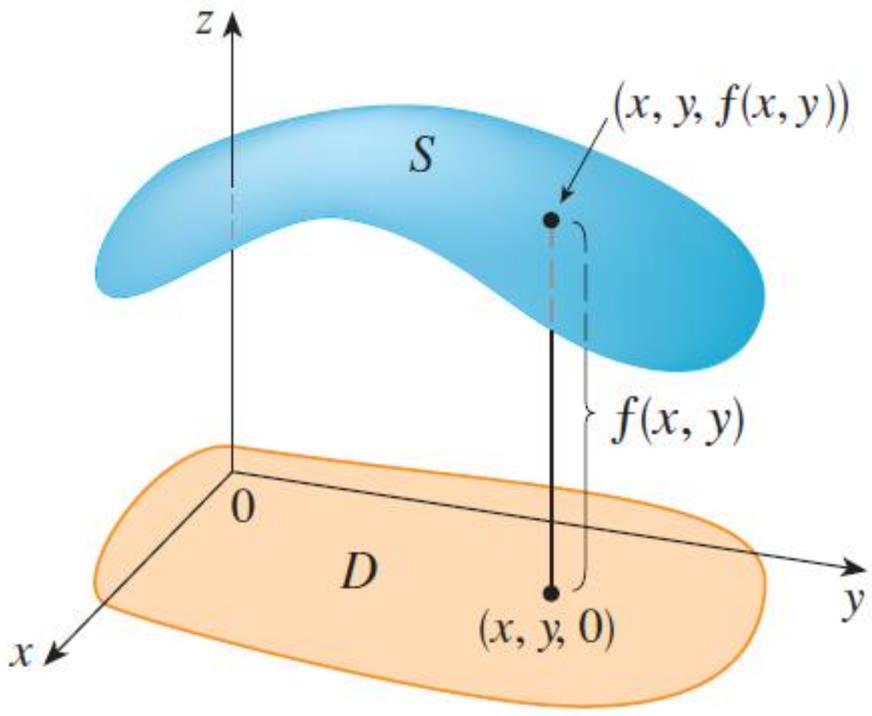
$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$$

Solution:

$$f(3,2)=\frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

+ 雙變量函數的圖象

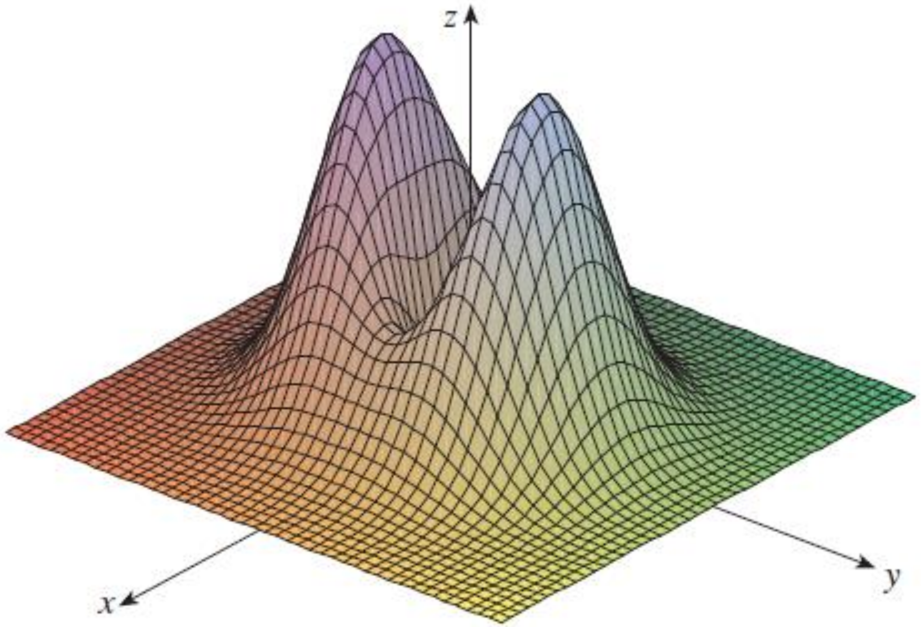
- 若 D 為一個雙變量函數 f 的定義域，則 f 的圖象即為 R^3中的所有點 (x, y, z) 形成的集合。
  - 其中 $z = f(x, y)$



