**北京航空航天大学计算机学院**

**硕士学位论文文献综述**

**论文题目**：基于Kinect人体建模与测量

**专 业**：计算机科学与技术

**研究方向**：计算机图形学

**研 究 生**：张业祥

**学 号**：ZY1306319

**指导教师**：吴壮志

**北京航空航天大学计算机学院**

2013年12月8日

**摘要**

以布料仿真为基础的3D虚拟衣服动画技术，可通过计算机真实再现衣服的动态视觉效果，在纺织、动画、电子商务、电影等方面都有巨大的应用前景，特别的，把3D虚拟衣服动画技术运用到网络服装试衣系统中，顾客就可以通过电脑准确地判断衣服尺寸是否合身，这将彻底革新现有的服装销售模式。本文对3D虚拟衣服动画系统的背景和发展现状做了较为详细的阐述，之后对其中的衣服建模方法、动力学方程数值求解算法、碰撞检测、自碰撞检测与响应等关键技术进行深入分析和研究，为3D虚拟衣服动画技术应用到网络服装销售平台做一些探索性工作。

关键词：服装试衣系统,衣服建模,数值求解算法,碰撞检测

**Abstract**

Based on the cloth simulation technology, 3D virtual clothing animation has a great prospect in textile industry, animation, E-commerce, film entertainment and other areas. Particularly in the online dressing systems, by 3D virtual clothing animation, customers can choose their size in the computer. This will give a revolution to the current online clothing sales. This paper expounds the background and history of 3D virtual clothing animation system, discusses in detail the key technologies, such as clothing modeling, numerical integration, collision detection, self-collision detection, and collision responding, and does some exploratory work on applying 3D virtual clothing animation to online sales platform.

Keywords：3D virtual clothing animation, clothing modeling, numerical integration, collision detection

目录

[1 前言 1](#_Toc374381706)

[1.1 研究背景 1](#_Toc374381707)

[1.2 研究现状 2](#_Toc374381708)

[1.3 研究内容 2](#_Toc374381709)

[2 服装建模 4](#_Toc374381710)

[2.1 离散模型 4](#_Toc374381711)

[2.2 连续模型 8](#_Toc374381712)

[3 数值求解 10](#_Toc374381713)

[3.1 显示欧拉法 10](#_Toc374381714)

[3.2 隐式欧拉法 10](#_Toc374381715)

[3.3 梯形法 11](#_Toc374381716)

[3.4 改进的欧拉法 12](#_Toc374381717)

[3.5 龙格-库塔法 12](#_Toc374381718)

[3.6 Verlet积分法 13](#_Toc374381719)

[4 碰撞检测 13](#_Toc374381720)

[4.1 基于层次包围盒的碰撞检测算法 14](#_Toc374381721)

[4.2 基于空间划分的碰撞检测算法 16](#_Toc374381722)

[5 结论 16](#_Toc374381723)

[6 参考文献 17](#_Toc374381724)

# 前言

## 研究背景

三维人体的建模与测量指通过三维扫描，获取人体的体表数字化模型，在虚拟世界里重建并且进行各项指标的测量。随着计算机硬件性能的提高和虚拟现实技术的发展，三维人体的建模与测量在数字化服装工业，医疗，体育运动，可穿戴设备方面有着重要的应用价值与前景，并推动虚拟人在游戏，动画，影视方向的高速发展。

传统的三维激光扫描仪它通过高速激光扫描测量的方法，大面积高分辨率地快速获取被测对象表面的三维坐标数据，通过采集空间点位信息，建立物体的三维影像模型。但是这类设备一般价格昂贵，并且由专业人员来操作，每次扫描成本不菲。比如Cyberware[[1]](#endnote-1)人体扫描系统市面报价为24万元，普通用户很难承受如此价格。并且激光扫描时要求被扫描物体保持静止，这对于人来说是比较困难的，因为人体最多保持3秒左右的相对静止状态[[2]](#endnote-2)。利多台彩色摄像机，立体视觉系统，比如即时定位与地图构建(SLAM)[[3]](#endnote-3)，可以方便的获取实时的三维几何信息，但是其稀疏的三维特征数据对于三维重建来信息量不足，并且计算时间复杂度较高，鲁棒性差以及遮挡问题不易处理[[4]](#endnote-4)。

最近新出现的深度相机，比如TOF[[5]](#endnote-5),Kinect[[6]](#endnote-6)，PrimeSense等，通过计算激光在发射点与物体的飞行的时间来计算距离，如TOF(time of fly),或者结构化光的方法来获取物体表面的点云信息。与传统的扫描设备相比，深度相机的价格便宜，结构小巧、使用方便、能实时捕获物体表面的深度与彩色信息，同立体视觉方法相比,深度相机基于主动发射近红外光原理,计算复杂度低、不易受物体表面纹理及光照变化的影响。不仅如此深度摄像机的使用无需设置额外参数通过简单操作即可扫描物体表面获得点云数据。本文使用Kinect作为扫描仪器,扫描人体获取人体点云,与动辄几十万元的传统扫描设备相比,Kinect的价格大概在千元左右。利用深度相机进行三维扫描,目前有两大问题亟需解决。第一,深度相机普遍存在获取深度信息分辨率低、噪声大的缺陷[[7]](#endnote-7)[[8]](#endnote-8)。

## 研究现状

国际上最早出现的服装 CAD 系统是美国十 1972 年研制的 MARCON 系统。在此基础上，美国 Gerber 公司研制出一系列服装 CAD 产品推向国际市场，成为这类系统的先驱。在随后的短短数十年内有很多系统问世。

国内从 80 年代中期开始，至今也开发出不少服装 CAD 系统中国的航天 710研究所推出了服装 CAD（ComputerAided Design）系统即 ARISA，服装 CAD 系统包括两大部分，电脑设计系统和电脑试衣系统，其中电脑试衣系统采用数码相机将顾客影像摄入，计算机系统中存储了上千种成衣款式任顾客随意挑选，并在电脑上试穿在自己身上，从而选出最佳的服装，但没有进行三维人体测量，因而难以满足顾客的要求。

美国 My Virtual Model 公司开发了一种“My Virtual Model”，用户只要输入身高、体重、肤色以及头发的颜色等数据，按用户的体态特征自动生成的虚拟模特就会出现在屏幕上，试穿用户相中的衣物。

瑞士的 Marilab 实验室是专门从事 3D 服装效果仿真与动画的研究小组，它的研究范围从人脸识别、3D 动态人体模型到动态 3D 着装效果仿真甚至十虚拟环境中的人体着装动画。

