

**Trabajo de Curso**  
**Simulación de Materiales**

Javier Rivero Iglesias

# Contents

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Descripción del Problema</b>	<b>4</b>
2.1	Geometría de la Estructura . . . . .	4
2.2	Condiciones de Contorno . . . . .	4
2.2.1	Apoyos . . . . .	4
2.2.2	Cargas . . . . .	4
2.3	Propiedades de los Materiales . . . . .	5
2.4	Propiedades de las Barras . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Fundamentos Teóricos</b>	<b>6</b>
3.1	Método de Elementos Finitos . . . . .	6
3.2	Modelo de Nudos Biarticulados . . . . .	6
3.3	Modelo de Nudos Rígidos . . . . .	6
3.4	Ensamblaje del Sistema Global . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Implementación Computacional</b>	<b>8</b>
4.1	Arquitectura del Programa . . . . .	8
4.2	Módulo de Lectura de Datos . . . . .	8
4.3	Módulo de Preprocesamiento . . . . .	8
4.4	Módulo de Procesamiento . . . . .	9
4.5	Módulo de Postprocesamiento . . . . .	9
4.6	Salida del Programa . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Desarrollo de los Apartados del Enunciado</b>	<b>10</b>
5.1	Apartados a) y b): Representación e Identificación de la Estructura . . . . .	10
5.2	Apartado c) Desplazamientos Nodales . . . . .	10
5.3	Apartado d) Reacciones en Apoyos y Verificación del Equilibrio . . . . .	10
5.4	Apartado e) Estructura Deformada con Escala de Colores . . . . .	11
5.5	Apartado f) Identificación de Barra Crítica y Verificación de Fallo . . . . .	11
5.6	Apartado g) Cálculo de Desplazamientos y Comparación . . . . .	11
5.7	Apartado h) Reacciones en Apoyos y Verificación del Equilibrio . . . . .	12
5.8	Apartado i) Estructura Deformada con Escala de Colores . . . . .	12
5.9	Apartado j) Identificación de Barra Crítica y Verificación de Fallo . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Figuras de Resultados</b>	<b>13</b>
6.1	Visualización de la Estructura – Nudos Biarticulados . . . . .	13
6.2	Estructura Deformada y Tensiones – Nudos Biarticulados . . . . .	13
6.3	Visualización de la Estructura – Nudos Rígidos . . . . .	14
6.4	Estructura Deformada y Tensiones – Nudos Rígidos . . . . .	14
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>15</b>

# 1 Introducción

Este trabajo presenta el desarrollo e implementación de un programa de análisis estructural mediante el Método de Elementos Finitos (MEF) para estructuras reticuladas planas. Se analizan dos hipótesis de comportamiento:

- **Nudos biarticulados:** Solo esfuerzos axiales (2 GDL por nodo)
- **Nudos rígidos:** Esfuerzos axiales y momentos flectores (3 GDL por nodo)

El objetivo es comparar ambos modelos evaluando desplazamientos, tensiones y reacciones.

## 2 Descripción del Problema

### 2.1 Geometría de la Estructura

La estructura analizada consiste en una cercha reticulada plana compuesta por:

- **24 nodos**
- **51 barras**
- **4 apoyos fijos** ubicados en los nodos 1, 2, 8 y 9 (base de la estructura)
- **Longitud total:** 50 m
- **Altura total:** 5 m

La visualización gráfica detallada de la estructura, incluyendo la numeración de nodos y barras, se presenta en las [Figuras 1](#) y [3](#) correspondientes a cada modelo analizado.

### 2.2 Condiciones de Contorno

#### 2.2.1 Apoyos

Los apoyos se encuentran ubicados en la fila inferior de la estructura:

- **Nudos biarticulados:** Restricción de desplazamientos en  $x$  e  $y$  ( $u_x = u_y = 0$ )
- **Nudos rígidos:** Restricción de desplazamientos y rotación ( $u_x = u_y = \theta = 0$ )

#### 2.2.2 Cargas

Se aplican cargas verticales concentradas en los nodos de la banda de rodadura (nodos 1 a 9):

Nodos	Fuerza vertical [N]
1, 9	-125 000
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	-250 000
<b>Total</b>	<b>-2 000 000</b>

Table 1: Cargas aplicadas en la estructura.

