יהונתן קילמוני 316529445

שאלה 3: אלגוריתם הממוצע

א. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא יעיל פארטו כשיש רק שני נושאים.

ב. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע **אינו** יעיל פארטו כשיש שלושה נושאים [נחשון בר-סלע, ה'תשפ"ג].

ג. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא הוגן לקבוצות.

א) יהי C התקציב שיש, ויהיו נושא 1 ונושא 2.

יהי $n\geq 2$ כמות המצביעים. לכל $i\in[n]$, התקציב האידיאלי הוא $p_{i,1}, p_{i,2}$, $p_{i,1}+p_{i,2}=\frac{C}{n}$

יהי d, $d=\{d_1,d_2\}=\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i,1}}{n}, \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i,2}}{n}\right\}$, $d_1+d_2=C$

התועלת של i היא:

$$u_i(d) = -\sum_{j=1}^{m} |d_j - p_{i,j}| = -\left[\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i,1}}{n} - p_{i,1}\right| + \left|\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i,2}}{n} - p_{i,2}\right|\right]$$

נניח בשלילה שקיים שיפור פרטו $X=\{x_1,x_2\}$. אז מכיוון שהוא שיפור פרטו קיים שחקן כלשהו t שעבורו מתקיים:

$$-\left[|x_1 - x_{j,1}| + |x_2 - x_{j,2}|\right] = u_j(X) > u_j(d)$$

נזכור כי: $x_1+x_2=C$ וגם $d_1+d_2=C$.

אז בגלל ההנחה בשלילה שקיים שחקן t כזה, ובגלל ש $u_j(x)$ הוא שיפור פרטו אז אנחנו מגדילים את אחד הממוצעים ובהכרח מקטינים את השני, ולכן קיים שחקן אחר k שעבורו התועלת קטנה, בסתירה להגדרת שיפור פרטו.

ב) נוכיח על ידי דוגמא נגדית:

עבור $n=3$, $m=3$,

$$P_1=\{6,0,0\}$$
$$P_2=\{3,3,0\}$$
$$P_3=\{0,3,3\}$$

החלוקה היא: $d=\{3,2,1\}$

$$u_1(d)=-\sum_{j=1}^{3}|d_j-P_{1,j}|=-[|3-6|+|2-0|+|1-0|]=-[3+2+1]=-6$$

$$u_1(d)=-\sum_{j=1}^{3}|d_j-P_{1,j}|=-[|3-3|+|2-3|+|1-0|]=-[0+1+1]=-2$$

$$u_1(d)=-\sum_{j=1}^{3}|d_j-P_{1,j}|=-[|3-0|+|2-3|+|1-3|]=-[3+1+2]=-6$$

אבל עבור החלוקה $x=\{3,3,0\}$

נקבל:

$$u_1(d)=-\sum_{j=1}^{3}|d_j-P_{1,j}|=-[|3-6|+|3-0|+|0-0|]=-[3+3+0]=-6$$

$$u_1(d)=-\sum_{j=1}^{3}|d_j-P_{1,j}|=-[|3-3|+|3-3|+|0-0|]=-[0+0+0]=0$$

$$u_1(d)=-\sum_{j=1}^{3}|d_j-P_{1,j}|=-[|3-0|+|3-3|+|0-3|]=-[3+0+3]=-6$$

כלומר $u_2(x)>u_2(d)$ ולכן x הוא שיפור פארטו.

ג) לא הצלחתי להוכיח שהוגן לקבוצות.

הניסיון נמצא למעלה באדום.

אבל זה מוזר שזה בכלל אפשרי כי הדוגמא בסעיף ב׳ היא כבר דוגמא נגדית.

עבור $n=3$, $m=3$,

$$P_1=\{6,0,0\}$$
$$P_2=\{3,3,0\}$$
$$P_3=\{0,3,3\}$$

התלוקה היא: $d=\{3,2,1\}$

ועבור $k=1$, נקבל, כי הסכום הכולל שעבר לנושא 1 הוא 3, אבל $3<k\cdot\frac{c}{n}=6$

הוגן לקבוצות אומר: לכל קבוצה בגודל k, הסכום הכולל המועבר לכל הנושאים שלפחות אחד מחברי הקבוצה תומך בהם הוא לפחות $k\cdot\frac{c}{n}$.

נניח בשלילה שהחלוקה d שהאלגוריתם החזיר אינה הוגנת לקבוצות אז קיימת קבוצה S בגודל k, $|S|=k$.

כל הפרויקטים הנתמכים על ידי S.

$$J_S=\{j \mid \exists i\in S \text{ s.t } P_{i,j}>0\}$$

$$D_S=\{d_j \mid j\in J_S\}$$

התקציב שניתן לפרויקטים שאחד מחברי S תומך בהם.

$$d=\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}P_{i,1}}{n},\frac{\sum_{i=1}^{n}P_{i,2}}{n},\dots,\frac{\sum_{i=1}^{n}P_{i,m}}{n}\right\}$$

נניח בה"כ כי $J_S=\{j_1,\dots,j_k\}$, ולכן

$$D_S=\frac{\sum_{i=1}^{n}P_{i,1}}{n}+\frac{\sum_{i=1}^{n}P_{i,2}}{n}+\dots+\frac{\sum_{i=1}^{n}P_{i,k}}{n}=$$

מההנחה בשלילה

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}P_{i,1}+\sum_{i=1}^{n}P_{i,2}+\dots+\sum_{i=1}^{n}P_{i,k}}{n}<k\cdot\frac{c}{n}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}P_{i,1}+\sum_{i=1}^{n}P_{i,2}+\dots+\sum_{i=1}^{n}P_{i,k}<k\cdot c$$