通过对目前三维试衣系统的一些应用，可见三维试衣系统在单机软件上的使用已经取得了非常好的效果，但是其在网络上的应用依然处于起步的阶段，不仅从画面的细腻程度，还是模型变化的灵活程度上来说都与单机软件差距很大。所以网络三维试衣系统的发展潜力还是比较大的。

## 研究内容

本文的主要工作，就是要深入研究3D穿衣动画系统中的理论难题和技术障碍，探索更加先进的3D衣服动画模型和数值求解算法，以期在仿真的真实性和实时性等方面进一步取得突破，使得顾客在未来借助电脑可以看到试穿衣服的动画效果，判断衣服尺寸是否合身、搭配是否协调，这对传统的网络服装销售行业将是革命性的推动。

本文拟采取使用物理的布料仿真模型，将现实世界中的布料近似表达为可以量化的物理表示模型，并建立常微分方程组，利用数值计算方法中的理论，近似地求解得到布料在下一时刻的状态。在衣服动画中，除了布料仿真中的必要步骤外，还需要处理衣服和人体间的碰撞检测，基本流程详见图1‑1。

开始

导入模型并初始化

计算质点受力

碰撞检测

自碰撞检测

更新质点位置和速度

结束

结束？

是

图1‑1衣服动画仿真流程

# 服装建模

3D虚拟衣服动画中首先需要建立衣服的物理表示模型。模型特性与真实布料的接近程度，直接关系着仿真效果的逼真程度和性能好坏。布料是一种柔性的可变形体，在各种力的作用下，可以表现出非常丰富的褶皱效果。而且采用不同的纱线材料、不同的编织结构、甚至不同的裁剪方法，其形变特性也各不相同，因此布料仿真在计算机3D虚拟现实技术中是一个极具挑战性的难题。本章将详细论述研究者已经提出的几种布料模型，并进行综合比较各种模型的优缺点。

## 离散模型

布料的离散模型中，布料并不是被当作面状的连续体，而是将布料认为是具有一定密度的网格。每个网格单元用一个平面面片进行填充，以达到看似连续的虚拟布料效果。按照不同的网格划分方法，面片形状可以是三角形、四边形或其他多边形。为了表示上的简单、统一性，布料网格中每个面片的边数一般是相同的。当然，也可以由边数不同的面片组成一片布料。网格的密度越大，一般越能表现出布料复杂的褶皱等细节。

1. 几何模型

在基于几何模型的布料仿真中，并不是利用牛顿力学原理来逼真地表达布料的动态变化和变形规律，而是通过一些由经验总结得到的几何方程来描述布料的拉伸、皱褶等形变特征。几何模型是最早提出的布料仿真模型，由于它的表示简单性和仿真的高效性，今天的实时布料动画中，几何模型仍然具有重要的研究价值和应用前景。

最初的布料建模尝试，始于美国贝尔实验室的Jerry Weil。他在1986年就提出了一种基于几何的悬垂线布料模型[[[9]](#endnote-9)]，首先将布料悬挂在多个约束点上，在重力的作用下，处于两个约束点之间的线段会自然地形成一条悬垂线[[10]](#endnote-10)。悬垂线始终位于铅垂面内，是一条平面曲线，可以用数学公式定义为：

(2‑1)

其中，和是铅垂面在笛卡尔坐标系的坐标轴，而是悬垂线的缩放比率因子。在进行布料仿真时，Weil将织物按照一条条线段来计算。通过计算两个约束点间的悬垂线，并进行迭代细分，就可以得到布料在自由悬挂时的形状和皱褶细节。为了产生简单的布料动画效果，可以通过轻微地移动约束点的位置并迭代求解得到。该模型由于没有涉及到复杂的数学计算，因而仿真性能较高，特别适合于早期计算机硬件性能不高的情况。然而，该模型主要用于仿真静态的布料，一般只适合于仿真布料的悬挂效果[[[11]](#endnote-11)]，难以得到更加复杂、丰富的布料动画状态和变形行为。

基于几何模型的布料仿真，建模简单、性能较高，通常用于生成布料的某些静态形变，在纺织工业和服装CAD等领域得到了广泛应用。但是它忽略了布料本身所具有的物理特性，很难逼真地仿真出布料真实而连续的动画效果。这些局限性使得几何模型在计算机动画仿真中受到了应用限制。

1. 物理模型

基于物理模型的动力学仿真可以追溯到上世纪的80年代后期，它能够真实再现自然界中的各种物理现象，主要涉及刚体、流体、可变形体等多种形态的仿真，更能体现出物体的物理特性。刚体仿真中，关键点在于动力学方程求解、碰撞检测与响应等方面。流体仿真主要用于研究自然界中的一些客观现象，比如流水、烟雾、火焰、爆炸等等。相比而言，可变形体的仿真要复杂得多，如何对可变形体进行物理建模，是仿真的一个关键。而且，可变形体的碰撞检测更加复杂、计算量更大，特别是对于布料、衣服等极易变形的织物。为了防止布料、衣服和人体等其他环境发生穿透现象，需要进行碰撞检测并响应。另外，由于布料是极易发生变形的柔体，为防止发生自穿透等失真现象，还需要进行自碰撞检测。基于物理模型的仿真比基于几何模型的仿真效果更加逼真，是其他传统仿真技术无法比拟的，近年来得到了纺织界和计算机领域更多的关注，并提出了多种基于物理模型的布料变形动画方案。

在基于物理的离散体布料仿真模型中，大部分都是从粒子系统发展而来[[[12]](#endnote-12)]。这些模型中，通常需要引入织物的能量、受力、质量等物理量，将织物各个组成元素认为是具有一定质量的质点(或粒子)，质点的运动看成是力的作用效果，每个元素受到相邻元素和外界物体的约束作用。在基于物理的布料仿真模型中，首先对每个质点进行受力分析，之后利用牛顿力学原理，建立动力学方程组，之后进行数值求解，得到元素在下一时刻的运动状态。一般情况下，质量为的元素受到的合力和其运动状态满足如下动力学方程:

(2‑2)

式中为元素的位移，为时间。

对于布料、衣服等可变形体，最直接的物理建模方法是根据弹塑性理论来研究织物本身的性质，并得到几何形变与受力的对应关系，即描述应变与应力的函数关系。对于理想线性弹簧，应变和应力一般满足Hooke定理：

(2‑3)

