



# 微積分 Calculus

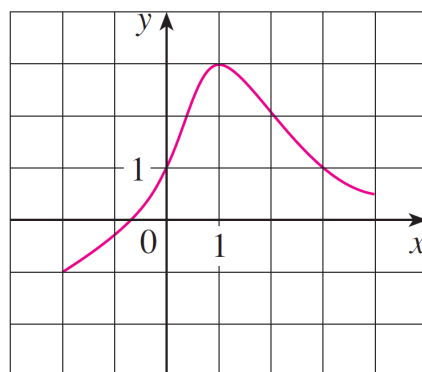
## Exercise 1

Sue Kong

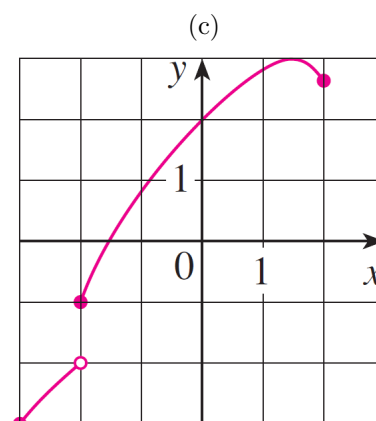
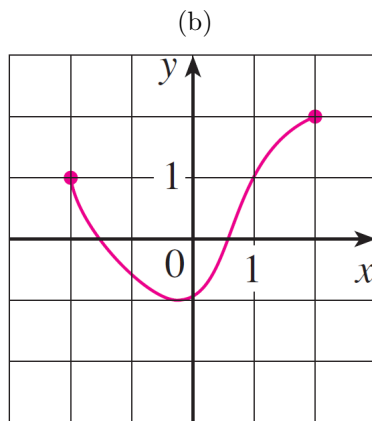
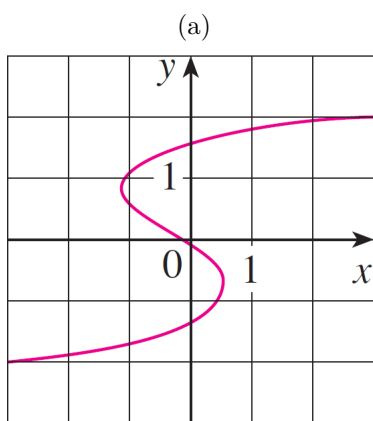
### A. 函數與極限 (Varberg: 1.1, 1.3-1.5)

1. 給定函數  $f$  的圖象如下：

- 求  $f(1)$  的值。
- 估算  $f(-1)$  的值。
- 求滿足  $f(x) = 1$  的  $x$  值。
- 估算滿足  $f(x) = 0$  的  $x$  值。
- 描述  $f$  的定義域和值域。
- 求  $f$  在何處遞增？



2. 判斷下列曲線是否為  $x$  的函數圖象。如果是，請說明其定義域和值域。



3. 求函數的分式並化簡：

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

4. 求定義域：

(a)  $f(t) = \sqrt[3]{2t - 1}$

(b)  $F(p) = \sqrt{2 - \sqrt{p}}$

5. 求函數定義域並繪圖：

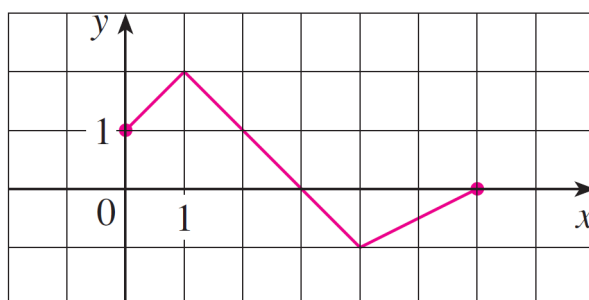
(a)  $f(t) = 2t + t^2$

(b)  $G(x) = \frac{3x+|x|}{x}$

(c)  $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{if } x \leq -1 \\ x^2 & \text{if } x > -1 \end{cases}$

