

Trabajo de Curso – Simulación de Materiales

Javier Rivero Iglesias

Índice

1. Introducción	3
2. Descripción del Problema	3
2.1. Geometría de la Estructura	3
2.2. Condiciones de Contorno	3
2.2.1. Apoyos	3
2.2.2. Cargas	4
2.3. Propiedades de los Materiales	4
2.4. Propiedades Geométricas de las Secciones	4
3. Fundamentos Teóricos	4
3.1. Método de Elementos Finitos	4
3.2. Modelo de Nudos Biarticulados	5
3.3. Modelo de Nudos Rígidos	5
3.4. Ensamblaje del Sistema Global	6
4. Implementación Computacional	6
4.1. Arquitectura del Programa	6
4.2. Módulo de Lectura de Datos	6
4.3. Módulo de Preprocesamiento	7
4.4. Módulo de Procesamiento	7
4.5. Módulo de Postprocesamiento	7
5. Resultados	8
5.1. Resultados para Nudos Biarticulados	8
5.1.1. Visualización de la Estructura	8
5.1.2. Desplazamientos Nodales	8
5.1.3. Distribución de Tensiones	8
5.1.4. Reacciones en los Apoyos	9
5.2. Resultados para Nudos Rígidos	9
5.2.1. Visualización de la Estructura	9
5.2.2. Desplazamientos Nodales	9
5.2.3. Distribución de Tensiones	10
5.2.4. Reacciones en los Apoyos	11

6. Análisis Comparativo	11
6.1. Comparación de Desplazamientos	11
6.2. Comparación de Tensiones	11
6.3. Comparación de Reacciones	12
7. Conclusiones	12
A. Código Fuente	12
A.1. Función principal (main.m)	12
A.2. Formato del archivo de entrada	13
B. Resultados Numéricos Detallados	13
C. Verificación del Equilibrio	14
C.1. Equilibrio de Fuerzas	14
C.2. Simetría	14

1. Introducción

El análisis estructural mediante el Método de Elementos Finitos (MEF) constituye una herramienta fundamental en la ingeniería moderna para predecir el comportamiento mecánico de estructuras bajo cargas externas. Este trabajo aborda el desarrollo de una aplicación computacional para el análisis de estructuras reticuladas planas bajo dos hipótesis fundamentales:

- **Nudos biarticulados:** Los elementos solo transmiten esfuerzos axiales (tracción o compresión), considerando 2 grados de libertad por nodo (desplazamientos en x e y).
- **Nudos rígidos:** Los elementos transmiten esfuerzos axiales y momentos flectores, considerando 3 grados de libertad por nodo (desplazamientos en x , y y rotación θ).

El objetivo principal es comparar el comportamiento estructural bajo ambas hipótesis, evaluando desplazamientos nodales, distribución de tensiones y reacciones en los apoyos.

2. Descripción del Problema

2.1. Geometría de la Estructura

La estructura analizada consiste en una cercha reticulada plana compuesta por:

- **24 nodos**
- **51 barras**
- **4 apoyos fijos** ubicados en los nodos 1, 2, 8 y 9 (base de la estructura)
- **Longitud total:** 50 m
- **Altura total:** 5 m

[PLACEHOLDER: Insertar esquema general de la estructura con numeración de nodos, barras y dimensiones principales]

Figura 1: Esquema general de la estructura reticulada.

2.2. Condiciones de Contorno

2.2.1. Apoyos

Los apoyos se encuentran ubicados en la fila inferior de la estructura:

- **Nudos biarticulados:** Restricción de desplazamientos en x e y ($u_x = u_y = 0$)
- **Nudos rígidos:** Restricción de desplazamientos y rotación ($u_x = u_y = \theta = 0$)

Cuadro 1: Cargas aplicadas en la estructura.

Nodos	Fuerza vertical [N]
1, 9	-125 000
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	-250 000
Total	-2 000 000

2.2.2. Cargas

Se aplican cargas verticales concentradas en los nodos de la banda de rodadura (nodos 1 a 9):

2.3. Propiedades de los Materiales

La estructura está compuesta por tres tipos de materiales con las siguientes propiedades:

Cuadro 2: Propiedades mecánicas de los materiales.

