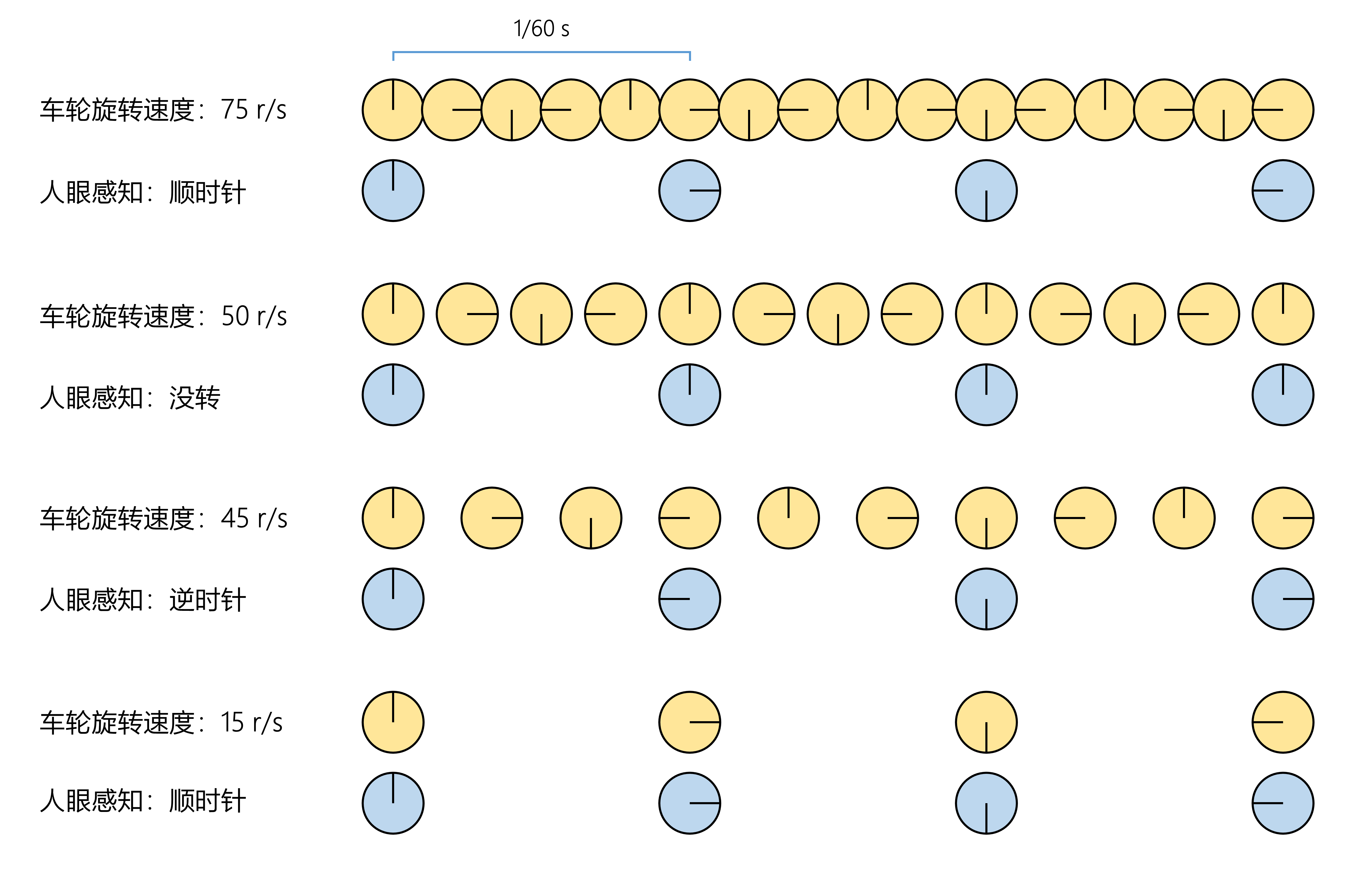
笔者最近在回顾一些图形学基础知识，遂整理在此，此文涉及图形学中的着色。

走样与反走样是着色的一大重要问题。本文主要介绍走样的概念，以及采样、重建和重采样的概念，为后文介绍反走样（抗锯齿）的具体技术做铺垫。

走样(Aliasing)

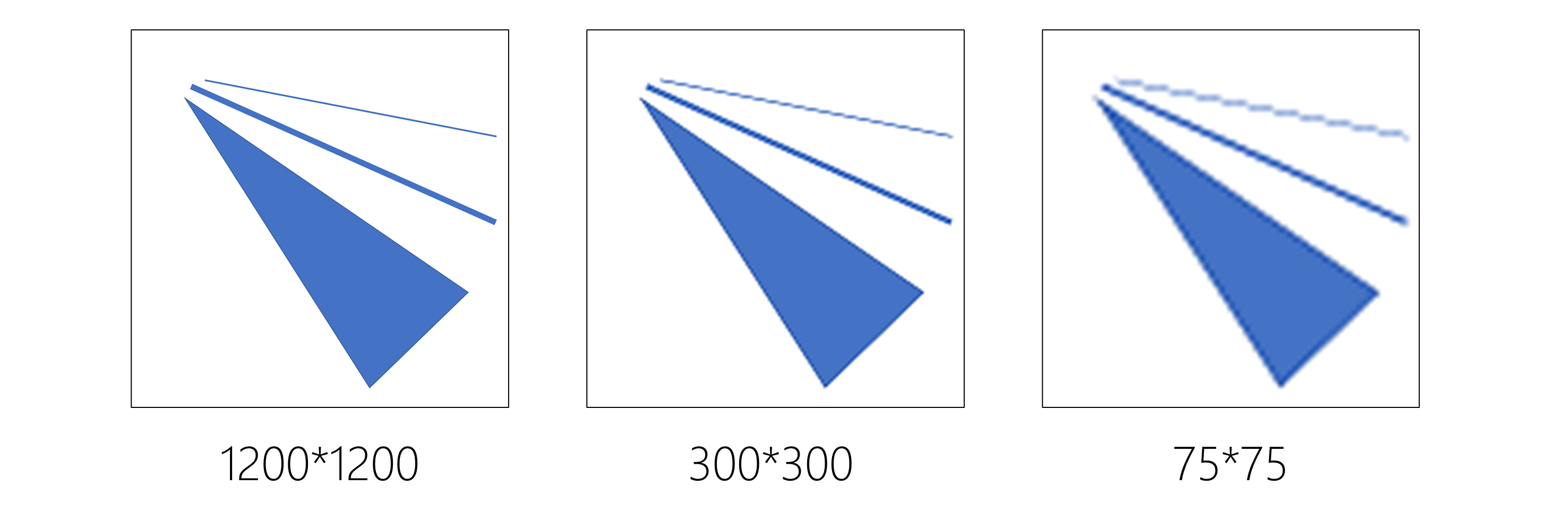
什么是走样？更熟悉的一个概念即抗锯齿中的“锯齿”，而 “锯齿”可以看作是一种走样。为什么这样说呢，先看看两个场景：