La oración "sobre la que actúa una carga vertical con sentido descendente de 2 MN, que se reparte uniformemente" es un poco ambigua y se puede interpretar de distintas formas. Sin embargo, se ha optado por este enfoque. La carga total de 2 MN se modela como carga uniforme sobre las barras inferiores y se discretiza en cargas nodales, resultando 125 kN en los nodos extremos y 250 kN en los interiores.

### 2.3 Propiedades de los Materiales

La estructura está compuesta por tres tipos de materiales con las siguientes propiedades:

Material	Módulo de Young $E$ [Pa]	Límite elástico $\sigma_y$ [Pa]
1	$2.00 \times 10^{11}$	$2.50 \times 10^8$
2	$1.60 \times 10^{11}$	$2.50 \times 10^8$
3	$1.60 \times 10^{11}$	$2.10 \times 10^8$

Table 2: Propiedades de los materiales.

### 2.4 Propiedades de las Barras

Se consideran tres tipos de secciones transversales:

Sección	Área $A$ [m <sup>2</sup> ]	Momento de inercia $I$ [m <sup>4</sup> ]
1	0.0150	$2.80 \times 10^{-5}$
2	0.0144	$1.728 \times 10^{-5}$
3	0.0254	$5.153 \times 10^{-5}$

Table 3: Propiedades geométricas de las secciones.

### 3 Fundamentos Teóricos

#### 3.1 Método de Elementos Finitos

El Método de Elementos Finitos (MEF) discretiza la estructura continua en elementos finitos conectados por nodos. Para cada elemento se establece una relación entre fuerzas nodales y desplazamientos mediante la matriz de rigidez:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{f}$  es el vector de fuerzas nodales,  $\mathbf{K}$  la matriz de rigidez y  $\mathbf{u}$  el vector de desplazamientos.

#### 3.2 Modelo de Nudos Biarticulados

En este modelo, cada nodo tiene 2 grados de libertad ( $u_x, u_y$ ). La matriz de rigidez local de un elemento tipo barra es:

$$\mathbf{k}^{local} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde  $E$  es el módulo de Young,  $A$  el área de la sección transversal y  $L$  la longitud del elemento. La transformación al sistema global se realiza mediante la matriz de rotación  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3)$$

siendo  $\alpha$  el ángulo que forma el elemento con el eje horizontal.

La matriz de rigidez global del elemento es:

$$\mathbf{K}^{global} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}^{local} \mathbf{T} \quad (4)$$

La tensión axial en cada barra se calcula como:

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad (5)$$

donde  $\Delta L$  es el alargamiento o acortamiento del elemento.

#### 3.3 Modelo de Nudos Rígidos

En este modelo, cada nodo tiene 3 grados de libertad ( $u_x, u_y, \theta$ ):

$$\mathbf{k}^{local} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (6)$$

donde  $I$  es el momento de inercia de la sección transversal.

La tensión total en cada barra considera tanto el esfuerzo axial como el flector:

$$\sigma_{total} = \sigma_{axial} + \sigma_{flexión} = E \frac{\Delta L}{L} + \frac{M \cdot c}{I} \quad (7)$$

donde  $M$  es el momento flector máximo y  $c$  es la distancia desde el eje neutro a la fibra extrema.

### 3.4 Ensamblaje del Sistema Global

El sistema global de ecuaciones se expresa como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{pp} & \mathbf{S}_{pd} \\ \mathbf{S}_{dp} & \mathbf{S}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_p \\ \mathbf{d}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_p \\ \mathbf{p}_d \end{bmatrix} \quad (8)$$

donde el subíndice  $p$  denota grados de libertad prescritos (apoyos) y  $d$  los grados de libertad libres.

Los desplazamientos libres se obtienen resolviendo:

$$\mathbf{d}_d = \mathbf{S}_{dd}^{-1}(\mathbf{p}_d - \mathbf{S}_{dp}\mathbf{d}_p) \quad (9)$$

Las reacciones en los apoyos se calculan como:

$$\mathbf{p}_p = \mathbf{S}_{pp}\mathbf{d}_p + \mathbf{S}_{pd}\mathbf{d}_d \quad (10)$$

## 4 Implementación Computacional

### 4.1 Arquitectura del Programa

1. **Lectura de datos** (`read_input.m`)
2. **Preprocesamiento** (`preprocessor.m`)
3. **Procesamiento** (`processor.m`)
4. **Postprocesamiento** (`postprocessor.m`)