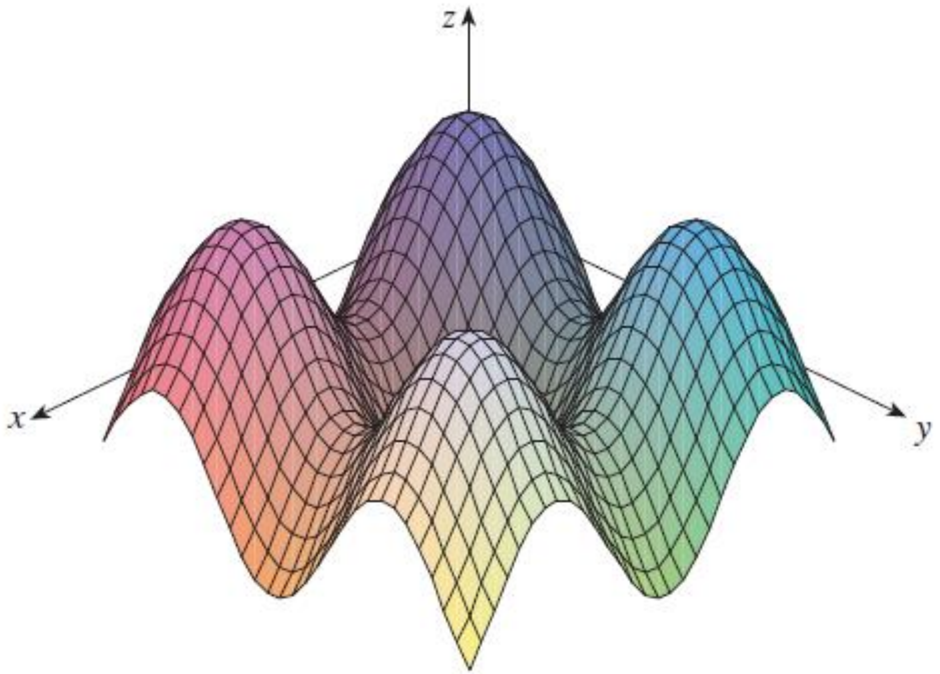
+ 例2

- 試作出函數 $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ 的圖象。

+ 範例



(a) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$

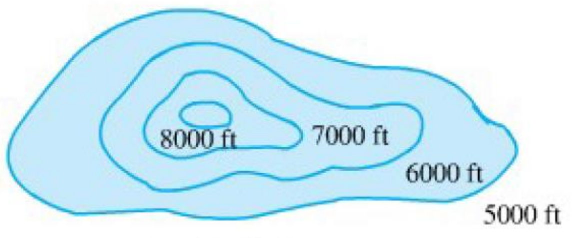


(c) $f(x, y) = \sin x + \sin y$

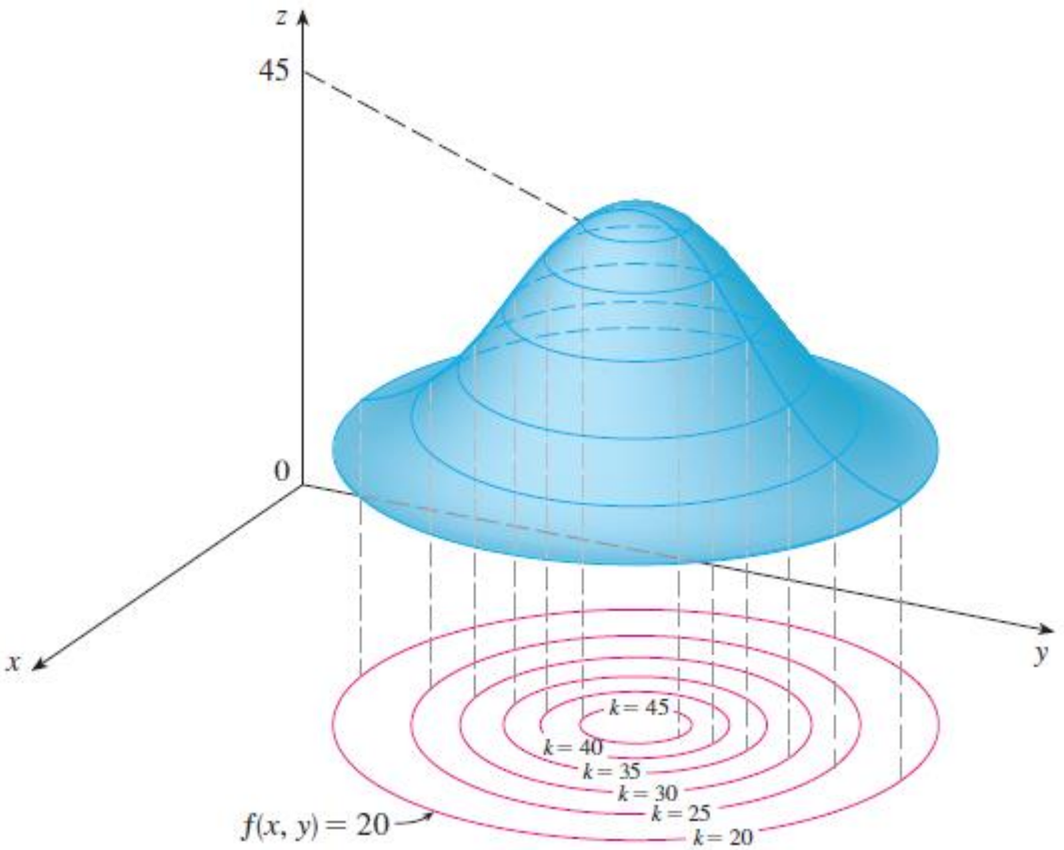
等位線 (Level Curves)