一是车轮旋转，比如我们在大街上观察汽车车轮的旋转，会发现一会是逆时针，一会是顺时针，一会又感觉没转。这正是因为人眼这个采集系统是有最高采样率的（一般而言是60Hz），所以产生了时域走样(temporal aliasing)。比如下图展示了车轮三种旋转速度下，人眼所感受到的旋转方向：



观察上图，可以发现，随着车轮转速的降低，人眼感知的车轮旋转方向也在发生变化，也就解释了诸如车轮旋转，电风扇旋转的这类时域走样现象

另外一个场景是对矢量形状转成栅格化图像，下图展示了不同分辨率图像的表现：

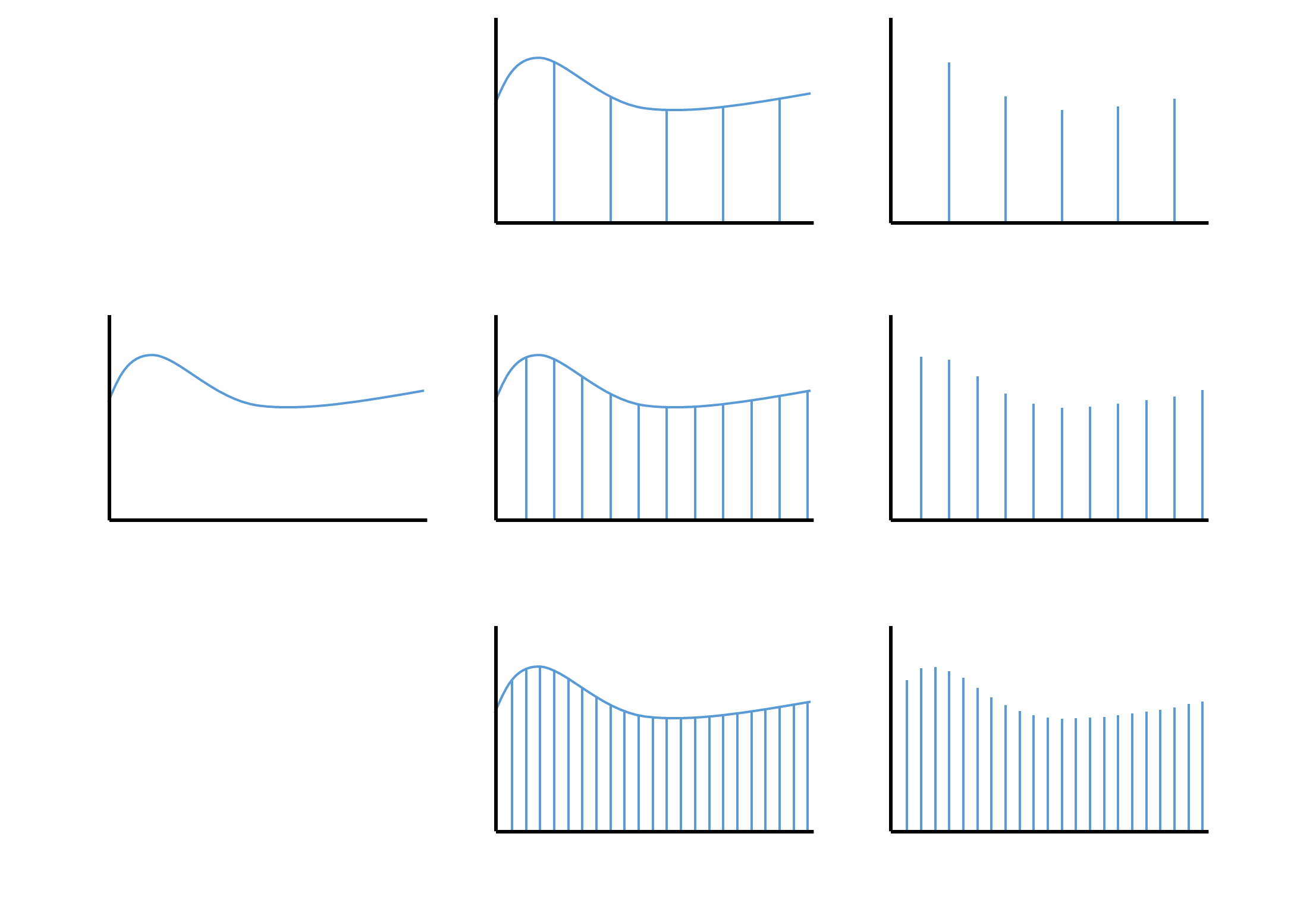


可以看到，随着分辨率的降低，“锯齿”现象愈发明显，称之为空域走样(spatial aliasing)。在图形学里面经常遇到这种情况，因为渲染一幅图像的过程本质上就是空域上采样，我们传入了顶点，并组装为三角形，需要在光栅化时转化为一个个的像素，像素点则可认为是采样点（不严格正确，因为采样点可能更多）。

