預備知識

單元零

Outline

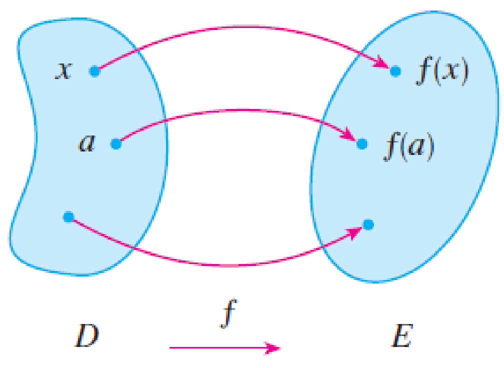
- 函數
- 定義域與值域
- 奇偶性
- 圖象的轉換
- 合成函數
- 反函數

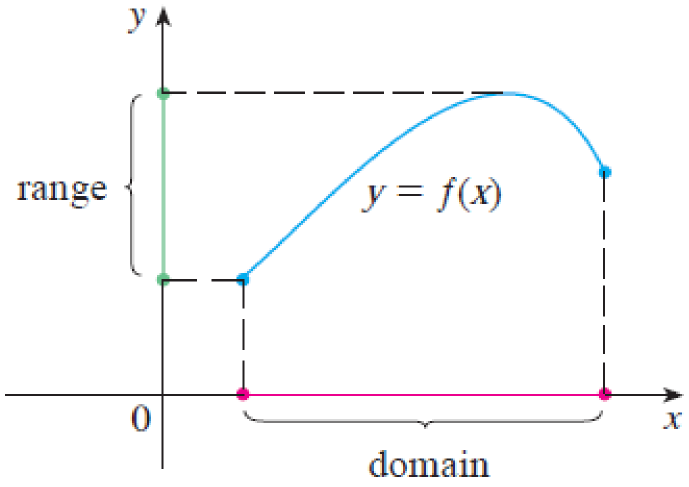
+ 函數 function

■ 定義：

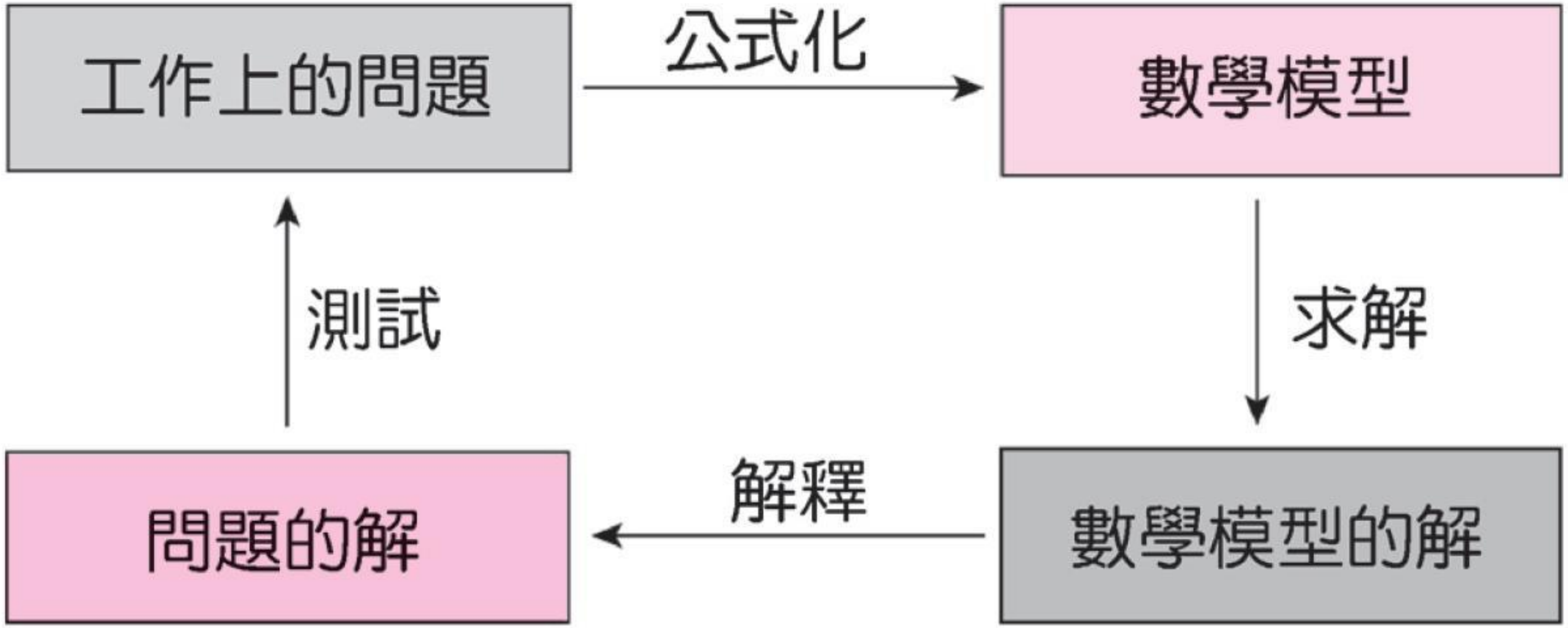
函數 (function) f 定義了自變量 x 與因變量 y 之間的對應規則，每個 x 值對應一且唯一的 y 值，並用符號 $y = f(x)$ 表示，$f(x)$ 讀作「f of x」。

