

Trabajo de Curso
Simulación de Materiales

Javier Rivero Iglesias

Contents

1	Introducción	3
2	Descripción del Problema	4
2.1	Geometría de la Estructura	4
2.2	Condiciones de Contorno	4
2.2.1	Apoyos	4
2.2.2	Cargas	4
2.3	Propiedades de los Materiales	5
2.4	Propiedades de las Barras	5
3	Fundamentos Teóricos	6
3.1	Método de Elementos Finitos	6
3.2	Modelo de Nudos Biarticulados	6
3.3	Modelo de Nudos Rígidos	7
3.4	Ensamblaje del Sistema Global	7
4	Implementación Computacional	8
4.1	Arquitectura del Programa	8
4.2	Módulo de Lectura de Datos	8
4.3	Módulo de Preprocesamiento	8
4.4	Módulo de Procesamiento	9
4.5	Módulo de Postprocesamiento	9
4.6	Salida del Programa	9
5	Respuestas a los Apartados del Enunciado	10
5.1	Apartados a) y b): Representación e Identificación de la Estructura	10
5.2	Apartado c) Desplazamientos Nodales	10
5.3	Apartado d) Reacciones en Apoyos y Verificación del Equilibrio	11
5.4	Apartado e) Estructura Deformada con Escala de Colores	11
5.5	Apartado f) Identificación de Barra Mayor Tensión y Verificación de Fallo	11
5.6	Apartado g) Cálculo de Desplazamientos y Comparación	12
5.7	Apartado h) Reacciones en Apoyos y Verificación del Equilibrio	13
5.8	Apartado i) Estructura Deformada con Escala de Colores	13
5.9	Apartado j) Identificación de Barra Mayor Tensión y Verificación de Fallo	13
6	Figuras de Resultados	14
6.1	Visualización de la Estructura – Nudos Biarticulados	14
6.2	Estructura Deformada y Tensiones – Nudos Biarticulados	14
6.3	Visualización de la Estructura – Nudos Rígidos	15
6.4	Estructura Deformada y Tensiones – Nudos Rígidos	15
7	Conclusiones	16

1 Introducción

Este trabajo presenta el desarrollo e implementación de un programa de análisis estructural mediante el Método de Elementos Finitos (MEF) para estructuras reticuladas planas. Se analizan dos hipótesis de comportamiento:

- **Nudos biarticulados:** Solo esfuerzos axiales (2 GDL por nodo)
- **Nudos rígidos:** Esfuerzos axiales y momentos flectores (3 GDL por nodo)

El objetivo es comparar ambos modelos evaluando desplazamientos, tensiones y reacciones.

2 Descripción del Problema

2.1 Geometría de la Estructura

La estructura analizada consiste en una celosía plana compuesta por:

- **24 nodos**
- **51 barras**
- **4 apoyos fijos** ubicados en los nodos 1, 2, 8 y 9
- **Longitud total:** 50 m
- **Altura total:** 5 m

La visualización gráfica detallada de la estructura, incluyendo la numeración de nodos y barras, se presenta en las [Figuras 1](#) y [3](#) correspondientes a cada modelo analizado.

2.2 Condiciones de Contorno

2.2.1 Apoyos

Los apoyos se encuentran ubicados en la fila inferior de la estructura:

- **Nudos biarticulados:** Restricción de desplazamientos en x e y ($u_x = u_y = 0$)
- **Nudos rígidos:** Restricción de desplazamientos y rotación ($u_x = u_y = \theta = 0$)

2.2.2 Cargas

Se aplican cargas verticales concentradas en los nodos de la banda de rodadura (nodos 1 a 9):

Nodos	Fuerza vertical [N]
1, 9	-125 000
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	-250 000
Total	-2 000 000

Table 1: Cargas aplicadas en la estructura.