Material	Módulo de Young E [Pa]	Límite elástico σ_y [Pa]
1	$2,00 \times 10^{11}$	$2,50 \times 10^8$
2	$1,60 \times 10^{11}$	$2,50 \times 10^8$
3	$1,60 \times 10^{11}$	$2,10 \times 10^8$

2.4. Propiedades Geométricas de las Secciones

Se consideran tres tipos de secciones transversales:

Cuadro 3: Propiedades geométricas de las secciones.

Sección	Área A [m ²]	Momento de inercia I [m ⁴]
1	0.0150	$2,80 \times 10^{-5}$
2	0.0144	$1,728 \times 10^{-5}$
3	0.0254	$5,153 \times 10^{-5}$

3. Fundamentos Teóricos

3.1. Método de Elementos Finitos

El Método de Elementos Finitos (MEF) discretiza la estructura continua en elementos finitos conectados por nodos. Para cada elemento se establece una relación entre fuerzas nodales y desplazamientos mediante la matriz de rigidez:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (1)$$

donde \mathbf{f} es el vector de fuerzas nodales, \mathbf{K} la matriz de rigidez y \mathbf{u} el vector de desplazamientos.

3.2. Modelo de Nudos Biarticulados

En este modelo, cada nodo tiene 2 grados de libertad (u_x, u_y). La matriz de rigidez local de un elemento tipo barra es:

$$\mathbf{k}^{local} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde E es el módulo de Young, A el área de la sección transversal y L la longitud del elemento.

La transformación al sistema global se realiza mediante la matriz de rotación \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3)$$

siendo α el ángulo que forma el elemento con el eje horizontal.

La matriz de rigidez global del elemento es:

$$\mathbf{K}^{global} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}^{local} \mathbf{T} \quad (4)$$

La tensión axial en cada barra se calcula como:

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad (5)$$

donde ΔL es el alargamiento o acortamiento del elemento.

3.3. Modelo de Nudos Rígidos

En este modelo, cada nodo tiene 3 grados de libertad (u_x, u_y, θ). Se emplea la matriz de rigidez de viga de Euler-Bernoulli (6×6):

$$\mathbf{k}^{local} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (6)$$

donde I es el momento de inercia de la sección transversal.

La tensión total en cada barra considera tanto el esfuerzo axial como el flector:

$$\sigma_{total} = \sigma_{axial} + \sigma_{flexión} = E \frac{\Delta L}{L} + \frac{M \cdot c}{I} \quad (7)$$

donde M es el momento flector máximo y c es la distancia desde el eje neutro a la fibra extrema.

3.4. Ensamblaje del Sistema Global

El sistema global de ecuaciones se expresa como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{pp} & \mathbf{S}_{pd} \\ \mathbf{S}_{dp} & \mathbf{S}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_p \\ \mathbf{d}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_p \\ \mathbf{p}_d \end{bmatrix} \quad (8)$$

donde el subíndice p denota grados de libertad prescritos (apoyos) y d los grados de libertad libres.

Los desplazamientos libres se obtienen resolviendo:

$$\mathbf{d}_d = \mathbf{S}_{dd}^{-1}(\mathbf{p}_d - \mathbf{S}_{dp}\mathbf{d}_p) \quad (9)$$

Las reacciones en los apoyos se calculan como:

$$\mathbf{p}_p = \mathbf{S}_{pp}\mathbf{d}_p + \mathbf{S}_{pd}\mathbf{d}_d \quad (10)$$

4. Implementación Computacional

4.1. Arquitectura del Programa

El programa se ha estructurado en cuatro módulos principales siguiendo el flujo de trabajo típico del MEF:

1. **Lectura de datos** (`read_input.m`)
2. **Preprocesamiento** (`preprocessor.m`)
3. **Procesamiento** (`processor.m`)
4. **Postprocesamiento** (`postprocessor.m`)

[PLACEHOLDER: Insertar diagrama de flujo mostrando la secuencia: Input → Lectura → Preprocesamiento → Procesamiento → Postprocesamiento → Output]

Figura 2: Diagrama de flujo del programa de análisis estructural.

