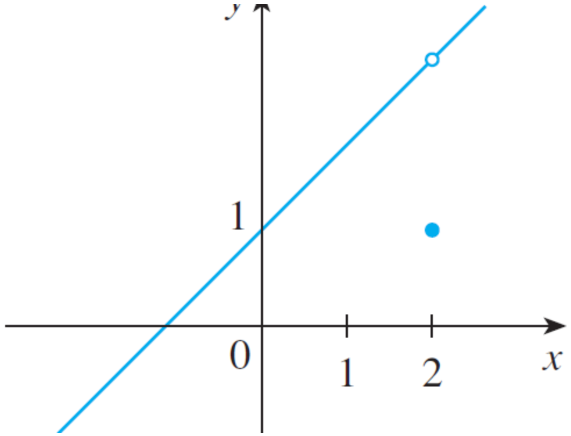
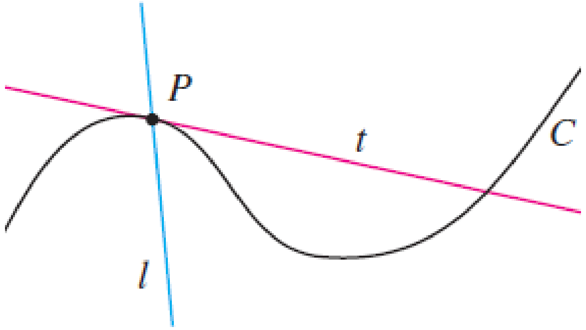




極限

單元一

+ Outline

- 極限
- 漸近線
- 連續性

+ 極限 (Limit)

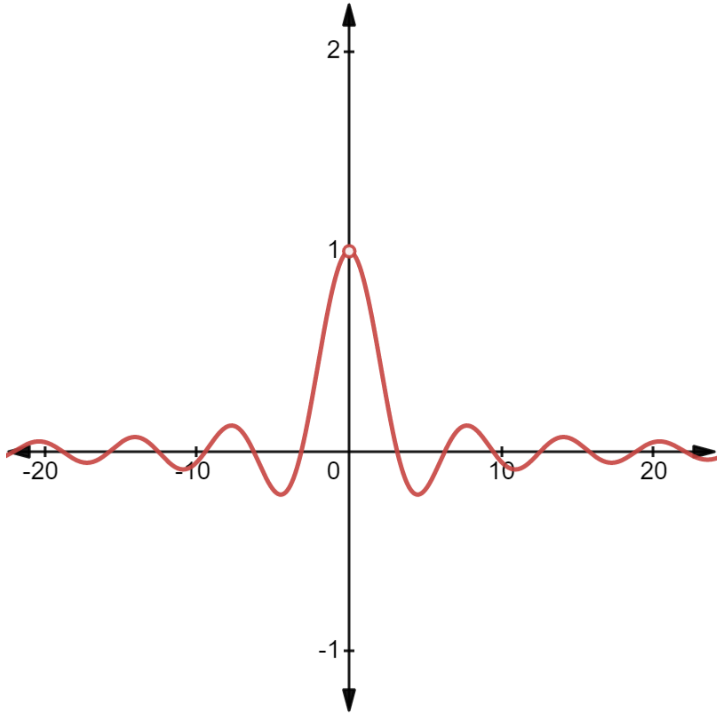
- 當 x 接近 c 但不等於 c 時，$f(x)$ 接近 L，稱 L 為 $f(x)$ 當 x 趨向於 c 時的極限，記作：

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

例1

- 函數的極限描述了一個函數在非常接近點 c 時的情況，而不考慮函數在點 c 的值，例如：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = ?$$



x	$\frac{\sin x}{x}$
-1	0.84147098
-0.5	0.95885108
-0.1	0.99833417
-0.01	0.99998333
0	undefined
0.01	0.99998333
0.1	0.99833417
0.5	0.95885108
1	0.84147098

$\lim_{x\to 0^-} f(x)$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)$

極限不存在 (Limit Does Not Exist)