- 一個雙變量函數 f 的等位線為平面上滿足方程式 $f(x, y) = k$ 之所有點的集合 (k 為常數)。

帶等位線的等高線圖：

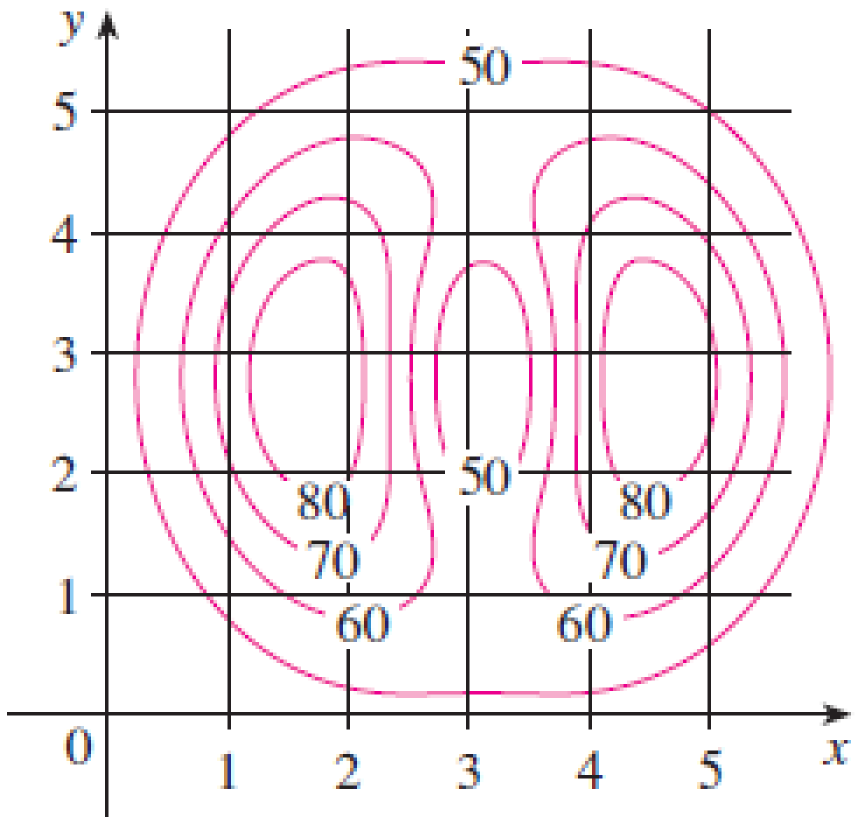


Contour map
with level curves



例3

- 右圖為函數 f 的等高線圖試估計 $f(1, 3)$ 與 $f(4, 5)$ 的值。



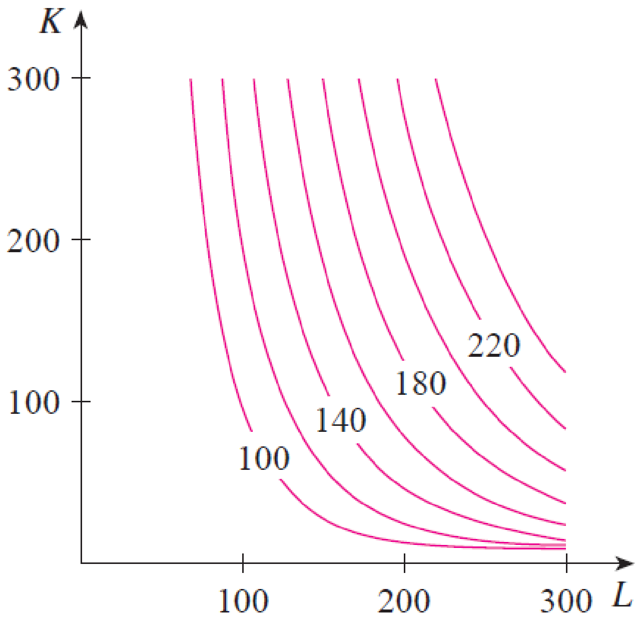
應用範例

- 柯布-道格拉斯(**Cobb-Douglas**)生產函數模型:

$$P(L,K)=bL^{a}K^{1-a}$$

- 其中 L 是勞動力，K 是資本量，b 是技術水平系數，a 是勞動力的產出彈性系數。b 與 a ($0 < a < 1$)，由企業的具體情形決定，$P(L, K)$ 為產出。

