澳門城市大學
Universidade da Cidade de Macau
City University of Macau

計算機科學導論

主講人 | 姓名 張琪
Name Zhang Qi
澳門城市大學
City University of Macau

第九章 剛體的轉動及角動量基礎

本章學習要點：

1. 剛體運動的描述
2. 剛體的轉動
3. 角動量
4. 角動量守恒及應用
5. 剛體轉動中的功與能量

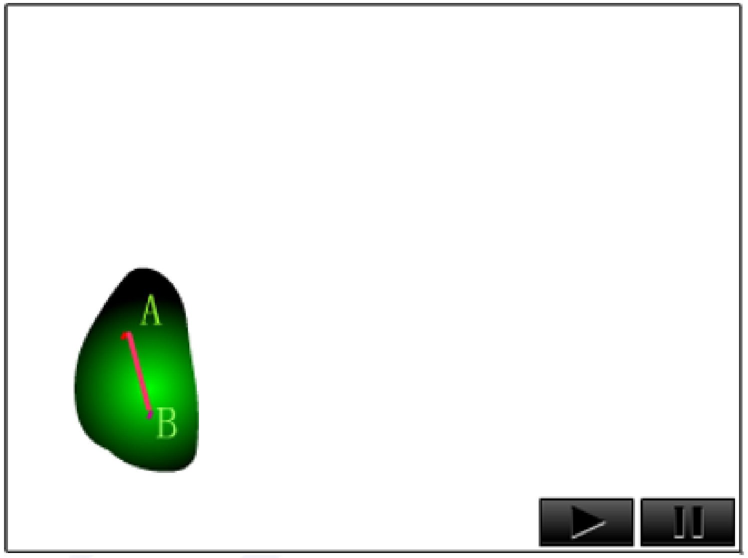
9.1 剛體運動的描述

剛體的引入

- 剛體　在外力作用下，形狀和大小都不發生變化的物體
- *（任意兩質點間距離保持不變的特殊質點組）*

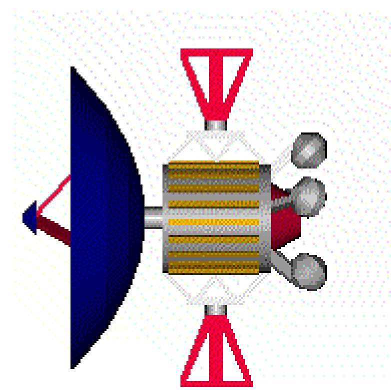
9.1 剛體運動的描述

- 剛體的基本運動
- 1、剛體的平動
- 若剛體中所有點的運動軌迹都保持完全相同，或者剛體內任意兩點間的連綫總是平行于它們的初始位置間的連綫



9.1 剛體運動的描述

- 剛體的基本運動
- 2、剛體的轉動
- 剛體中所有的點都繞同一直綫做圓周運動



9.1 剛體運動的描述

- 描 述 剛 體 轉 動 的 物 理 量
- 角 位 移 、 角 速 度 和 角 加 速 度

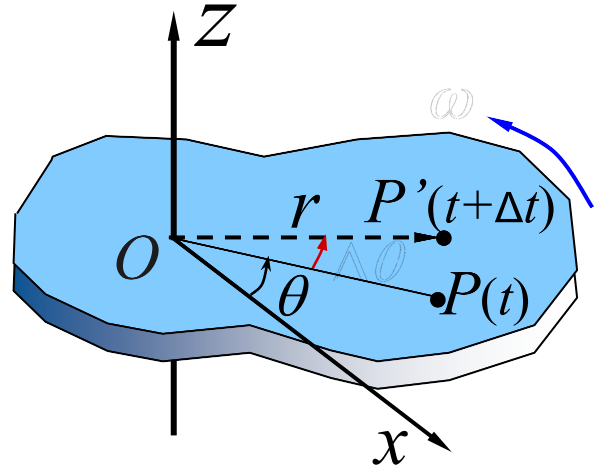


表 3–1　描述平动线量和转动的角量

描述质点平动的线量		描述刚体定轴转动的角量	
位矢 $\boldsymbol{r}$	平动运动方程 $\boldsymbol{r}(t)$	角位置 $\boldsymbol{\theta}$	转动运动方程 $\boldsymbol{\theta}(t)$
位移 $\Delta\boldsymbol{r}$	位移的微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$	角位移 $\Delta\boldsymbol{\theta}$	角位移的微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$
速度 $\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$	角速度 $\boldsymbol{\omega}$	$\boldsymbol{\omega}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{\theta}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}$　（3-1）
加速度 $\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$	角加速度 $\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\beta}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$　（3-2）

