椭圆又如何？：
椭圆的中点Bresenham画法

华中科技大学软件学院　万琳

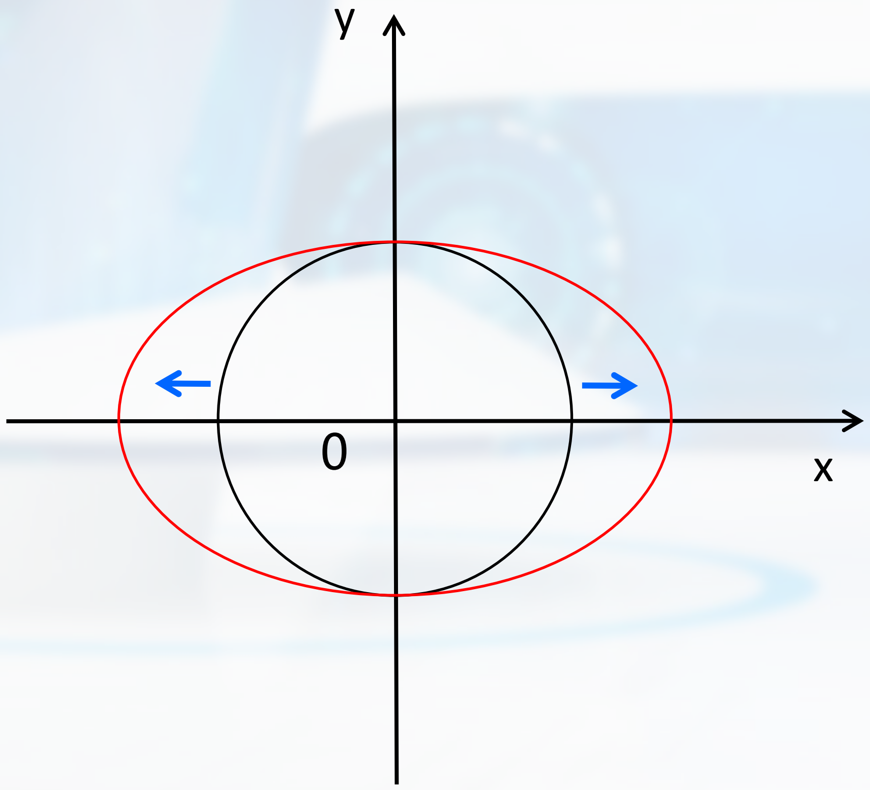
提纲

1. 椭圆的中点画法思想分析
2. 椭圆中点Bresenham算法

1

椭圆中点画法思想分析

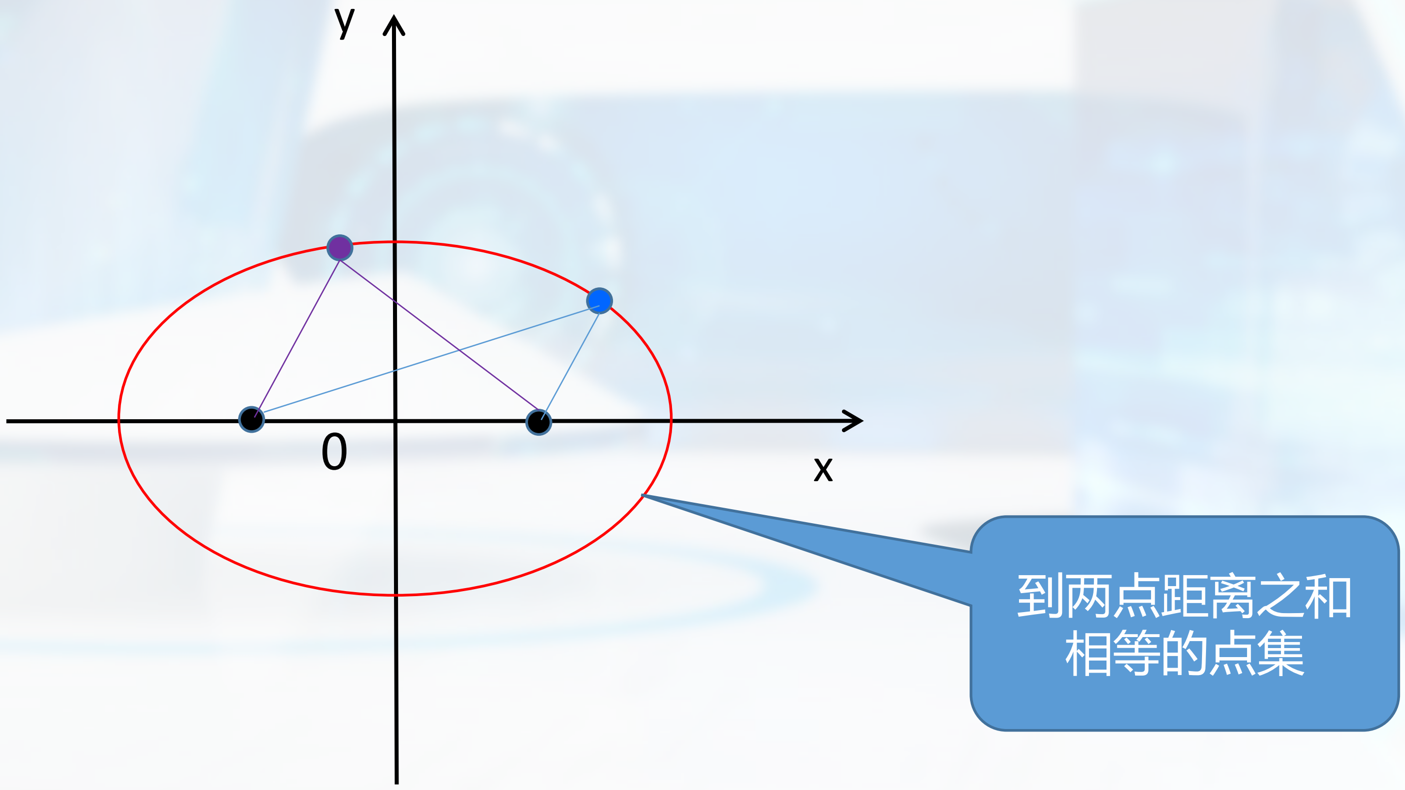
椭圆几何特性分析：



1

椭圆中点画法思想分析

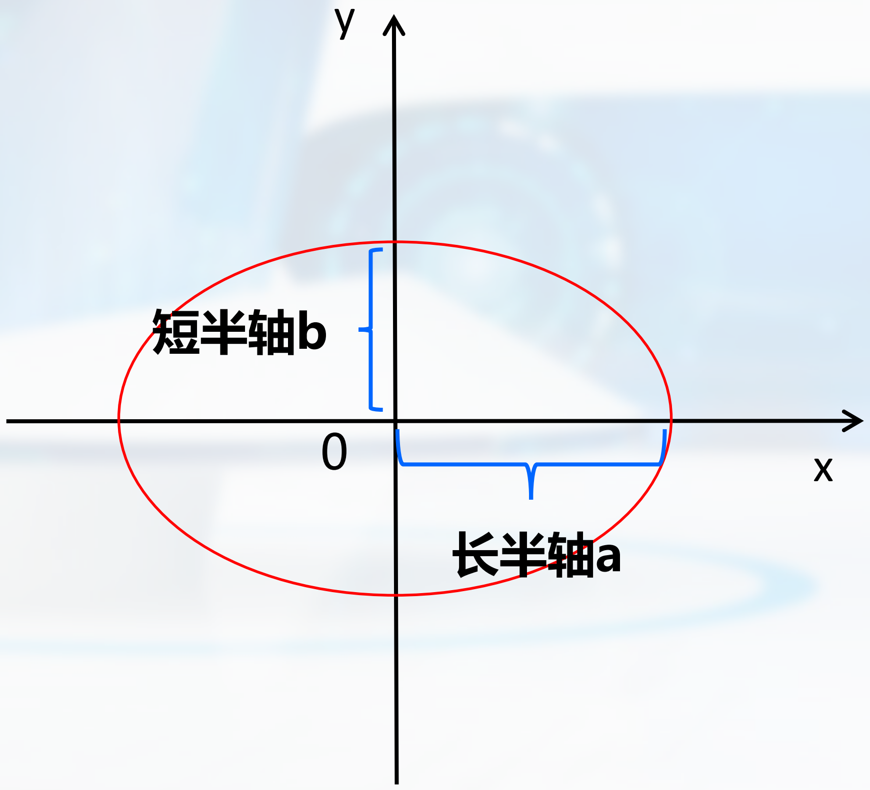
椭圆几何特性分析：



1

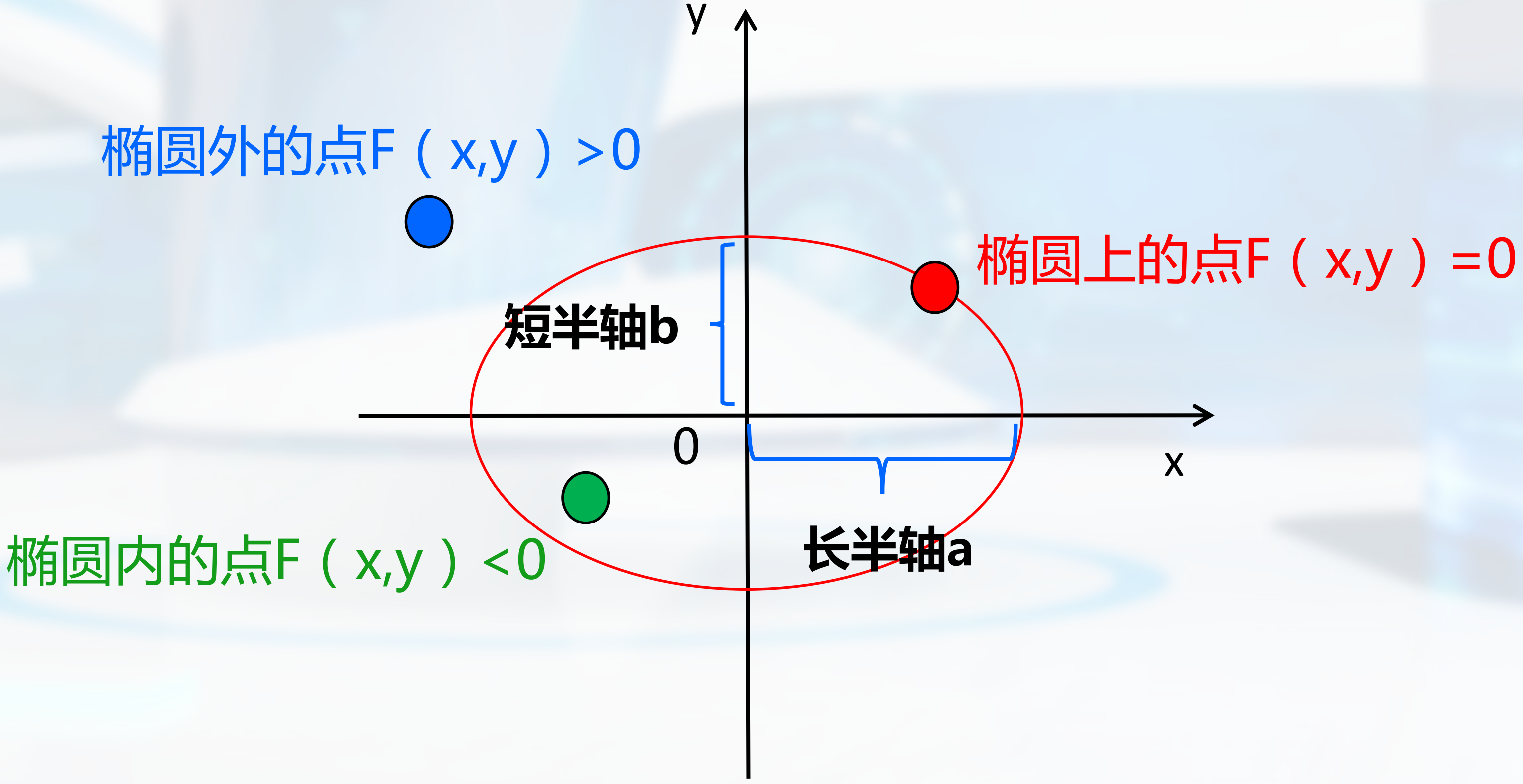
椭圆中点画法思想分析

椭圆的方程： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



1 椭圆中点画法思想分析

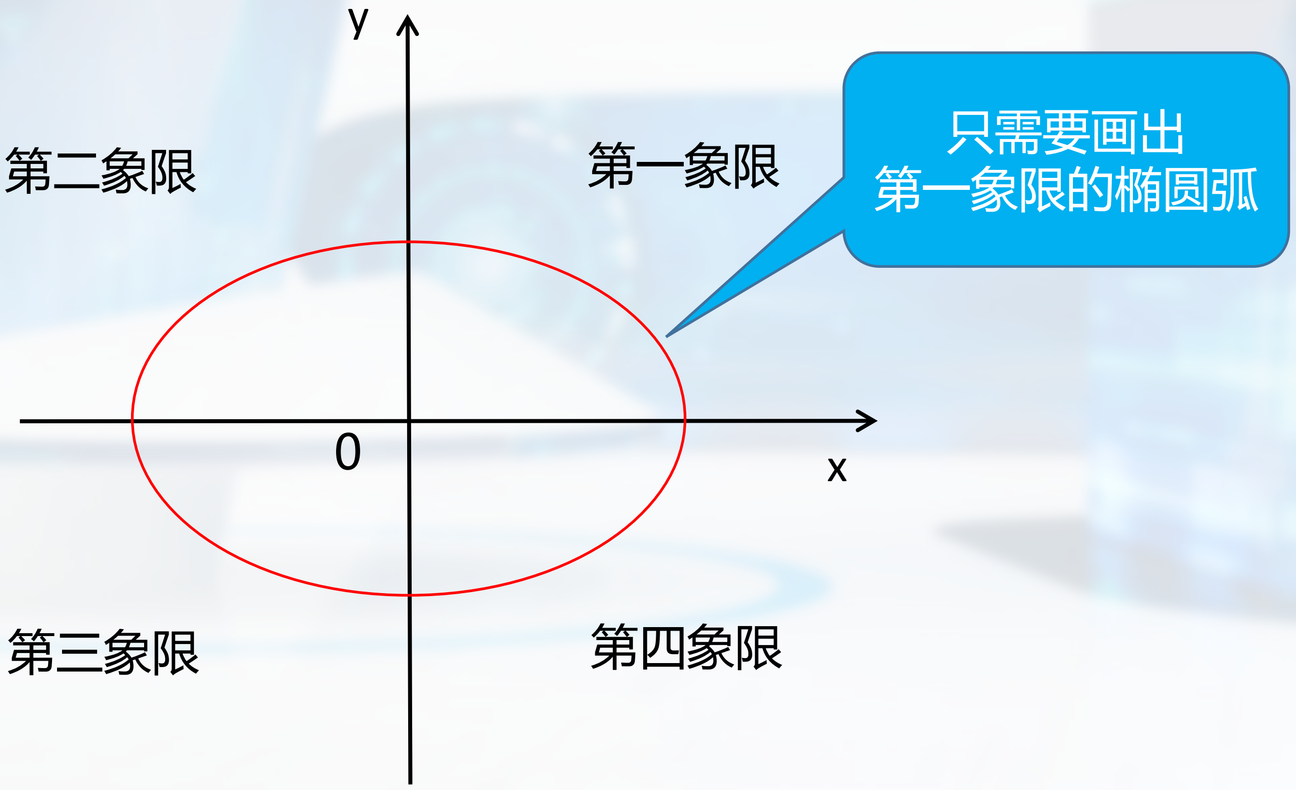
椭圆的隐式方程： $F(x,y)=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2$