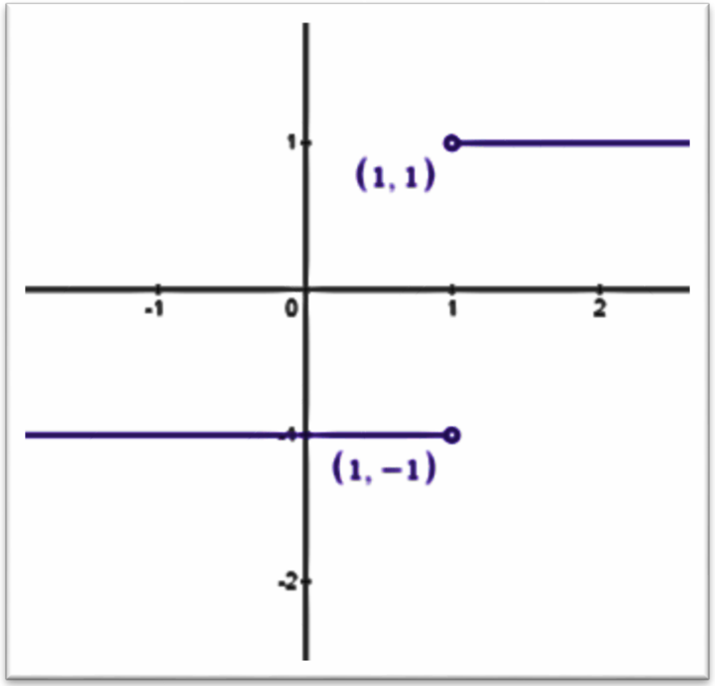
- 下列情況極限不存在(DNE)：
  - $\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$ (f 於點 c 的左極限與右極限不相等)

- 例: $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$$

所以，$\lim_{x \to 1} f(x)$ DNE.



例2: 單邊極限

- 試由 g 的圖象判斷下列各極限:

A. $\lim_{x\to 2^-} g(x)$

B. $\lim_{x\to 2^+} g(x)$

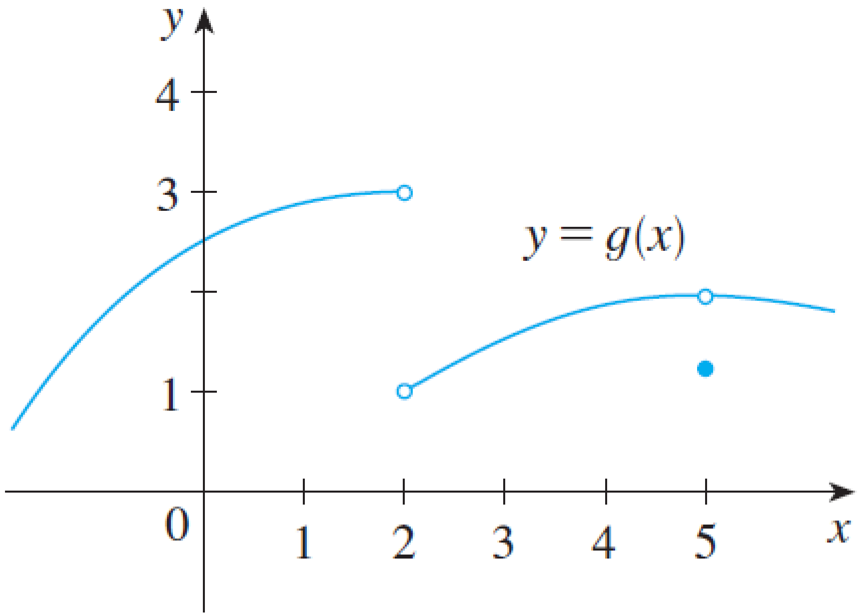
C. $\lim_{x\to 2} g(x)$

D. $\lim_{x\to 5^-} g(x)$

E. $\lim_{x\to 5^+} g(x)$

F. $\lim_{x\to 5} g(x)$

G. $g(5)$



極限的法則 (1.3 定理 A)

- $\lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$
- $\lim_{x\to c} kf(x) = k\lim_{x\to c} f(x)$
- $\lim_{x\to c}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$
- $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$，若 $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$

極限的代換定理 (1.3 定理 B)