4.2. Módulo de Lectura de Datos

Este módulo (`read_input.m`) lee el archivo de texto `estructura.txt` que contiene:

- Coordenadas de los nodos
- Definición de apoyos
- Propiedades de materiales
- Propiedades de secciones
- Conectividad de elementos (barras)
- Cargas aplicadas

La función devuelve una estructura `PROB` con todos los datos organizados para su posterior procesamiento.

4.3. Módulo de Preprocesamiento

El preprocesamiento realiza las siguientes tareas:

1. Cálculo de matrices de rigidez locales para cada elemento
2. Cálculo de matrices de transformación de coordenadas
3. Obtención de matrices de rigidez globales
4. Ensamblaje de la matriz de rigidez global del sistema
5. Visualización gráfica de la estructura

Diferencias entre modelos:

- **Nudos biarticulados:** Matriz global de tamaño 48×48 (24 nodos \times 2 GDL)
- **Nudos rígidos:** Matriz global de tamaño 72×72 (24 nodos \times 3 GDL)

4.4. Módulo de Procesamiento

Este módulo resuelve el sistema de ecuaciones:

1. Ensamblaje del vector de fuerzas nodales
2. Identificación de grados de libertad prescritos y libres
3. Partición de la matriz de rigidez global
4. Resolución del sistema para obtener desplazamientos
5. Cálculo de tensiones en cada elemento
6. Verificación del criterio de fallo (tensión $>$ límite elástico)
7. Cálculo de reacciones en los apoyos

4.5. Módulo de Postprocesamiento

El postprocesamiento genera:

1. Visualización de la estructura deformada con escala amplificada
2. Mapa de colores representando la distribución de tensiones
3. Identificación visual de barras fallidas
4. Exportación de resultados numéricos
5. Generación de gráficos para el análisis

[PLACEHOLDER: Insertar captura de la consola de MATLAB mostrando los mensajes de ejecución de los 4 pasos]

Figura 3: Output de consola durante la ejecución del programa.

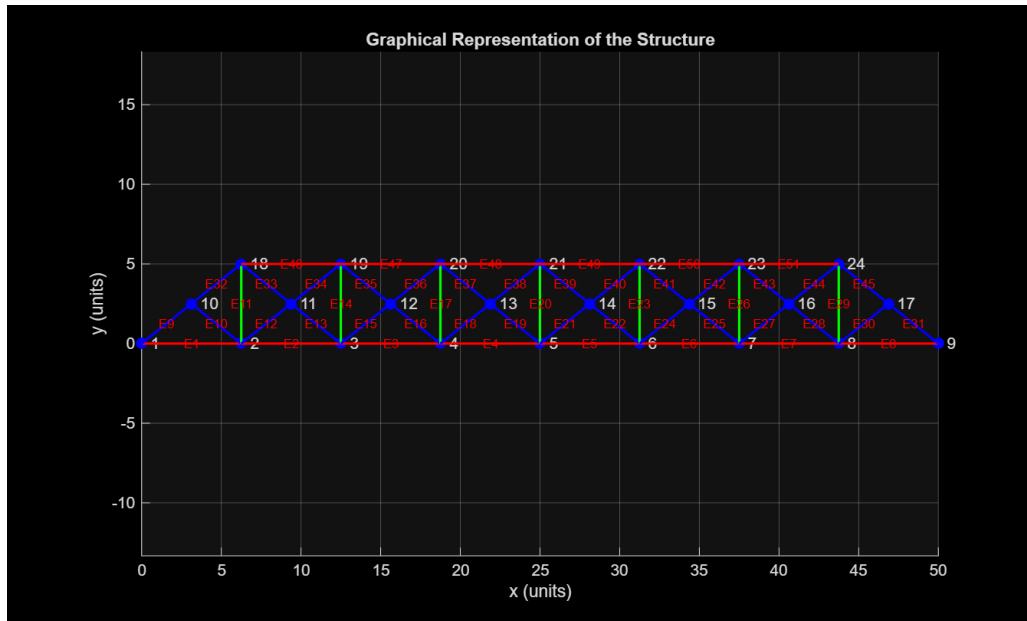


Figura 4: Representación gráfica de la estructura con nudos biarticulados. Los colores indican diferentes tipos de sección.