La oración "sobre la que actúa una carga vertical con sentido descendente de 2 MN, que se reparte uniformemente" es un poco ambigua y se puede interpretar de distintas formas. Sin embargo, se ha optado por este enfoque. La carga total de 2 MN se modela como carga uniforme sobre las barras inferiores y se discretiza en cargas nodales, resultando 125 kN en los nodos extremos y 250 kN en los interiores.

2.3 Propiedades de los Materiales

La estructura está compuesta por tres tipos de materiales con las siguientes propiedades:

Material	Módulo de Young E [Pa]	Límite elástico σ_y [Pa]
1	2.00×10^{11}	2.50×10^8
2	1.60×10^{11}	2.50×10^8
3	1.60×10^{11}	2.10×10^8

Table 2: Propiedades de los materiales.

2.4 Propiedades de las Barras

Se consideran tres tipos de secciones transversales:

Sección	Área A [m ²]	Momento de inercia I [m ⁴]
1	0.0150	2.80×10^{-5}
2	0.0144	1.728×10^{-5}
3	0.0254	5.153×10^{-5}

Table 3: Propiedades geométricas de las secciones.

3 Fundamentos Teóricos

3.1 Método de Elementos Finitos

El Método de Elementos Finitos (MEF) discretiza la estructura continua en elementos finitos conectados por nodos. Para cada elemento se establece una relación entre fuerzas nodales y desplazamientos mediante la matriz de rigidez:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (1)$$

donde \mathbf{f} es el vector de fuerzas nodales, \mathbf{K} la matriz de rigidez y \mathbf{u} el vector de desplazamientos.

3.2 Modelo de Nudos Biarticulados

En este modelo, cada nodo tiene 2 grados de libertad (u_x, u_y). La matriz de rigidez local de un elemento tipo barra es:

$$\mathbf{k}^{local} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde E es el módulo de Young, A el área de la sección transversal y L la longitud del elemento. La transformación al sistema global se realiza mediante la matriz de rotación \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3)$$

siendo α el ángulo que forma el elemento con el eje horizontal.

La matriz de rigidez global del elemento es:

$$\mathbf{K}^{global} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}^{local} \mathbf{T} \quad (4)$$

La tensión axial en cada barra se calcula como:

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad (5)$$

donde ΔL es el alargamiento o acortamiento del elemento.

3.3 Modelo de Nudos Rígidos

En este modelo, cada nodo tiene 3 grados de libertad (u_x, u_y, θ):

$$\mathbf{k}^{local} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (6)$$

donde I es el momento de inercia de la sección transversal.

La tensión total en cada barra considera tanto el esfuerzo axial como el flector:

$$\sigma_{total} = \sigma_{axial} + \sigma_{flexión} = E \frac{\Delta L}{L} + \frac{M \cdot c}{I} \quad (7)$$

donde M es el momento flector máximo y c es la distancia desde el eje neutro a la fibra extrema.

3.4 Ensamblaje del Sistema Global

El sistema global de ecuaciones se expresa como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{pp} & \mathbf{S}_{pd} \\ \mathbf{S}_{dp} & \mathbf{S}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_p \\ \mathbf{d}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_p \\ \mathbf{p}_d \end{bmatrix} \quad (8)$$

donde el subíndice p denota grados de libertad prescritos (apoyos) y d los grados de libertad libres.

Los desplazamientos libres se obtienen resolviendo:

$$\mathbf{d}_d = \mathbf{S}_{dd}^{-1}(\mathbf{p}_d - \mathbf{S}_{dp}\mathbf{d}_p) \quad (9)$$

Las reacciones en los apoyos se calculan como:

$$\mathbf{p}_p = \mathbf{S}_{pp}\mathbf{d}_p + \mathbf{S}_{pd}\mathbf{d}_d \quad (10)$$

4 Implementación Computacional

4.1 Arquitectura del Programa

1. **Lectura de datos** (`read_input.m`)
2. **Preprocesamiento** (`preprocessor.m`)
3. **Procesamiento** (`processor.m`)
4. **Postprocesamiento** (`postprocessor.m`)

El flujo de ejecución del programa sigue la secuencia:

Input → Lectura → Preprocesamiento → Procesamiento → Postprocesamiento → Output

4.2 Módulo de Lectura de Datos

Este módulo (`read_input.m`) lee el archivo de texto `estructura.txt` que contiene:

- Coordenadas de los nodos
- Definición de apoyos
- Propiedades de materiales
- Propiedades de secciones
- Conectividad de elementos (barras)
- Cargas aplicadas

La función devuelve una estructura `PROB` con todos los datos organizados para su posterior procesamiento.