式中表示应力，表示应变，为弹簧劲度系数。

Breen等人[[[13]](#endnote-13),[[14]](#endnote-14),[[15]](#endnote-15)]提出了基于粒子模型的悬挂布料仿真方法。他根据织物的微观结构进行空间离散化处理，将织物的纱线交点看成是一个个粒子，即假定织物是由大量的粒子组成的。粒子之间受到力的相互作用，并受到周围环境的影响。Breen根据布料内部的拉伸、弯曲等基本形变关系，为每个粒子定义了能量方程:

(2‑4)

式中表示拉伸能，表示纱线向面片内的弯曲能，表示向面片外的弯曲能，是粒子间的排斥能，是粒子自身的重力势能。该方法按照能量最小化的原则，求解织物的平衡状态，可得到反映织物特征的变形效果。

Breen提出的该模型中，各个能量表达式可通过Kawabata实验来确定[[[16]](#endnote-16)]，有效提高了仿真效果的逼真性，是最接近织物真实特性的布料仿真模型。但其计算量大，而且采用Kawabata实验拟合织物曲线降低了该方法的通用性。另外，Breen方法主要优势在于求解布料的最终稳态，不太适合于动画系统。为此，如何更有效地表达织物的材质特性还有待进一步研究。Eberhardt在Breen的基础上，进一步对粒子系统进行了改进，以便能够用于仿真常见的布料动画[[[17]](#endnote-17)]。

Provot基于四边形网格提出了质点-弹黃模型[[[18]](#endnote-18)]，把布料想象成由一个个质点组成的网格，每个质点的运动符合牛顿力学原理，质点之间用弹簧连接。按照不同的布料形变和质点邻接关系，弹簧被分为三种：结构弹賛、剪切弹簧和弯曲弹簧，分别用于抵抗不同的形变。

质点-弹簧模型简单直观，仿真性能高，也有利于编程实现，在布料仿真、衣服动画等领域得到了广泛的应用。然而，该模型中采用了理想的线性弹簧，这导致在受力集中的区域容易产生过度拉伸现象，严重地影响了仿真效果的真实感。虽然Provot和后来的研究者针对此问题也提出了相应的解决办法，但仍然难以高效地解决大面积范围内多个不同区域的过度拉伸，这个问题在衣服动画中尤为突出。

Volino等基于质点-弹簧模型，利用三角网格变形几何关系提出了一种可以更加精确描述布料特性的模型[[[19]](#endnote-19)]。传统的质点-弹簧模型中，弹簧形变只取决于对应边的长度变化，这使得撤销外力后各个质点难以恢复到初始的位置，这是有违物理常识的。Volino利用三角形面片与边长的形变对应关系，通过线性方程组可以更加精确地求得各边弹簧的实际形变量。

Baraff等人[[[20]](#endnote-20)]将伸缩形变和剪切形变归结在三角面片内，而将弯曲变形归结于共边的两个相邻三角面片上，并采用大步长的半隐式积分法进行数值求解，有效地解决了变形约束、阻尼、碰撞等问题，在稳定性和高效性之间取得了较好的折衷。Choi[[[21]](#endnote-21)]在Baraff的半隐式框架基础上提出了失稳模型(Immediate Buckling Model)，有利于产生更加丰富的布料褶皱，稳定性也有所提高。

以上的物理模型大都是在上世纪提出的，相比几何模型，仿真效果的逼真性得到了显著提高。然而当时的计算机硬件性能不高，使得基于物理模型的布料仿真难以满足对实时性要求较高的衣服动画系统。

1. 混合模型

从上面两节可以看出，几何模型仿真性能高，但是效果不够逼真，难以仿真丰富的布料动画。物理模型可以产生更加逼真的视觉效果，但是需要较大的计算量，难以和当时的计算机硬件性能相适应，制约着布料动画的应用和发展。为此，研究者通过结合几何模型和物理模型各自的优势，得到了多种更加符合当时硬件条件的混合模型。有的研究者在稀疏网格的布料上先用物理方法得到布料的总体变形，再利用几何方法进一步细化出布料的皱褶等细节。还有的研究者则是先用几何方法快速生成布料大致的悬挂形态，之后采用物理的方法进行仿真。

Volino[[[22]](#endnote-22)]提出了一种关于布料皱褶的几何建模方法，综合考虑了仿真变形和皱褶。对于网格顶点的皱招幅度，首先取其相邻边的均值，再通过三角网格刨分就可获得更加细腻的效果。Hadap[[[23]](#endnote-23)]在物理仿真中，结合皱褶图案和局部变形，可在粗粒度网格上生成更丰富的皱裙细节。Oshita的生成皱褶方法[[[24]](#endnote-24)]则通过三角刨分技术向布料网格插入更多细节来实现。

Kang等人[[[25]](#endnote-25),[[26]](#endnote-26)]先基于物理模型仿真得到关键节点，之后在几何处理阶段采用皱裙三次样条曲线插值得到骨架节点，进而由骨架节点得到内部节点，有效地提高了布料仿真的真实感。皱裙三次样条曲线的公式如下：

(2‑5)

式中是两个控制点间的三次样条曲线，是和控制点相关的函数，、是分别与、弹賛初始长度相关的函数，为布料的法向量。

Cordier等人[[[27]](#endnote-27)]则针对衣服仿真提出了相应的混合建模方法。对于衣服的紧密区域、松散区域、浮动区域分别采用不同的模型进行仿真，有效降低了系统的计算量。

混合模型有效地解决了当时硬件性能对布料动画的限制，使得仿真性能和视觉效果在实时性和真实性之间取得了较好的折衷。近年来，随着计算机硬件水平的不断发展和计算机仿真研究的深入，以及人们对仿真效果逼真性的不断追求，越来越多研究者又重新回归到基于物理的布料建模。在服装CAD/CAM等对精度要求更高的行业，一些研究者甚至采用了连续体模型，以进一步提高仿真结果的精确度。

## 连续模型

布料的连续模型将织物看成连续的薄膜状物体，是较早被采用的动力学模型之一。布料的连续模型主要基于弹性力学原理进行建模，根据布料的应变-位移关系建立几何方程，再根据应力-应变关系建立物理方程，之后结合给定的边界条件求解微分方程组[[[28]](#endnote-28)]。在布料的连续模型中，涉及到的物理量和布料空间的网格划分并没有直接关系，这有利于用户根据具体的需求选择布料网格单元的密度分布，以满足仿真的性能和逼真性要求。鉴于这个优势，很早时期就有研究者探索布料的连续模型。

