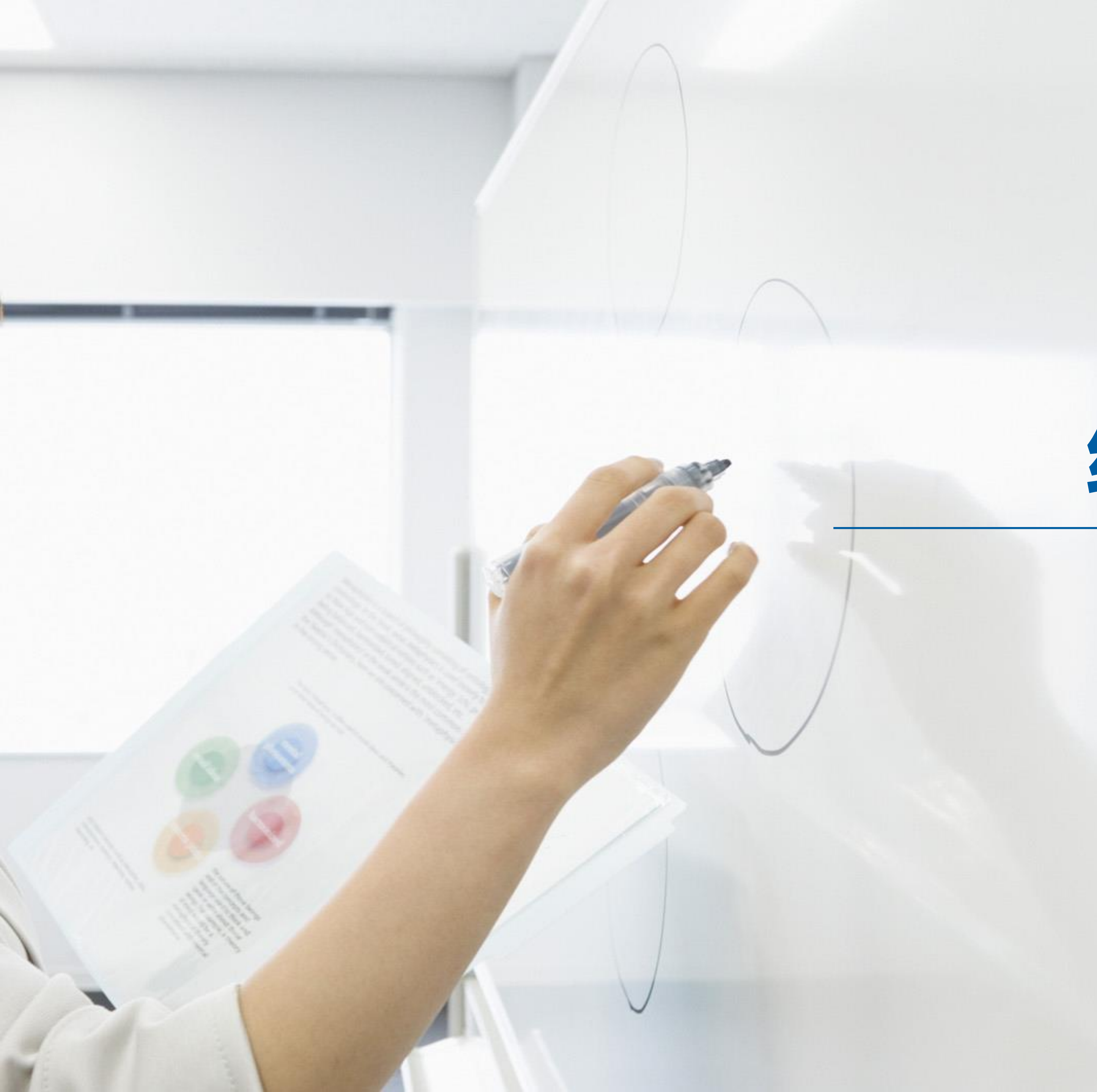

05

线性空间与线性变换

《线性代数》 & 人民邮电出版社

目录/Contents

目录/Contents

5.1 线性空间的定义与性质

一、线性空间的定义

定义 1

设 V是一个非空集合，$\mathbf{R}$为实数域. 对于任意两个元素 $\alpha,\beta\in V$， 在 V中总有唯一确定的一个元素γ与之对应， 称为α与β的和，记作$\gamma=\alpha+\beta$. 对于$\mathbf{R}$中任一数 λ与 V中任一元素α，在 V中总有唯一确定的一个元素 δ与之对应， 称为λ与 α的数量乘积， 记作 $\delta=\lambda\alpha$. 如果这两种运算满足以下八条运算规律 (设$\alpha,\beta,\gamma\in V$；$\lambda,\mu\in\mathbf{R}$):

一、线性空间的定义

(i) 加法交换律： $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(ii) 加法结合律： $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(iii) 在 V 中存在零元素 $\mathbf{0}$；对于任何 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，都有是 $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$;

(iv) 负元素：对于任何 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，都有是 $\boldsymbol{\alpha}$的负元素 $\boldsymbol{\beta}\in V$，使 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$;

(v) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(vi) $\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})=(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}$;

(vii) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}$;

(viii) $\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$.

一、线性空间的定义

那么，V 就称为实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

线性空间有时也被称为向量空间， 线性空间中的元素不论其本来的性质如何，统称为向量. 线性空间中满足上述八条规律的加法及数乘运算，统称为线性运算.

例 1

次数不超过 n 的多项式的全体，记作 $P[x]_n$， 即

$$P[x]_n = \{p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbf{R}\},$$

对于通常的多项式加法、数乘多项式的乘法构成线性空间.

这是因为：通常的多项式加法、数乘多项式的乘法两种运算显然满足线性运算规律，