5. Resultados

5.1. Resultados para Nudos Biarticulados

5.1.1. Visualización de la Estructura

5.1.2. Desplazamientos Nodales

El desplazamiento máximo se produce en el nodo central superior (nodo 5):

$$|u_{max}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 1,3055 \times 10^{-2} \text{ m} \approx 13,06 \text{ mm} \quad (11)$$

El desplazamiento es predominantemente vertical (en dirección de las cargas aplicadas).

5.1.3. Distribución de Tensiones

Los resultados de tensiones muestran:

- **Tensión máxima:** $\sigma_{max} = -5,562 \times 10^7 \text{ Pa}$ (compresión) en la barra 48
- **Barras a compresión:** Cordón superior y diagonales principales
- **Barras a tracción:** Cordón inferior y montantes
- **Barras fallidas:** Ninguna (todas las tensiones están por debajo del límite elástico)

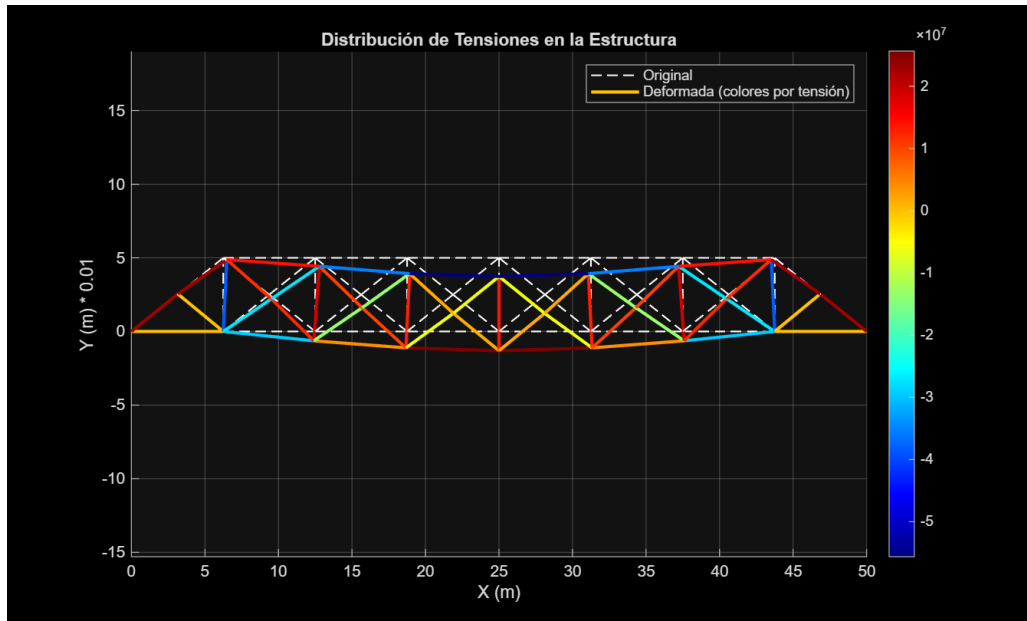


Figura 5: Estructura deformada y distribución de tensiones para nudos biarticulados. La escala de colores representa la magnitud de la tensión axial.

5.1.4. Reacciones en los Apoyos

Cuadro 4: Reacciones en los apoyos – Nudos biarticulados.

