02

方阵的行列式

《线性代数》

目录/Contents

目录/Contents

一、排列

1. 排列及其逆序数

定义1 从$1,2,\cdots,n$中任意选取r个不同的数排成一列，称为排列.

定义2 将$1,2,\cdots,n$这n个不同的数排成一列，称为n阶全排列，也简称为全排列.

例如，设有$1,2,3,4,5$五个元素，则31是五个元素的一个排列，312是五个元素的一个排列，也可以看成是$1,2,3$三个元素的一个全排列；4215是五个元素的一个排列，而42153是五个元素的一个全排列.

n阶全排列的总数为$n!=n\cdot(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1$. 全排列$12\cdots n$称为$n$个数的标准排列.

特点：元素是按从小到大的自然顺序排列的.

定义3

在一个排列中，如果一对数的排列顺序与自然顺序相反，即排在左边的数比排在它右边的数大，那么它们就称为一个逆序，一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数. 排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

例如，全排列 $4\ 2\ 1\ 5\ 3$

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array}$$

从而 42153 的逆序数为 $\tau(42153)=5$.

$\tau(42153)=0+1+2+0+2=5$.

一、排列

2. 奇排列与偶排列

定义4

逆序数为偶数的排列，称为偶排列；逆序数为奇数的排列，称为奇排列.

例如， $\tau(213)=1$，所以213是一个奇排列； 而$\tau(312)=2$，所以312是一个偶排列。

定义5

只交换排列中某两个数的位置，其它的数保持不动而得到一个新排列的变换，称为一个对换.
若交换的是相邻位置的两个元素，则称该对换为相邻对换.

例如，经过2、1对换，排列42153就变成了排列41253，这个对换是相邻对换；

经过2、5对换，排列42153就变成了排列45123，这个对换不是相邻对换.

定理 1 对换改变排列的奇偶性.

*证明 先证相邻对换的情况. 排列 $i_1 \cdots i_k ab \cdots j_1 \cdots j_s$ (1-1)

经过 a,b 相邻对换变成排列 $i_1 \cdots i_k ba \cdots j_1 \cdots j_s$. (1-2)

显然，a,b 与其它数构成的逆序在排列(1-1)和排列(1-2)中是一样的，不同的只是 a,b 的次序.

当 $a<b$ 时，ab 原来是标准序，对换后 ba 构成一个逆序，

于是排列(1-2)的逆序数是排列(1-1)的逆序数增加1；

当 $a>b$ 时，ab 原来是逆序，对换后 ba 是标准序，

于是排列(1-2)的逆序数是排列(1-1)的逆序数减少1.

所以无论增加还是减少1，相邻对换都改变了排列的奇偶性.

对于不相邻的对换，不妨假设原排列为 $\cdots ai_1\cdots i_s b\cdots$， 经过 a,b 对换后变为排列 $\cdots bi_1\cdots i_s a\cdots$，

这个改变过程实际上就是通过先将 a 依次与其后面相邻的元素作 $s+1$ 次相邻对换变为 $\cdots i_1\cdots i_s ba\cdots$，

再通过将 b 依次与前面相邻的元素作 s 次相邻对换变而得到.

一共进行了 $2s+1$ 次相邻对换，所以改变了排列的奇偶性.

定理 2 在 n 阶排列中，偶排列和奇排列各占一半，即各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

*证明 记 P_n（S_n、T_n）为所有 n 阶（奇、偶）排列构成的集合， 则 $P_n=S_n\cup T_n$ 并且 $S_n\cap T_n=\varnothing$，

于是 $|P_n|=|S_n|+|T_n|$。任意取定一个对换 $\sigma:P_n\to P_n$， 显然映射 σ 是单射并且 $\sigma(S_n)\subseteq T_n$、 $\sigma(T_n)\subseteq S_n$，

于是有 $|S_n|\le|T_n|$、 $|T_n|\le|S_n|$， 所以 $|S_n|=|T_n|=\frac{1}{2}|P_n|=\frac{1}{2}n!$。

二、n 阶行列式

1. n 阶行列式的定义

由 n^2 个元素 $a_{ij}(i, j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列的正方形的数表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix},$$

由这个数表所决定的数 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$

称为由 n^2 个元素 $a_{ij}(i, j=1,2,\cdots,n)$ 构成的 n 阶行列式，

记为 $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$， 即：

行标

列标

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

对所有的 n 阶全排列 $p_1\,p_2\cdots p_n$ 求和

二、n 阶行列式

记矩阵 $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

则行列式通常也称为方阵 A 的行列式，记为 $|A|$.