故只要验证 $P[x]_n$ 对运算封闭.

一、线性空间的定义

对 $P[x]_n$ 中任意两个多项式 $p(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$，$q(x)=b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0$，及任意的实数 λ，有

$$p(x)+q(x)=(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)+(b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0)=(a_n+b_n)x^n+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\in P[x]_n,$$

$$\lambda p(x)=\lambda(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)=(\lambda a_n)x^n+\cdots+(\lambda a_1)x+(\lambda a_0)\in P[x]_n,$$

所以 $P[x]_n$ 是一个线性空间.

一、线性空间的定义

例2 设集合

$$C[a,b]=\{f(x)|f(x)\text{为}[a,\mathrm{b}]\text{上的连续函数}\}$$

是定义在区间$[a,b]$上的连续实函数全体所成的集合，关于通常的函数加法和数乘函数的乘法构成线性空间.

这是因为：通常的函数加法及乘数运算显然满足线性运算规律，并且根据连续函数的运算性质可知， $C[a,b]$对通常的函数加法和数乘函数的乘法封闭.

例 3

设 $M_{m\times n}(\mathbf{R})=\left\{\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \middle| a_{ij}\,(1\le i\le m;1\le j\le n)\in\mathbf{R}\right\}$

是实数域上的矩阵全体所成的集合．显然 $M_{m\times n}(\mathbf{R})$ 是非空的，$M_{m\times n}(\mathbf{R})$ 对通常的矩阵加法和数乘构成线性空间．这是因为：通常的矩阵加法和数乘运算显然满足线性运算规律，并且 $M_{m\times n}(\mathbf{R})$ 对通常的矩阵加法和数乘运算封闭．

一、线性空间的定义

特别地，当 $m=n$ 时， n阶方阵的全体所成的集合

$$M_n(\mathbf{R})=\left\{\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij}\,(1\le i,j\le n)\in\mathbf{R}\right\}$$

也是实数域上的线性空间.

例 4

n 次多项式的全体

$$Q[x]_n = \{p = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbf{R}, \text{且} a_n \neq 0\},$$

对于通常的多项式加法和乘数运算不构成线性空间. 这是因为

$0p = 0x^n + \cdots + 0x + 0 \notin Q[x]_n$，即 $Q[x]_n$ 对运算不封闭.

