集合、函數及序列 Sets, Functions & Sequences

第二章

Outline

- 集合 (Sets)
- 函數 (Functions)
- 序列 (Sequences)
- 序列求和 (Sums)

+ 集合(Sets) (2.1)

- 一個集合(Set)就是沒有順序的"一堆東西", 而集合裡的事物稱作元素(Element)。
- 一般來說, 當元素 a 屬於集合 P 時，記作 $a \in P$.
  例: $P = \{2, 4, 6, 8\}; 2 \in P, 3 \notin P$

常見的重要集合

自然數集 (Natural number):	$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3\ldots.\}$
整數集 (Integers):	$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
正整數集 (Positive Integers):	$\mathbf{Z}^{+} = \{1, 2, 3, \ldots..\}$
有理數集 (Rational numbers)	$\mathbf{Q} = \{\, a / b \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$
實數集 (Real numbers)	$\mathbf{R}$
複數集 (Complex numbers)	$\mathbf{C}$

集合的範例

- 本年度BCS003的學生
- 課室TC-T111裡的椅子
- $S = \{2, 4, 6, 8\}$
- $T = \{\{1, 2\}, 3, \varnothing, \mathbf{Q}\}$
- $V = \{1, 3, 5, \ldots, 99\}$
- $W = \{\ldots, -3, -2, -1\}$

+ 定義 (2.1, 2.2)

- 子集 (Subset):
  - 集合 A 所有元素都屬於集合 B, 稱 A 為 B 的子集, 即$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
  - 記作: $A \subseteq B$.

注: 對於任意集合 S, $\varnothing \subseteq S$; $S \subseteq S$.

- 集合相等 (Set Equality):
  - $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 即 $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$
  - 記作: $A = B$

例: $S = \{2, 4, 6, 8\} = \{2, 6, 4, 8\} = \{2, 2, 4, 6, 8\}$

- 基數 (Cardinal number; Cardinality):
  - 集合 A 內不同元素的個數, 其數量記作: $|A|$

- 有限集合 (Finite set) : A 內若恰有 n ($n \in \mathbf{N}$) 個不同元素
- 無限集合 (Infinite set) : 非有限集合

定義 (2.1, 2.2)

- 冪集 (Power Set):
  S 的冪集為其所有子集的集合，記作: $\mathcal{P}(S)$

- 有序 n 元組 (Ordered n-tuple):
  有序的 n 個元素的聚集, 記作: $(a_1, a_2, \dots, a_n)$
  - 例: 有序二元組/序偶 (Ordered pair) : (x, y)
    有序三元組 (Ordered triple) : (x, y, z)

- 笛卡兒積 (Cartesian Product):
  集合的笛卡兒積為所有集合的有序 n 元組的集合:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i\}$$

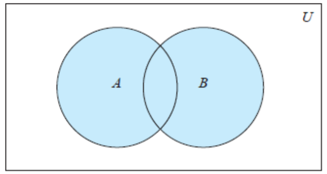
+ 例1

- 已知: A = {1, 3, 5, 3}, B = {a, b}, 求:
  A. $|A|$基数为3
  B. $|\varnothing|$基数为0
  C. $|\{\varnothing\}|$基数为1
  D. $\mathcal{P}(A)$幂集为8 {1，3，5，（13），（15），（35），（135），⊘}
  E. $|\mathcal{P}(A)|$基数为8
  F. $A \times B$ (1a)(3a)(5a)(1b)(3b)(5b)
  G. B^2 = B × B (aa)(ab)(ba)(bb)
  H. $|B^n|$ = 2^n

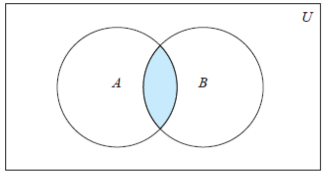
定義 (2.2)