有时为了表明行列式是由元素 a_{ij} 构成的，也简记为 $|A|=\det(a_{ij})$、$|a_{ij}|_{n\times n}$ 或 $|a_{ij}|_n$.

n 阶行列式具有三个特点：

01 OPTION

$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 是对所有的 n 阶全排列 $p_1\,p_2\cdots p_n$ 求和，所以展开式中共有 $n!$ 项；

02 OPTION

每一项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积；

03 OPTION

每一项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的行标排成一个标准排列，列标排列 $p_1\,p_2\cdots p_n$ 的奇偶性决定了乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 前的符号.

2. 二、三阶行列式

当 $n=2$ 时，由方阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 所确定的二阶行列式为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2} (-1)^{\tau(p_1 p_2)} a_{1p_1} a_{2p_2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad .$$

二阶行列式也可借助于对角线法则来记忆：

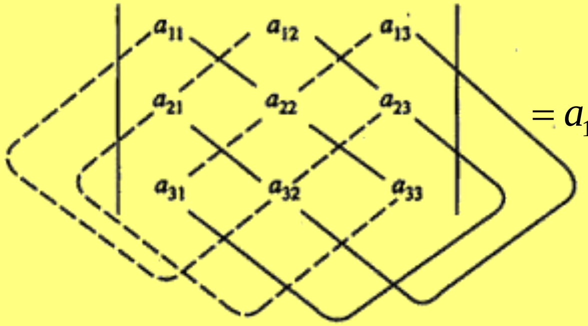
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

二、n 阶行列式

当 $n=3$ 时，三阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 所确定的三阶行列式为：

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

也可以按“对角线”法则计算三阶行列式：



$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

注：四阶及更高阶的行列式不再适用对角线法则.

二、n 阶行列式

例1

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ -3 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$，求 $|\boldsymbol{A}|$.

解

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ -3 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=1\times3\times(-1)+2\times1\times1+(-2)\times(-3)\times2-(-2)\times3\times1-1\times1\times2-2\times(-3)\times(-1)$$

$$=(-3)+2+12-(-6)-2-6=9.$$

例1 证明 $a_{52}a_{16}a_{41}a_{64}a_{23}a_{35}$ 是 6 阶行列式 $D_6=\left|a_{ij}\right|_{6\times6}$ 的一项，并求这项应带的符号.

证明 调换 $a_{52}a_{16}a_{41}a_{64}a_{23}a_{35}$ 中元素的位置，使得调换后的乘积中元素的行标是标准序，

即 $a_{52}a_{16}a_{41}a_{64}a_{23}a_{35}=a_{16}a_{23}a_{35}a_{41}a_{52}a_{64}$，

这时，乘积中元素的列标排列为 635124，是一个 6 阶全排列，

因而 $a_{52}a_{16}a_{41}a_{64}a_{23}a_{35}$ 是位于 $D_6=\left|a_{ij}\right|_{6\times6}$ 的不同行、不同列的 6 个元素的乘积，

因此是这个 6 阶行列式的一项. 由于 $\tau(635124)=10$，所以这项前面带正号.

三、几类特殊的 n 阶行列式的值

例2 计算下三角方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的行列式$|\boldsymbol{A}|$（这样的行列式称为下三角行列式）.

证明 根据行列式定义，$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，该行列式中有较多的元素为零，

要使得乘积项$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$不等于零，元素$a_{1p_1}$只能取$a_{11}$； 元素$a_{2p_2}$只能取$a_{22}$； ……； 元素$a_{np_n}$只能取$a_{nn}$，

从而行列式的展开式中只有$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$这一项可能不是零，其它项全为零.

而$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$的列标是标准排列，逆序数为零，所以$|\boldsymbol{A}|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

下三角形行列式的值等于主对角线上 n 个元素的乘积，而与主对角线下方的元素无关.

三、几类特殊的 n 阶行列式的值

例3 计算上三角方阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的行列式$|A|$（这样的行列式称为上三角行列式）.

证明 要使得乘积项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 不等于零， 元素 a_{np_n} 只能取 a_{nn}； 元素 $a_{n-1,p_{n-1}}$ 只能取 $a_{n-1,n-1}$；

……； 元素 a_{1p_1} 只能取 a_{11} 。

于是行列式的展开式中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项可能不是零， 其它项全为零.

而 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 的列标是标准排列，逆序数为零，

所以

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

三、几类特殊的 n 阶行列式的值

由于对角矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 既是上三角同时也是下三角方阵，

所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

对角矩阵的行列式称为对角行列式.