采样，就不可避免会产生走样，即我们熟知的锯齿，所以也出现了很多的抗锯齿技术(Antialiasing，也称反走样)，在下文介绍具体抗锯齿技术之前，先看看采样(Sampling)、重建(Reconstruction)和重采样(Resampling)的相关概念

采样(Sampling)

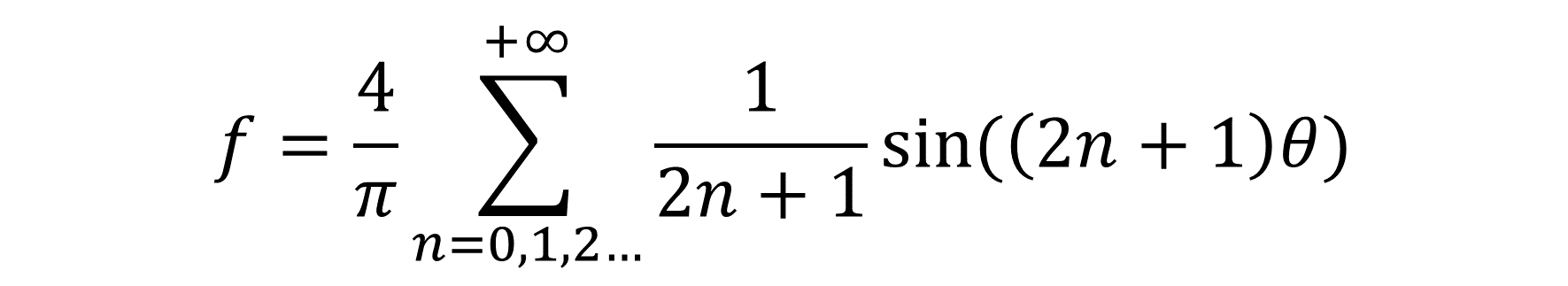
采样：是在连续信号中，周期性加入采样点，得到离散信号，如下图所示：



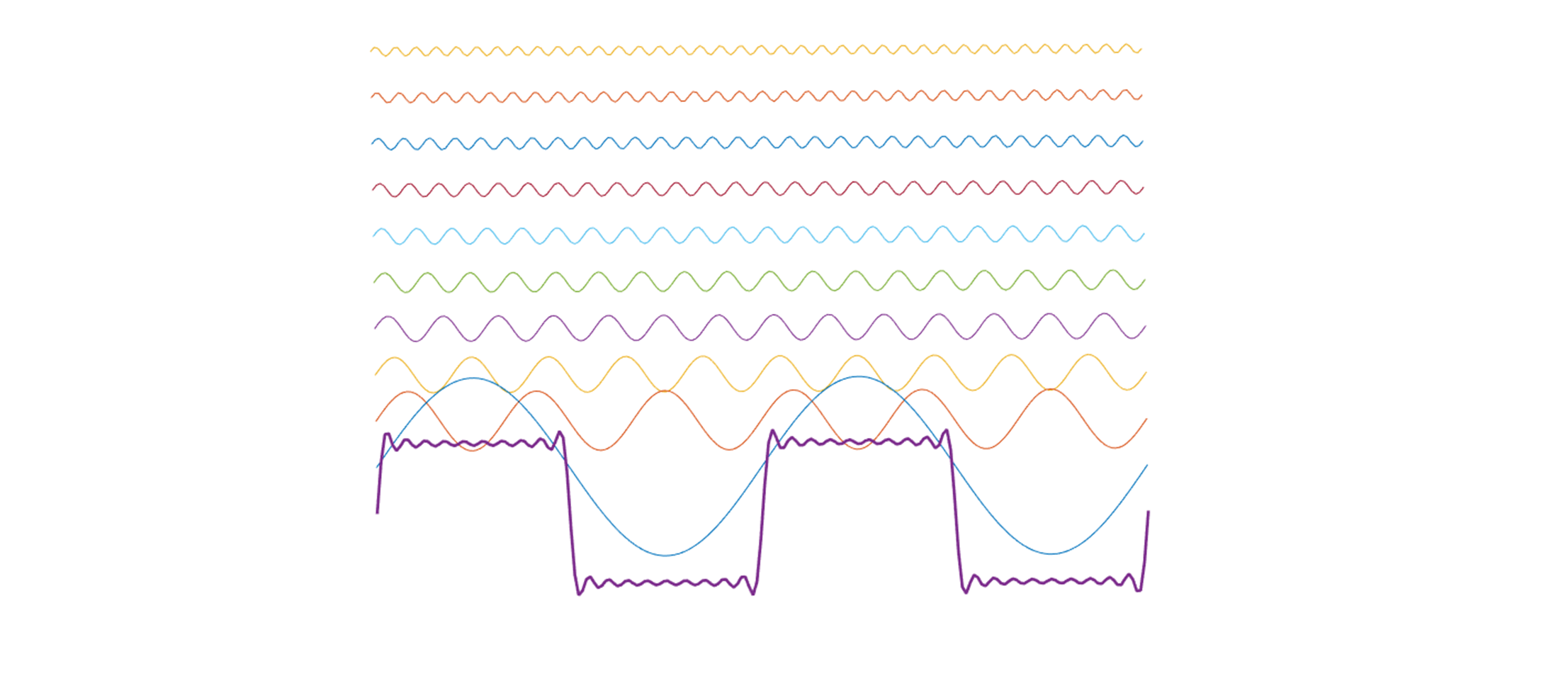
可以看到随着采样点数的增加，采样频率的提高，离散信号对于原始连续信号的失真就更少。那么是否可以再增大采样频率而使得信号不失真？奈奎斯特采样定理给了我们答案：当采样频率大于实际信号最大频率2倍的时候，就可以完整保留信息。

怎样理解信号的最大频率呢？我们知道，一个连续信号总是可以表示为多个不同频率的正弦波的叠加，这个信号的最大频率就可以理解为其中频率最高的正弦波的频率。理论上只要采样频率大于这个频率的2倍，信号就可以不失真。