例 5

n 个有序实数组成的数组的全体

$$S^n = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \,\middle|\, x_1, x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{R} \right\}$$

对于通常的有序数组的加法及如下定义的乘法

$$\lambda \circ (x_1, \cdots, x_n)^T = (0, \cdots, 0)^T$$ 不构成线性空间.

可以验证 S^n 对运算封闭，但是 $1 \circ x = 0$，不满足第五条运算规律，即所定义的运算不是线性运算，所以不是线性空间.

例 6

正实数的全体，记作 $\mathbf{R}^+$，在其中定义加法及乘数运算为

$$a \oplus b = ab\left(a,b \in \mathbf{R}^+\right), \lambda \circ a = a^{\lambda}\left(\lambda \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}^+\right),$$

验证对上述加法与乘数运算构成线性空间.

证明

首先验证对定义的加法和数乘运算封闭.

对加法封闭：对任意的 $a,b \in \mathbf{R}^+$，有 $a \oplus b = ab \in \mathbf{R}^+$;

对数乘封闭：对任意的 $\lambda \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}^+$，有 $\lambda \circ a = a^{\lambda} \in \mathbf{R}^+$.

一、线性空间的定义

下面验证定义的运算是线性运算.

01 OPTION $a \oplus b = ab = ba = b \oplus a;$

02 OPTION $(a \oplus b) \oplus c = (ab) \oplus c = (ab)c = a(bc) = a \oplus (b \oplus c);$

03 OPTION 在 $\mathbf{R}^+$ 中存在零元素 1，对于任何 $a \in \mathbf{R}^+$ 都有是 $a \oplus 1 = a \cdot 1 = a;$

04 OPTION 对于任何 $a \in \mathbf{R}^+$，都有是 a 的负元素 $a^{-1} \in \mathbf{R}^+$ 使 $a \oplus a^{-1} = a \cdot a^{-1} = 1.$

一、线性空间的定义

05 OPTION $1 \circ a = a^1 = a$;

06 OPTION $\lambda \circ (\mu \circ a) = \lambda \circ a^\mu = (a^\mu)^\lambda = a^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \circ a$;

07 OPTION $(\lambda + \mu) \circ a = a^{\lambda+\mu} = a^\lambda a^\mu = a^\lambda \oplus a^\mu = \lambda \circ a + \mu \circ a$;

08 OPTION $\lambda \circ (a \oplus b) = \lambda \circ (ab) = (ab)^\lambda = a^\lambda b^\lambda = a^\lambda \oplus b^\lambda = \lambda \circ a \oplus \lambda \circ b.$

因此， $\mathbf{R}^+$ 对于所定义的运算构成线性空间.

性质 1 零元素是唯一的.

证明 设$\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$是线性空间$V$ 中的两个零元素，即对任何$\boldsymbol{\alpha} \in V$ ，有$\alpha + \mathbf{0}_1 = \alpha, \alpha + \mathbf{0}_2 = \alpha$,

于是有

$$\mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2, \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1$$

所以

$$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2 .$$

性质 2 任一元素的负元素是唯一的（以后将$\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素记作$-\boldsymbol{\alpha}$）.

证明 设$\boldsymbol{\alpha}$有两个负元素β, γ，即$\alpha + \beta = \mathbf{0}, \alpha + \gamma = \mathbf{0}$. 于是

$$\beta = \beta + \mathbf{0} = \beta + (\alpha + \gamma) = (\beta + \alpha) + \gamma = \mathbf{0} + \gamma = \gamma .$$

二、线性空间的性质

性质 3 $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0};\ (-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha};\ \lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

证明 $\boldsymbol{\alpha}+0\boldsymbol{\alpha}=1\boldsymbol{\alpha}+0\boldsymbol{\alpha}=(1+0)\boldsymbol{\alpha}=1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$，所以$0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$， $\boldsymbol{\alpha}+(-1)\boldsymbol{\alpha}=1\boldsymbol{\alpha}+(-1)\boldsymbol{\alpha}=[1+(-1)]\boldsymbol{\alpha}=0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,

