4 Exercices

Exercice 4.1 Deux variables booléennes.

1. Simplifier chacune des expressions suivantes par le calcul (en utilisant les propriétés du cours).
   (a) $a + b + \overline{a}\,\overline{b}$
   (b) $a + \overline{a}b$
2. Reprendre les questions précédentes en utilisant cette fois un tableau de Karnaugh, et vérifier la cohérence des résultats obtenus.

Exercice 4.2 1. Représenter par un tableau de Karnaugh les expressions

   (a) $A = \overline{a}b + \overline{b}c + a\overline{c}$
   (b) $B = a\overline{c} + \overline{b}c + abc$

2. En déduire les expressions de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Exercice 4.3 On donne l'expression $A = abc + \overline{a}c + b\overline{c}$

1. Représenter par un tableau de Karnaugh l'expression A ; en déduire une forme simplifiée de A.
2. Retrouver ce résultat par le calcul.

Exercice 4.4 On donne le tableau de Karnaugh suivant (les lignes représentant a et $\overline{a}$, et les colonnes les produits bc, $b\overline{c}$, $\overline{b}\,\overline{c}$, et $\overline{b}c$) :

1. Écrire une expression booléenne représentée par ce tableau utilisant une somme de cinq termes.
2. Déterminer en utilisant le graphique une nouvelle écriture de cette expression ne comprenant que trois variables booléennes choisies parmi a, b, c et leurs complémentaires.
3. Retrouver ce dernier résultat par le calcul.

Exercice 4.5 Le directeur des ressources humaines (DRH) d'une mairie doit recruter une personne pour un travail concernant la circulation des voitures dans le centre ville.
Pour faire son choix, le DRH met en place trois critères de sélection concernant les connaissances en informatique, l'expérience dans le domaine concerné et le suivi d'un stage de formation spécifique.
La personne recrutée devra : 3 possibilités

- avoir des connaissances informatiques et de l'expérience dans le domaine concerné ; $a \times b$
- \+ ou ne pas avoir de connaissances informatiques mais avoir suivi un stage de formation spécifique ; $\bar{a}.c$
- \+ ou ne pas avoir d'expérience dans le domaine concerné, mais avoir suivi un stage de formation spécifique. $\bar{b}c$

On définit les trois variables booléennes a, b et c suivantes :

- $a = 1$ si la personne possède des connaissances informatiques, $a = 0$ sinon ;
- $b = 1$ si la personne possède de l'expérience dans le domaine concerné, $b = 0$ sinon ;
- $c = 1$ si la personne a suivi un stage de formation spécifique, $c = 0$ sinon.

1. Décrire la situation correspondant au produit abc.
2. Définir l'expression booléenne E correspondant aux critères de sélection du DRH.
3. À l'aide d'un diagramme de Karnaugh ou d'un calcul booléen, trouver une écriture simplifiée de l'expression booléenne E sous la forme d'une somme de deux termes.
4. Écrire une phrase donnant les conditions de recrutement correspondant à la simplification précédente de l'expression booléenne E.

Exercice 4.6 Un professeur de BTS SIO souhaite sélectionner un langage de programmation.
Pour cette sélection, il s'impose les critères suivants : le langage doit :

— exister depuis plus de 3 ans et être utilisé en entreprise, ou

— ne pas exister depuis plus de 3 ans et être gratuit, ou

— être gratuit et être utilisé en entreprise.

Pour un langage donné, on définit trois variables booléennes a, b et c de la manière suivante :

— $a = 1$ si le langage existe depuis plus de 3 ans, et $a = 0$ sinon ;

— $b = 1$ si le langage est utilisé en entreprise, et $b = 0$ sinon ;

— $c = 1$ si le langage est gratuit, et $c = 0$ sinon.

1. Écrire une expression booléenne E qui traduit les critères de sélection du professeur.
2. Dans cette question seulement, on considère un langage existant depuis plus de 3 ans qui a été sélectionné par le professeur.
   (a) Traduire cette sélection par une égalité booléenne.
   (b) À l'aide d'un calcul booléen, que peut-on en déduire concernant le langage sélectionné ?
3. À l'aide d'un tableau de Karnaugh, trouver une écriture simplifiée de l'expression booléenne E sous la forme d'une somme de deux termes.
4. Un langage de programmation payant a été écarté par le professeur car il ne correspondait pas à ses critères de sélection. Que peut-on en déduire ?

