יהונתן דילמוני

316529445

שאלה 4: האלגוריתם החמדני לחלוקת חפצים

בהרצאה הוכחנו את יחס הקירוב של האלגוריתם החמדני (LPT) לחלוקת מטלות. ניתן להשתמש באותו אלגוריתם בדיוק גם לחלוקת חפצים (עם ערך חיובי).

א. הוכיחו, שיחס הקירוב של האלגוריתם החמדני לחלוקת חפצים הוא לפחות 1/2 [כלומר: האלגוריתם מחזיר חלוקה שבה הערך המינימלי הוא לפחות 1/2 מהערך המינימלי בחלוקה אגליטרית].

הוכחה:

נסמן ב- T את הערך המיטבי (האגליטרי) ב- T.

נחלק ~~את~~ החפצים לשני סוגים.

חפץ גדול - חפץ שערכו גדול מ- $T/2$.

חפץ קטן - חפץ שערכו קטן מ- $T/2$.

נניח שישנם k חפצים גדולים.

באלגוריתם החמדני מחלקים קודם את כל החפצים הגדולים.

מקרה א': $k \geq n$

כל שחקן מקבל לפחות חפץ גדול אחד, והערך שלו לפחות $T/2$, ולכן יחס הקירוב הוא לפחות $\frac{1}{2}$ וסיימנו.

מקרה ב: $k < n$.

מקרה ב.1:

אם חילקנו את כל k החפצים הגדולים, ואז המשכנו לחלק את שאר החפצים, והגענו למצב ששחקן i כלשהו שקיבל חפץ גדול פתאום מקבל עוד חפץ קטן, זה אומר שרגע לפני ש-i קיבל את החפץ הקטן הזה לכל שאר השחקנים ערך החפצים שנמצא אצלהם היה גדול או שווה ל $T/2$, שכן אחרת הם היו מקבלים את החפץ הזה, ולכן יחס הקירוב הוא לפחות $\frac{1}{2}$ וסיימנו.

מקרה ב.2:

חילקנו את k החפצים הגדולים, וכל שאר החפצים מחולקים רק ל $n-k$ השחקנים שלא קיבלו חפץ גדול.
בחלוקה המיטבית יש לפחות $n-k$ סלים שלא מכילים חפץ גדול (כי ישנם רק k חפצים גדולים).
הערך של כל אחד מהסלים האלו הוא לפחות T (כי זה הערך האגליטרי), ולכן הערך הכולל של הסלים האלו הוא לפחות $T(n-k)$.
לפי שובך היונים, לפחות אחד מאותם $n-k$ שחקנים שלא קיבלו חפץ גדול יקבל סל שערכו לפחות T.
נקרא לו שחקן E, מכיוון שהחפץ האחרון שהוא קיבל היה קטן (כלומר ערכו קטן מ $T/2$, כמו כל שאר החפצים שהוא קיבל) ומכיוון שערכו של הסל שלו הוא לפחות T, אז ערכו של הסל שלו לפני קבלת החפץ הזה היה לפחות $T/2$, והוא לא היה מקבל את החפץ הזה אם הוא לא הכי קטן באותו רגע, ולכן לכל השחקנים ישנו סל עם ערך לפחות $T/2$ כלומר יחס הקירוב הוא לפחות $\frac{1}{2}$, כנדרש. ∎