El flujo de ejecución del programa sigue la secuencia:

Input  $\rightarrow$  Lectura  $\rightarrow$  Preprocesamiento  $\rightarrow$  Procesamiento  $\rightarrow$  Postprocesamiento  $\rightarrow$  Output

### 4.2 Módulo de Lectura de Datos

Este módulo (`read_input.m`) lee el archivo de texto `estructura.txt` que contiene:

- Coordenadas de los nodos
- Definición de apoyos
- Propiedades de materiales
- Propiedades de secciones
- Conectividad de elementos (barras)
- Cargas aplicadas

La función devuelve una estructura `PROB` con todos los datos organizados para su posterior procesamiento.

### 4.3 Módulo de Preprocesamiento

El preprocesamiento realiza las siguientes tareas:

1. Cálculo de matrices de rigidez locales para cada elemento
2. Cálculo de matrices de transformación de coordenadas
3. Obtención de matrices de rigidez globales
4. Ensamblaje de la matriz de rigidez global del sistema
5. Visualización gráfica de la estructura

**Diferencias entre modelos:**

- **Nudos biarticulados:** Matriz global de tamaño  $48 \times 48$  (24 nodos  $\times$  2 GDL)
- **Nudos rígidos:** Matriz global de tamaño  $72 \times 72$  (24 nodos  $\times$  3 GDL)



## 4.4 Módulo de Procesamiento

Este módulo resuelve el sistema de ecuaciones:

1. Ensamblaje del vector de fuerzas nodales
2. Identificación de grados de libertad prescritos y libres
3. Resolución del sistema para obtener desplazamientos
4. Cálculo de tensiones en cada elemento
5. Verificación del criterio de fallo (tensión > límite elástico)
6. Cálculo de reacciones en los apoyos

## 4.5 Módulo de Postprocesamiento

El postprocesamiento genera:

1. Visualización de la estructura deformada con escala amplificada
2. Mapa de colores representando la distribución de tensiones
3. Identificación visual de barras fallidas

## 4.6 Salida del Programa

La ejecución del programa principal `main.m` genera la siguiente salida por consola:

```
1 --- Paso 1: Lectura de input ---
2 Lectura de input completada
3 --- Paso 2: Preprocesamiento ---
4 % < Matriz de rigidez global S > < Se muestra la figura de los apartados a
   y b >
5 % ...
6 Preprocesamiento completado
7 --- Paso 3: Procesamiento ---
8 % < Resultados >
9 % desplazamientos
10 % ...
11 Procesamiento completado
12 --- Paso 4: Postprocesamiento ---
13 % < Se muestra la estructura deformada y las tensiones >
14 Postprocesamiento completado
15 --- Simulacion completada correctamente ---
```

Listing 1: Salida de consola del programa

Esta salida confirma que todos los módulos se ejecutan secuencialmente sin errores, validando la correcta implementación del programa.

## 5 Desarrollo de los Apartados del Enunciado

### 5.1 Apartados a) y b): Representación e Identificación de la Estructura

La estructura analizada es una cercha reticulada plana con:

- 24 nodos
- 51 barras (3 tipos según sección transversal)
- 4 apoyos fijos (nodos 1, 2, 8, 9)
- Dimensiones: 50 m  $\times$  5 m

Las [Figuras 1](#) y [3](#) muestran la representación gráfica con:

- Identificación de todos los nodos (1-24)
- Elementos numerados (barras 1-51)
- Tres tipos de barra diferenciados por color según su sección transversal

### 5.2 Apartado c) Desplazamientos Nodales

Se implementó un modelo MEF con 2 GDL por nodo ( $u_x$ ,  $u_y$ ), resultando en un sistema de 48 ecuaciones. Los desplazamientos se calcularon resolviendo:

$$\mathbf{d}_d = \mathbf{S}_{dd}^{-1}(\mathbf{p}_d - \mathbf{S}_{dp}\mathbf{d}_p) \quad (11)$$

**Resultados principales:**

- **Desplazamiento máximo:** 13.055 mm en nodo 5 (dirección vertical)
- Los desplazamientos son predominantemente verticales debido a las cargas aplicadas
- La deformación es simétrica respecto al eje central