- 自變量 x 的集合 D 稱為此函數的定義域 (Domain) 。
- 因變量 y 的集合 E 稱為此函數的值域 (Range) 。





建模過程



例1: 定義域

- 求定義域:

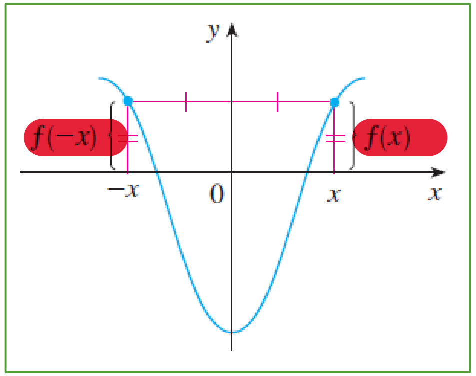
A. $f(x)=\sqrt{x+2}$

B. $g(x)=\frac{1}{x^2-x}$

函數的對稱及奇偶性

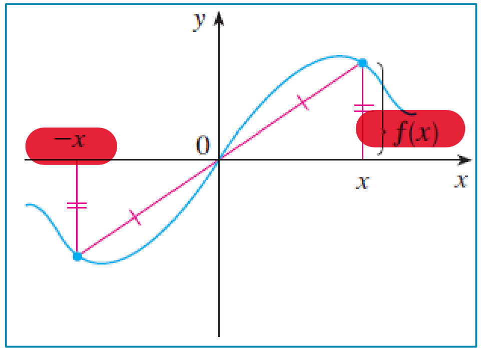
- 函數 f 稱作偶函數，若定義域內所有 x 皆滿足:

$$f(-x) = f(x)$$



- 函數 f 稱作奇函數，若定義域內所有 x 皆滿足:

$$f(-x) = -f(x)$$



+ 例2: 奇偶性

- 判斷下列函數的奇偶性：

A. $f(x) = x^5 + x$

B. $g(x) = 1 - x^4$

C. $h(x) = 2x - x^2$

函數類型

- 模型:
  - 線性函數
  - 多項式函數
  - 冪函數
  - 有理函數
  - 三角函數
  - 指數函數
  - 對數函數
- 分段函數
- 合成函數
- 反函數

例3:分段函數

- 對於函數

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & if\ x \leq -1 \\ x^2 & if\ x > -1 \end{cases}$$

