導數

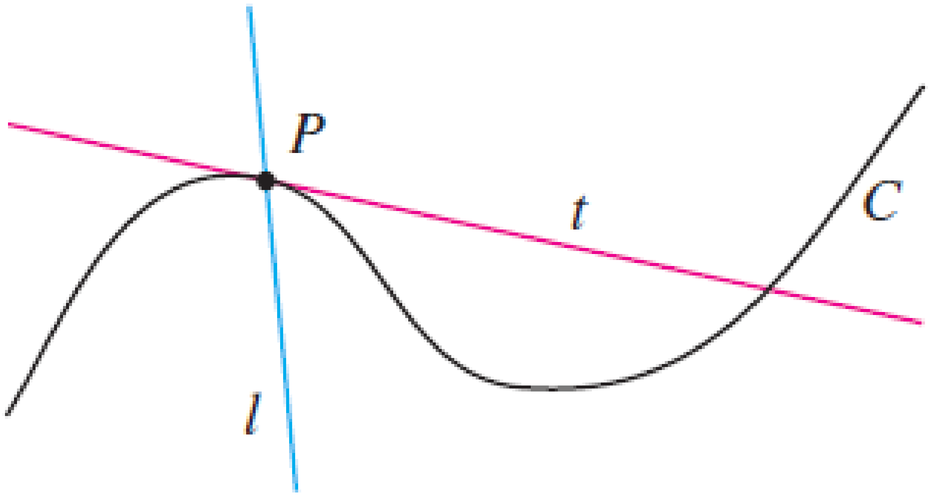
單元二

Outline

- 平均變化率及瞬時變化率
- 導數
- 導數的運算法則
- 冪函數與三角函數的求導法則
- 隱函數的導數
- 變化率的應用
- 相關變化率

函數的變化率

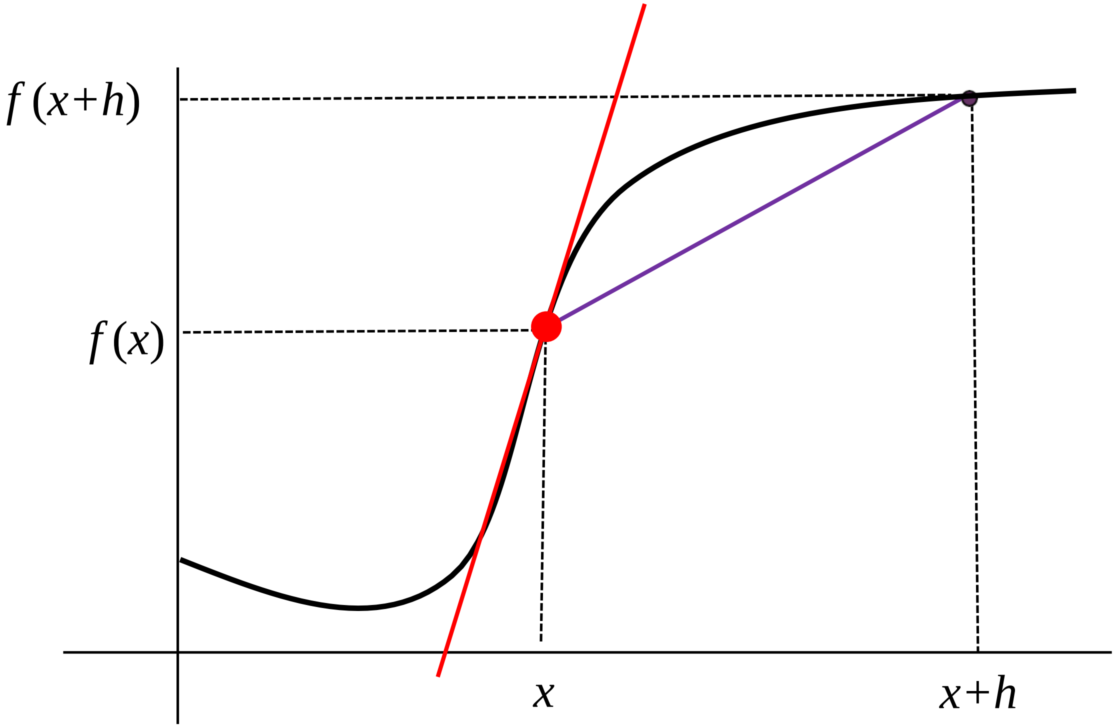
- 我們想要研究函數在某點上的**變化率**。
  - 曲線的**切線**是一條與在曲線上的某點相交且在此交點附近與曲線同方向的直線。



