*Durée : 1 heure. Aucun document autorisé. Ce contrôle sera noté sur **10 points**.*
Corrigé en rouge (peut-être indication toute seule).
Commentaire en bleu.

1. (1+1 pts) Questions de cours :

a) Démontrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$.
Par **comparaison séries-intégrales**, voir le polycopié, Chapitre 1, Théorème 4.3.1.
Méthode alternative : **critère de la loupe** de Cauchy.
La vérification des conditions, surtout la **décroissance vers 0** de la suite, est indispensable.

b) Énoncer le théorème sur la dérivabilité de la convergence uniforme d'une suite de fonctions.
Voir le polycopié, Chapitre 2, Théorème 1.4.2.
Il est indispensable que **la suite des dérivées** $(f_n')_n$ **converge uniformément**.

2. (1+1+3+1 pts) Déterminer la nature des séries numérique suivantes :

a) $\sum_{n\geq 1}(\sqrt[n]{n}-1)$,
b) $\sum_{n\geq 1}(\sqrt[n]{n}-1)^n$,
c) $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{\lambda^n}{n}$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,
d) $\sum_{n\geq 1} \frac{(3n)!}{30^n (n!)^3}$.

a) Utiliser le **développement limité** : $\sqrt[n]{n}-1 = e^{\frac{1}{n}\ln(n)} - 1 \sim \ln(n)/n > 0$, d'où la divergence.
On a $\sqrt[n]{n} > 1$ car les deux côtés sont positifs est qu'à la puissance n on a $n > 1$.

b) Par **comparaison avec les séries géométriques** : en effet, d'après a), $\sqrt[n]{n}-1 \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, en particulier $0 \leq (\sqrt[n]{n}-1)^n \leq (\frac{1}{2})^n$ pour n assez grand, d'où la convergence.

c) Lorsque $|\lambda| < 1$, **comparer avec la série géométrique** de raison $|\lambda|$, d'où la convergence absolue.
Lorsque $|\lambda| > 1$, la suite $(\frac{\lambda^n}{n})_n$ ne tend pas vers 0 par croissance comparée, donc ne vérifie pas la **condition nécessaire de la convergence**, d'où la divergence.
Lorsque $\lambda = 1$, appliquer le **critère des séries alternées**.
Lorsque $\lambda = -1$, c'est la **série harmonique** (au signe près).
En conclusion, la série converge si et seulement si $\lambda \in]-1, 1]$.
Méthodes alternatives :
Lorsque $\lambda \in]-1, 1[$, appliquer le **critère de d'Alembert**.
Lorsque $\lambda \in]-1, 1]$, appliquer le **critère d'Abel** : les sommes partielles de $\sum_n (-1)^{n-1}\lambda^n$ sont bornées et $(\frac{1}{n})$ décroît vers 0.
Lorsque $\lambda \in [0, 1]$, appliquer le **critère des séries alternées**, d'où la convergence.
Lorsque $\lambda \in]-\infty, -1]$, $(-1)^{n-1}\frac{\lambda^n}{n} = -\frac{(-\lambda)^n}{n} \leq -\frac{1}{n}$, d'où la divergence par **comparaison avec la série harmonique** (au signe près).
Faites attention :
Lorsque $\lambda < 0$, la série est de signe fixe. Vérifez bien certaine **décroissance vers 0** ou **croissance vers 0** avant d'appliquer le critère des séries alternées, également pour le critère d'Abel.
Dans le critère de d'Alembert, c'est la **limite** de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ quand $n \to +\infty$ qu'il faut vérifier à être < 1.

d) Appliquer le **critère de d'Alembert** :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+3)!}{(3n)!}\left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^3 \frac{30^{-n-1}}{30^{-n}} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3\cdot 30} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{27}{30} < 1.$$

Attention : lorsqu'on remplace n par $n+1$ dans $(3n)!$, on obtient

$$(3n+3)! = (3n+3)(3n+2)(3n+1)\cdot(3n)!,$$

voir TD 1 Exercice 2(m).

3. (1+1+1 pts, Noyau de Fejér) Considérons la suite de fonctions $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où on définit

$$K_n(x) = \frac{1}{n}\frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}, \quad \forall x \in]0,\pi].$$

Déterminer la limite simple de $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $]0,\pi]$.