- 如果 f 是一個有理函數, 若有 $f(c)$ 定義，則

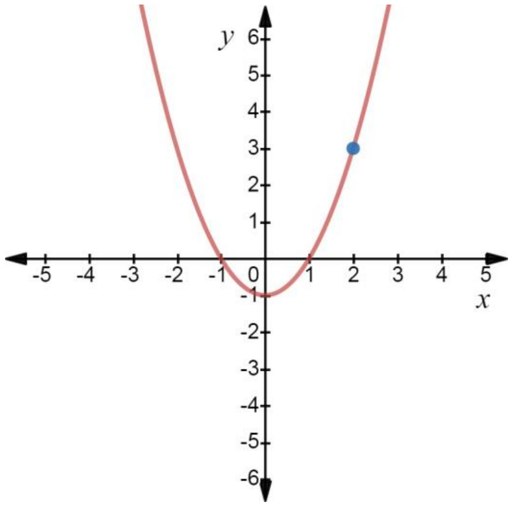
$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

- 例如: $\lim_{x \to 2}(x^2 - 1)$

$$= (2)^2 - 1$$

$$= 3$$

x	$x^2 - 1$
1.9	2.61
1.99	2.9601
1.999	2.996001
2	3
2.001	3.004001
2.01	3.0401
2.1	3.41



例3

- 若存在，求下列的極限值:

A. $\lim_{x \to 1}(-3x^3 - 4x + 8)$

B. $\lim_{x \to 0}\frac{1}{x}$

C. $\lim_{x \to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

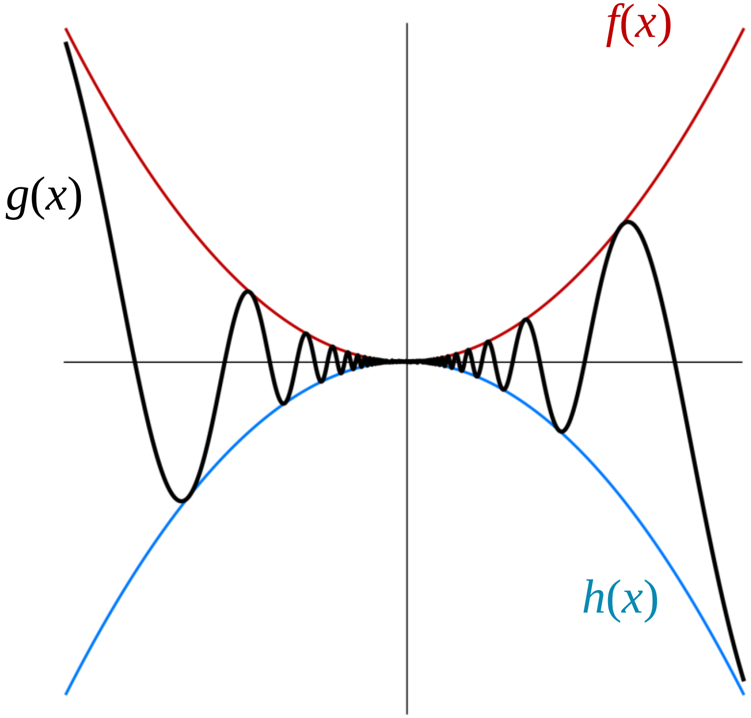
D. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \geq 3 \\ 2x + 1, & x < 3 \end{cases}$； $\lim_{x \to 3} f(x)$

E. $\lim_{x \to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

夾逼定理(Squeeze Theorem, 1.3定理D)

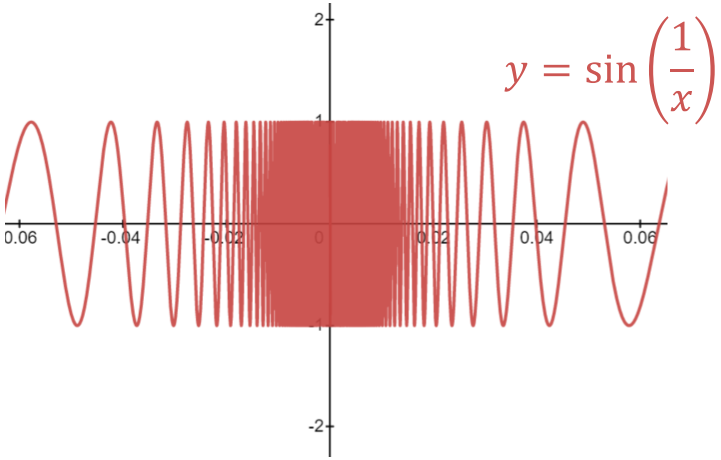
- 若在點 c 附近 (不包含點 c) 有 $f(x) \le g(x) \le h(x)$, 且 $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$, 則