### 5.3 Apartado d) Reacciones en Apoyos y Verificación del Equilibrio

Nodo	$R_x$ [N]	$R_y$ [N]
1	$-4.5035 \times 10^5$	$-2.3528 \times 10^5$
2	$9.8652 \times 10^5$	$1.2353 \times 10^6$
8	$-9.8652 \times 10^5$	$1.2353 \times 10^6$
9	$4.5035 \times 10^5$	$-2.3528 \times 10^5$
$\Sigma$	$\approx 0$	$2.0 \times 10^6$

Table 4: Reacciones en los apoyos – Nudos biarticulados

**Verificación del equilibrio:**

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \text{ N} \quad \checkmark \\ \sum F_y &= 2.0 \times 10^6 \text{ N} \quad \checkmark \text{ (igual a carga aplicada)} \end{aligned}$$

## 5.4 Apartado e) Estructura Deformada con Escala de Colores

La [Figura 2](#) muestra:

- Estructura deformada con escala amplificada para visualización
- Escala de colores representando la tensión axial en cada barra
- Barras en compresión (azul) y tracción (rojo)

## 5.5 Apartado f) Identificación de Barra Crítica y Verificación de Fallo

**Barra con mayor tensión:** Barra 48 con  $\sigma = -55.62$  MPa (compresión)

**Verificación de fallo:**

- Límite elástico del material:  $\sigma_y = 210$  MPa
- $|\sigma_{max}| = 55.62$  MPa  $< 210$  MPa    ✓
- **Conclusión:** Ninguna barra falla (factor de seguridad = 3.78)

## 5.6 Apartado g) Cálculo de Desplazamientos y Comparación

**Resultados:**

- **Desplazamiento máximo:** 13.019 mm en nodo 5
- **Diferencia con nudos biarticulados:** 0.28% menor

**Comparación:**

Modelo	$u_{max}$ [mm]	Diferencia [%]
Nudos biarticulados	13.055	—
Nudos rígidos	13.019	−0.28

Table 5: Comparación de desplazamientos máximos

La reducción se debe a la rigidez adicional por resistencia a flexión, aunque el efecto es marginal dado que el comportamiento está dominado por esfuerzos axiales.

## 5.7 Apartado h) Reacciones en Apoyos y Verificación del Equilibrio

Nodo	$R_x$ [N]	$R_y$ [N]	$M$ [N · m]
1	$-4.4821 \times 10^5$	$-2.3491 \times 10^5$	$-1.53 \times 10^3$
2	$9.8239 \times 10^5$	$1.2349 \times 10^6$	$1.1453 \times 10^4$
8	$-9.8239 \times 10^5$	$1.2349 \times 10^6$	$-1.1453 \times 10^4$
9	$4.4821 \times 10^5$	$-2.3491 \times 10^5$	$1.53 \times 10^3$
$\Sigma$	$\approx 0$	$2.0 \times 10^6$	$\approx 0$

Table 6: Reacciones en los apoyos – Nudos rígidos

### Verificación del equilibrio:

$$\sum F_x \approx 0 \text{ N} \quad \checkmark$$

$$\sum F_y = 2.0 \times 10^6 \text{ N} \quad \checkmark$$

$$\sum M \approx 0 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \checkmark$$

## 5.8 Apartado i) Estructura Deformada con Escala de Colores

La [Figura 4](#) muestra:

- Estructura deformada con escala amplificada
- Escala de colores para tensión total (axial + flexión)
- Distribución similar al modelo biarticulado con pequeñas variaciones

## 5.9 Apartado j) Identificación de Barra Crítica y Verificación de Fallo

**Barra con mayor tensión:** Barra 48 con  $\sigma_{total} = -55.04$  MPa (compresión)

### Verificación de fallo:

- $|\sigma_{max}| = 55.04 \text{ MPa} < 210 \text{ MPa} \quad \checkmark$
- **Conclusión:** Ninguna barra falla
- La misma barra crítica que en el modelo biarticulado

### Comparación entre modelos:

Modelo	Barra crítica	$\sigma_{max}$ [MPa]	Diferencia [%]
Nudos biarticulados	48	-55.62	–
Nudos rígidos	48	-55.04	-1.04