9.1 剛體運動的描述

- 描 述 剛 體 轉 動 的 物 理 量
- 綫 量 和 角 量 的 關 係

表 3-2　线量和角量的数值对应关系

弧长的微元 ds	ds = Rdθ	角位移的微元 dθ
切向速度的大小 v	$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{R\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = R\omega$	角速度的大小 ω
切向加速度的大小 a_t	$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\beta$	角加速度的大小 β
法向加速度的大小 a_n	$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$	

9.2 剛體的轉動

- 轉動動能
- 剛體繞定軸轉動時的動能

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$$

9.2 剛體的轉動

- 轉動慣量
- 定義

$$J = \sum_i m_i r_i^2$$

(單位：$kg \cdot m^2$)

- 物理意義：剛體轉動慣性的量度

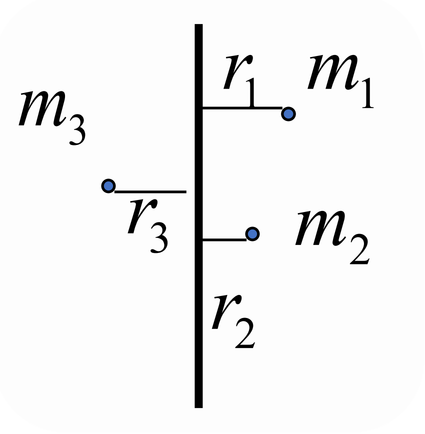
9.2 剛體的轉動

- 轉動慣量
- 計算
- 質量離散分布：

$$J = \sum_i m_i r_i^2$$

- 如圖某質點系

$$J = \sum_{i=1}^{i=3} m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2$$



9.2 剛體的轉動

- 轉動慣量
- 質量連續分布：

$$J = \int r^2 dm$$

$$\mathrm{d}m = \begin{cases} \rho \mathrm{d}V，其中\mathrm{d}V表示刚体的体积元，\rho表示体积元\mathrm{d}V处的质量体密度 \\ \sigma \mathrm{d}s，其中\mathrm{d}s表示刚体的面积元，\sigma表示面积元\mathrm{d}s处的质量面密度 \\ \lambda \mathrm{d}l，其中\mathrm{d}l表示刚体的线元长度，\lambda表示线元\mathrm{d}l处的质量线密度 \end{cases}$$

9.2 剛體的轉動

● 轉動慣量

9.2 剛體的轉動

例 求質量爲m,長度爲l 的均勻細棒關于不同轉軸的轉動慣量。

(1) 轉軸過端點

(2) 轉軸過中點

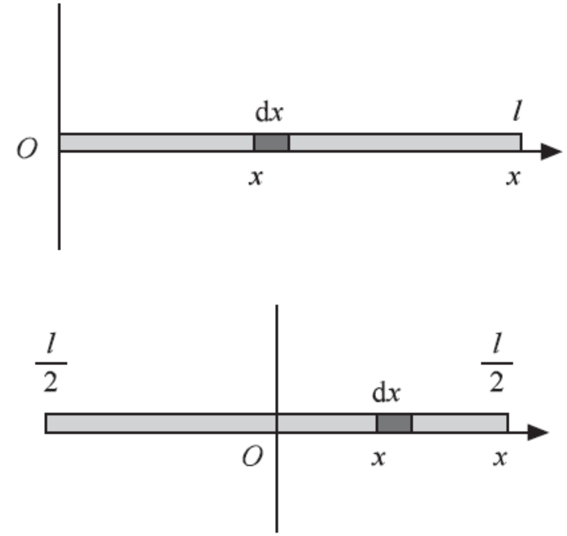


图 3-2 细棒两种握法简化示意

解：$J=\int r^2 dm$

$$dm=\lambda dx=\frac{m}{l}dx$$

$$\therefore J_{端}=\int_0^l x^2\frac{m}{l}dx=\frac{1}{3}ml^2$$

$$J_{中}=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2\frac{m}{l}dx=\frac{1}{12}ml^2$$

