Parcial # 2

Señales y sistemas

①. Analisis teorico validado del sistema

DSB - CS $(\theta_0 = 0)$

Etapa ①

Señal recibida:

$$x(t) = A_1 m(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

multiplica por

$$\cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

Etapa ② mezclador

$$x(t) * \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) = A_1 m(t) \cos^2(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

aplicar identidad trigonometrica

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\alpha)$$

entonces

$$A_1 m(t) \cos^2(2\pi f_0 t + \theta_0) = \frac{A_1}{2} m(t) + \frac{A_1}{2} m(t) \ldots$$

$\cos(4\pi f_0 t + 2\theta_0)$

Sustituimos $\theta_0 = 0$

$$= \frac{A_1}{2} m(t) + \frac{A_1}{2} m(t) \cos(4\pi f_0 t)$$

Calculos transformada fourier:

Se recibe

$$x(t) = A_1 m(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

Transformada fourier:

$$\cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

aplicamos teorema de modulacion:

$$m(t) \cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}[M(f - f_0) + M(f + f_0)$$

multiplicamos por A_1:

$$x(t) = A_1 m(t) \cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{A_1}{2}[M(f - f_0) + M(f + f_0)]$$

multiplicamos la señal entrada por la portadora

$$x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) = A_1 m(t) \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t)$$

$$= A_1 m(t) \cos^2(2\pi f_0 t)$$

Usamos identidad trigonometrica

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\alpha)$$

$$x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) = A_1 m(t) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t)\right)$$

$$= \frac{A_1}{2} m(t) + \frac{A_1}{2} m(t) \cos(4\pi f_0 t)$$

Ya tenemos los terminos

- $\frac{A_1}{2} m(t) \longleftrightarrow \frac{A_1}{2} M(f)$
- $\frac{A_1}{2} m(t) \cos(4\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{A_1}{4}\left[M(f-2f_0) + M(f+2f_0)\right]$

entonces

$$X_{mezclada}(f) = \frac{A_1}{2} M(f) + \frac{A_1}{4}\left[M(f-2f_0) + M(f+2f_0)\right]$$

Etapa 3 filtro para baja:

El filtro LPF elimina todo lo que fuera del ancho de banda del mensaje original $M(f)$ es decir elimina las componente $\pm 2f_0$

$$\boxed{X_{LPF}(t) = \frac{A_1}{2} m(t)}$$ transformada fourier.

Etapa 4: Escalonamiento

multiplicamos por $\frac{2}{A_1}$

$$X_{final}(t) = \frac{2}{A_1} \cdot \frac{A_1}{2} m(t) = m(t)$$

$$\boxed{X_{final}(t) = M(f)}$$ Transformada fourier.

Resultado final: Transformadas en cada etapa.

etapa	señal en tiempo	Transformada fourier
entrada	$A_1 m(t) \cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{A_1}{2}[M(f-f_0) + M(f+f_0)]$
Mezclador	$\frac{A_1}{2} m(t) + \frac{A_1}{2} m(t) \cos(4\pi f_0 t)$	$\frac{A_1}{2} M(f) + \frac{A_1}{4}[M(f \pm 2f_0)]$
filtro pasa bajo (LPF)	$\frac{A_1}{2} m(t)$	$\frac{A_1}{2} M(f)$
Escalon final	$m(t)$	$M(f)$

2 punto parcial:

- modelo mecanico: masa resorte.

masa : m

Resorte: constante k.

amortiguador (viscoso): coeficiente c

entrada: fuerza externa $F_E(t)$

salida: desplazamiento de masa $y(t)$

- paso 1: ley newton:

$$F_E(t) = m\ddot{y}(t) + cy''(t) + ky(t)$$

paso 2 transformar laplace:

$$\mathcal{L}\{F_E(t)\} = m\,\mathcal{L}\{y''(t)\} + c\,\mathcal{L}\{y'(t)\} + k\,\mathcal{L}\{y(t)\}$$

sabemos:

- $\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s)$
- $\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} = s^2Y(s)$

$$F_E(s) = ms^2 Y(s) + csY(s) + kY(s)$$

$$\boxed{F_E(s) = (ms^2 + cs + k)\,Y(s)}$$

Paso 3: función transferencia

$$\frac{Y(s)}{F_E(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

Resultado

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{F_E(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}}$$

