Functional Equation

Yan-Der Lu

Dec 20, 2012

Functional Equation Strategies:

■ **猜解** 解函方第一步最好可能的解猜出來，之後開始解時你才知道要把哪些情況給刪掉。通常的解形式為 $f(x) = c, ax + b, x^2$ 等等。

■ **代數字** 一些較基本的函方通過不斷代數字通常就可以解出，一般來說我們會先求出 $f(0)$ 的值或是讓 $f(x) = 0$ 的那些 x，有時候代一代仍算不出 $f(0)$ 時，通常是題目中函數裡又有函數，此時會用 $f(0) = c$ 再代一次。再來就可以開始解，如果仍覺得條件不夠多，可以再代代看 $f(n)$ 或是 $f(\frac{1}{m})$ 的值。

■ **Injective, Surjective** 這種想法在難度中等以上的函方題長出現，而這兩種條件通常是很強的。

■ **Increasing, Decreasing** 這是能產生 Injective 其中一個好用的條件，在想用 $Cauchy's\ method$ 時提供好用的性質。

■ **Range(g)** 在一些較特別的函方中，可能有哪一步突然跑出 $f(g(x))$，如果我們能證明 g 的值域就是實數域，就可做出 f。

■ **檢驗** 最後千萬要記得把解代回去驗證，有時候這一分就可以決定你是否拿金牌了...(請參閱 2012IMO 台灣選手的成績)。

一般來說，函方的解答都會寫得相當長，如果你把每一步都直接騰在答案紙上一定會讓改的人很不爽。以兩變數的函方為例，較好的寫法是把原題給你的條件令作 $P(x, y)$，假如你代 $x = y = 0$ 時可得到 $f(0) = 0$，就可以寫作 $P(0, 0) \Rightarrow f(0) = 0$。然後把重要的關係式編號或是框起來，記得讓編號對齊以方便隨時回頭查看，最好也隔一行寫這些式子會比較清楚。

1 Cauchy's equation

有時候可能做一做題目突然跑出 $f(x+y)=f(x)+f(y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ 的形式，這時你相當開心的覺得這形式怎麼這麼簡單，隨便代一代都能兩三分鐘解完。十分鐘過去了，你發現一般實數的情況連一個值都找不出來。千萬不要緊張，再重新回頭看看 f 有沒有如下的性質 (其實還有另外的，不過那是測度論的東西，本文不談):

- 存在 $a<b$ 使函數在 (a,b) 有界。
- f 至少在某區間單調。
- f 至少在某點連續。
- (保號性) 存在 $\epsilon_1>0$ 使得當 $x\in[0,\epsilon_1]$ 時有 $f(x)\geq 0$。或是存在 $\epsilon_2<0$ 使得當 $x\in[\epsilon_2,0]$ 時有 $f(x)\leq 0$。

科西方程是競賽中一個非常常見的形式，我們現在來說明他的流程:
首先

$$P(0,0)\Rightarrow f(0)=0 \tag{1}$$

再來用數學歸納法可得

$$f(nx)=nf(x),\ \forall n\in\mathbb{Z} \tag{2}$$

我們令 $f(1)=c$ 可得:

$$f(n)=nc,\ \forall n\in\mathbb{Z} \tag{3}$$

$$f(q)=qc,\ \forall q\in\mathbb{Q} \tag{4}$$

接下來我們證明上述給的條件:

條件 1 存在 $a<b$ 使函數在 (a,b) 有界。

證明：我們定義函數 $g(x)\equiv f(x)-cx$。
由於 $g(x+y)=f(x+y)-c(x+y)=(f(x)-cx)+(f(y)-cy)=g(x)+g(y)$
所以 $g(x)$ 也是滿足科西方程的函數。因此對任一有理數 q，有 $g(qx)=qg(x)$。
由於 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界，我們設界為 M，即得 $|f(x)|\leq M,\ \forall x\in(a,b)$
也有 $|g(x)|=|f(x)-cx|\leq|f(x)|+|c||x|\leq M+c\max\{a,b\},\ \forall x\in(a,b)$
由於對於任一不在 (a,b) 的實數 x，都可找到有理數 p 使 $x-p\in(a,b)$
故 $|g(x)|=|g(x-q)+g(q)|=|g(x-q)|,\ \forall x\in\mathbb{R}$，即 $g(x)$ 在實數域中有界。
如果有 x 使 $g(x)$ 不為 0，則 $|g(nx)|=n|g(x)|(n$為正整數$)$ 趨向無窮大，矛盾。
因此 $g(x)=0$ 恆成立，即 $f(x)=cx$。 □