Feynman[[[29]](#endnote-29)]提出了悬垂布料的静力学模型，并由此仿真得到了布料在悬垂状态下的效果。Feynman的出发点是，布料达到稳态时的总能量最小。由此，他根据弹性板的性质推导出了布料质点的总能量方程：

(2‑6)

即质点的总能量由弹性势能、弯曲势能、重力势能组成，、、分别为各自的系数，该模型计算复杂、难以表达织物的特性，很少被实际广泛应用。

1987年，Terzopoulos等人利用连续介质力学的理论，提出了弹性变形模型[[[30]](#endnote-30)]。该模型将变形体看作是由大量连续质点组成的集合，可以仿真三维空间中的曲线、曲面等多种柔性变形体，比如窗帘、橡胶等柔性材料的变形过程，是一种仿真弹性体的普遍方法，使得基于物理的布料动画仿真成为可能。该模型采用了基于拉格朗日形式的方程：

(2‑7)

式中表示变形在当前点处的质量密度，而是相应的粘滞系数，是时刻该点的坐标。是受到的合外力，是变形势能。对于布料，可以将其假定为变形的曲面，并利用张量和曲率定义变形势能。用于布料仿真的曲面公式如下：

(2‑8)

式中和表示弹性系数。通过有限差分法沿着空间坐标轴对非线性连续偏微分方程进行离散化，得到一组常微分方程。再通过隐式积分法沿着时间轴方向进行数值求解，求得布料在每个时间的运动状态。由于布料等大多数可变形体并不是理想的弹性体，Terzopoulos在后续的研究工作中[[[31]](#endnote-31),[[32]](#endnote-32)]，又引入了布料的粘弹性、弹塑性、断裂处理等非弹性变形模型，更加符合弹性力学的理论基础。Carignan等人[[[33]](#endnote-33)]在此基础上，研究了基于虚拟人体的衣服制作与动画技术。但是这些方法需要求解巨型系数矩阵，计算量非常大，其应用和发展严重地受到了当时硬件性能的限制。

和Terzopoulos不同，Volino等人[[[34]](#endnote-34)]提出了另一种弹性变形模型。该模型基于连续弹性力学原理，可以用于常见的三角网格对象。三角平面内包含了拉伸变形和剪切变形，可基于局部二维参数化坐标计算出每个质点的弹力。而平面外则定义了扭转弯曲变形，对应的应变需要基于曲面曲率进行估计得到。

布料是一种非线性的弹性体，这导致难以直接求得基本微分方程组精确的解析解，一般都是借助于数值积分的方法，得到近似解[[[35]](#endnote-35)]。除了传统的有限差分法，有限单元法是另一种广泛使用的偏微分方程的数值方法[[[36]](#endnote-36),[[37]](#endnote-37)]。有限单元法基于弹性力学中的变分原理，是对里兹法的进一步发展，受到了工程界的高度重视，可广泛用于土木、水利、机械、动力等多种领域，是计算机辅助工程(Computer Aided Engineering， CAE)和数值仿真的重要组成部分。随着布料仿真技术的发展和应用需求的扩大，研究者逐渐开始将有限单元法用于布料仿真中的数值求解。由于布料是大面积的曲面，因此这些有限单元法大都是基于Simo几何准确的薄壳理论[[[38]](#endnote-38),[[39]](#endnote-39),[[40]](#endnote-40)]进行布料仿真。

Eischen等人[[[41]](#endnote-41)]先釆用了几何准确的非线性薄板基本原理对布料建模，之后基于四边形曲边的有限单元法求解偏微分方程。Cirak提出了基于细分基函数的有限单元法[[[42]](#endnote-42)]。通过细分基函数，板壳单元之间能够保证C1连续性，但只适合于静态布料的仿真。直到Cirak在[[[43]](#endnote-43)]中对该方法进行扩展，使得可以用于生成有限变形的布料动画。Etzmuss等人[[[44]](#endnote-44)]提出了一种基于平面应力假定的线性有限单元法，将弯曲变形独立于平面内的拉伸变形和剪切变形，并采用转动应变来表示任意的刚度变换，通过隐式积分法进行数值求解，可以用于布料的动态仿真。Thomaszweski[[[45]](#endnote-45)]在Etzmuss的基础上，提出了基于细分法的有限单元法用于布料仿真。

有限单元法可以用于解决现实世界中各种复杂的物理问题，但是计算量巨大，难以满足布料仿真的实时性要求。特别是在复杂的交互式衣服动画中，需要处理碰撞和自碰撞检测，使得有限单元法变得更加复杂。

虽然连续模型可以仿真出更加逼真的布料动画，但是会严重地降低系统的性能，因此主要被用于对真实感要求非常高的离线仿真中。而且连续模型没有考虑到纱线的编织结构等微观特征，难以逼真地用于仿真更加松弛的毛衣、围巾等织物。本文的最终目的是为未来的交互式网络虚拟试衣系统提供解决方案，因此对系统的实时性能要求较高。以目前的计算机硬件水平来看，基于离散的动力学物理模型进行衣服仿真是一种更好的选择。

# 数值求解

建立了布料、衣服的物理表示模型和动力学方程组后，还需要对其进行求解。在实际问题中，很少可以利用解析的方法在计算机上求得精确解。相反，对于大部分问题，一般都需要利用数值的方法进行迭代，得到一个较为准确的近似值。如何设计出更加高效的数值算法来求解这些动力学方程，对衣服动画系统的性能和稳定性具有至关重要的作用，本章讨论了各种常见数值算法的优劣。

在布料仿真中，表达衣服质点运动的问题常常都可以归结为求解常微分方程的初值问题：

(3‑1)

## 显示欧拉法

显式欧拉法又称前向欧拉法(Forward Euler Method)，基本思想如下：利用公式(3‑1)的解上一点(,)的切线斜率等于值的特性，可以用线段近似表达连续的曲线，一般情况下，公式如下：

(3‑2)

进一步推导，即可得到欧拉公式

(3‑3)

显示欧拉法属于一阶数值微分方法，其局部截断误差约为：

(3‑4)

由于该方法的误差较大，为了获得算法的稳定性，时间步长不能太大，这也是显示欧拉法没有被研究者在布料仿真中广泛采用的原因之一。

## 隐式欧拉法

显式欧拉法的误差较大，导致布料仿真中的时间步长必须很小才能保证数值求解的稳定性，为此研究者又提出了隐式欧拉法，即后向欧拉法(Backward Euler Method)。和显式欧拉法不同，在隐式欧拉法中，并不是根据前一点处的切线近似求解出后一点处的坐标，而是借助后向差商即点处的切线来求解，进一步推导，即可得到隐式欧拉公式：