1

椭圆中点画法思想分析

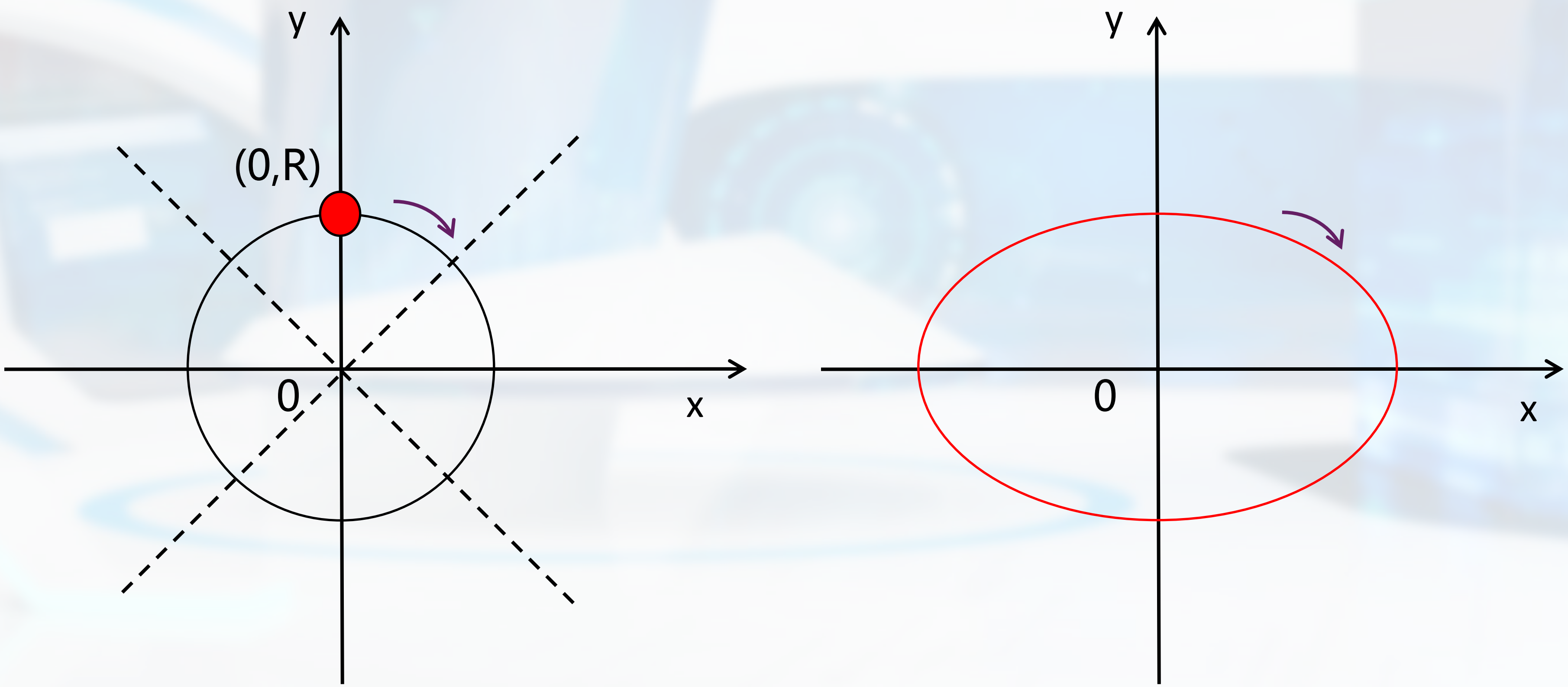
椭圆的对称性：关于x轴对称　关于y轴对称



1

椭圆中点画法思想分析

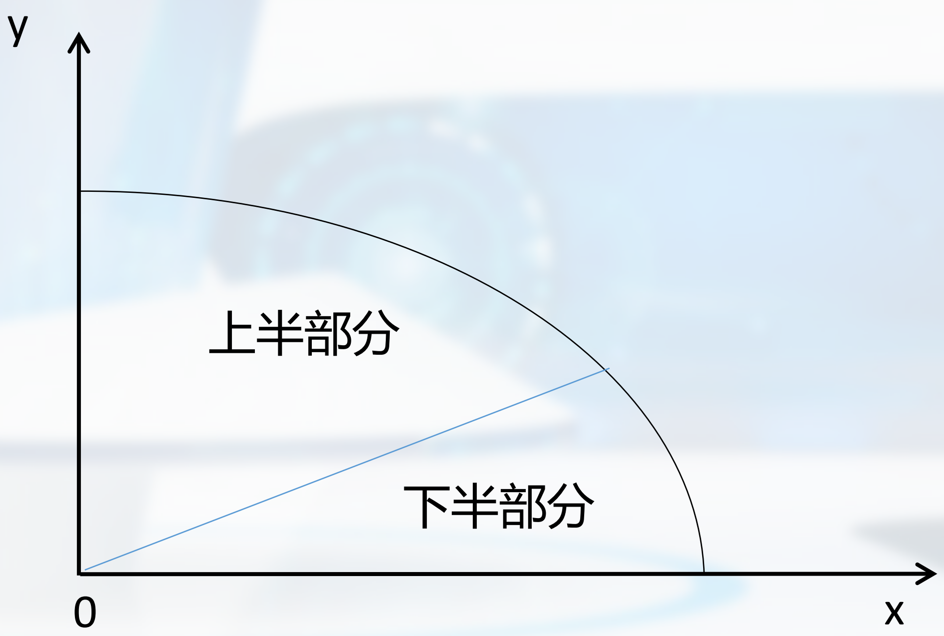
和圆的对比分析：



1

椭圆中点画法思想分析

第一象限椭圆弧分析：



1 椭圆中点画法思想分析

第一象限椭圆弧分析：

引入法向量找到分界点

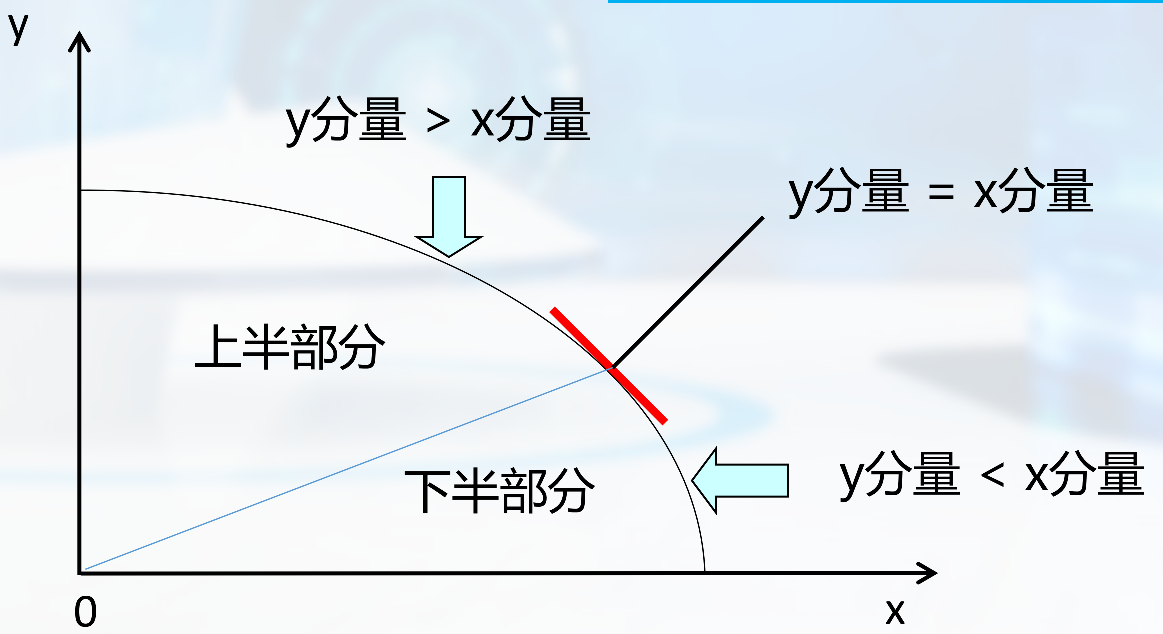
x分量　y分量

$$N(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}i+\frac{\partial F}{\partial y}j=\boxed{2b^2x}i+\boxed{2a^2y}j$$

说明：

i——x方向上的单位向量

j——y方向上的单位向量



1 椭圆中点画法思想分析

第一象限椭圆弧分析：

引入法向量找到分界点

x分量　y分量

$$N(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}i+\frac{\partial F}{\partial y}j=\boxed{2b^2x}i+\boxed{2a^2y}j$$

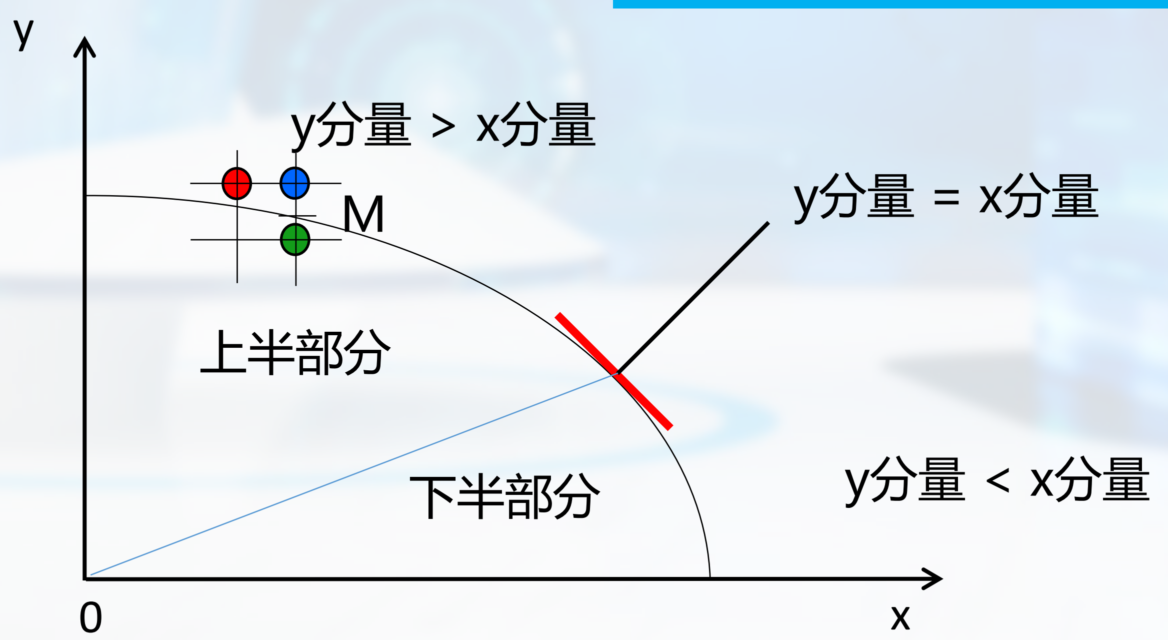
说明：

i——x方向上的单位向量

j——y方向上的单位向量

实际算法：

用中点近似判断



1 椭圆中点画法思想分析

第一象限椭圆弧分析：

引入法向量找到分界点

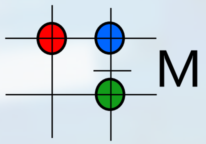
x分量　　y分量

$$N(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}i+\frac{\partial F}{\partial y}j=\boxed{2b^2x}i+\boxed{2a^2y}j$$

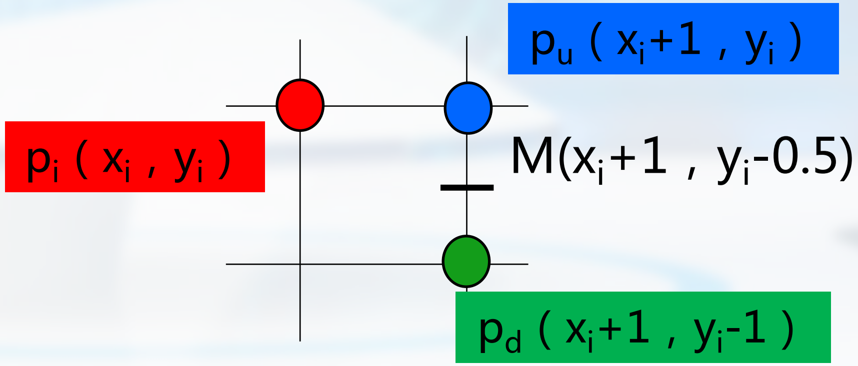
说明：

i——x方向上的单位向量

j——y方向上的单位向量



放大



x分量：$2b^2$ (x_i+1)

y分量：$2a^2$ ($y_i-0.5$)

1 椭圆中点画法思想分析

第一象限椭圆弧分析：

引入法向量找到分界点

x分量 y分量

$$N(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}i+\frac{\partial F}{\partial y}j=\boxed{2b^2x}i+\boxed{2a^2y}j$$

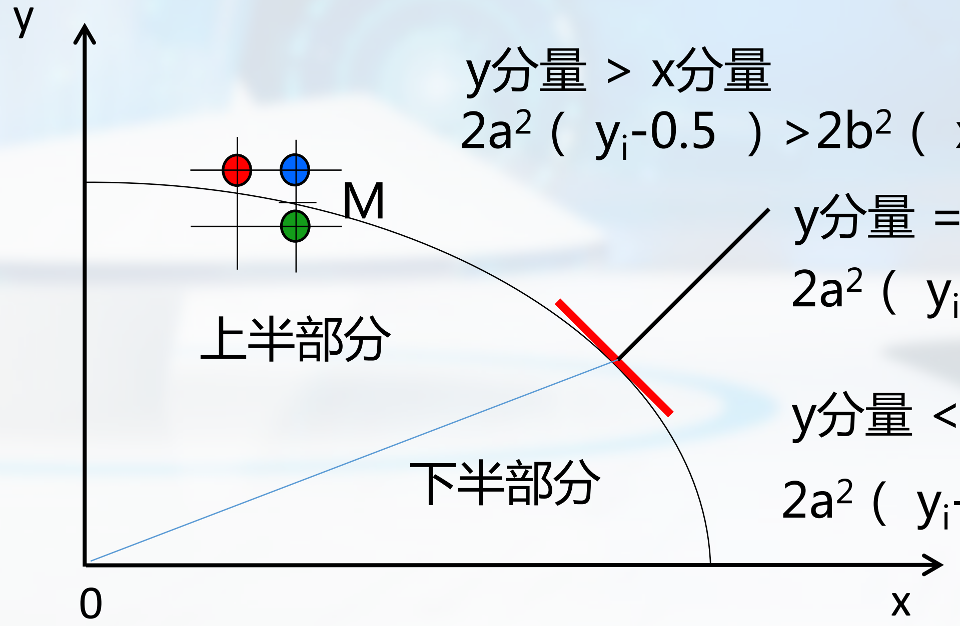
说明：

i——x方向上的单位向量

j——y方向上的单位向量

实际算法：

用中点近似判断



y分量 > x分量

$2a^2(y_i-0.5)>2b^2(x_i+1)$

y分量 = x分量

$2a^2(y_i-0.5)=2b^2(x_i+1)$

y分量 < x分量

$2a^2(y_i-0.5)<2b^2(x_i+1)$

1 椭圆中点画法思想分析

第一象限椭圆弧分析：

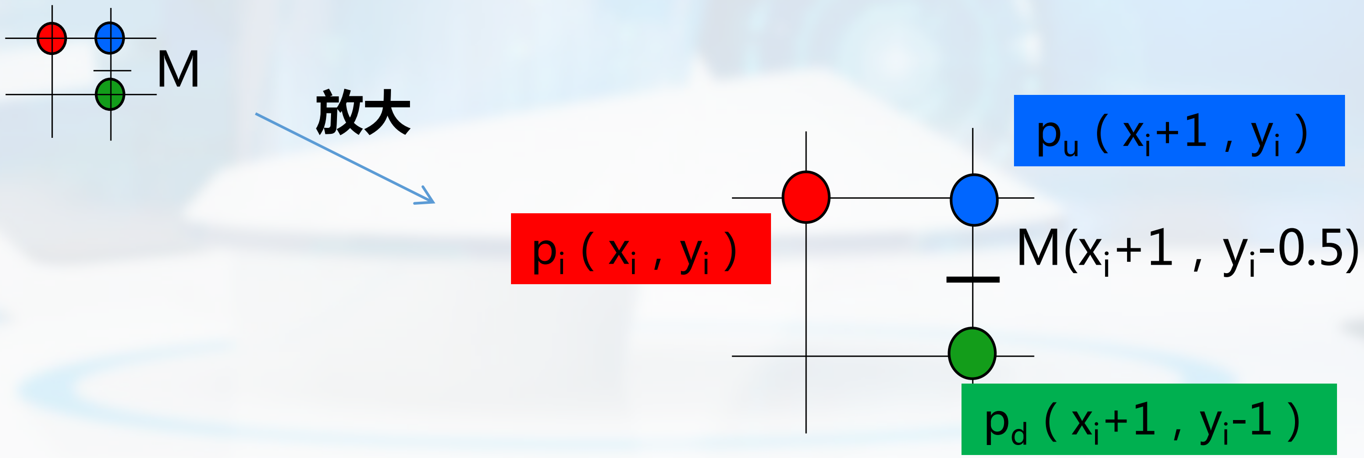
引入法向量找到分界点

$$N(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}i+\frac{\partial F}{\partial y}j=\underbrace{\boxed{2b^2x}}_{x分量}i+\underbrace{\boxed{2a^2y}}_{y分量}j$$