所以
$$(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha};$$

$$\lambda\mathbf{0}=\lambda[\boldsymbol{\alpha}+(-1)\boldsymbol{\alpha}]=\lambda\boldsymbol{\alpha}+(-\lambda)\boldsymbol{\alpha}=[\lambda+(-\lambda)]\boldsymbol{\alpha}=0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}.$$

性质 4 如果$\lambda\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，则$\lambda=0$或$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

证明 若$\lambda\neq0$，在$\lambda\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$两边乘$\dfrac{1}{\lambda}$，得

$$\frac{1}{\lambda}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\frac{1}{\lambda}\mathbf{0}=\mathbf{0},$$

而
$$\frac{1}{\lambda}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)\boldsymbol{\alpha}=1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha},$$

所以$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

定义2

设V是实数域R上线性空间，W是V的一个非空子集. 如果W关于V的加法和数乘运算也构成线性空间，则称W是V的一个子空间.

例如，n元齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解空间

$$S=\{\mathrm{x}\in R^n\,|\,\mathrm{Ax}=0\}$$

就是线性空间R^n的子空间.

定理 实数域R上线性空间V的非空子集W成为 R 的一个子空间的充分必要条件是W关于V的加法和数乘是封闭的.

例7

在实数域 $\mathbf{R}$ 上线性空间

$$M_n(\mathbf{R})=\left\{ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij}\,(1\le i, j\le n)\in \mathbf{R} \right\}$$

中，对角矩阵所成的集合

$$D_n(\mathbf{R})=\left\{ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \middle| \, a_{ii}\,(1\le i\le n)\in \mathbf{R} \right\}$$

是 $M_n(\mathbf{R})$ 的非空子集，且 $D_n(\mathbf{R})$ 关于 $M_n(\mathbf{R})$ 的加法和数乘是封闭的，所以 $D_n(\mathbf{R})$ 是

$M_n(\mathbf{R})$ 的一个子空间.

目录/Contents

目录/Contents

5.2 维数、基与坐标

一、线性空间的基、维数与坐标

定义 1 在线性空间V 中，如果存在n 个元素$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 满足

(i) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关； (ii) V 中任一元素α总可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，

那么，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 就称为线性空间V 的一个基，n 称为线性空间V 的维数，记作$\dim V = n$。

只含一个零元素的线性空间称为零空间，零空间没有基，规定它的维数为 0. n 维线性空间V 也记作V_n.

对于n 维线性空间V_n，如果已知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是V_n 的一个基，则V_n 是由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 所生成的线性空间，即

$$V_n = \{\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in R\},$$

这就较清楚地显示出线性空间V_n 的构造.

一、线性空间的基、维数与坐标

如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$V_n$的一个基，则对任何$\boldsymbol{\alpha}\in V_n$，都有唯一的一组有序数组$x_1,x_2,\cdots,x_n$，使

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n\text{；}$$

反之，任给一组有序数组$x_1,x_2,\cdots,x_n$，总有唯一的元素

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n\in V_n\text{.}$$

这样V_n的元素$\boldsymbol{\alpha}$与有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$之间存在着一种一一对应的关系，因此可以用这组有序数组来表示元素$\boldsymbol{\alpha}$.

定义2

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是线性空间$V_n$的一个基，对于任一元素$\alpha\in V_n$，总有且仅有一组有序数组$x_1,x_2,\cdots,x_n$，使

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n,$$

$x_1,x_2,\cdots,x_n$这组有序数就称为元素α在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标，并记作

$$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}.$$

例 1

在线性空间$P[x]_4$中，$p_0=1, p_1=x, p_2=x^2, p_3=x^3, p_4=x^4$就是它的一个基，任一不超过 4 次的多项式

$$p=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$$

都可表示为

$$p=a_0p_0+a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3+a_4p_4,$$

因此p 在这个基下的坐标为$(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4)^{\mathrm{T}}$.

