線性代數 作業 4

說明：請按題目要求作答。計算題要給出計算過程，證明題要給出證明過程。其中 P (Pass) 類為必做題，HD (High Distinction) 類為選做題。

P 1. 設 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}$，求向量$\gamma$，使得$\gamma$與$\alpha$和$\beta$均正交.

P 2. 試用施密特法把下列向量組正交化

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix};$$

P 3. 求下列矩陣的特徵值和特徵向量

(1) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&2&0&7\\0&0&3&4\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

P 4. 設 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ 求 A^{100}.

P 5. 判斷矩陣$A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$能否化為對角矩陣,并說明理由.

P 5. 試求正交陣 P 將對稱陣 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ 化為對角陣.

P 6. 試用矩陣記號表示下列二次型

(1) $f=2x_1^2-2x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+6x_2x_3$；

(2) $f=-x^2+2y^2-3z^2+2xy-6xz-4yz$；

(3) $f=x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2+6x_2x_3$.

P 7. 求一個正交變換把下列二次型化為標準型

(1) $f=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_2x_3$;

(2) $f=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

P 8. 判定下列二次型的正定性

(1) $f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$;

(2) $f=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$;

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$.

HD 1. 設 3 階矩陣 A 的特徵值為-1, 1, -2, 求$|(2A)^*+3A-2E|$.

HD 2. 設 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&1\end{pmatrix}$, 求$\varphi(A)=A^{10}-6A^9+5A^8$.

HD 3. 已知二次型 $f=4x_1^2+\left(2+\frac{a}{2}\right)x_2^2+\left(2+\frac{a}{2}\right)x_3^2+(4-a)x_2x_3$.

(1) 求它所所對應的矩陣 A 及其秩 R(A);

(2) 當 R(A)=2 時求正交變換 x=Qy, 使得二次型可化為標準形.