הרצאות - אינפי 2 לתלמידי מדעי המחשב- תש"פ - סמסטר ב'

ד"ר איב גודין

מסכם: יחיאל מרצבך

תוכן העניינים

הרצאה 1

נגזרות

הנגזרה היא אחד המושגים הכי שימושיים במתמטיקה. תחילה נפתח במוטיבציות למושג זה.

מושגים ראשוניים

מוטיבציה פיזיקלית

נסתכל על פונקציית מיקום הגוף בזמן t, ששווה ל$f(t)$. נרצה לשאול, מהי המהירות הרגעית בזמן t_0. קודם כל, נרצה להגדיר מהי "מהירות רגעית". אנחנו יודעים מהי "מהירות ממוצעת": $\frac{way}{time}=\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$. אמנם, אנחנו שאלנו מהי ה"מהירות הרגעית". כמשל, אם נסתכל על המהירות הממוצעת בנסיעתי בין חדרה לתל אביב, נוכל להסתכל במיקום מדויק יותר על הרגע בו חלפתי בנתניה, ואז יהיה קירוב יותר למהירות הממוצעת בחדרה. וכן הלאה.

לכן נגדיר "מהירות רגעית" כך:

$\lim\limits_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$.

זוהי למעשה הגדרת הנגזרת. למעשה, אין חשיבות לכך שמדדנו את הפונקציה כפונקציה של המהירות, אלא כקצב השינוי.

פיזיקלית, אם כך, נגזרת מבטאת **קצב שינוי רגעי של הפונקציה** f.

הגדרה

תהי f המוגדרת בסביבה מלאה של $x_0\in\mathbb{R}$.

נאמר שf <u>גזירה</u> בנקודה x_0 אם קיים הגבול (במובן הצר!) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. נסמן גבול זה ע"י $f'(x)$, או $\frac{df}{dx}(x_0)$

ונקרא לו הנגזרת של f בx_0.

דוגמאות לגזירות לפי ההגדרה

(I) נתבונן בפונקציה הקבועה $f(x)=c$. מתקיים:

$$f\prime(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=0$$

(II) $f(x)=x$. מתקיים:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$$

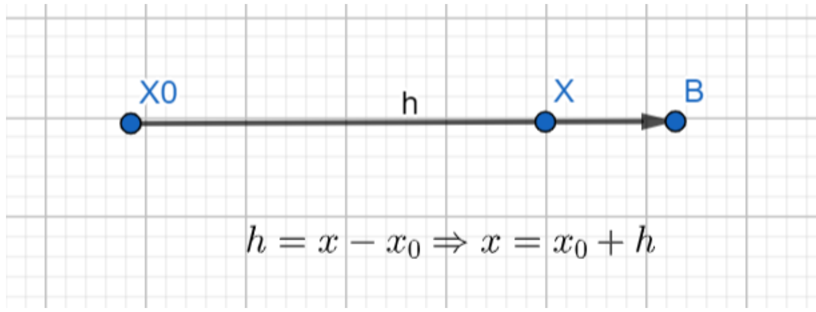
(III)יהי $x_0\in\mathbb{R}$ ותהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=x^2$. אז f גזירה בx_0 כי:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}=2x_0$$

טענה - הגדרה שקולה לנגזרת:

תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מלאה של $x_0\in\mathbb{R}$. אזי f גזירה בx_0 אם"ם קיים הגבול (במובן הצר!):

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ואז מתקיים: $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.



דוגמאות לשימוש בהגדרה זו:

(I)

$$f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h}=$$
$$\frac{x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2}{h}=\frac{2x_0h+h^2}{h}=2x_0+h \underset{h\to 0}{\to} 2x_0$$

(II)

$$f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x_0+h)}-\sqrt{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x_0+h-x_0}{h\left(\sqrt{(x_0+h)}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

הוכחה:

⇐ נתון שקיים הגבול: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\in\mathbb{R}$. נסמן:
$g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ו־$\varphi(h)=h+x_0$.
מתקיים: $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=x_0$ ו־$\varphi(h)\neq x_0$ בכל סביבה מנוקבת של 0 (כי φ חד חד ערכית).
לכן מתקיימים כל התנאים של המשפט על גבול הרכבה ולכן $\lim\limits_{h\to 0}g(\varphi(h))=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$.
כלומר:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(h+x_0)-x_0}=f'(x_0)$$

משמע $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ כנדרש.

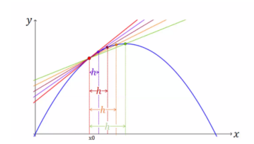
⇒ נתון שקיים הגבול: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=L\in\mathbb{R}$. נסמן $g(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ו־$h(x)=x-x_0$.
מתקיים: $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=0$ ו־ $h(x)\neq 0$ בכל סביבה מנוקבת של x_0 (כי h חד חד ערכית).
לכן מתקיימים כל התנאים של המשפט על גבול של הרכבה ולכן :

$$\lim_{x\to x_0}g(h(x))=\lim_{h\to 0}g(h)=L.$$

כלומר: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0+(x-x_0))-f(x_0)}{x-x_0}$, משמע $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=L$. נובע מכך ש-$f$ גזירה ב-x_0 וש $f'(x_0)=L$, כנדרש.

מוטיבציה גיאומטרית:

נרצה לקבוע את השיפוע של הגרף הבא:



שיפוע המיתר יהיה:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

נשים לב שזהו לא בדיוק השיפוע של הגרף. על מנת לשפר אותו, נצטרך לקרב את השיפוע. ולכן נגדיר את "שיפוע הגרף" בנקודה x_0:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

כעת נשים לב שלא מדובר בדיוק בשיפוע הגרף, אלא בשיפוע "הישר המשיק".

נשים לב שבדוגמה הנגדית שהבאנו, אכן מתקיים שאין קיום של קו משיק בנקודה x_0:

הגדרה

אם ל-f יש נגזרת ב-x_0, אז הישר שעובר דרך הנקודה $(x_0,f(x_0))$ ששיפועו $f'(x_0)$ נקרא **המשיק לגרף של f בנקודה x_0**.

משוואת המשיק הינה:

משוואת ישר כללית הינה $y=ax+b$, ולכן $y=f'(x_0)$ ס $+b$.

כאמור מתקיים שהישר עובר דרך x_0 ולכן:

$$f(x_0)=f'(x_0)+b\Rightarrow b=f(x_0)-f'(x_0)\,x_0.$$

ולכן מתקיים:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

משפט:

תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מלאה U של $x_0 \in \mathbb{R}$. אם f גזירה בנקודה x_0 אז f רציפה בx_0.

הוכחה:

לכל $x_0 \neq x \in U$ מתקיים:

$$f\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\left(x-x_0\right)+f\left(x_0\right)$$

מתקיים: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'\left(x_0\right)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\left(x-x_0\right)=0$, ו־$\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)$.
לכן נובע מאריתמטיקה (מכפלה, סכום) של גבולות:

$$\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\left(x-x_0\right)+\lim_{x\to x_0}f\left(x_0\right)=f\prime\left(x_0\right)\cdot 0+f\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)$$

$x\to x0$

<u>מסקנה (I):</u>

אם פונקציה f גזירה בנקודה x_0, אזי הגבול $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ המגדיר את $f\prime\left(x_0\right)$ הוא בצורת אי ודאות "$\frac{0}{0}$".

<u>מסקנה (II):</u>

אם f לא רציפה ב־x_0 אז היא לא גזירה ב־x_0.

<u>הערה:</u>

ההיפך לא נכון.

דוגמה נגדית:

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f\left(x\right)=|x|$ $\forall x\in\mathbb{R}$ אז f איננה גזירה בנקודה $x_0=0$. כי לכל $x\neq 0$ מתקיים:

$$\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\frac{|x|-|0|}{x-0}=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & 0<x\end{cases}$$

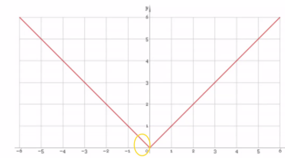
ולכן מתקיים:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}1=1$$

ומצד שני מתקיים:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(-1\right)=-1$$

ממשפט שלמדנו, אם הגבולות החד צדדיים שונים, הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ איננו קיים.



שימו לב ש־ f רציפה ב־ $x_0 = 0$. **מסקנה : רציפות ב־** x_0 **איננה גוררת גזירות ב־** x_0 .

מכאן מגיעה האינטואיציה הבאה: לפונקציה גזירה אין "שפיצים" ולכן קוראים לפונקציה גזירה גם "פונקציה חלקה"

הגדרה - נגזרת מימין ומשמאל

תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה ימנית מלאה של $x_0 \in \mathbb{R}$. נאמר שf גזירה מימין בx_0 אם קיים הגבול (במובן הצר!): $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. במקרה זה נקרא לגבול הנ"ל הנגזרת הימנית של f בx_0 ונסמנו $f'_+(x_0)$. (כך בצורה דומה לגבי נגזרת משמאל).

משפט:

תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מלאה של $x_0 \in \mathbb{R}$. אזי f גזירה בנקודה x_0, אם"ם f גזירה מימין ומשמאל בx_0, ומתקיים:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

במקרה זה מתקיים: $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$

הוכחה:

מפעילים את המשפט המקשר בין קיום גבול לבין קיום שני הגבולות החד צדדים על הפונקציה $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

דוגמאות:

(I) תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = |x|$ מהחישובים של דוגמה 3 בתזכורת לעיל, נובע ש$f'_+(0) = 1$ו $f'_-(x_0) = -1$.

(II) תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

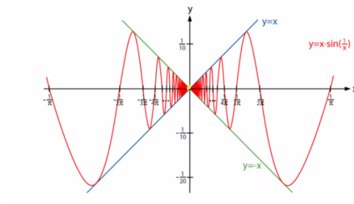
נשים לב שf רציפה נקודה $x_0 = 0$, כי $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$ (חסומה כפול אפסה).

כעת נראה שfלא גזירה מימין ולא גזירה משמאל בנקודה $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{x \cdot sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \to x_0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

הוכחנו כבר שהגבול $\lim\limits_{x\to x_0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ איננו קיים, לכן f איננה גזירה מימין בנקודה $x_0=0$. החישוב עבור הגזירות משמאל זהה.

נוכל לראות זאת גם בציור הבא:



נשים לב שהנדנוד הופך ליותר ויותר מהר כאשר הנקודה מתקרב ל0. ולכן אין גבול בנקודה זו.