條件 2 f 至少在某區間單調。

證明： 假設在區間 (a, b) 單調遞增，那麼對任意 $x \in (a, b)$
有 $f(q_1) < f(x) < f(q_2)$，其中 $q_1 < x < q_2$。
將 q_1, q_2 逼近 x 即可得 $f(x) = cx,\ \forall x \in (a, b)$
而對任一實數 x，存在有理數 q 使得 $x = qr, r \in (a, b)$，故 $f(x) = cx$。 □

條件 3 f 至少在某點連續。

證明： 由連續的定義可知，對任意 δ，都存在 ϵ，使得當 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 時，有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$，即 $f(x)$ 在區間有界，化為上面的條件。 □

條件 4 保號性。

證明： 我們只證明" 存在 $\epsilon_1 > 0$ 使得當 $x \in [0, \epsilon_1]$ 時有 $f(x) \geq 0$。" 的情況。
對於任一 $y > x$，顯然存在 n 使得 $e = \frac{y-x}{n} \in [0, \epsilon_1]$
由 $f(y) - f(x) = (f(y) - f(y-e)) + (f(y-e) - f(y-2e)) + \cdots + (f(x+e) - f(x)) = nf(e) > 0$，即可得 f 單調，化為上面的條件。 □

由上面的證明我們可以看到，科西法的核心思想是 $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ，這在很多題目中都是好用的。

那麼，為什麼沒有給定其他條件時我們無法求出這個函數呢? 事實上在 1905 年，*Georg Hamel* 以 *Axiom of Choice* 以及 *Hamel basis* 的概念證明了滿足 $f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ 的函數有無窮多個。這裡略提一下:

我們一開始只知道 $f(0) = 0$，再來比方說我們取 $f(1) = 1$，這時候即可算出 $f(q) = q,\ \forall q \in \mathbb{Q}$，但這並沒有確定出任何無理數映射出的函數值，所以我們可以再任取 $f(\sqrt{2}) = \pi$，這時也只會得到 $f(q_1 + q_2\sqrt{2}) = q_1 + q_2\pi,\ \forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$。但對於不能表示成這形式的實數 x，我們仍無法確定出 $f(x)$。所以可以持續這個過程以確定出更多的函數值，由於會作出無窮多次選擇，所以必須用到選擇公理。

這樣病態的函數也有一些性質，例如:

定理 1 函數圖形 $y = f(x)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中稠密 (亦即在平面上任何給定的圓都至少包含該圖形的一個點)。

例題 1 k is a nonzero constant. Find all fuctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that

$$\begin{cases} f(xy)=f(x)f(y) & \forall x,y\in\mathbb{R} \\ f(x+k)=f(x)+f(k) & \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

解: 注意到第二式很像是科西方程，所以我們想要先證明 f 是個加性函數，但是第二式僅給出可加性對於某數為 k 時成立，所以我們可能會想辦法先證明會有 $f(x+ky)=f(x)+f(ky)$。
首先 $f(xy+ky)=f(y)f(x+k)=f(y)(f(x)+f(k))=f(y)f(x)+f(y)f(k)=f(xy)+f(ky)$，我們取 $x=\frac{a}{y}$ 可得

$$f(a+ky)=f(a)+f(ky),\ \forall a,y\in\mathbb{R} \tag{5}$$

再於此式中取 $y=\frac{b}{k}$ 可得

$$f(a+b)=f(a)+f(b),\ \forall a,b\in\mathbb{R} \tag{6}$$

至此，我們已證明 f 有可加性。而由 $f(x+\delta)=f(x)+f(\delta)=f(x)+(f(\sqrt{\delta}))^2\geq f(x),\ \forall x\in\mathbb{R},\delta>0$ 可知 f 遞增。故 $f(x)=cx$，代入驗證知當且僅當 $c=1$ 時為解。

例題 2 Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that

$$f(x^3+y^3)=x^2f(x)+yf(y^2)$$

for all $x,y\in\mathbb{R}$

解: 首先由 $P(0,0)\Rightarrow f(0)=0$。所以得

$$P(x,0)\Rightarrow f(x^3)=x^2f(x) \tag{7}$$

$$P(0,y)\Rightarrow f(y^3)=yf(y^2) \tag{8}$$

又由 x^3 的值域為實數域，因此可得到:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\ \forall x,y\in\mathbb{R} \tag{9}$$