但是我们遇到的信号不总是那么“连续”，比如方波，可看作无穷多个正弦波的叠加：

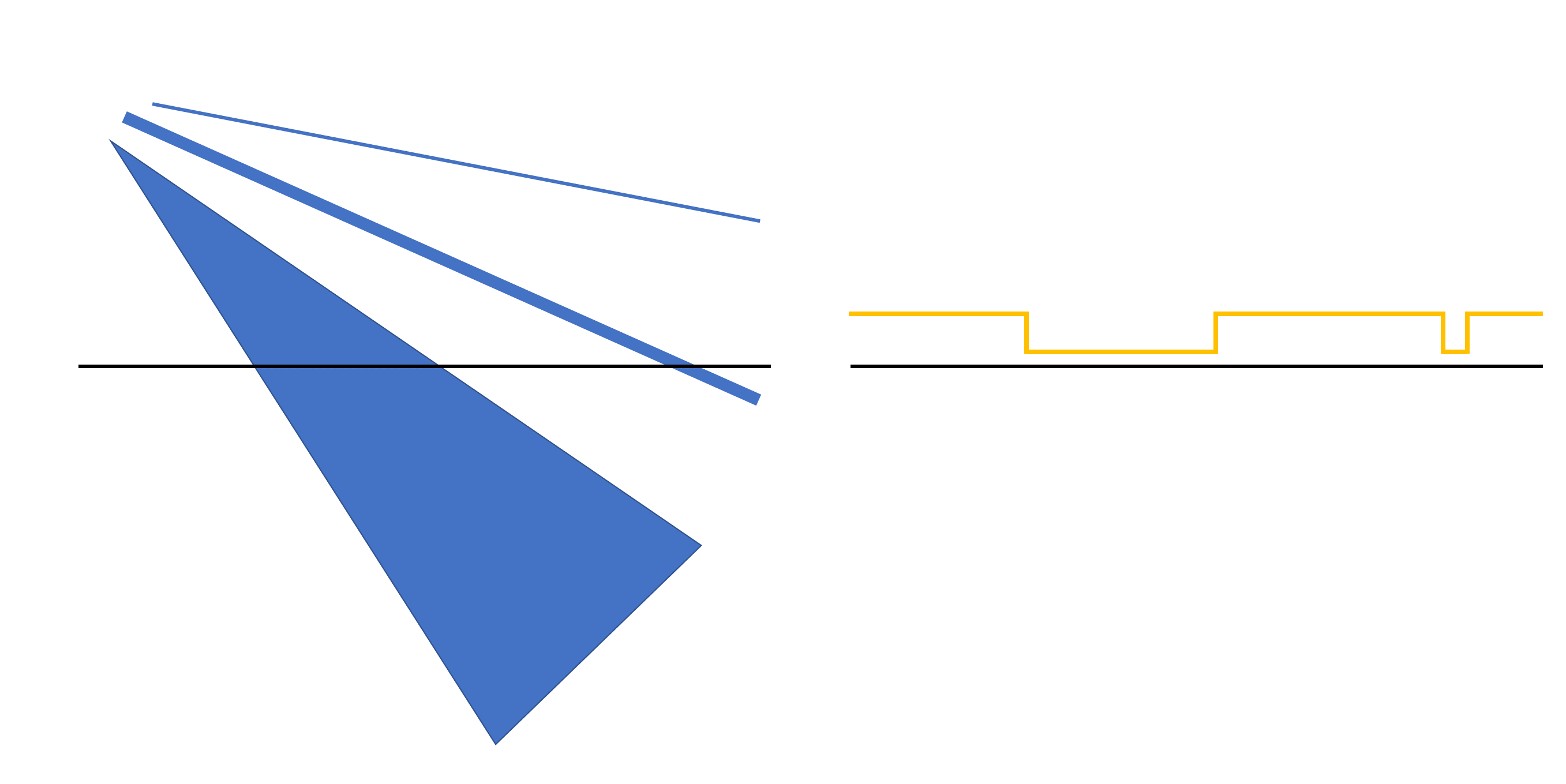


而画成图像则是下面这样，我只画到了n=9，此叠加波与方波还是有一定差异。



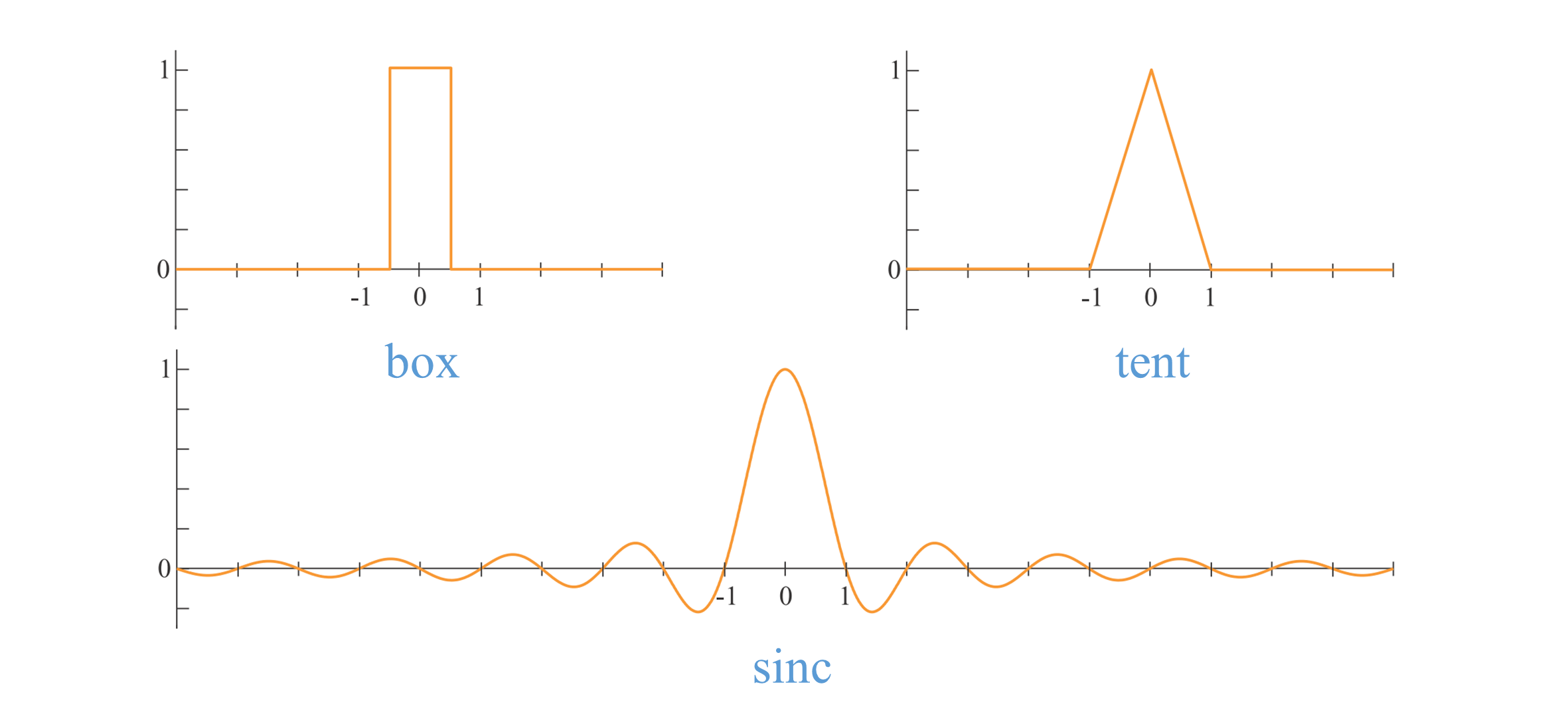
所以，像方波这种存在突然跳变的不连续波，其信号的最大频率为无限大。根据采样定理，则也需要无限大的采样频率才可以无失真采样，才可以保证不走样，但在实际中是不可能的。

