316529445 יהונתן דילמוני

מטלה 6

שאלה 4: הוכחות

א. הוכיחו, שאם לגרף מסויים יש פירוק בירקהוף, אז הגרף בהכרח מאוזן.

ב. הוכיחו, שכל הגרלה ללא-קנאה לכתחילה היא גם פרופורציונלית לכתחילה.

ג. נתונה חלוקה כלשהי X של משאבים כלשהם בין n שחקנים. לכל שחקן i אנחנו מגדירים את "הגרלת ההחלפה" באופן הבא: מגרילים שחקן כלשהו j מבין השחקנים האחרים בהסתברות אחידה, ושחקן i מקבל את הסל שלו (Xj). הוכיחו: החלוקה X היא פרופורציונלית, אם ורק אם כל שחקן i מעדיף את הסל הנוכחי שלו Xi על-פני הגרלת-ההחלפה שלו.

פתרון:

סעיף א:

נתון שלגרף יש פירוק בירקהוף.
כלומר המשקל של הקשתות שלו הוא אוסף של שידוכים מושלמים, כלומר התאמות בין שחקן לחפץ, בצורה כזו שלכל שחקן יש חפץ אחד בדיוק, ולכל חפץ אחד יש שחקן אחד בדיוק.

כל שחקן וכל חפץ משתתפים רק פעם אחת בכל שידוך, ואם נסכום את ההסתברויות של השידוכים עבור קודקוד מסוים, בגלל שהוא מופיע רק פעם אחת בכל שידוך נקבל מספר קבוע.

ולכן גרף שלכל קודקוד יש סכום קבוע של הסתברויות (=משקלים) הוא גרף מאוזן.

סעיף ב:

הגדרה. חלוקה אקראית נקראת:

- **פרופורציונלית לכתחילה (ex-ante proportional)** – אם תוחלת הערך של כל שחקן היא לפחות 1/n מהערך שהוא מייחס לכל החפצים:
  $E[v_i(x_i)] \ge v_i(All)/n$
- **ללא־קנאה לכתחילה (ex-ante envy-free)** – אם לכל שני שחקנים i, j, תוחלת הערך של שחקן i בעיני עצמו גדולה לפחות כמו תוחלת הערך של שחקן j בעיני שחקן i:
  $E[v_i(x_i)] \ge E[v_i(x_j)]$

נתון שהחלוקה היא ללא קנאה לכתחילה ולכן כל שחקן מעדיף את הסל שלו (בתוחלת), על פני הסלים האחרים.
כלומר לכל $1 \le i \le n$ ולכל $1 \le j \le n$ מתקיים $E[V_i(X_i)] \ge E[V_i(X_j)]$ מההגדרה.

אם נעשה סכום לכל השחקנים לשני הצדדים באי השוויון נקבל:

$$\sum_{j=1}^{n} E[V_i(X_i)] \ge \sum_{j=1}^{n} E[V_i(X_j)]$$

נשים לב שבצד שמאל $\sum_{j=1}^{n}$ פשוט מכפיל ב-n כי אין אינדקס j בצד הזה.
ובצד שמאל פשוט מגיעים לערך ששחקן i נותן לכל החפצים יחד כלומר $V_i(All)$
כלומר הגענו לאי השוויון הבא:

$$n \cdot E[V_i(X_i)] \ge V_i(All)$$

$$E[V_i(X_i)] \ge \frac{V_i(All)}{n}$$

כלומר פרופורציונלי לכתחילה לפי ההגדרה.