蒙特卡洛方法

7.1 介绍

在前面的章节中，我们研究了信号的傅立叶变换和小波变换。 这些强大的转换为我们提供了讨论采样和重建信号时会发生什么情况的方法

另外一类有效的工具也是是在重新考虑渲染问题中一些特殊地方发展起来的。考虑以下这种情况：我们想采样一个图像，最终会得到每个像素的值。信号处理理论指引我们怎样去设计遍历每一个像素的滤波器，着决定了原始图像的权重。所以采样点的值可以表示为以下式子：

一旦我们设计好了滤波器来计算这个积分，我们就可以以任何我们想要方式来估计。傅里叶方法指引我们利用的大量采样点，并将它们用结合起来，来重建。但是这对于我们想要的值过于繁琐了。毕竟，我们只是想要一个像素的最终值，也许重建整个信号就太浪费了。还有一种更好的方法来估计这个积分。

有一类方法称为蒙特卡洛，是在1940s被计算机用来计算复杂积分的。这个章节将会着重于蒙特卡洛背后的思想以及在计算机图形学中的应用。

7.2 蒙特卡洛的基本思想

蒙特卡洛方法旨在确定指定随机变量的分布的参数。我们首先来看看怎样根据一个随机变量的观测值来估计它的分布形式，随后再确定这个分布的参数以和观测值匹配。

做一个类比，假设我们想要估计一场暴风雨时的雷声的幅度，我们猜测这个雷声的大小是一个随机变量且服从指数分布。随后，通过几次雷声大小，我们可以估计出的值。注意每次雷声都是独立同分布。

关键点在于，如果我们可以确定随机变量的分布，就可以通过有限样本的值来估计这个分布。

注意以下定义：估计、估计值、观测、观测集、观测集大小

在图形学中，我们经常关心的是怎样确定随机变量的均值，如果我们有个观测值，就可以简单地求平均来估计均值：

随着的增大，样本平均值会逐渐接近随机变量均值

一个标准正态分布的均值为，标准差为，假设有个服从该分布的样本，则他们的平均值也服从正态分布。这是很重要的，换句话说，我们根据样本得到了许多估计值，而这些估计值自身也是服从正态分布。甚至在随机变量不是正态分布时，这个结论仍适用。这表明了随机变量的均值和估计值的均值是一致的，而这正是我们寻找的

还有一种稍复杂一点的形式就是计算加权平均，然后再归一化：

引出一个问题：是否选择合适的权重，可以让这种形式比简单的求均值更好？甚至，有没有其他形式比这个更好？此处，“更好”意味着用同样数量的样本可以更精确地估计随机变量真实的均值。许多关于蒙特卡洛的文献也是在探索这些问题。

这种估计的方法或者形式称之为estimator，学术翻译为估计量，但我觉得不合适，此处翻译为估计器

我们称随机变量的分布为母分布，而由得到的估计值也可以称为随机变量（尽管可能有特殊情况，使为常量），此处，我们称估计值的集合分布为估计值分布。

我们的目标，是找到一种合适的估计器，通过观测随机变量来估计母分布的参数。这样的话，估计值分布应该被估计的真实值附近形成一个窄带。

事实证明我们可以得到一个估计值分布的分布函数：

其中是估计器，是母分布

定义估计器的偏差为:

其中为真实值

 根据上式可以求出估计方差：

现在，如果一个估计器的偏差和估计方差都很小，那就是 “好”。如果偏差，则称为无偏估计

有许多种估计器，最常见是线性估计器，如经典的蒙特卡洛方法用个独立同分布的观测值，先应用函数，再进行缩放，来得到估计值：

7.4 盲目的蒙特卡洛方法

此处讲解物种盲目蒙特卡洛方法：基础蒙特卡洛、拒绝蒙特卡洛、盲目分层采样、quasi蒙特卡洛、加权蒙特卡洛。

7.4.1 基础蒙特卡洛

在计算机图形学中，我们通常对一个信号在一个区域的均值感兴趣，不失一般性，可以表示为：

如果我们随机生成个独立同分布的样本，又令，可以得到一个无偏估计：

根据之前推导的式子，可以求出方差：

则，，其收敛性为

7.4.2 拒绝蒙特卡洛

其主要思想是生成大量的样本，然后拒绝那些不满足特定条件的点

假设一条连续曲线的定义域和值域都是，我们要求曲线下方的面积，有以下式子：

其中：