割線 / 切線

- 函數 $f(x)$ 的圖象於點 x 上的**切線**斜率:
  - 割線的斜率?

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



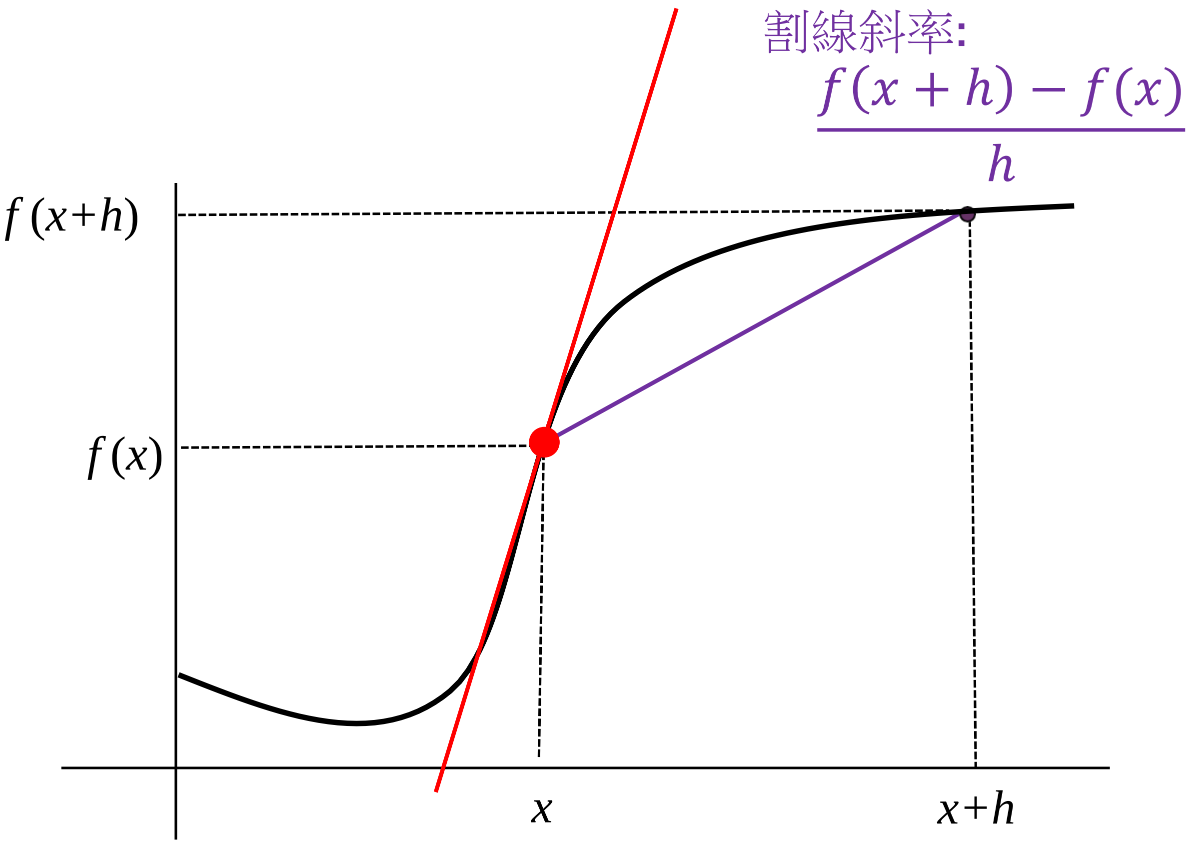
但我們需要找到一條比這條更靠近切線的線。即是，h 越小越好……

- $h = 0$ 時無意義,
- 那麼 h 接近 0 的時候？

切線斜率

- 目的是找出函數在 x 處的變化率
  - 切線斜率:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



