澳門城市大學
Universidade da Cidade de Macau
City University of Macau

設計計算工作室I

主講人 | 姓名 張琪

Name Zhang Qi

澳門城市大學

City University of Macau

考核要求

- 課後書面作業（30%）
- 出勤（10%）
- 書面報告（60%）
  - 書面報告應不超過十頁A4紙，參考給定的實驗報告格式和模板。
  - 單次的實驗書面報告不超過十頁，如兩次實驗合并的書面報告不應超過二十頁。

參考教材

- 周舸. 計算機導論（第2版）. 人民郵電出版社，2023
- 黃仙山.大學物理（上冊）.人民郵電出版社，2020
- 歐陽星明. 數字電路邏輯設計（第3版）（微課版），2021
- 大學物理實驗課程資料

實驗目的

1. 瞭解系統誤差與偶然誤差
2. 熟悉單次測量結果的讀法
3. 熟悉直接測量的誤差計算方法
4. 熟悉間接測量的誤差傳遞公式
5. 熟悉實驗數據處理方法

實驗原理

一. 測量

- 1.1 測量
- 用合適的工具或儀器，通過科學的方法，將反映被測象某些特徵的物理量(被測物理量)與選作標準單位的同類物理量進行比較的過程，其比值即爲被測物理量的測量值

實驗原理

一. 測量

- 1.2 測量的分類
- 按測量方法:直接測量、間接測量
- 等精度測量、非等精度測量按測量條件
- 按測量次數:多次測量、單次測量

實驗原理

一. 測量

- 1.2.1 直接測量
- 直接測量就是將待測量與經過標定的標準的儀器或標準量具進行比較，在儀器上或量具上直接得出待測量的大小
- 如用米尺測量長度，用天平測量質量，用電流表測量電流的大小等。但是，能直接進行測量的物理量不多
- 對大多數物理量來說，沒有可供直接進行測量的儀器和工具，只能用間接的辦法進行測量

實驗原理

一. 測量

- 1.2.2 間接測量
- 間接測量就是找出待測量和直接可測量的量之間的函數關係，進行直接可測量的測量，然後根據其函數關係，進行計算，得出待測量
- 例如，測物體的密度，根據公式 $\rho = {}^{m}\!/\!_{V}$，我們知道用天平可測得質量
- 用游標卡尺或螺旋測微器之類的長度測量器具可測得其綫度或直徑，計算出體積，再經過計算就得到密度了

實驗原理

一. 測量

- 1.2.3 其他測量
- 不論直接測量或間接測量，按測量次數又可分為單次測量和多次測量
- 多次測量又可分為等精度測量和非等精度測量
- 等精度測量是指在所有測量中對同一待測量用同一儀器（或精度相同的儀器）在相同的條件下（方法、儀器、周圍環境）進行的多次測量，否則稱爲不等精度測量
- 等精度測量的各測量值的可靠性是相同的。因此，我們一般所講的數據處理均指等精度測量的數據處理

實驗原理

二. 誤差

- 2.1 測量誤差的概念
- 測量的目的是爲了得到被測對象的物理量的真實數值
- 一般把這個真實數值叫真值，這個真實數值總是客觀存在的
- 每一個實驗者都希望盡可能地通過測量把這個真實數值找出來，但是由于受到測量儀器、方法以及測量條件等多種因素的限製，測量結果不可避免地存在與被測真值之间的差异，這稱爲測量誤差

實驗原理

二. 誤差

- 2.1 測量誤差的概念
- 2.1.1 絕對誤差：
- 一個被測量的物理量的測量值 與被測量的真值 之間總會存在差值，這種差值稱爲絕對誤差，簡稱誤差，用δ表示

$$\delta = N - N_0$$

- 式中:
- N_0是某一時刻某一物理量客觀存在的量值,即真值
- N是通過測量儀表對該物理量檢測得到的結果,即測量值

- 絕對誤差可正可負，它不僅反映了測量值偏離真值的大小，也反映了偏離的方向

實驗原理

二. 誤差

- 2.1 測量誤差的概念
- 2.1.2 偏差
- 被測量的真值雖然客觀存在，但我們不可能得到這個值。我們只能用多次測量的算術平均值來代替它，稱爲近真值，用δ表示。我們定義測量值與近真值的差值叫偏差，即

$$\delta = N - N_0$$

- 偏差又叫殘差。實驗中的真值得不到，因此誤差也無從知道，但近真值可以得到，所以測量的偏差（殘差）就可以知道了
- 實驗誤差分析中要經常計算這種偏差，用偏差來描述測量結果的準確度