例: $P(L,K)=1.01L^{0.75}K^{0.25}$

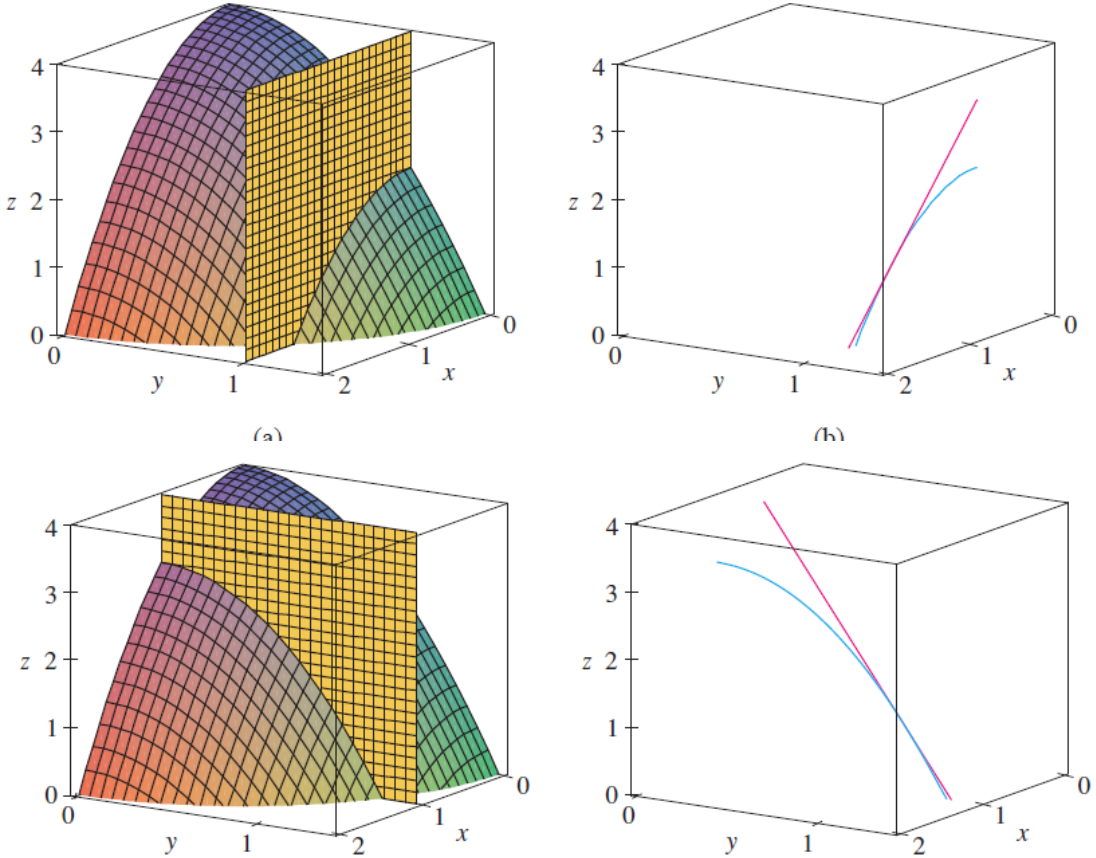


偏導數 (Partial Derivatives) 12.2

- 若 f 為雙變數函數 $z = f(x, y)$, 它的偏導數 f_x 和 f_y 定義如下：

$$f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$



- 計算方式：當對變數 x 作偏微分時，將變數 y 視作常數。(反之亦然)
- 而 n 個變數函數的偏導數，只需將對應變數以外的視作常數計算即可。

+ 偏導數 (Partial Derivatives)

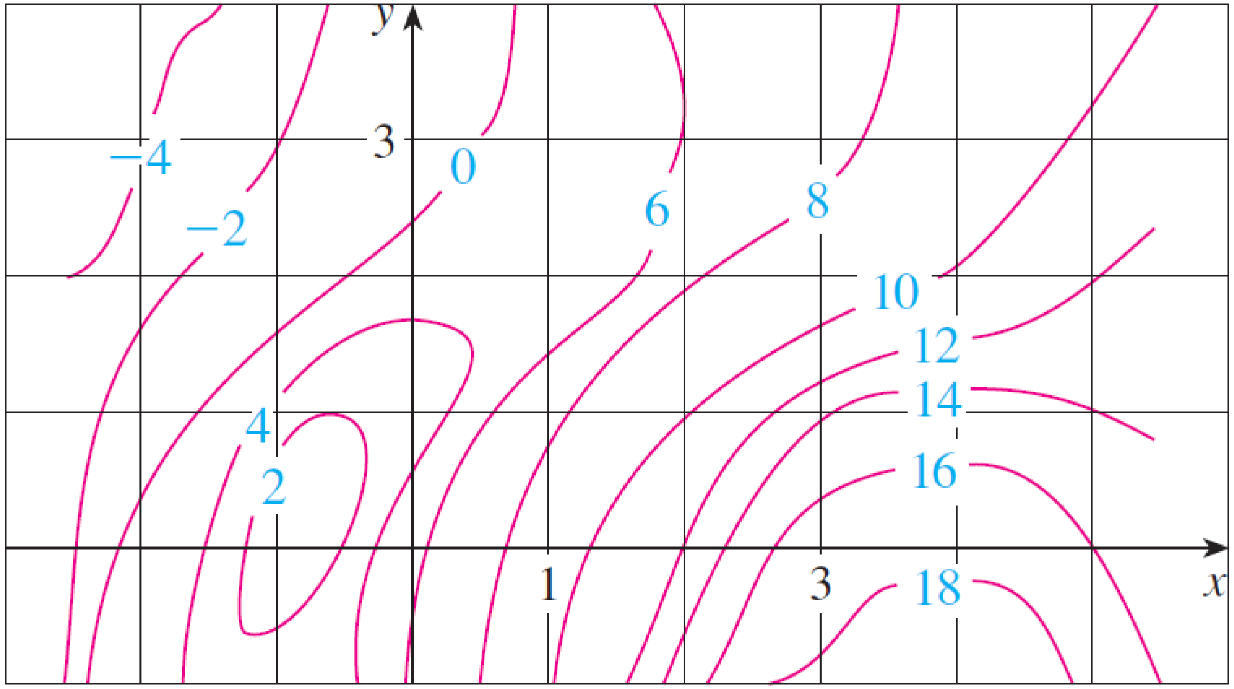
- 若 f_x 為 z 對 x 的偏導數:
- 讀作 ‘偏 z 偏 x’ 或 ‘partial z partial x’
- 記法：