משפט:

תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מלאה ימנית של $x_0\in\mathbb{R}$. אם f גזירה מימין בנקודה x_0, אז f רציפה בימין ב־x_0.

הוכחה:

לכל $x>x_0$ מתקיים:

$$f\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\cdot\left(x-x_0\right)+f\left(x_0\right)$$

לכל מרכיב בצירוף של אגף ימין יש גבול כאשר $x\to x_0^+$. לכן נובע מאריתמטיקה (מכפלה, סכום) של גבולות:

$$\lim_{x\to x_0^+}f\left(x\right)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0^+}\left(x-x_0\right)+\lim_{x\to x_0^+}f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\cdot0+f\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)$$

כלומר, f רציפה מימין ב־x_0 כנדרש.

משפט (כללי גזירה) - אריתמטיקה של נגזרות

אם f וg גזירות בx_0, אז מתקיים:

(I) $\left(f+g\right)'\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)+g'\left(x_0\right)$.

(II) $\left(f-g\right)'\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)-g'\left(x_0\right)$.

(III) $\left(fg\right)'\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)g\left(x_0\right)+g\left(x_0\right)f'\left(x_0\right)$, כלומר $\left(fg\right)'=f'g+fg'$.

(IV) $\left(cf\right)'\left(x_0\right)=c\cdot f'\left(x_0\right)$.

(V) $\left(\frac{1}{g}\right)'=\frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, כאשר $g\left(x_0\right)\neq0$

(VI) $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$, כאשר $g\left(x_0\right)\neq0$.

הוכחה:

נתון: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'\left(x_0\right),\ \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=g'\left(x_0\right)$

(I) $f+g,\ x\neq x\in\mathrm{Dom}\left(f\right)\cap\mathrm{Dom}\left(g\right)$

נרצה לבדוק את הגבול של האובייקט הבא:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)+g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

כעת נשים לב שמאריתמטיקה של גבול מתקיים:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0)$$

$x\neq x\in \mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g)\,,\,f\cdot g\ (III)$
נרצה לבדוק את הגבול הבא:

$$\begin{aligned}&\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)\,g(x)-f(x_0)\,g(x_0)}{x-x_0}=\\&\frac{f(x)\,g(x)-f(x_0)\,g(x)+f(x_0)\,g(x)-f(x_0)\,g(x_0)}{x-x_0}=\\&g(x)\frac{(f)(x)-(f)(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\frac{(g)(x)-(g)(x_0)}{x-x_0}\end{aligned}$$

כעת נשים לב ש־g גזירה ב־x_0 ולכן בפרט רציפה ב־x_0. כלומר $\lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$.
כעת נובע מאריתמטיקה של גבולות שקיים גבול לאגף ימין לעיל והוא שווה ל־ $g(x_0)\,f'(x_0)+f(x_0)\,g'(x_0)$.
כלומר:

$$(fg)'(x_0)=f'(x_0)\,g(x_0)+f(x_0)\,g'(x_0)$$

(IV) נשים לב שמתקיים:

$$(cg)'(x_0)=(fg)'(x_0)=f'(x_0)\,g(x_0)+f(x_0)\,g'(x_0)=0+c\cdot g'(x_0)=c\cdot g'(x_0)$$

(II) בעקבות הסעיף הקודם נוכל לחזור לנגזרת של הפרש:

$$\begin{aligned}(f-g)'(x_0)&=(f+(-1)\,g)'(x_0)=f'(x_0)+((-1)\,g)'(x_0).\\&=f'(x_0)+(-1)\,(g)'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0)\end{aligned}$$

(V) נתון ש$g(x_0)\neq 0$. g גזירה בx_0, ולכן בפרט רציפה בס_0. כלומר $\lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)\neq 0$. לכן קיימת סביבה מלאה U של x_0 כך ש$g(x)\neq 0$ $\forall x\in U$. תהי $x_0\neq x\in U$. כעת מתקיים:

$$\left(\frac{\left(\frac{1}{g}(x)-\frac{1}{g}(x_0)\right)}{x-x_0}\right)=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x)}}{x-x_0}=\frac{\frac{g(x_0)-g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x-x_0}=\frac{-1}{g(x_0)\,g(x_0)}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

מאריתמטיקה של גבולות ומכך ש$0 \neq g\left(x_0\right) = g\left(x\right) \lim_{x\to x_0}$ נובע שקיים גבול לאגף ימין כשx שואף לx_0 והוא שווה ל$\cdot g'\left(x_0\right) \cdot \frac{-1}{g(x_0)g(x_0)}$. כלומר מתקיים: $\left(\frac{1}{g}\right)'\left(x_0\right) = \frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

(VI) נשים לב שמתקיים:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'\left(x_0\right) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\left(\frac{1}{g}\right)\left(x_0\right) + f\left(x_0\right)\left(\frac{1}{g}\right)'\left(x_0\right)$$

כעת נפעיל את המשפט הקודם ונציב:

$$\begin{aligned} f'\left(x_0\right)\left(\frac{1}{g}\right)\left(x_0\right) + f\left(x_0\right)\cdot\frac{-g'\left(x_0\right)}{\left(g\left(x_0\right)\right)^2} &= \\ f'\left(x_0\right)\cdot\frac{g\left(x_0\right)}{\left(g\left(x_0\right)\right)^2} - f\left(x_0\right)\cdot\frac{g'\left(x_0\right)}{\left(g\left(x_0\right)\right)^2} & \\ = \frac{f'\left(x_0\right)g\left(x_0\right) - f\left(x_0\right)g'\left(x_0\right)}{\left(g\left(x_0\right)\right)^2} & \end{aligned}$$

<u>הערה:</u>

כל הסעיפים של המשפט האחרון תקפים עבור נגזרות חד צדדיות, בתנאי שמדובר באותו צד של x עבור f.

טענה:

יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $fn\left(x\right) = x^n$, אז fn גזירה בכל $x \in \mathbb{R}$, ומתקיים: $f'n\left(x_0\right) = nx_0^{n-1}$ לכל $x \in \mathbb{R}$. (שימו לב למוסכמה $0^0 = 1$ עבור $x_0 = 0$ ו$n = 1$).

הוכחה:

נוכיח זאת באינדוקציה.

<u>בסיס האינדוקציה:</u>

עבור $n = 1$:

$$f_1\left(x_0\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right) - f_1\left(x_0\right)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x - x_0}{x - x_0}$$

(שימו לב למוסכמה $0^0 = 1$)

<u>צעד האינדוקציה:</u>

יהי $n \in \mathbb{N}$ ונניח שהטענה נכונה עבור f_n. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$f'_{n+1}\left(x_0\right) = x^{n+1} = x^n\cdot x = f_n\left(x\right)\cdot f_1\left(x\right)$$

הנחת האינדוקציה והמקרה $n = 1$ מבטיחים שההנחות של המשפט על גזירה של מכפלות מתקיימות. לכן f_{n+1} גזירה ב$x_0 \in \mathbb{R}$ ו:

$$f'_{n+1}\left(x_0\right) = f'_n\left(x_0\right)\cdot f'_1\left(x_0\right) + f_n\left(x_0\right)\cdot f'_1\left(x_0\right) = n\left(x_0\right)^{n-1}\cdot x_0 + x_0^n\cdot 1 = \left(n+1\right)x_0^n$$

הטענה מתקיימת עבור $n+1$ ועל כן היא נכונה לכל n טבעי.

טענה:

$\forall x \in \mathbb{R} \ \sin'(x_0) = \cos(x_0)$.

הוכחה:

יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ נתון. יהי $x_0 \neq x \in \mathbb{R}$.

מתקיים:

$$\frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \frac{2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x-x_0} = \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) =$$
$$\frac{\sin(y)}{y}\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right), y = \frac{x-x_0}{2}$$

נשים לב כעת שמתקיים $\lim\limits_{x\to x_0} y = 0$ וגם $\forall x \neq x_0 \ y \neq 0$ וגם $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$.

לכן נובע מהמשפט על הצבה בגבולות, ש:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} = \frac{\sin y}{y} = 1$$

בנוסף מתקיים: $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{x+x_0}{2}\right) = x_0$ והפונקציה קוסינוס רציפה בx_0. לכן נובע מאריתמטיקה של גבולות:

$$\frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = 1 \cdot \cos(x_0) = \cos(x_0)$$

כנדרש.

טענה:

$\forall x \in \mathbb{R} \ \cos'(x_0) = -\sin(x_0)$

הוכחה:

בתרגיל.

טענה:

נסמן: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ ($\forall x \in D \ \cos(x) \neq 0$). מתקיים:

$$\forall x_0 \in D : (\tan)'(x_0) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{1}{\cos^2(x_0)} = 1 + \tan^2(x_0)$$

הוכחה:

$$\left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x_0) = \frac{\sin'(x_0)\cos(x_0) - \sin(x_0)\cos'(x_0)}{\cos^2(x_0)} = \frac{\cos^2(x_0) + \sin^2(x_0)}{\cos^2(x_0)} = \frac{1}{\cos^2(x_0)} = 1 + \frac{\sin^2(x_0)}{\cos^2(x_0)} = 1 + \tan^2(x_0)$$

משפט (כלל השרשרת)

תהי f פונקציה גזירה ב$x \in \mathbb{R}$ (בפרט f מוגדרת בסביבה מלאה של x_0).
תהי g פונקציה גזירה ב$y = f(x_0)$, אזי הפונקציה המורכבת $g \circ f$ גזירה בx_0 ומתקיים:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$$

הוכחה:

תחילה, נגדיר פונקציה חדשה, המהווה מעין המשכה רציפה לפונקציית הנגזרת:

$$\varphi(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & y \neq y_0 \\ g'(y_0) & y = y_0 \end{cases}$$

φ מוגדרת בסביבה מלאה של y_0 ורציפה בy_0 ומתקיים: $\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y) = \varphi(y_0)$.
כעת נשים לב לביטוי הבא :

$$g(y) - g(y_0) = \varphi(y)(y - y_0)$$

אם $y = y_0$, כתוב כאן:

$$0 = \varphi(y_0) \cdot 0$$

אם $y \neq y_0$ כתוב כאן:

$$g(y) - g(y_0) = \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}(y - y_0)$$

מסקנה: עבור כל y בתחום ההגדרה של g, אי השוויון תקף.
כעת ניגש להוכחה עצמה:

$$(g \circ f)'(x_0) = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \overset{y=f(x)}{\Rightarrow} \frac{g(y) - g(y_0)}{x - x_0} = \frac{\varphi(y)(y - y_0)}{x - x_0} = \varphi(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(y_0) f'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$$