- 並集 (Union):
  - $A \cup B = \{x | \ x \ \in A \vee x \in B\}$
- 交集 (Intersection):
  - $A \cap B = \{x | \ x \ \in A \wedge x \in B\}$
- 互斥/不交集 (Mutually Exclusive / Disjoint):
  - $A \cap B = \emptyset$
- 差集 (Difference):
  - A 和 B 的差集: $A - B = A \cap \bar{B} = \{x | \ x \ \in A \wedge x \notin B\}$
- 補集 (Complement):
  - $\bar{A} = \{x \in U | x \notin A\}$

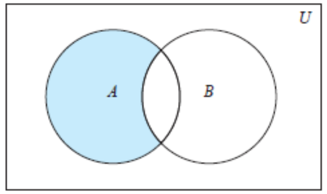
Venn Diagram (文氏圖)



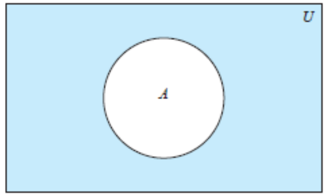
$A \cup B$ is shaded.



$A \cap B$ is shaded.



$A - B$ is shaded.



$\bar{A}$ is shaded.

Inclusion-Exclusion:
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

U - 全集(Universal set)
$\emptyset$, { } - 空集 (Empty set)

例2

- 給定集合 A, B, C，證明：
  - A. 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$, 則 $A \subseteq C$.
  - B. $A \subseteq B$ 當且僅當 $\bar{B} \subseteq \bar{A}$

Set Identities

若A、B 和 C 為 U 的三個子集, 則下列規則成立:

- 交換律 (commutative law)

  $A \cup B = B \cup A$,

  $A \cap B = B \cap A$

- 結合律 (associative law)

  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

- 分配律 (distributive law)

  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- 德摩根律 (DeMorgan's Law)

  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

例3

- 已知 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{4, 5\}$, 求:

A. $A \cup B$ $\{1, 2, 3, 4\}$

B. $A \cap B$ $\{3\}$

C. $A - B$ $\{1, 2\}$

D. $B - A$ $\{4\}$

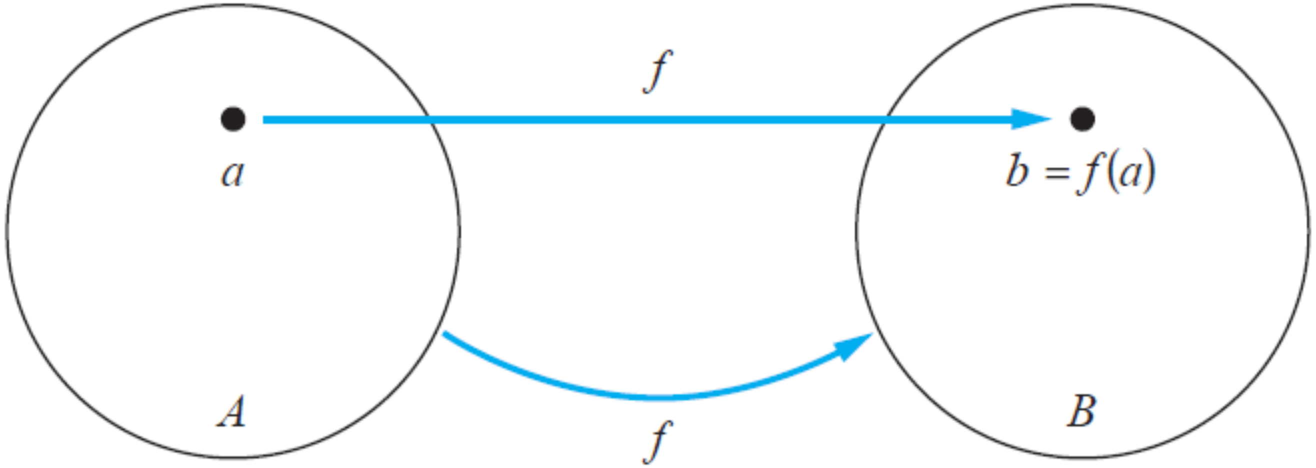
E. $A \cap C$ $\varnothing$

F. $\bar{A}$ $\{4,5,6\}$

函數 Function (2.3)