例4 设斜下三角方阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & ⋰ & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$，证明：$|A|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

证明 由行列式的定义，$|A|=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & ⋰ & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，

要使得乘积项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 不等于零，元素 a_{1p_1} 只能取 a_{1n}；元素 a_{2p_2} 只能取 $a_{2,n-1}$；……；元素 a_{np_n} 只有取 a_{n1}，

于是行列式的展开式中只有 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 这一项可能不是零，其它项全为零.

而 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 的列标排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数为 $\tau(n(n-1)\cdots 21)=\frac{n(n-1)}{2}$， 所以 $|A|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

当 $n=4k, 4k-1$ 时， $\tau(n(n-1)\cdots 21)=\frac{n(n-1)}{2}$ 为偶数， 此时 $|A|=a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$；

当 $n=4k\text{-}2, 4k-3$ 时， $\tau(n(n-1)\cdots 21)=\frac{n(n-1)}{2}$ 为奇数， 此时 $|A|=-a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

目录/Contents

目录/Contents

2.2 行列式的性质

一、行列式的性质

二、行列式的计算举例

三、方阵可逆的充要条件

一、行列式的性质

定义 1 设 $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$D_n^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为 D_n 的转置行列式.

性质 1

行列式 D_n 与它的转置行列式 D_n^{T} 相等.

性质 2

互换行列式的两行（或两列），行列式变号. 记为 $r_i \leftrightarrow r_j$ 或 $c_i \leftrightarrow c_j$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 7 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

推论1

若行列式中有两行（或两列）对应元素相等，则行列式等于零.

证明

把行列式 D 中有相同元素的两行（或两列）互换，则有 $D=-D$，因此 $D=0$.

性 质 3

若行列式的某一行（或列）有公因子 k，则公因子 k 可以提到行列式记号外面；或者说，用 k 乘行列式的某一行（或某一列），等于用 k 乘以该行列式. 记作 $\frac{1}{k}r_i$（或 $\frac{1}{k}c_i$）.

例 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 9 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1\times\underline{2} & 2\times\underline{2} & 3\times\underline{2} \\ 2\times\underline{3} & 3\times\underline{3} & 4\times\underline{3} \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

定理1

设A是 n阶方阵，则等式 $|kA| = k^n|A|$成立.

推论2

若行列式的某一行（或某一列）元素全为零，则行列式的值为零.

推论3

若行列式某两行（或两列）元素对应成比例，则行列式为零.

性 质 4

行列式的拆分定理

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boxed{b_{k1}+c_{k1}} & b_{k2}+c_{k2} & \cdots & b_{kn}+c_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例 2

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_2+b_2 & a_3+b_3 & a_1+b_1 \\ a_3+b_3 & a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & a_3+b_3 \\ a_2+b_2 & a_3 & a_1+b_1 \\ a_3+b_3 & a_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_2 & a_3+b_3 \\ a_2+b_2 & b_3 & a_1+b_1 \\ a_3+b_3 & b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3+b_3 \\ a_2 & a_3 & a_1+b_1 \\ a_3 & a_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2 & a_3+b_3 \\ b_2 & a_3 & a_1+b_1 \\ b_3 & a_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & a_3+b_3 \\ a_2 & b_3 & a_1+b_1 \\ a_3 & b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & a_3+b_3 \\ b_2 & b_3 & a_1+b_1 \\ b_3 & b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

性 质 5

行列式某一行（或某一列）的 k 倍加到另一行（或另一列）的对应元素上去，行列式的值不变.即

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}$$

第 i 行（或第 i 列）乘以数 k 加到第 j 行（或第 j列）上记作 $r_j + k r_i$（或） $c_j + k c_i$.

二、行列式的计算举例

例 3

计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & -11 & 3 & -16 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & -11 & 3 & -16 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & -11 & 3 & -16 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_3+2r_1}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -8 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\frac{1}{2}r_2}{=\!=\!=} -2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & -8 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{r_4+7r_2}{\overset{r_3+5r_r}{=\!=\!=}} -2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{vmatrix} \overset{r_4+(-2)r_3}{=\!=\!=} -2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{vmatrix} = 56.$$

例4 计算行列式$D=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}$.

解 注意到行列式的每一列元素之和都是5，将行列式的第二、三、四行都加到第一行，得

$$D=\begin{vmatrix}5&5&5&5\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+(-1)r_1]{\substack{r_2+(-1)r_1\\r_3+(-1)r_1}}5\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=5.$$

例5

计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{vmatrix}$.

解

$$D=\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2+(-1)r_1 \\ r_3+(-1)r_1}}{\underset{r_4+(-1)r_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} \overset{\substack{c_1+2c_2 \\ c_1+(-2)c_3}}{\underset{c_1+(-1)c_4}{=\!=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 324.$$

例6 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kt} \end{pmatrix}$，若矩阵 $D=\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$，证明：$|D|=|A|\cdot|B|$.