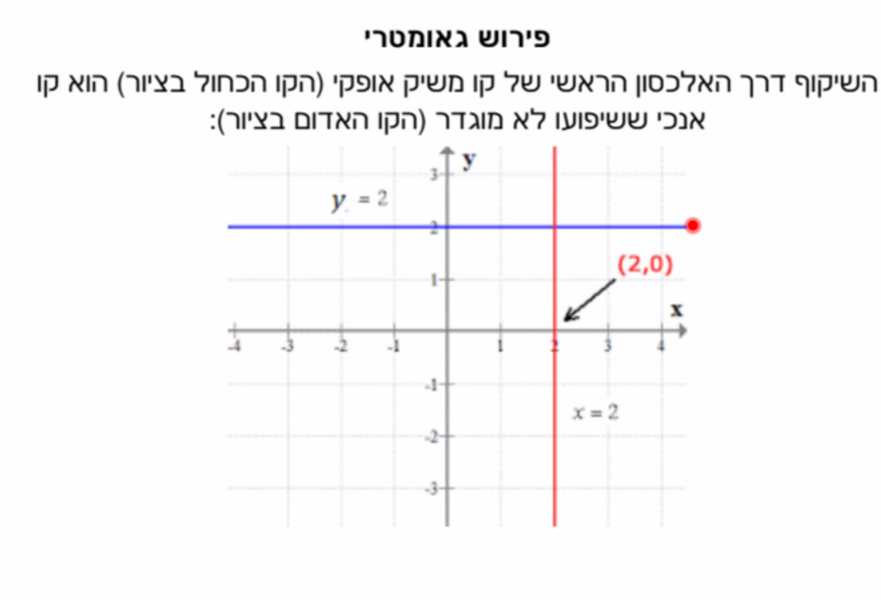
הרצאה מס' 3

טענה:

יהיו $D,E \in$ ותהי $f : D \to E$ פונקציה חח"ע ועל. נתון שf גזירה בx_0 (בפרט D מכילה סביבה מלאה של x_0) ויש $f'(x_0) = 0$. אזי $f^{-1} : E \to D$ איננה גזירה ב$y = f(x_0)$.

הוכחה:

תחילה נראה באמצעות פירוש גיאומטרי:



כעת נגיע להוכחה הפורמלית.

נניח בשלילה שf^{-1} גזירה ב$y_0 = f(x_0)$. אזי נובע מכלל השרשרת שההרכבה $f^{-1} \circ f$ גזירה בנק' $x_0 \in D$ ומתקיים:

$$\left(f^{-1} \circ f\right)'(x_0) = \left(f^{-1}\right)'(y_0) \cdot (f)'(x_0) = f^{-1}(y_0) \cdot 0 = 0$$

מצד שני, $Id_D = f^{-1} \circ f$ כלומר:

$$\forall x \in D \ \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = Id_D(x) = x$$

מכאן נובע ש$\left(f^{-1} \circ f\right)'(x_0) = Id_D(x) = x$. קיבלנו ש$1 = f^{-1} \circ f(x_0) = 0$, סתירה זו מראה ש$f^{-1}$ איננה גזירה כנדרש.

משפט:

יהיו $D,E \in$ ותהי $f : D \to E$ פונקציה חח"ע ועל ותהי $f^{-1} : E \to D$ הפונקציה ההפוכה שלה.

נניח שמתקיימים התנאים הבאים:

(I) f גזירה בx_0 (בפרט D מכילה סביבה מלאה של x_0)

(II) $f'(x_0) \neq 0$.

(III) f^{-1} רציפה בנקודה $y_0 = f(x_0)$(בפרט E מכיל סביבה מלאה של y_0) .

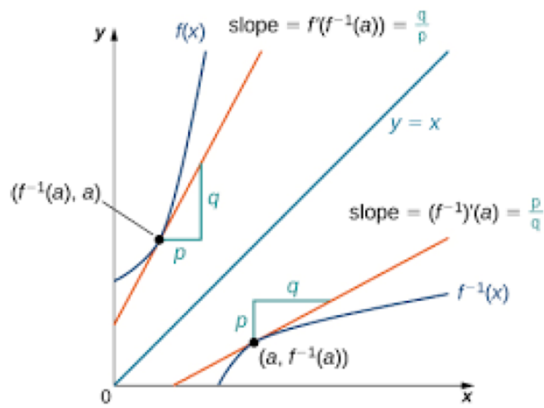
אזי הפונקציה ההפוכה D $f^{-1}: E \to D$ גזירה בנקודה $y_0 = f(x_0)$ ומתקיים:

$$f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

אזי $f^{-1}: E \to D$ איננה גזירה ב$y = f(x_0)$.

הוכחה

תחילה נסתכל על האינטואיציה הגיאומטרית:



כעת ניגש להוכחה הפורמלית.

יהי $x \neq x_0$ בD. אזי נובע מחח"ע של f כי $f(x) \neq f(x_0)$. ז"א הביטוי $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ מוגדר ושונה מ0.

נגדיר פונקציית עזר $g: D \setminus \{x_0\}$ ע"י :

$$g(x) = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

כיוון ש $0 \neq f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ נובע מאריתמטיקה של גבולות:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

יהי $y \neq y_0$ בE אזי נובע מחח"ע של f^{-1} כי $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0) = x_0$ ונוכל לרשום:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - x_0}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)} = \frac{\frac{1}{f(f^{-1}(y))-f(x_0)}}{f^{-1}(y) - x_0} = g\left(f^{-1}(y)\right) = g(x)$$

נתון שf^{-1} רציפה בy_0 (כלומר $\lim_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$). היות ו$f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$ עבור $y \neq y_0$, הפונקציה המוכבת $g \circ f^{-1}$ בעלת גבול בy_0ומתקיים:

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y\to y_0} g\left(f^{-1}(y)\right) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

כלומר:

$$f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

כנדרש.

פונקציית הנגזרת

הגדרה

תהי $f : D \to \mathbb{R}$. תת הקבוצה של D המכילה את כל הנקודות x_0 של D עבורן $f'(x_0)$ מוגדר, נקראת תחום הגזירות של f.

הגדרה

תהי $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה נתונה ויהי $D' \subseteq D$ תחום הגזירות של f. נגדיר פונקציה חדשה $f : D' \to \mathbb{R}$ ע"י:
$\forall x_0 \in D' : (f')(x_0) = f'(x_0)$.
f נקראת **הפונקציה הנגזרת** של f.

דוגמה 1

נתונה הפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = x^2$.
ראינו שf גזירה בכל $x_0 \in \mathbb{R}$ וכי $f'(x_0) = 2x_0$.
מכאן נובע שתחום הגזירות של f הוא $\mathbb{R}$ ושפונקציית הנגזרת של f היא $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הנתונה על ידי $f'(x) = 2x$.

דוגמה 2

נתונה הפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
ראינו שf גזירה בכל $x_0 \neq 0$ וכי $f'(x_0) = \begin{cases} 1 & 0 < x_0 \\ -1 & x_0 < 0 \end{cases}$. ראינו גם ש$f$ איננה גזירה ב$x_0 = 0$.
לכן תחום הגזירות של f הוא $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ופונקציית הנגזרת של f היא $f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to$ הנתונה על ידי $f'(x) = \frac{|x|}{x}$.

דוגמה 3

נתונה הפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. מהו תחום הגזירות של f ומהי פונקציית הנגזרת f'?
עבור $x_0 \neq 0$ הפונקציה $y = \frac{1}{x}$ גזירה בx_0. היות והפונקציה $z = \sin(y)$ גזירה ב$y_0 = \frac{1}{x_0}$, הפונקציה המורכבת $z = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ גזירה בx_0. לכן ניתן לחשב את הנגזרת של f בx_0 על ידי הפעלה ישירה של כללי הגזירה ולקבל:

$$f'\left(x_0\right)=2x_0\cdot\sin\left(\frac{1}{x_0}\right)+x_0^2\cdot\left(\left(\cos\left(\frac{1}{x_0}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x_0^2}\right)\right)\right)=2x_0\cdot\sin\left(\frac{1}{x_0}\right)-\cos\left(\frac{1}{x_0}\right)$$

עבור $x=0$ נחשב ישירות לפי ההגדרה:

$$f'\left(0\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{s}=\lim_{x\to0}x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

מסקנה: f גזירה בכל נקודה, כלומר תחום הגזירות של f הוא $\mathbb{R}$. פונקציית הנגזרת של f היא $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הנתונה על ידי :

$$f'\left(x\right)=\begin{cases}2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\0 & x=0\end{cases}$$

הגדרה

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש$a<b$ ותהי $f:I\to\mathbb{R}$ פונקציה נתונה כאשר $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע.

א) אם $I=\mathbb{R}$ או $I=(a,\infty)$ או $I=(-\infty,b)$ או $I=(a,b)$. נאמר שf גזירה בI אם"ם f גזירה בכל נקודה בI.

ב) נאמר שf גזירה בקרן הסגורה $I=[a,\infty)$ אם"ם f גזירה ב(a,∞) וגזירה מימין בa.

ג) נאמר שf גזירה בקרן הסגורה $I=(-\infty,b]$ אם"ם f גזירה ב(a,∞) וגזירה משמאל בb.

ד) נאמר שf גזירה בקרן הסגורה $I=[a,b)$ אם"ם f גזירה ב(a,b) וגזירה מימין בa.

ה) נאמר שf גזירה בקרן הסגורה $I=(a,b]$ אם"ם f גזירה ב(a,b) וגזירה משמאל בb.

ו) נאמר שf גזירה בקרן הסגורה $I=[a,b]$ אם"ם f גזירה ב(a,b), גזירה מימין בa וגזירה משמאל בb.

משפט

יהי I קטע. תהי $f:I\to J$ פונקציה חח"ע ועל.

אם f גזירה בI ו$f'\left(x\right)\neq0$, לכל $x\in I$ אז f^{-1} גזירה בJ, ונגזרתה נתונה ע"י:

$\forall y\in J\ \left(f^{-1}\right)\left(y\right)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'(f'(y))}$.