(3‑5)

由于在(3‑5)的左右都含有未知项，为此需要通过迭代的方法求解，比显示欧拉法要复杂很多。迭代的本质，就是逐步显式化。

一般，首先利用显示欧拉法求解出迭代初始值：

(3‑6)

之后将此初值代入(3‑5)使之转化为显示方法，可得到第一次迭代的近似值：

(3‑7)

之后，用新的近似值代入(3‑5)，继续迭代可得：

(3‑8)

如此反复，直到满足极限条件：

(3‑9)

式中为某一极小值，一般可取。

那么，对应的局部截断误差为：

(3‑10)

由于隐式欧拉法具有无条件的稳定性，因此可以采用较大的时间步长求解衣服质点在时刻的运动状态。

## 梯形法

通过比较显式欧拉法和隐式欧拉法的误差(3‑4)、(3‑10)，若对其进行算术平均，则可以得到更加精确的梯形法：

(3‑11)

假设显式欧拉法求得点处的近似坐标为，相应的隐式欧拉法得到的近似值为，由于、的误差大小相当、符号相反，那么和的中点会进一步接近真实点。

梯形法也是一种隐式方法，和隐式欧拉法一样，需要迭代求解：

(3‑12)

## 改进的欧拉法

梯形法虽然提高了精度，但是计算复杂。实际上，可以先通过显式欧拉公式得到一个初步近似的预测值，之后再用梯形公式(3‑12)得到一个更为精确的校正值，这就是改进的欧拉法的基本思想。具体公式如下：

(3‑13)

也就是说，只需要用公式(3‑13)迭代校正一次，就可得到一个较为精确的，即有

(3‑14)

相比显示欧拉法而言，改进的欧拉法可以明显的提高精度。

## 龙格-库塔法

龙格-库塔法(Runge-Kutta Method)源于泰勒级数法，其基本思想可由改进的欧拉法得到。公式(3‑14)可以进一步表示为：

(3‑15)

即改进的欧拉法实质上是以两点的斜率均值作为斜率值。那么，通过在和之间预测出多个点的斜率值并进行加权平均，则可以得到精度更高的龙格-库塔法。

龙格-库塔法是一种高阶的数值积分法，分为显式和隐式两种，有二阶龙格-库塔法、三阶龙格-库塔法、四阶龙格-库塔法等等。阶数越高，一般误差越小，但复杂度也越高，因此以四阶龙格-库塔法最为常用。

四阶龙格-库塔法的计算公式有很多种格式，常用的经典格式如下：

(3‑16)

四阶龙格-库塔法的计算误差远小于显式欧拉方法，但依然属于显式方法，同样无法避免算法的不稳定性。

## Verlet积分法

对于布料仿真，由于外力通常较小，采用较大步长的显式积分法也能保持较好的稳定性。但是在引入碰撞检测的前提下，可能会导致布料质点发生振荡，使得仿真系统不再保持数值稳定。Verlet方法[[[46]](#endnote-46)]是一种更加稳定的数值求解器，主要也是通过泰勒展开式推算的得到的。首先进行前向展开：

(3‑17)

之后，再将泰勒公式进行后向展开，得到：

(3‑18)

(3‑17)和(3‑18)两式相加，得到

(3‑19)

(3‑19)即为Verlet公式，是一种显示三阶微分求解器。它可用于求解质点运动的轨迹，通过计算上一时间步和下一时间步，精度更高。由于Verlet方法中不涉及质点速度的计算，累计误差小、运算量更少。

# 碰撞检测

碰撞检测是虚拟仿真中另一个主要的性能瓶颈，和仿真系统的实时性密切相关。对于布料、衣服等可变形体的仿真，除了需要检测它们是否和周围的其他物体对象发生碰撞外，还需要检测是否和自身发生了自碰撞，这使得可变形体的碰撞检测更加复杂，也是我们需要研究中的重点。

简单地来说，碰撞检测就是通过某种算法，有效地检测出发生了碰撞的物体对、以及具体的碰撞点位置，以保证物体间具有正确的空间几何关系和特性。对于物体间的相互碰撞，由于物体表面形状的不规则性或者空间物体对象数量的密集性，若采用原始的两两检测方法，算法的复杂度将会达到，这将会严重影响仿真系统的实时性能。为此我们在本章主要研究如何改进衣服动画中衣服和人体模特等外界环境之间的相互碰撞检测与响应处理，在下一章中将进一步论述布料、衣服等织物的自碰撞检测与响应。

## 基于层次包围盒的碰撞检测算法

基于层次包围盒的碰撞检测算法就是出于这样的出发点提出的，其基本思想是：首先用具有一定规则形状的包围盒将物体或多个物体包围起来。通常，包围盒的体积略大于物体的体积。当且仅当周围的其他物体和该包围盒相交时，才需要进一步判断是否和包围盒中的物体对象发生了碰撞。通过这样的方法，可以快速地排除那些不可能发生碰撞的物体。

层次包围盒方法中，通常采用树形结构进行组织，在该树形结构中，父节点对应的包围盒体积最大，它包围了所有子节点对应的包围盒。根据碰撞检测的具体要求，包围盒中可以包围整个物体对象，也可以只包围某个物体对象的一些组成元素，比如体元、面片、顶点等等。物体对象的空间位置可能会随着时间变化而发生改变，特别是对于可变形体，其形状也会随着组成元素的位置变化而改变，这就需要对层次包围盒树形结构进行定期更新。对于形变过大的情况，由于原有的树形拓扑关系已经不能准确反映物体或组成元素的真实空间位置分布情况，导致碰撞检测的精度和性能大大下降。此时需要重新建立新的树形结构，以确保碰撞检测的有效性、高效性。

按照树形结构中每个包围盒节点的形状不同，可以将层次包围盒方法分为包围球(Sphere)[[[47]](#endnote-47),[[48]](#endnote-48),[[49]](#endnote-49),[[50]](#endnote-50),[[51]](#endnote-51)]、AABB (Axis Aligned Bounding Boxes) [[[52]](#endnote-52),[[53]](#endnote-53),[[54]](#endnote-54)]、OBB(Oriented Bounding Box)[[[55]](#endnote-55)]、k-DOP (k Discrete Orientation Polytopes)[[[56]](#endnote-56),[[57]](#endnote-57)]、凸块[[[58]](#endnote-58)]等多种。