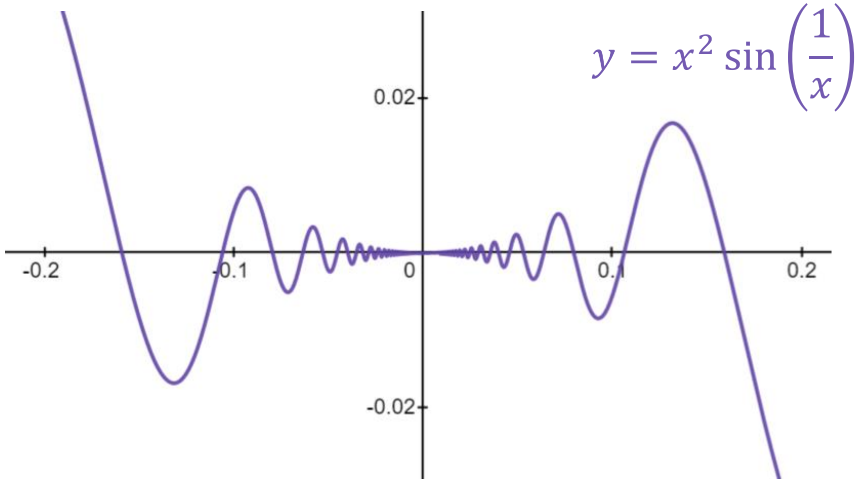
$$\lim_{x \to c} g(x) = L$$



例4

- $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = ?$

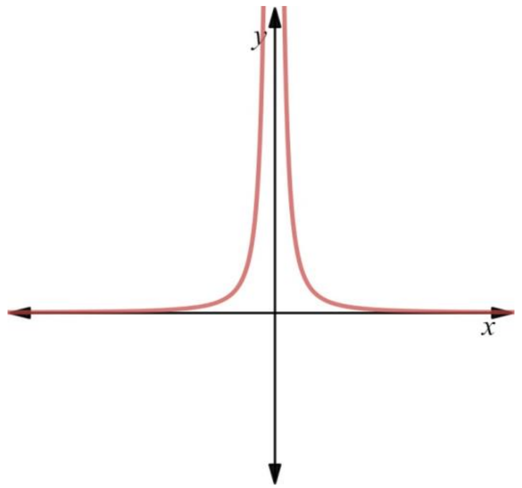




+ 無窮極限 (Limits at infinity)

- 若 $f(x) = \frac{1}{x^2}$，$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = ?$
  - 雖然 $f(x)$在 $x = 0$ 的極限不存在，但可知趨向 0 時 $f(x)$ 的值趨向正無窮，所以更精準的記法為：

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$



  - 那麼，$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = ?$

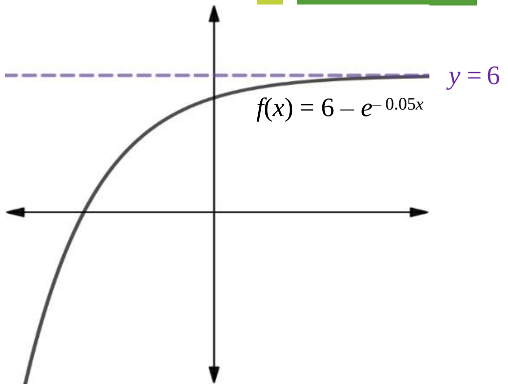
- (1.5 例1可知)

如果 k 是一個正整數, 那麼 $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0.$

漸近線 (Asymptotes)

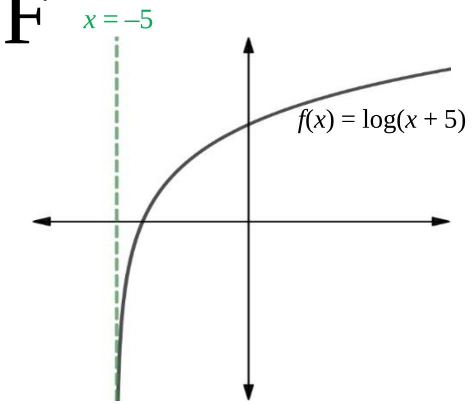
- 直線 $y = b$ 稱作 $f(x)$ 其函數圖象的水平漸近線 (H.A.) IFF