例2 在线性空间

$$M_2(\mathbf{R})=\left\{\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| a_{ij}\,(1\le i,j\le 2)\in \mathbf{R}\right\}$$

中，由于对任一向量 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})$ 有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

且容易证明

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

线性无关，所以 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 是 $M_2(\mathbf{R})$ 的一个基，向量 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 在这个基下的

坐标就是 $(a_{11},a_{12},a_{21},a_{22})^{\mathrm{T}}$.

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是线性空间$V_n$中的两个基，且

$$\begin{cases} \beta_1 = p_{11}\alpha_1 + p_{12}\alpha_2 + \cdots + p_{1n}\alpha_n, \\ \beta_2 = p_{21}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + \cdots + p_{2n}\alpha_n, \\ \quad \vdots \\ \beta_n = p_{n1}\alpha_1 + p_{n2}\alpha_2 + \cdots + p_{nn}\alpha_n, \end{cases} \tag{2-1}$$

将式(2-1)写成矩阵形式为

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\boldsymbol{P}. \tag{2-2}$$

式(2-1)和(2-2)称为从基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的基变换公式，矩阵$\boldsymbol{P}$称为由基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵，由于$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性无关，故过渡矩阵$\boldsymbol{P}$可逆.

二、基变换与坐标变换

设V_n中的元素$\boldsymbol{\alpha}$在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，在基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$下的坐标为$(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$.

若两个基满足关系式(2-2)，于是有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，而且过渡矩阵$\boldsymbol{P}$可逆，所以有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\quad\text{或}\quad\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\qquad(2\text{-}3)$$

例 3 在$P[x]_4$中取两个基为$p_0=1,p_1=x,p_2=x^2,p_3=x^3,p_4=x^4$，及$q_0=1,q_1=1+x,q_2=(1+x)^2,q_3=(1+x)^3,q_4=(1+x)^4$，求从基$p_0,p_1,p_2,p_3,p_4$到基$q_0,q_1,q_2,q_3,q_4$的过渡矩阵，以及任一不超过 4 次的多项式$p=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$在这两组基下的坐标和坐标变换公式.

解 将q_0,q_1,q_2,q_3,q_4用p_0,p_1,p_2,p_3,p_4表示，有

$$\left(1,1+x,(1+x)^2,(1+x)^3,(1+x)^4\right)=\left(1,x,x^2,x^3,x^4\right)\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&0&1&3&6\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

因此，从基p_0,p_1,p_2,p_3,p_4到基q_0,q_1,q_2,q_3,q_4的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&0&1&3&6\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

二、基变换与坐标变换

设任一不超过 4 次的多项式 $p=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$ 在基 q_0,q_1,q_2,q_3,q_4 下的坐标为 $(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)^{\mathrm{T}}$，

由例 1 知，这个多项式在基 p_0,p_1,p_2,p_3,p_4 下的坐标是 $(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)^{\mathrm{T}}$，

从而有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}.$$

用矩阵的初等行变换求 $\boldsymbol{P}^{-1}$，把矩阵 $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{E})$ 中的 $\boldsymbol{P}$ 变成 $\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{E}$ 即变成 $\boldsymbol{P}^{-1}$．计算如下

二、基变换与坐标变换

$$
(P|E)=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1&1&1&1&1&1&0&0&0&0\\
0&1&2&3&4&0&1&0&0&0\\
0&0&1&3&6&0&0&1&0&0\\
0&0&0&1&4&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&1
\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1&1&1&1&0&1&0&0&0&-1\\
0&1&2&3&0&0&1&0&0&-4\\
0&0&1&3&0&0&0&1&0&-6\\
0&0&0&1&0&0&0&0&1&-4\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&1
\end{array}\right)
$$

$$
\to\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1&1&1&0&0&1&0&0&-1&3\\
0&1&2&0&0&0&1&0&-3&8\\
0&0&1&0&0&0&0&1&-3&6\\
0&0&0&1&0&0&0&0&1&-4\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&1
\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1&1&0&0&0&1&0&-1&2&-3\\
0&1&0&0&0&0&1&-2&3&-4\\
0&0&1&0&0&0&0&1&-3&6\\
0&0&0&1&0&0&0&0&1&-4\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&1
\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1&0&0&0&0&1&-1&1&-1&1\\
0&1&0&0&0&0&1&-2&3&-4\\
0&0&1&0&0&0&0&1&-3&6\\
0&0&0&1&0&0&0&0&1&-4\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&1
\end{array}\right),
$$

