澳門城市大學
Universidade da Cidade de Macau
City University of Macau

計算機科學導論

主講人 | 姓名 張琪

Name Zhang Qi

澳門城市大學

City University of Macau

第八章 牛頓力學基礎

本章學習要點：

1. 質點運動學
2. 牛頓三定律
3. 動量定理
4. 功與能量

8.1 質點運動學

8.1.1 質點，參考系，坐標系

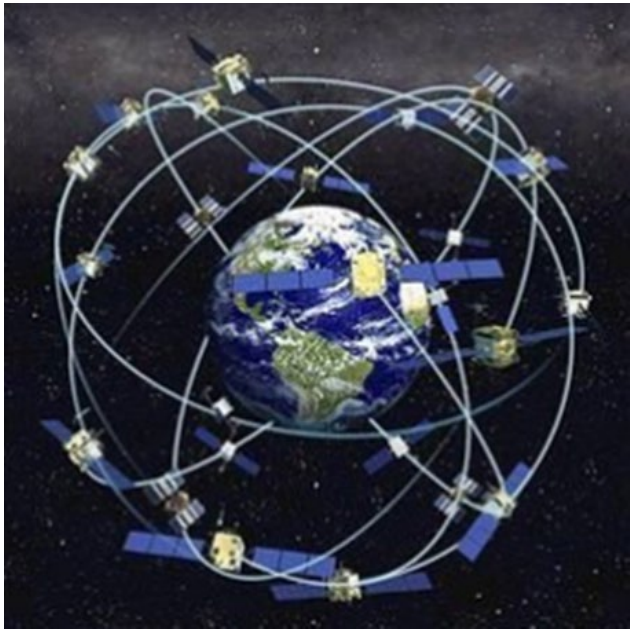
- 質點的定義爲：
- 把物體看成只有質量而無大小和形狀的點，這種理想化、抽象化的對象，在物理學中被稱爲質點，它是最簡單、最基本的物理模型

- 思考：
- *在分析哪些問題的時候可以把物體看成質點？*

8.1 質點運動學

8.1.1 質點，參考系，坐標系

- 位置與運動描述的應用實例
- 全球定位系統(Global Positioning System) 由覆蓋全球的24顆衛星組成的衛星系統。此系統可保證在任意時刻，地球上任一點都可以同時觀測到4顆衛星，以保證衛星可采集到該觀測點的經緯度和高度，實現導航、定位、授時等功能



- 中國北斗衛星導航系統(BeiDou Navigation Satellite System，BDS) 是中國自行研製的全球衛星導航系統。是繼美國全球定位系統(GPS)、俄羅斯格洛納斯衛星導航系統(GLONASS)之後第三個成熟的衛星導航系統

- 北斗導航科普簡介
- GPS和計算機科學有什麼關聯呢？

8.1 質點運動學

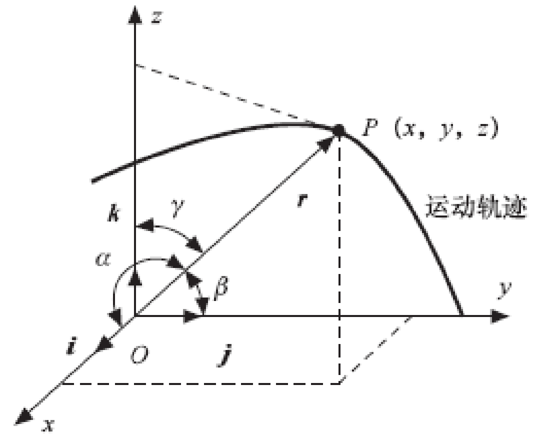
8.1.1 質點，參考系，坐標系

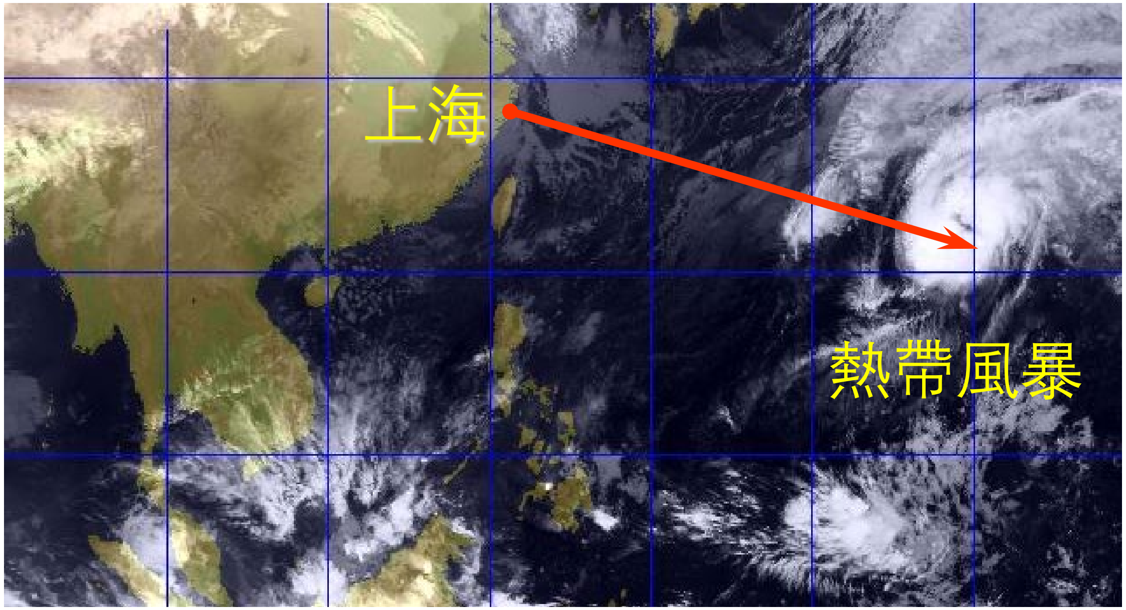
- 參考系與坐標系
- 在研究和描述任何物體運動的時候，必須先選定一個物體作爲參考，這個被選定作爲參考的物體，稱爲參考系
- 選定參考系後，爲了定量描述運動，還需選擇一個固定的坐標系
- 常用的坐標系：直角坐標系、極坐標系、球坐標系和自然坐標系

8.1 質點運動學

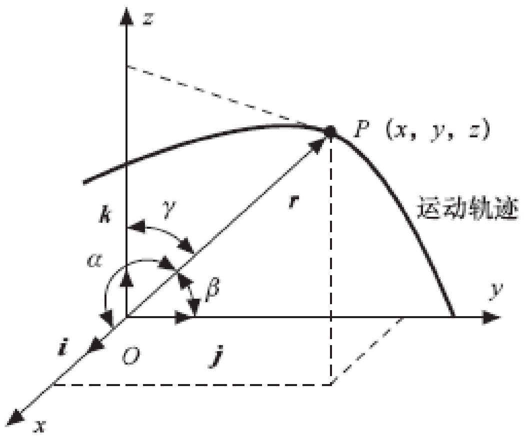
8.1.2 位矢與位移

- 位矢
- 從坐標原點指向空間點的有向綫段





8.1 質點運動學



8.1.2 位矢與位移

- 在直角坐標系中：

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

大小： $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

方向： $\cos\alpha = x/r \quad \cos\beta = y/r \quad \cos\gamma = z/r$

运动方程： $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

参数形式：

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$

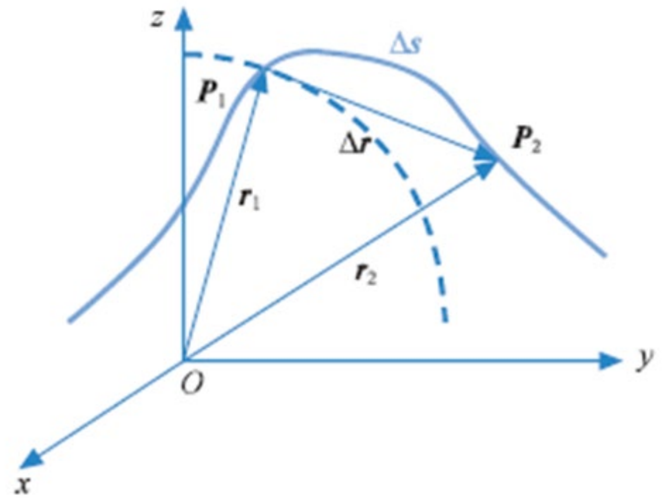
轨道方程：

$$F(x,y,z)=0$$

8.1 質點運動學

8.1.2 位矢與位移

- 位移
- 質點在Δt時間內位矢的增量



$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

- 位移的計算：

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$$= \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