需要找到一條非常接近這條切線的割線。即是， h 越小越好......

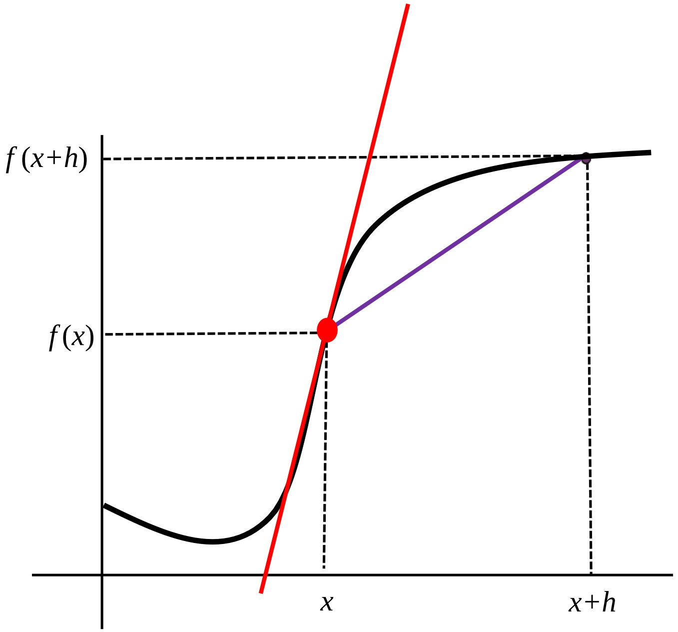
變化率

- 函數在區間$[x, x+h]$的平均變化率:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- 函數在某處$(x, f(x))$的瞬時變化率:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



導數 (2.2)

- **定義**: 函數 f 的導數是另外一個函數 f' (讀作 "f prime")，它對定義域內的任意 x 的函數值為

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- 若此極限存在，則稱 **f 在點 x 可導 (或可微)**。
  求導數的過程叫做微分。

導數的其他記法

- 下列是許多常用的導數記法:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = D_x f(x) = y' = f'(x)$$