多项式$p=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$在基$q_0,q_1,q_2,q_3,q_4$下的坐标为

$$
\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&1\\0&1&-2&3&-4\\0&0&1&-3&6\\0&0&0&1&-4\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_0-a_1+a_2-a_3+a_4\\a_1-2a_2+3a_3-4a_4\\a_2-3a_3+6a_4\\a_3-4a_4\\a_4\end{pmatrix}.
$$

目录/Contents

目录/Contents

5.3 线性变换

定义1

设V_n, U_m分别是n维和m维线性空间，如果映射$T: V_n \to U_m$满足

(i) 任给$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in V_n$，有

$$T(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) = T(\boldsymbol{\alpha}_1) + T(\boldsymbol{\alpha}_2);$$

(ii)任给$\boldsymbol{\alpha} \in V_n, \lambda \in R$（从而$\lambda\boldsymbol{\alpha} \in V_n$），有

$$T(\lambda\boldsymbol{\alpha}) = \lambda T(\boldsymbol{\alpha}),$$

那么，T就称为从V_n到U_m的线性映射，或称为线性变换.

简言之，线性映射就是保持线性组合的对应的映射.

一、线性变换的定义

例如，

$$T: R^n \to R^m, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

就确定了一个从R^n到R^m的映射，并且是个线性映射.

特别地，如果在定义 1 中取$V_n = U_m$，那么T 是一个从线性空间V_n到其自身的线性映射，称为线性空间V_n中的线性变换.

一、线性变换的定义

例 1 设V是实数域$\mathbf{R}$上的一个线性空间，对任意的$\boldsymbol{\alpha} \in V$，分别定义如下三个$V \to V$的映射：

(1) $I(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$；

(2) $O(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$，其中$\mathbf{0}$是$V$中的零向量；

(3) $T(\boldsymbol{\alpha}) = k\boldsymbol{\alpha}$，其中$k \in \mathbf{R}$是固定的数.

则这三个映射都是线性空间V上的线性变换，分别称为V的恒等变换、零变换和数乘变换.

例2

在线性空间 $P[x]_3$ 中

(1) 微分运算 D 是一个线性变换.这是因为任取

$$p=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\in P[x]_3,\quad q=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0\in P[x]_3,$$

则有

$$Dp=3a_3x^2+2a_2x+a_1,\quad Dq=3b_3x^2+2b_2x+b_1.$$

于是

$$D(p+q)=D\left[(a_3+b_3)x^3+(a_2+b_2)x^2+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\right]=3(a_3+b_3)x^2+2(a_2+b_2)x+(a_1+b_1)$$

$$=3a_3x^2+2a_2x+a_1+3b_3x^2+2b_2x+b_1=Dp+Dq\text{，}$$

$$D(\lambda p)=D\left(\lambda a_3x^3+\lambda a_2x^2+\lambda a_1x+\lambda a_0\right)=\lambda 3a_3x^2+\lambda 2a_2x+\lambda a_1=\lambda\left(3a_3x^2+2a_2x+a_1\right)=\lambda Dp\text{.}$$

(2) 如果$T(p)=1$，那么T 是个变换，但不是线性变换.这是因为

$$T(p+q)=1,\quad T(p)+T(q)=1+1=2\text{，}$$

故

$$T(p+q)\neq T(p)+T(q).$$

一、线性变换的定义

例3 在 $\mathbf{R}^2=\left\{\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\middle|\, x,y\in\mathbf{R}\right\}$ 中定义映射 $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 为：$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，

对任意的 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^2$ 及任意实数 $\lambda\in\mathbf{R}$，有

$$T(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=T\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=T(\boldsymbol{\alpha})+T(\boldsymbol{\beta}),$$

$$T(\lambda\boldsymbol{\alpha})=T\begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \lambda y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \lambda y_1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\lambda T(\boldsymbol{\alpha}),$$

所以 T 是 $\mathbf{R}^2$ 上的线性变换.