比如下图中取一行得到一个信号，就出现了多次跳变，所以这种情况无论用多大的采样频率去采样，都会走样而产生锯齿（下左图其实也已经走样了，如果一直放大的话也是可以看见锯齿）

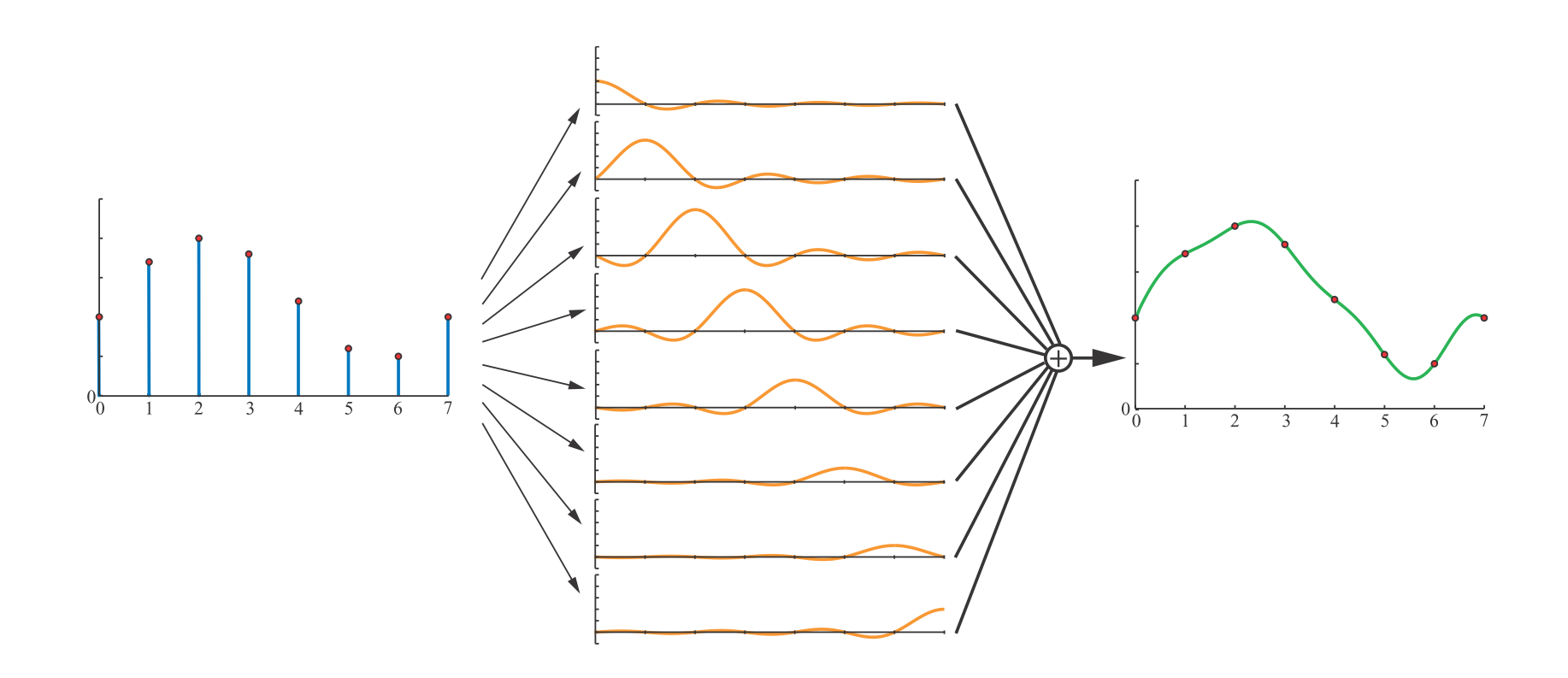


重建(Reconstruction)

对应采样那么就有重建，重建就是将离散信号，通过滤波(filter)的方式得到连续信号的过程。其中滤波器的选择有多种：如box、tent和sinc滤波器，下图展示了这三者的图形：