實驗原理

二. 誤差

- 2.1 測量誤差的概念
- 2.1.3相對誤差：
- 偏差（殘差）僅僅反映了測量值對近真值偏離的大小和方向，沒有反映出測量結果的偏離程度。例如用米尺測量一個桌面的長度，假設桌面長度的近真值是500.4mm，而測量的結果為500.9mm，其偏差為0.5mm。用同一個米尺測量一個近真值為22.2mm的文具盒的長度，測量值為22.7mm，其偏差也為0.5mm。雖然偏差相同，但準確度就大不一樣了。爲此，又定出相對誤差這個概念，偏差與近真值之比，叫做相對誤差，即，數學表達式爲：

$$E = \frac{\Delta N}{N_0} \times 100\%$$

- 相對誤差一般用百分比表示，一般保留兩位有效數字

實驗原理

二. 誤差

- 2.1 測量誤差的概念
- 2.1.4標準誤差
- 根據誤差理論，標準偏差就是將各次測量值 與平均值 的偏差的平方和取平均再開方，所以，標準偏差又稱為方均根偏差
- 在有限次如 次測量中，測量列（一組測量值）中某一次測量值的標準偏差，記爲 ，常用下式表示

$$\sigma = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (N_i - \mu)^2}{n-1}}$$

- 式中 μ 相應於測量次數 n → ∞ 時測量的平均值。它是對這一組測量數據可靠性的估計，標準誤差小，說明這一組測量的重復性好，精密度高

實驗原理

二. 誤差

- 2.1 測量誤差的概念
- 2.1.5標準偏差
- 爲了計算方便，標準誤差公式可直接用測量值表示測量列的標準偏差，它可改寫爲

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(N_i - \overline{N}\right)^2}{n-1}}$$

- 這是計算測量結果不確定時很有用的公式，稱為貝塞耳公式。與一般函數型電子計算器說明書中所用的公式完全相同，亦可用計算器進行計算
- 它是對這一組測量數據可靠性的估計，標準偏差小，說明這一組測量的重複性好，精密度高。因此，在一般科學文獻報告中，常采用的還是標準偏差

實驗原理

二. 誤差

- 2.2 誤差的分類
- 從研究的需要出發，根據誤差產生的原因和性質，將誤差分爲兩類：系統誤差和隨機誤差（偶然誤差）

- 2.3 系統誤差
- 系統誤差的特徵是在同一條件下多次測量同一量時，誤差的大小和方向保持恒定，或在條件改變時，誤差的大小和方向按一定規律變化。系統誤差的特徵也常常是發現系統誤差的很重要的綫索

實驗原理

二. 誤差

- 2.3.1 系統誤差的來源
  - 儀器誤差
  - 理論或方法誤差
  - 環境誤差
  - 個人誤差
- 由于系統誤差在實驗條件不變時有確定的大小和方向，因此，在同一實驗條件下多次測量來求平均值不能減小或消除它
- 必須找出產生系統誤差的原因，針對原因去消除或引入修正值對測量結果加以修正

實驗原理

二. 誤差

- 2.3.2 系統誤差的消除
- 從原理入手消除系統誤差
  - 采用更加符合實際的理論公式：如單擺周期公式通常爲 $T=2\pi\sqrt{l/g}$
  - 若考慮擺幅的影響，則周期公式爲 $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{9}{64}\sin^4\frac{\theta}{2}+\cdots\right)$
- 從處理儀器入手消除系統誤差

① 消除儀器的零點誤差。對游標卡尺、千分尺以及指針式儀表等，在使用前，應先記錄下零點誤差，以便對測量結果加以修正

② 校準儀器。用更準確的儀器校準一般儀器，得出修正值或校準曲綫

③ 保證儀器裝置在測量時滿足規定的條件

實驗原理

二. 誤差

- 2.3.2 系統誤差的消除
- 利用修正消除系統誤差
  - 對比實驗前和實驗過程中沒能消除的系統誤差，應對測量結果加以修正來消除
  - 例如實驗中，不可能全部采用最高標準的先進設備，而只能是選取可靠耐用、價格適當的儀器。這種由實用儀器帶來的系統誤差，就可以通過儀器檢定或高等級標準校正，獲得儀器示值的修正值或修正曲綫、修正公式予以消除
- 從實驗方法消除系統誤差
  - 在實驗中采用適當的實驗方法，可有效消除系統誤差