大小： $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$

方向： $\cos\alpha = \Delta x / \Delta r \quad \cos\beta = \Delta y / \Delta r \quad \cos\gamma = \Delta z / \Delta r$

8.1 質點運動學

8.1.2 位矢與位移

- 討論：位移與路程

Δs、$|\Delta\vec{r}|$ 的几何意义？

$\Delta s \neq |\Delta\vec{r}|$　　$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta s = \lim\limits_{\Delta t \to 0} |\Delta\vec{r}|$ ⇨ $ds = |d\vec{r}|$

8.1 質點運動學

8.1.2 位矢與位移

例 1–1 一只蜜蜂在 $Oxyz$ 坐标系中，从 (2,-2,4) 处飞到 (6,-2,-4) 处，若用单位矢量法表示，它的位移是多少？

解 根据起点和终点的坐标，可以写出起点的位矢 $\boldsymbol{r}_1$ 和终点的位矢 $\boldsymbol{r}_2$。根据矢量运算可以得到位移的矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 为

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (6-2)\boldsymbol{i} + [-2-(-2)]\boldsymbol{j} + (-4-4)\boldsymbol{k} = 4\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{k}$$

结果中不含 $\boldsymbol{j}$ 矢量，说明 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与 xz 轴的坐标平面平行。

8.1 質點運動學

8.1.3 速度

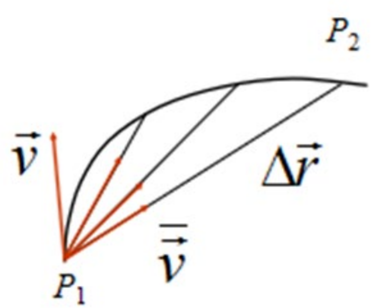
- 質點的平均速度：

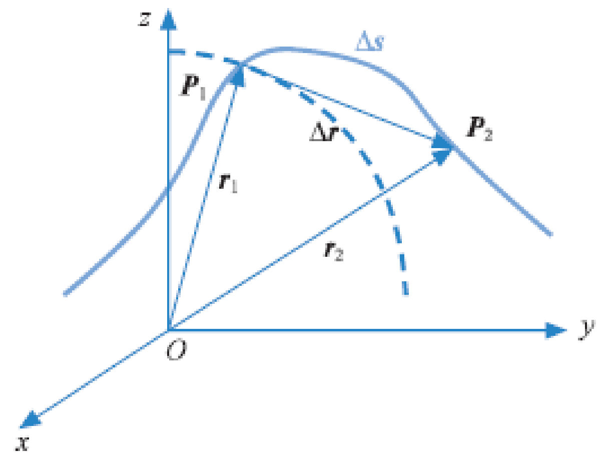
$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$ 与 $\Delta \vec{r}$ 方向相同

速度：$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

平均速度与时间间隔有关

方向是该时间间隔内的位移的方向





8.1 質點運動學

8.1.3 速度

- 在直角坐標系中

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}$$

大小：$v=|\vec{v}|=\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2}$

方向：$\cos\alpha=v_x/v \quad \cos\beta=v_y/v \quad \cos\gamma=v_z/v$

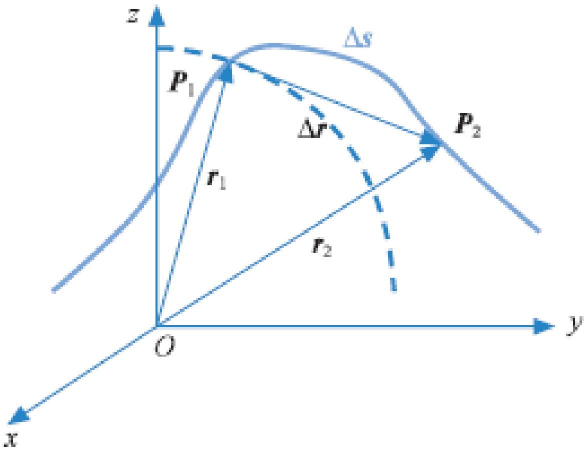
注意：当 $\Delta t\to 0$ 时，$|\Delta r|$ 和 Δs 趋于相同，可以得到

8.1 質點運動學

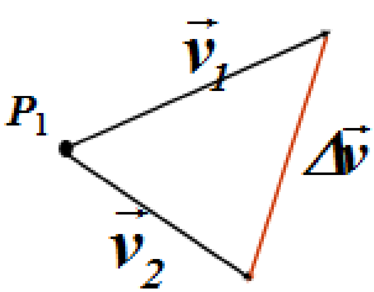
8.1.4 加速度

- 加速度 — 衡量速度的變化

平均加速度：$\bar{\vec{a}} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ 与$\Delta\vec{v}$方向相同



加速度：$\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$



在直角坐标系中：

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{k}$$

$$= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

大小：$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

方向：$\cos\alpha = a_x / a \quad \cos\beta = a_y / a \quad \cos\gamma = a_z / a$

8.1 質點運動學

8.1.4 加速度

- 運動方程是運動學問題的核心
- 1. 已知運動方程，求質點任意時刻的位置、速度以及加速度

$$\vec{r}=\vec{r}(t) \qquad \vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

- 2. 已知運動質點的速度（或加速度）及初始條件求質點的運動方程

$$\mathrm{d}\vec{v}=\vec{a}\mathrm{d}t \quad , \quad \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}}\mathrm{d}\vec{v}=\int_{t_0}^{t}\vec{a}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}\vec{r}=\vec{v}\mathrm{d}t \quad , \quad \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\mathrm{d}\vec{r}=\int_{t_0}^{t}\vec{v}\mathrm{d}t$$

8.1 質點運動學

- 運動學問題討論

例 1–2 一只蜜蜂在 $Oxyz$ 坐标系中的运动方程为 $\boldsymbol{r}=3t\boldsymbol{i}+2t^2\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$ (SI)。

（1）求蜜蜂运动的轨迹方程。

（2）求它在 1s 和 2s 时刻的位矢和这段时间间隔的位移。

（3）求它在这段时间内平均速度和速度方程。

（4）求它在 1s 时刻的瞬时速度和瞬时加速度。

解 （1）根据题目给出的运动方程，消去参数 t 可以写出蜜蜂运动的轨迹方程

$$\begin{cases} x=3t \\ y=2t^2 \\ z=-4 \end{cases}$$

$$y=\frac{2}{9}x^2,\quad z=-4$$

这是在 z 等于 -4 处与 xOy 平面平行的平面内的一条抛物线。

8.1 質點運動學

- 運動學問題討論

（2）將 1s 和 2s 代入运动方程可以得到相应时刻的位矢，根据矢量运算可以得到位移的矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$。

$$\boldsymbol{r}_1 = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{r}_2 = 6\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$$

