超越函數

單元五

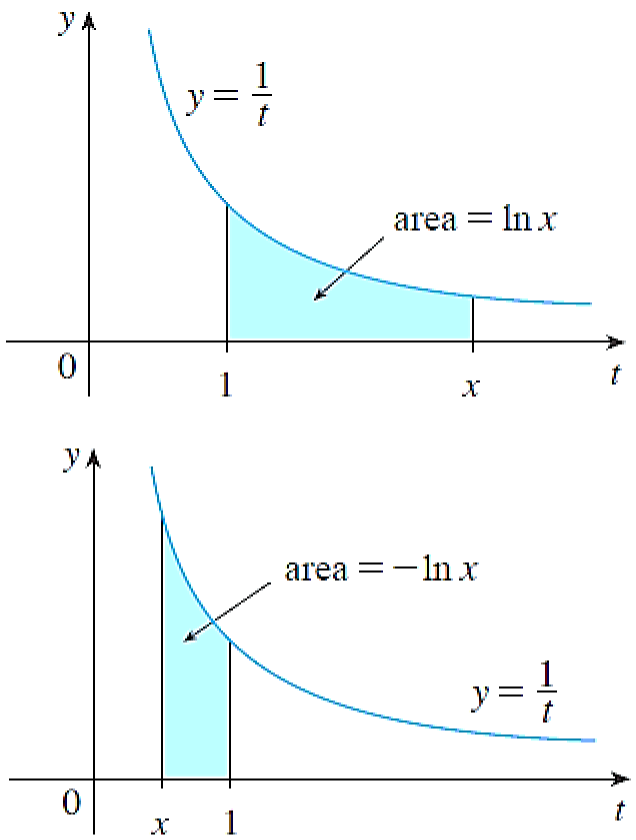
Outline

- 對數函數
- 指數函數
- 常微分方程

+ 自然對數函數 (6.1)

- 自然對數函數可以用積分定義為：

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \quad x > 0$$



+ ln x 的導數

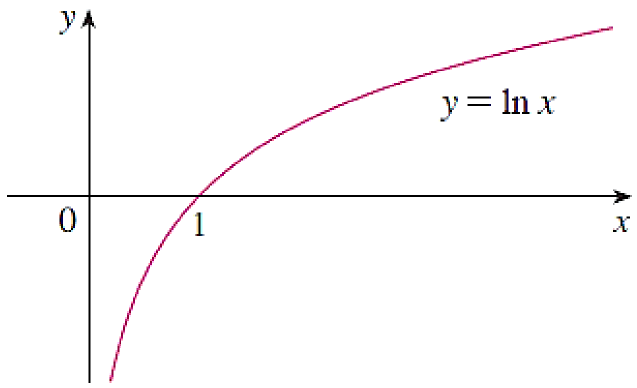
- 由上一頁的定義及微積分基本定理第一部分**(FTC 1)**可得：

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

ln x 的性質

- $\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$

  $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$



- $x = 0$ 為 $y = \ln x$ 的垂直漸近線 **(V.A.)**。

例1

- 已知 $y = f(x)$，求 dy/dx：

A. $y = \ln(x^3 + 1)$

B. $y = \ln(\sin x)$

C. $f(x) = \ln|x|$

1/x 的積分公式

- 由例1C可得:

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

- 對應的不定積分公式為：

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

例2

- 求:

A. $\int \frac{x}{x^2+1} dx$

B. $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

C. $\int \tan x \, dx$

例3：自然對數微分法

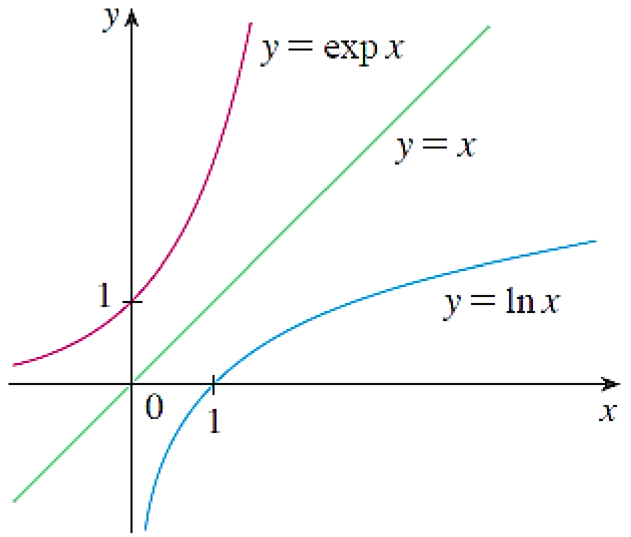
計算牽涉到函數的乘除或次方的複雜函數的導數時，利用**自然對數微分法**(先取對數後再微分)會簡單許多。