4.3 Módulo de Preprocesamiento

El preprocesamiento realiza las siguientes tareas:

1. Cálculo de matrices de rigidez locales para cada elemento
2. Cálculo de matrices de transformación de coordenadas
3. Obtención de matrices de rigidez globales
4. Ensamblaje de la matriz de rigidez global del sistema
5. Visualización gráfica de la estructura

Además, almacena los datos y variables en un archivo `*.mat` para su uso posterior en los módulos "processor" y "postprocessor".

4.4 Módulo de Procesamiento

1. Ensamblaje del vector de fuerzas nodales
2. Identificación de grados de libertad prescritos y libres
3. Resolución del sistema para obtener desplazamientos
4. Cálculo de tensiones en cada elemento
5. Verificación del criterio de fallo (tensión > límite elástico)
6. Cálculo de reacciones en los apoyos

4.5 Módulo de Postprocesamiento

El postprocesamiento genera:

1. Visualización de la estructura deformada con escala aumentada
2. Mapa de colores representando la distribución de tensiones
3. Identificación visual de barras fallidas

4.6 Salida del Programa

La ejecución del programa principal `main.m` genera la siguiente salida por consola y guarda los resultados en un archivo de texto (`output_***.txt`):

```
1 --- Paso 1: Lectura de input ---
2 Lectura de input completada
3
4 --- Paso 2: Preprocesamiento ---
5 Matriz de rigidez global (S): ...
6
7 --- Paso 3: Procesamiento ---
8 =====
9      RESULTADOS - NUDOS BIARTICULADOS/RIGIDOS
10 =====
11 --- Desplazamientos nodales (d) ---
12 ...
13 --- Reacciones en los Apoyos ---
14 ...
15 --- Paso 4: Postprocesamiento ---
16
17 --- Simulacion completada correctamente ---
18 Resultados guardados en: output_***.txt
```

Listing 1: Estructura de la salida del programa

5 Respuestas a los Apartados del Enunciado

5.1 Apartados a) y b): Representación e Identificación de la Estructura

La estructura analizada es una celosía plana con:

- 24 nodos
- 51 barras (3 tipos según sección transversal)
- 4 apoyos fijos (nodos 1, 2, 8, 9)
- Dimensiones: 50 m \times 5 m

Las [Figuras 1](#) y [3](#) muestran la representación gráfica con:

- Identificación de todos los nodos (1-24)
- Elementos numerados (barras 1-51)
- Tres tipos de barra diferenciados por color según su sección transversal

5.2 Apartado c) Desplazamientos Nodales

Nodo	u_x [m]	u_y [m]
1	0	0
2	0	0
3	-9.27×10^{-4}	-6.34×10^{-3}
4	-8.02×10^{-4}	-1.11×10^{-2}
5	≈ 0	-1.31×10^{-2}
6	8.02×10^{-4}	-1.11×10^{-2}
7	9.27×10^{-4}	-6.34×10^{-3}
8	0	0
9	0	0
10	3.64×10^{-4}	4.55×10^{-4}
11	1.44×10^{-3}	-2.90×10^{-3}
12	6.78×10^{-4}	-8.88×10^{-3}
13	2.39×10^{-4}	-1.27×10^{-2}
14	-2.39×10^{-4}	-1.27×10^{-2}
15	-6.78×10^{-4}	-8.88×10^{-3}
16	-1.44×10^{-3}	-2.90×10^{-3}
17	-3.64×10^{-4}	4.55×10^{-4}
18	2.41×10^{-3}	-1.20×10^{-3}
19	2.85×10^{-3}	-5.75×10^{-3}
20	1.74×10^{-3}	-1.07×10^{-2}
21	≈ 0	-1.26×10^{-2}
22	-1.74×10^{-3}	-1.07×10^{-2}
23	-2.85×10^{-3}	-5.75×10^{-3}
24	-2.41×10^{-3}	-1.20×10^{-3}