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad 或 \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$



- 直線 $x = c$ 稱作 $f(x)$ 圖形的垂直漸近線 (V.A.) IFF

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty \quad 或 \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$$



例5

- 求 $f(x)$ 當 $x \to +\infty$ 時的極限及所有漸近線:

<u>極限</u> **<u>H.A.</u>** **<u>V.A.</u>**

A. $f(x) = -3x^3 - 4x + 8$

B. $g(x) = \frac{1}{x}$

C. $h(x) = \frac{x^3}{x^2-5x+6}$

D. $k(x) = \frac{x-1}{x^2-5x-6}$

E. $l(x) = \frac{2x^2-x-1}{x^2-1}$

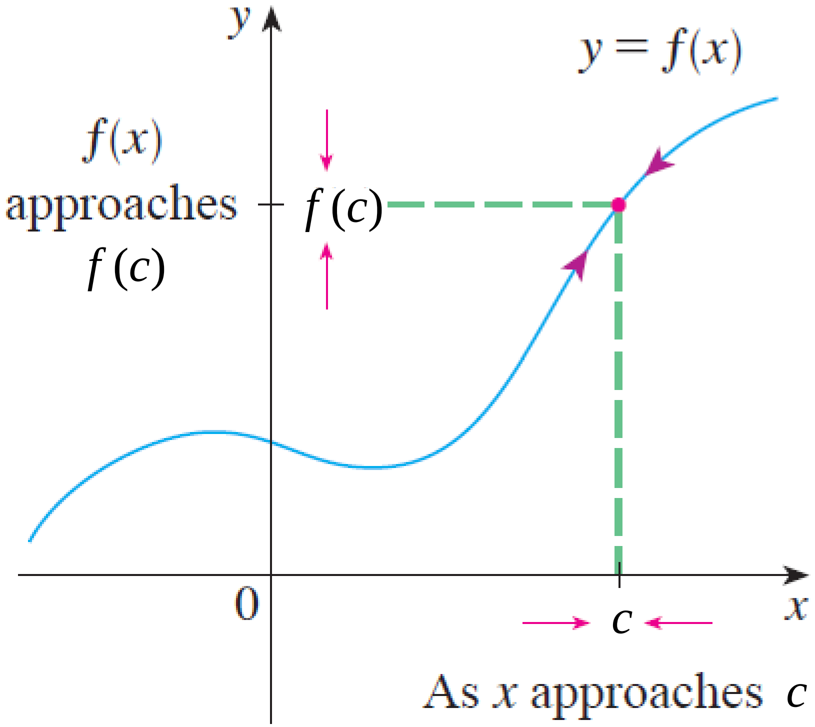
分子和分母同時除以分母中 x 的最高次冪

例5解

函數	漸近線	備註
$f(x) = -3x^3 - 4x + 8$	H.A.: None	$\lim_{x\to\infty}(-3x^3 - 4x + 8) = -\infty$
	V. A.: None	函數在所有 x 值都有意義
$g(x) = \frac{1}{x}$	H.A.: $y = 0$	$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ (分子次數 < 分母次數)
	V. A.: $x = 0$	$g(x) = \frac{1}{x}$ ($x = 0$ 時分母為零, 函數雖然無意義, 但在 $x = 0$ 的左右附近是很大的數)
$h(x) = \frac{x^3}{x^2 - 5x + 6}$	H.A.: None	$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x^2 - x - 1} = \infty$ (分子次數 > 分母次數)
	V. A.: $x = 2$; $x = 3$	$h(x) = \frac{x^3}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x^3}{(x-2)(x-3)}$ ($x = 2$ 或 $x = 3$ 時分母為零)
$k(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 5x - 6}$	H.A.: $y = 0$	$\lim_{x\to\infty}\frac{x - 1}{x^2 + 5x - 6} = 0$ (分子次數 < 分母次數)
	V. A.: x = -1; $x = 6$	$k(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 5x - 6} = \frac{x - 1}{(x+1)(x-6)}$ (x = -1 或 $x = 6$ 時分母為零)
$l(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$	H.A.: $y = 2$	$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = 2$ (分子次數 = 分母次數)
	V. A.: x = -1	$l(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \frac{(2x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x+1}{x+1}(x \neq 1)$ (雖然 x = -1 或 $x = 1$ 時分母為零, 但因為分子和分母有公因式, 化簡後 $x = 1$ 處會對應一個破洞, 因此只有一條 x = -1 的漸近線)

