

線性代數 作業 1

說明：要求給出計算過程，其中 P (Pass)類為必做題，HD (High Distinction) 類為選做題。

P 1. 設矩陣 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $A^2 + 3A + 2B$.

P 2. 用初等行變換將下列矩陣化為行最簡形矩陣

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \end{pmatrix};$$

P 3. 解下列齊次與非齊次線性方程

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$$
$$(3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 6; \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

P 4. 求下列矩陣的逆矩陣

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

P 5. 解下列矩陣方程

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}; \quad (2) X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$
$$(3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

HD 1. 設 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 且 $n \geq 2$ 為正整數, 求 $A^n - 2A^{n-1}$

HD 2. 設有齊次線性方程組 $\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$ 問當 λ 取何值時該方程組有零解? 當 λ 取何值時

該方程組有非零解? 并在有非零解時求出全部解。

HD 3. 設有非齊次線性方程組 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + px_3 + 7x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = t, \end{cases}$ 討論 p, t 的取值對該方程組解的影響, 并在有無窮多解時求其解。