Sinc滤波器对离散信号的重建过程可见下图，看起来是每个离散点乘以对于偏移的sinc函数而叠加，实际上这是一个卷积(convolution)的过程。得到比较平滑的信号，可以预见，用box函数和tent函数重建的信号就不会这么平滑：



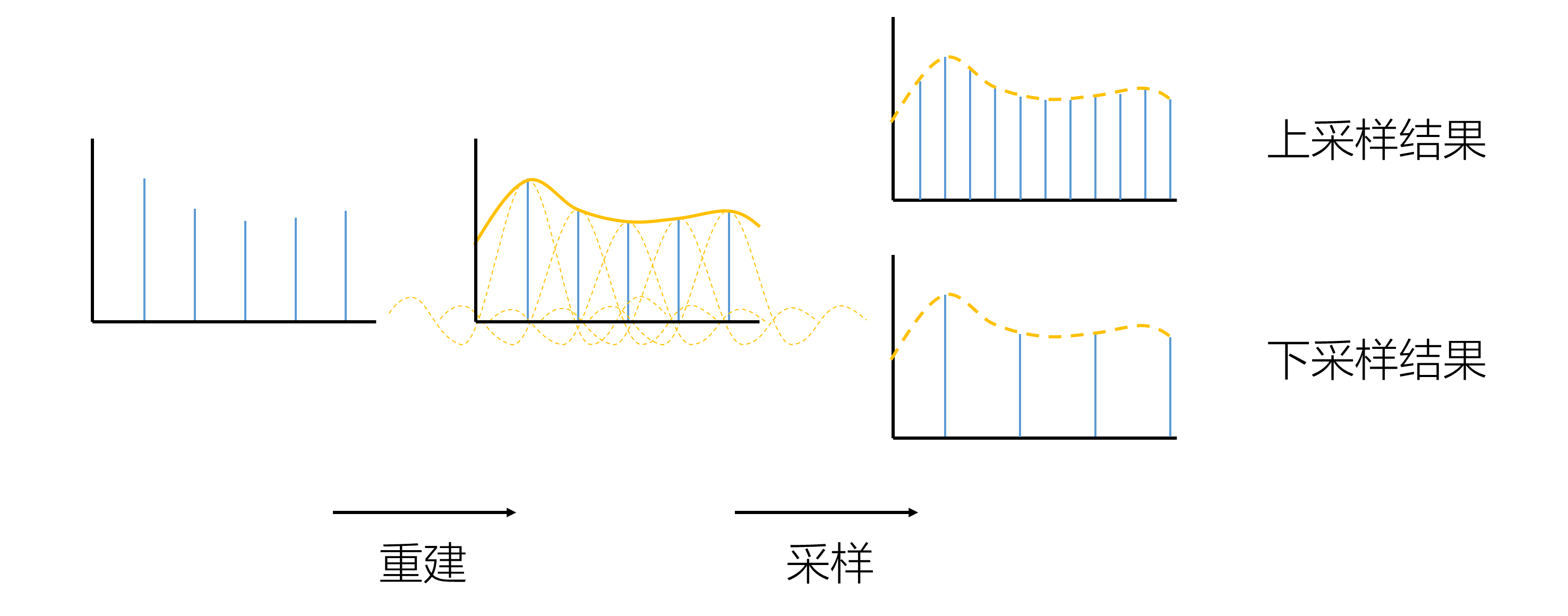
从频域的角度分析，前面的采样相当于是引入了高频信息，重建则是滤去高频信息，留下低频，而sinc函数刚好是一个完美的低通滤波器。上图这个过程可看作空域卷积操作，而空域的卷积就相当于频域的乘法，刚好sinc函数的傅里叶变换为矩形函数(rect)。于是在空域卷积sinc函数，就相当于在频域乘以rect函数，即对频率进行截断，留下低频，滤去高频。所以说sinc函数是一个理想的低通滤波器

但是sinc函数的定义域是无限大，且存在值为负数的情况，所以并不利于实际使用。在实际工程运用中，往往则是对于sinc函数进行近似，最常用的便是高斯函数(Gaussian)，比如图像的高斯模糊。

离散信号经过重建，得到了连续信号，但在计算机中，我们无法保存没有解析式的连续信号，所以还需要在此基础上再采样，称先重建再采样的过程为重采样

重采样(Resampling)

重采样包含两个过程，即先重建再采样，所以其输入和输出都是离散信号。分为两种：升采样(upsampling)和降采样(downsampling)，也称上采样和下采样，前者的离散数据点变多，后者是变少，用一张图来表示这两个过程：



