線性代數 作業 3

說明：請按題目要求作答。計算題要給出計算過程，證明題要給出證明過程。其中 P (Pass) 類為必做題，HD (High Distinction) 類為選做題。

P 1. 設 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$，求$2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma}$.

P 2. 設 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，問向量$\boldsymbol{\alpha}$能否由向量組$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$表示?

P 3. 判斷下列向量組是線性相關還是線性無關:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}3\\6\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}6\\12\\10\end{pmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{\gamma}_1=\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{pmatrix}6\\4\\7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\begin{pmatrix}9\\11\\12\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_4=\begin{pmatrix}7\\5\\1\end{pmatrix}$.

P 4. 設矩陣 $\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\-1&1&-2\end{pmatrix}$ 等價，則a=_____.

P 5. 已知向量組 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\a\\0\end{pmatrix}$，當$a$取何值時，向量組$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$線性相關？當$a$取何值時向量組$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$線性無關?

P 6. 求下列向量組的秩及一個極大無關組，并將不屬於極大無關組的向量由極大無關線性表示。

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-3\\-3\\-9\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\4\\-8\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}1\\5\\-1\end{pmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\4\\-1\\5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\0\\3\\1\end{pmatrix}$.

P 7. 求下列矩陣的秩：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\1&3&2&2\\3&1&-4&4\end{pmatrix}$；　　(2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\2&1&3&-1&1\\1&2&0&6&-2\\4&3&5&-1&-3\end{pmatrix}$.

P 8. 已知方程組 $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ 無解，則a=_____.

P 9. 求下列其次線性方程組的通解（用基礎解系表示）：

(1) $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3-2x_4=0,\\x_2+x_3+2x_4=0,\\2x_1-x_2+5x_3-2x_4=0;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x_1-3x_2+x_3+x_4=0,\\2x_1-5x_2+x_3+2x_4=0,\\5x_1-7x_2-3x_3+5x_4=0.\end{cases}$

P 10. 求下列非其次線性方程組的通解（要求寫出導出組的基礎解系）：

(1) $\begin{cases}x_1+4x_2-3x_3+4x_4=-2,\\2x_1+x_2+x_3+x_4=3,\\3x_1-2x_2+5x_3-2x_4=8;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=1,\\x_1+3x_2-9x_3-7x_4=1,\\3x_1+x_2-3x_3+3x_4=3.\end{cases}$

P 11. 判斷下列集合對通常的向量加法和數乘運算是否構成線性空間，并說明理由：

(1) $V_1=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T|x_1,x_2,\dots,x_n\in R$且滿足$x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$;

(2) $V_2=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T|x_1,x_2,\dots,x_n\in R$且滿足$x_1+x_2+\cdots+x_n=1\}$;

(3) $V_3=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T|x_1,x_2,\dots,x_n\in R$且滿足$x_1=x_2=\cdots=x_n\}$.

P 12. 設向量組求向量空間 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix}$,

$$\mathfrak{L}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\{\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4+k_5\boldsymbol{\alpha}_5\,|\,k_1,k_2,k_3,k_4,k_5\in\mathbf{R}\}$$

的基與維數。

P 13. 設 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$与$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ 是R^2的兩個基，求從基α_1，α_2到β_1，β_2的過渡矩陣。

HD 1. 已知向量組$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\ (m \geq 2)$線性無關，$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \beta_{m-1} = \alpha_{m-1} + \alpha_m$，$\beta_m = \alpha_m + \alpha_{m+1}$，討論向量組$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$的線性相關性。

HD 2. 設有向量組 A: $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和向量組 B: $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ a \end{pmatrix}$，確定常數$a$，使得向量組 A 能由向量組 B 線性表示，但是向量組 B 不能由向量組 A 線性表示。

HD 3. 設向量組$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是$R^3$的一個基，$\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_2, \beta_2 = 2\alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$.

（1）證明向量組$\beta_1, \beta_2, \beta_3$是$R^3$的一個基;

（2）當 k 為何值時，存在非零向量ζ在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$與基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$下的座標相同，并求出所有的$\zeta$。