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (6-3)\boldsymbol{i} + (8-2)\boldsymbol{j} + [-4-(-4)]\boldsymbol{k} = 3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}$$

结果中不含 $\boldsymbol{k}$ 矢量，说明 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与 xy 轴的坐标平面平行。

（3）平均速度根据定义有

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}}{2-1} = 3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}$$

注意：平均速度是矢量。

將运动方程对时间 t 求一阶导数可以得到质点的速度方程

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 3\boldsymbol{i} + 4t\boldsymbol{j}$$

速度方程含时间 t，说明速度在随时间变化，存在加速度。

8.1 質點運動學

- 運動學問題討論

（4）將 1s 代入到速度方程可得 1s 时刻的瞬时速度

$$\boldsymbol{v}_1 = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$$

將速度方程对时间 t 再求一阶导数，可以得到质点的加速度方程

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 4\boldsymbol{j}$$

加速度方程不含时间 t，说明加速度在任何时刻都是一个常数，质点在做匀加速运动。

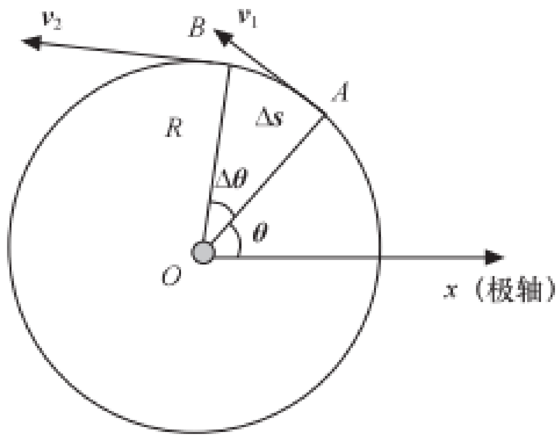
8.1 質點運動學

8.1.5 圓周運動

- 圓周運動的角量描述（極坐標系中）

t　　A　　θ ⟶ 角位置

$t+\Delta t$　　B　　$\theta+\Delta\theta$ ⟶ 角位移



沿逆时针转动，角位移取正值

沿顺时针转动，角位移取负值

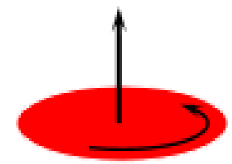
角速度　$$\boxed{\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{d\theta}{dt}}$$　单位：*rad/s*

角加速度　$$\boxed{\beta=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{d\theta}{dt}}$$　单位：*rad/s²*

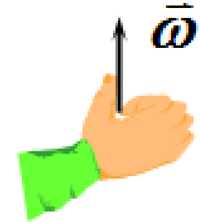
8.1 質點運動學

8.1.5 圓周運動

- 綫速度與角速度的關係



$\vec{v} = r\omega\vec{e}_t$　　可以把角速度看成是矢量

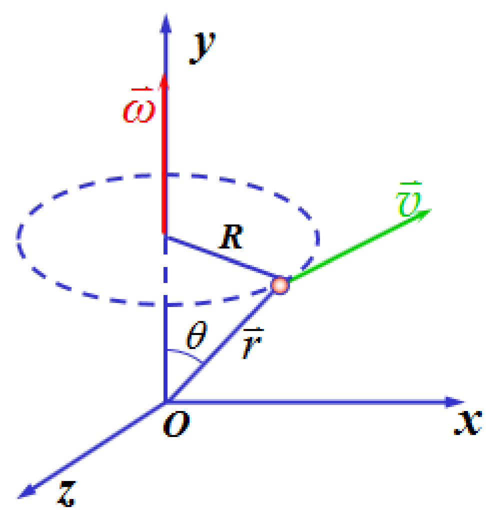


$\vec{\omega}$ 方向由右手螺旋法則确定。

右手的四指循着质点的转动方向弯曲，拇指的指向即为角速度矢量的方向。

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$



8.1 質點運動學

8.1.5 圓周運動

- 綫速度與角速度的關係

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{a}=\vec{\beta}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}$$

$\vec{a}_t=\vec{\beta}\times\vec{r}$ 方向沿着运动的切线方向，为切向加速度。

$\vec{a}_n=\vec{\omega}\times\vec{v}$ 方向指向圆心，为法向加速度。

$a_t=\alpha R \qquad a_n=\omega v=\omega^2 R$

8.1 質點運動學

8.1.5 圓周運動

例 1–3 图 1-10 所示的列车在半径 R=1 500m 的圆弧轨道上由静止开始做匀加速圆周运动。已知列车离开车站后 $t_1=100\mathrm{s}$ 时，列车的瞬时速率为 $v_1=20\mathrm{m/s}$。求列车离开车站 $t_2=150\mathrm{s}$ 时以下各物理量。

（1）列车的切向加速度 $\boldsymbol{a}_\tau$。

（2）列车此时的法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$。

（3）列车此时的总加速度 $\boldsymbol{a}$。

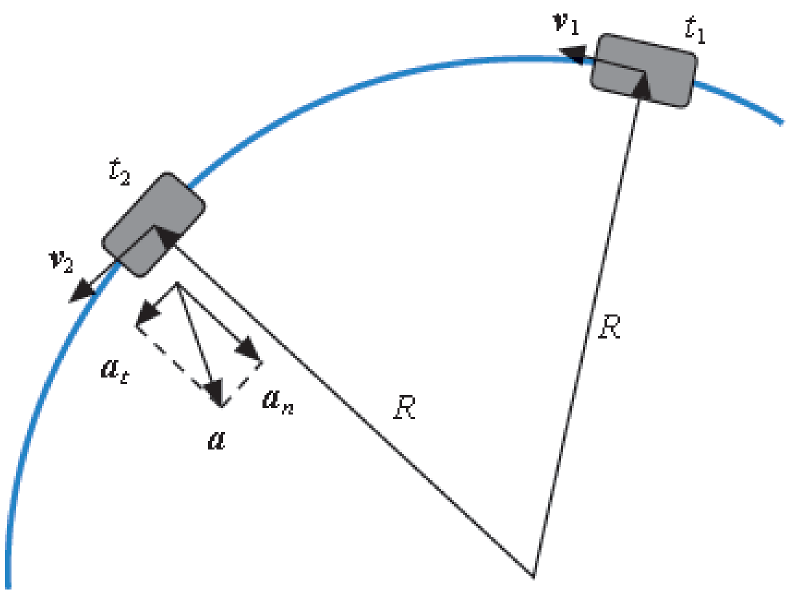


图 1–10　列车匀加速圆周运动

8.1 質點運動學

8.1.5 圓周運動

解 列车做的是匀加速运动，切向加速度大小 $\boldsymbol{a}_\tau$ 是一个常量。

$v_1=\boldsymbol{a}_\tau t_1 \Rightarrow$ 切向加速度 $\boldsymbol{a}_\tau=\dfrac{v_1}{t_1}=\dfrac{20}{100}\mathrm{m/s^2}=0.2\mathrm{m/s^2}$。

$\boldsymbol{a}_\tau$ 方向为圆弧切向方向，指向和瞬时速度方向一致。

$v_2=\boldsymbol{a}_\tau t_2=0.2\times150\mathrm{m/s}=30\mathrm{m/s}\Rightarrow$ 法向加速度 $\boldsymbol{a}_n=\dfrac{v_2^2}{R}=\dfrac{900}{1500}\mathrm{m/s^2}=0.6\mathrm{m/s^2}$。