- 微分 $y=\dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$ 。

自然指數函數 e^x (6.3)

- 注意自然指數函數與自然對數函數互為反函數：

$$y = e^x \quad vs. \quad y = \ln x$$

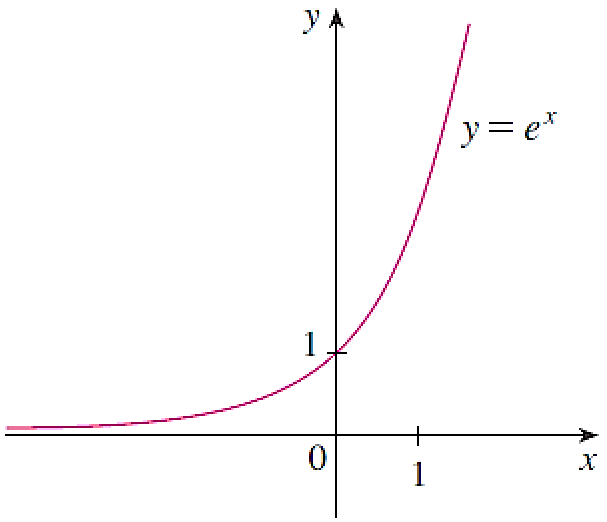


e 是滿足 $\ln e = 1$ 的數 $\left(e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828\right)$

e^x 的性質

- $$e^{\ln x} = x$$
  $$\ln(e^x) = x$$

- $$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$
  $$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$



- $y = 0$ 為 $y = e^x$ 的水平漸近線 **(H.A.)**。

e^x的導數

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

例4

- 求:

A. $\frac{d}{dx}(e^{\tan x})$

B. $\frac{d}{dx}(e^{-4x}\sin 5x)$

C. $\int_0^1 e^{-3x}dx$

D. $\int x^2 e^{x^3}dx$

+ 一般指數和對數函數 (6.4)

- 微分:

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$
$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

- 積分:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad a \neq 1$$

+ 例5

- 求:

A. $\frac{d}{dt}(3^{\cos 2t})$

B. $\frac{d}{dx}(\log_5(xe^x))$

C. $\int (x^5 + 5^x)\, dx$

D. $\int x \cdot 2^{x^2}\, dx$

+ 常微分方程 Ordinary Differential Equation (3.9&6.6)

- 若 $F'(x) = f(x)$, 則 $\int F'(x)dx = F(x) + C$。
- 範例:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \qquad (a)$$

$$dy = 2xdx$$

$$\int dy = \int 2xdx$$

$$y = x^2 + C \qquad (b)$$

(a) – 微分方程: 包含未知函數導數的方程 (常微分方程: 只含一個自變量)

(b) – 微分方程的解: 滿足微分方程的函數

例6: 分離變量法 (3.9)

求下列微分方程的解:

A. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}$

B. $xy^2y' = x + 1$

一階線性微分方程 (6.6)

- 一階線性微分方程(**First-order linear equation):**
  結構為 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的微分方程。
  - 例:

$$xy'+y=2x$$

- 積分因式 (**Integrating factor):** $e^{\int P(x)dx}$

+ 例7

- 求下列微分方程的解:

A. $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$

B. $x^2y' + xy = 1, x > 0;$ 且 $y(1) = 2$

解題步驟:
1. 寫成 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$的形式
2. 求得積分因式
3. 在原等式兩邊乘以積分因式
4. 還原成 $y \cdot$積分因式 之乘積的導數
5. 兩邊求積分

教材對應閱讀章節及練習

- 6.1,6.3, 6.4(~例4), 3.9, 6.6(~例2)
- 對應習題: (可視個人情況定量)
  - 6.1: 3-22
  - 6.3: 11-22, 37-44
  - 6.4: 17-26
  - 3.9: 1-14
  - 6.6: 1-9