证明 对行列式$|A|$做运算 r_j+kr_i，将$|A|$化为上三角行列式得：

$$|A| \overset{r_j+kr_i}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} \\ & \ddots & \vdots \\ & & p_{kk} \end{vmatrix} = p_{11}p_{22}\cdots p_{kk}.$$

对行列式$|B|$做运算 r_j+kr_i，将$|B|$化为上三角行列式得：

$$|B| \overset{r_j+kr_i}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1t} \\ & \ddots & \vdots \\ & & q_{tt} \end{vmatrix} = q_{11}q_{22}\cdots q_{tt}.$$

对行列式$|\boldsymbol{D}|$的前k行做与行列式$|\boldsymbol{A}|$相同的运算，对行列式$|\boldsymbol{D}|$的后t行做与行列式$|\boldsymbol{B}|$相同的运算，

可以将行列式$|\boldsymbol{D}|$化为上三角行列式：

$$|\boldsymbol{D}|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{kt} \\ & & & b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} & d_{11} & \cdots & d_{1t} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & p_{kk} & d_{k1} & \cdots & d_{kt} \\ & & & b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ & 0 & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} & d_{11} & \cdots & d_{1t} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & p_{kk} & d_{k1} & \cdots & d_{kt} \\ & & & q_{11} & \cdots & q_{1t} \\ & 0 & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & q_{tt} \end{vmatrix},$$

因此，$|\boldsymbol{D}|=p_{11}p_{22}\cdots p_{kk}\cdot q_{11}q_{22}\cdots q_{tt}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$.

可以类似地证明，

$$|\boldsymbol{D}|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{t1} & \cdots & c_{tk} & b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{vmatrix}.$$

例7 计算行列式 $D_{2n}=\underbrace{\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}}_{2n}$，其中未写出的元素为0.

解 把 D_{2n} 中的第 $2n$ 行依次与第 $2n-1$ 行、第 $2n-2$ 行、…、第 3 行、第 2 行交换，共交换了 $2n-2$ 次；

再将第 $2n$ 列依次与第 $2n-1$ 列、第 $2n-2$ 列、…、第 3 列、第 2 列交换，也共交换了 $2n-2$ 次，

得

$$D_{2n}=(-1)^{2n-2}(-1)^{2n-2}\begin{vmatrix} a & b & 0 & & \cdots & & 0 \\ c & d & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & a & & & & b \\ & & & \ddots & & \iddots & \\ \vdots & \vdots & & & a \quad b & & \\ & & & & c \quad d & & \\ & & & \iddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & c & & & & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}D_{2(n-1)}=(ad-bc)D_{2(n-1)}.$$

(右下块阶数为 $2(n-1)$)

同样的做法可得 $D_{2(n-1)}=(ad-bc)D_{2(n-2)}$，

于是有

$$D_{2n}=(ad-bc)D_{2(n-1)}=(ad-bc)^2 D_{2(n-2)}=\cdots=(ad-bc)^{n-1}D_2=(ad-bc)^{n-1}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=(ad-bc)^n .$$

定理 2

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

证明 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则方阵 $\boldsymbol{A}$ 行等价于单位阵 $\boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{A}$ 可通过初等行变换化为单位阵 $\boldsymbol{E}$. 一定存在一个数 $\lambda \neq 0$，使得 $|\boldsymbol{A}| = \lambda |\boldsymbol{E}|$. 而 $|\boldsymbol{E}| = 1$，因此 $|\boldsymbol{A}| = \lambda \neq 0$.

反之，设 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$. 由于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可通过初等行变换化为行最简形矩阵 $\boldsymbol{R}$，因此存在一个数 $\lambda \neq 0$，使得 $|\boldsymbol{A}| = \lambda |\boldsymbol{R}|$. 由 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 可得 $|\boldsymbol{R}| \neq 0$，因此 $\boldsymbol{R}$ 中没有全零行，从而 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}$.

也就是说，方阵 $\boldsymbol{A}$ 行等价于单位阵 $\boldsymbol{E}$，所以方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

例8 判断下列矩阵是否可逆：

(1) $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$； (2) $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

解 (1)因为 $|A|=\begin{vmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & -2\end{vmatrix}=4\neq 0$，

所以矩阵 A 可逆.

(2) 因为 $|B|=\begin{vmatrix}2 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 2\end{vmatrix}=0$，

所以矩阵 B 不可逆.

分块矩阵 $D=\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ 可逆的充分必要条件是 A、 B 均可逆.