- 函數 $f: A \to B$　　“f 把 A 映射 (map) 到 B”
  - A :　論域 (Domain)
  - B :　陪域 (Codomain)
  - $\{f(x) | x \in A\}$:　值域 (Range)

b 是 a 的像 (Image)
a 是 b 的原像 (Preimage)



函數 Function (2.3)

- 實數值函數 (Real-valued function):

$$f: A \to \mathbf{R}$$

- 整數值函數 (Integer-valued function):

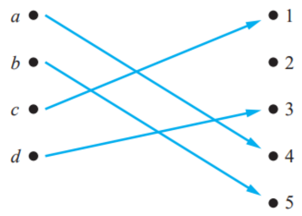
$$g: A \to \mathbf{Z}$$

- A 的子集 S 在函數 f 下的像:

  若 $f: A \to B, S \subseteq A$, 則 $f(S) = \{t \mid t = f(s), s \in S\}$

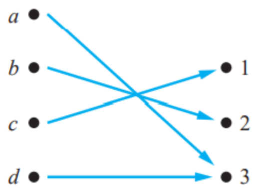
一對一及映上 One-to-one & Onto

- 給定 $f: A \to B$, 若 f 滿足:



➢ $\forall a \forall b (f(a) = f(b) \to a = b)$
則稱 f 是一對一(One-to-one)或單射(injective).

➢ $\forall y \exists x (f(x) = y)$
則稱 f 是映上(Onto)或滿射(surjective).



若 f 是一對一且映上, 則稱 f 為一一對應(one-to-one correspondence)或雙射的(bijective)。

例4

A. 令 f 為從 $\{a, b, c, d\}$ 到 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的函數，其定義為 $f(a) = 4, f(b) = 2, f(c) = 1$ 及 $f(d) = 3$. 問 f 是否雙射函數(bijection)?

一对一且映上——双射

B. 判斷下列函數是否雙射函數: i) $f(x) = 2x^2$; ii) $g(x) = \sqrt[3]{x-2}$

step 1 Determine if $f(x) = 2x^2$ is a bijection

step 2 Bijectivity requires a function to be both injective (one-to-one) and surjective (onto)

step 3 The function $f(x) = 2x^2$ is not injective because $f(a) = f(-a)$ for any $a \in \mathbb{R}$

step 4 The function $f(x) = 2x^2$ is not surjective from its domain $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ because the range is $\{f \in \mathbb{R} : f \geq 0\}$ (all non-negative real numbers)