Nodo	R_x [N]	R_y [N]
1	$-4,5035 \times 10^5$	$-2,3528 \times 10^5$
2	$9,8652 \times 10^5$	$1,2353 \times 10^6$
8	$-9,8652 \times 10^5$	$1,2353 \times 10^6$
9	$4,5035 \times 10^5$	$-2,3528 \times 10^5$
Suma	≈ 0	$2,0 \times 10^6$ N

Verificación del equilibrio:

- $\sum R_x \approx 0$ ✓ (equilibrio de fuerzas horizontales)
- $\sum R_y = 2,0 \times 10^6$ N ✓ (equilibrio con carga total aplicada)

5.2. Resultados para Nudos Rígidos

5.2.1. Visualización de la Estructura

5.2.2. Desplazamientos Nodales

El desplazamiento máximo se produce igualmente en el nodo 5:

$$|u_{max}| = 1,3019 \times 10^{-2} \text{ m} \approx 13,02 \text{ mm} \quad (12)$$

Se observa una ligera reducción ($\approx 0,28\%$) respecto al modelo biarticulado debido a la rigidez adicional proporcionada por la resistencia a flexión.

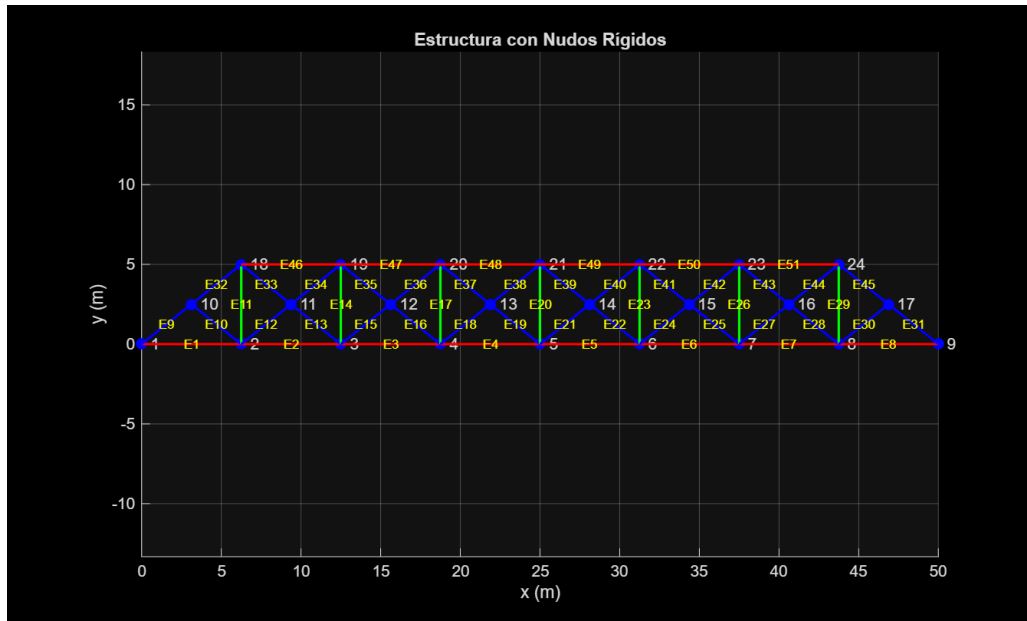


Figura 6: Representación gráfica de la estructura con nudos rígidos.