實驗原理

二. 誤差

- 2.3.3 總結
- 總之，要消除系統誤差的影響，首先要設法不讓它產生，如果做不到，就要想辦法修正它，或者采取合適的測量方法，設法抵消它的影響，一個實驗成功與否，很大程度取決于是否盡量消除系統誤差
- 在以後的討論中，我們假定系統誤差已經消除或修正，只剩下隨機誤差
- 隨機誤差不能像系統誤差那樣可以找出原因來加以消除或修正（這是由隨機誤差的性質來決定的），只能用多次測量的方法并在數據處理時進行估算

實驗原理

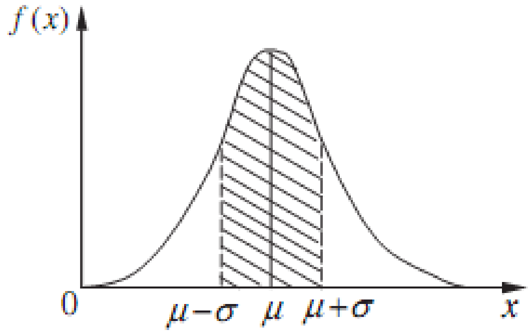
二. 誤差

- 2.4 隨機誤差
- 隨機誤差是由于受人的感覺器官（視覺、聽覺、觸覺）的靈敏度和儀器精密程度的限製，周圍環境的幹擾（比如溫度、濕度的微小起伏，外界產生的雜散電磁場，空氣的不規則流動等）以及隨測量而來的其他不可預測的隨機因素造成的
- 在實驗過程中，隨機誤差不可避免，也不能消除，但根據隨機誤差理論可以估計其可能出現的大小，并可通過增加測量次數減小隨機誤差。
- 在測量過程中，由於誤差的來源不同，它們所服從的規律也不相同。常見的隨機誤差分布有：二項式分布、正態分布、雙截尾正態分布、泊松分布、χ2分布、F分布、t分布、均勻分布等。我們主要介紹正態分布

實驗原理

二. 誤差

- 2.4.1 正態分布



- 圖中橫坐標ΔN表示隨機誤差，縱坐標f（ΔN）表示誤差概率密度分布函數，f（ΔN）的意義是單位誤差範圍內出現的誤差概率
- 由圖可看出，服從正態分布的隨機誤差具有如下幾個特性：
- （1）單峰性　絕對值小的誤差出現的概率比絕對值大的誤差出現的概率大。
- （2）對稱性　絕對值相等的正負誤差出現的概率相等。
- （3）有界性　在一定測量條件下，誤差的絕對值一般不超過一定限度，即很大的正（或負）誤差出現的概率趨于零。
- （4）抵償性　當測量次數非常多時，由于正負誤差相互抵消，故所有誤差的代數和爲零

實驗原理

二. 誤差

- 2.4.1 正態分布
- 同時從分布曲綫還可以看出：第一，在多次測量時，正負隨機誤差常可以大致相消，因而用多次測量的算術平均值表示測量結果可以減小誤差的影響；第二，測量值的分散程度直接體現隨機誤差的大小，測量值越分散，測量的隨機誤差就越大
- 因此，必須對測量的隨機誤差作出估計才能表示出測量的精密度
- 在一定條件下，增加測量次數可以減小隨機誤差，但也不是測量次數越多越好。在一般科學實驗中，測量次數取10~20次，在普通物理實驗中，取5~10次即可

實驗原理

三. 不確定度

- 3.1 不確定度的定義
- 測量不確定度是指由于測量誤差的存在而對被測量值不能確定的程度，它是測量質量的表述，表徵合理地賦予被測量之值的分散性，與測量結果相聯系的參數。它不同於測量誤差，測量誤差是被測量的真值與測量量值之差，而不確定度則是誤差可能數值(或數值可能範圍的測度
- 在物理實驗中進行著大量的測量，測量結果的質量如何，要用不確定度來說明。在相同置信概率的條件下，不確定度愈小，其測量質量愈高，使用價值也愈高；反之，不確定度愈大，其測量質量愈低，使用價值也愈低