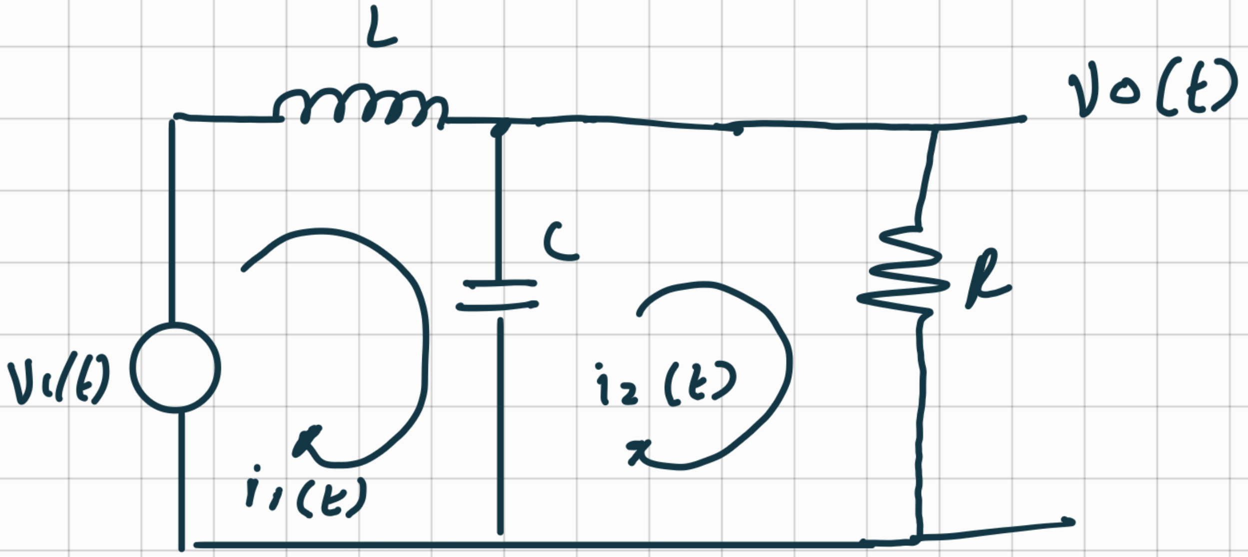
Explicación:

Esta función representa la dinámica de un sistema de segundo orden dependiendo de los valores de m, c y k el sistema puede ser

- Subamortiguado (sistema < 1) : oscilaciones con decaimiento

• Sobreamortiguado (sistema >1): no hay oscilaciones, pero respuesta lenta.

• amortiguamiento crítico (sistema =1): respuesta más rápida sin sobrepaso.



• vi(t) → fuente voltaje

• L → en serie con la fuente
• C → conectado entre L y una rama con R
• R → conectado a tierra

paso 1: ley LCK en nodo

$$i_1(t) = i_c(t) + i_2(t)$$

Recordamos relaciones de los componentes

• inductor

$$v_L(t) = L \frac{di_1(t)}{dt}$$

Como esta en serie con la fuente.

$$V_L(t) = V_i(t) - V_C(t) \rightarrow V_i(t) = V_L(t) + V_C(t)$$

- Capacitor

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

- Resistor

$$V_R(t) = R i_2(t) \Rightarrow i_2(t) = \frac{V_C(t)}{R}$$

Donde $V_C(t) = V_o(t)$ porque esta en paralelo con la resistencia

Paso 2: Sustituimos

$$i_1(t) = i_C(t) + i_2(t)$$

$$i_1(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R}$$

Como

$$V_i(t) = L \frac{di_1(t)}{dt} + v_C(t)$$

Sustituimos $i_R(t)$ en esta expresión:

$$v_i(t) = L\frac{d}{dt}\left(C\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R}\right) + v_C(t)$$

• paso 3: expandimos derivadas

$$v_i(t) = L\left(C\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv_C(t)}{dt}\right) + v_C(t)$$

• paso 4: transformada Laplace

$$V_i(s) = L\left(Cs^2 V_C(s) + \frac{1}{R} s V_C(s)\right) + V_C(s)$$

factorizamos $V_C(s)$:

$$V_i(s) = \left(LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1\right) V_C(s)$$

y como $V_o(s) = V_C(s)$ entonces

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$

funcion transferencia final

$$\boxed{H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}}$$

- analogia con el sistema masa resorte, amortiguador

$$\frac{Y(s)}{F_E(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

Por comparacion

mecanico	electrico
masa = m	LC
amortiguador c	$\frac{L}{R}$
Resorte k	1 unidad normalizada

tabla equivalencia

Dominio mecanico	Dominio electrico	Justificacion fisica
m	LC	Inercia total (combinada)
c	$\frac{L}{R}$	amortiguamiento proporcional a velocidad
k	1	Constante de restitucion unitaria

$$\boxed{H(s) = \frac{v_o(s)}{v_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}}$$