Table 4: Desplazamientos nodales – Nudos biarticulados

5.3 Apartado d) Reacciones en Apoyos y Verificación del Equilibrio

Nodo	R_x [N]	R_y [N]
1	-4.5035×10^5	-2.3528×10^5
2	9.8652×10^5	1.2353×10^6
8	-9.8652×10^5	1.2353×10^6
9	4.5035×10^5	-2.3528×10^5
Σ	≈ 0	2.0×10^6

Table 5: Reacciones en los apoyos – Nudos biarticulados

Verificación del equilibrio:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \text{ N} \quad \checkmark \\ \sum F_y &= 0 \text{ N} \quad \checkmark\end{aligned}$$

5.4 Apartado e) Estructura Deformada con Escala de Colores

La [Figura 2](#) muestra:

- Estructura deformada con escala aumentada para visualización
- Escala de colores representando la tensión axial en cada barra
- Barras en compresión (azul) y tracción (rojo)

5.5 Apartado f) Identificación de Barra Mayor Tensión y Verificación de Fallo

Barras con mayores tensiones:

Barra	Tensión [MPa]	Estado
48	-55.62	Compresión
49	-55.62	Compresión

Table 6: Barra con mayor tensión – Nudos biarticulados

Barra con mayor tensión: Barra 48 con $\sigma = -55.62$ MPa (compresión)

Verificación de fallo:

- Límite elástico del material: $\sigma_y = 250$ MPa
- $|\sigma_{max}| = 55.62 \text{ MPa} < 250 \text{ MPa} \quad \checkmark$

Conclusión: Ninguna barra falla

5.6 Apartado g) Cálculo de Desplazamientos y Comparación

Comparación de desplazamientos (u_x , u_y) entre ambos modelos:

Nudos Biarticulados			Nudos Rígidos		
Nodo	u_x [m]	u_y [m]	Nodo	u_x [m]	u_y [m]
1	0	0	1	0	0
2	0	0	2	0	0
3	-9.27×10^{-4}	-6.34×10^{-3}	3	-9.27×10^{-4}	-6.32×10^{-3}
4	-8.02×10^{-4}	-1.11×10^{-2}	4	-8.01×10^{-4}	-1.11×10^{-2}
5	≈ 0	-1.31×10^{-2}	5	≈ 0	-1.30×10^{-2}
6	8.02×10^{-4}	-1.11×10^{-2}	6	8.01×10^{-4}	-1.11×10^{-2}
7	9.27×10^{-4}	-6.34×10^{-3}	7	9.27×10^{-4}	-6.32×10^{-3}
8	0	0	8	0	0
9	0	0	9	0	0
10	3.64×10^{-4}	4.55×10^{-4}	10	3.64×10^{-4}	4.51×10^{-4}
11	1.44×10^{-3}	-2.90×10^{-3}	11	1.43×10^{-3}	-2.88×10^{-3}
12	6.78×10^{-4}	-8.88×10^{-3}	12	6.75×10^{-4}	-8.85×10^{-3}
13	2.39×10^{-4}	-1.27×10^{-2}	13	2.37×10^{-4}	-1.27×10^{-2}
14	-2.39×10^{-4}	-1.27×10^{-2}	14	-2.37×10^{-4}	-1.27×10^{-2}
15	-6.78×10^{-4}	-8.88×10^{-3}	15	-6.75×10^{-4}	-8.85×10^{-3}
16	-1.44×10^{-3}	-2.90×10^{-3}	16	-1.43×10^{-3}	-2.88×10^{-3}
17	-3.64×10^{-4}	4.55×10^{-4}	17	-3.64×10^{-4}	4.51×10^{-4}
18	2.41×10^{-3}	-1.20×10^{-3}	18	2.40×10^{-3}	-1.19×10^{-3}
19	2.85×10^{-3}	-5.75×10^{-3}	19	2.84×10^{-3}	-5.73×10^{-3}
20	1.74×10^{-3}	-1.07×10^{-2}	20	1.73×10^{-3}	-1.07×10^{-2}
21	≈ 0	-1.26×10^{-2}	21	≈ 0	-1.26×10^{-2}
22	-1.74×10^{-3}	-1.07×10^{-2}	22	-1.73×10^{-3}	-1.07×10^{-2}
23	-2.85×10^{-3}	-5.75×10^{-3}	23	-2.84×10^{-3}	-5.73×10^{-3}
24	-2.41×10^{-3}	-1.20×10^{-3}	24	-2.40×10^{-3}	-1.19×10^{-3}