$$f_x(x,y) = f_x = z_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$$

$$f_y(x,y) = f_y = z_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

例4

- 下圖為函數 f 的等高線圖試估計 $f_x(2, 1)$ 與 $f_y(2, 1)$ 的值。



Solutions:

$\boldsymbol{Given\ f(2,1) \approx 10}$:

$\because f(2.6,1) \approx 12, f(1.2,1) \approx 8$

$m_1 = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \approx \dfrac{12-10}{2.6-2} = \dfrac{2}{0.6} = \dfrac{10}{3} \approx 3.3$

$m_2 = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \approx \dfrac{10-8}{2-1.2} = \dfrac{2}{0.8} = \dfrac{5}{2} = 2.5$

$\therefore f_x(2,1) \approx \dfrac{m_1+m_2}{2} = 2.9$

$\because f(2,0) \approx 12, f(2,1.8) \approx 8$

$m_3 = \dfrac{\Delta f}{\Delta y} \approx \dfrac{8-10}{1.8-1} = \dfrac{-2}{0.8} = -\dfrac{5}{2} \approx -2.5$

$m_4 = \dfrac{\Delta f}{\Delta y} \approx \dfrac{10-12}{1-0} = -2$

$\therefore f_y(2,1) \approx \dfrac{m_3+m_4}{2} = -2.3$

例5

- 若 $f(x,y)=x^3+x^2y^3-2y^2$，求：

A. $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$

B. $f_x(2,1)$和$f_y(2,1)$

Solutions:

A.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+2xy^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3x^2y^2-4y$$

B.

$$f_x(2,1)=3(2)^2+2(2)(1)^3=16$$

$$f_y(2,1)=3(2)^2(1)^2-4(1)=8$$

例6

- 求下列函數的 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$：

A. $z = \sin\left(\frac{x}{1+y}\right)$

B. $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$

Solutions:

A.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{1}{1+y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{-x}{(1+y)^2}$$

B.

$$\because 3x^2 + 0 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy}$$

$$\because 0 + 3y^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial y} + 6xz + 6xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy}$$

鏈式法則(Chain Rule)

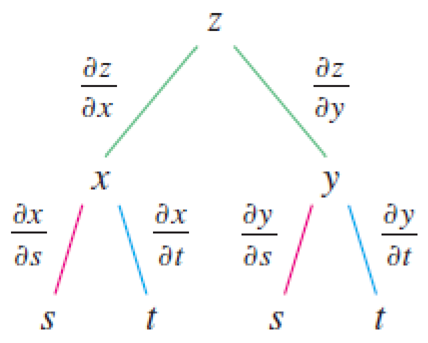
- 形式1: 若 $z=f(x,y)$為變數 x 和 y 的可微分函數，且 $x=g(t), y=h(t)$ 為變數 t 的可微分函數，則

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

- 形式2: 若 $z=f(x,y)$為變數 x 和 y 的可微分函數，且 $x=g(s,t), y=h(s,t)$為變數 s 和 t 的可微分函數，則

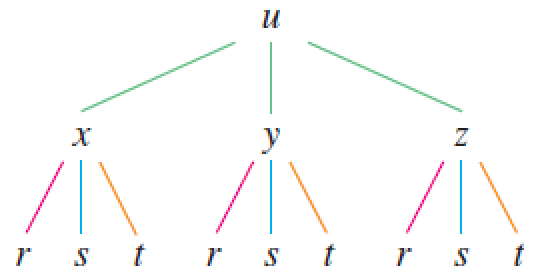
$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$



例7

- 已知 $u = x^4 y + y^2 z^3$，其中 $x = rse^t$、$y = rs^2 e^{-t}$、$z = r^2 s \sin t$。求 $\frac{\partial u}{\partial s}$ 於 $r = 2$、$s = 1$、 $t = 0$ 時的值。



Solution:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= 4x^3 y \cdot re^t + (x^4 + 2yz^3)\cdot 2rse^{-t} + 3y^2 z^2 \cdot r^2 \sin t$$

$\because$ When $r = 2$、$s = 1$、 $t = 0$,

$$x = 2, y = 2, z = 0$$

$$\therefore \left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{r=2,s=1,t=0} = 4(2)^3(2)\cdot(2) + (2^4 + 0)\cdot 2(2) + 0\cdot 0 = 192$$