我們聯立式 (7) 及式 (8) 可得

$$xf(x)=f(x^2) \tag{10}$$

再將其中 x 以 $x+1$ 代換並使用加性條件與上式聯立可以得到 $f(x)=xf(1)$。
經檢驗，$f(x)=xf(1)$ 為原方程的解。

2 Injective, Surjective

一般來說這樣的函方會有一些較明顯的形式。例如欲證 Injective，則通常是假設 $f(a)=f(b)$，然後在原式中代入 $x=a,\,b$ 或是 $y=a,\,b$ 去比較然後導出矛盾。如果在原式中兩邊的形式為 $f(g_1(x,y))=f(g_2(x,y))+g_3(x,y)$，那麼 f 很有可能 Surjective 的 (可見下面例題)。如果一個函數像是 $f(f(x))=x$ 既是 Injective 也是 Surjective ，就稱為 **Bijective**。

例題 3 Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that

$$f(xy+f(x))=xf(y)+f(x)$$

for all $x,y\in\mathbb{R}$.

解: 首先由 $P(0,y)\Rightarrow f(c)=c$ (其中$c=f(0)$)，因此 $P(c,0)\Rightarrow c=0$。可得

$$P(x,0)\Rightarrow f(f(x))=f(x) \tag{11}$$

我們將此式套用回原式可得到 $f(xy+f(x))=f(xf(y)+f(x))$。這就提供了我們一個思路: 如果有 f 是 Injective 的，那麼就可以得到 $f(y)=y,\ \forall y\in\mathbb{R}$!
我們假設存在 $a\neq b$ 使得 $f(a)=f(b)$，那麼有

$$P(x,a)-P(x,b)\Rightarrow f(ax+f(x))=f(bx+f(x)) \tag{12}$$

$$P(a,y)-P(b,y)\Rightarrow f(ay+f(a))-f(by+f(b))=(a-b)f(y) \tag{13}$$

注意到上兩式的相似性，我們在式 (12) 中帶入 $x=a$，在式 (13) 中代入 $y=a$ 即可得到 $0=f(a)(=f(b))$!
所以如果存在 y 使得 $f(y)\neq y$，我們將有

$$xf(y)+f(x)=f(xy+f(x))=f(xf(y)+f(x))=0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

上式先固定 x 我們知道 f 為常函數，因此 $f\equiv 0$。
經檢驗，$f(x)=0$ 或 x 都為原方程的解。

例題 4 Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that

$$f(f(x)+y)=2x+f(f(y)-x)$$

for all $x,y\in\mathbb{R}$.

解: 首先

$$P(0,y)\Rightarrow f(c+y)=f(f(y))\ (\text{其中}c=f(0)) \tag{14}$$

我們先證明 f 是 Surjective 的:

$$P(x,-f(x)) \Rightarrow c = 2x + f(f(-f(x)) - x),\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{15}$$

由於 $c-2x$ 的值域為整個實數域，因此 f 是 Surjective 的。
再來證 f 是 Injective 的: 我們假設存在 $a \neq b$ 使得 $f(a) = f(b)$，那麼有

$$P(x,a) - P(x,b) \Rightarrow f(f(x)+a) = f(f(x)+b) \tag{16}$$

$$P(a,y) - P(b,y) \Rightarrow f(f(y)-a) - f(f(y)-b) = 2(b-a) \tag{17}$$

注意到由於 f 是 Surjective 的，所以當我們固定 x 時，可找到 y 使得 $f(y) = f(x)+a+b$，此時會有 $f(x)+a = f(y)-b$ 且 $f(x)+b = f(y)-a$，但將這組 (x,y) 代入上二式即得矛盾。故 f 是 Injective 的。因此由式 (14) 即得到

$$f(y) = c + y,\ \forall y \in \mathbb{R} \tag{18}$$

經檢驗，$f(x) = x$ 是原方程的解，因此所有解為 $f(x) = x + f(0)$。

例題 5 Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$f(xf(y) + f(x)) = f(yf(x)) + x$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.