- 導數 = 函數在某點的瞬時變化率
  = 在某點切綫的斜率
  = 在此處的傾斜度

例1

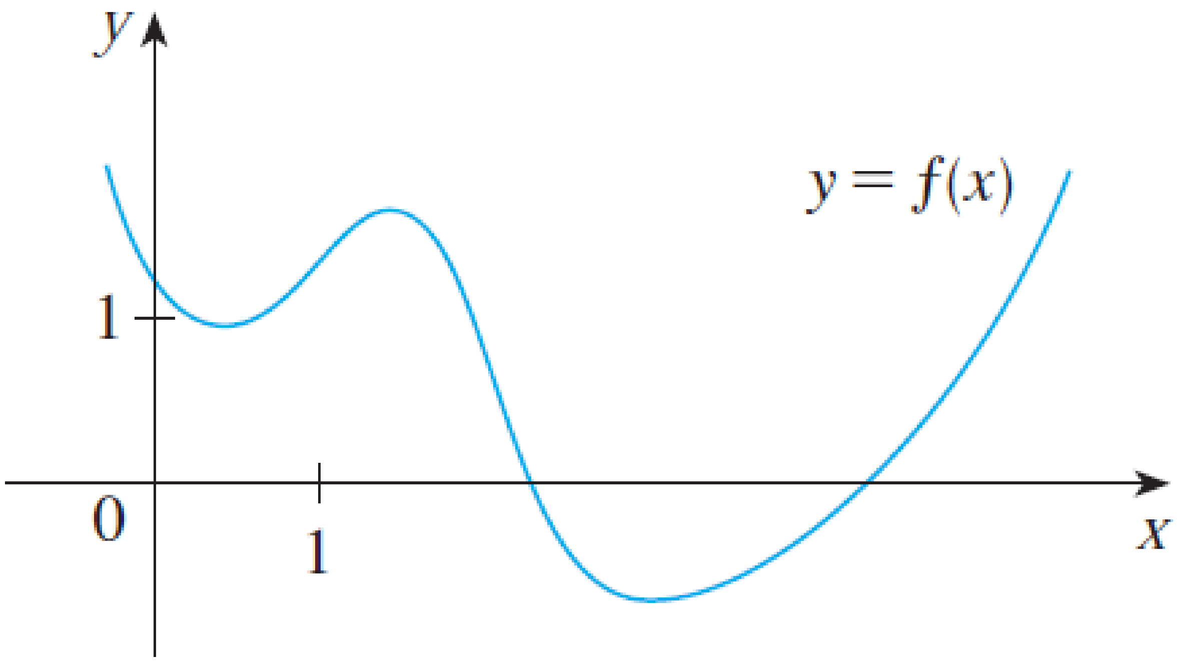
- 已知 $f(x) = x^2 + 1$:

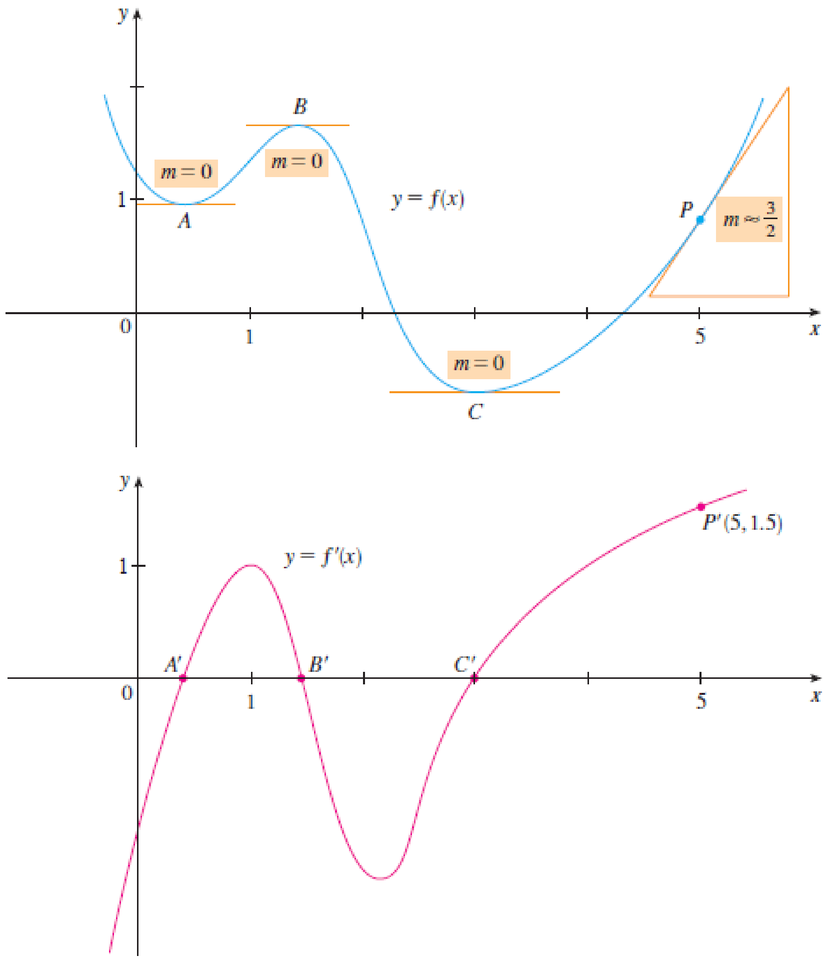
A. 求導數 $f'(x)$;