特别地，设 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 分别是 $n_i\,(i=1,2,\cdots,s)$ 阶方阵，

则分块对角阵 $D=\begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_s \end{pmatrix}$ 可逆的充分必要条件是 $A_i\,(i=1,2,\cdots,s)$ 均可逆.

且在 $A_i\,(i=1,2,\cdots,s)$ 均可逆的条件下，由

$$\begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^{-1} & O & \cdots & O \\ O & A_2^{-1} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_s^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & O & \cdots & O \\ O & A_2^{-1} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_s^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_s \end{pmatrix},$$

其中 $E_i\,(i=1,2,\cdots,s)$ 是 $n_i\,(i=1,2,\cdots,s)$ 阶单位矩阵，可知

$$D^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & O & \cdots & O \\ O & A_2^{-1} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

例9 设矩阵 $D=\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$，其中 A、B 分别为 m 阶、n 阶可逆阵，求 D^{-1}.

解 若 A、B 均可逆，则 $D=\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ 一定可逆. 于是存在矩阵 $D^{-1}=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$，使得

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_1 & O \\ O & E_2 \end{pmatrix}，且\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_1 & O \\ O & E_2 \end{pmatrix},$$

其中 X_1 是 m 阶方阵，X_4 是 n 阶方阵，X_2 是 $m\times n$ 阶矩阵，X_3 是 $n\times m$ 阶矩阵.

即

$$\begin{pmatrix} AX_1+CX_3 & AX_2+CX_4 \\ OX_1+BX_3 & OX_2+BX_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_1 & O \\ O & E_2 \end{pmatrix}，且\begin{pmatrix} X_1A+X_2O & X_1C+X_2B \\ X_3A+X_4O & X_3C+X_4B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_1 & O \\ O & E_2 \end{pmatrix},$$

应用矩阵相等的概念，得到如下方程组：

$$\begin{cases} AX_1+CX_3=E_1, \\ AX_2+CX_4=O, \\ BX_3=O, \\ BX_4=E_2. \end{cases}，\quad 且 \begin{cases} X_1A=E_1, \\ X_1C+X_2B=O, \\ X_3A=O, \\ X_3C+X_4B=E_2. \end{cases},$$

解第一个方程组如下（解第二个方程组可得同样的结果）：

由于 A 、 B 均可逆，

$BX_3=O$ 等号两端同时左乘 B^{-1} 得 $B^{-1}BX_3=B^{-1}O$ ， 即 $X_3=O$ ；

$BX_4=E_2$ 等号两端同时左乘 B^{-1} 得 $B^{-1}BX_4=B^{-1}E_2$ ， 即 $X_4=B^{-1}$ ；

将 $X_3=O$ 代入 $AX_1+CX_3=E_1$ 得 $AX_1=E_1$ ， 等号两端同时左乘 A^{-1} 得 $A^{-1}AX_1=A^{-1}E_1$ ， 即 $X_1=A^{-1}$ ；

将 $X_4=B^{-1}$ 代入 $AX_2+CX_4=O$ 得 $AX_2=-CB^{-1}$ ， 等号两端同时左乘 A^{-1} 得 $A^{-1}AX_2=-A^{-1}CB^{-1}$ ， 即 $X_2=-A^{-1}CB^{-1}$.

因此， $D^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$.

三、方阵可逆的充要条件

定理 3 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶方阵，则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$.

证明 (1) 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}(i,j)$,由于 $|\boldsymbol{P}(i,j)|=-|\boldsymbol{E}|=-1$，于是 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{P}(i,j)\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{P}(i,j)|\cdot|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$；

若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}(i(k))$，由于 $|\boldsymbol{P}(i(k))|=k|\boldsymbol{E}|=k$，于是 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{P}(i(k))\boldsymbol{B}|=k|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{P}(i(k))|\cdot|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$；

若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}(i(k),j)$，由于 $|\boldsymbol{P}(i(k),j)|=|\boldsymbol{E}|=1$，于是 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{P}(i(k),j)\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{P}(i(k),j)|\cdot|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$.

因此，当 $\boldsymbol{A}$ 是初等矩阵时，有 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是一般的可逆方阵， 则存在若干个初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$， 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$.