Propriété 2.2.1 *Des propriétés vérifiées par la multiplication et l'addition dans les algèbres de Boole.*

☞ *Bien remarquer dans chaque cas la dualité entre les deux propriétés énoncées.*

① *Éléments idempotents :* ts ls el st idempotents pr chq loi:

$$\forall a \in \mathcal{A}, \quad a + a = a \quad \text{et} \quad aa = a$$

➡ *Ainsi, on ne trouve pas d'exposants ou de multiplication par des entiers dans les algèbres de Boole...*

② *Éléments absorbants :*

$$\forall a \in \mathcal{A}, \quad a + 1 = 1 \quad \text{et} \quad a0 = 0$$

Plus généralement, dans une addition, un élément absorbe tous ses multiples

$$\forall a,\ b \in \mathcal{A}, \quad a + ab = a$$ → absorpt

et dans un produit, un facteur absorbe tous les facteurs composés s'une somme qui le contient

$$\forall a,\ b \in \mathcal{A}, \quad a(a+b) = a$$

③ *Associativité (admis) :*

$$\forall a,\ b,\ c \in \mathcal{A}, \quad a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{et} \quad a(bc) = (ab)c$$

(Pour cette raison, on écrira, sans parenthèses, $a + b + c$ ou bien abc)

Démonstration:

① Pour l'addition, on a

distributivité

$$a = a + 0 = a + a\overline{a} = (a + a)(a + \overline{a}) = (a + a)1 = a + a$$

Écrivons la version duale de cette preuve pour en déduire la propriété analogue sur la multiplication :

distrib

$a = a \times 1 = a \times (a + \bar{a}) = (a \times a) + (a \times \bar{a}) = a \times a + 0 = a \times a$

② Pour la multiplication, on a :

distrib

$$a0 = a0 + 0 = a0 + a\overline{a} = a(0 + \overline{a}) = a\overline{a} = 0$$

Pour l'addition, reprenant cette démonstration par dualité, on obtient

$a + 1 = (a+1) \times 1 = (a+1) \times (a + \bar{a}) = a + (1 \times \bar{a}) = a + \bar{a} = 1$

distrib

Montrons maintenant les deux propriétés d'absorption pour un élément a quelconque

- $a + a \times b = (a \times 1) + (a \times b) = a \times (1 + b) = a \times 1 = a$
- $a \times (a + b) = (a + 0) \times (a + b) = a + (0 \times b) = a + 0 = a$

2 Algèbres de Boole

Nous allons ici donner un cadre général pour les notions déjà vues en logique propositionnelle et en théorie des ensembles. Le cadre théorique peut sembler - encore une fois - fastidieux, mais nous l'appliquerons à des variables booléennes, c'est-à-dire qui peuvent prendre 0 ou 1 comme valeurs, ce qui fera bien sûr écho au travail effectué avec les tables de vérité.

2.1 Définition

On appelle algèbre de Boole un ensemble $\mathcal{A}$ non vide muni de deux lois binaires, notées multiplicativement et additivement, et d'une loi unaire (notée $a \mapsto \overline{a}$), possédant deux éléments notés 0 et 1 et vérifiant les propriétés suivantes :
↳ complémentaire

➢ L'addition et la multiplication sont **commutatives** :

$$\forall a, b \in \mathcal{A}, \qquad a+b = b+a \quad (\mathrm{C_a}) \qquad ab = ba \quad (\mathrm{C_m})$$

(Comme ds $\mathbb{R}$)

➢ 0 est élément **neutre** pour l'addition, 1 est élément **neutre** pour la multiplication :

$$\forall a, \in \mathcal{A}, \qquad a+0 = 0+a = a \quad (\mathrm{N_a}) \qquad a1 = 1a = a \quad (\mathrm{N_m})$$

(Comme ds $\mathbb{R}$)

➢ La multiplication est distributive sur l'addition (D1), et l'addition est distributive sur la multiplication (D2) :

$$\forall a, b, c \in \mathcal{A}, \qquad a(b+c) = ab+ac \quad (\mathrm{D_m}) \qquad a+(bc) = (a+b)(a+c) \quad (\mathrm{D_a})$$

⟶ pas très naturel / faux ds $\mathbb{R}$

➢ L'opération d'une variable et de son complémentaire est connue :

$$\forall a \in \mathcal{A}, \qquad a+\overline{a} = 1 \quad (\mathrm{Cp_a}) \qquad a\overline{a} = 0 \quad (\mathrm{Cp_m})$$

☞ Dans cette définition, observer la dualité des expressions : on peut passer d'une condition $(?_m)$ à la condition $(?_a)$ et réciproquement en remplaçant la multiplication par une addition, et l'élément 1 par l'élément 0.