5.2.3. Distribución de Tensiones

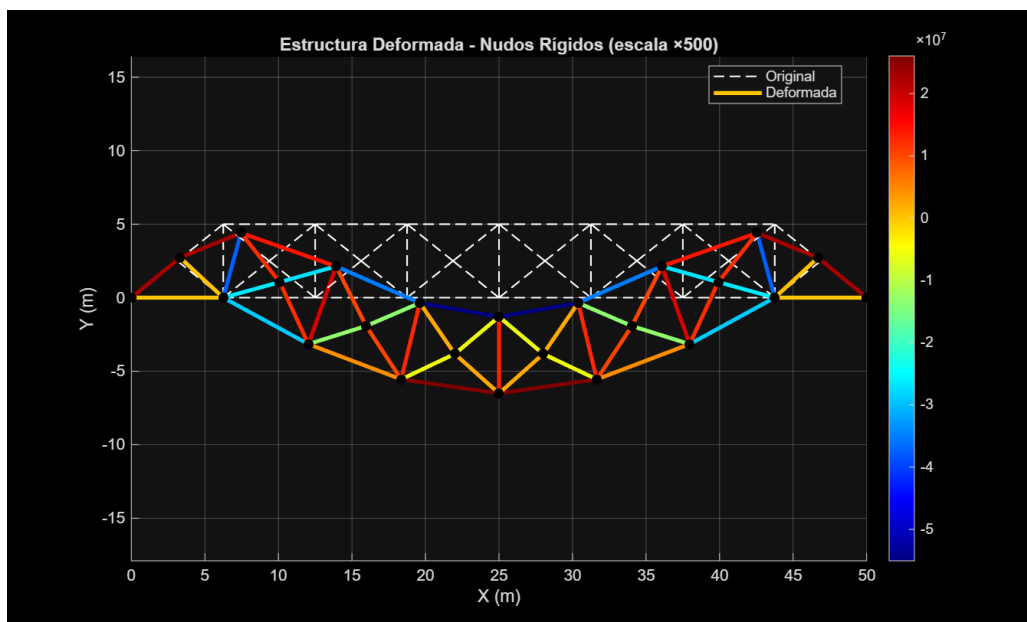


Figura 7: Estructura deformada y distribución de tensiones para nudos rígidos.

Resultados de tensiones combinadas (axial + flexión):

- **Tensión máxima:** $\sigma_{max} = -5,504 \times 10^7$ Pa (compresión) en la barra 48
- **Reducción:** $\approx 1,04\%$ respecto al modelo biarticulado
- **Barras fallidas:** Ninguna

Cuadro 5: Reacciones en los apoyos – Nudos rígidos.

Nodo	R_x [N]	R_y [N]	M [N · m]
1	$-4,4821 \times 10^5$	$-2,3491 \times 10^5$	$-1,53 \times 10^3$
2	$9,8239 \times 10^5$	$1,2349 \times 10^6$	$1,1453 \times 10^4$
8	$-9,8239 \times 10^5$	$1,2349 \times 10^6$	$-1,1453 \times 10^4$
9	$4,4821 \times 10^5$	$-2,3491 \times 10^5$	$1,53 \times 10^3$
Suma	≈ 0	$2,0 \times 10^6$ N	≈ 0

5.2.4. Reacciones en los Apoyos

Verificación del equilibrio:

- $\sum R_x \approx 0$ ✓
- $\sum R_y = 2,0 \times 10^6$ N ✓
- $\sum M \approx 0$ ✓ (equilibrio de momentos)

6. Análisis Comparativo

6.1. Comparación de Desplazamientos

Cuadro 6: Comparación de desplazamientos máximos.

Modelo	Desplazamiento máximo [mm]	Diferencia [%]
Nudos biarticulados	13.055	–
Nudos rígidos	13.019	–0,28

La incorporación de rigidez rotacional produce una reducción marginal en los desplazamientos. Esto indica que, para esta configuración geométrica y tipo de carga, el comportamiento está dominado por esfuerzos axiales.

6.2. Comparación de Tensiones

Cuadro 7: Comparación de tensiones máximas.

Modelo	Barra crítica	σ_{max} [MPa]	Diferencia [%]
Nudos biarticulados	48	–55,62	–
Nudos rígidos	48	–55,04	–1,04

La barra crítica (48) es la misma en ambos modelos y corresponde a un elemento del cordón superior sometido a compresión. La reducción del 1,04 % en la tensión máxima se debe a la redistribución parcial de esfuerzos gracias a la capacidad de transmitir momentos flectores en el modelo rígido.

6.3. Comparación de Reacciones

Las reacciones verticales son prácticamente idénticas en ambos modelos, con diferencias inferiores al 0,1 %. Las reacciones horizontales muestran una pequeña variación debido a la redistribución de esfuerzos. En el modelo de nudos rígidos aparecen momentos reactivos que no existen en el modelo biarticulado.