1. 包围球

最为直观、结构简单，就是将物体对象或者组成元素包含在一个具有一定半径的球体中，由于球体在形状上的特殊性，可以非常容易地判别出两个包围球是否发生了相交。若是两个包围球的圆心距离小于他们的半径之和，则说明这两个包围和相交，即

(4‑1)

式中、分别为两个包围球的圆心位置向量，、分别为两个包围球各自的半径。此时表面两个包围球中的物体对象具有潜在发生碰撞的可能性，需要进一步更加细致地检测两包围球内部的物体元素是否发生了碰撞。若两个包围球的圆心距离等于他们的半径之和时，说明两包围球正好发生了轻微接触，在下一时刻有可能会相交。若两个包围球的圆心距离大于他们的半径之和，则表明这两个包围球里的物体之间不可能发生碰撞，无需进一步检测。正是因为包围球具有构造简单、存储空间少、相交测试算法性能高的优势，至今仍被广泛应用在各种仿真研究中。然而，在大多情况下，物体对象很难充满整个包围球空间，物体对象的轮廓和包围球之间会有很大的空隙。

1. AABB包围盒

AABB包围盒本质上是一个正好包围住物体对象的最小长方体，而且互为正交的表面分别平行于笛卡尔系的、、三个坐标轴，基于这样的特性，判断两个AABB盒是否相交的充分必要条件就是，两个包围盒在笛卡尔坐标系中三个坐标平面上的投影都相交。也就是说了，只要有一个坐标平面上的投影不相交，就可以肯定这两个AABB盒子一定不相交。AABB盒的相交测试算法同样简单易行，因而得到了广泛的应用。不过在一些特殊的情况下，AABB盒也不能紧密地包围物体对象，为了提高碰撞检测的正确率，研究者进一步提出了 OBB盒。

1. OBB盒

OBB盒类似于AABB，也是一个对面相互平行的六面体，而且各面互为正交。不同的是，OBB盒的表面不再平行于笛卡尔坐标系的、、三个坐标轴。OBB盒是基于分离轴理论提出的，其基本思想就是为了进一步提高检测精度，需要找出最佳的包围盒平面方向，使得包围盒的体积最小。由于OBB盒的紧密程度比AABB要好，因而检测精度更高。然而，OBB树的构造和更新复杂、低效，所占据的存储空间更多，相交测试难度也大，导致其总体性能并不比AABB具有明显的优势。

1. k-DOP包围盒和凸包

k-DOP包围盒则是由个平面构成的包围体（>6，且为偶数），而且对面相互平行（共对互相平行的平面），k-DOP包围盒实质上是对AABB、OBB盒的进一步扩展，也就是说，OBB盒是k-DOP在时的特殊情况。相比OBB，k-DOP盒更加紧密，因而测试精度更高。和OBB盒的相交测试方法一样，若两个k-DOP盒在所有的投影面上都重合，则说明一定发生了碰撞；若在某个投影面上的投影互不重合，则一定没有发生碰撞。

凸包类似于k-DOP包围盒，只是不要求面的个数必须为偶数，而且对面也不一定相互平行。由于其构造方式和碰撞判别更加复杂，实际被使用的情况相对较少。

## 基于空间划分的碰撞检测算法

针对层次包围盒方法的不足，研究者提出了基于空间划分(Spatial Subdivision)的碰撞检测方法[[[59]](#endnote-59),[[60]](#endnote-60),[[61]](#endnote-61)]，可以用于动态随机变化的大型场景。

空间划分法按照划分方式可以分为两种：均匀划分和非均匀划分。最为常见是均匀划分[[[62]](#endnote-62),[[63]](#endnote-63)]，就是将场景空间按照固定间隔的平行面进行均匀划分，得到的每个子空间大小一致[[[64]](#endnote-64)]。其基本思想就是，首先将包含所有物体对象的整个仿真场景空间按照笛卡尔坐标系的、、三个轴方向进行平行划分，得到由紧密排列的子空间(Subspace)构成的阵列。之后，用三维数组存储这些子空间的相关信息，比如子空间的边界、内部物体对象等等。以后，每个物体对象只需要和所属子空间及周围邻接的26个子空间中的元素通过判断相交情况进行碰撞检测，即可知道是否需要做出碰撞响应，以避免发生进一步的穿透等失真现象。均勾划分的优势在于，每个物体对象或者组成元素只需要按照自身的空间位置关系就可以迅速定位出自己所在的子空间的索引编号，非常适合物体对象高速动态变化的大型场景，比如涌动的人群、空中密集的战斗机群等等。

相对而言，非均匀划分并不是等间隔地划分空间场景，而是根据物体对象的位置和密度分布确定划分的边界和方向，常见的具体方法有BSP树[[[65]](#endnote-65)]、八叉树[[[66]](#endnote-66),[[67]](#endnote-67)]和Kd树[[[68]](#endnote-68)]等等。

空间划分法的优势是在高速动态变化的虚拟场景中，算法依然可能保持比BVH法更好的性能，无需频繁地重建空间结构。问题在于，在处理不同虚拟场景、物体对象具有不同形状和大小时，空间划分法很难保持一致的检测性能。

# 结论

3D虚拟衣服动画技术具有广阔的应用前景，已成为国内外研究的一个热点，而且取得了一定的成果。但在仿真效果的真实性与实时性方面还有待提高，且大多还停留在实验室阶段，缺乏广泛的实际应用系统。本文对3D虚拟衣服动画系统的背景和发展现状做了较为详细的阐述，对相关的关键技术进行了深入分析和研究，努力将虚拟试衣技术应用到网络中，实现在线试衣系统，革新传统的服装试穿方式，对新兴的网络服装销售行业起到进一步的推动作用，为3D虚拟衣服动画技术应用到网络服装销售平台做一些探索性工作。