הוכחה

$f\left(I\right)=J$ כי f "על". f גזירה בI ולכן f רציפה בI. באינפי 1 ראינו משפט האומר שאם $I\subseteq\mathbb{R}$ ו$f:I\to J$ פונקציה רציפה, חח"ע ועל, אזי $f^{-1}:J\to I$ גם היא רציפה בJ. לכן f מקיימת בכל נקודה $x_0\in\mathbb{R}$ את שלושת התנאים של המשפט לעיל על הנגזרת של פונקציה הופכית.

דוגמה

יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהי $\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי $\hat{f}\left(x\right)=x^n$. $\hat{f}$ רציפה ב$\mathbb{R}$.

כאשר n זוגי מתקיים: $\hat{f}\left(-x\right)=\hat{f}\left(x\right)$, עבור כל x ב$\mathbb{R}$, ולכן $\hat{f}$ איננה חד חד ערכית כאשר n זוגי (למשל, אם נסתכל על $f\left(x\right)=x^2$, מדובר בפרבולה).

עבור n זוגי או אי זוגי, נגדיר $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ על ידי $f\left(x\right)=x^n$.

הוכחנו באינפי 1 שf מונוטונית עולה ממש ב$[a,\infty)$ ולכן f בפרט חח"ע.

בנוסף f רציפה ב$[a,\infty)$ ומקיימת $f\left(0\right)=0$ ו$\lim\limits_{x\to\infty}=\infty$.

משיקולים דומים לאלו שהפעלנו בהוכחת הטענה לכל פולינום ממשי ממעלה אי זוגית יש שורש ממשי, נובע שf גם "על".

באופן חלופי, ראינו באינפי 1 שלכל $0 \le y$, קיים $0 \le x$ יחיד המקיים $x^n = y$, x זה סומן $\sqrt[n]{y}$. זה מוכיח שf חח"ע ועל וש$f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$.

$f^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ גם היא רציפה. בנוסף מתקיים:

$f'(x_0) = nx_0^{n-1} \neq 0 \quad \forall x_0 > 0$ (תנאי חשוב על מנת שיתקיימו תנאי המשפט).

לכן f מקיימת ב$I = J(0,\infty)$ את כל התנאים של המשפט לעיל על הנגזרת של פונקציה הפוכה, ועל כן $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$ גזירה בכל $y_0 > 0$ ומתקיים:

$$f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{nx_0^{n-1}} == \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{y_0}\right)^{n-1}}$$

תזכורת: עבור $0 < y$ הוסכם לסמן גם $y^{\frac{1}{n}}$במקום $\sqrt[n]{y}$.

אם נשתמש בסימון הזה, נוכל לרשום עבור $0 < y_0$:

$$\left(f^{-1}\right)(y_0) = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{y}_0\right)^{n-1}} = \frac{1}{n\left(y_0^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}$$

בהתאם להגדרה של חזקה רציונלית נוכל לכתוב עבור כל $0 < y_0$:

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{n\left(y_0^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{ny_0^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}y_0^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}y_0^{\frac{1}{n}-1}$$

הרצאה מס' 4

כאשר n אי זוגי, מתקיים $\hat{f}(-x) = -\hat{f}(x)$ עבור כל x ב$\mathbb{R}$.

על ידי הבחנה בין המקרים $0 \le x_1 < x_2$, $x_1 < 0 < x_2$, $x_1 < x_2 \le 0$, קל להראות ש$\hat{f}$ מונוטונית עולה ממש ב$\mathbb{R}$. בפרט $\hat{f}$ חח"ע ב$\mathbb{R}$.

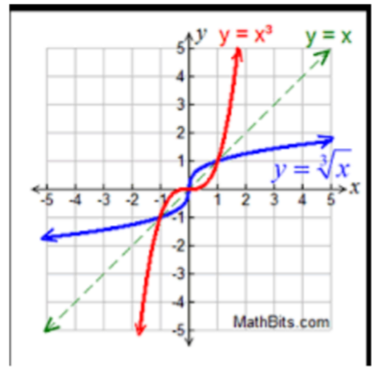
בנוסף מתקיים: $\lim\limits_{x\to\infty}\hat{f}(x) = \infty$ו$\lim\limits_{x\to-\infty}\hat{f}(x) = -\infty$ולכן $\hat{f}$ 'על' (כלומר, התמונה שלה הינה כל הטווח).

<u>מסקנה</u>

כאשר n אי זוגי, הפונקציה $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ עצמה הפיכה (אין צורך לצמצם את התחום ואת הטווח ולעבור לf). גם את הפונקציה ההפוכה שלה נסמן ב$\sqrt[n]{y} = \hat{f}^{-1}$. הפונקציה $\hat{f}^{-1} = \sqrt[n]{y}$ גזירה בכל $y_0 \neq 0$, ומתקיים:

$$\hat{f}^{-1}(y_0) = \frac{1}{\hat{f}'(x_0)} = \frac{1}{nx_0^{n-1}} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{y_0}\right)^{n-1}}$$

נוכל להתבונן למשל בדוגמה הבאה:



הגדרה (נגזרות מסדר גבוה)

תהי $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה, ויהי $D'\subseteq D$ תחום הגזירות של f. יהי $D''\subseteq D'$ תחום הגזירות של $f':D'\to\mathbb{R}$. אזי הפונקציה $f'':D''\to\mathbb{R}$ נקראת הנגזרת השנייה של f (או הנגזרת מסדר שני של f). נהוג לסמן אותה ב־f''. נמשיך ונגדיר באותה צורה את $D'''\subseteq D''$ ואת $f'''=(f'')'$.

באופן כללי, בהינתן $2\le n\in\mathbb{N}$, נגדיר בצורה אינדוקטיבית את $f^{(n)}:D^{(n)}\to\mathbb{R}$ ע"י $f^{(n)}=\left(f^{(n-1)}\right)'$, כאשר $D^{(n)}$ הוא תחום הגזירות של $f^{(n-1)}$. $f^{(n)}$ נקראת הנגזרת הnית של f (או הנגזרת מסדר n של f).

המשפטים המרכזיים על הנגזרת

הגדרה

תהי $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה, ותהי $A\subseteq D$. נאמר ש$x_0\in A$ היא נקודת מקסימום (או מינימום) גלובלי של f בקבוצה, אם"ם מתקיים:

$$\forall x\in A\;:f(x)\le f(x_0)\ \text{(או}\ \forall x\in A\;:f(x_0)\le f(x))$$

ל$f(x_0)$ עצמו קוראים הערך המקסימלי (או המינימלי) של f בx_0.

הערות

(I) בהינתן $f:D\to\mathbb{R}$ ו $A\subseteq D$, לא בהכרח קיימת נקודת מקסימום (או מינימום) גלובלי של f בקבוצה A.
(II) הערך המקסימלי (או המינימלי) של f בA הוא $\max\{f(x)\mid x\in A\}$ (או $\min\{f(x)\mid x\in A\}$). זה מוכיח את יחידותו (במידה והוא קיים!). אבל נקודת מקסימום (או מינימום) גלובלי של f בקבוצה A לא חייבת להיות יחידה. למשל, כאשר f קבועה, כל $x_0\in A$ הינה נקודת מקסימום (או מינימום) גלובלי של f בקבוצה A.

הגדרה

תהי $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה נתונה. נקודה $x_0\in\mathbb{R}$ תיקרא נקודת מקסימום (או מינימום) מקומי של f אם"ם D מכילה סביבה מלאה U של x_0, כך שx_0 היא נקודת מקסימום (או מינימום) גלובלי של f בקבוצה U. אומרים שx_0 היא נקודת קיצון מקומי של f אם x_0 מקסימום או מינימום מקומי של f.

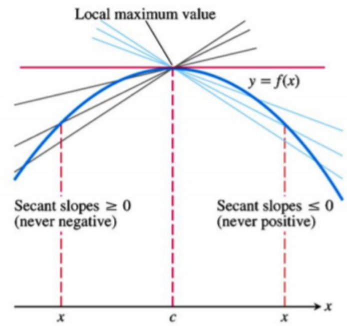
הערה

שימו לב: x_0 היא נקודת קיצון מקומי של f אם"ם מתקיימים שני התנאים הבאים:
(I) x_0 היא נקודה פנימית של D, כלומר D מכילה סביבה מלאה של x_0.

(II) קיים $0<\delta$, כך ש: $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta):f(x)\le f(x_0)$ (או $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta):f(x_0)\le f(x)$)

משפט פרמה

תהי $x_0\in D\subseteq\mathbb{R}$ נקודת קיצון מקומי של $f:D\to\mathbb{R}$. אם f גזירה בx_0 אזי $f'(x_0)=0$.



הוכחה

א) נניח שx_0 מקסימום מקומי של f. בפרט(מהגדרת מקסימום מקומי) x_0 היא נקודה פנימית של D, וקיים $0<\delta$ כך ש$f(x)\le f(x_0)$ עבור כל x ב$(x_0-\delta,x_0+\delta)$. f גזירה בx_0 ולכן f גזירה מימין ומשמאל בx_0 ו$f'_-(x_0)=f'(x_0)=f'_+(x_0)$.

לכל $x\in(x_0,x_0+\delta)$ מתקיים $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$ (כי $f(x)-f(x_0)\le 0$ ו$0<x-x_0$) . אי שוויון חלש בין פונקציות בעלות גבול גורר אי שוויון חלש בין הגבולות. על כן מתקיים: $f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$.

מצד שני, עבור כל $x\in(x_0-\delta,x_0)$ מתקיים: $0\le\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. (כי $f(x)-f(x_0)\le 0$ ו$x-x_0<0$). מעבר לגבול מוליד את אי השוויון הבא:

$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$.

קיבלנו ש$f'(x_0)\le 0$ ומצד שני ש$0\le f'(x_0)$, ולכן נובע מהטריכוטומיה ש$f'(x_0)=0$, כנדרש.

ב) אם x_0 מינימום מקומי של f, אזי x_0 מקסימום מקומי של $-f$, ולכן נובע מחלק א' ש$(-f)'(x_0)=0$, כלומר $-f'(x_0)=0$, כנדרש.

הערות

(I) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=|x|$. לf יש נקודת מינימום מקומי ב$x_0=0$, אך f איננה גזירה ב0. (למעשה אין אף נקודה בה הנגזרת של f מתאפסת).

(II) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=x^3$. f גזירה ב$\mathbb{R}$ ומתקיים: $\forall x_0\in\mathbb{R}\ f'(x_0)=3x_0^2$. בפרט $f'(0)=0$. אבל אין לf אף נקודת קיצון מקומי, כי f מונוטונית עולה ממש ב$\mathbb{R}$.