说明：

i——x方向上的单位向量

j——y方向上的单位向量



x分量：$2b^2(x_i+1)$

y分量：$2a^2(y_i-0.5)$

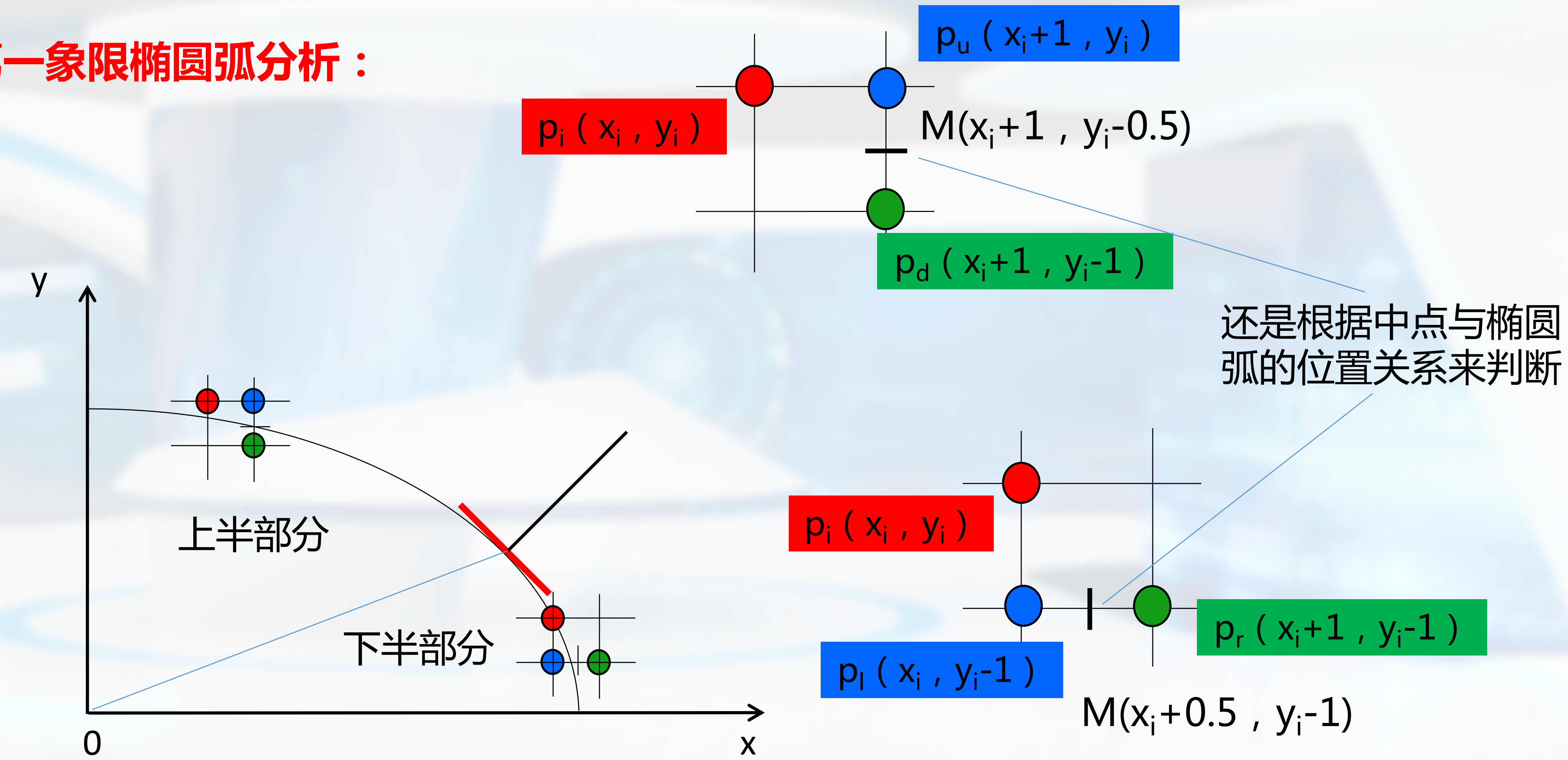
上一个中点$2a^2(y_i-0.5)>2b^2(x_i+1)$

下一个中点$2a^2(y_i-0.5)<2b^2(x_i+1)$

➡ **从上半部分转入下半部分**

1 椭圆中点画法思想分析

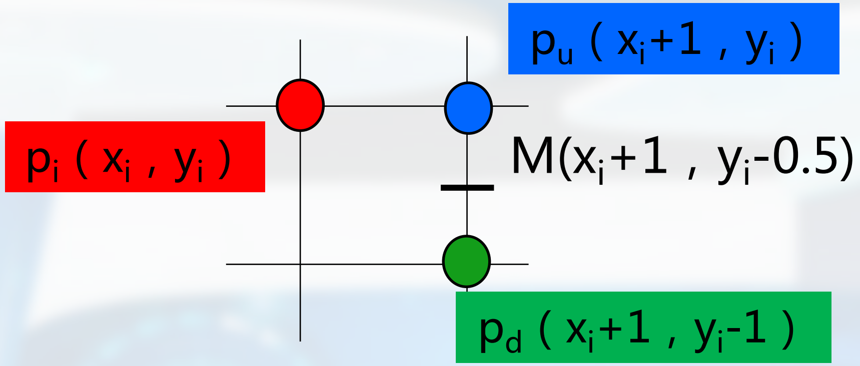
第一象限椭圆弧分析：

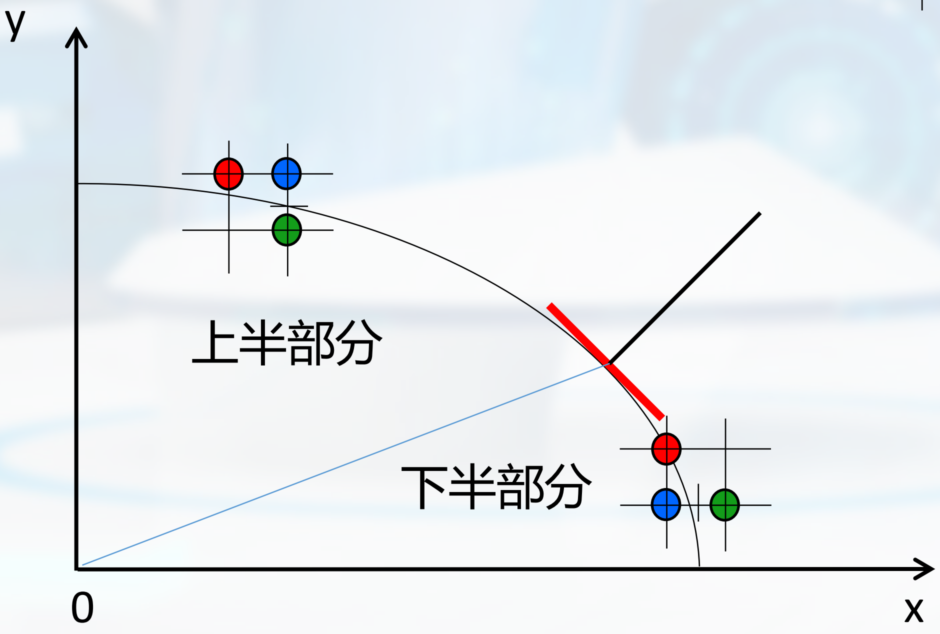


2 椭圆中点Bresenham算法

第一象限椭圆弧上半部分：

➢**基本判别方法**





中点坐标带入椭圆隐式方程：

$$F(x,y)=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2$$

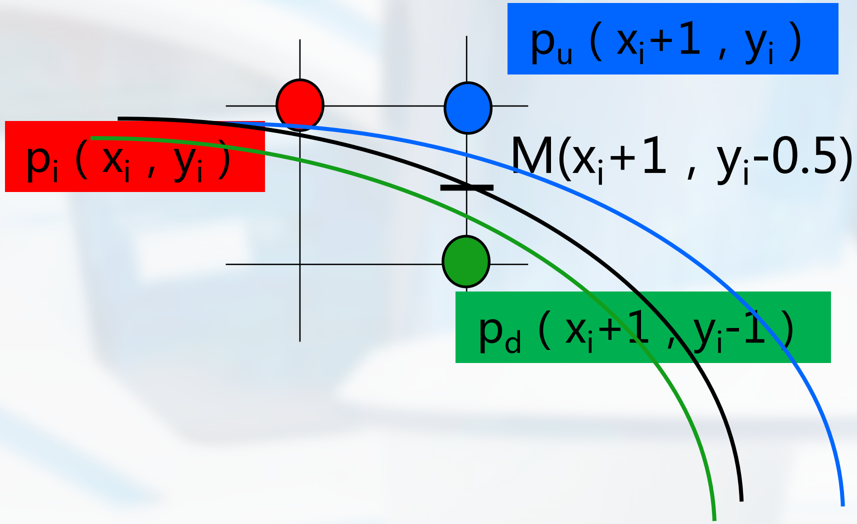
构造判别式：

d1=F（M）

2 椭圆中点Bresenham算法

第一象限椭圆弧上半部分：

➢**基本判别方法**



中点坐标带入椭圆隐式方程：

$$F(x,y)=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2$$

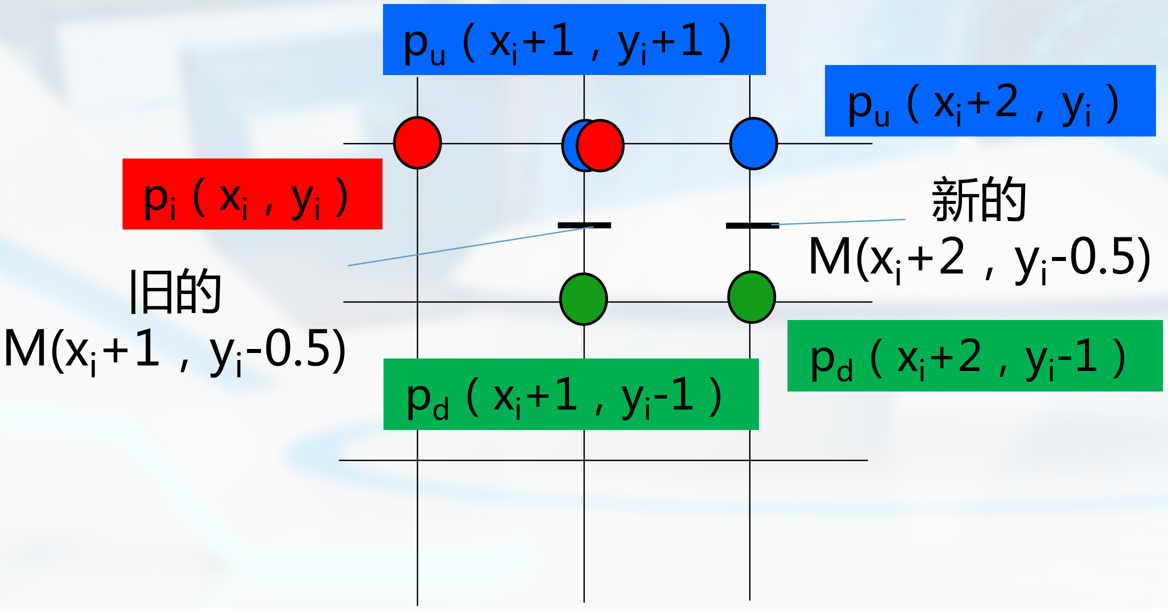
构造判别式：

$$d1=F(M)\begin{cases} d1<0 & \text{取}p_u \\ d1=0 & \text{取}p_u \\ d1>0 & \text{取}p_d \end{cases}$$