Table 7: Comparación de desplazamientos entre nudos biarticulados y nudos rígidos

Los desplazamientos son muy similares en ambos modelos (diferencias $< 0.4\%$ en u_y). El modelo de nudos rígidos presenta rotaciones (θ) del orden de 10^{-4} rad. La diferencia marginal confirma que el comportamiento está dominado por esfuerzos axiales.

5.7 Apartado h) Reacciones en Apoyos y Verificación del Equilibrio

Nodo	R_x [N]	R_y [N]	M [N · m]
1	-4.4821×10^5	-2.3491×10^5	-1.53×10^3
2	9.8239×10^5	1.2349×10^6	1.1453×10^4
8	-9.8239×10^5	1.2349×10^6	-1.1453×10^4
9	4.4821×10^5	-2.3491×10^5	1.53×10^3
Σ	≈ 0	2.0×10^6	≈ 0

Table 8: Reacciones en los apoyos – Nudos rígidos

Verificación del equilibrio:

$$\begin{aligned}\sum F_x &\approx 0 \text{ N} \quad \checkmark \\ \sum F_y &= 0 \text{ N} \quad \checkmark \\ \sum M &\approx 0 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \checkmark\end{aligned}$$

5.8 Apartado i) Estructura Deformada con Escala de Colores

La [Figura 4](#) muestra:

- Estructura deformada con escala amplificada
- Escala de colores para tensión total (axial + flexión)
- Distribución similar al modelo biarticulado con pequeñas variaciones

5.9 Apartado j) Identificación de Barra Mayor Tensión y Verificación de Fallo

Barras con mayores tensiones – Nudos rígidos:

Barra	Tensión [MPa]	Estado
48	-55.04	Compresión
49	-55.04	Compresión

Table 9: Barra con mayor tensión – Nudos rígidos

Barra con mayor tensión: Barra 48 con $\sigma_{total} = -55.04$ MPa (compresión)

Verificación de fallo:

- $|\sigma_{max}| = 55.04 \text{ MPa} < 250 \text{ MPa} \quad \checkmark$

Conclusión: Ninguna barra falla. La misma barra que en el modelo biarticulado

6 Figuras de Resultados

6.1 Visualización de la Estructura – Nudos Biarticulados

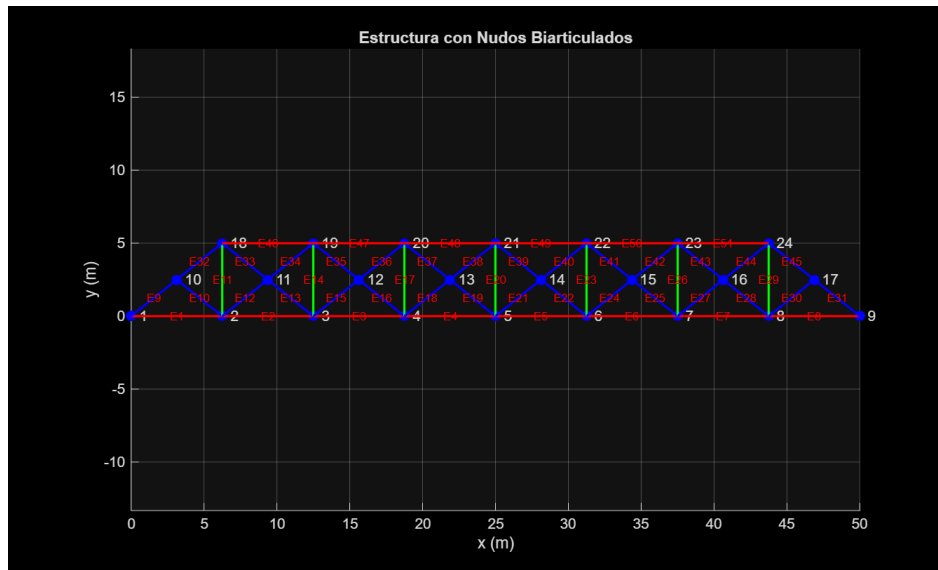


Figure 1: Representación gráfica de la estructura con nudos biarticulados. Los colores indican los tres tipos distintos de barras.

6.2 Estructura Deformada y Tensiones – Nudos Biarticulados

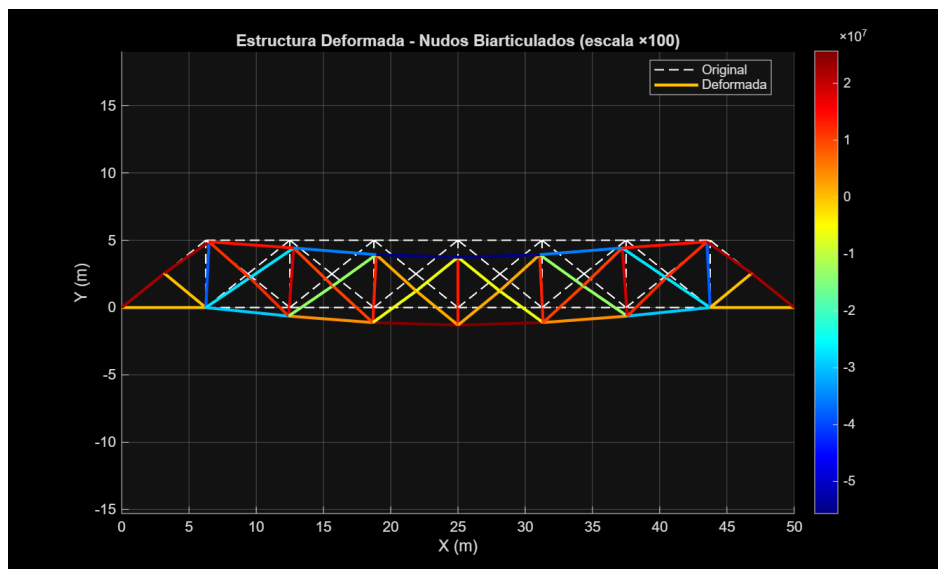


Figure 2: Estructura deformada con escala de colores para tensión axial – Nudos biarticulados. Las barras en azul representan compresión y en rojo tracción.