משפט רול

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$, כך ש$a<b$ ותהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה המקיימת את שלושת התנאים הבאים:

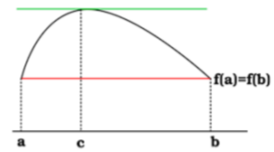
(I) f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$.

(II) f גזירה בקטע הפתוח (a,b)

(III) $f(a)=f(b)$

אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ אחת לפחות כך ש$f'(c)=0$.

(נשים שאין צורך להניח גזירות בקטע הסגור, התנאים הללו של המשפט מספיקים)



הוכחה

f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, ולכן, על פי המשפט השני של ווירשטראס, קיימות שתי נקודות $c_1, c_2 \in [a,b]$ כך ש:
$\forall x \in [a,b] \,:\, f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$.

נבדיל בין מקרים:

(I) אם $f(c_1) = f(c_2)$, אזי מתקיים: $\forall x \in [a,b] : f(x) = f(c_1)$. על כן f קבועה, והנגזרת שלה מתאפסת בכל נקודה ב(a,b). לכן $c = \frac{a+b}{2}$ מקיימת $f'(c) = 0$.

(II) אם $f(c_1) \neq f(c_2)$. אזי $c_1 \neq c_2$ ו$\{c_1, c_2\} \neq \{a,b\}$(כי $f(b) = f(a)$ אך $f(c_1) \neq f(c_2)$) .

כלומר, $a < c_1 < b$ או $a < c_2 < b$, כלומר לפחות אחת הנקודות c_1 או c_2 היא נקודה פנימית של הקטע $[a,b]$.
לכן נובע מההגדרה שאותה נקודה היא נקודת קיצון מקומי. נתון שf גזירה ב(a,b), ולכן f גזירה באותה נקודה, ועל כן נובע ממשפט פרמה שהנגזרת באותה נקודה מתאפסת.

הטענה מתקיימת בשני המקרים, כנדרש.

דוגמה

טיפלנו במשוואה $x^3 + 64x - 1 = 0$, והראנו בעזרת משפט ערך הביניים כי קיים לה פיתרון בקטע $\left[\frac{1}{128}, \frac{1}{64}\right]$.
ניעזר כעת במשפט רול כדי להראות שהפיתרון יחיד.

נגדיר פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ע"י $f(x) = x^3 + 64x - 1$. f גזירה ב$\mathbb{R}$ ובפרט גזירה בכל קטע (a,b) ורציפה בכל קטע $[a,b]$.

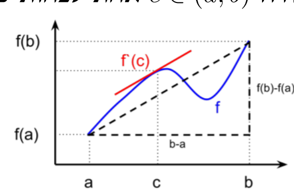
נניח בדרך השלילה שקיימים $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,עם $x_1 < x_2$ כך ש$f(x_1) = 0$ וגם $f(x_2) = 0$.

אזי f מקיימת בקטע $[x_1, x_2]$ את תנאי משפט רול, ולכן קיים $c \in (x_1, x_2)$ עבורו $f'(c) = 0$. היות ו$f'(x) = 3x^2 + 64$, לכל $x \in \mathbb{R}$, נובע ש$0 = f'(c) = 3c^2 + 64 > 0$.

סתירה זו מראה שאין נקודה נוספת בה הפונקציה מתאפסת.

משפט לגראנז' (או משפט הערך הממוצע)

יהיו $a,b \in \mathbb{R}$, כך ש$a < b$. תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b). אזי קיימת נקודה $c \in (a,b)$ אחת לפחות כך ש $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



הרצאה מס' 5

הוכחה

משוואת הקו הישר העובר דרך הנקודות $(a, f(a))$ ו$(b, f(b))$, היא $(x-a)$ $y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

נגדיר את הפונקציה $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ על ידי: $l(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$.

כפולינום (ממעלה 1), הפונקציה l גזירה בכל $\mathbb{R}$. ולכן בפרט גזירה על הקטע הפתוח (a,b) ורציפה בקטע הסגור $[a,b]$.

נגדיר פונקציית עזר $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ על ידי: $h(x)=f(x)-l(x)$.

h רציפה ב־$[a,b]$כהפרש של פונקציות רציפות ב$[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b) כהפרש של פונקציות גזירות ב(a,b). מכללי הגזירה נובע ש:

$$\forall x\in(a,b)\;\; h'(x)=f'(x)-l'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

בנוסף מתקיים:

$$\begin{aligned} &h(a)=f(a)-l(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=(a-a)-f(a)=0\\ &h(b)=f(b)-l(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=(b-a)-f(a)\\ &=f(b)-f(b)+f(a)-f(a)=0\end{aligned}$$

בנוסף $h(a)=h(b)$ ולכן h מקיימת את תנאי משפט רול ב$[a,b]$. על כן קיימת נקודה $c\in(a,b)$, אחת לפחות כך ש $h'(c)=0$.

כלומר, $0=h'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. נעביר אגפים ונקבל:

$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, כנדרש.

הערה

משפט רול הוא מקרה פרטי של משפט לגרנז', אבל אי אפשר להוכיח את משפט רול ע"י ציטוט משפט לגרנז' (כי השתמשנו במשפט רול בזמן שהוכחנו את משפט לגרנז'!)

טענה

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש$a<b$. תהי f פונקציה גזירה בקטע (a,b):

(I) אם f קבועה ב(a,b) אזי $\forall x\in(a,b)\;\; f'(x)=0$

(II) אם f מונוטונית עולה ב(a,b) אזי אזי $\forall x\in(a,b)\;\; f'(x)\geq 0$

(III) אם f מונוטונית יורדת ב(a,b) אזי אזי $\forall x\in(a,b)\;\; f'(x)\leq 0$

הוכחה

(I) הוכחנו בתחילת העיסוק בנגזרת.

(II) תהי $x_0\in(a,b)$. f מונוטונית עולה ב(a,b), ולכן $\forall x\in(x_0,b): f(x)\geq f(x_0)$.

לכן מתקיים: $\forall x\in(x_0,b): \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$. (כי $f(x)-f(x_0)\geq 0$ ו$x-x_0>0$).

אי שוויון חלש בין פונקציות בעלות גבול גורר אי שוויון חלש בין הגבולות ועל כן מתקיים:

$f'(x_0)=f_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$.

(III) תהי $x_0\in(a,b)$. f מונוטונית יורדת ב(a,b), ולכן $\forall x\in(x_0,b): f(x)\geq f(x_0)$.

לכן מתקיים: $\forall x\in(x_0,b): \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$. (כי $f(x)-f(x_0)\leq 0$ ו$x-x_0>0$).

אי שוויון חלש בין פונקציות בעלות גבול גורר אי שוויון חלש בין הגבולות ועל כן מתקיים:
$f'\left(x_0\right)=f_+\left(x_0\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$.

משפט

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש$a<b$. תהי f פונקציה גזירה בקטע (a,b). אזי מתקיים:
(I) אם לכל $x\in(a,b)$ מתקיים $f'\left(x\right)=0$, אזי f קבועה ב(a,b).
(II) אם לכל $x\in(a,b)$ מתקיים $f'\left(x\right)\geq 0$ (או $f'\left(x\right)\leq 0$) , אזי f מונוטונית עולה (או יורדת) ב(a,b).
(III) אם לכל $x\in(a,b)$ מתקיים $f'\left(x\right)>0$ (או $f'\left(x\right)<0$) , אזי f מונוטונית עולה ממש (או יורדת ממש) ב(a,b).

הוכחה

(I) נסמן $x_0\frac{a+b}{2}\in(a,b)$. תהי $x_0<x\in(a,b)$. נראה ש$f\left(x_0\right)=f\left(x\right)$.
f גזירה ב(a,b) ולכן בפרט רציפה ב(a,b). היות ו$[x_0,x]\subseteq(a,b)$.
f רציפה ב$[x_0,x]$ וגזירה ב(x_0,x). כלומר f מקיימת בקטע $[x_0,x]$ את תנאי משפט לגרנז'.
לפיכך קיימת $c\in[x_0,x]$ כך ש-$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'\left(c\right)=0$. ולכן $f\left(x\right)-f\left(x_0\right)=0$, כלומר $f\left(x_0\right)=f\left(x\right)$.
על ידי החלפת הקטע $[x_0,x]$ בקטע $[x,x_0]$, מראים באותו אופן בדיוק ש$f\left(x\right)'=f\left(x_0\right)$, כאשר $a<x<x_0$.
לכן $f\left(x_0\right)=f\left(x\right)$ עבור כל x ב(a,b) ועל כן f קבועה ב(a,b), כנדרש.

(II) נוכיח את הטענה כאשר $f'\left(x\right)\geq 0$, עבור כל $x\in(a,b)$
(הוכחת המקרה בו $f'\left(x\right)\leq 0$ עבור כל $x\in(a,b)$ נעשית על ידי התבוננות ב$(-f)$.
כעת, יהיו $x_1,x_2\in(a,b)$ כך ש- $x_1<x_2$. f גזירה ב(a,b) ולכן f גזירה בקטע $[x_1,x_2]$ המוכל ב- (a,b). מכאן נובע ש- f מקיימת את תנאי **משפט לגרנז'** בקטע $[x_1,x_2]$.
לפיכך קיימת $c\in[x_0,x]$ כך ש-$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'\left(c\right)\geq 0$.
כעת מתקיים: $f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=\underbrace{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}_{\geq 0}\underbrace{\left(x_2-x_1\right)}_{>0}\geq 0$.
כלומר, הראינו שלכל שתי נקודות ב(a,b) המקיימות $x_2>x_1$ מתקיים $f\left(x_2\right)\geq f\left(x_1\right)$. מסקנה: f מונוטונית עולה ב(a,b), כנדרש.

(III) ההוכחה זהה לזו של סעיף ב', כאשר מחליפים את אי השוויון החלש באי שוויון חזק.

הערות ואזהרה

1. מהטענה והמשפט לעיל נובע שאם f פונקציה גזירה בקטע (a,b), אזי f מונוטונית עולה (או קבועה) ב-(a,b), אם ורק אם:
$\forall x\in(a,b):\ f'\left(x\right)\geq 0$ (או $\forall x\in(a,b):\ f'\left(x\right)=0$)
אבל הגרירה ההפוכה של סעיף (III) במשפט איננה נכונה.
לדוגמה, הפונקציה $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ הנתונה ע"י $f\left(x\right)=x^3$ מונוטונית עולה ממש ב$(-1,1)$, אך $f'\left(0\right)=0$, ולכן הנגזרת של f איננה חיובית בכל נקודה של הקטע $(-1,1)$.
2. אם $f'\left(x\right)>0$, לא בהכרח קיימת סביבה של x_0 בה f מונוטונית עולה.
לדוגמה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הנתונה על ידי:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

בנקודה $x_0 = 0$.