椭圆中点Bresenham算法

第一象限椭圆弧上半部分：

➢**误差项递推**



第一种情况d1≤0 **取p_u**

隐式方程： $F(x,y)=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2$

新的d1=F（新的M）$=\mathbf{b^2}(x_i+2)^2+\mathbf{a^2}(y_i-0.5)^2-\mathbf{a^2 b^2}$

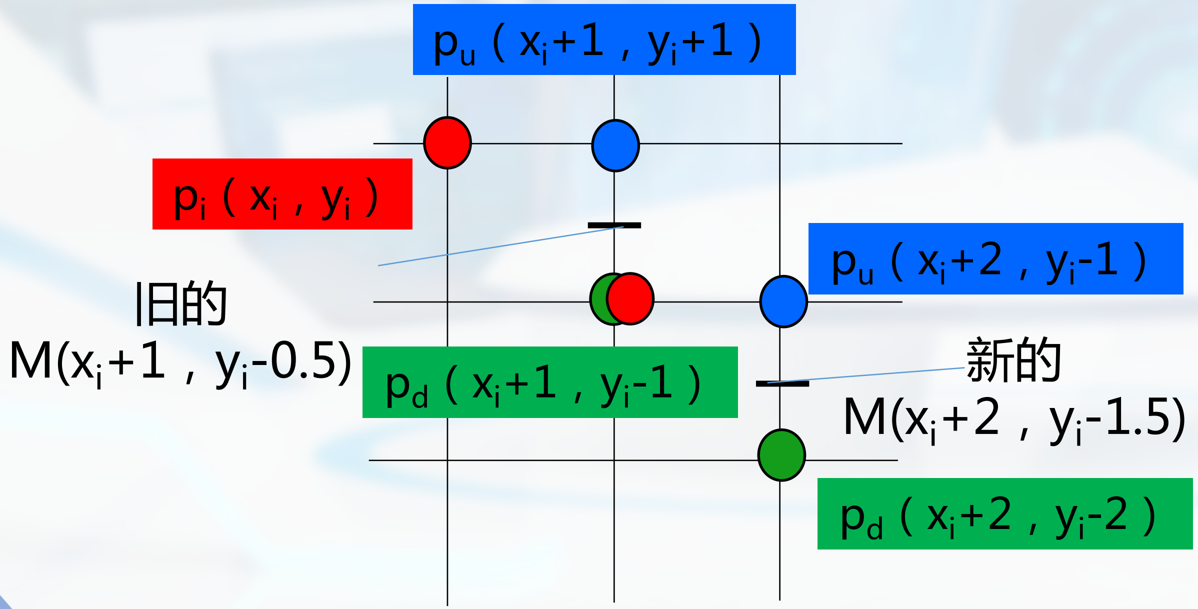
旧的d1=F（旧的M）$=\mathbf{b^2}(x_i+1)^2+\mathbf{a^2}(y_i-0.5)^2-\mathbf{a^2 b^2}$

⇒ Δd1=新的d1-旧的d1= $\mathbf{b^2}(2x_i+3)$

2 椭圆中点Bresenham算法

第一象限椭圆弧上半部分：

➤**误差项递推**



第二种情况d1>0 取p_d

隐式方程：$F(x,y)=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2$

新的d1=F（新的M）$=b^2(x_i+2)^2+a^2(y_i-1.5)^2-a^2b^2$

旧的d1=F（旧的M）$=b^2(x_i+1)^2+a^2(y_i-0.5)^2-a^2b^2$

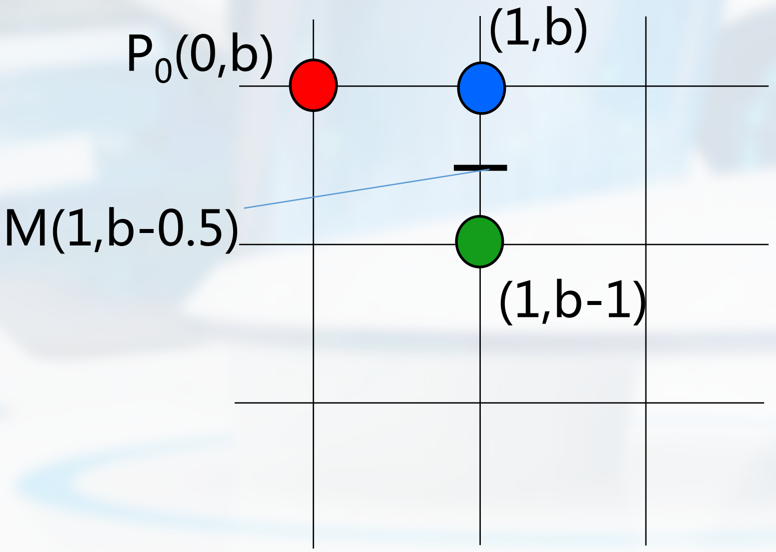
Δd1 =新的d1-旧的d1

$= b^2(2x_i+3)+a^2(-2y_i+2)$

2 椭圆中点Bresenham算法

第一象限椭圆弧上半部分：

➢**误差项初值**



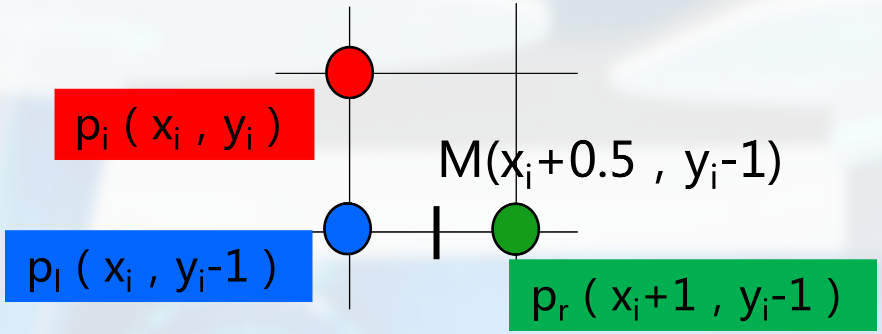
隐式方程：$F(x,y)=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2$

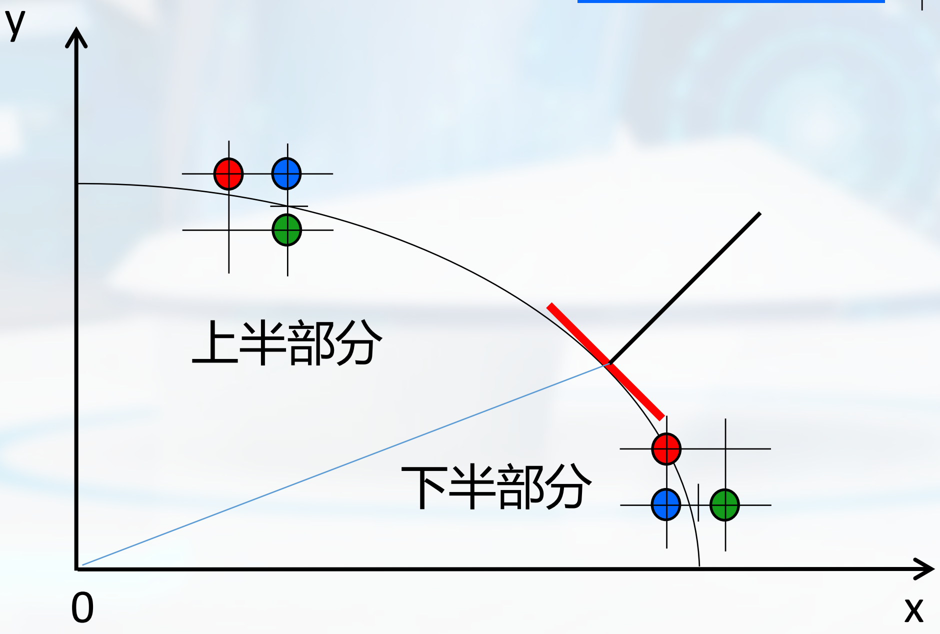
$$d1_0=F(M)$$
$$=b^2+a^2(b-0.5)^2-a^2b^2$$
$$=b^2+a^2(-b+0.25)^2$$