9.2 剛體的轉動

例 3-2 有一辆质量为 1 000kg 的小汽车从高度为 50m 的斜坡顶向坡底行驶，若到达坡底时的速度为 36km/h，求此过程汽车重力所做的功和汽车在坡底时的动能。若下坡时过剩的机械能可以全部储存在一个质量为 20kg、半径为 50cm 的圆盘上，则此圆盘的转速可以达到多少？

解 在坡底时汽车的速度写成国际单位为 10m/s，此时动能为 $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = 5\times10^4\mathrm{J}$

设重力加速度为 $10\mathrm{m/s^2}$，汽车重力所做的功为 $A = mgh = 5\times10^5\mathrm{J}$

显然在汽车下坡过程中有大量的机械能被白白浪费掉，它们在汽车刹车时转化成了热量。如果可以通过机械能回收装置回收转换为一个圆盘的转动动能，在需要的时候可以再次释放出来。根据刚体的转动动能（3-5）式，有 $A - E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = 4.5\times10^5\mathrm{J}$

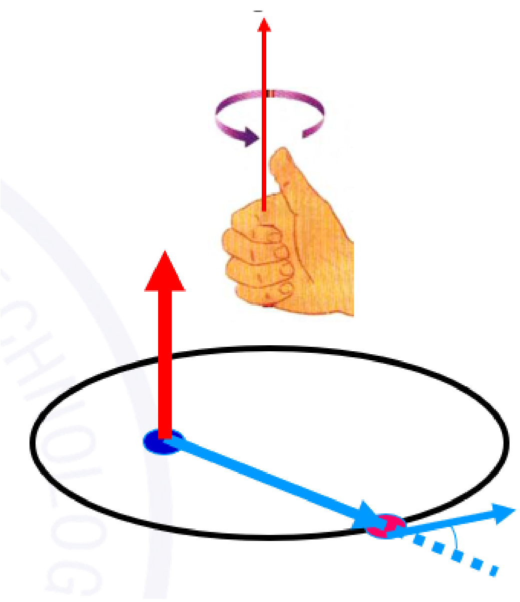
根据表 3-3 中圆盘转动惯量的公式 $J = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}\times20\times0.5^2\mathrm{kg\cdot m^2} = 2.5\mathrm{kg\cdot m^2}$

$$\omega = \sqrt{\frac{2\times4.5\times10^5}{2.5}} = 600\mathrm{rad/s} \approx 95.5\text{圈/秒}$$

9.3 角動量

- 角動量
- 質點的角動量

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



大小：$L = r\,p\,sin\theta$

方向：符合右手螺旋法則

注意：質點的角動量，必須指明是對哪個參考點而言的。

9.3 角動量

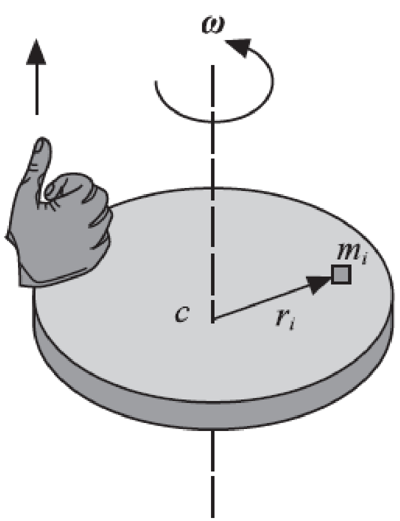


图 3-6　刚体角动量

- 角動量
- 剛體定軸轉動的角動量

$$L_i = \Delta m_i r_i^2 \omega$$

$$L = \sum_i L_i = \sum_i (\Delta m_i r_i^2 \omega)$$

$$= (\sum_i \Delta m_i r_i^2)\omega = J\omega$$

$$\vec{L} = J\vec{\omega}$$

- 剛體對某定軸的角動量等于剛體對該軸的轉動慣量與角速度的乘積。方向沿該轉動軸，并與這時轉動的角速度矢量方向相同

9.3 角動量

- 角動量
- 質點的角動量定理

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F},\qquad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=?$$