于是由(1)有

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s\cdot\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{P}_1|\cdot|\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s\cdot\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{P}_1|\cdot|\boldsymbol{P}_2|\cdot|\boldsymbol{P}_3\cdots\boldsymbol{P}_s\cdot\boldsymbol{B}|=\cdots=|\boldsymbol{P}_1|\cdot|\boldsymbol{P}_2|\cdots|\boldsymbol{P}_s|\cdot|\boldsymbol{B}|$$

$$=|\boldsymbol{P}_1|\cdot|\boldsymbol{P}_2|\cdots|\boldsymbol{P}_{s-2}|\cdot|\boldsymbol{P}_{s-1}\boldsymbol{P}_s|\cdot|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{P}_1|\cdot|\boldsymbol{P}_2|\cdots|\boldsymbol{P}_{s-3}|\cdot|\boldsymbol{P}_{s-2}\boldsymbol{P}_{s-1}\boldsymbol{P}_s|\cdot|\boldsymbol{B}|=\cdots=|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s|\cdot|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|.$$

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 不是可逆方阵，则存在若干个初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$，使得 $\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R}$，

其中 $\boldsymbol{R}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形矩阵，且 $\boldsymbol{R}$ 的最后一行是全零行.

由于初等矩阵的逆矩阵仍旧是初等矩阵，于是

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{RB}|=|\boldsymbol{P}_1^{-1}|\cdot|\boldsymbol{P}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{RB}|=|\boldsymbol{P}_1^{-1}|\cdot|\boldsymbol{P}_2^{-1}|\cdot|\boldsymbol{P}_3^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{RB}|=\cdots=|\boldsymbol{P}_1^{-1}|\cdot|\boldsymbol{P}_2^{-1}|\cdots|\boldsymbol{P}_s^{-1}|\cdot|\boldsymbol{RB}|.$$

由于 $\boldsymbol{RB}$ 的最后一行也是全零行，从而 $|\boldsymbol{RB}|=0$，因此 $|\boldsymbol{AB}|=0$.

另一方面，由 $\boldsymbol{A}$ 不是可逆方阵可知 $|\boldsymbol{A}|=0$，因此，当 $\boldsymbol{A}$ 不是可逆方阵时，$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$ 也成立.

于是 $|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|=0$.

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 、 $\boldsymbol{B}$ ，一般来说 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ ，但总有 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$.

推论4

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，如果存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$ （或者 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$ ），则 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

证明 由 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$ 得

$$1 = |\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|,$$

于是 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$， 从而方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

例10

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{E}$，证明矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆，并求 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$.

证明 因为

$$\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E} \Rightarrow (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E},$$

所以矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$.

目录/Contents

目录/Contents

2.3 行列式按行（列）展开

一、余子式与代数余子式

二、行列式按行（列）展开

一、余子式与代数余子式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

，元素 a_{ij}的余子式记为

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

一、余子式与代数余子式

例如，设矩阵$A=\begin{pmatrix}4&2&1&3\\2&-1&3&0\\-2&3&2&1\\1&-1&0&-3\end{pmatrix}$，则$|A|$的$(3,2)$元素的余子式和代数余子式分别为

$$M_{32}=\begin{vmatrix}4&1&3\\2&3&0\\1&0&-3\end{vmatrix},\quad A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}.$$

$|A|$的$(1,3)$元素的余子式和代数余子式分别为

$$M_{13}=\begin{vmatrix}2&-1&0\\-2&3&1\\1&-1&-3\end{vmatrix},\quad A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=M_{13}.$$

定 理

设行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

则有 $|\boldsymbol{A}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik} \quad (i=1,2,\cdots,n)$

和 $|\boldsymbol{A}|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj} \quad (j=1,2,\cdots,n)$

分别称为 $|\boldsymbol{A}|$ 按第 i 行展开的展开式及按第 j 列展开的展开式.

证明 我们只证明等式 $|\boldsymbol{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \quad (i=1,2,\cdots,n)$，由结论 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$ 即可得到另一个等式.

(1) 先考虑一个特殊情况.

设

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则有

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11},$$

而 $\boldsymbol{A}_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}$， 于是 $|\boldsymbol{A}| = a_{11}A_{11}.$

(2) 再考虑如下形式的行列式：

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将行列式$|\boldsymbol{A}|$的第i行依次与第$i-1$行，第$i-2$行，…，第2行，第1行交换，使第i行换到第1行，这样共交换了$i-1$次.再将所得行列式的第j列依次与第$j-1$列，第$j-2$列，…，第2列，第1列交换，使第j列换到第1列，这样共换了$j-1$次.

因此

$$|\boldsymbol{A}|=(-1)^{i-1}(-1)^{j-1}\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{i-1}(-1)^{j-1}a_{ij}M_{ij}=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}.$$

(3) 对任意的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，它的第 i 行 $(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$ 可以写成

$$(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})=(a_{i1}+0+\cdots+0,0+a_{i2}+0+\cdots+0,\cdots,0+\cdots+0+a_{in}),$$

于是由行列式的拆分（性质 4）可知

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{D}_{i1}|+|\boldsymbol{D}_{i2}|+\cdots+|\boldsymbol{D}_{in}|,$$

其中 $|\boldsymbol{D}_{ij}|\,(j=1,2,\cdots,n)$ 是第 i 行中只有 (i,j) 元素 $a_{ij}\neq 0$，而其余位置上的元素均为零的行列式.