B. 求函數 f 在 $x = 2$ 處的切線方程。

+ 例2: 導數的圖象

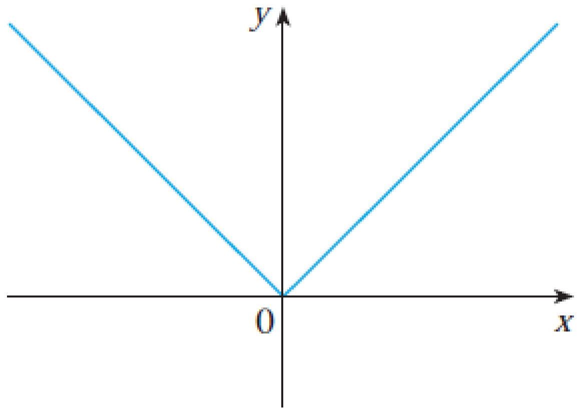
- 已知 f 的圖象如下。以此描繪 f' 的圖象。



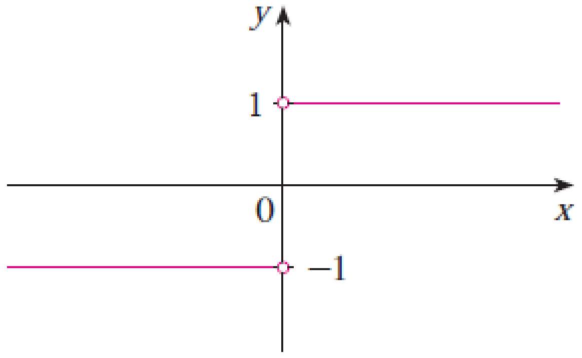


例3: 可微必連續

- 求 $f(x) = |x|$
  - A. 在何處連續?
  - B. 在何處可導?



$y = f(x) = |x|$



$y = f'(x)$

f 在點 c 可導 $\Rightarrow$ f 在點 c 連續

+ 求導法則(一) (2.3定理ADEF)

- $\frac{d}{dx}(k) = 0$
- $\frac{d}{dx}[kf(x)] = k\frac{d}{dx}f(x)$
- 和與差:

$$\frac{d}{dx}(f \pm g) = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}$$

或記作

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

求導法則(二) (2.3定理GH)

- 乘法律(Product Rule):

$$(fg)' = f'g + fg'$$

- 除法律(Quotient Rule):

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

幂函數求導法則 (2.3定理C)

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

例4

- 求 dy/dx：

A. $y = x^6$

B. $y = x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5$

C. $y = x^2(3x + 1)$

例4 (續)

- 求 dy/dx：

D. $y = \frac{x^2+x-2}{x^3+6}$

E. $y = \frac{3x^2+2\sqrt{x}}{x}$

三角函數的導數 (2.4)

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

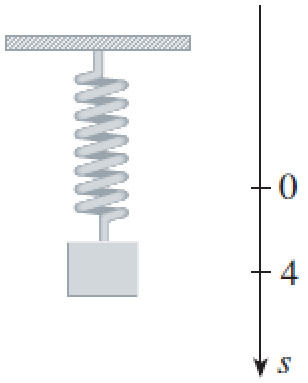
$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