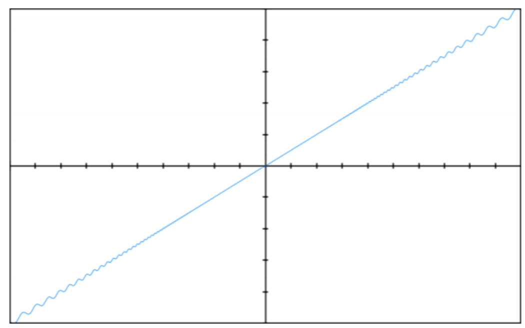
f היא סכום של שתי פונקציות גזירות $f_1 = \frac{1}{2} - x$ ו:

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

לכן f גזירה ומתקיים:

$$f'(x) = f_1'(x) + f_1'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

אילו הייתה קיימת סביבה $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ של $x_0 = 0$ בה f מונוטונית עולה, אז f' הייתה אי שלילית בסביבה זו. אך עבור n טבעי מספיק גדול, $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ מכילה נקודות מהצורה $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ ומתקיים: $f'(x) = -\frac{1}{2}$.



דוגמה 1

תהי $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to [-1,1]$ המוגדרת ע"י $f(x) = \sin(x)$. ראינו שf גזירה בכל x_0 ב- $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, וש- $f'(x) = \cos x$. מהגדרת הפונקציות הטריגונומטריות באמצעות מעגל היחידה, נובע שבתחום $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ מתקיים $\cos x > 0$. לכן נובע מהמשפט הקודם שf מונוטונית עולה ממש בקטע $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, בפרט f חח"ע ב$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

דוגמה 2

תהי $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. ראינו בהרצאה הקודמת ש$f$ גזירה בכל x_0 ב- $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ וש$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x_0)} = 1 + \tan^2(x_0)$.

היות ו- $1 + \tan^2(x_0) \geq 1 > 0$, נובע מהמשפט הקודם ש- f מונוטונית עולה ממש בקטע $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. בפרט f חח"ע ב - $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

משפט קושי

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$, כך ש- $a < b$. יהיו f, g שתי פונקציות רציפות בקטע $[a, b]$ וגזירות ב-(a, b).

(I) אזי קיימת נקודה $c \in (a, b)$, אחת לפחות, כך שמתקיים:

$(*)\ f'(c)\left(g(b) - g(a)\right) = g'(c)\left(f(b) - f(a)\right)$

(II) אם בנוסף $g'(x) \neq 0$, עבור כל $x \in (a, b)$, אזי ניתן לכתוב את $(*)$ בצורה הבאה למשל:

$(**)\ \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

הוכחה

(I) נגדיר פונקציית עזר: $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ ע"י:
$h(x)=f(x)(g(b)-g(a))-g(x)(f(b)-f(a))$.
נשים לב שמדובר בצירוף לינארי של פונקציות רציפות. ולכן h רציפה ב$[a,b]$ כצירוף לינארי של פונקציות רציפות ב$[a,b]$. מאותם שיקולים, h גזירה ב(a,b) כצירוף ליניארי של פונקציות גזירות ב(a,b).
כעת מכללי הגזירה מתקבל:
$\forall x\in(a,b)\ h'(x)=f(x)'(g(b)-g(a))-g(x)'(f(b)-f(a))$.
על מנת שיתקיימו התנאים של משפט רול, נחשב את הקצוות:

$$h(a)=f(a)(g(b)-g(a))-g(a)(f(b)-f(a))=f(a)g(b)-g(a)f(b)$$
$$h(b)=f(b)(g(b)-g(a))-g(b)(f(b)-f(a))=-f(b)g(a)+g(b)f(a)=h(a)$$

על כן h מקיימת ב$[a,b]$ את תנאי משפט רול, ולכן קיימת $c\in(a,b)$ כך ש$h'(c)=0$.
אם נציב בפונקצית הנגזרת c נקבל:
$h'(c)=f(c)'(g(b)-g(a))-g(c)'(f(b)-f(a))=0$
נעביר אגפים ונקבל:
$f(c)'(g(b)-g(a))=g(c)'(f(b)-f(a))$
כלומר, הצלחנו להוכיח את $(*)$.

(II) אם בנוסף $g'(x)\neq 0$ עבור כל $x\in(a,b)$, אזי נובע כי $g(b)\neq g(a)$ (אם נניח בשלילה שלא, אזי g הייתה ממלאה את תנאי **משפט רול** והיינו מקבלים נקודה $g'(\hat{c})=0$, בסתירה לנתון).
לכן בהכרח $(**)$ מתקבל מ$(*)$ ע"י חילוק שני האגפים של $(*)$ ב - $g(c)'(g(b)-g(a))$.

הערה

משפט לגרנז' הוא מקרה פרטי של **משפט קושי** בצורה $(**)$, עם $g(x)=x$, עבור כל $x\in[a,b]$. (במקרה זה מותר לכתוב את משפט קושי בצורה $(**)$ כי $\forall x\in[a,b]\ g'(x)=1\neq 0$.

טענה

יהיו f,g שתי פונקציות גזירות ב-x_0 (בפרט f וg מוגדרות בסביבה מלאה של x_0).
אם $f(x_0)=g(x_0)=0$ ו$g'(x_0)\neq 0$. אזי קיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ ומתקיים: $\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$.

הערה ודוגמה

(אינטואיציה של הטענה: נותנת אפשרות להתגבר על אי וודאות מהסוג $\frac{0}{0}$)
נוכל להתבונן גם בדוגמה הבאה: $f(x)=\sin x, g(x)=x$. בנקודה $x_0=0$.
מתקיים כי $f'(x)=\cos x\Rightarrow\cos 0=1$ ומצד שני $g'(x)=1=g'(0)$. נשים לב כי $g(0)=0$ וגם $f(0)=0$, אך הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$.

הוכחה

נתון שf וg גזירות, בפרט קיימים הגבולות הבאים במובן הצר: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}$ וגם $g'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{x-x_0}$ (כי $f(x_0)=g(x_0)=0$)
נראה שאכן הגבול $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ מוגדר היטב ($g(x)\neq 0$ בסביבה מסוימת.

מכך ש$-0 \neq g'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{x-x_0}$, נובע שקיימת סביבה מנוקבת U של x_0, כך ש$\neq \frac{g(x)}{x-x_0}$, בפרט נובע מכאן ש$g(x) \neq 0$, עבור כל $x \in U$.

בעקבות הטענות לעיל, נוכל לכתוב עבור כל $x \in U$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}$$

כעת נשים לב שלמונה של אגף ימין יש גבול $f'(x_0)$ כאשר x שואף לx_0, ולמכנה של אגף ימין יש גבול $g'(x_0) \neq 0$, ולכן מאריתמטיקה של גבולות, נובע שלאגף ימין כולו יש גבול כאשר x שואף לx_0 ומתקיים: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$, כנדרש.

הרצאה מס' 6

משפט לופיטל בגרסה '$\frac{0}{0}$'

יהיו $a,b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a<b$ ויהיו f ו-g שתי פונקציות גזירות בקטע $(a,b]$ המקיימות את שלושת התנאים הבאים:

(I) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$

(II) $\forall x \in (a,b] : g'(x) \neq 0$

(II) קיים הגבול במובן הרחב $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

אזי קיים הגבול במובן הרחב $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ ומתקיים:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$$

הערה: המשפט הוא חד כיווני בלבד. בנוסף, ייתכן שאין גבול בa.

הוכחה

נגדיר שתי פונקציות חדשות: $\hat{f}:[a,b]\to\mathbb{R}, \hat{g}:[a,b]\to\mathbb{R}$ (באמצעות תנאי (I)) המוגדרת ע"י:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x\neq a \\ 0 & x=a \end{cases}, \hat{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x\neq a \\ 0 & x=a \end{cases}$$

מדובר למעשה בהמשכות רציפות, ולכן נוכל לדבר על רציפות בקטע $[a,b]$ של הפונקציות $\hat{f}$ ו$\hat{g}$, כי בקטע $(a,b]$ הן מתלכדות עם הפונקציות הגזירות (ועל כן רציפות), f וg בהתאמה, ובנקודה a מתקיים:

$\lim\limits_{x\to a^+}\hat{f}(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \hat{f}(a) = 0$ ו$\lim\limits_{x\to a^+}\hat{g}(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \hat{g}(a) = 0$.

$\hat{f}$ ו$\hat{g}$ גזירות ב(a,b) ולכן, לכל $x_0 \in (a,b)$ מתקיים: $f'(x_0) = \hat{f}'(x_0)$ וגם $g'(x_0) = \hat{g}'(x_0)$. על $\hat{g}$ו$\hat{f}$ ממלאות את תנאי משפט קושי בקטע $[a,b]$.

יהי x ב$(a,b]$. $\hat{f}$ ו$\hat{g}$ ממלאות את תנאי **משפט קושי** בקטע $[a,x]$ (כי הוא מוכל ב$[a,b]$) , לכן קיים $c_x \in (a,b)$ כך שמתקיים:

$$\frac{\hat{f}(x)-\hat{f}(a)}{\hat{g}(x)-\hat{g}(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{\hat{f}'(c_x)}{\hat{g}'(c_x)} = \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

כעת נוכל להבדיל בין שלושה מקרים:.

א. נניח כי הגבול $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים במובן הצר, כלומר למעשה: $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$. ובמילים אחרות:

$$\forall\varepsilon_1>0\,\exists\delta>0\,\forall x\in(a,b]:\ a<x<a+\delta\Rightarrow\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-L\right|<\varepsilon_1$$

.

כעת, יהי $\varepsilon_1>0$ נתון. נציב $\varepsilon=\varepsilon_1$ ונקבל $0<\delta$ כך ש$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-L\right|<\varepsilon$ עבור כל x ב$(a,a+\delta)$.
נשים לב שהנקודה c_x מקיימת $a<c_x<x<a+\delta$, כלומר $c_x\in(a,a+\delta)$, ולכן $\left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}-L\right|<\varepsilon$. לכן, על פי $(*)$, זה אומר ש $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right|<\varepsilon$.
כלומר, למעשה הראינו ש:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\in(a,b]:\ a<x<a+\delta\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right|<\varepsilon$$

במילים אחרות, הוכחנו: $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=L=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, כפי שרצינו להוכיח.