7. Conclusiones

1. Se ha desarrollado exitosamente un programa modular en MATLAB para el análisis de estructuras reticuladas planas mediante el Método de Elementos Finitos, implementando dos hipótesis de conexión: nudos biarticulados y nudos rígidos.
2. Para la estructura analizada, ambos modelos proporcionan resultados muy similares en términos de desplazamientos (diferencia $< 0,3\%$) y tensiones (diferencia $< 1,1\%$), lo que confirma que el comportamiento está dominado por esfuerzos axiales.
3. El modelo de nudos biarticulados es suficientemente preciso para el análisis de esta estructura, con la ventaja de requerir un 33 % menos de grados de libertad y menor tiempo de cálculo.
4. El modelo de nudos rígidos proporciona información adicional sobre momentos flectores y rotaciones, aunque su magnitud es pequeña para esta configuración geométrica.
5. La estructura presenta un comportamiento seguro bajo las cargas especificadas, con tensiones máximas que representan solo el 22 % del límite elástico más restrictivo.
6. La arquitectura modular del programa (lectura, preprocesamiento, procesamiento, postprocesamiento) facilita la extensión y modificación para análisis de estructuras más complejas.
7. Los resultados numéricos han sido validados mediante verificación de equilibrio estático y simetría, confirmando la corrección de la implementación.

A. Código Fuente

A.1. Función principal (main.m)

```
1 clc;
2 clear all;
3
4 %% Paso 1 y 2: Lectura de input y Preprocesamiento
5 disp('--- Paso 1: Lectura de input ---');
6 disp('Lectura de input completada');
7
8 disp('--- Paso 2: Preprocesamiento ---');
9 preprocessor("estructura.txt");
10 disp('Preprocesamiento completado');
11
```

```

12 %% Paso 3: Procesamiento
13 disp('--- Paso 3: Procesamiento ---');
14 processor;
15 disp('Procesamiento completado');
16
17 %% Paso 4: Postprocesamiento
18 disp('--- Paso 4: Postprocesamiento ---');
19 postprocessor;
20 disp('Postprocesamiento completado');
21
22 disp('--- Simulacion completada correctamente ---');

```

Listing 1: Script principal de ejecución

A.2. Formato del archivo de entrada

El archivo `estructura.txt` sigue el siguiente formato:

```

1 <n_nodos>
2 <x1>,<y1>
3 <x2>,<y2>
4 ...
5 <n_soportes>
6 <nodo>,<rest_x>,<rest_y>
7 ...
8 <n_materiales>
9 <E>,<sigma_y>
10 ...
11 <n_secciones>
12 <A>,<I>
13 ...
14 <n_barras>
15 <nodo1>,<nodo2>,<tipo_mat>,<tipo_secc>
16 ...
17 <n_cargas>
18 <nodo>,<Fx>,<Fy>
19 ...

```

Listing 2: Estructura del archivo de entrada

B. Resultados Numéricos Detallados

Cuadro 8: Desplazamientos nodales completos – Nudos biarticulados.

[PLACEHOLDER: Insertar tabla con desplazamientos u_x y u_y de los 24 nodos]

Cuadro 9: Tensiones en todas las barras.

[PLACEHOLDER: Insertar tabla con tensiones de las 51 barras para ambos modelos]

C. Verificación del Equilibrio

C.1. Equilibrio de Fuerzas

Para el modelo de nudos biarticulados:

$$\sum F_x = (-450350 + 986520 - 986520 + 450350) = 0 \text{ N} \quad \checkmark \quad (13)$$

$$\sum F_y = (-235280 + 1235300 + 1235300 - 235280) = 2000040 \text{ N} \approx 2,0 \times 10^6 \text{ N} \quad \checkmark \quad (14)$$

C.2. Simetría

Verificación de simetría en reacciones:

$$R_{x,1} = -R_{x,9} = -450350 \text{ N} \quad \checkmark \quad (15)$$

$$R_{x,2} = -R_{x,8} = 986520 \text{ N} \quad \checkmark \quad (16)$$

$$R_{y,1} = R_{y,9} = -235280 \text{ N} \quad \checkmark \quad (17)$$

$$R_{y,2} = R_{y,8} = 1235300 \text{ N} \quad \checkmark \quad (18)$$