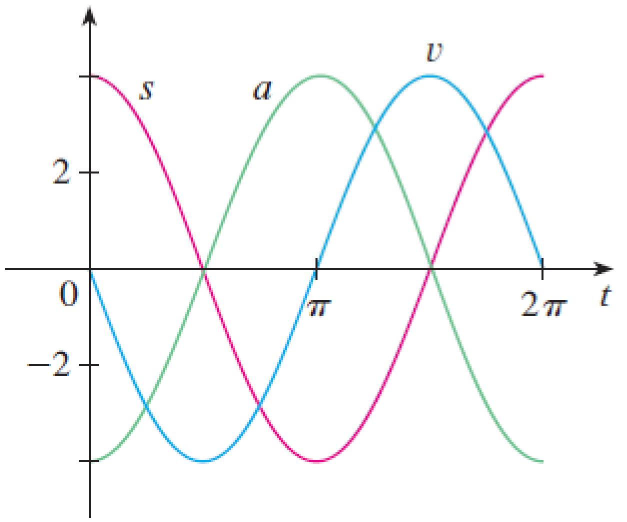
$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

例5

- 垂直彈簧末端的物體被拉伸至距離其靜止位置4厘米處，並在時間 $t = 0$ 時鬆開。（設向下方向為正）
若其在時間 t 的位移函數為 $s = f(t) = 4\cos t$，求時間 t 的速度函數和加速度函數。





求導法則(三) (2.5定理A)

- 鏈式法則(Chain Rule):

$$\frac{d}{dx}f\big(g(x)\big) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

  - 若 $y = f(u)$ 且 $u = g(x)$, 則:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

例6

- 求 $\frac{dy}{dx}$：

A. $y = \sqrt{x^2 + 1}$

B. $y = \sin(x^2)$

C. $y = \sin^2 x$

例6(續)

- 求 $\frac{dy}{dx}$：

D. $y = (2x+1)(x^3 - x + 1)^4$

E. $y = \frac{\sec x}{1+\tan x}$

高階導數

- 二階導數:

$$y'' = f''(x) = (f'(x))'$$

或記作:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

- n 階導數 ($n > 3$):

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

例7

- 已知 $f(x) = x^3 - x$, 求 $f'''(x)$ 和 $f^{(4)}(x)$.

隱函數求導 (2.7)

- 當函數不是以 $y=f(x)$ 的形式出現，而是以關於 x 和 y 的方程“隱含”地表示，如 $y^3+7y=x^3$，稱其將 y 定義為 x 的一個隱函數。
  - 可以<u>**隱微分法**</u>來求其導數。
- 隱微分法步驟：
  1. 在方程兩邊對 x 微分.
  2. 解出 dy/dx.

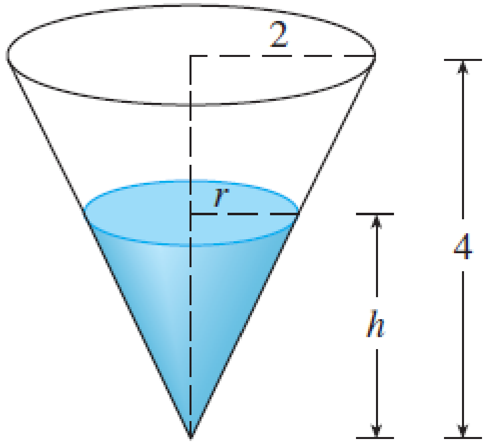
例8

A. 已知 $x^2 + y^2 = 25$，求 $\frac{dy}{dx}$；

B. 求圓 $x^2 + y^2 = 25$ 於點 (3, 4) 的切線方程。

例9: 相關變化率 (2.8)

一個倒立的圓錐形水槽之底半徑為 2 公尺，高 4 公尺。若水以每分鐘 2 立方公尺的速度注入此水槽。求在水深為 3 公尺時水面上升的速率。



教材對應閱讀章節及練習

- 第 2 章 2.1-2.8
- 對應習題: (可視個人情況定量)
  - 2.1: 1-12
  - 2.2: 1-44
  - 2.3: 1-46
  - 2.4: 1-18
  - 2.5: 1-30
  - 2.6: 1-8
  - 2.7: 1-33
  - 2.8: 1-14