2 椭圆中点Bresenham算法

第一象限椭圆弧下半部分：

➢**基本判别方法**





中点坐标带入椭圆隐式方程：

$$F(x,y)=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2$$

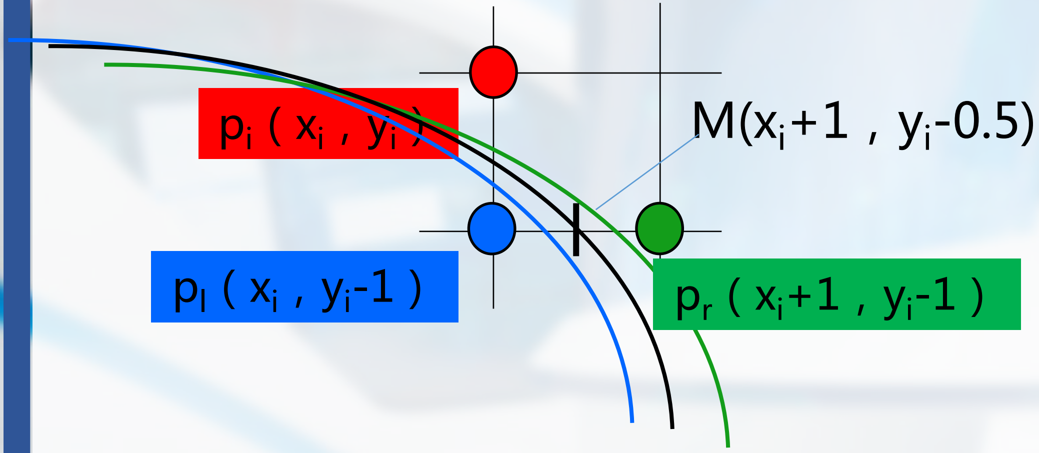
构造判别式：

d2=F（M）

2 椭圆中点Bresenham算法

第一象限椭圆弧下半部分：

➢**基本判别方法**



中点坐标带入椭圆隐式方程：

$$F(x,y)=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2$$

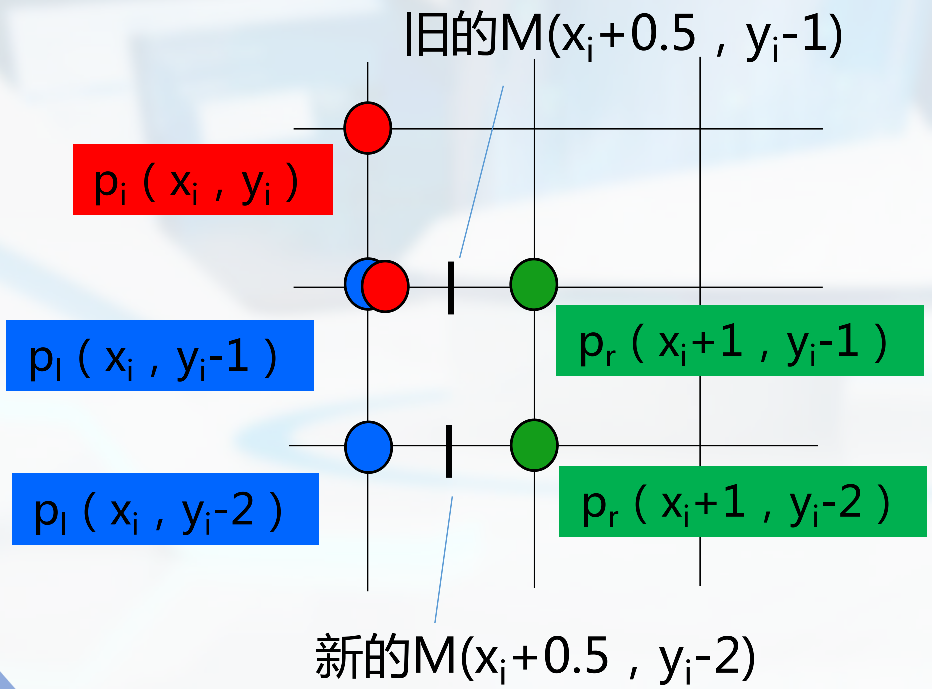
构造判别式：

$$d2=F(M)\begin{cases} d2>0 & \text{取}p_l \\ d2=0 & \text{取}p_r \\ d2<0 & \text{取}p_r \end{cases}$$