这个线性变换的几何意义是：T 将 xoy 平面上任一向量绕原点按逆时针方向旋转 φ 角.

一、线性变换的定义

例 4 设有 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$.

定义 $\mathbf{R}^n$ 中的变换 $\boldsymbol{y}=T(\boldsymbol{x})$ 为 $T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n)$，对任意的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^n$ 及任意常数 $\lambda\in\mathbf{R}$，有

$$T(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=T(\boldsymbol{\alpha})+T(\boldsymbol{\beta}),$$

$$T(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda T(\boldsymbol{\alpha}),$$

因此 T 为 $\mathbf{R}^n$ 上的线性变换.

二、线性变换的性质

性质 1 $T\mathbf{0}=\mathbf{0}, T(-\alpha)=-T\alpha$；

性质 2 若$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$，则$T\beta=k_1T\alpha_1+k_2T\alpha_2+\cdots+k_mT\alpha_m$；

性质 3 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，则$T\alpha_1,T\alpha_2,\cdots,T\alpha_m$亦线性相关.

注意: 性质 3 的逆命题是不成立的，即若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，则$T\alpha_1,T\alpha_2,\cdots,T\alpha_m$不一定线性无关.

例如，当线性变换是零变换时，$T\alpha_i=\mathbf{0}\ (i=1,2,\cdots,m)$，从而尽管$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，但是$T\alpha_1,T\alpha_2,\cdots,T\alpha_m$却线性相关.

性质 4

线性变换T 的像集$T(V_n)$是一个线性空间，称为线性变换T 的像空间.

证明 设$\beta_1,\beta_2\in T(V_n)$，则有$\alpha_1,\alpha_2\in V_n$，使$T\alpha_1=\beta_1,T\alpha_2=\beta_2$，从而

$$\beta_1+\beta_2=T\alpha_1+T\alpha_2=T(\alpha_1+\alpha_2)\in T(V_n)\quad(因\ \alpha_1+\alpha_2\in V_n),$$

$$\lambda\beta_1=\lambda T\alpha_1=T(\lambda\alpha_1)\in T(V_n)\quad(因\ \lambda\alpha_1\in V_n),$$

$T(V_n)$对V_n中的线性运算封闭，故它是V_n的一个线性子空间.

二、线性变换的性质

性质 5　使 $T\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 的 $\boldsymbol{\alpha}$ 的全体 $S_T=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}\in V_n, T\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\}$ 也是 V_n 的一个线性子空间，称 S_T 为线性变换 T 的核.

证明　$S_T\subset V_n$，且对任意 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in S_T$，有 $T\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}, T\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$，于是

$$T(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=T\boldsymbol{\alpha}_1+T\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}，\quad T(\lambda\boldsymbol{\alpha}_1)=\lambda T\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}，$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\in S_T$，$\lambda\boldsymbol{\alpha}_1\in S_T$. 这说明 S_T 对 V_n 中的线性运算封闭，所以 S_T 是 V_n 的一个线性子空间.

例如，例 4 中所给的线性变换 T 的像空间就是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 所生成的线性空间

$$T(\mathbf{R}^n)=\{\boldsymbol{y}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}，$$

而 T 的核 S_T 就是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解空间.

三、线性变换的矩阵表示式

线性变换是一个很抽象的概念，如何将它具体化呢？我们发现，如果给定线性空间V_n的一个基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 则对V_n中任意向量$\boldsymbol{\alpha}$ 有

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

由线性变换的性质得：

$$T(\boldsymbol{\alpha}) = k_1T(\boldsymbol{\alpha}_1) + k_2T(\boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_nT(\boldsymbol{\alpha}_n).$$

三、线性变换的矩阵表示式

于是 α 在 T 下的像就由基的像 $T(\boldsymbol{\alpha}_1),T(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 所唯一确定. 而 $T(\boldsymbol{\alpha}_i)\in V\ (i=1,2,\cdots,n)$,