# 参考文献

1. [] Cyberware. The Cyberware Whole Body Color 3D Scanner.[EB/OL]. (2012) [2013-7-1].http://www.cyberware.com/products/scanners/wbx.html [↑](#endnote-ref-1)
2. D N Stern. The present moment: In psychotherapy and everyday life[M], Norton Co, New York, USA, 2004. Chen Y, Cheng Z Q.Personalized avatar capture using two Kinects in a moment [C]//SIGGRAPH Asia 2012 Posters. USA: ACM, 2012: 3. [↑](#endnote-ref-2)
3. A. J. Davison. Real-time simultaneous localisation and mapping witha single camera. In Proceedings of the International Conference onComputer Vision (ICCV), 2003. 1, 2.2 [↑](#endnote-ref-3)
4. Y. M. Kim, C. Theobalt, J. Diebel, J. Kosecka, B. Miscusik, S. Thrun.Multi-view image and TOF sensor fusion for dense 3D reconstruction. IEEEInternational Conference on Computer Vision Workshops (ICCV Workshops),Kyoto, 2009: 1542-1549 [↑](#endnote-ref-4)
5. SR4000 user manual, ed: MESA Imaging AG, 2010 [↑](#endnote-ref-5)
6. Microsoft Kinect. www.xbQX.com/Kinect [↑](#endnote-ref-6)
7. Y. Cui, S. Schuon, D. Chan, S. Thrun, C. Theobalt. 3D shape scanning with atime-of-flight camera. IEEE Conference on Computer Vision and PatternRecognition (CVPR),San Francisco, 2010: 1173-1180 [↑](#endnote-ref-7)
8. M. Zollh6fer,M. Martinek,G. Greiner,M. Statnminger, J. SiiBmuth.Automatic reconstruction of personalized avatars fi\*om 3D face scans.Computer Animation and Virtual Worlds, 2011,22(2): 195-202 [↑](#endnote-ref-8)
9. . [↑](#endnote-ref-9)
10. [↑](#endnote-ref-10)
11. [↑](#endnote-ref-11)
12. []W.T. Reeves.Particle systems-a technique for modeling a class of fuzzy objects. ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH|83), 1983,2:91-108. [↑](#endnote-ref-12)
13. []D.E. Breen, D.H. House, RH. Getto.A physically-based particle model of woven cloth.TheVisual Computer.1992, 8:264-277. [↑](#endnote-ref-13)
14. []D. Breen, D. House, M. Wozny. Predicting the drape of woven cloth using interactingParticles [A]. Proceedings of ACM SIGGRAPH ’94. 1994:365-372. [↑](#endnote-ref-14)
15. []D. Breen, D. House, M. Wozny. A Particle-based model for simulating the draping behaviorof woven cloth.Textile Research Journal. 1994, 64( 11 ):663-685. [↑](#endnote-ref-15)
16. []S. Kawabata. The standardization and analysis of hand evaluation (2nd Edition). Osaka:Textile Machinery Society of Japan, 1980. [↑](#endnote-ref-16)
17. []B. Eberhardt, A. Weber, W. Strasser. A fast, flexible,particle-system model for cloth draping.IEEE Computer Graphics and Applications, 1996, 16(5):52-59. [↑](#endnote-ref-17)
18. []X. Provot. Deformation constraint in a mass-spring model to describe rigid cloth behavior.Proceedings of Graphics Interface. 1995,147-154. [↑](#endnote-ref-18)
19. []R Volino, N. Magnenat-Thalmann. Developing simulation techniques for an interactiveclothing system.IEEE International Conference on Virtual Systems and Multimedia. 1997,109-118. [↑](#endnote-ref-19)
20. []D. Baraff,A. Witkin. Large steps in cloth simulation. Computer Graphics (SIGGRAPH ’98).1998,43-54. [↑](#endnote-ref-20)
21. []K.J. Choi, H.S. Ko. Stable but responsive cloth.ACM Transactions on Graphics. 2002,21(3):604-611. [↑](#endnote-ref-21)
22. []P. Volino, N. Magnenat-Thalmann. Fast geometric wrinkles on animated surfaces.In WSCG'99. 1999. [↑](#endnote-ref-22)
23. []S. Hadap, E. Bangerter, P. Volino, N. Magnenat-Thalmann. Animating wrinkles on clothes.Proceedings of IEEE Visualization. 1999:175-182. [↑](#endnote-ref-23)
24. []M. Oshita,A. Makinouehi. Real-time cloth simulation with sparse particles and curved faces.Proceedings of Computer Animation. 2001:220-227. [↑](#endnote-ref-24)
25. []Y.M. Kang, J.H. Choi, H.G. Cho, D.H. Lee. An efficient animation of wrinkled cloth withapproximate implicit integration.The Visual Computer. 2001, 17(3):147-157. [↑](#endnote-ref-25)
26. []Y.M. Kang, H.G. Cho. Bilayered approximate integration for rapid and plausible animation ofvirtual cloth with realistic wrinkles.Proceedings of Computer Animation. 2002, 203-214. [↑](#endnote-ref-26)
27. [] F. Cordier, N. Magnenat-Thalmann. Real-time animation of dressed virtual humans.Computer Graphics Forum. 2002, 21(3):327-336. [↑](#endnote-ref-27)
28. [] 徐芝纶.弹性力学(第四版). 高等教育出版社.2006. [↑](#endnote-ref-28)
29. []C. Feynman. Modeling the appearance of cloth [D]. Cambridge, MA, USA: MassachusettsInstitute of Technology, 1986. [↑](#endnote-ref-29)
30. [] D. Terzopoulos, J. Piatt, A. Barr, K. Fleischer. Elastically defonnable models.ComputerGraphics. 1987,21(4):205-214. [↑](#endnote-ref-30)
31. []D. Terzopoulos, K. Fleischer. Deformable models.The Visual Computer. 1988, 6(4):306-331. [↑](#endnote-ref-31)
32. []D. Terzopoulos, K. Fleischer. Modeling inelastic deformation: viscolelasticity, plasticity,fracture. Computer Graphies (ACM SIGGRAPH ’88). 1988, 269-278. [↑](#endnote-ref-32)
33. []M. Carignan, Y. Yang, N. Magnenat-Thalmann. Dressing animated synthetic actors withcomplex deformable clothes. Computer Graphics (ACM SIGGRAPH '92). 1992,99-104. [↑](#endnote-ref-33)
34. []P. Volino, M. Courchesne, N. Magnenat-Thalmann. Versatile and efficient techniques forsimulating cloth and other deformable objects. Computer Graphics (ACM SIGGRAPH,95).1995, 137-144. [↑](#endnote-ref-34)
35. [] 李庆扬, 王能超,易大义.数值分析. 武汉:华中科技人学山版社.2006. [↑](#endnote-ref-35)
36. [] 王焕定,焦兆平.有限单元法基础.北京:高等教育出版社.2002. [↑](#endnote-ref-36)
37. [] 王勖成.有限单元法.北京:清华大学出版社.2003. [↑](#endnote-ref-37)
38. []J.C. Simo, D.D. Fox, M.S. Rifai. On a stress resultant geometrically exact shell model, Part I:Formulation and optimal parameterization. Computer Methods in Applied Mechanics andEngineering.1989, 72:267-302. [↑](#endnote-ref-38)