$\boldsymbol{a}_n$ 方向垂直于 $\boldsymbol{a}_\tau$ 指向圆弧的圆心。

$\boldsymbol{a}_n$ 和 $\boldsymbol{a}_\tau$ 两个垂直矢量的合成总加速度大小 $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{0.2^2+0.6^2}\mathrm{m/s^2}=0.63\mathrm{m/s^2}$

$\boldsymbol{a}$ 方向与切向加速度 $\boldsymbol{a}_\tau$ 夹角为 $\beta=\tan^{-1}\dfrac{a_n}{a_\tau}=\tan^{-1}\dfrac{0.6}{0.2}=71.6°$。

8.2 牛頓運動定律

8.2.1 牛頓三定律

- 牛頓第一定律
- 任何物體都將保持其靜止或勻速直綫運動狀態，直到外力迫使它改變運動狀態爲止
- 物體保持自身運動狀態的性質稱爲慣性，牛頓第一定律又稱慣性定律

- 1、慣性系
- 物體在一參考系中不受其它物體作用時，而保持靜止或勻速直綫運動，簡單來說即相對地面靜止的或者做勻速直綫運動的參考系

8.2 牛頓運動定律

8.2.1 牛頓三定律

- 牛頓第一定律

- 2、非慣性系
- 非慣性參考系是相對某慣性參考系作非勻速直綫運動的參考系
- 牛頓第一定律只在慣性系中成立，在非慣性系中，不成立

- 3、慣性力
- 爲了讓牛頓運動定律在非慣性系中也成立而引進的虛擬的力
- 如：車輛剎車時，車上的人因爲慣性身體往前傾，讓身體前傾的力實際不存在，這個力就是慣性力

8.2 牛頓運動定律

8.2.1 牛頓三定律

- 牛頓第二定律
- 作用于物體上的合外力 $\vec{F}$ 等于物體的質量 m 與其加速度 $\vec{a}$ 的乘積

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (\text{當 } v << c \text{ 時，} m \text{ 爲常量})$$

- 牛頓第二定律的原始形式爲： $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

- 在直角坐標系中 $\vec{F} = m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + m\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + m\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$

即： $\vec{F} = ma_x\vec{i} + ma_y\vec{j} + ma_z\vec{k}$

8.2 牛頓運動定律

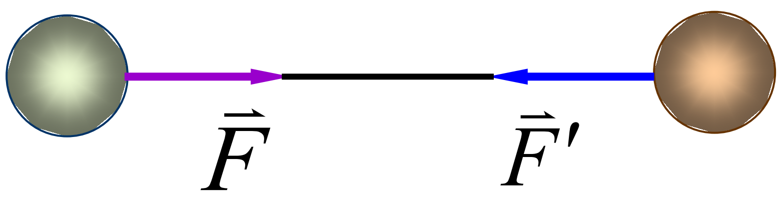
8.2.1 牛頓三定律

- 牛頓第二定律
- 注意：
- (1) 瞬時關係
- (2) 牛頓第二定律只適用于質點
- (3) 力的疊加原理

8.2 牛頓運動定律

8.2.1 牛頓三定律

- 牛頓第三定律
- 兩個物體之間作用力 $\vec{F}$ 和反作用力 $\vec{F}'$，沿同一直綫，大小相等，方向相反，分別作用在兩個物體上



$$\boxed{\vec{F} = -\vec{F}'}$$

- 作用力與反作用力特點：
- (1) 大小相等、方向相反，分別作用在不同物體上，同時存在、同時消失，它們不能相互抵消
- (2) 是同一性質的力

8.2 牛頓運動定律

8.2.1 牛頓三定律

- 牛頓定律應用舉例
- 一　解題步驟

隔離物體 → 受力分析 → 建立坐標

→ 列方程 → 解方程 → 結果討論

- 二　兩類常見問題
- 已知力求運動方程　$\vec{F} \rightarrow \vec{a} \rightarrow \vec{r}$
- 已知運動方程求力　$\vec{r} \rightarrow \vec{a} \rightarrow \vec{F}$

8.2 牛頓運動定律

● 牛頓定律應用舉例

例 2-2 设有一辆质量为 2 000kg 的汽车，在平直的高速公路上以 100km/h 的速度行驶，如图 2-2 所示。现在驾驶者启动汽车的刹车装置，若汽车刹车的阻力的大小随时间线性增加，即 $F_f=-bt$，其中 $b=5\,000\text{N/s}$，试求此车完全停下来需要的刹车时间和刹车距离。

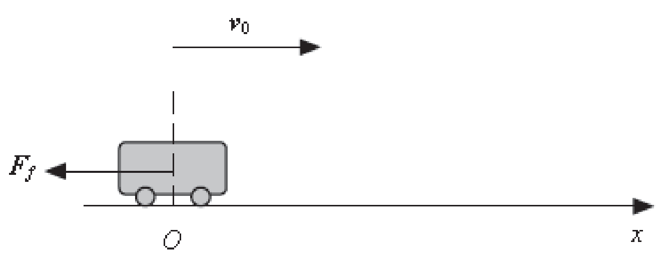


图 2-2 汽车在平直高速公路刹车

解 此题属于动力学的第一类问题，知道质点受力求解质点运动状态。设汽车在 t=0s 时的速度为 v_0，化成国际单位制为 27.78m/s，沿 x 轴正向行驶，0s 时的位置为坐标原点。

根据牛顿第二定律，汽车所受的合外力就是刹车阻力 F_f，根据 $F=ma$，可以得到汽车在 t 时刻的瞬时加速度为

$$a(t)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{bt}{m}$$

8.2 牛頓運動定律

- 牛頓定律應用舉例

其中 v、t 是变量，b、m 是常数，根据题目给的已知条件，可以将上面的微分方程分离变量后积分得到

$$\int_{v_0}^{0} \mathrm{d}v = \int_0^t \left(-\frac{bt}{m}\right)\mathrm{d}t$$ 求解得到 $$0 - v_0 = -\frac{b}{m}\cdot\frac{t^2}{2}$$

化简可得 $$t = \sqrt{\frac{2mv_0}{b}}$$ 代入数值可得 t=4.71s。

刹车距离的计算，需要先计算出 $v(t)$ 的函数，即瞬时速率与时间的关系

$$v(t) - v(0) = \int_0^t a(t)\mathrm{d}t = \int_0^t \left(-\frac{bt}{m}\right)\mathrm{d}t$$ 可得 $$v(t) = -\frac{b}{m}\cdot\frac{t^2}{2} + v_0$$

下面计算刹车开始到汽车完全停止，汽车走过的距离 s。已知 $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{b}{m}\cdot\dfrac{t^2}{2} + v_0$

根据已知条件 $$\int_0^s \mathrm{d}s = \int_0^t \left(-\frac{b}{m}\cdot\frac{t^2}{2} + v_0\right)\mathrm{d}t$$ 化简得 $$s = v_0 t - \frac{b}{2m}\cdot\frac{1}{3}t^3$$ 代入数值得 s=63.85m。

8.2 牛頓運動定律

● 牛頓定律應用舉例

例 2-3 为了保证高台跳水运动员的安全，跳台跳水的泳池要比普通游泳的泳池深，如何确定跳台跳水泳池的水深呢？已知液体中的阻力公式 $F=-c\rho Av^2=-kv^2$，阻力大小与速度的平方成正比，其中 c 是阻力系数，取 0.25，ρ 是液体的密度，A 是物体的横截面积。