因此

$$|\boldsymbol{A}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\qquad(i=1,2,\cdots,n).$$

例1

计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{按第一}}{\underset{\text{列展开}}{===}} 3\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

（每个行列式均按第二行展开）

$$= 3\times 3\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\times 3\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -9.$$

若将所给行列式直接按第三行展开，则有

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{按第三}}{\underset{\text{行展开}}{=\!=\!=}} 3\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{c_3+(-2)c_2}{=\!=\!=} (-3)\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{按第三}}{\underset{\text{行展开}}{=\!=\!=}} (-3)\times 1\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -9.$$

从上面的计算可以看出，行列式中某一行（列）的元素“0”越多，按这一行（列）展开就越方便.

如果“0”较少，

还可以先利用行列式的性质，将行列式的某行（列）除一个元素外全变为“0”，再按这一行（列）展开.

例2

计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & 3 \\ -5 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & 3 \\ -5 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{c_2+c_1 \\ c_3+(-1)c_1}}{\underset{c_4+c_1}{===}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 4 \\ -5 & -4 & 6 & -3 \end{vmatrix} \overset{\text{按第一}}{\underset{\text{行展开}}{===}} 1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 4 \\ -4 & 6 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2+2r_1}{\underset{r_3+2r_1}{===}} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{按第一}}{\underset{\text{列展开}}{===}} 2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -80.$$

例3

证明范德蒙德(Vandermonde)行列式$|V_n|=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$，其中记号“$\Pi$”表示连乘积.

证明 用数学归纳法证明. 因为$|V_2|=\begin{vmatrix}1&1\\x_1&x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{1\le i<j\le 2}(x_j-x_i)$，所以$n=2$时等式成立.

现在假设等式对于$n-1$阶范德蒙德行列式成立，下面证明等式对n阶范德蒙德行列式也成立.

对n阶范德蒙德行列式$|V_n|$做如下计算：第n行减去第$n-1$行的x_1倍，

第$n-1$行减去第$n-2$行的x_1倍，…，第2行减去第1行的x_1倍，

得：

$$|V_n|=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&x_2-x_1&x_3-x_1&\cdots&x_n-x_1\\0&x_2(x_2-x_1)&x_3(x_3-x_1)&\cdots&x_n(x_n-x_1)\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&x_2^{n-2}(x_2-x_1)&x_3^{n-2}(x_3-x_1)&\cdots&x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}\overset{\text{按第一列展开}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}x_2-x_1&x_3-x_1&\cdots&x_n-x_1\\x_2(x_2-x_1)&x_3(x_3-x_1)&\cdots&x_n(x_n-x_1)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_2^{n-2}(x_2-x_1)&x_3^{n-2}(x_3-x_1)&&x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix},$$

再提取各列的公因子$(x_i - x_1)$，有

$$|V_n| = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

上式右端就是$n-1$阶范德蒙德行列式， 按归纳法假设，有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{2 \le i < j \le n} (x_j - x_i),$$

因此

$$|V_n| = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\prod_{2 \le i < j \le n} (x_j - x_i) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

推 论

设 $A_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ 是行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j$$

证明 因为 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$ 所以只要证明第一个公式即可.

将 $|\boldsymbol{A}|$ 按第 j 行展开，有

二、行列式按行（列）展开

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots + a_{jn}A_{jn},$$

把上式中$a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{jn}$换成$a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$，可得

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

即 $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j).$

关于代数余子式的重要性质：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = |\boldsymbol{A}|\delta_{ij} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & i=j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = |\boldsymbol{A}|\delta_{ij} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & i=j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ 是克罗内克（Kronecker）符号.

目录/Contents

目录/Contents

2.4 矩阵求逆公式与克莱默法则

一、伴随矩阵与矩阵的求逆公式

二、克莱默法则

定 义

设$A=(a_{ij})$是n阶方阵，A_{ij}是$|A|$的(i,j)元素a_{ij}的代数余子式则矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$ 称为矩阵A的伴随矩阵.

引理　设方阵A^*是n阶方阵A的伴随矩阵，则必有 $AA^*=A^*A=\begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix}=|A|E$.

证明　乘积矩阵AA^*的第i行第j列元为:

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\delta_{ij}|A|.$$

即：$AA^*=|A|E$．类似可得，$A^*A=|A|E$.