實驗原理

三. 不確定度

- 3.1.1　不確定度的分類
- 測量不確定度的大小表徵測量結果的可信程度。按其數值的來源和評定方法，不確定度可分為統計不確定度和非統計不確定度兩類分量
- (1) A類不確定度分量
- 由測量列的統計分析評定的不確定度，也稱統計不確定度
- (2) B類不確定度分量
- B類不確定度分量 U_B 是指由非統計方法估計出的不確定度。它主要由儀器誤差引的，與儀器的誤差限有關

實驗原理

三. 不確定度

- (1) A類不確定度分量
- 由測量列的統計分析評定的不確定度，也稱統計不確定度
- 在實際測量時，一般只能進行有限次測量，這時測量誤差不完全服從正態分布規律，而是服從稱之爲 t 分布(又稱學生分布)的規律。這種情況下，對測量誤差的估計，就要在貝塞爾公式的基礎上再乘以一個因子。在相同條件下對同一被測量作 n 次測量，若只計算不確定度 U 的 A 類分量 U_A，那麼它等於測量值的標準偏差 Sx 乘以因子 $t_p/\sqrt{n}$ ，即 $U_A = \frac{t_p}{\sqrt{n}} S_x$
- 因子的值可以從專門的數據表中查得
- 普物實驗測量次數n一般小于10。從該表知，當5 < n ≤10時，因子近似取爲1

測量次数 n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_p/\sqrt{n}$ 的值	8.98	2.48	1.59	1.24	1.05	0.93	0.84	0.77	0.72

實驗原理

三. 不確定度

- (2) B類不確定度分量
- 實驗室常用儀器的誤差或誤差限值，是生產廠家參照國家標準規定的計量儀表、器具的準確度等級或允許誤差範圍給出，或由實驗室結合具體測量方法和條件簡化而約定的，用Δ表示。B類不確定度分量表示爲：

$$U_B = k_p \Delta_{仪} / C$$

- 在物理實驗中，一般取置信概率為0.95，因此從簡約和實用出發，我們統一規定取C $=\sqrt{3}$，kp = 1.96。這個時候，

$$U_B = \frac{1.96}{\sqrt{3}} \Delta_{仪} \approx \Delta_{仪}$$

實驗原理

三. 不確定度

- 3.1.2 不確定度的合成
- 置信概率為0.68時的不確定度為標準不確定度，其它置信概率對應的不確定度稱為擴展不確定度，也稱總不確定度。不確定度 U 包含兩類分量 U_A 和 U_B，因此擴展不確定度應由這兩類分量合成，滿足如下公式：

$$U=\sqrt{{U_{\mathrm{A}}}^{2}+{U_{\mathrm{B}}}^{2}}$$

- 當測量次數 n符合5 < n ≤10時，上式可簡化為

$$U=\sqrt{{\mathrm{S}_{x}}^{2}+{\Delta_{\text{仪}}}^{2}}$$

- 這個公式是今後實驗中估算不確定度經常要用的公式

實驗原理

四. 測量結果的表示

- 4.1 測量結果的表示

$$N = \bar{N}\,(或N_{測}) \pm U\,(或\Delta_{儀})$$

$$U_r = \frac{U\,(或\Delta_{儀})}{\bar{N}\,(或N_{測})} \times 100\%$$

- 對以上兩式做幾點說明：
- 如果直接測量結果是最終結果，不確定度一般用一位數字表示，當首位數小于2(包含2)可用兩位數字表示。如果是作為間接測量結果的一個中間結果，不確定度最好用兩位數。相對不確定度一律用兩位數字的百分數表示。
- 不確定度的位數截取時，采用「不舍只入」的辦法，以保證其置信概率水平不降低。例如，計算得到不確定度為0.2412，取兩位數為0.25，截取一位數為0.3。
- 測量結果的最末位以保留的不確定度末位相對齊來確定幷截取。測量值的尾數截取采取「四舍六入，奇進偶舍」的方法

實驗原理

四. 測量結果的表示

- 例1.用毫米刻度的米尺測量物體長度10次，其測量值 分別是53.27、53.25、53.23、53.29、53.24、53.28、53.26、53.20、53.24、53.21試計算其合成不確定度，并寫出測量結果

實驗原理

四. 測量結果的表示

- 例1.用毫米刻度的米尺測量物體長度10次，其測量值 分別是53.27、53.25、53.23、53.29、53.24、53.28、53.26、53.20、53.24、53.21試計算其合成不確定度，并寫出測量結果

解：（1）计算l的近真值：

$$\bar{l} = \frac{53.27 + 53.25 + 53.23 + \cdots + 53.24 + 53.21}{10} = 53.25cm$$