解: 首先

$$P(0,y) \Rightarrow f(c) = f(cy),\ \forall y \in \mathbb{R}(\text{其中} c = f(0)) \tag{19}$$

如果 $c \neq 0$，則 f 為常函數，但這是不可能的。因此 $c = 0$，所以

$$P(x,0) \Rightarrow f(f(x)) = x \tag{20}$$

因此有

$$P(x,f(1)) \Rightarrow f(x+f(x)) = f(f(1)f(x)) + x \tag{21}$$

$$P(f(x),f(1)) \Rightarrow f(f(x)+x) = f(f(1)x) + f(x) \tag{22}$$

注意到上兩式的相似性，我們在其中都代入 $x = f(1)$，可得到 $f(1) = f(f(1)^2)$。由於 f 是 Injective 的，因此 $1 = f(1)^2$，即 $f(1) = \pm 1$。

Case I. $f(1) = 1$
此時由 $2x = f(f(x)) + x = f(x+f(x)) = f(x) + f(x)$ 得到 $f(x) = x$。

Case II. $f(1) = -1$
此時有 $f(-1) = f(f(1)) = 1$。代回原式有

$$P(-1,y) \Rightarrow f(-f(y)+1) = f(y) - 1 \tag{23}$$

又因為 f 是 Surjective 的，因此對任意實數 a 總可找到 y 使 $-f(y)+1 = a$，此時 $f(a) = -a$。
綜上，檢驗知 $f(x) = \pm x$ 都是原方程的解。

3 Range(g)

例題 6 Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that

$$(f(x))^2+2yf(x)+f(y)=f(y+f(x))$$

for all $x,y\in\mathbb{R}$.

解: 首先顯然 $f(x)\equiv 0$ 是一組解。我們考慮其他的: 先取 $f(a)\neq 0$

$$P(a,\frac{u-(f(a))^2}{2f(a)})\Rightarrow u=f(v)-f(w) \tag{24}$$

因此我們知道任一實數都可以寫成 $f(v)-f(w)$ 的形式。

$$P(w,-f(w))\Rightarrow -f((w))^2+f(-f(w))=f(0) \tag{25}$$

$$P(v,-f(w))\Rightarrow (f(v))^2-2f(v)f(w)+f(-f(w))=f(f(v)-f(w)) \tag{26}$$

綜合上面兩式即可得到

$$f(f(v)-f(w))=(f(v)-f(w))^2+f(0) \tag{27}$$

綜上，檢驗知 $f(x)=0$ 或 $x+f(0)$ 都是原方程的解。

例題 7 Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that

$$f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1$$

for all $x,y\in\mathbb{R}$.

解: 首先由於 $f(x)\equiv 0$ 不是解，所以必定存在某實數 y 使 $f(y)\neq 0$，我們固定 y 時可得到 $f(x-f(y))-f(x)=f(f(y))-1+xf(y)$，而右式的值域為整個實數域，因此我們知道任一實數都可以寫成 $f(v)-f(w)$ 的形式。

$$P(f(y),y)\Rightarrow f(0)=2f(f(y))+(f(y))^2-1 \tag{28}$$

$$P(f(x),y)\Rightarrow f(f(x)-f(y))=f(f(y))+f(x)f(y)+f(f(x))-1 \tag{29}$$

在式 (29) 中把 $f(f(x))$和$f(f(y))$ 都以式 (28) 代換即得到

$$f(f(x)-f(y))=d-\frac{(f(x)-f(y))^2}{2} \tag{30}$$

帶回原式解得 $d=1$。檢驗知 $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$ 是原方程的解。

習題

1. If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that
$$f(x^3 + y^3) = (x + y)((f(x))^2 - f(x)f(y) + (f(y))^2)$$
for all $x, y \in \mathbb{R}$. Prove that $f(2012x) = 2012f(x)$.

2. Find all fuctions $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ such that
$$\begin{cases} f(x+1) = f(x) + 1 & \forall x \in \mathbb{Q}^+ \\ f(x^2) = (f(x))^2 & \forall x \in \mathbb{Q}^+ \end{cases}$$

3. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that
$$f(x^3 + y^3) = xf(x^2) + yf(y^2)$$
for all $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Determine all functions f from the set of positive integers to the set of positive integers such that, for all positive integers a and b, there exists a non-degenerate triangle with sides of lengths
$$a,\ f(b) \text{ and } f(b + f(a) - 1)$$
(A triangle is non-degenerate if its vertices are not collinear.)

5. Find all fuctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ such that
$$f(2f(x) + f(y)) = 2x + y$$
for all $x, y \in \mathbb{Q}$.

6. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that
$$f(xf(y) + f(x)) = 2f(x) + xy$$
for all $x, y \in \mathbb{R}$.

7. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that
$$f(f(x) - f(y)) = f(f(x)) - 2x^2 f(y) + f(y^2)$$
for all $x, y \in \mathbb{R}$.

8. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that
$$f(xf(x + y)) = f(yf(x)) + x^2$$
for all $x, y \in \mathbb{R}$.