函數在某點連續 (Continuity at a point, 1.6)

- 設 f 是一個定義在包含 c 的開區間內的函數，如果 $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ 成立，則稱 f 在點 c 處連續 (continuous at c)。



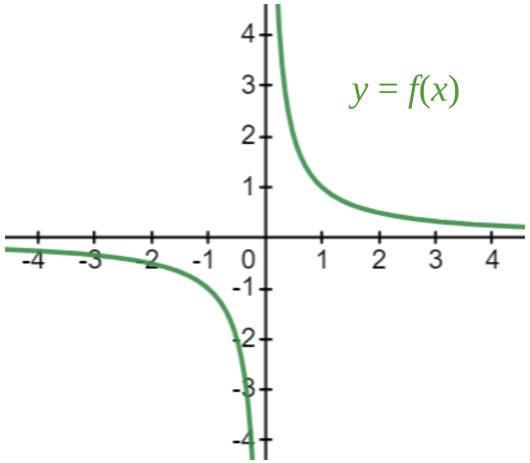
例6

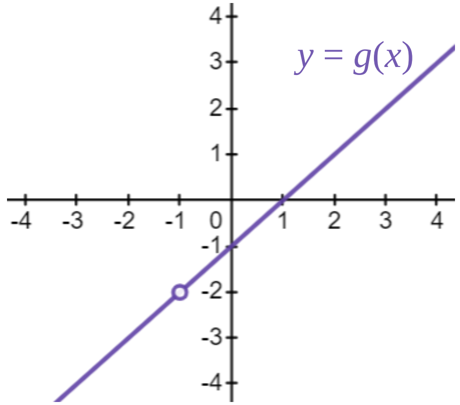
- 判斷下列函數的連續性：

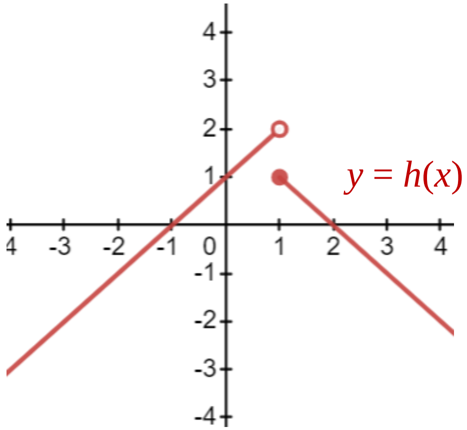
A. $f(x) = \frac{1}{x}$

B. $g(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

C. $h(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ 2-x, & x \geq 1 \end{cases}$







例7

- 設 $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$, 如何定義在 $x = 2$ 上 f 的值, 使得 f 在該點連續？

函數的連續性 (1.6 定理 A~D)

- 定理: 假設 f 與 g 在 $x = c$ 連續且 k 為常數，則下列各函數皆在 $x = c$ 連續：
  - $f + g$;　$f - g$;　kf;　$f\,g$;　f/g 其中 $g(c) \neq 0$.

- 定理: 下列類型函數在其定義域處處連續：
  - 多項式函數;　有理函數;
    根式函數;　三角函數.