2 椭圆中点Bresenham算法

第一象限椭圆弧下半部分：

➢**误差项递推**



第一种情况d2>0 取p_l

隐式方程：$F(x,y)=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2$

新的d2=F（新的M）$=b^2(x_i+0.5)^2+a^2(y_i-2)^2-a^2b^2$

旧的d2=F（旧的M）$=b^2(x_i+0.5)^2+a^2(y_i-1)^2-a^2b^2$

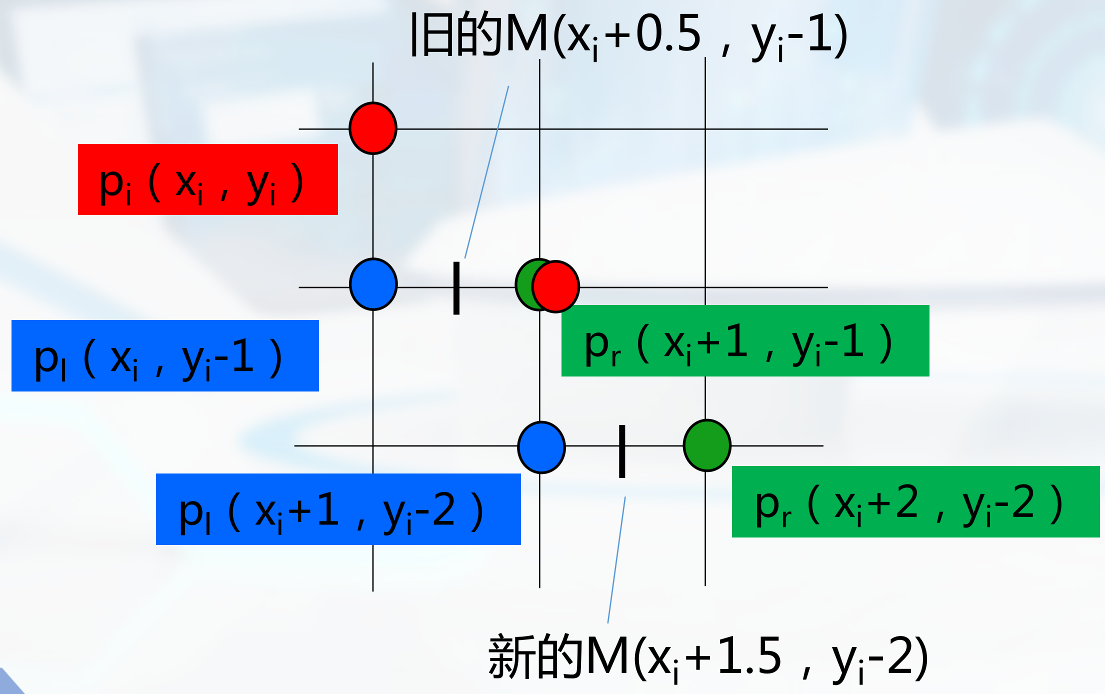
Δd2=新的d2-旧的d2

$= a^2(-2y_i+3)$

2 椭圆中点Bresenham算法

第一象限椭圆弧下半部分：

➢**误差项递推**



第二种情况d2≤0 取p_r

隐式方程：$F(x,y)=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2$

新的d2=F（新的M）$=b^2(x_i+1.5)^2+a^2(y_i-2)^2-a^2b^2$

旧的d2=F（旧的M）$=b^2(x_i+0.5)^2+a^2(y_i-1)^2-a^2b^2$

Δd2=新的d2-旧的d2

$=b^2(2x_i+2)+a^2(-2y_i+3)$

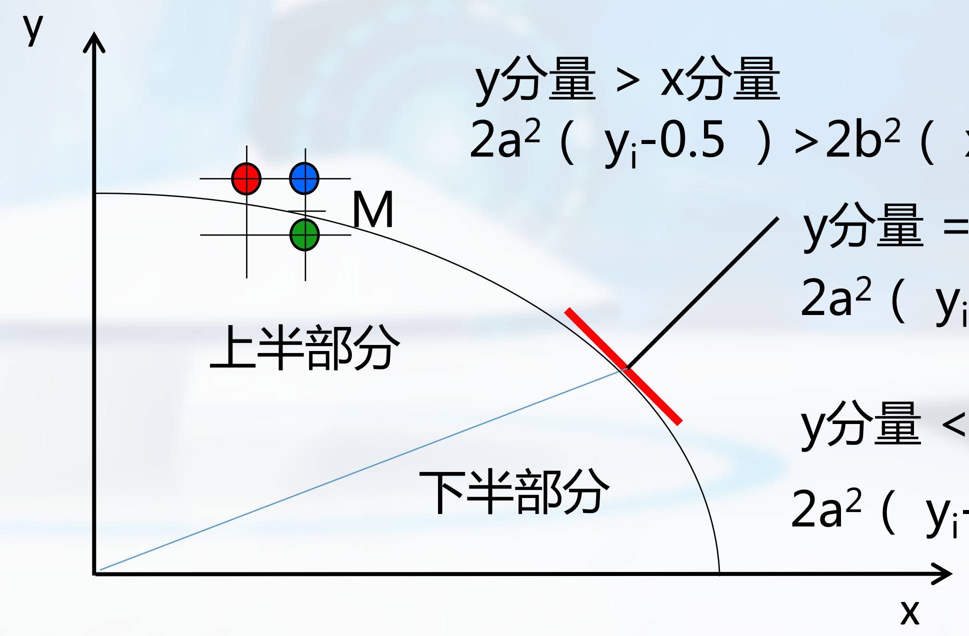
2 椭圆中点Bresenham算法

两个要注意的问题：

➢**判断上半部分是否转如到下半部分？**

实际算法：

用中点近似判断



y分量 > x分量

$2a^2(y_i-0.5) > 2b^2(x_i+1)$

y分量 = x分量

$2a^2(y_i-0.5) = 2b^2(x_i+1)$