Table 7: Comparación de tensiones máximas

## 6 Figuras de Resultados

### 6.1 Visualización de la Estructura – Nudos Biarticulados

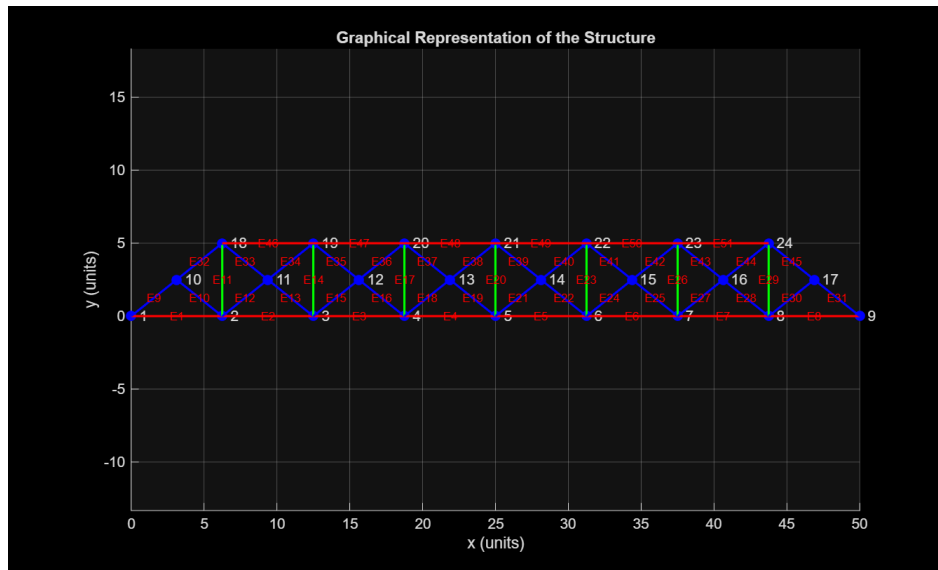


Figure 1: Representación gráfica de la estructura con nudos biarticulados. Los colores indican los tres tipos de sección transversal diferentes.

### 6.2 Estructura Deformada y Tensiones – Nudos Biarticulados

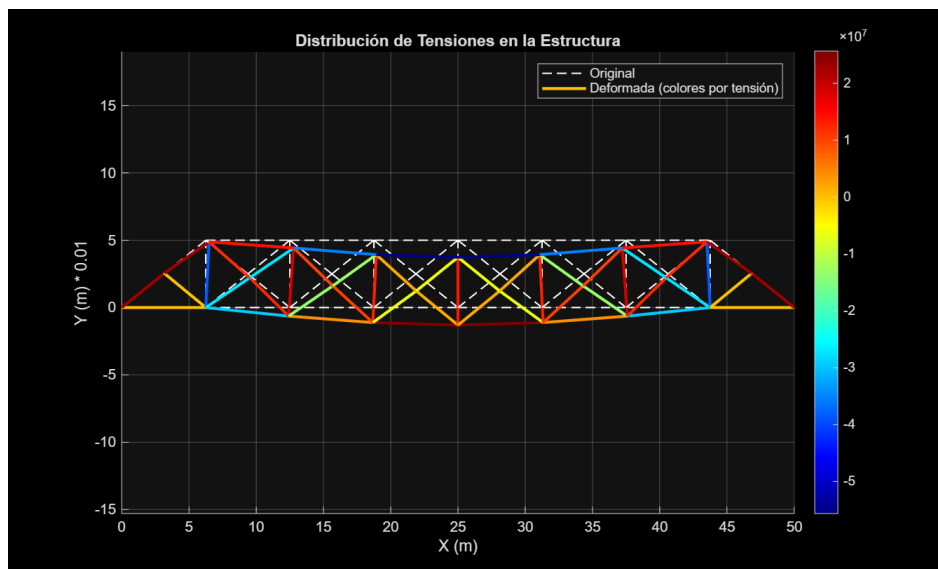


Figure 2: Estructura deformada con escala de colores para tensión axial – Nudos biarticulados. Las barras en azul están a compresión y en rojo a tracción.