关于图像的上采样和下采样，就好比先将图像模糊，然后再用多于或者少于原有像素的点来进行采样，得到分辨率更高或者更低的新图像。

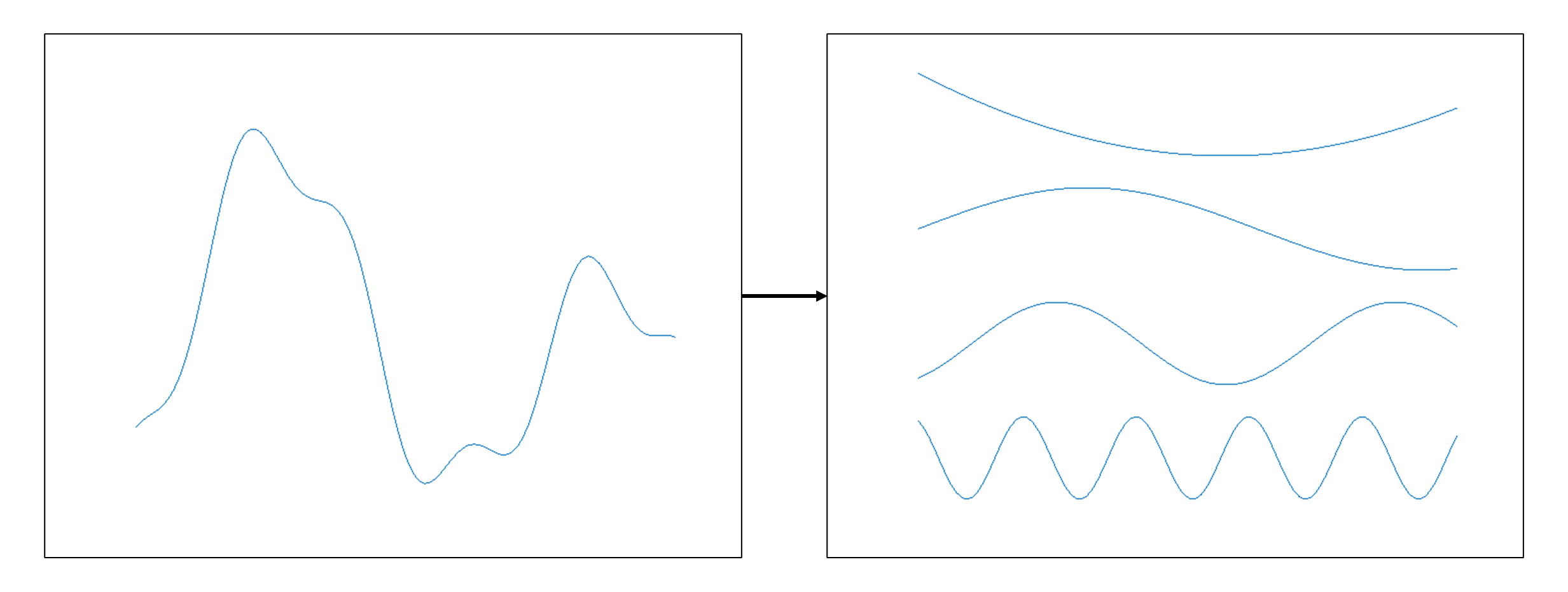
引入上下采样的目的更多的是为了后面的纹理贴图(texture mapping)的应用，因为我们不可能存储所有分辨率的纹理贴图，所以需要在使用时根据细节要求，对贴图进行重采样，以实现画面质量和性能的平衡

扩展一：从空域和频域上理解奈奎斯特采样定理

采样定理：当采样频率大于信号最大频率2倍的时候，就可以不失真采样。

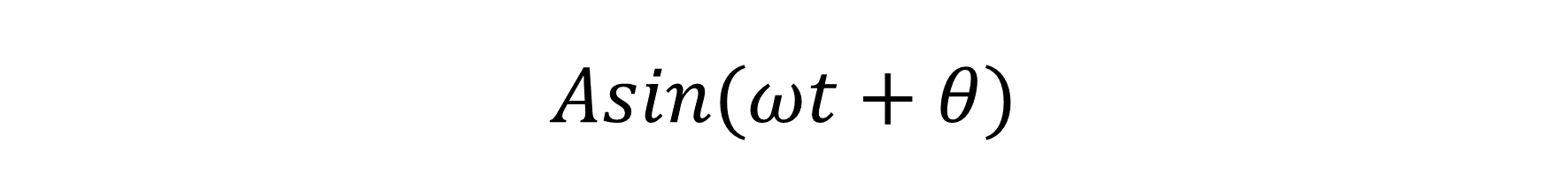
空域上：

根据波的叠加原理，任何一个信号，都可以表示为多个正弦波的叠加，如下图所示：



只要我们采样后能够重建所有的正弦波，那么就可以完整重建原信号。进一步，如果能够对频率最高的正弦波完整重建，那么频率低的正弦波也不在话下。

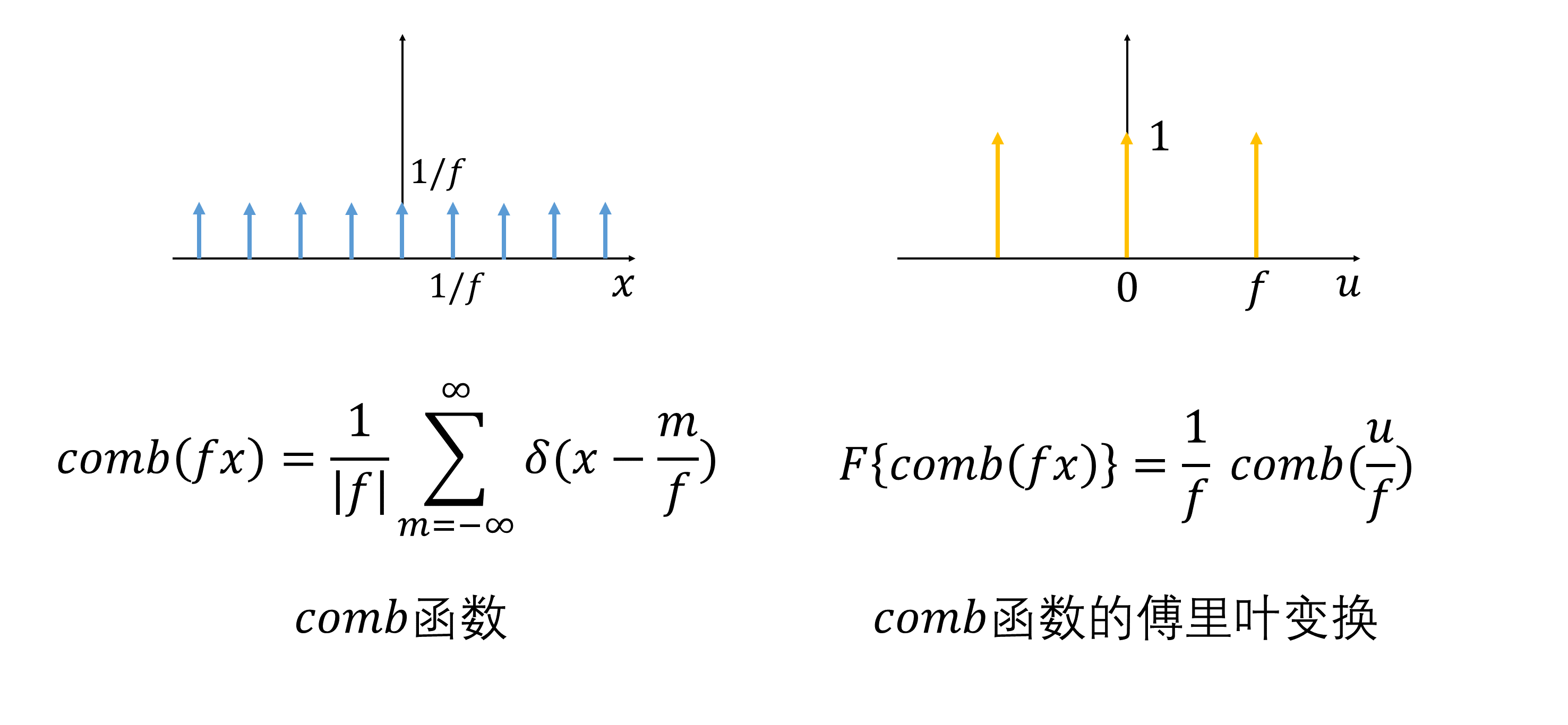
根据采样定理的描述：采样率必须要大于最高频率的2倍，即在一个正弦波的单个周期内，至少要有均匀分布的三个采样点，才能完全重建这个正弦波，考虑单个周期的正弦波表达式：