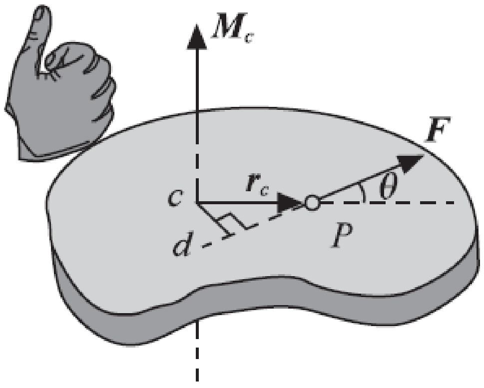


图 3-7　力矩

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\vec{r}\times\vec{p})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}$$

力矩 $\vec{M}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

积分形式 $\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}dt=\vec{L}_2-\vec{L}_1$

9.3 角動量

- 角動量
- 質點的角動量定理

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{L}_i = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{M}_i^{内} + \sum_i \vec{M}_i^{外}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i^{外} = \vec{M}_{外}$$

积分形式：$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{外} dt = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$

9.3 角動量

- 角動量
- 剛體轉動定律

$$\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d(J\vec{\omega})}{dt}=J\frac{d\vec{\omega}}{dt}=J\vec{\beta}$$

- 繞定軸轉動的剛體角加速度與作用于剛體上的合外力矩成正比，與剛體的轉動慣量成反比

9.4 角動量守恆及應用

- 角動量守恆定律

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \qquad \vec{L} = \text{恒矢量}$$

- 質點系所受的合外力對某參考點的力矩爲零時，則此質點系對該參考點的角動量守恒，即角動量的大小和方向都保持不變
- 剛體所受的合外力的力矩爲零時，則 $J\vec{\omega} = \text{恒矢量}$