+ 二階偏導數

- 給定函數 $z = f(x, y)$, 它的二階偏導數定義如下：
  - $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} = (z_x)_x$
  - $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{xy} = (z_x)_y$
  - $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{yx} = \left(z_y\right)_x$
  - $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy} = \left(z_y\right)_y$
- 若 $f_{xy}(x, y)$ 與 $f_{yx}(x, y)$ 在 D 內連續，則 $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$。

例8

- 求函數 $z = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$ 的二階偏導數。

Solution:

$$\because \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^3, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4y$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4.$$

雙變量的極值

- 設函數 $z = f(x,y)$ 在點 (x_0,y_0)的某鄰域內有定義，如果對於該鄰域內的任何點(x,y)恒有$f(x,y) \le f(x_0,y_0)$，則稱函數 z 於點(x_0,y_0)處有極大值$f(x_0,y_0)$。

  (同理，$f(x,y) \ge f(x_0,y_0)$時有極小值)

- 函數 $z = f(x,y)$ 在點 (x_0,y_0)處有偏導數，若

$$f_x(x_0,y_0) = 0, \qquad f_y(x_0,y_0) = 0$$

則(x_0,y_0)為穩定點。

二階偏導檢驗法 (12.8C)

- 令 $D = f_{xx}f_{yy} - [f_{xy}]^2$, 則：
  - $D > 0$ 且 $f_{xx} > 0$ 時 f 有極小值。
  - $D > 0$ 且 $f_{xx} < 0$ 時 f 有極大值。
  - $D < 0$ 時 (x_0, y_0) 處為 f 的鞍點 (非最大值或最小值)。
  - $D = 0$, 檢驗法無效。

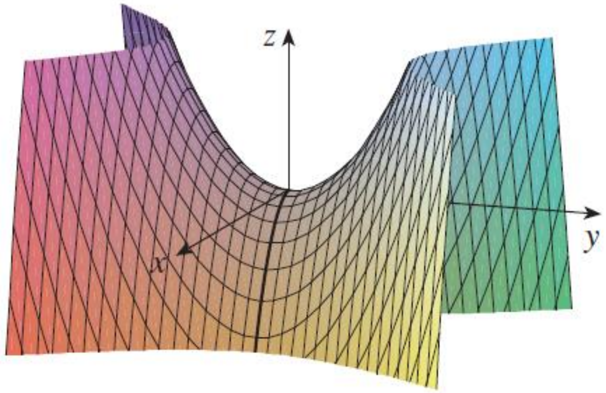
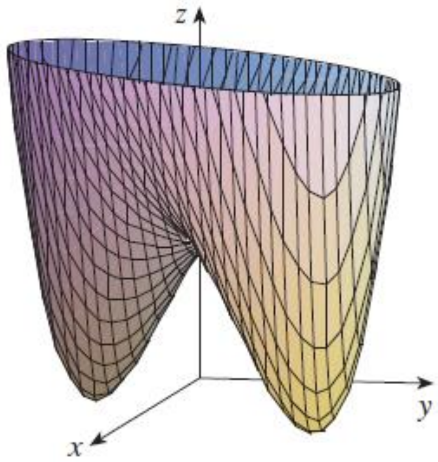
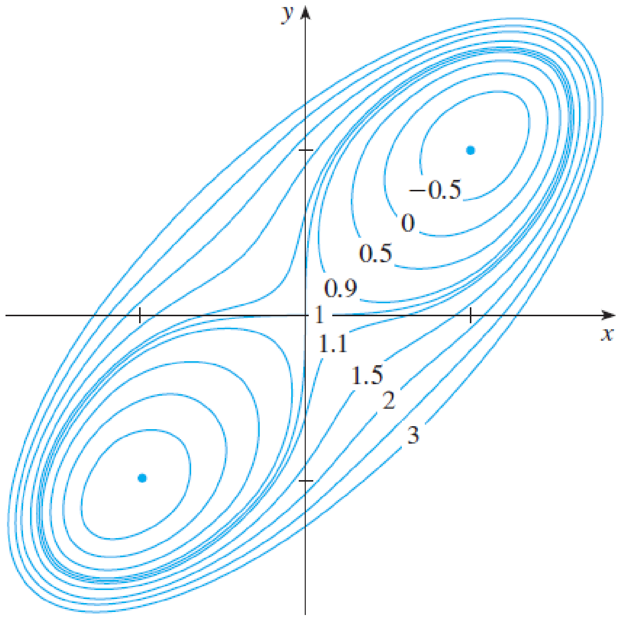


FIGURE 3
$z = y^2 - x^2$

例9

- 求函數 $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$的極值。





條件極值

- 在討論極值時，除定義域外無其他限制時，這類極值問題稱為無條件極值問題；若受到其他附加約束條件的限制，則稱為條件極值問題。

+ 例10

- 一個無蓋長方形盒子是由 12 平方米的材料製造而成。求此長方形盒子的最大容積。

Solution:

優化: $V = xyz;$

約束: $2xz + 2yz + xy = 12.$ $\Rightarrow z = \frac{12-xy}{2x+2y}$

$$V = xyz = xy \cdot \frac{12 - xy}{2x + 2y} = \frac{12xy - x^2y^2}{2x + 2y}$$

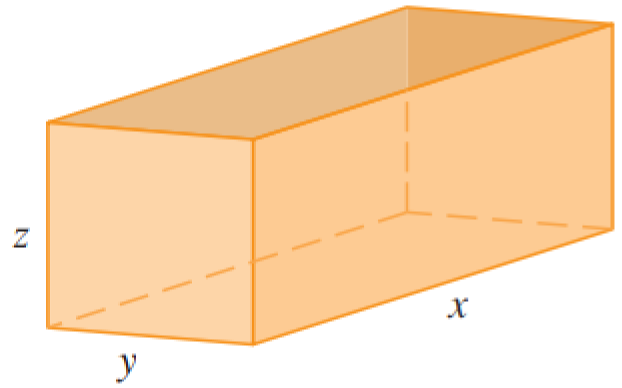
$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12 - x^2 - 2xy)}{2(x + y)^2} = 0 \cdots ①, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(12 - y^2 - 2xy)}{2(x + y)^2} = 0 \cdots ②$$

$$\begin{cases} 12 - x^2 - 2xy = 0 \cdots ① \\ 12 - y^2 - 2xy = 0 \cdots ② \end{cases}$$

① − ②: $x = y$

把 $x = y$ 代入①：$x = 2 \Rightarrow y = 2, z = 1$

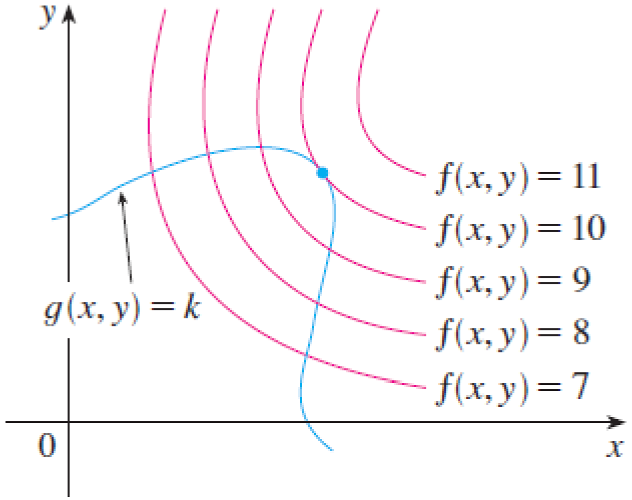
$\therefore V_{max}(2,2,1) = 4$



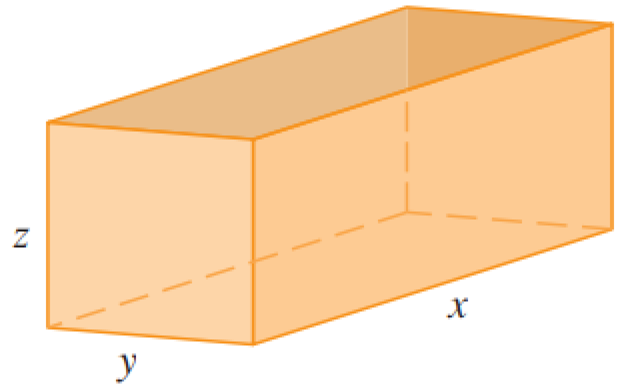
+ 拉格朗日乘數法 (Method of Lagrange Multipliers)

- 設函數 $f(x,y)$ 與 $\varphi(x,y)$ 具有連續的偏導數，則欲求函數 $f(x,y)$ 在約束條件 $\varphi(x,y)=0$ 下的極值點其步驟如下：
  1. 作拉格朗日函數 $Z(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$
  2. 求 $Z(x,y,\lambda)$可能的極值點, 即:

$$\begin{cases} Z_x(x,y,\lambda)=0 \\ Z_y(x,y,\lambda)=0 \\ Z_\lambda(x,y,\lambda)=0 \end{cases}$$



例10 (拉格朗日乘數法)



例11

- 某企業生產兩種商品的日產量為 x 和 y (件)，總成本函數 $C(x,y)=8x^2-xy+12y^2$ (元)，商品的限額為 $x+y=42$，求最小成本。

Solution:

優化: $C(x,y)=8x^2-xy+12y^2$

約束: $x+y=42$ $\quad\Rightarrow \varphi(x,y)=x+y-42=0$

$$\begin{aligned} Z(x,y,\lambda) &= C(x,y)+\lambda\varphi(x,y) \\ &= 8x^2-xy+12y^2+\lambda(x+y-42) \end{aligned}$$