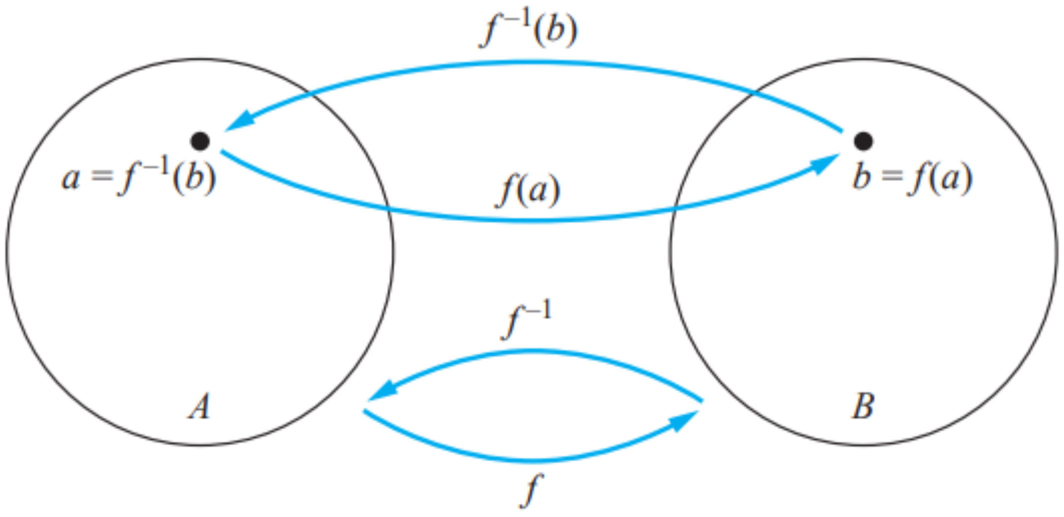
（1）不是双射

（2）是单射且映上，所以为双射

函數的反函數 Inverse of a function

- 若 f 為一雙射函數(bijection), 則 f 有反函數(inverse function), 稱 f 為可逆的(invertible)：

$$f^{-1}(y) = x \text{ iff } f(x) = y$$



例5

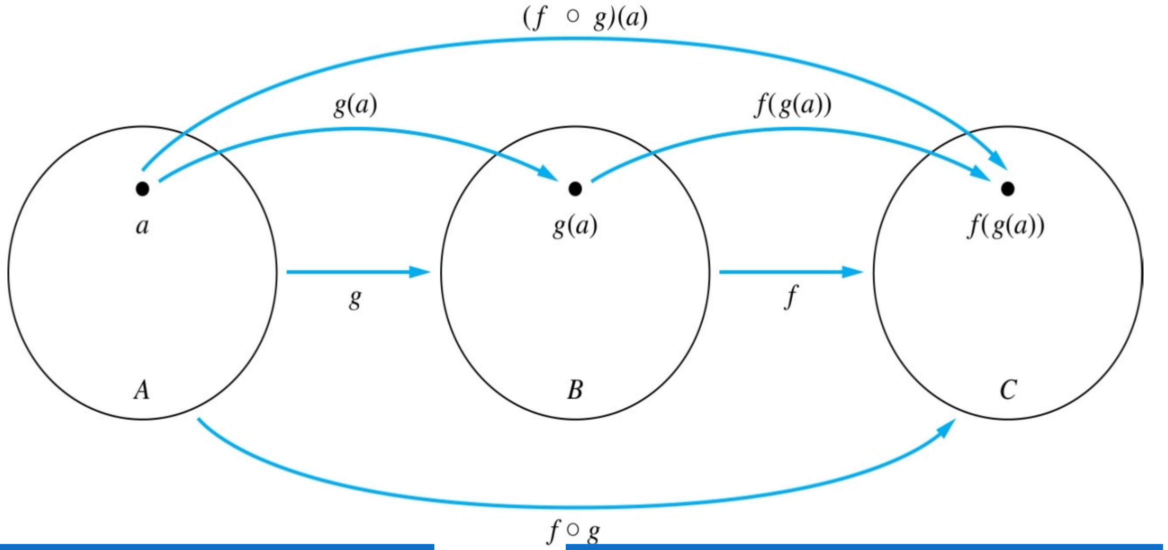
- 若存在，求下列函數的反函數(Inverse functions):

