*Durée : 1 heure. Aucun document autorisé. Ce contrôle sera noté sur **10 points**.*

Corrigé en rouge (peut-être indication toute seule).

Commentaire en bleu.

1. (2 pts) Questions de cours :

a) Rappelez la comparaison séries-intégrales, puis montrez la divergence de la série de Bertrand $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln(n)}$.

Soit $f(x)$ une fonction continue **positive décroissante vers 0** sur $[0,+\infty[$. Alors la série $\sum_{n\geq 0} f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ sont de la même nature. On l'applique à $f(x)=\frac{1}{x\ln(x)}$ définie sur $[2,+\infty[$, en calculant

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{t\ln(t)}dt=\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln(t)}d\ln(t)=\int_{\ln(2)}^{+\infty}\frac{1}{t}dt$$

qui diverge.

b) Rappelez pourquoi si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions bornées sur un intervalle I qui converge uniformément vers f, alors f est bornée sur I.

Soit $N\in\mathbb{N}$ tel que $|f_N(x)-f(x)|\leq 1$ pour tout $x\in I$. On a alors

$$|f(x)|\leq|f_N(x)|+1\leq\|f_N\|_\infty+1$$

pour tout $x\in I$.

2. (3 pts) Déterminer la nature des suites de nombres suivantes :

a) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n+\ln(n)^2}$. Divergente par équivalence : $\frac{1}{n+\ln(n)^2}\sim\frac{1}{n}$.

b) $\sum_{n\geq 2}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^2$. (Indication : comparaison avec une série de Riemann.)

Convergente par comparaison : $\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^2\sim o(\frac{1}{n^{3/2}})$.

c) $\sum_{n\geq 2} ne^{-n^2+n}$. Convergente par le critère de d'Alembert : $\frac{(n+1)e^{-(n+1)^2+(n+1)}}{ne^{-n^2+n}}=\frac{n+1}{n}e^{-2n}\to 0$.

3. (2 pt) Déterminez si la **suite** de fonctions $f_n(x)=nxe^{-nx}$ converge uniformément sur $I=[1/10,+\infty[$, respectivement sur $I=[0,+\infty[$.

Oui pour $I=[1/10,+\infty[$, car si $n\geq 10$, $\|f_n\|_\infty=\frac{n}{10}e^{-\frac{n}{10}}\to 0$. Non pour $I=[0,+\infty[$, car f_n converge simplement vers 0 mais $f_n(\frac{1}{n})=e^{-1}\not\to 0$.

4. (3 pts) Vrai ou faux : jusitifiez si l'énoncé est vrai, donnez-en un contre-exemple s'il est faux.

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série de nombres.

a) Si elle converge, alors $\lim_n\sqrt[n]{|a_n|}\leq 1$ dès que la limite existe.

Vrai, comme contraposé du critère de Cauchy, ou par comparaison avec la série géométrique.

b) Si elle converge, alors $\sum_{n\geq 0} a_n^2$ converge. (Indicaiton : séries altérnées.)

Faux, contre-exemple : $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

c) Si elle diverge et si $a_n\geq 0$, alors $a_n\not\to 0,\ n\to+\infty$.

Faux, contre-exemple : $a_n=\frac{1}{n}$.

Soit $(f_n)_n\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ une **suite** de fonctions.

d) Si f_n converge simplement vers une fonction $f\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$ et si $\int_0^1 f_n\to\int_0^1 f$, alors la convergence $f_n\to f$ est uniforme sur $[0,1]$. (Indication : on peut supposer $f=0$.)

Faux, contre-exemple : la suite dans l'exercice 3.

Si on impose la décroissance de la suite, i.e. $f_n(x)\geq f_{n+1}(x)$, alors la convergence de la suite des intégrales est due au théorème de convergence dominée, et la convergence uniforme est due au théorème de Dini.

e) Si $0 \leq f_n \leq 1$ et $f_{n+1} \leq f_n$, alors f_n converge simplement.
Vrai, par la convergence monotone.

f) Si $0 \leq f_n \leq 1$ et $f_{n+1} \leq f_n$, alors f_n converge uniformément.
Faux, contre-exemple : $f_n(x) = e^{-nx}$.

5. (3 pts) Considérons la **série** de fonctions $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

a) Montrez que si $x \in]-1,1]$, la série converge.
Critère d'Abel pour $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}x^n\frac{1}{\sqrt{n}}$.

b) Montrez que la série converge uniformément sur $[-a,a]$ si $0 < a < 1$.
En fait, elle converge uniformément.

Les trois questions suivantes sont étroitement reliées :

c) Écrivez le critère de Cauchy pour la convergence uniforme de la série (i.e. pour la convergence uniforme de la suite des sommes partielles de la série) sur $]-1,0]$.
$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n \geq m \geq N, \forall x \in]-1,0]$, on a

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon. \qquad (\star)$$

d) Qu'obtenez vous lorsque $x \to (-1)^+$? (Ceci devrait correspondre au critère de Cauchy pour une série de nombres que vous préciserez.)
L'inégalité reste vraie pour $x = -1$. C'est le critère de Cauchy pour la série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$.

e) En déduisez que la convergence de la série n'est pas uniforme sur $]-1,0]$.
S'il y avait la convergence uniforme sur $]-1,0]$, alors la série harmonique convergerait, ce qui est contradictoire.

Petite remarque : la convergence sur $[0,1]$ est pourtant uniforme (Théorème d'Abel radial).

Fin du corrigé.