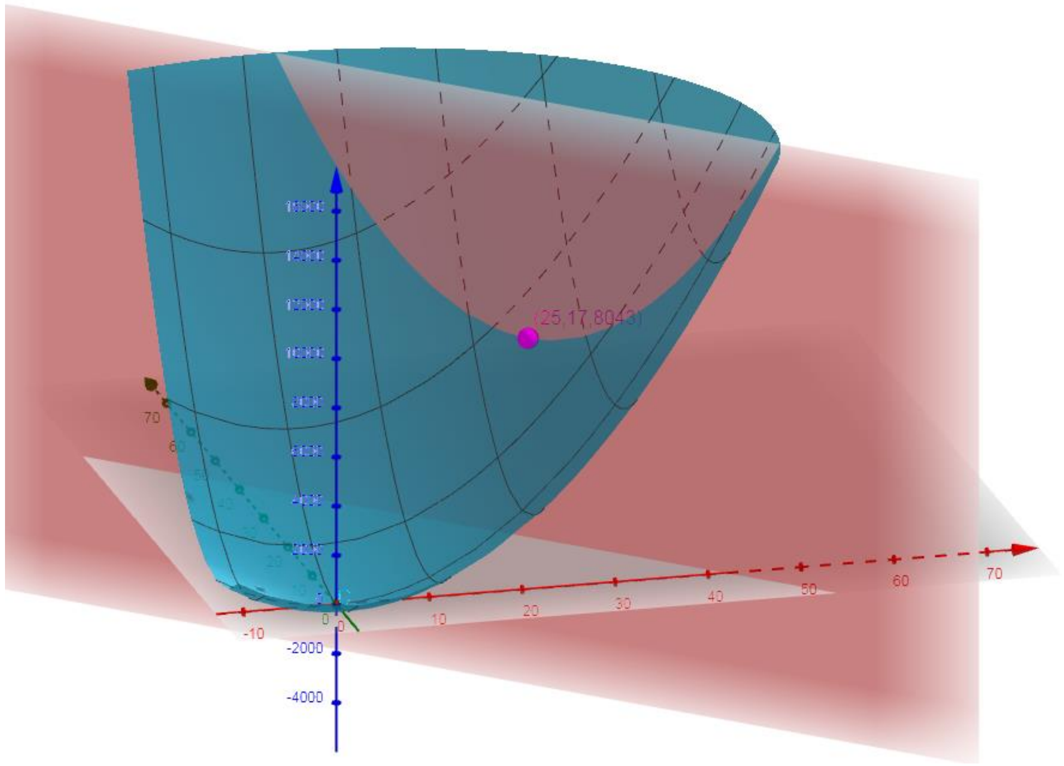
$$\begin{cases} Z_x(x,y,\lambda)=16x-y+\lambda & =0 \\ Z_y(x,y,\lambda)=-x+24y+\lambda & =0 \\ Z_\lambda(x,y,\lambda)=x+y-42 & =0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x=25 \\ y=17 \end{cases}$$

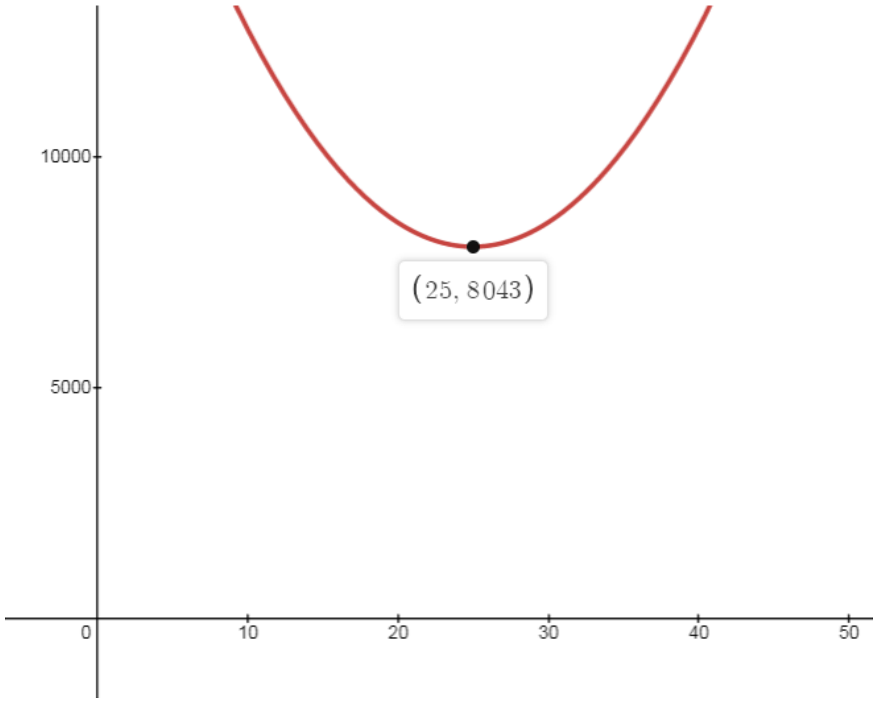
$\therefore C_{min}(25,17)=8043$

換元 vs 拉格朗日乘數法 (例11)

- 優化：$C(x,y) = 8x^2 - xy + 12y^2$
- 約束：$x + y = 42$



$$C(x) = 8x^2 - x(42-x) + 12(42-x)^2$$



教材對應閱讀章節及練習

- 12.1, 12.2, 12.6(~例4), 12.8, 12.9
- 對應習題: (可視個人情況定量)
  - 12.1: 1-4
  - 12.2: 1-16
  - 12.6: 1-17
  - 12.8: 1-6
  - 12.9: 1-7