函數在區間上連續 (Continuity at an interval)

- 如果 f 在一個開區間 (a, b) 上任意一點連續，則稱 f 在開區間 (a, b) 上連續。

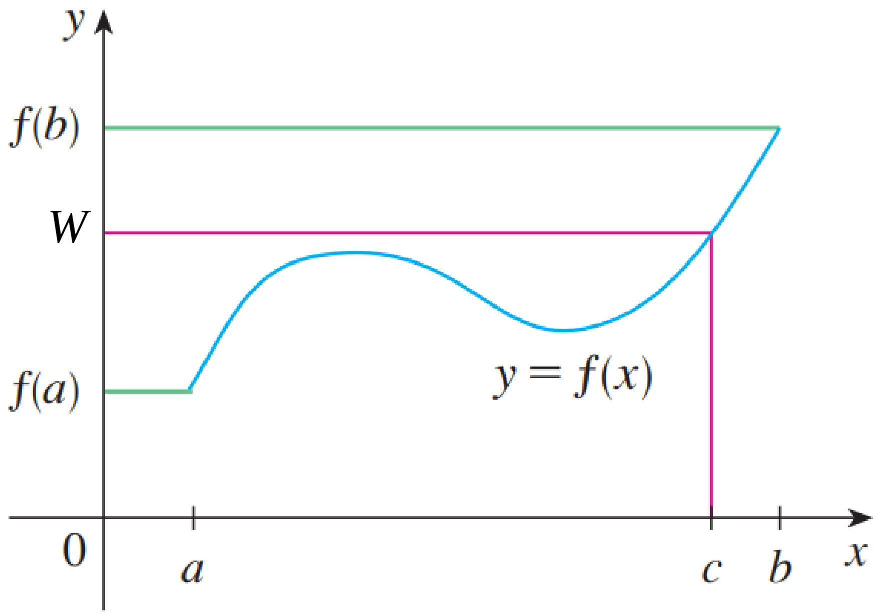
- 如果 f 在一個開區間 (a, b) 上任意一點連續並且在 a 點右連續、在 b 點左連續，則稱
f 在閉區間 $[a, b]$ 上連續。

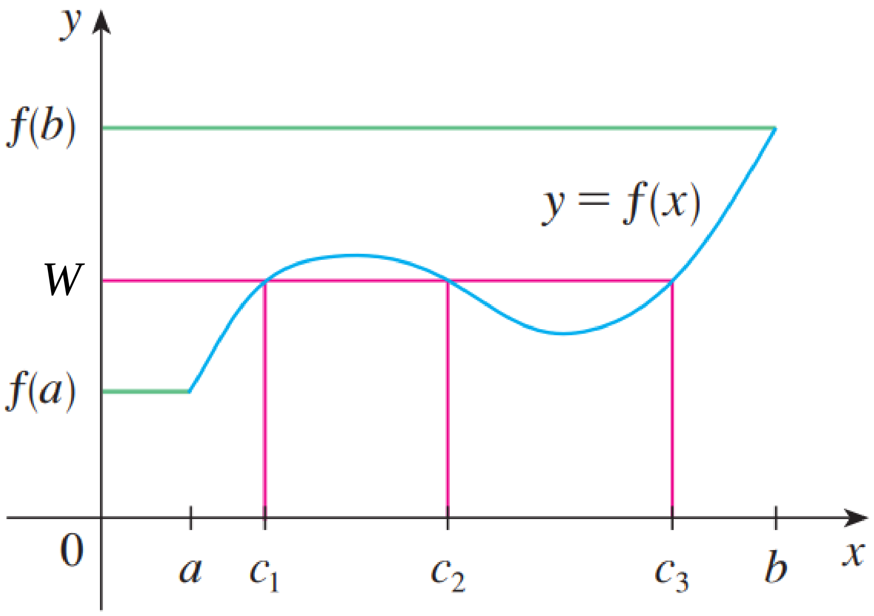
注: 在 a 右連續: $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

在 b 左連續: $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

介值定理 Intermediate Value Theorem (1.6 定理F)

- 設 f 是一個定義在 $[a, b]$ 上的連續函數，並且 W 是 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之間的一個數，那麼至少存在一個數 c 在 a 和 b 之間，使得 $f(c) = W$。





例8

- 用介值定理證明方程 $x - \cos x = 0$ 在 $[0, \pi/2]$ 上有解。

教材對應閱讀內容

- 第 1 章 1.1,1.3(~例8), 1.5, 1.6 (可跳過用ε-δ精確定義的相關部分)
- 對應習題: (可視個人情況定量)
  - 1.1: 1-18, 29-34
  - 1.3: 1-30, 41-48
  - 1.5: 1-36
  - 1.6: 1-33, 52, 56, 60