  i) $f(x) = 2x^2$;　　ii) $g(x) = \sqrt[3]{x-2}$

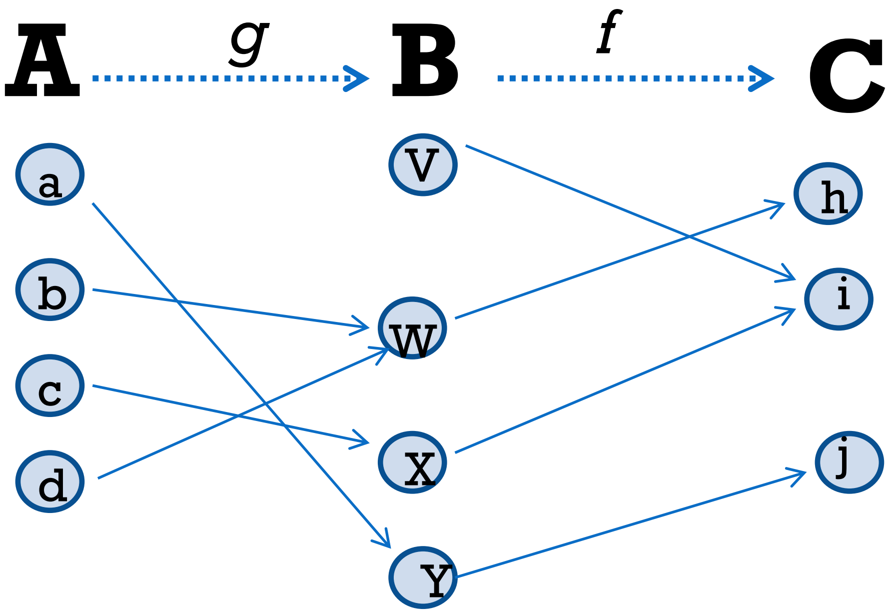
函數的合成 Composition of functions

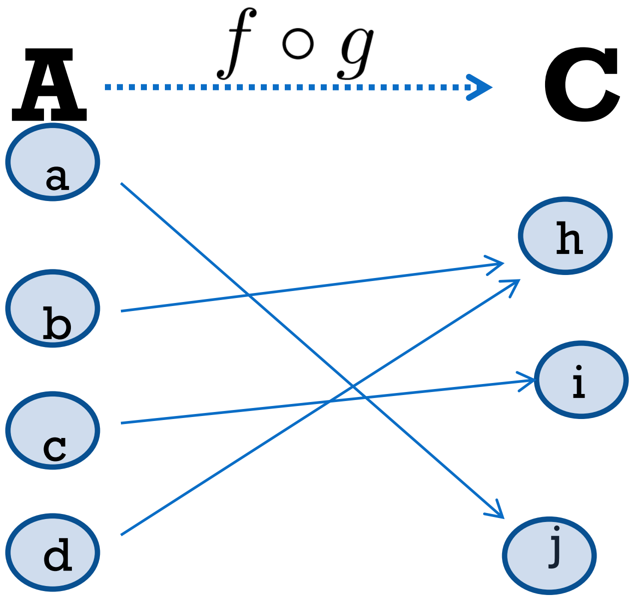
- 令 $f: \mathrm{B} \to \mathrm{C}$, $g: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$. 則 f 和 g 的合成(Composition) $f \circ g$ 定義為從集合A 到集合 C 的函數且

$$\forall x \in A, (f \circ g)(x) = f(g(x))$$



+ 函數的合成 Composition of functions





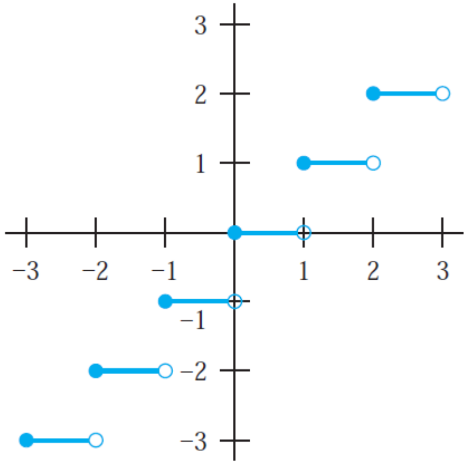
例6

1. 令$f(x) = (x-1)^2, g(x) = 3x+1$, 求:
   A. $(f \circ g)(x)$
   B. $(g \circ f)(x)$
   C. $(f \circ f)(x)$
   D. $(g \circ g)(x)$