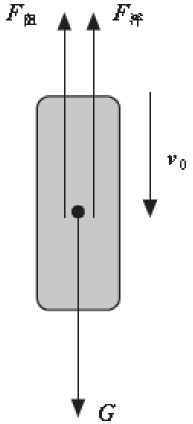


图 2-3 运动员入水后的受力分析

解 跳水者使用的跳台越高，到达水面的速度越大，因此对泳池的深度要求越高。以 10m 高台跳水为例，假设运动员自起跳到落水时的运动是自由落体运动，将运动员看成质点，落到水面时的速率 v_0 为

$$v_0=\sqrt{2gH}=\sqrt{2\times9.8\times10}\text{m/s}=14\text{m/s}$$

对运动员入水后进行受力分析，如图 2-3 所示，其中重力与浮力的大小几乎相等（人体的密度与水的密度近似相等），则运动员所受到的合外力就是水的阻力。由阻力公式得 $F=-c\rho Av^2=-kv^2$

其中 ρ 是水的密度，为 $1.0\times10^3\text{kg/m}^3$；$A$ 是运动员身体的横截面积，可以估算为 0.08 m^2；c 是阻力系数，由于人几乎是以铅直方向入水，阻力较小，取 c=0.25，则 $k=c\rho A=20\text{kg/m}$。

8.2 牛頓運動定律

- 牛頓定律應用舉例

选择入水处水面为坐标原点，铅直向下的方向为 x 轴正方向，根据牛顿第二定律有

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv^2$$

将 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}x/v$ 代入上式，得

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=-\frac{k}{m}\mathrm{d}x$$

根据已知条件，对上式两边进行定积分，即

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=-\int_0^x\frac{k}{m}\mathrm{d}x$$

得

$$x=\frac{m}{b}\ln\frac{v_0}{v}$$

如果运动员体重为 50kg，运动员速度减小到 $v=2.0\mathrm{m/s}$ 时翻身上浮，并以脚蹬池底上浮，则求出

$$x=4.9\mathrm{m}$$

思考題

- 請具體解釋一下牛頓三定律？
- 什麼是速度？請簡要說明。
- 什麼是加速度？請簡要說明。

休息一下
Take a break

8.3 動量和動量守恒

8.3.1 動量定理

- 動量定理
- 在給定的時間間隔內，外力作用在質點上的衝量，等于質點在此時間內動量的增量

衝量: $\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\mathrm{d}t$ （力的時間積累）

牛頓第二定律: $\vec{F} = \dfrac{d(m\vec{v})}{dt} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} \longrightarrow \vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}$

得 $\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\mathrm{d}t = \vec{p} - \vec{p}_0$ （常用于碰撞過程）

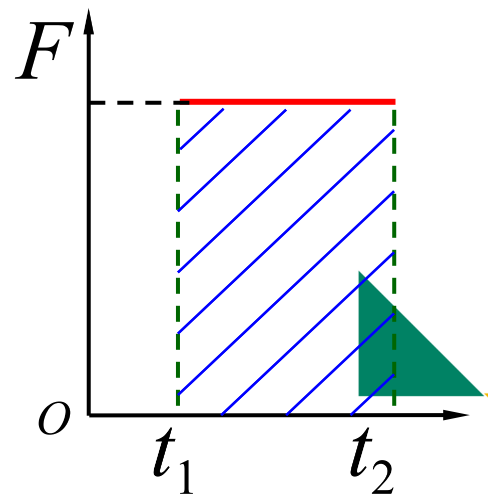
8.3 動量和動量守恒

8.3.1 動量定理

分量表示式
$$\begin{cases} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x \mathrm{d}t = mv_{2x} - mv_{1x} \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y \mathrm{d}t = mv_{2y} - mv_{1y} \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z \mathrm{d}t = mv_{2z} - mv_{1z} \end{cases}$$

注意：（1）某方向受到衝量，該方向上動量就增加.

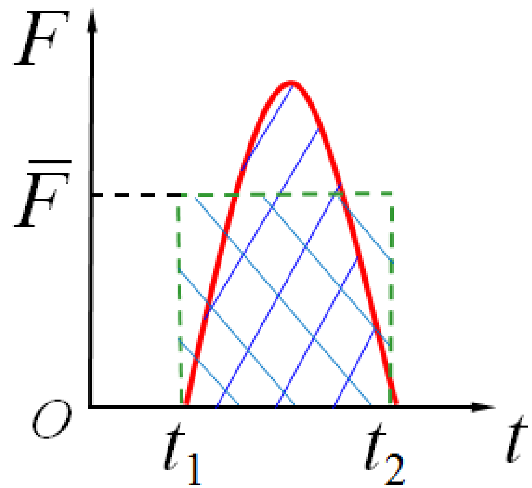
（2） F 爲恒力 $\vec{I} = \vec{F}\Delta t$



8.3 動量和動量守恆

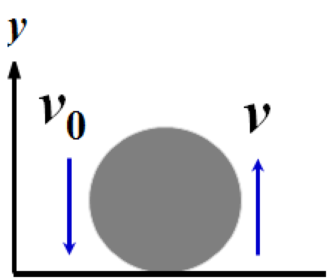
8.3.1 動量定理

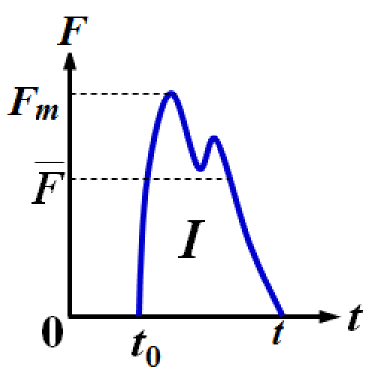
- F 爲變力



$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \overline{\vec{F}}(t_2 - t_1)$$

討論： 碰撞過程的平均衝擊力





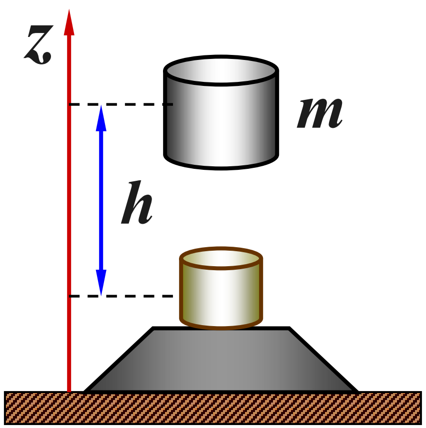
$$\overline{\vec{F}} = \frac{\vec{I}}{t - t_0} = \frac{\int_{t_0}^{t} \vec{F}\mathbf{d}t}{t - t_0} = \frac{\vec{p} - \vec{p}_0}{t - t_0}$$

思考：爲什麽向水泥墻內釘釘子要用錘子呢？大力士除外

8.3 動量和動量守恒

8.3.1 動量定理

- 討論：一重錘從高度 h = 1.5 m 處自靜止下落，錘與工件碰撞後，速度爲零. 對于不同的打擊時間 Δt ，計算平均衝力和重力之比



解　撞前錘速　$v_0 = -\sqrt{2gh}$ 撞後錘速爲0.

$$\int_0^{\Delta t} (F_N - mg)\mathrm{d}t = mv_z - mv_0 = m\sqrt{2gh}$$

$$\overline{F}_N \Delta t - mg\Delta t = m\sqrt{2gh}$$

$$\frac{\overline{F}_N}{mg} = 1 + \frac{1}{\Delta t}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 1 + \frac{0.55}{\Delta t}$$

$\Delta t / \mathrm{s}$	0.1	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
$\overline{F}_N / mg$	6.5	56	5.5×10^2	5.5×10^3