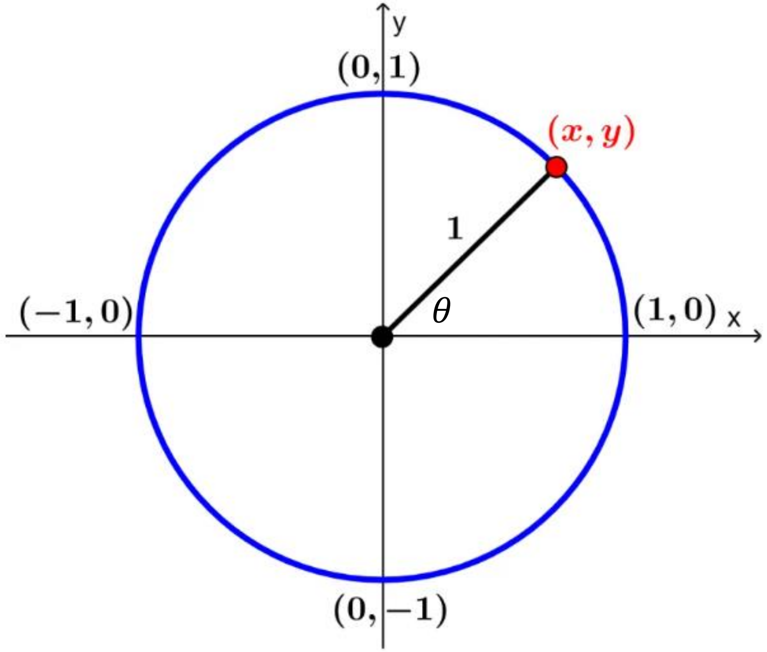
求 $f(-2)$, $f(-1)$, 與 $f(0)$ 的值並畫圖。

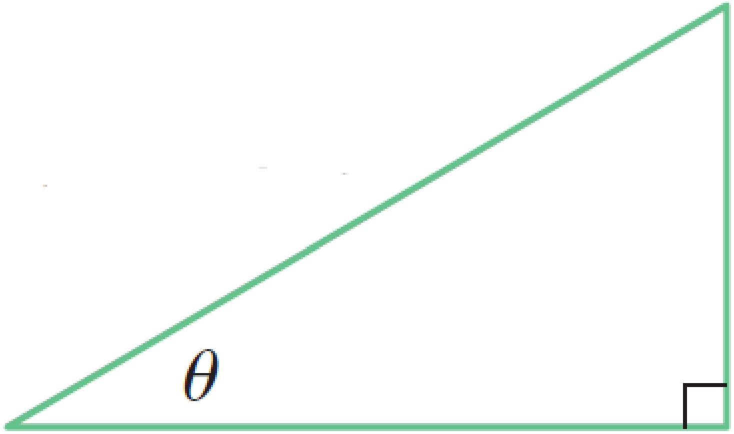
三角函數

$$\sin\theta = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}$$



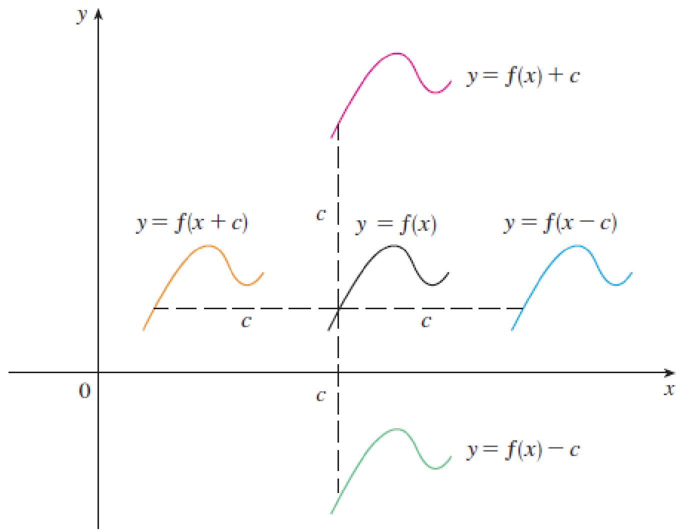


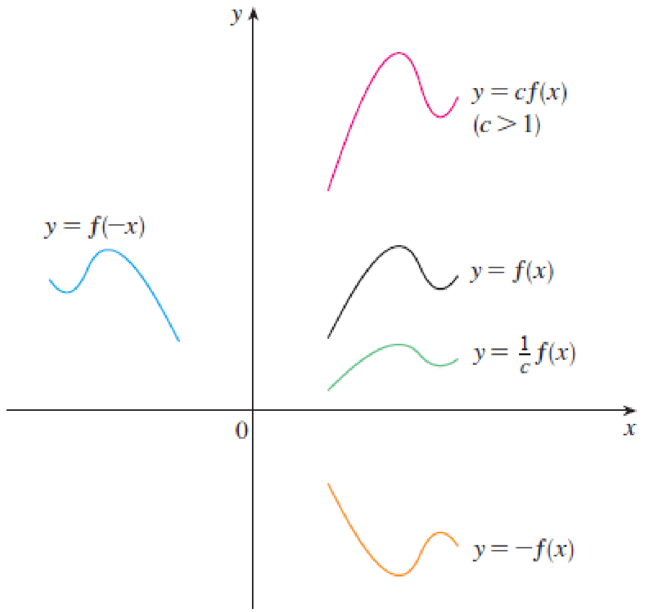
注:

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}, \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

函數的轉換

- 已知常數 c > 0，則圖象:
  - $y = f(x) + c$ 是 $f(x)$ 的圖象向上平移 c 個單位
  - $y = f(x) - c$ 是 $f(x)$ 的圖象向下平移 c 個單位
  - $y = f(x + c)$ 是 $f(x)$ 的圖象向左平移 c 個單位
  - $y = f(x - c)$ 是 $f(x)$ 的圖象向右平移 c 個單位
  - $y = -f(x)$ 是 $f(x)$ 的圖象以 x 軸作反射
  - $y = f(-x)$ 是 $f(x)$ 的圖象以 y 軸作反射
  - $y = cf(x)$ 是 $f(x)$ 的圖象垂直“伸展”或“壓縮”至原來的 c 倍
  - $y = f(cx)$ 是 $f(x)$ 的圖象水平“伸展”或“壓縮”至原來的 c 倍





例4: 函數的轉換

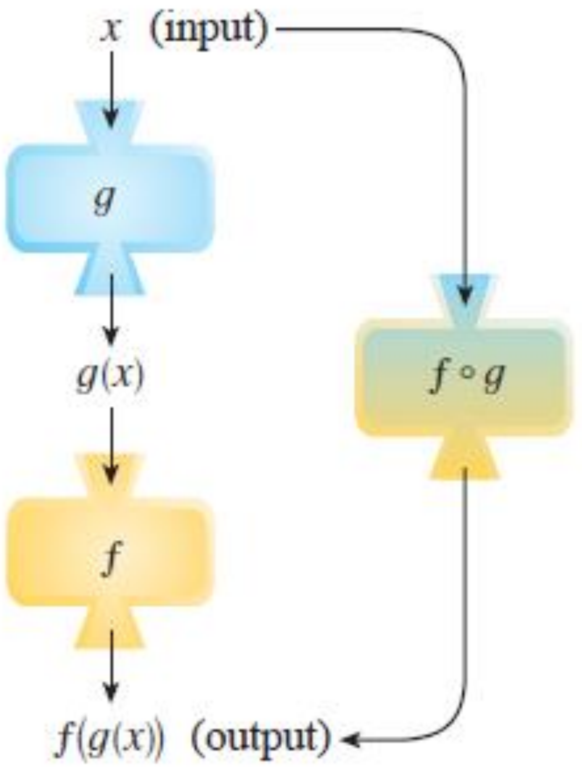
- 利用 $y = \sqrt{x}$ 的圖象及函數的圖象轉換性質畫出下列各圖:

A. $y = \sqrt{x} - 2$
B. $y = \sqrt{x - 2}$
C. $y = -\sqrt{x}$
D. $y = 2\sqrt{x}$
E. $y = \sqrt{-x}$

函數的合成

- 給定兩函數 f 和 g，我們稱 $f \circ g$ 為 f 和 g 的**合成函數 (composition function)**，其中

$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$$



例5:合成函數

A. 已知 $f(x)=x^2$ 與 $g(x)=x-3$, 求 $f\circ g$ 與 $g\circ f$ 。

B. 已知 $f(x)=\sqrt{x}$ 與 $g(x)=\sqrt{2-x}$, 求下列各項:

a) $f\circ g$

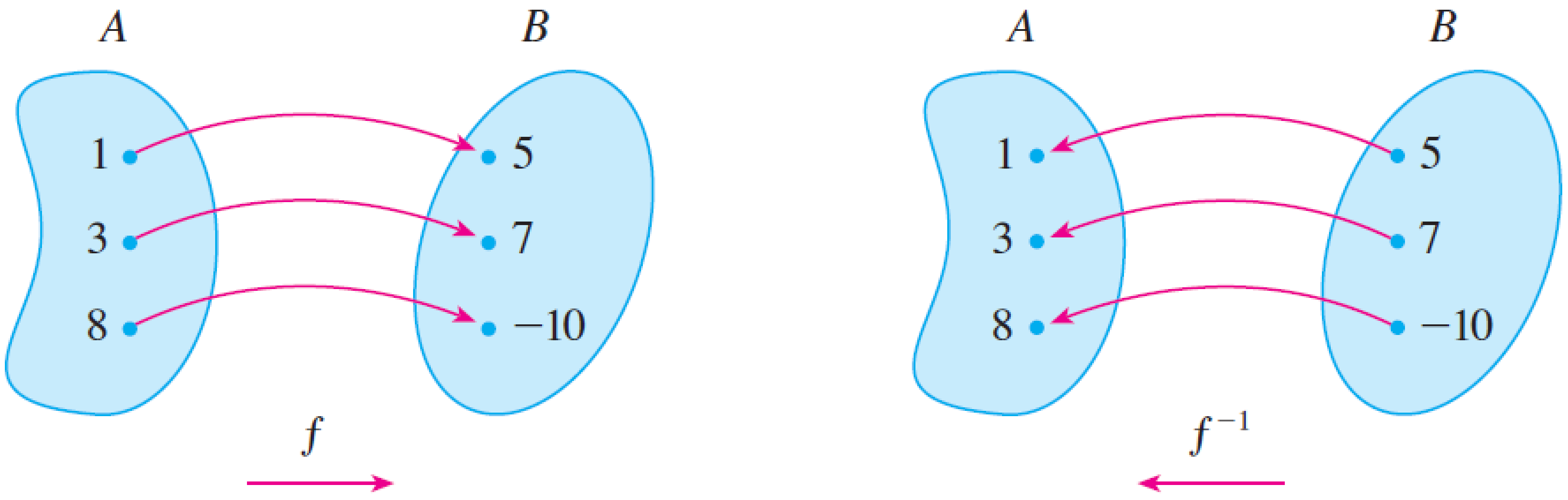
b) $g\circ f$

c) $f\circ f$

d) $g\circ g$

反函數

- 依照函數的定義，若兩實數子集之間的逆對應如果能符合函數的關係，這就產生了反函數的觀念，如下圖所示：



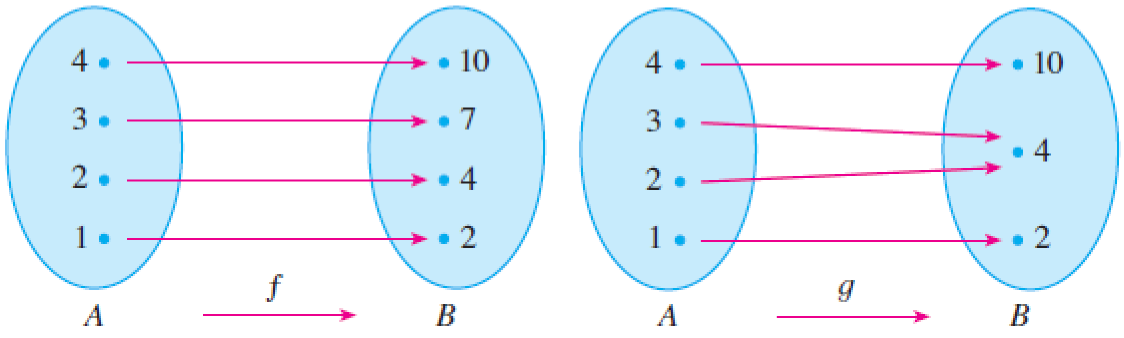
一對一函數

- **定義：**

假如函數 f 永遠沒有被重複取值，則稱為**一對一函數 (one-to-one function)**；也就是對任意 $x_i \neq x_j$，

$$f(x_i) \neq f(x_j)$$

如右例: f 是一對一; 而 g 不是。
f 有反函數;而 g 沒有。

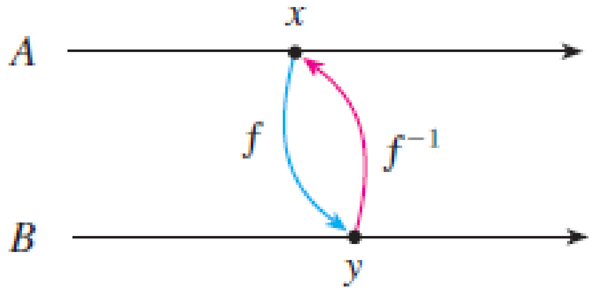


+ 反函數

- **定義：**