9.4 角動量守恒及應用

- 角動量守恒應用

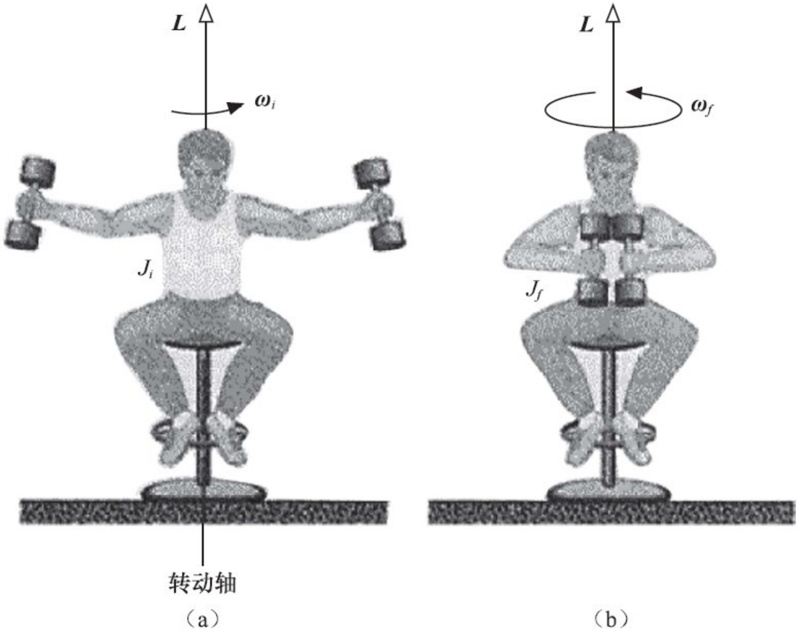


图 3-10　旋转者的角动量守恒

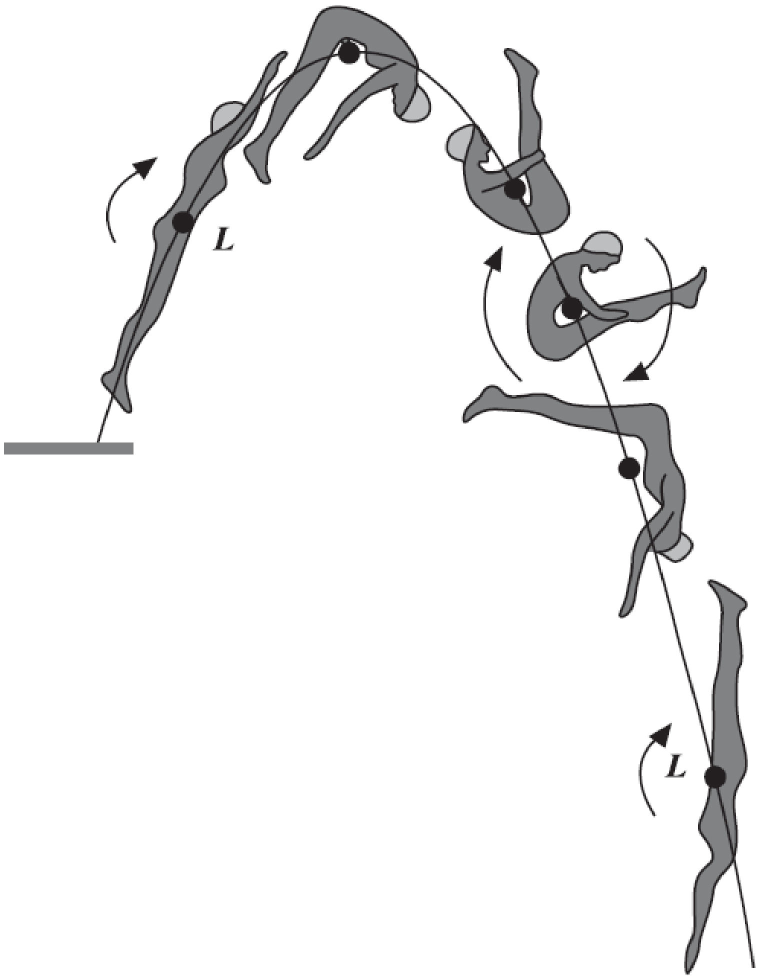


图 3-11　跳水中的角动量守恒

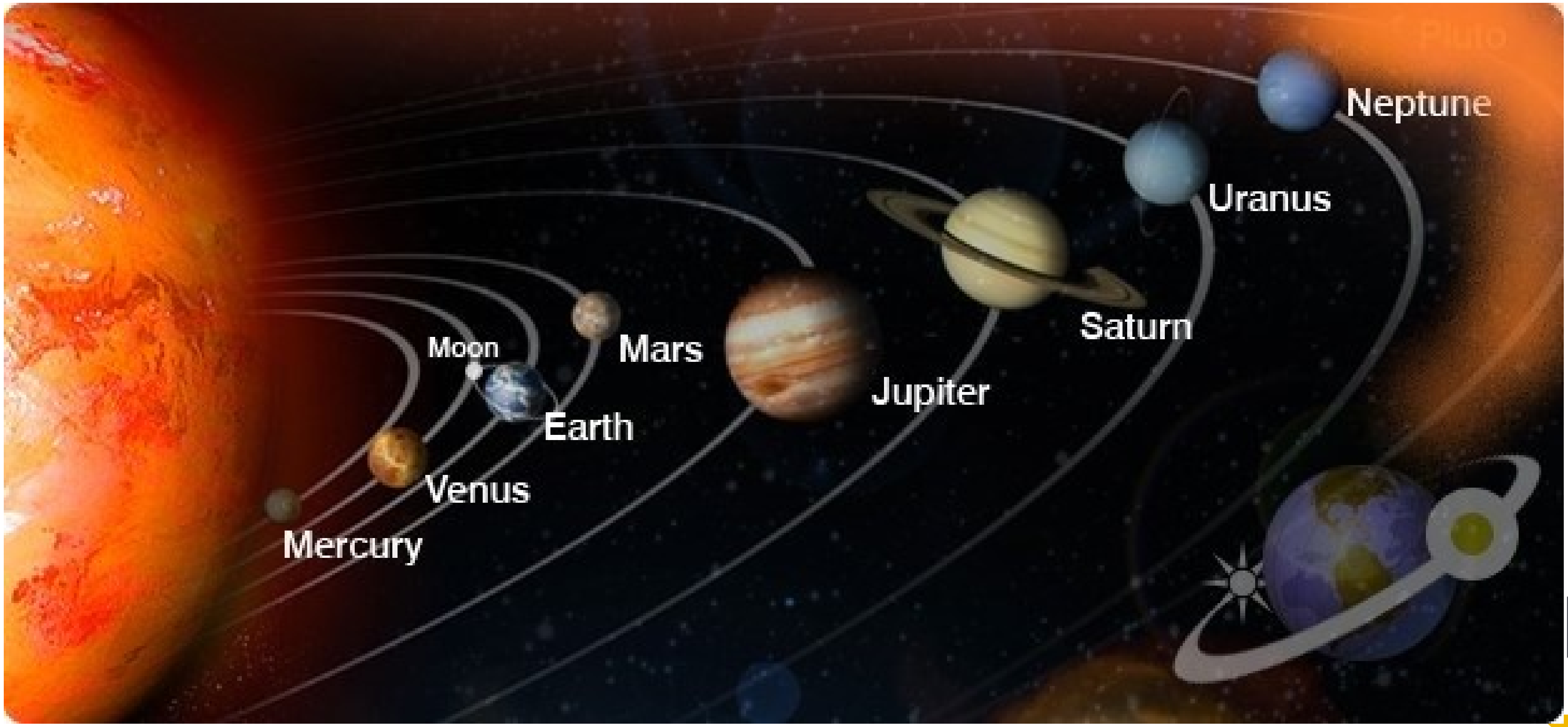
9.4 角動量守恒及應用

- 角動量守恒應用
- 開普勒發現了行星運動的三大定律：軌道定律、面積定律和周期定律。這三大定律最終使他贏得了"天空立法者"的美名
- 從開普勒開始，宇宙和諧的觀念就一直成爲啓迪科學家偉大智慧的源泉，顯示出耀眼的光芒；在追求宇宙奧秘的道路上，開普勒一直是光輝的榜樣

Johannes Kepler
1571-1630

9.4 角動量守恒及應用

- 角動量守恒應用
- 開普勒發現了行星運動的三大定律：軌道定律、面積定律和周期定律。這三大定律最終使他贏得了"天空立法者"的美名



9.4 角動量守恒及應用

例 3-4 质量为 m、长度为 l 的均匀细棒，可以绕一端的水平轴 O 自由转动，如图 3-15 所示。现将棒由水平位置释放，当棒摆动到最低点时与物体 M 发生完全弹性碰撞。已知物体与水平面的滑动摩擦系数为 μ，求物体向右滑动的最终距离 s。