（2）计算 A 类不确定度：

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(N_i - \bar{N}\right)^2}{n-1}} = 0.03cm$$

（3）计算 B 类不确定度：

米尺的仪器误差$\Delta_{仪}=0.05cm$

（4）计算合成不确定度：

$$U = \sqrt{U_A{}^2 + U_B{}^2} = \sqrt{0.03^2 + 0.05^2} = 0.06cm$$

（5）测量结果的标准式为：

$$l = 53.25 \pm 0.06cm \qquad U_r = \frac{0.06}{53.25} \times 100\% = 0.12\%$$

實驗原理

五. 間接測量的不確定度

- 5.1　間接測量的不確定度定義
- 間接測量結果是由一個或幾個直接測量值經過公式計算得到的。直接測量值的不確定度會傳遞給間接測量結果，這就是不確定度的傳遞與合成問題
- 間接測量的函數式：

$$W = F(x, y, z\ldots)$$

- W為間接測量量，它有k個直接觀測量x，y，z...，各直接觀測量的測量結果分別為

$$x = \bar{X} \pm u_x$$

$$y = \bar{Y} \pm u_y$$

$$z = \bar{Z} \pm u_z$$

.....

實驗原理

五. 間接測量的不確定度

- 5.1 間接測量的不確定度定義
- 將各直接觀測量的合成近似真值代入函數式中，即得間接測量量的近真值

$$W = f\left(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \ldots.\right)$$

實驗原理

五. 間接測量的不確定度

- 5.1 間接測量的不確定度定義
- 求間接測量量的合成不確定度。由於不確定度均為微小量，相似於數學中的微小增量，因此對函數式求全微分

$$dW = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz + \cdots$$

- 將微分式中的各項求" 方和根" ，即爲間接測量量的合成不確定度：

$$U_w = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 u_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 u_y^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 u_z^2 + \cdots}$$

- 當間接測量量的函數式為積商（或含和差的積商形式），為使運算簡便起見，可以先將函數式兩邊同時取自然對數，然後再求全微分。即

$$U_r = \frac{U_w}{W} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln F}{\partial x}\right)^2 u_x^2 + \left(\frac{\partial \ln F}{\partial y}\right)^2 u_y^2 + \left(\frac{\partial \ln F}{\partial z}\right)^2 u_z^2 + \cdots}$$

實驗原理

五. 間接測量的不確定度

- 表1　常用函數的不確定度傳遞公式

函數表達式	標準誤差的傳遞公式
$W = x \pm y$	$u_w = \sqrt{u_x{}^2 + u_y{}^2}$
$W = xy$	$\frac{u_w}{W} = \sqrt{(\frac{u_x}{x})^2 + (\frac{u_y}{y})^2}$
$W = \frac{x}{y}$	$\frac{u_w}{W} = \sqrt{(\frac{u_x}{x})^2 + (\frac{u_y}{y})^2}$
$W = \frac{x^k . y^m}{z^n}$	$\frac{u_w}{W} = \sqrt{k^2(\frac{u_x}{x})^2 + m^2(\frac{u_y}{y})^2 + n^2(\frac{u_z}{z})^2}$
$W = kx$	$u_w = ku_x ; \frac{u_w}{W} = \frac{u_x}{x}$
$W = \sin\ x$	$u_w = (\cos x) u_x$

實驗原理

五. 間接測量的不確定度

● 例2. 已知電阻, $R_1 = 50.2 \pm 0.5(\Omega)$, $R_2 = 149.8 \pm 0.5(\Omega)$, 求它們串聯時的電阻R和合成不確定度 。

解：串联电阻的阻值为 $R = R_1 + R_2 = 50.2 + 149.8 = 200.0(\Omega)$

合成不确定度：

$$u_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial R_1}u(R_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_2}u(R_2)\right)^2} = \sqrt{u_{R_1}^2 + u_{R_2}^2} = \sqrt{0.5^2 + 0.5^2} = 0.7(\Omega)$$

相对不确定度：$U_r = \frac{0.7}{200} \times 100\% = 0.35\%$

测量结果：$R = 200 \pm 0.7(\Omega)$ ， $U_r = 0.35\%$ 。

注意事項

- #本次需完成homework2,并在TronClass系統內按時提交作業。
- #本次需完成homework2,并在TronClass系統內按時提交作業。
- #本次需完成homework2,并在TronClass系統內按時提交作業。

感謝觀賞

Thank you for listening.