所以 $T(\boldsymbol{\alpha}_i)\in V\ (i=1,2,\cdots,n)$ 也可由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 来线性表示，即有

$$
\begin{cases}
T(\boldsymbol{\alpha}_1)=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,\\
T(\boldsymbol{\alpha}_2)=a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n,\\
\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\\
T(\boldsymbol{\alpha}_n)=a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n.
\end{cases}
$$

三、线性变换的矩阵表示式

由上式得：$T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n))=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\boldsymbol{A}$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$称为线性变换T在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵.

显然，矩阵 $\boldsymbol{A}$由基的像 $T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)$ 唯一确定.

反之，如果给定一个矩阵 $\boldsymbol{A}$作为某个线性变换 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的矩阵， 也就是给出了这个基在变换下的像， 根据变换T保持线性关系的特性，我们来推导变换T必须满足的关系式.

三、线性变换的矩阵表示式

V_n 中的任意向量记为 $\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{\alpha}_i$ 有

$$T\boldsymbol{\alpha}=T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{\alpha}_i\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i T(\boldsymbol{\alpha}_i)=\left(T(\boldsymbol{\alpha}_1),T(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha}_n)\right)\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix},$$

即 $$T\left((\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix}\right)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix}.$$

三、线性变换的矩阵表示式

定理 1 设线性变换T 在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵是A，向量$\boldsymbol{\alpha}$ 与$T(\alpha)$在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标分别为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$，

则有

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

按坐标表示，有

$$T(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}.$$

例 5

在 $P[x]_3$ 中取基 $p_1=1, p_2=x, p_3=x^2, p_4=x^3$ 求微分运算 D 的矩阵.

解

$$\begin{cases} Dp_1=0=0p_1+0p_2+0p_3+0p_4, \\ Dp_2=1=1p_1+0p_2+0p_3+0p_4, \\ Dp_3=2x=0p_1+2p_2+0p_3+0p_4, \\ Dp_4=3x^2=0p_1+0p_2+3p_3+0p_4, \end{cases}$$

所以 D 在这组基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 6

设 $\mathbb{R}^3$ 上线性变换 T 定义为 $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$， 分别求$T$ 在基

$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$与基$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$下的矩阵.

由 $$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}=2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=0\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=-\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix},$$

可得 $T(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

可见，同一个线性变换在不同的基下有不同的矩阵.

三、线性变换的矩阵表示式

定理1

设线性空间V_n中取定两个基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，由基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵为$\boldsymbol{P}$，$V_n$中的线性变换$T$在这两个基下的矩阵依次为$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$，那么$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

证明　按定理的假设，有

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\boldsymbol{P},$$

$\boldsymbol{P}$可逆，及

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\boldsymbol{A},\quad T(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\boldsymbol{B},$$

于是

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\boldsymbol{B}=T(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=T\left[(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\boldsymbol{P}\right]=\left[T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\right]\boldsymbol{P}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\boldsymbol{AP}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}.$$

因为$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性无关，所以$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.

这定理表明$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{A}$相似，且两个基之间的过渡矩阵$\boldsymbol{P}$就是相似变换矩阵.

例 7 设R^3上线性变换T 在基$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$下的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，求$T$ 在基$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$下的矩阵.

解 为了求出T 在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵，必须先求出从基$e_1,e_2,e_3$到基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的过渡矩阵$P$.

由$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(e_1,e_2,e_3)P$易知

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&-2\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-2&2&-1\\-1&1&-1\end{pmatrix}.$$

T 在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-2&2&-1\\-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&8&-4\\-4&-5&2\\-4&-4&1\end{pmatrix}.$$

定义 2

线性变换的像空间$T(V_n)$的维数，称为线性变换T 的秩.

显然，若 $\boldsymbol{A}$ 是T 的矩阵，则T 的秩就是$R(\boldsymbol{A})$. 若T 的秩为r ，则T 的核S_T 的维数为$n-r$.