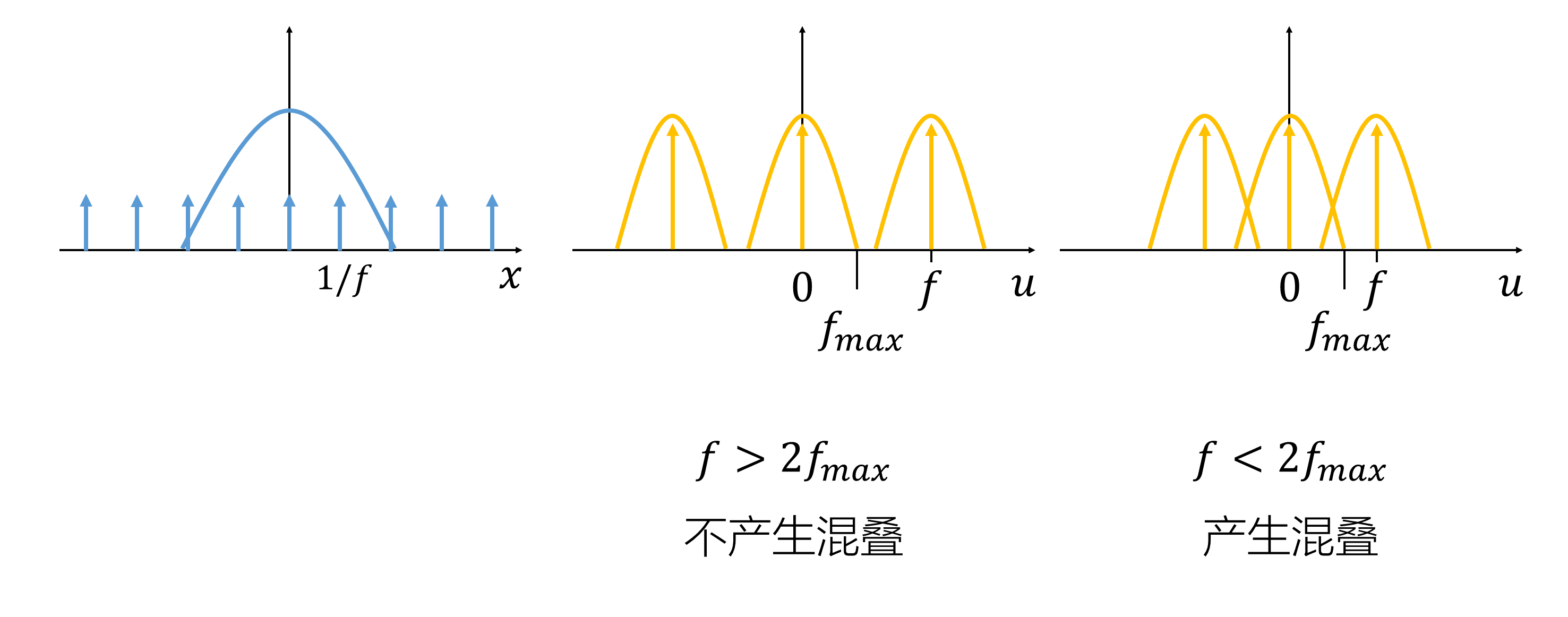
发现此式子有三个未知量，所以只需要单周期内不重复的三个点即可完全确定表达式，也就验证了采样定理的描述。

频域上：

对连续信号进行均匀采样，可认为是与comb(fx)函数的乘积（此处忽略纵向缩放因子），f为采样频率。而空域的乘积对应于频域的卷积，所以采样相当于频域上与F{comb}进行卷积，comb函数的傅里叶变换还是comb，只是高度和间距变了：



假设我们要对一个信号采样，其最大频率为f\_max，则其频域与comb的卷积即在comb的每个冲激处都复制一份频谱：



观察上图，可以发现，当采样频率f大于信号最大频率f\_max的2倍时，频谱不发生混叠，在重建时也就可以恢复原始信号，而当f<2f\_max时，频谱发生了混叠，不可能再恢复原始信号，即信号发生了失真，产生了走样，这就是采样定理在频域中的解释

本文从走样的两个示例出发，介绍了走样为什么会出现，以及信号采样、信号重建、信号重采样的理论和方法，这些都很容易扩展到二维图像。而对于反走样或者抗锯齿的具体方法，则留到下篇文章进行讲述。关于文章中信号与系统的相关知识，我与一位故友进行了探讨，特在此表示感谢！笔者对于图形学的知识把握仍不够深刻，感谢支持和指教！