在碰撞或打擊瞬間常忽略重力作用

8.3 動量和動量守恒

8.3.1 動量定理

例 2-4 一质量为 0.5kg 的小球以 10m/s 的速度，与刚性墙壁相撞，入射角度为 $\alpha = 45°$，并以相同的速率和角度反弹，如图 2-6 所示。设小球与墙壁的接触时间为 0.05s，求在此碰撞时间内墙壁受到的平均冲击力。

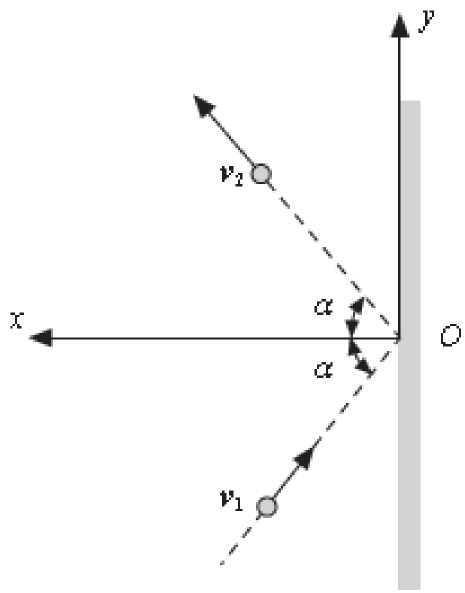


图 2-6　小球与刚性墙壁碰撞

8.3 動量和動量守恒

8.3.2 動量定理

解 在计算平均冲击力之前，先建立起直角坐标系，如图 2-6 所示。根据小球**质点的动量定理**建立方程

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\mathrm{d}t = \overline{\boldsymbol{F}} \cdot \Delta t = m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1$$

其中小球所受合外力的冲量可以看成碰撞时间 Δt 乘以平均作用力 $\overline{\boldsymbol{F}}$ 。

上式的积分是矢量积分，从图上可知末动量与初动量大小相等但方向不同，因此需要将动量分解到 x 和 y 轴两个方向上，分别计算动量分量的增量，即

$$\overline{F}_x \cdot \Delta t = mv_{2x} - mv_{1x} = 2mv\cos\alpha \qquad \overline{F}_y \cdot \Delta t = mv_{2y} - mv_{1y} = 0$$

因此小球所受到的外力为 $\overline{F} = \overline{F}_x = \dfrac{2mv\cos\alpha}{\Delta t}$

代入已知数据得 $\overline{F} = 141\mathrm{N}$，可见 $\overline{F}$ 是远大于小球的自身重力 4.9N 的，因此在碰撞的这段时间，可以忽略小球自身重力的影响，小球所受合外力可全部视为墙壁对小球的作用力。

根据牛顿第三定律，墙壁所受平均冲击力大小等于小球所受合外力，方向相反，故墙壁所受平均冲击力为 141N，方向沿 x 轴负方向。

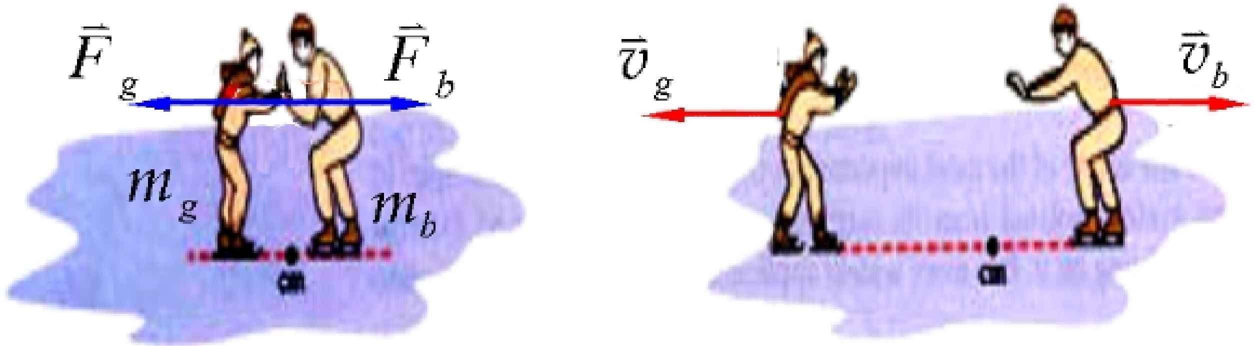
8.3 動量和動量守恒

8.3.2 動量守恒定律

- 動量守恒定律

$$若\sum F_{i外}=0 \quad 则有$$

- 一個孤立的力學系統（系統不受外力作用）或合外力爲零的系統，系統內各質點間動量可以交換，但系統的總動量保持不變
- 動量守恒定律是物理學最普遍、最基本的定律之一



8.3 動量和動量守恒

8.3.2 動量守恒定律

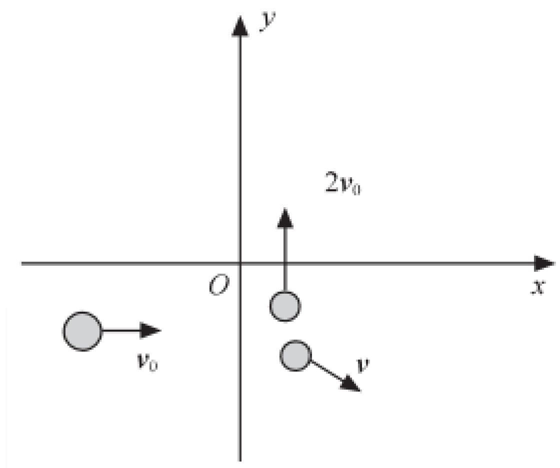
- 一質量爲m的微粒，以速率v_0向x軸正方向運動，如圖所示。運動過程中，微粒突然裂變爲兩個部分。一個部分質量爲m/3，以速率$2v_0$沿y軸正方向運動，求另一部分的速度

- 解：根據動量守恒定律，粒子分裂前分裂後都不受外力作用，滿足守恒條件

$$mv_0\boldsymbol{i} = \frac{m}{3}\cdot 2v_0\boldsymbol{j} + \frac{2m}{3}\boldsymbol{v}$$

- 求解可得另一部分速度的矢量形式

$$\boldsymbol{v} = \frac{3}{2}v_0\boldsymbol{i} - v_0\boldsymbol{j}$$



8.4 功與能量

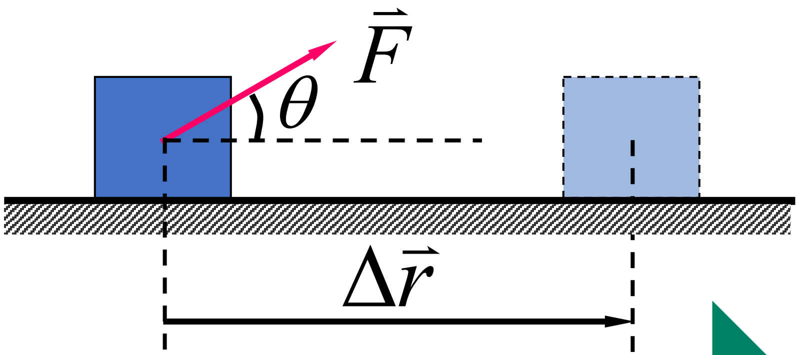
- 功
- 力的空間累積效應：

$\vec{F}$ 對 $\vec{r}$ 積累 ⟶ W 功

恒力作用下的功

$$W = F\cos\theta \cdot \left|\Delta\vec{r}\right|$$

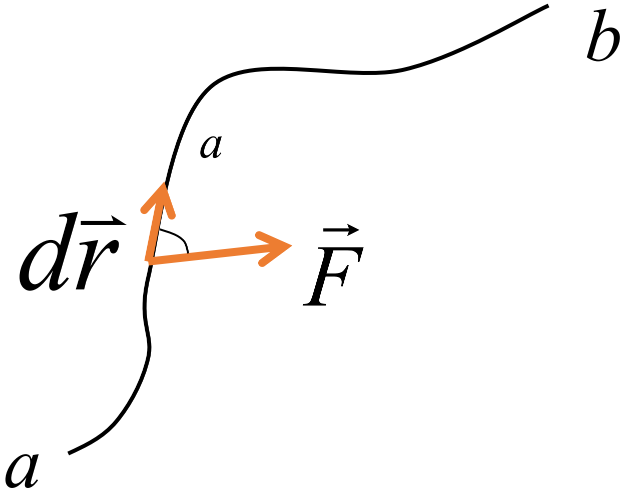
$$= \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$