ב. נניח כי $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$, במילים אחרות:

$$\forall M_1\in\mathbb{R}\,\exists\delta>0\,\forall x\in(a,b]:\ a<x<a+\delta\Rightarrow\frac{f'(x)}{g'(x)}>M_1$$

כעת, יהי $M\in\mathbb{R}$. נציב $M_1=M$ ונקבל בעקבות כך $0<\delta$ כך ש$\frac{f'(x)}{g'(x)}>M_1$., עבור כל x ב$(a,a+\delta)$. נשים לב שהנקודה c_x מקיימת $a<c_x<x<a+\delta$, כלומר $c_x\in(a,a+\delta)$, ולכן $\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}>M$. לכן, על פי $(*)$, זה אומר ש $\frac{f(x)}{g(x)}>M$..
למעשה, הראינו בכך שמתקיים:

$$\forall M\in\mathbb{R}\,\exists\delta>0\,\forall x\in(a,b]:\ a<x<a+\delta\Rightarrow\frac{f'(x)}{g'(x)}>M$$

במילים אחרות, הוכחנו: $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, כפי שרצינו להוכיח.

ג. נניח כי $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=-\infty$. נוכל להוכיח את המשפט בצורה דומה למקרה ב', (אם נהפוך את אי השוויונים או נתבונן ב$-\frac{f}{g}$).

הערות

(א) באותה צורה, נוכיח להוכיח את המשפט עבור שאיפה משמאל לa. כמו כן, שילוב של שתי הגרסאות יאפשר לנו להוכיח את המשפט גם במקרה של שאיפה דו צדדית לa.

(ב) שימו לב להבדלים בהנחות בין **כלל לופיטל** ובין ה**טענה שקדמה לכלל לופיטל.**

(ג) בתרגיל תוכיחו את המשפט בגרסה של x שואף לאינסוף.

משפט לופיטל בגרסה '$\frac{\infty}{\infty}$'

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש- $a<b$ ויהיו f ו-g שתי פונקציות גזירות בקטע $(a,b]$ המקיימות את שלושת התנאים הבאים:

$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=\infty$ (I)

$\forall x\in(a,b]:g'(x)\neq0$ (II)

(II) קיים הגבול במובן הרחב $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

אזי קיים הגבול במובן הרחב $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ ומתקיים:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$$

הערות

(א) באותה צורה, נוכיח להוכיח את המשפט עבור שאיפה משמאל לa. כמו כן, שילוב של שתי הגרסאות יאפשר לנו להוכיח את המשפט גם במקרה של שאיפה דו צדדית לa.

(ב) בגרסה תקף גם בגרסה של x שואף לאינסוף.

משפט דרבו

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש- $a<b$ ותהי f פונקציה גזירה ב(a,b), וגזירה מימין בנק' a וגזירה משמאל בנק' b (כלומר למעשה גזירה ב$[a,b]$.)

יהי $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש $f'_+(a)<\lambda<f'_-(b)$ (או $f'_-(b)<\lambda<f'_+(a)$), אזי קיימת $c\in(a,b)$, אחת לפחות, כך ש$f'(c)=\lambda$.

הערה

נשים לב שלא נתון לנו שf' רציפה. המשפט מאפשר לנו לדבר על תכונת ערך הביניים גם בפונקציית הנגזרת.

הוכחה

תחילה, נוכל לשים לב לכך שf רציפה בקטע הסגור $[a,b]$. כעת, נגדיר פונקצית עזר $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ע"י $g(x)=f(x)-\lambda x$.

נוכל לראות כי g רציפה ב$[a,b]$ (בעקבות הגזירות ב$[a,b]$) ועל כן נובע מ**המשפט השני של ווירשטרס** שg מקבלת ערך מינימלי עבור $c\in[a,b]$ כלשהוא.

בעקבות כך, מתקיים: $g'_+(a)=f'_+(a)-\lambda<0$. במילים אחרות: $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}<0$. למעשה, קיימת סביבה ימנית מנוקבת $(a,a+\delta)$ של a ($\delta>0$), כך שלכל $x\in(a,a+\delta)$ מתקיים: $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}<0$. נוכל להבחין שבסביבה זו $g(x)<g(a)$, ולכן אין לg ערך מינימלי בa. מכאן בהכרח נובע ש$a\neq c$.

משיקולים דומים, מתקיים ש$b\neq c$. שהרי $g'_-(b)=f'_+(a)-\lambda>0$ ולכן $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{g(x)-g(b)}{x-b}>0$.כלומר $g(x)<g(b)$ עבור x בסביבה כלשהיא הקרובה לb .

אם כך, c היא נקודת פנימית של $[a,b]$ וכיוון שמדובר במינימום מקומי, נובע מ**משפט פרמה** ש- $g'(c)=0$. כלומר, $f'(c)-\lambda=0\Rightarrow f'(c)=\lambda$, כנדרש.

טענה

תהי h פונקציה גזירה ב (a,b). אזי לh' יכולות להיות רק נקודות אי רציפות מסוג שני (לא סליקות ולא מסוג ראשון).

הוכחה

תהי $x_0\in(a,b)$. נרצה להראות ששני הגבולות החד צדיים קיימים במובן הצר (הם לא חייבים להיות שווים). כלומר, נרצה להראות שאם קיימים הגבולות $\lim\limits_{x\to x_0^-}h'(x)=\hat{L}$ וגם שקיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0^+}h'(x)=L$ אזי h' רציפה בx_0 (נרצה להראות למעשה שh' רציפה בכל $x_0\in(a,b)$, אך לא בהכרח רציפה ב$[a,b]$)

נוכל להתבונן בקטע הפתוח (x_0,b) כאשר $b'\in(x_0,b)$.

כעת, נגדיר שתי פונקציות $f\left(x\right)=h\left(x\right)-h\left(x_0\right)$ ו - $g\left(x\right)=x-x_0$. f וg גזירות בקטע $(x_0,b']$. ולמעשה מתקיים: $\lim\limits_{x\to x_0^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0^+}g\left(x\right)=0$.

כמו כן, נוכל להבחין כי הנגזרת של g איננה מתאפסת ומתקיים $g'\left(x\right)=1$ לכל $x\in(x_0,b']$.

בנוסף, מעצם הגדרתה, לכל $x\in(x_0,b']$ מתקבל: $f'\left(x\right)=h'\left(x\right)$.

אם כך, תנאי **כלל לופיטל** מתקיימים, ואזי, בהכרח קיים גם הגבול $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ ואף מתקיים: $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

כעת נבחין כי $L=\lim\limits_{x\to x_0^+}h'\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}$.

מכאן נובע באופן ישיר כי $h'\left(x_0\right)=h'_+\left(x_0\right)=\lim\limits_{x\to x_0^+}h'\left(x_0\right)=L$.

במילים אחרות, f רציפה בימין בx_0.

בצורה דומה, נוכל להוכיח גם עבור $\lim\limits_{x\to x_0^-}h'\left(x\right)=\hat{L}$, הגבול משמאל, שהפונקציה רציפה משמאל בx_0, ומכאן מתקבל כי h' רציפה בx_0.

<u>הרצאה מס' 7</u>

הפונקציה האקספוננציאלית

תחילה נזכיר כי הסדרה $(e_n)_{n=1}^{\infty}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מונטוניות עולה וחסומה (כלומר, $2\le e_n\le 4$ ולכן היא מתכנסת.
כעת נקבע, $\forall n\in\mathbb{N}\ e_n\left(x\right)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

טענה

הסדרה $\left(e_n\left(x\right)\right)_{n=1}^{\infty}$**מונוטונית עולה ממש** החל ממקום מסוים.

הוכחה

נסמן $N=\lfloor |x|\rfloor+1\in\mathbb{N}$ (כשN מסמן את הערך הכי קרוב מצד ימין). בנוסף, נשים לב ש$|x|<N$, ובעקבות כך, לכל $N\le n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי $|x|<n$, כלומר למעשה $-n<x<n$.
כעת מתקבל כי $-1<\frac{x}{n}$, נעביר אגפים ונקבל $0<1+\frac{x}{n}$, עבור כל $N\le n\in\mathbb{N}$.
בדומה להוכחה הרגילה של e, נציב כעת $x_1=x_2=\ldots=x_n=1+\frac{x}{n}$ ובנוסף $x_{n+1}=1$, באי שוויון הממוצעים:

$$\sqrt[n+1]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n\cdot x_{n+1}}\le\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1}}{n+1}$$

ומכאן למעשה מתקבל כי:

$$\begin{aligned}\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdot 1}&\le\frac{n\left(1+\frac{x}{n}\right)+1}{n+1}\Rightarrow\\ \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}&\le\frac{n+1+x}{n+1}=1+\frac{x}{n+1}\Rightarrow\\ \left(1+\frac{x}{n}\right)^n&\le\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}\Rightarrow\\ e_n\left(x\right)&\le e_{n+1}\left(x\right)\end{aligned}$$

טענה

הסדרה $\left(e_n\left(x\right)\right)_{n=1}^{\infty}$חסומה.

הוכחה

נזכיר כי מספיק שנוכיח שיש ל$\left(e_n\left(x\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ **זנב חסום**.
נסמן $N=\lfloor |x|\rfloor+1\in\mathbb{N}$ (כש$\lfloor |x|\rfloor$ מסמן את הערך הכי קרוב מצד ימין). בנוסף, נשים לב ש$|x|<N$, ובעקבות כך, לכל $N\le n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי $|x|<n$, כלומר למעשה $-n<x<n$.
כעת מתקבל כי $-1<\frac{x}{n}$, נעביר אגפים ונקבל $0<1+\frac{x}{n}$, עבור כל $N\le n\in\mathbb{N}$.
בשלב זה, נשתמש ב**אי שוויון ברנולי**, כך שעבור כל $N\le n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$e_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n\frac{x}{n} = 1 + x$. אם כך, אפשר לראות בבירור כי הזנב $\left(e_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ חסום מלרע על ידי $1+x$.