Comme $|K_n(x)| \leq \frac{1}{n\sin^2(x/2)}$, on a $\lim_n K_n(x) = 0$ pour tout x, autrement dit la limite simple de $(K_n)_n$ vaut la fonction constante 0.

C'est la limite **par rapport à** n qui nous intéresse ici.

Déterminer si la convergence est uniforme sur

a) $I =]0,\pi[$;

La convergence n'est pas uniforme sur $I =]0,\pi[$: en effet, $(\|K_n - 0\|_\infty)_n$ ne tend pas vers 0, car, par exemple, on a $\|K_n\|_\infty \geq K_n(\frac{1}{n}) = \frac{\sin^2(1)}{n\sin^2(1/2n)} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$.

b) $I = [\delta,\pi]$, où $0 < \delta < \pi$.

La convergence est uniforme sur $I = [\delta,\pi]$: en effet, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [\delta,\pi]$, d'une part on a $\sin(x/2) \geq \sin(\delta/2) > 0$ puisque $\sin(x/2)$ est **strictement croissante** sur $[0,\pi]$ et $\delta \in]0,\pi[$, et d'autre part $0 \leq \sin^2(nx/2) \leq 1$; ainsi $0 \leq K_n(x) \leq \frac{1}{n}\frac{1}{\sin^2(\delta/2)}$, donc $\|K_n\|_\infty \leq \frac{1}{n\sin^2(\delta/2)} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

Pour majorer $\frac{1}{\sin^2(x/2)}$, il faut **minorer** $\sin^2(x/2)$.

(Indication : majorer $\sin^2(nx/2)$ et $\frac{1}{\sin^2(x/2)}$ séparément.)

4. (1+1+1+2+1 pts) Soit $(f_n : [0,1] \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues. On suppose que

i) la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction intégrable $f : [0,1] \to \mathbb{C}$;

ii) la convergence est uniforme sur tout compact inclus dans $]0,1]$;

iii) **(borne uniforme) il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout n, on a $\|f_n\|_\infty \leq M$.**

Sous ces conditions,

a) Chacune des assertions suivantes est-elle vraie ou fausse ? Démontrer si elle est vraie ; en fournir un contre-exemple avec justification si elle est fausse.

À retenir : polycopié, Chapitre 2, Proposition 1.2.7 ; TD 2 Exercice 6 ; TD 2 Exercice 1.

a.1) la limite f est continue sur $[0,1]$.

Faux en général, voici deux contre-exemples

— $f_n(x) = e^{-nx}$, voir TD 2 Exercice 1(d) ;

— $f_n(x) = (1-x)^n$, voir polycopié, Chapitre 2, Exemple 1.2.6.

Cependant, f est bien continue sur $]0,1]$.

a.2) la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $]0,1]$.

Faux en général, avec les mêmes contre-exemples $f_n(x) = e^{-nx}$ ou les contre-exemples ci-dessous.

La convergence uniforme sur tout compacte dans un intervalle semi-ouvert (tel que $]0,1]$) n'implique pas du tout la convergence sur tout intervalle.

Point relié : la convergence simple sur $[0,1]$ avec la convergence uniforme sur $]0,1]$ implique la convergence uniforme sur $[0,1]$, voir TD 2 Exercice 6.

D'ailleurs, ne mélangez pas la convergence uniforme d'une suite de fonctions avec la continuité uniforme d'une (seule) fonction.

a.3) Si f est continue sur $[0,1]$, alors la convergence est uniforme sur $[0,1]$.

Faux en général, voici quatre contre-exemples :

— $f_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ -nx+2, & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}, \\ 0, & \text{si } x \geq \frac{2}{n}, \end{cases}$ voir TD 2 Exercice 1(c) ;

— $f_n(x) = nxe^{-nx}$, voir TD 2 Exercice 1(e) ;

— $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^3}$, voir TD 2 Exercice 1(g) ;

— $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, voir TD 2 Exercice 1(h).