6. 已知三次函數  $f$  滿足  $f(1) = 6$  且  $f(-1) = f(0) = f(2) = 0$ ，求  $f$  的解析式。

7. 下圖為  $f$  的圖象，以此繪制下列各函數的圖象：



(a)  $y = f(2x)$

(b)  $y = f(0.5x)$

(c)  $y = f(-x)$

(d)  $y = -f(-x)$

8. 求  $f+g$ ,  $f-g$ ,  $fg$ ,  $f/g$  並說明其定義域：

$$f(x) = x^3 + 2x^2, \quad g(x) = 3x^2 - 1$$

9. 求  $f \circ g \circ h$ ：

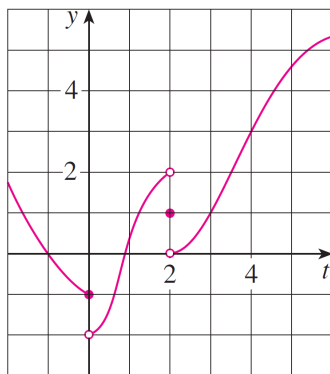
$$f(x) = 3x - 2, \quad g(x) = \sin x, \quad h(x) = x^2$$

10. 把函數寫成  $f \circ g$  的形式：

(a)  $F(x) = (2x + x^2)^4$

(b)  $F(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

11. 函數  $g$  的圖象如下，求下列各項：



(a)  $\lim_{t \rightarrow 0^-} g(t)$

(d)  $\lim_{t \rightarrow 2^-} g(t)$

(g)  $g(2)$

(b)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$

(e)  $\lim_{t \rightarrow 2^+} g(t)$

(h)  $\lim_{t \rightarrow 4} g(t)$

(c)  $\lim_{t \rightarrow 0} g(t)$

(f)  $\lim_{t \rightarrow 2} g(t)$

12. 若存在，求下列極限：

(a)  $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x+2}{x+3}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x}{(x-1)^2}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-1}{x^2(x+2)}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 2\pi^-} x \csc x$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 6}$

13. 已知：

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -2 \quad \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 0$$

求下列極限，若存在：

(a)  $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + 5g(x)]$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{f(x)}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{h(x)}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 2} [g(x)]^3$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x)}{g(x)}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)h(x)}{f(x)}$

14. 若存在，求極限：

(a)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 5}$

(b)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-5 + h)^2 - 25}{h}$

(c)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + h} - 3}{h}$

(d)  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + t} - \sqrt{1 - t}}{t}$

(e)  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{t\sqrt{1 + t}} - \frac{1}{t} \right)$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + |x - 3|)$

15. 若  $g(x) = \frac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$

(a) 求：

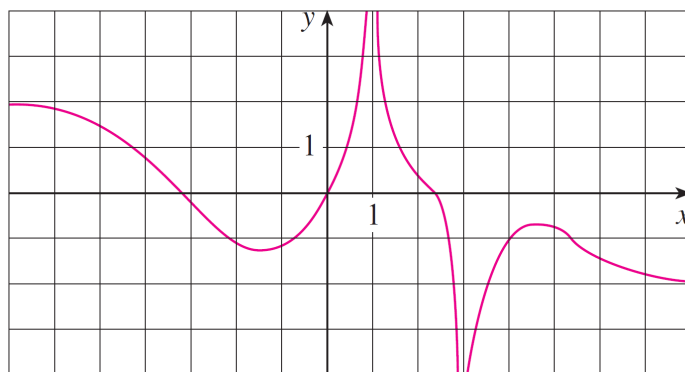
i.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$

(b) 問  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$  是否存在？

(c) 畫出  $g$  的圖象。

16. 下圖為  $f$  的圖象，求下列各項：



(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

(e) 漸近線的方程式

17. 求極限或說明不存在:

(a)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t} + t^2}{2t - t^2}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^2 + 1)^2}{(x - 1)^2(x^2 + x)}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + x} - 3x)$

(d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2}$

18. 函數  $f$  是兩個二次函數的比, 且在  $x = 4$  有垂直漸近綫, 以及只有一個  $x$ -截距  $x = 1$ 。  
又知  $f$  於  $x = -1$  有一可去間斷點且  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$ 。求:

(a)  $f(0)$

(b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

## B. 連續性 (Varberg: 1.6)

1. 假設  $f$  和  $g$  皆為連續函數且滿足  $g(2) = 6$  和  $\lim_{x \rightarrow 2} [3f(x) + f(x)g(x)] = 36$ , 求  $f(2)$ 。

2. 試將  $f$  的不連續性移除 (重新定義  $f(2)$  使  $f$  於  $x = 2$  連續)

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

3. 求  $c$  值使函數  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  連續, 其中

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{if } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{if } x \geq 2 \end{cases}$$