Exemple 2.1.1 Si E est un ensemble, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ admet une structure d'algèbre de Boole, où ...$\cap$... joue le rôle de la multiplication, ...$\cup$.... joue le rôle de l'addition, ...$\emptyset$.... joue le rôle de 0, et ..E..... le rôle de 1.

double distributivité de $\cap$ et $\cup$

$A \cap \overline{A} = \emptyset$ $\qquad$ $A \cup \overline{A} = E$

$A \cap E = A$ $\qquad$ $A \cup \emptyset = A$

↳ E neutre pr $\cap$ $\qquad$ ↳ $\emptyset$ neutre pr $\cup$

Algèbres de Boole

1 Du formalisme (fastidieux, mais nécessaire)

Soit E un ensemble.

- On appelle loi unaire une opération agissant sur un unique élément de E, et loi binaire une opération agissant sur deux éléments de E.
  Les lois considérées sont à valeurs dans E, c'est-à-dire que le résultat de l'opération est encore un élément de E.

- Soit $\star$ une loi binaire sur E :
  - On dit que $\star$ est commutative si $a \star b = b \star a$ pour tous $a,\ b \in E$
  - On dit que $\star$ est associative si $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$ pour tous $a,\ b,\ c \in E$. $7+(3+10) = (7+3)+10$

- Soient $\star$ et $\square$ deux lois binaires sur E : on dit que $\star$ est distributive sur $\square$ si

$$a \star (b \square c) = (a \star b) \square (a \star c)$$ → développe $\star$ par rapport à $\square$

pour tous $a,\ b,\ c \in E$.

- Soit $\star$ une loi binaire sur E :
  - On dit que e est élément neutre pour $\star$ si $a \star e = e \star a = a$ pour tout $a \in E$. $a \times 1 = a$
  - On dit que x est élément absorbant pour $\star$ si $a \star x = x \star a = x$ pour tout $a \in E$. $a \times 0 = 0$
  - On dit que i est un élément idempotent pour $\star$ si $i \star i = i$. $0 \times 0 = 0$ $1 \times 1 = 1$

neutre : laisse a identiq

Compléter le tableau suivant[1]

Ensemble	Loi binaire	commutative ?	associative ?	distributive ?	élément neutre	élément absorbant	élément idempotent ?
$\mathbb{R}$	$+$	✓	✓	(2) ✗	0	✗	0
$\mathbb{R}$	$\times$	✓	✓	(1) ✓	1	0	0, 1
$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$	$+$	✓	✓	✗	O_3	✗	O_3
$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$	$\times$	(3) ✗	✓	✓	(4) I_3	O_3	O_3, I_3...
$\mathcal{P}(E)$	$\cap$ inter	✓	✓	(5) ✓	(8) E	(7) $\emptyset$	Ttes les parties
$\mathcal{P}(E)$	$\cup$ union	✓	✓	(5) ✓	(6) $\emptyset$	(9) E	Ttes les parties
propositions	$\wedge$ et	✓	✓	✓	Vraie	Faux	Ttes les propos
propositions	$\vee$ ou	✓	✓	✓	Faux	Vraie	st idempotentes,

(1) $a \times (b+c) = ab + ac$ (2) $2 + (3 \times 4) \neq (2+3) \times (2 \times 4)$

(3) Ds les matrices, $M \times N \neq N \times M$!!! (4) $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrice unité ou identité

(5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\cap$ et $\cup$ st distributives l'une sur l'autre "double distributivité"

(6) $A \cup \emptyset = A$

(7) $A \cap \emptyset = \emptyset$ → $\emptyset$ est absorbant pr $\cap$

(8) $A \cap E = A$

(9) $A \cup E = E$

1. Dans ce tableau, la notation $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne les matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, et la question de la