8.4 功與能量

- 功
- 質點曲綫運動時變力作功

$$\mathrm{d}W = F\cos\alpha\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|$$



$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \qquad \boxed{W = \int_a^b \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}$$

直角坐標系中 $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ $\quad d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

$$A = \int_{x_0}^{x} F_x dx + \int_{y_0}^{y} F_y dy + \int_{z_0}^{z} F_z dz$$

8.4 功與能量

- 功
- 注 意 ：(1) 功的正 、 負

$$\begin{cases} 0^\circ < \alpha < 90^\circ, & \mathrm{d}W > 0 \\ 90^\circ < \alpha < 180^\circ, & \mathrm{d}W < 0 \\ \alpha = 90^\circ \quad \vec{F} \perp \mathrm{d}\vec{r} & \mathrm{d}W = 0 \end{cases}$$

(2) 功是一個過程量，與路徑有關．

(3) 合力的功，等于各分力的功的代數和．

$$\boxed{W = W_x + W_y + W_z}$$

◈ 功的單位 (焦耳) $\quad 1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$

8.4 功與能量

- 功

例 2-6 在图 2-14 所示的圆周运动中，有一变力 $\boldsymbol{F} = F_0(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})$ 作用在质点上，质点由原点经半径为 R 的圆弧到达 P（0,2R）点，则在此过程中 F 对质点所做的功是多少？

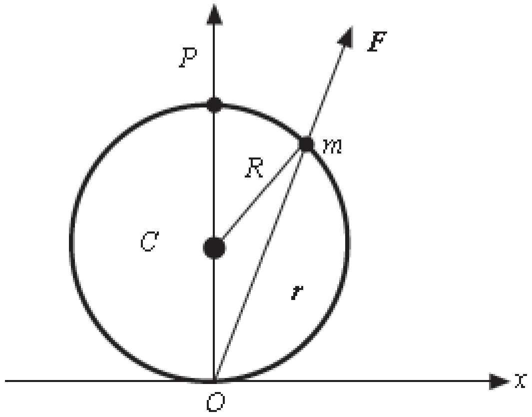


图 2-14　质点做圆周运动

解 根据（2-23）式在直角坐标系下变力曲线做功的计算

$$W = \int_a^b \mathrm{d}W = \int_a^b (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z)$$

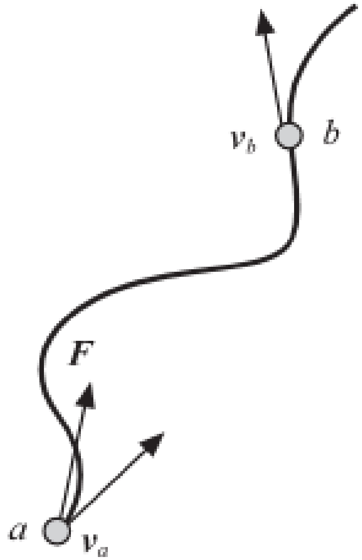
已知 $F_x = F_0 x$， $F_y = F_0 y$， $F_z = 0$，积分的起点和终点分别是（0，0）和（0,2R），代入上式可得

$$W = \int_0^0 F_0 x \mathrm{d}x + \int_0^{2R} F_0 y \mathrm{d}y = 2F_0 R^2$$

8.4 功與能量

- 質點的動能定理

$$W=\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int F_{\mathrm{t}}\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|=\int F_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s$$



而 $$F_{\mathrm{t}}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\therefore W=\int_{v_1}^{v_2} mv\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

8.4 功與能量

● 質點的動能定理

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{k2} - E_{k1}$$

合外力對質點所作的功，等于質點動能的增量

——質點的動能定理

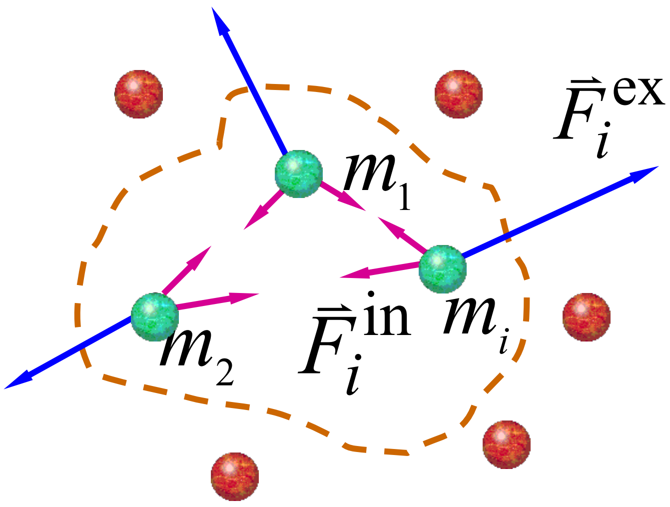
8.4 功與能量

- 質點系的動能定理

◆ 對第 i個質點，有

$$W_i^{\text{ex}} + W_i^{\text{in}} = E_{\text{k}i} - E_{\text{k}i0}$$

外力功　　內力功



◆ 對質點系，有

$$\sum_i W_i^{\text{ex}} + \sum_i W_i^{\text{in}} = \sum_i E_{\text{k}i} - \sum_i E_{\text{k}i0} = E_{\text{k}} - E_{\text{k}0}$$

◆ 質點系動能定理 $\sum W_{\text{外力}} + \sum W_{\text{內力}} = \sum E_{\text{k末}} - \sum E_{\text{k初}}$

8.4 功與能量

● 保守力做功和勢能

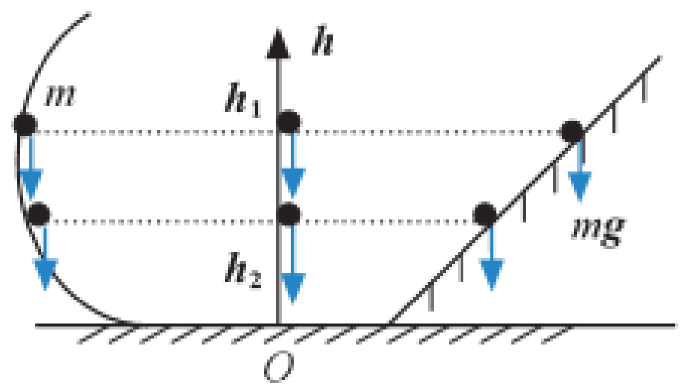
做功與路徑無關，只與始末位置有關的力稱爲**保守力**。

典型的保守力有：重力、彈力和萬有引力。

重力做功:

$$F = mg$$

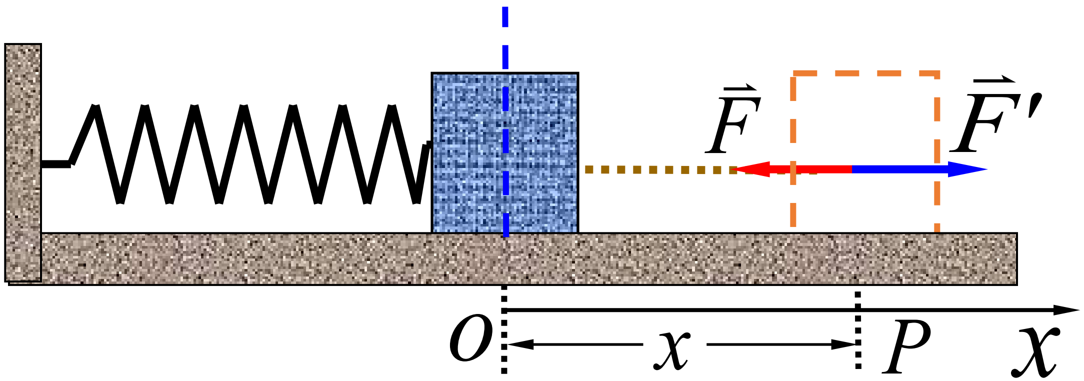
$$W = -(mgh_2 - mgh_1)$$



8.4 功與能量

- 保守力做功和勢能

彈性力作功



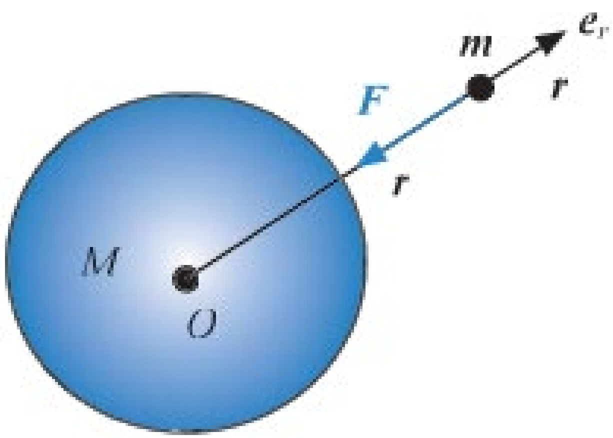
$$\vec{F} = -kx\vec{i} \qquad \mathrm{d}W = -kx\mathrm{d}x$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} -kx\mathrm{d}x \;= -(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2)$$

8.4 功與能量

- 保守力做功和勢能

萬有引力作功



$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{e}_r$$

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} -G\frac{mM}{r^2}\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$W = -\left[(-\frac{GmM}{r_2}) - (-\frac{GmM}{r_1})\right]$$

8.4 功與能量

- 保守力做功和勢能

勢能是與質點位置有關的單值函數．

$$W=-\left[(-\frac{GmM}{r_2})-(-\frac{GmM}{r_1})\right]$$

重力勢能： $E_p=mgy$

$$W=-(\frac{1}{2}kx_2^2-\frac{1}{2}kx_1^2)$$

彈性勢能： $E_p=\frac{1}{2}kx^2$

$$W=-\left[(-\frac{GmM}{r_2})-(-\frac{GmM}{r_1})\right]$$

引力勢能： $E_p=-\frac{GmM}{r}$

◈ 保守力的功

$$W=-(E_{\mathrm{p2}}-E_{\mathrm{p1}})=-\Delta E_{\mathrm{P}}$$

—— **保守力作功，勢能減少**

8.4 功與能量

● 保守力做功和勢能

◆ 勢能計算 $W = -(E_{\mathrm{p}} - E_{\mathrm{p0}}) = -\Delta E_{\mathrm{p}}$

令 $E_{\mathrm{p0}} = 0$

$$E_{\mathrm{p}}(x, y, z) = \int_{(x,y,z)}^{E_{\mathrm{p0}}=0} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

討論:

勢能是狀態的函數 $E_{\mathrm{p}} = E_{\mathrm{p}}(x, y, z)$

勢能具有相對性，其大小與勢能零點的選取有關.

勢能是屬系統的.

勢能差與勢能零點選取無關.

非保守力：力所作的功與路徑有關.　(例如 摩擦力)

8.4 功與能量

- 功能原理和機械能守恒

1、質點系的功能原理

$$W^{\text{ex}} + W^{\text{in}} = E_{\text{k}} - E_{\text{k}0}$$

外力功

內力功

$$W^{\text{in}} = \sum_i W_i^{\text{in}} = W_{\text{e}}^{\text{in}} + W_{\text{ne}}^{\text{in}}$$

非保守力的功

$$W_{\text{e}}^{\text{in}} = -\left(\sum_i E_{\text{p}i} - \sum_i E_{\text{p}i0}\right) = -(E_{\text{p}} - E_{\text{p}0})$$

$$W^{\text{ex}} + W_{\text{ne}}^{\text{in}} = (E_{\text{k}} + E_{\text{p}}) - (E_{\text{k}0} + E_{\text{p}0})$$

8.4 功與能量

- 功能原理和機械能守恒

2、機械能守恒定律

當 $W^{\mathrm{ex}} + W_{\mathrm{ne}}^{\mathrm{in}} = 0$ 時，有 $E = E_0$

——只有保守內力作功的情況下，質點系的機械能保持不變．

$$E = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}}$$

$$E_{\mathrm{k}} - E_{\mathrm{k0}} = -(E_{\mathrm{p}} - E_{\mathrm{p0}})$$

$$\boxed{\Delta E_{\mathrm{k}} = -\Delta E_{\mathrm{p}}}$$

8.4 功與能量

● 功能原理和機械能守恒

例 2-7 质量为 m 的子弹以速率 v_0 水平射入一质量为 M 的木块中，如图 2-16 所示，木块被一不计质量的细绳静止悬挂，绳子长度为 L，子弹进入木块后与木块保持相对静止，求木块摆起的最大高度。

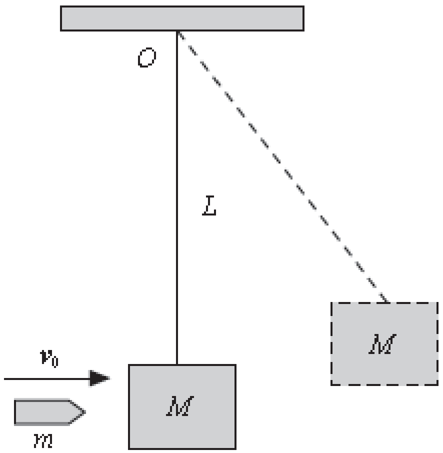


图 2-16 子弹射入木块

第一阶段是子弹与木块的碰撞，碰撞过程时间很短，这个阶段系统所受合外力为 0，系统动量守恒。碰撞后子弹和木块速度相等，

则 $mv_0 = (m + M)v_1$

求出

$$v_1 = \frac{mv_0}{m + M}$$

8.4 功與能量

功能原理和機械能守恒

第二阶段是木块和子弹的上摆阶段，此阶段只有保守力重力在做功，故系统的机械能守恒。选取木块的最低点作为零势能点，初始位置处的机械能全部是动能，没有势能；最大高度处的机械能全部是势能，没有动能。

$$\frac{1}{2}(m+M)\,v_1^{\,2}=(m+M)gH_{\max}$$

$$H_{\max}=\frac{v_1^2}{2g}=\frac{m^2v_0^2}{2(m+M)^2g}$$

思考題

- 什麼是動量定理？請簡要說明。
- 什麼是動量守恒定律？請簡要說明。
- 什麼是功？請簡要說明。

休息一下

Take a break

感謝觀賞

Thank you for listening.