39. []J.C. Simo, D.D. Fox, M.S. Rifai. On a stress resultant geometrically exact shell model, Part II:The linear theory, computational aspects. Computer Methods in Applied Mechanics andEngineering.1989, 73:53-92. [↑](#endnote-ref-39)
40. []J.C. Simo, D.D. Fox, M.S. Rifai. On a stress resultant geometrically exact shell model, PartIII: Aspects of the nonlinear theory. Computer Methods in Applied Mechanics andEngineering.1990, 79:21-70. [↑](#endnote-ref-40)
41. [] J.W. Eischen, S. Deng, T.G. Clapp. Finite-element modeling and control of flexible fabricparts.IEEE Computer Graphics and Applications. 1996,16(5):71-80. [↑](#endnote-ref-41)
42. [] F. Cirak, M. Ortiz, P. Schroder. Subdivision surfaces: A new Paradigm for thin-shellfinite-element analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering.2000,47:2039-2072. [↑](#endnote-ref-42)
43. []F. Cirak, M. Ortiz. Fully CI-conforming subdivision elements for finite deformation thin-shell analysis. Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001,51:813-833. [↑](#endnote-ref-43)
44. []O. Etzmuss, M. Keckeisen, W. Straper. A fast finite element solution for cloth modelling.Proceedings of Pacific Graphics. 2003:244-251. [↑](#endnote-ref-44)
45. [] B. Thomaszweski, M. Wacker, W. Straper. A consistent bending model for cloth simulationwith corotational subdivision finite elements.Proceedings of the 2006 ACM SIGGRAPH /EurographicsSymposiumon Computer animation. 2005:107-116. [↑](#endnote-ref-45)
46. [] L. Verlet. Computer ‘experiments’ on classical fluids: I. Thermo dynamical properties ofLennard-Jones molcules. Physical Review. 1967, 159(1):98-103. [↑](#endnote-ref-46)
47. [] C. Mendoza, C. O'Sullivan. Interruptible collision detection for deformable objects.Computers & Graphics. 2006,30(3):432-438. [↑](#endnote-ref-47)
48. []P.M. Hubbard. Interactive collision detection.Proceedings of IEEE Symposium on ResearchFrontier in Virtual Reality. 1993, 24-31. [↑](#endnote-ref-48)
49. []P.M. Hubbard. Real-time collision detection and time-critical computing.The First Workshopon Simulation and Interaction in Virtual Environments. 1995, 92-96. [↑](#endnote-ref-49)
50. []I.J. Palmer, R.L. Grimsdale. Collision detection for animation using Sphere-Trees. ComputerGraphics Forum, 1995, 14(2):105-116. [↑](#endnote-ref-50)
51. [] C. O'Sullivan, J. Dingliana. Realtime collision detection and response using sphere-trees.Proceedings of the Spring Conference on Computer Graphics. 1999,83-92. [↑](#endnote-ref-51)
52. [] G. van den Bergen. Efficient collision detection of complex deformable models using A ABB trees.Journal of Graphics Tools. 1997, 2⑷:1-14. [↑](#endnote-ref-52)
53. []G. Zachmann. Real-time and exact collision detection for interactive virtual prototyping.Proceedings of the 1997 ASME Design Engineering Technical Conferences. 1997:1-10. [↑](#endnote-ref-53)
54. [] T. Larsson, T.A. Moller. Collision detection for continuously deforming bodies’Proceedingsof Eurographics’ 01. 2001,325-333. [↑](#endnote-ref-54)
55. [] S. Gottschalk, M.C.Lin, D. Manocha. OBB-Tree: A hierarchical structure for rapidinterference detection. Computer Graphics (SIGGRAPH ’96). 1996, 171-180. [↑](#endnote-ref-55)
56. [] J.T. Klosowski, M. Held, J.S.B. Mitchell, H. Sowizral, K. Zikan. Efficient collision detectionusing bounding volume hierarchies of k-DOPs.IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 1998,4(1):21-37. [↑](#endnote-ref-56)
57. [] G. Zachmann. Rapid collision detection by dynamically aligned DOP-Trees. Proceedings of IEEE Virtual Reality Annual International Symposium. 1998,90-97. [↑](#endnote-ref-57)
58. []S.A. Ehmann, Lin M C. Accurate and fast proximity queries between polyhedra using convex surface decomposition. Computer Graphics Forum. 2001, 20(3):500-510. [↑](#endnote-ref-58)
59. []W. Bouma, G. Vanecek. Collision detection and analysis in a physically based simulation. Proceedings of Second Eurographics Workshop on Animation and Simulation. 1991, 191-203. [↑](#endnote-ref-59)
60. []A. Garcia-Alonso, N. Serrano, J. Flaquer. Solving the collision detection problem. IEEE Computer Graphics and Applications. 1994,13(3):36-43. [↑](#endnote-ref-60)
61. []W.A. McNeely, K.D. Puterbaugh, J.J. Troy. Six degree-of-freedom haptic rendering using voxel sampling. ACM SIGGRAPH '99. 1999,401-408. [↑](#endnote-ref-61)
62. []D.L. Zhang. M.M.F. Yuen. Collision detection for clothed human animation. Proceedings of the 8th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications (PG '00). 2000,328-337. [↑](#endnote-ref-62)
63. []D.L. Zhang. M.M.F. Yuen. A coherence-based collision detection method for dressed human simulation.Computer Graphics Forum. 2002, 21(1):33-42. [↑](#endnote-ref-63)
64. []G. Turk. Interactive collision detection for molecular graphics [M]. University of North Carolina at Chapel Hill 1989,1-35. [↑](#endnote-ref-64)
65. []B.F. Naylor, J.A. Amanatides, W.C. Thibault. Merging BSP trees yield polyhedral modeling results. ACM SIGGRAPH ’90. 1990,24(4):115-124. [↑](#endnote-ref-65)
66. [] H. Samet. Spatial data structures: quadtree, octrees and other hierarchical methods. Addison Wesley, 1989. [↑](#endnote-ref-66)
67. [] K. Hamada, K. Hori. Octree-based approach to real-time collision-free path planning for robot manipulator. 4th International Workshop on Advanced Motion Control. 1996, 705-710. [↑](#endnote-ref-67)
68. []T. Foley, J. Sugennan. KD-tree acceleration structures for a GPU raytracer. Proceedings of the ACM SIGGRAPH / EUROGRAPHICS conference on Graphics hardware. 2005,15-22. [↑](#endnote-ref-68)