6.3 Visualización de la Estructura – Nodos Rígidos

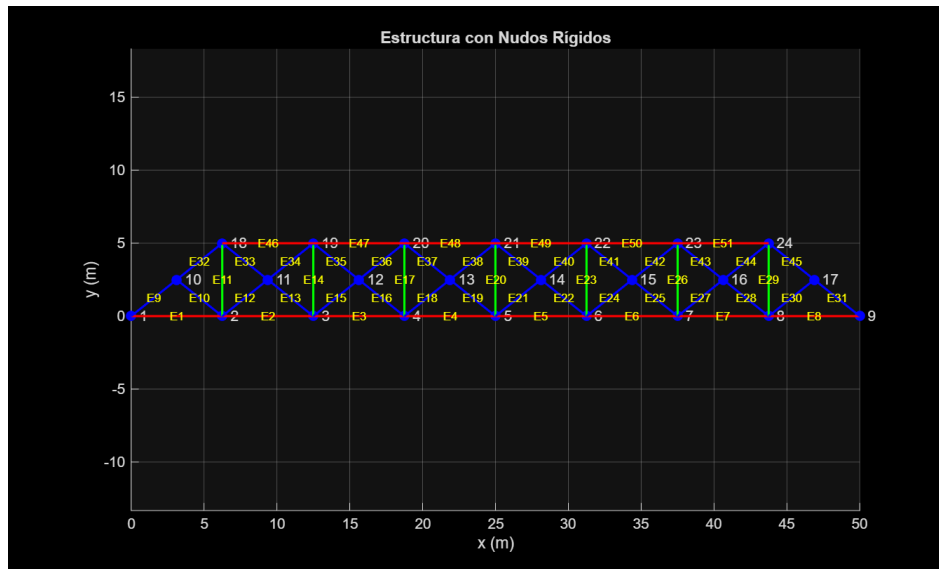


Figure 3: Representación gráfica de la estructura con nodos rígidos.

6.4 Estructura Deformada y Tensiones – Nodos Rígidos

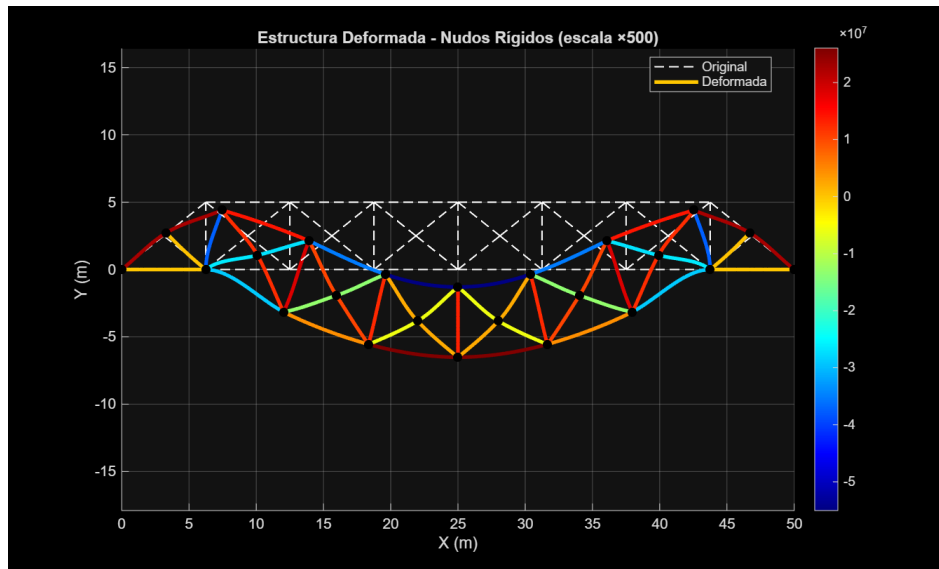


Figure 4: Estructura deformada con escala de colores para tensión total (axial + flexión) – Nodos rígidos.

7 Conclusiones

1. Se ha desarrollado un programa modular en MATLAB para el análisis de estructuras/celosías planas usando elementos finitos, aplicado a dos modelos: nodos biarticulados y nodos rígidos.
2. Ambos modelos proporcionan resultados muy similares (diferencia $< 1\%$), confirmando que el comportamiento está dominado por esfuerzos axiales para este tipo de estructura.
3. El modelo biarticulado es suficientemente preciso con ventaja computacional (1 GDL menos por cada nodo, de 3 a 2).
4. La estructura es segura bajo las cargas especificadas: tensión máxima representa solo el $\approx 25\%$ del límite elástico.
5. Los resultados han sido validados mediante verificación de equilibrio estático y simetría.