y分量 < x分量

$2a^2(y_i-0.5) < 2b^2(x_i+1)$

2 椭圆中点Bresenham算法

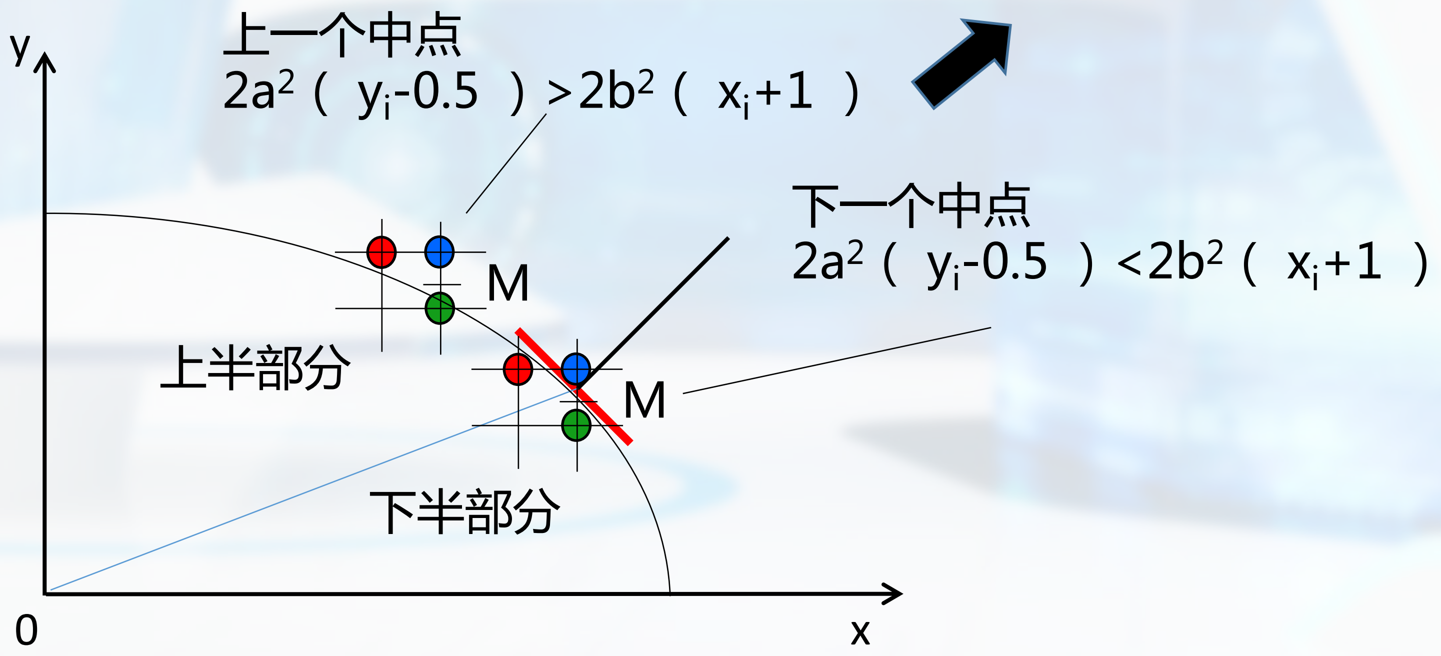
两个要注意的问题：

➢**第一个问题：判断上半部分是否转如到下半部分？**

实际算法：

用中点近似判断

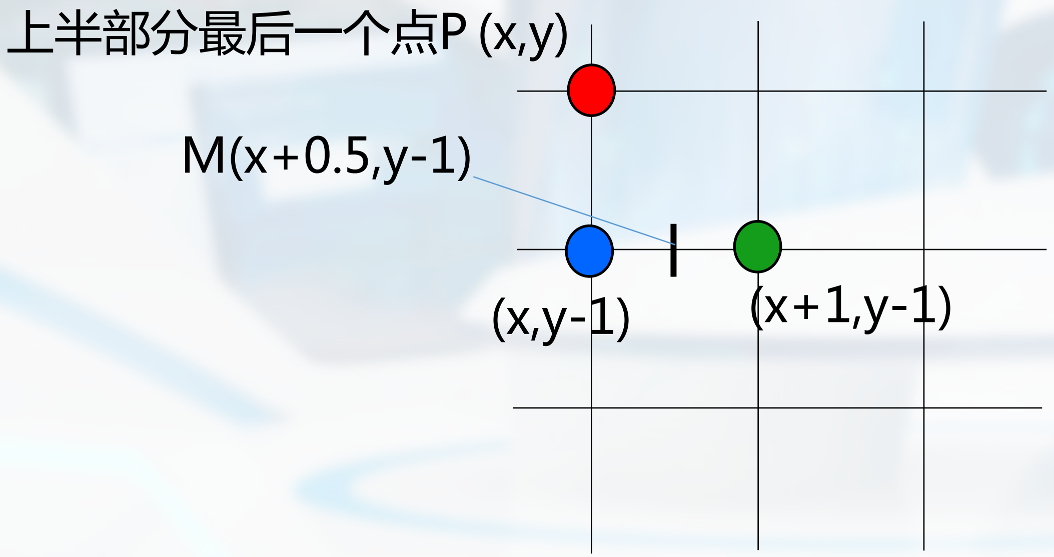
从上半部分转入下半部分



2 椭圆中点Bresenham算法

两个要注意的问题：

➢**第二个问题：计算下半部分中点的初值**



隐式方程：$F(x,y)=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2$

$d2_0=F(M)$

$=b^2(x+0.5)^2+a^2(y-1)^2-a^2b^2$

2 椭圆中点Bresenham算法

算法步骤：

（1）输入椭圆的长半轴a和短半轴b

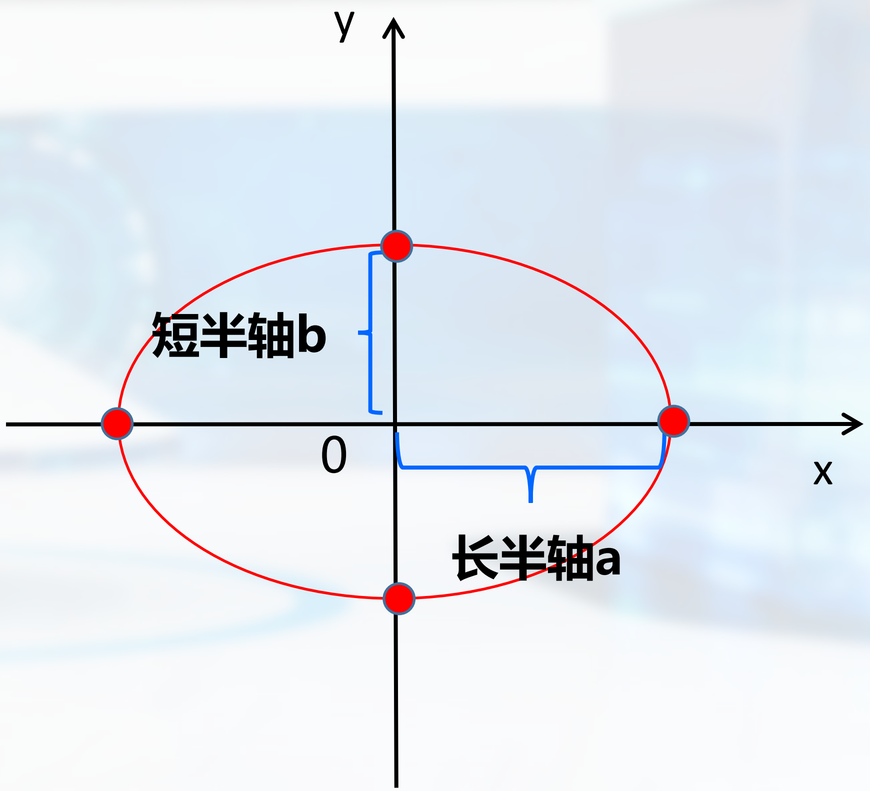
（2）计算初始值

$d=b^2+a^2(-b+0.25)$

$x=0$

$y=b$

（3）绘制点(x,y)及其另外三个对称点



2 椭圆中点Bresenham算法

算法步骤：

（4）判断d的符号

若$d \le 0$

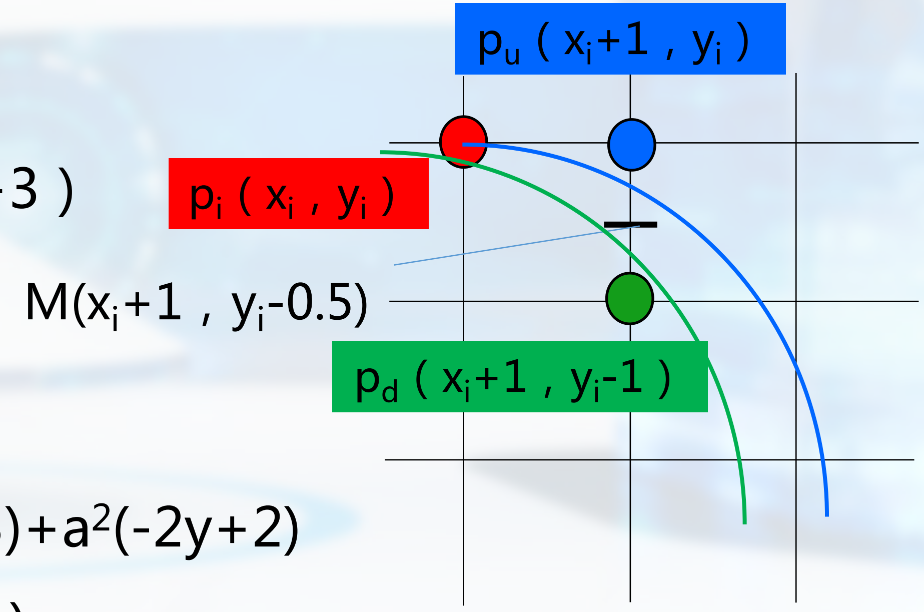
先将d更新为$d+b^2(2x+3)$

再将(x,y)更新为$(x+1,y)$

否则

先将d更新为$d+b^2(2x+3)+a^2(-2y+2)$

再将(x,y)更新为$(x+1,y-1)$



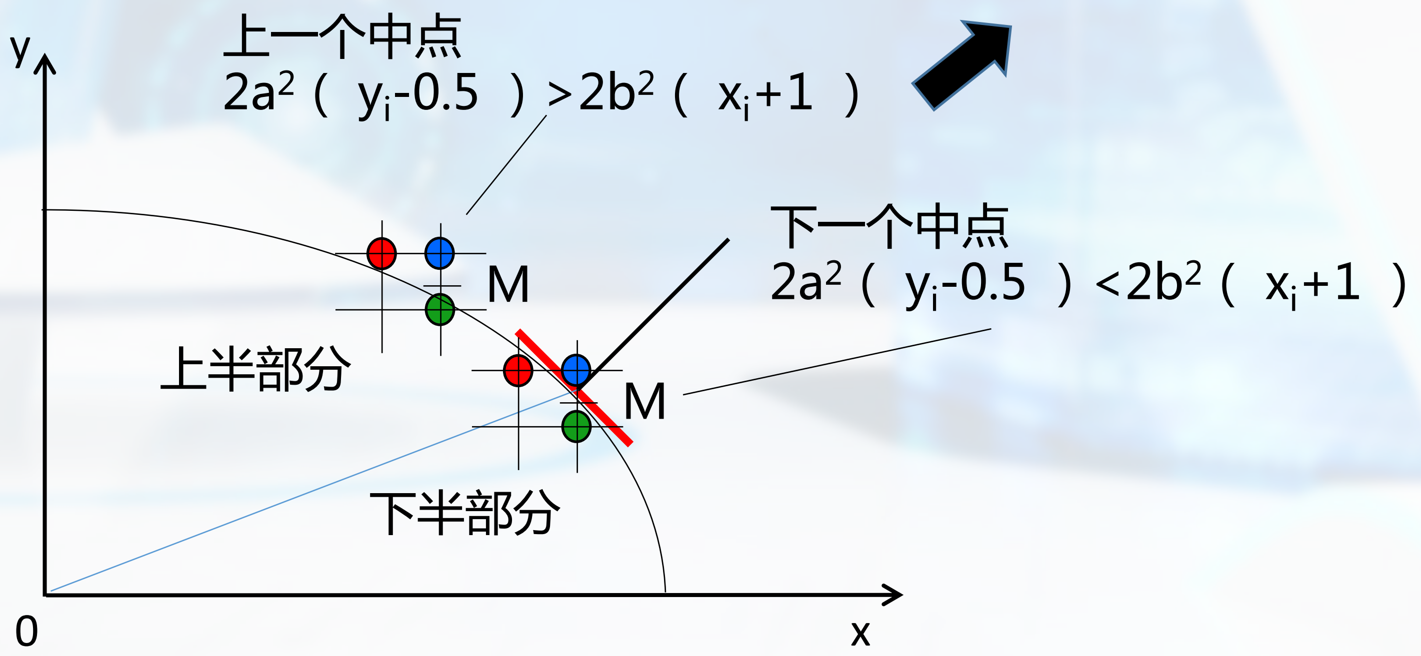
2 椭圆中点Bresenham算法