一、伴随矩阵与矩阵的求逆公式

定理 1 如果 n 阶方阵 A 可逆，则有求逆公式 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$.

证明 如果 n 阶方阵 A 可逆，则有 $|A|\neq 0$. 于是在公式 $AA^*=A^*A=|A|E$ 两端同除以 $|A|$ 得

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)=\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A=E.$$

因此有 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$.

例1 设 2 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，因为 $|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$，所以当 $ad-bc\neq 0$ 时，矩阵 A 可逆.

且由于 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$，

所以 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

一、伴随矩阵与矩阵的求逆公式

例2 判断矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，用求逆公式求逆矩阵.

解 因为 $|A|=-18\neq 0$，所以 A 可逆.

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}=5$，$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}=-1$，$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&3\\3&1\end{vmatrix}=-7$，

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=-1$，$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\3&2\end{vmatrix}=-7$，$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}=5$，

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&3\\3&1\end{vmatrix}=-7$，$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}=5$，$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}=-1$，

于是 A 的伴随矩阵为 $A^*=\begin{pmatrix}5&-1&-7\\-1&-7&5\\-7&5&-1\end{pmatrix}$，　A 的逆矩阵为 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*=\dfrac{1}{-18}\begin{pmatrix}5&-1&-7\\-1&-7&5\\-7&5&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{18}&\frac{1}{18}&\frac{7}{18}\\\frac{1}{18}&\frac{7}{18}&-\frac{5}{18}\\\frac{7}{18}&-\frac{5}{18}&\frac{1}{18}\end{pmatrix}$.

二、克莱默法则

设有一个含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$， n 个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\cdots \qquad\quad \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \longleftrightarrow \quad \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$

二、克莱默法则

定理 2（Cramer（克莱默）法则）：

如果线性方程组 $AX=\beta$ 的系数行列式不等于零，即 $|A|\neq 0$，则方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{|\boldsymbol{A}|},\ x_2=\frac{D_2}{|\boldsymbol{A}|},\cdots,\ x_n=\frac{D_n}{|\boldsymbol{A}|}\ ,$$

其中 $D_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式的第 j 列元素用 β 的元素代替后得到的行列式.

证明 因为 $|A|\neq 0$，所以 A^{-1} 存在. 令 $X=A^{-1}\beta$，则有 $AX=A(A^{-1}\beta)=\beta$，即 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\beta$ 是线性方程组的解.

且由 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的唯一性可知，线性方程组的解是唯一的.

由求逆公式 $A^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}A^*$ 可得 $X=A^{-1}\beta=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}A^*\beta$，

即： $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}b_kA_{k1}\\\sum_{k=1}^{n}b_kA_{k2}\\\vdots\\\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kn}\end{pmatrix}$.

于是 $x_j=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kj}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj})\ (j=1,2,\cdots,n)$. 而将 D_j 按第 j 列展开，有

$$D_j=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,j-1}&b_1&a_{1,j+1}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2,j-1}&b_2&a_{2,j+1}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,j-1}&b_n&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n),$$

所以 $x_j=\frac{D_j}{|\boldsymbol{A}|}\ (j=1,2,\cdots,n)$.

例3 用克莱默法则求解线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$.

解

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

因此 $x_1 = \dfrac{D_1}{|\boldsymbol{A}|} = -2$, $x_2 = \dfrac{D_2}{|\boldsymbol{A}|} = -2$, $x_3 = \dfrac{D_3}{|\boldsymbol{A}|} = 1$.

定理 3

如果线性方程组 $AX=\beta$ 的系数行列式不等于零，即 $|A|\neq 0$，则方程组一定有解，且解是唯一的.

定理 4

如果线性方程组 $AX=\beta$ 无解或有无穷多解，则它的系数行列式必等于零，即 $|A|=0$.

定理 5

如果齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的系数行列式不等于零，即 $|A|\neq 0$，则它只零解 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$.

定理 6

如果齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 有非零解，则必有它的系数行列式等于零，即 $|A|=0$.

例4 问 λ 取何值时，下面的齐次线性方程组有非零解?

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + (\lambda - 1) x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + (\lambda - 1) x_3 = 0. \end{cases}$$

解 若所给齐次线性方程组有非零解， 则它的系数行列式$|\boldsymbol{A}|=0$． 即

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 3 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 3 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 4 \\ 1 & \lambda-1 & \lambda \\ 0 & 2-\lambda & 0 \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} \lambda & 4 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda+2) = 0.$$

所以当 $\lambda = -2$ 或 $\lambda = 2$ 时，该齐次线性方程组有非零解.