Remarquons que ces quatre contre-exemples sont tous de la forme $f_n(x) = F(nx)$ pour certaine fonction continue $F(x)$ telle que $F(0) = 0$, $F \geq 0$, $\|F\|_\infty > 0$ et $F(x) \xrightarrow{x \to +\infty} 0$. Ainsi, un autre contre-exemple que j'ai trouvé dans vos copies :

— $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$.

b) Soit $\delta \in]0,1[$. Montrer que

$$\lim_n \int_\delta^1 f_n(t)dt = \int_\delta^1 f(t)dt$$

Appliquer le théorème de l'intégration de la convergence uniforme : en effet, par (ii), la convergence de $(f_n)_n$ est uniforme sur le compact $[\delta,1] \subset]0,1]$.

et que

$$\left| \int_0^\delta f_n(t)dt - \int_0^\delta f(t)dt \right| \leq 2\delta M.$$

D'abord, comme $f(x) = \lim_n f_n(x)$ et que $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty \leq M$, on a $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [0,1]$. Par suite, on a

$$\left| \int_0^\delta f_n(t)dt - \int_0^\delta f(t)dt \right| \leq \left| \int_0^\delta f_n(t)dt \right| + \left| \int_0^\delta f(t)dt \right| \leq \int_0^\delta |f_n(t)|\,dt + \int_0^\delta |f(t)|\,dt \leq \delta M + \delta M.$$

c) En déduire que

$$\lim_n \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 f(t)dt.$$

En découpant $\int_0^1 = \int_0^\delta + \int_\delta^1$, on a

$$\begin{aligned}\left| \int_0^1 f_n(t)dt - \int_0^1 f(t)dt \right| &\leq \left| \int_0^\delta f_n(t)dt - \int_0^\delta f(t)dt \right| + \left| \int_\delta^1 f_n(t)dt - \int_\delta^1 f(t)dt \right| \\ &\leq 2\delta M + \left| \int_\delta^1 f_n(t)dt - \int_\delta^1 f(t)dt \right|\end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient de la question précédente.

L'idée est alors de faire tendre $n \to +\infty$ **puis** $\delta \to 0$.

Concrètement et rigoureusement : soit $\varepsilon > 0$; prenons $\delta > 0$ tel que $2\delta M \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (par exemple $\delta = \frac{\varepsilon}{4M+1}$ convient) ; encore une fois d'après la question précédente, il existe un entier N (qui dépend de δ) tel que $\left| \int_\delta^1 f_n(t)dt - \int_\delta^1 f(t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq N$; alors pour tels n, on obtient

$$\left| \int_0^1 f_n(t)dt - \int_0^1 f(t)dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

L'argument avec $\limsup_n$ (mais essentiellement le même que le précédent) : lorsque $n \to +\infty$, on obtient

$$0 \leq \limsup_n \left| \int_0^1 f_n(t)dt - \int_0^1 f(t)dt \right| \leq 2\delta M$$

pour tout $\delta \in]0,\pi]$, donc

$$\limsup_n \left| \int_0^1 f_n(t)dt - \int_0^1 f(t)dt \right| = 0,$$

d'où on conclut.

5. (2 pts, Bonus) Soit $\sum_n a_n$ une série divergente avec $a_n > 0$. Notons $S_n = \sum_{k \leq n} a_k$. Montrer que $\sum_n \frac{a_n}{S_n}$ diverge. (Indication : le critère de Cauchy.)

C'est vraiement un bonus. D'après le critère de Cauchy, il faut montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier N, il existe $n > m \geq N$ tels que

$$\frac{a_{m+1}}{S_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{S_n} \geq \varepsilon.$$

On prend $m = N$, $\varepsilon \in]0,1[$ et déterminera n plus tard. Comme $a_n \geq 0$, on a $S_k \leq S_n$ pour tout $k \geq n$. Ainsi,

$$\frac{a_{m+1}}{S_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{S_n} \geq \frac{a_{N+1} + \cdots + a_n}{S_n} = \frac{S_n - S_N}{S_n}.$$

Or, par hypothèse, $\sum a_n$ est une **série divergente de termes positifs**, donc $S_n \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$ (voir le polycopié, Chapitre 1, Proposition 3.1.1). Le membre de droite ci-dessus tend alors vers 1 lorsqu'on fixe N et fait tendre $n \to +\infty$, et par conséquent, il existe n tel que le membre de droite est supérieure à $\varepsilon \in]0,1[$.