線性代數 作業 2

說明：要求給出計算過程，證明題要給出證明過程。其中 P (Pass)類為必做題，HD (High Distinction) 類為選做題。

P 1. 求下列全排列的逆序數

（1） 634521；　（2）53142；　（3）123454321；　（4）135…(2n-1) 2n (2n-2)…42;

P 2. 求多項式 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ x & x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3x \end{vmatrix}$ 中x^3與x^4的系數。

P3. 用對角線法則求下列 3 階行列式

$$(1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix};\quad (2)\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix};\quad (3)\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix};\quad (4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & a+b & 2b \\ a^2 & ab & b^2 \end{vmatrix}.$$

P 4. 求下列行列式

$$(1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix};\quad (2)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix};\quad (3)\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & a & b & b \\ a & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix};$$

$$(4)\ D_n=\begin{vmatrix} 2 & a & a & \cdots & a \\ a & 2 & a & \cdots & a \\ a & a & 2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 2 \end{vmatrix};\quad (5)\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix}.$$

P5. 用克萊姆法則求解下列方程組：

$$(1)\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=-1, \\ -2x_1+3x_2+4x_3=2, \\ 2x_1-4x_2+3x_3=1; \end{cases}\qquad (2)\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ x_1+x_2-2x_3=4, \\ -2x_1+x_2+2x_3=1. \end{cases}$$

P6. 用求逆公式求矩陣 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩陣。

P7. 計算 n 階行列式：$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n^2 & n^3 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$.

HD 1. 設矩陣 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}$，當 a 為何值時，方程 AX=B 無解？有唯一解？有無窮多解？在有解時求此方程的解。

HD 2. 設$A=(a_{ij})$是三階非零矩陣，$|A|$ 是A的行列式，A_{ij}是a_{ij}的代數餘子式，若$A_{ij}+a_{ij}=0$ （$i,j=1,2,3$），則$|A|=$ ______.

HD 3. 求行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+\cos\alpha & 1+\cos\beta & 1+\cos\gamma & 1+\cos\theta \\ \cos\alpha+\cos^2\alpha & \cos\beta+\cos^2\beta & \cos\gamma+\cos^2\gamma & \cos\theta+\cos^2\theta \\ \cos^2\alpha+\cos^3\alpha & \cos^2\beta+\cos^3\beta & \cos^2\gamma+\cos^3\gamma & \cos^2\theta+\cos^3\theta \end{vmatrix}$.

HD 4. 設 n 階方陣 A 滿足 $A^2-A-2E=O$，證明矩陣 A 和 $A+2E$ 均可逆，並求出A^{-1} 和 $(A+2E)^{-1}$.