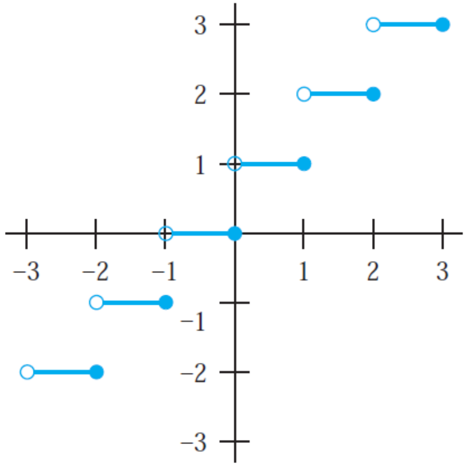
2. 已知 $A = \{a, b, c\}, B = \{1,2,3\}, f: A \to B, g: A \to A$, 且$g(a) = b, g(b) = c, g(c) = a, f(a) = 3, f(b) = 2, f(c) = 1$, 求:
   A. $(f \circ g)(a)$
   B. $(f \circ g)(c)$
   C. $(g \circ g)(b)$

+ 下取整函數及上取整函數 (2.3)

- 下取整函數 (Floor Function)
  - $\lfloor x \rfloor$ = 小於或等於 x 的最大整數
- 上取整函數 (Celling Function)
  - $\lceil x \rceil$ = 大於或等於 x 的最小整數



(a) $y = \lfloor x \rfloor$



(b) $y = \lceil x \rceil$

例7

1. 求值:
   A. $\lfloor 1.5 \rfloor$ 1
   B. $\lceil 1.5 \rceil$ 2
   C. $\lfloor -1.5 \rfloor$ -2
   D. $\lceil -1.5 \rceil$ 1

2. 令 $S = \{-1,0,2,4,7\}$, 對應下列各函數求 $f(S)$:
   A. $f(x) = 2x + 1$ -1,1,5,9,15
   B. $f(x) = 1$ 1
   C. $f(x) = \lceil x/5 \rceil$ 0,1,2
   D. $f(x) = \lfloor (x^2 + 1)/3 \rfloor$ 0,1,5,16

序列 Sequence (2.4)

- **序列 (Sequence)** - 定義域為整數集或其子集、值域為實數集的函數。
  - $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$
  - $\{a_n\}_{n=1}^{5}$
  - $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
  - $\{a_n\}$

- 如: 1, 4, 7, 10, 13…
  - **顯式公式 (Explicit formula)** 表示:

$$a_n = 3n - 2, n \geq 1$$

  - **遞推公式 (Recursion formula)** 表示:

$$a_n = a_{n-1} + 3 \qquad where \quad a_1 = 1, n \geq 2$$

等差序列及等比序列 Arithmetic & Geometric progression

- 等差序列 (Arithmetic Progression):

$$a, a+d, a+2d, \dots\ a+nd, \dots$$

  - a: 初始項
  - d: 公差

- 等比序列 (Geometric Progression):

$$a, ar, ar^2, \dots\ ar^n, \dots$$

  - a: 初始項
  - r: 公比

斐波那契數列 (Fibonacci Sequence)

- 對於 $f_1 = 0, f_2 = 1, n = 2, 3, 4 \ldots,$ 有:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

- 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ⋯

+ 一些有用的序列

TABLE 1 Some Useful Sequences.

nth Term	*First 10 Terms*
n^2	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, . . .
n^3	1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, . . .
n^4	1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 6561, 10000, . . .
2^n	2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, . . .
3^n	3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049, . . .
$n!$	1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, . . .
f_n	1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, . . .

序列求和 Summation of Sequence (2.4)

- 將序列$\{a_n\}$的每一項相加:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j$$

TABLE 2 Some Useful Summation Formulae.