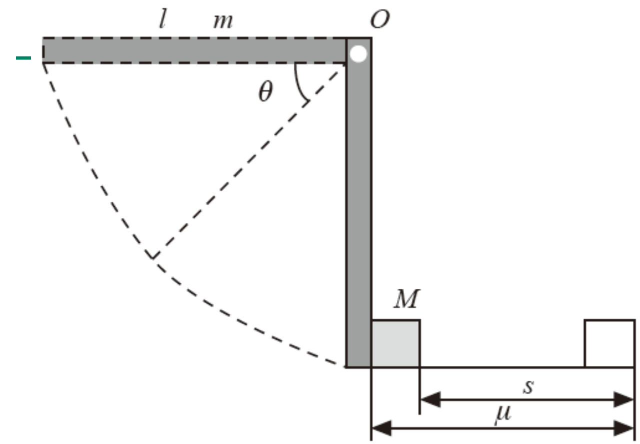


图 3-15　均匀细棒绕轴旋转

解　整个过程有 3 个阶段。

第一阶段：棒由水平位置下落到竖直位置时，棒和地球组成的系统机械能守恒。选取水平面作零势能面，棒末机械能等于初机械能，即

$$mg\frac{l}{2}+\frac{1}{2}J\omega^2=mgl$$

9.4 角動量守恒及應用

- 角動量守恒應用

其中质量均匀细棒绕端点的转动惯量在之前的例 3-1 中计算过，即 $J=1/3ml^2$，代入上式中，得棒在最低点时的角速率 $\omega=\sqrt{\dfrac{3g}{l}}$

第二阶段：因为棒与物体的碰撞是完全弹性碰撞，所以棒和物体的系统机械能守恒。选取水平面作零势能面，棒和物体的碰撞前的机械能等于碰撞后的机械能，

即 $$\frac{1}{2}J\omega^2+mg\frac{l}{2}=\frac{1}{2}J\omega_1^2+mg\frac{l}{2}+\frac{1}{2}Mv^2$$