已知函數 f 一對一且定義域為 A 及值域為 B，若函數 g 滿足：
$\forall y \in B,$

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$$



- 則我們稱 g 為 f 的反函數 (g 可以 f^{-1} 表示，讀作 “f inverse”) 或 f 為 g 的反函數。我們又稱 f 與 g 互為反函數。
- f^{-1}的定義域 = f 的值域；f 的值域 = f^{-1} 的定義域。
- 對於任意 x：$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ 與 $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$

例6: 求反函數

- 若存在，求下列函數的反函數。

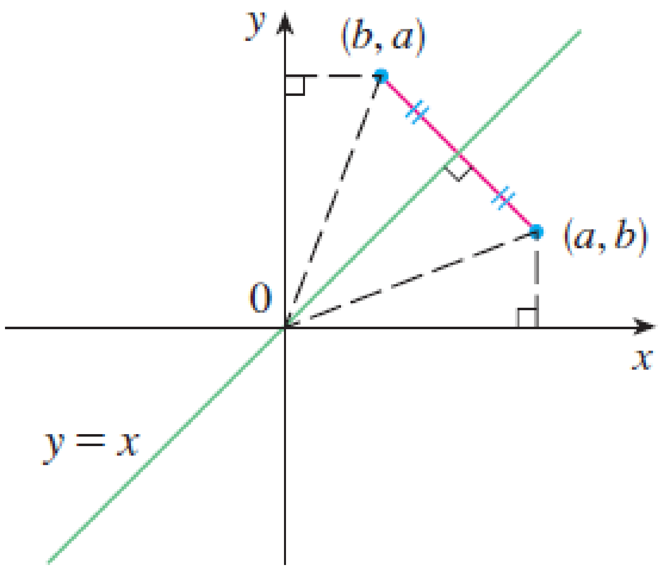
A. $f(x) = x^3 + 2$

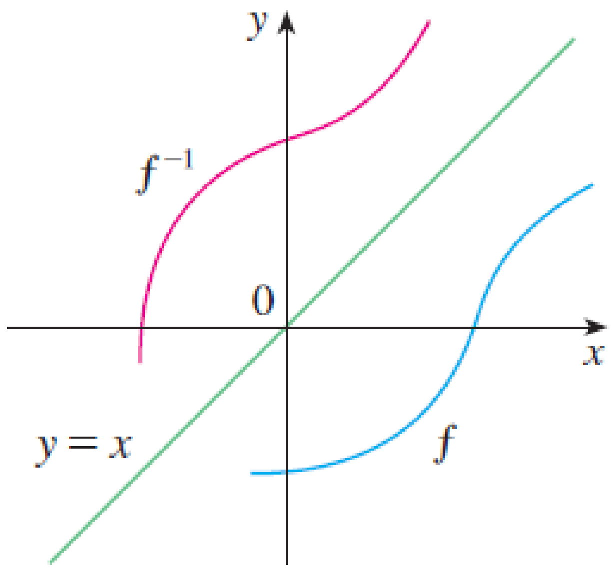
B. $f(x) = \sqrt{2x - 3}$

求反函數的三個步驟：
1. 寫成 $y = f(x)$
2. x 與 y 互換
3. 解方程式 $y = f(x)$

f^{-1} 與 f 以 $y = x$ 對稱

- 因為 $f(a) = b$ 若且唯若 $f^{-1}(b) = a$, 則 (a, b)在 f 的圖形上若且唯若 (b, a) 在 f^{-1} 的圖形上。
- 可知f^{-1} 與 f 以 $y = x$ 對稱。





+ 教材對應閱讀內容

- 閱讀:
  - 0.1-0.7, 6.2 (反函數部分)
- 習題
  - 可視個人情況利用習題複習預備知識。