Sum	*Closed Form*
$\sum_{k=0}^{n} ar^k \ (r \neq 0)$	$\frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}, r \neq 1$
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}, \lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$

例8

1. 求和:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} 2ij$$

step 1 Calculate the inner sum for a fixed value of i, summing over j from 1 to 3

step 2 The inner sum for a fixed i is $\sum_{j=1}^{3} 2ij = 2i(1+2+3) = 2i \cdot 6 = 12i$

step 3 Now calculate the outer sum, summing the results of the inner sum over i from 1 to 4

step 4 The outer sum is $\sum_{i=1}^{4} 12i = 12(1+2+3+4) = 12 \cdot 10 = 120$

2. 已知某人存入一筆\$10,000款項至每年5%複利的戶口, 令P_n表存款 n 年後該戶口金額，求 P_n 的遞推關係 (recurrence relation)。

step 1 Identify the initial amount and the interest rate

step 2 The initial amount is $P_0 = \$10,000$ and the interest rate is 5% per year

step 3 Express the compound interest formula for the balance after n years

step 4 The recurrence relation is $P_n = P_{n-1} \times (1 + 0.05)$

Cardinality (基數) (2.5)

- 集合A與集合B有相同的基數(Cardinality), 記作 $|A| = |B|$,

若且唯若

A和B存在一個一一對應。

+ Countable & Uncountable

- 可數(Countable):
  一個集合或者是有限集(finite set)或者與正整數集(Z^+)具有相同基數。

- 不可數(Uncountable):
  不是可數的集合。

$$|A| = \aleph_0$$

例9

- 判斷以下集合是否: i) Finite (有限); ii) Countably infinite (可數無限); iii) Uncountable (不可數):

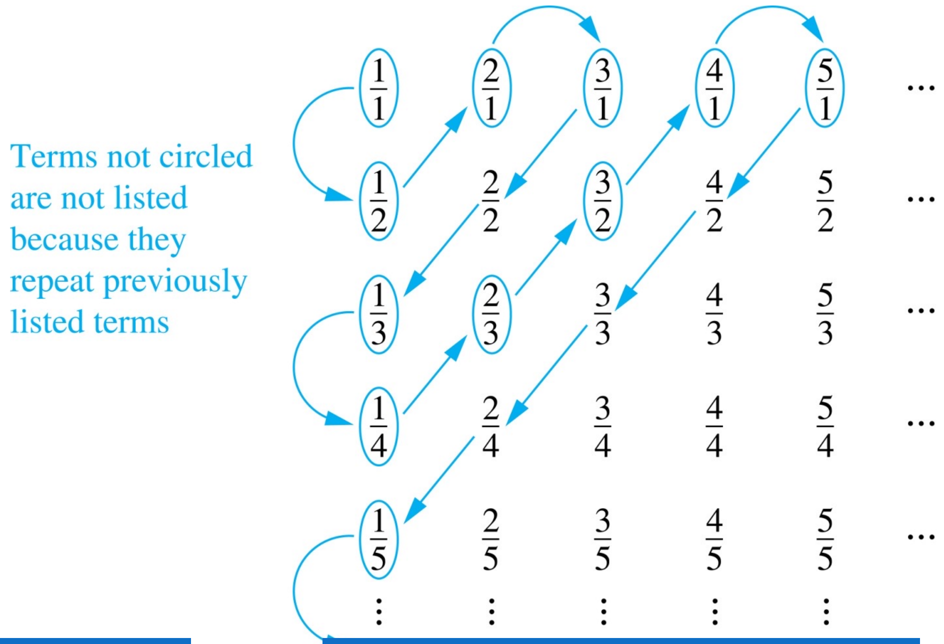
A. $\mathbf{G} = \{ x \mid 15 \le x \le 20, x \in \mathbf{N} \}$ 有限

B. $\mathbf{E} = \{ x \mid x = 2k, k \in \mathbf{Z}^{+} \}$ 可数无限

C. $\mathbf{Z}$ 可数无限

D. $\mathbf{Q}$ 可数无限

E. $\mathbf{R}$ 不可数



教材對應閱讀章節及練習

- 2.1(~Example 21), 2.2-2.3
- 對應習題: (可視個人情況定量)
  - 2.1: 1-37
  - 2.2: 1-36
  - 2.3: 1-15, 22-23, 30-33, 36-37, 42-43
  - 2.4: 1-15,18-26,29-34