且碰撞时合外力相对固定点 O 的力矩为 0，所以棒和物体的系统角动量守恒，碰撞前棒的角动量等于碰撞后棒和物体的角动量，即 $J\omega=J\omega_1+Mlv$

9.5 剛體轉動中的功與能量

- 力矩的功

$$dW = F_t ds = F_t r d\theta$$

$$= \boldsymbol{M} \cdot d\boldsymbol{\theta}$$

力矩所做的元功 dW 等于

力矩M 與角位移 $d\theta$ 的乘積

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dW = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

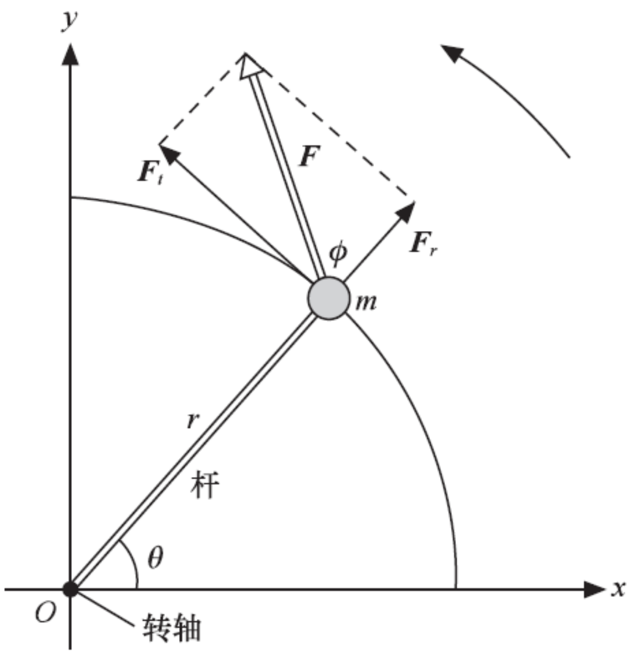


图 3-16　力矩做功

9.5 剛體轉動中的功與能量

- 剛體定軸轉動的動能定理

$$\mathrm{d}W = M\mathrm{d}\theta = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta = J\omega\mathrm{d}\omega$$

$$W = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2$$

- 合外力矩對繞定軸轉動剛體所做的功等于剛體轉動動能的增量

9.5 剛體轉動中的功與能量

表 3–4　质点运动规律与刚体定轴转动规律对照表

质点的平动	刚体的定轴转动
力 $\boldsymbol{F}$　质量 m	力矩 $\boldsymbol{M}$　转动惯量　$J=\int r^2\mathrm{d}m$
牛顿第二定律 $\boldsymbol{F}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=m\boldsymbol{a}$	刚体转动定律 $\boldsymbol{M}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=J\boldsymbol{\beta}$
动量　$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$	角动量　$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}=J\boldsymbol{\omega}$
动量定理（力在时间上的积累效应） $\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t=\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1$	角动量定理（力矩在时间上的积累效应） $\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{M}\mathrm{d}t=\boldsymbol{L}_2-\boldsymbol{L}_1$
动量守恒定律（合外力为 0） $\boldsymbol{p}=\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_i=$ 恒矢量	角动量守恒定律（合外力矩为 0） $\boldsymbol{L}=\sum_{i=1}^{n}J_i\boldsymbol{\omega}_i=$ 恒矢量
力的功（力在空间上的积累效应） $W=\int\mathrm{d}W=\int\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$	力矩的功（力矩在空间上的积累效应） $W=\int\mathrm{d}W=\int\boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$
动能定理　$W=\dfrac{1}{2}mv_b^{\ 2}-\dfrac{1}{2}mv_a^{\ 2}$	动能定理　$W=\dfrac{1}{2}J\omega_2^{\ 2}-\dfrac{1}{2}J\omega_1^{\ 2}$

思考題

- 什麼是角位移、角速度和角加速度？請簡要說明。
- 請具體解釋一下剛體轉動定律？
- 什麼是角動量守恒？請簡要說明。

休息一下

Take a break

感 謝 觀 賞

Thank you for listening.