算法步骤：

（5）当$2a^2(y-0.5)>2b^2(x+1)$时，重复步骤（3）和（4）

否则转到步骤（6）

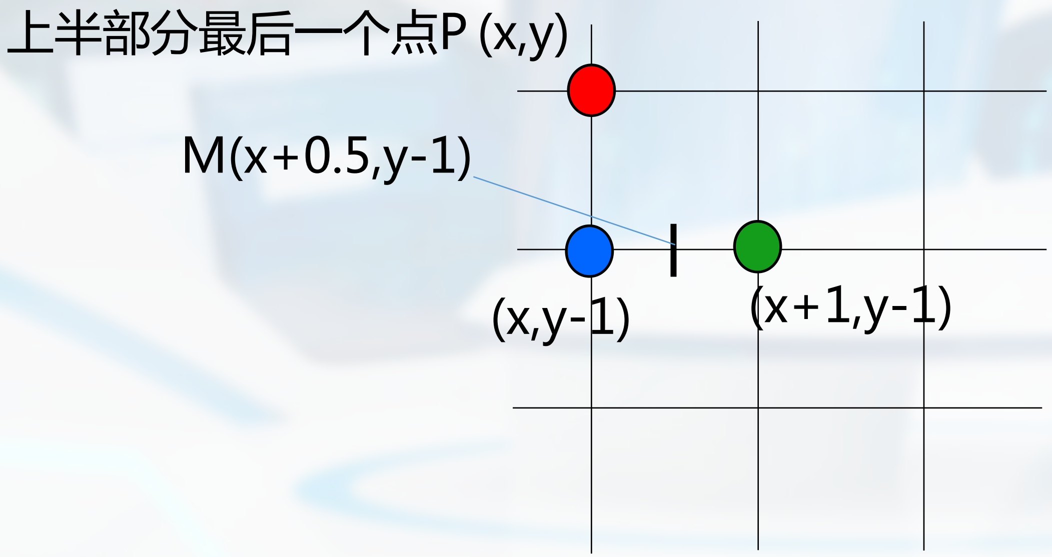
从上半部分转入下半部分



2 椭圆中点Bresenham算法

算法步骤：

（6）用上半部分计算的最后点(x,y)来计算下半部分中d的初值



隐式方程：$F(x,y)=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2$

$d2_0=F(M)$

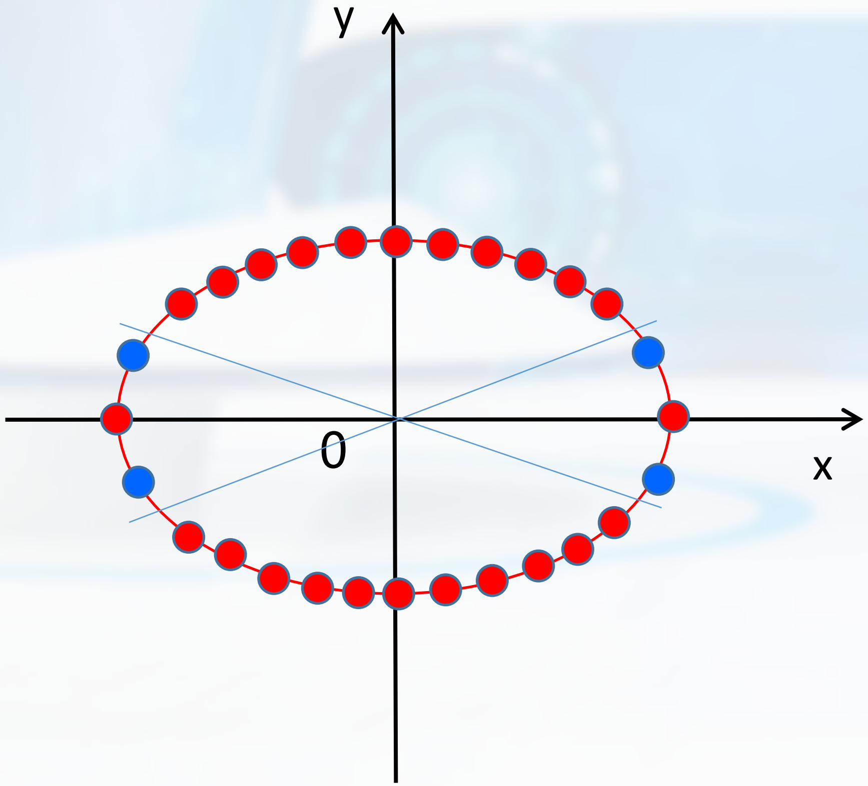
$=b^2(x+0.5)^2+a^2(y-1)^2-a^2b^2$

2

椭圆中点Bresenham算法

算法步骤：

（7）绘制点(x,y)及其在四分象限上的另外三个对称点。



2 椭圆中点Bresenham算法

算法步骤：

（8）判断d的符号

若$d \le 0$

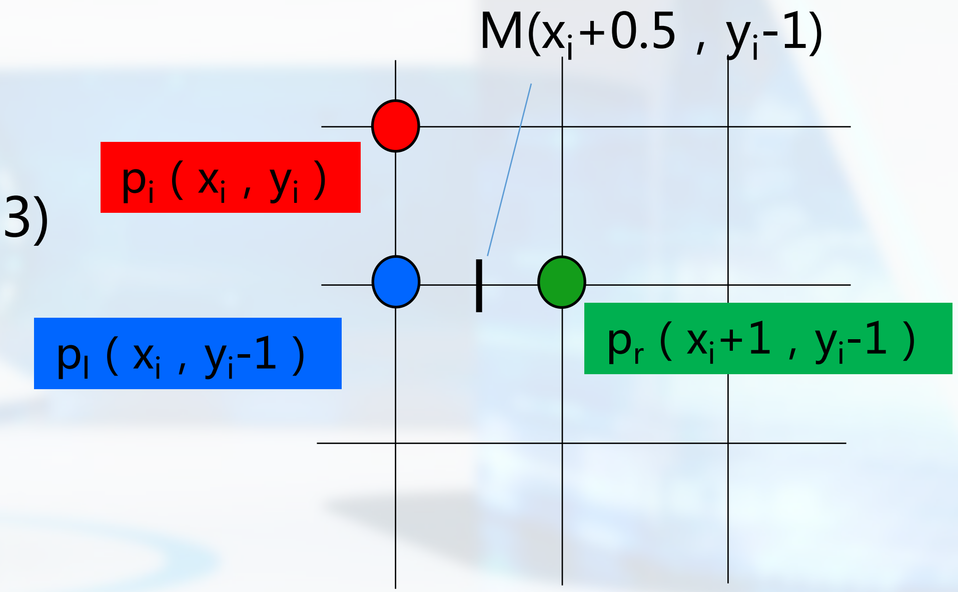
先将d更新为$b^2(2x_i+2)+a^2(-2y_i+3)$

再将(x,y)更新为(x+1,y-1)

否则

先将d更新为$d+a^2(-2y_i+3)$

再将(x,y)更新为(x,y-1)

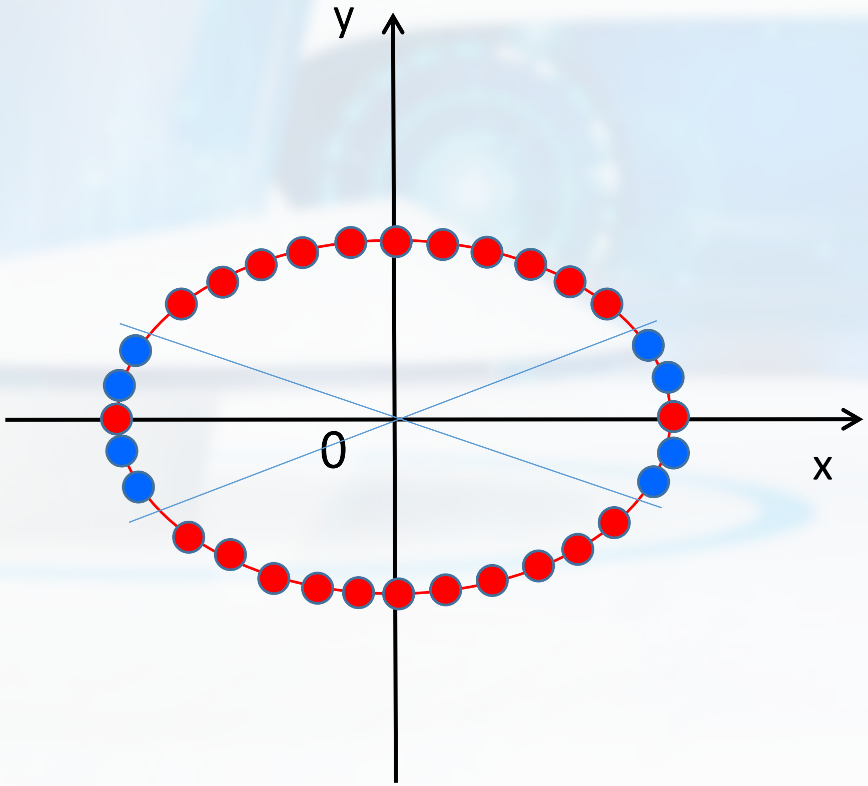


椭圆中点Bresenham算法

算法步骤：

（9）当y>0时，重复步骤（7）和（8）

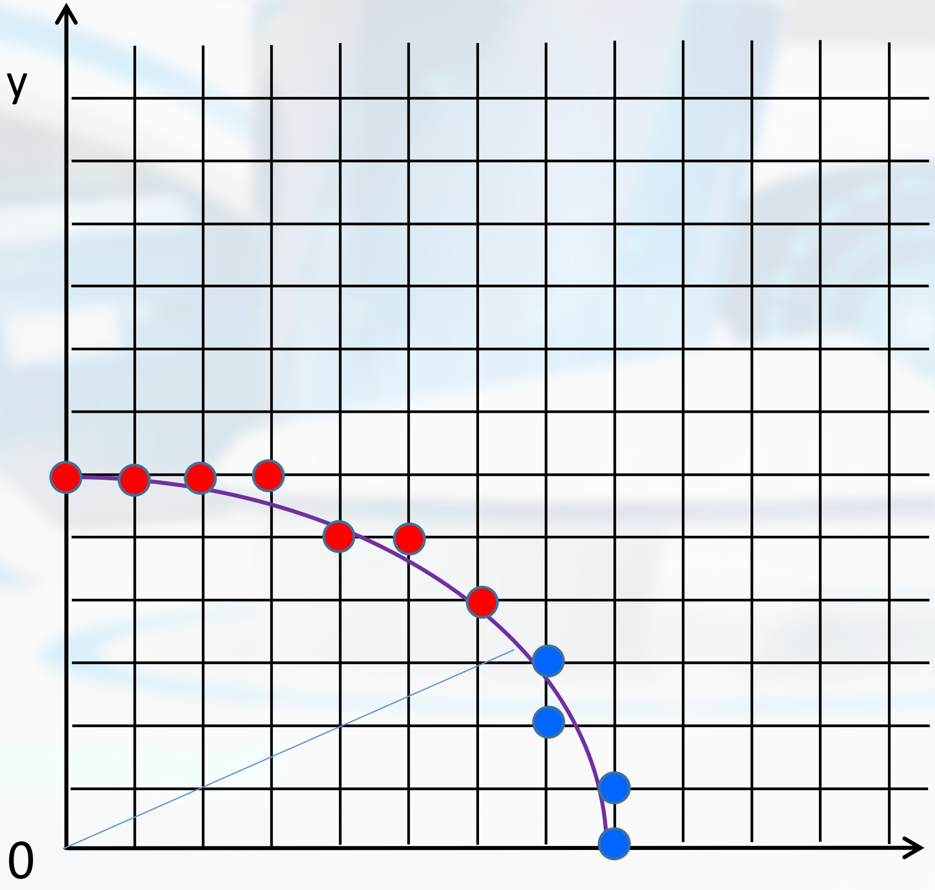
否则结束



2

椭圆中点Bresenham算法

实例：长半轴a=8 短半轴b=6的椭圆



谢谢

软件学院　万琳