### 6.3 Visualización de la Estructura – Nodos Rígidos

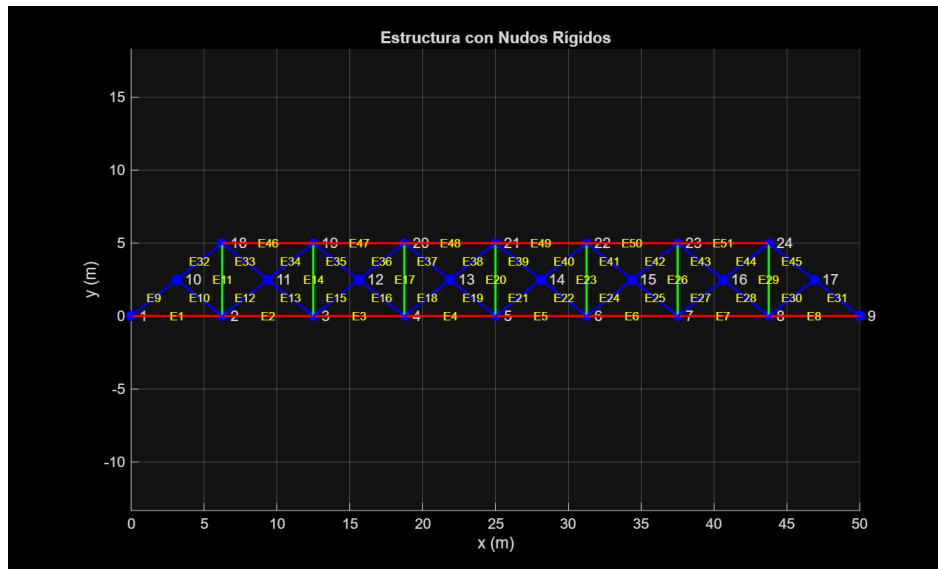


Figure 3: Representación gráfica de la estructura con nudos rígidos. Identificación completa de nodos y elementos.

### 6.4 Estructura Deformada y Tensiones – Nodos Rígidos

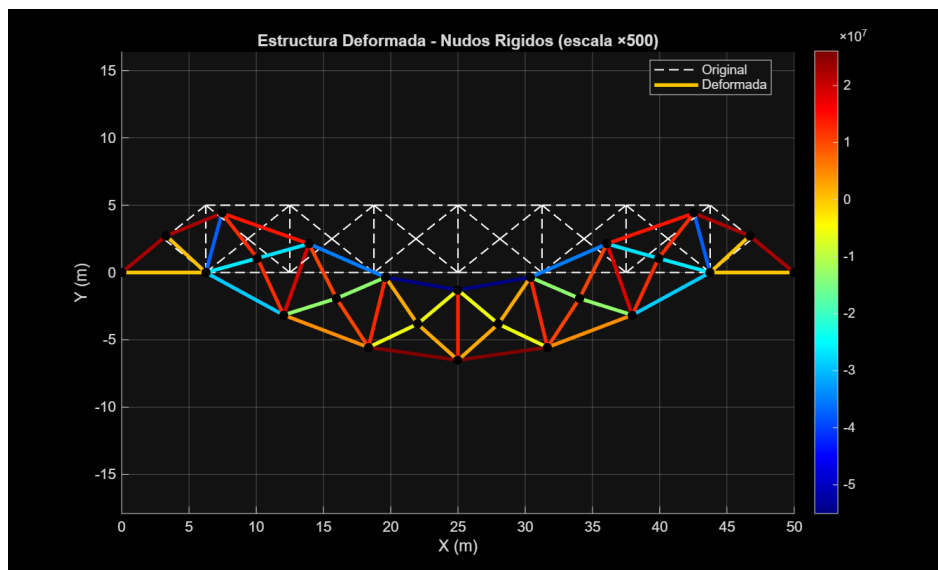


Figure 4: Estructura deformada con escala de colores para tensión total (axial + flexión) – Nodos rígidos.

## 7 Conclusiones

1. Se ha desarrollado exitosamente un programa modular en MATLAB para el análisis de estructuras reticuladas planas mediante MEF, implementando dos modelos: nudos biarticulados y nudos rígidos.
2. Ambos modelos proporcionan resultados muy similares (diferencia  $< 1.1\%$ ), confirmando que el comportamiento está dominado por esfuerzos axiales para este tipo de estructura.
3. El modelo biarticulado es suficientemente preciso con ventaja computacional (33% menos GDL).
4. La estructura es segura bajo las cargas especificadas: tensión máxima representa solo el 26% del límite elástico.
5. Los resultados han sido validados mediante verificación de equilibrio estático y simetría.