Durée : 1 heure. Aucun document autorisé. Ce contrôle sera noté sur ***10 points****. Justifier TOUT.*

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a) $\sum_n 2^n z^n$,
b) $\sum_n 2^n z^{2n}$,
c) $\sum_n 2^n z^{n^2}$,
d) $\sum_n n^{\ln n} z^n$
e) $\sum_n \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$,
f) $\sum_n n \sin(\frac{n\pi}{3}) z^n$.

2. Exemples.

a) Donner une série entière dont le domaine de convergence est exactement $D(0,1)$.

b) Donner une série entière dont le domaine de convergence est exactement $\overline{D}(0,1)$.

3. En appliquant le théorème d'Abel radial, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.

4. Vrai ou faux ? Soit $S(z) = \sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1.

a) Si $\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ z\in[0,1[}} S(z)$ existe, alors $S(1)$ converge.

b) La série dérivée $S'(z) = \sum_n n a_n z^{n-1}$ converge partout sur $D(0,1)$.

c) La série dérivée $S'(z) = \sum_n n a_n z^{n-1}$ converge partout où $S(z)$ converge.

d) Si $S(z)$ converge uniformément sur $D(0,1)$, alors $S(z)$ converge sur $\overline{D}(0,1)$.

5. Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une fonction DSE sur $\mathbb{C}$ tout entier. On se propose de montrer que

Si $f(z)$ est bornée sur $\mathbb{C}$ par une constante $M > 0$, alors $f(z)$ est une constante.

a) Soient $R > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Montrer que la série

$$\sum_{n\geq 0} a_n R^{n-N} e^{i(n-N)\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

en la variable θ converge uniformément vers la fonction $\frac{f(Re^{i\theta})}{R^N e^{iN\theta}}$.

b) Calculer $\int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta$ pour $n \in \mathbb{Z}$. En déduire que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta})}{R^N e^{iN\theta}} d\theta = a_N.$$

c) Montrer que $|a_N| \leq \frac{M}{R^N}$. En conclure.

On pourrait aussi considérer la réciproque d'Exercice 4 (d) : si $S(z)$ converge sur $\overline{D}(0,1)$, alors $S(z)$ converge uniformément sur $D(0,1)$. Celle-ci est fausse, cependant le contre-exemple n'est pas facile à construire ; voici une construction sous forme d'« exercice ».

Considérons la série entière

$$S(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k z^k, \quad \text{avec} \quad a_k = \sum_{n\geq 0} \delta_n \frac{1}{(1+i\varepsilon_n)^n}.$$

où $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites dans $\mathbb{R}_{>0}$ tendant vers 0 telles que

(ACV) La série numérique $\sum_n \frac{\delta_n}{\varepsilon_n}$ converge ;

(DV) La suite $(\frac{\delta_n}{\varepsilon_n^2})_n$ diverge vers $+\infty$.

Cet exercice a pour but de montrer que $S(z)$ converge sur $\overline{D}(0,1)$ mais la convergence n'y est pas uniforme.

a) Justifier que les a_k sont bien définis. Donner un exemple de $(\delta_n)_n$ et $(\varepsilon_n)_n$ vérifiant *toutes* les conditions ci-dessus, de sorte que cet exercice n'est pas vide ! (Indication : considérer des suites de type $1/n^\alpha$.)

b) (Question sur des séries numériques.) Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique absolument convergente. Soit $(\lambda_n)_n$ une suite dans $D(0,1)$. Montrer que la suite numérique $(\sum_n u_n\lambda_n^N)_{N\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que
$$\lim_{N\to+\infty} \sum_n u_n \lambda_n^N = 0.$$
Vous pourrez montrer d'abord que $\left|\sum_n u_n\lambda_n^N\right| \leq \sum_{n=0}^m |a_n|\,|\lambda_n|^N + \sum_{n=m+1}^{+\infty} |a_n|$ pour tout $m\in\mathbb{N}$.

c) Soit $z\in\overline{D}(0,1)$. Montrer que $|1+i\varepsilon_n - z| \geq \varepsilon_n$ si $z=1$, et $|1+i\varepsilon_n - z| \geq \operatorname{Re}(1-z) > 0$ si $z\neq 1$. En déduire l'absolue convergence de $\sum_n \frac{\delta_n}{1+i\varepsilon_n - z}$ pour tout $z\in\overline{D}(0,1)$.

d) Montrer que
$$\sum_{k=0}^N a_k z^k - \sum_{n\geq 0} \frac{\delta_n}{1+i\varepsilon_n - z} = -\sum_{n\geq 0} \frac{\delta_n}{1+i\varepsilon_n - z}\left(\frac{z}{1+i\varepsilon_n}\right)^{N+1}.$$
En déduire que $S(z)$ converge partout sur $\overline{D}(0,1)$ et que sa somme fait
$$S(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{\delta_n}{1+i\varepsilon_n - z}.$$

e) Soit $z\in\overline{D}(0,1)$. Montrer que $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1+i\varepsilon_n - z}\right) = \frac{\operatorname{Re}(1-z)}{|1+i\varepsilon_n - z|^2} \geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. En déduire que
$$\operatorname{Re} S(z) \geq \frac{\operatorname{Re}(1-z)}{|1+i\varepsilon_n - z|^2}, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

f) Posons $z_n = \frac{1+i\varepsilon_n}{|1+i\varepsilon_n|}$ (qui est l'intersection de $[0, 1+i\varepsilon_n]$ avec le cercle unité). Montrer que
$$\frac{\operatorname{Re}(1-z_n)}{|1+i\varepsilon_n - z_n|^2} \sim \frac{2\delta_n}{\varepsilon_n^2}, \quad n\to+\infty.$$

g) Montrer que $S(z)$ n'est pas bornée sur $\overline{D}(0,1)$. En conclure.