מאידך עבור כל $N \leq n \in \mathbb{N}$ נציב $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1 + \frac{x}{n}$ ובנוסף $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{n+N+1} = \frac{1}{N+1}$, **באי שוויון הממוצעים** ונקבל:

$$\sqrt[n+N+1]{x_1 \cdot x_{n+1} \cdot x_{n+2} \cdot \ldots \cdot x_{n+N+1}} \leq \frac{x_1 \cdot x_{n+1} \cdot x_{n+2} \cdot \ldots \cdot x_{n+N+1}}{n+N+1}$$

וכעת, מתקיים:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n+N+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{N+1}\right)^{N+1}} &\leq \frac{1\left(1+\frac{x}{n}\right) + (N+1)\frac{1}{N+1}}{n+N+1} \Rightarrow \\
\sqrt[n+N+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{(N+1)^{N+1}}} &\leq \frac{n+x+1}{n+N+1} \overset{N>x}{<} 1 \Rightarrow \\
\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{(N+1)^{N+1}} &< (1)^{n+N+1} \Rightarrow \\
\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &\leq (N+1)^{N+1}
\end{aligned}$$

אם כך, הגענו למסקנה שהזנב של $\left(e_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ מונטונית עולה.

ובסיכום מתקיים כי הסדרה $e_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ מתכנסת עבור כל $x \in \mathbb{R}$.

הגדרה:

עבור כל x ממשי נסמן:

$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} e_n(x) = \lim_{n\to\infty} e_n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

נוכל להבחין שמתקיים: $\exp(0) = 1$ ושעבור $\exp(1) = e$.

טענה

$\forall x \in \mathbb{R}\ 1 + x \leq \exp(x)$

הוכחה

נוכיח בתרגיל הבית.

משפט

לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.

הוכחה

נחלק למקרים:

(I) כאשר $0 \leq x$ וגם $0 \leq y$.

נוכל להבחין כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$1 \le 1 + \frac{x+y}{n} \le \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right) \le \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)\left(1 + \frac{xy}{n^2}\right)$$

ולכן, נעלה בחזקת n ונקבל:

$$\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n \le \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \le \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n \left(1 + \frac{xy}{n^2}\right)^n$$

כעת, נוכל להבחין כי כאשר n שואף לאינסוף מתקבל:

$$\underbrace{\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n}_{\exp(x+y)} \le \underbrace{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}_{\exp(x)} \underbrace{\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n}_{\exp(y)} \le \underbrace{\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n}_{\exp(x+y)} \underbrace{\left(1 + \frac{xy}{n^2}\right)^n}_{1}$$

לכן, ממשפט הסנדוויץ, מתקבל כי $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$, כנדרש.

(II) כאשר $xy < 0$ ו $x + y \ge 0$: נוכל להבחין כי עבור $\sqrt{-xy}$ מתקיים, וכאשר n שואף לאינסוף :

$$0 \le \underbrace{\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n}_{\exp(x+y)} \underbrace{\left(1 + \frac{xy}{n^2}\right)^n}_{1} \le \underbrace{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}_{\exp(x)} \underbrace{\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n}_{\exp(y)} < 1 + \frac{x+y}{n}$$

מסקנה:
$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ (נציב $y = -x$ ונקבל $xy < 0$ ו $x + y \ge 0$ ו- $\exp(-x)\exp(x) \cdot = \exp(0) = 1$)

(III) כאשר $xy < 0$ ו $x + y \le 0$.
נסמן: $u = -x, v = -y$. לכן בפרט $uv = xy < 0$, וכמו כן $u + v = -(x+6) \ge 0$.
מ (II) נובע ש $\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)$. וכעת, $\exp(-(x+y)) = \exp(-x)\exp(-y)$.
במילים אחרות, על סמך המסקנה מהטענה הקודמת: $\frac{1}{\exp(x+y)} = \frac{1}{\exp(x)}\frac{1}{\exp(y)}$
ומכאן למעשה: $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

(IV) כאשר $xy < 0$ ו $x + y \le 0$: נסמן $u = -x$ ו $v = -y$ וסיימנו.

נוכל להכליל את המשפט הקודם, באמצעות אינדוקציה על $m \in \mathbb{N}$. כלומר, נוכיח שלכל $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{m} x_k\right) = \exp(x_1 + x_2 + \ldots + x_m) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2) \cdot \ldots \cdot \exp(x_m) = \prod_{j=1}^{m} \exp(x_j)$$

כלומר, אנחנו מכלילים את הטענה מסכימת וכפילת שני איברים, למכפלה וסכימת m איברים.

טענה

יהי $0<h<1$ אזי $1+h \le \exp(h) \le \frac{1}{1-h}$

הוכחה

ראינו כבר שמתקיים $1+x \le \exp(x)$ עבור כל x ממשי (הוכחנו בחסימות). לכן כעת נצטרך להראות את אי השוויון הימני בלבד.

מתקיים, מהטענה שהוכחנו קודם לכן, כי $1-h \le \exp(-h)$, כלומר למעשה $1-h \le \frac{1}{\exp(h)}$.

כעת, נוכל להבחין כי $0<\exp(h)$ ו$0<1-h$. (על פי הנתון ש$0<h<1$) ולכן מתקיים בהכרח מתקיים מאי השויון הקודם כי $\exp(h) \le \frac{1}{1-h}$, כנדרש.

טענה

הפונקציה $\exp(x)$ גזירה מימין ב$x_0=0$.

הוכחה

יהי $0<h<1$. מהטענה הקודמת מתקבל כי $1+h \le \exp(h) \le \frac{1}{1-h}$. במילים אחרות: $h<\exp(h)-1 \le \frac{1}{1-h}$.

אלגברה פשוטה מביאה אותנו לתוצאה הבאה: $1 \le \frac{\exp(h)-1}{h} \le \frac{1}{1-h}$.

ניזכר כעת $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{1}{1-h}=1$ ולכן, ממשפט הכריך: $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{\exp(h)-1}{h}=1$.

הגענו למעשה לכך ש $\exp'_+(0)=1$.

נשים לב שכמסקנה ישירה מכך, גם מתקבל כי $\exp(x)$ רציפה מימין ב$x_0=0$.

טענה

הפונקציה $\exp(x)$ גזירה משמאל ב$x_0=0$.

הוכחה

יהי $0<h<1$. נוכל להבחין שמתקיים (עבור $-h$ מדובר למעשה בגבול שמאלי ל0):

$$\frac{1}{\exp(h)}\frac{\exp(h)-1}{h} = \frac{1-\frac{1}{\exp(h)}}{h} \overset{(*)}{=} \frac{1-\exp(-h)}{h} = \frac{-\exp(-h)-1}{-h}$$

כאשר ב$(*)$ השתמשנו בטענה שהוכחנו במקרה (II) קודם לכן.

על סמך הטענה הקודמת, ומכך ש$\lim\limits_{h\to 0^+}\exp(h)=1$, ו-$\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{\exp(h)-1}{h}=1$, נקבל למעשה ש $1 \le \frac{\exp(h)-1}{h} \le 1+h$.

מכך שהוכחנו ש: $\frac{\exp(h)-1}{h}\frac{1}{\exp(h)} = \frac{\exp(-h)-1}{-h}$ נובע, מאריתמטיקה של גבולות, ש- $\exp_-(0)=1$.

מסקנה

השילוב של שתי הטענות לעיל מביא למסקנה שהפונקציה $\exp$ גזירה ב$x_0=0$ וכמו כן מתקיים: $(\exp)(0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\exp(h)-1}{h}=1$.

טענה

הפונקציה $\exp$ גזירה ב$\mathbb{R}$ ולכל x ממשי מתקיים:

$(\exp)'(x)=\exp(x)$.

הוכחה

נשתמש באנלוגיה לדוגמה שהוכחנו בעבר בפונקציית הסינוס.

בתחילה הוכחנו עבור $x_0=0$.

$\sin'(0) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = 1 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. ולאחר מכן, הוכחנו באמצעות זהות טריגונומטרית, הגענו לכך שהנגזרת של $\sin(x)$ הינה $\cos(x)$.

נעשה כעת פעולה דומה.

יהי $x_0 \in \mathbb{R}$. נשים לב כי לכל $h \neq 0$ מתקיים:

$$\frac{\exp(x_0+h)-\exp(x_0)}{h} = \frac{\exp(x_0)\exp(h)-\exp(x_0)}{h} = \exp(x_0)\frac{\exp(h)-1}{h}$$

כאמור, נצטרך להתבונן במקרה בו h שואף ל0. נוכל להבחין כי קודם לך הוכחנו כי הגבול הימני קיים ושווה ל1. לכן, מאריתמטיקה של גבולות למעשה מתקיים:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\exp(x_0+h)-\exp(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\exp(x_0)\frac{\exp(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\exp(h)-1}{h} = \exp(x_0)$$

כלומר, הנגזרת של $\exp(x_0)$ שווה ל$\exp(x_0)$.

מסקנה

הפונקציה $\exp$ רציפה ומונוטונית עולה ממש ב$\mathbb{R}$.

הוכחה

הפונקציה $\exp$ גזירה ב$\mathbb{R}$ ולכן בהכרח גם רציפה ב$\mathbb{R}$.

מכך שהוכחנו ש $1 + x \le \exp(x)$ נובע גם בהכרח ש $1 \le \exp(x)$ עבור כל $0 \le x$.

מכך ש $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ שבהכרח $0 \le \exp(x) \le 1$ עבור כל $x \le 0$.

אם כך, בהכרח $0 < \exp(x)$ עבור כל x ממשי. מכך ש $(\exp)'(x) = \exp(x) > 0$ נובע אם כן ש $\exp$ מונוטונית עולה ממש ב$\mathbb{R}$.

טענה

עבור כל x רציונלי מתקיים: $\exp(x) = e^x$.

הוכחה

בתרגול.

הגדרה

$e^x := \exp(x)$ עבור כל x ממשי.

כך לדוגמה, $e^{\sqrt{2}} = \exp\left(\sqrt{2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^n$

הערה

שימו לב שזו הפעם הראשונה שאנו מגדירים חזקה עם מערך שיכול להיות לא רציונלי.

טענה

$\lim\limits_{x\to\infty}\exp(x) = \infty$ וכמו כן $\lim\limits_{x\to -\infty}\exp(x) = 0$.

הוכחה

ניזכר כי הפונקציה $\exp$ מונוטונית עולה ממש ב$\mathbb{R}$.

ממשפט הפרוסה, ומהעובדה ש $\exp\left(n\right)=e^{n}>2^{n}$, עבור כל n טבעי, נובע שהפונקציה $\exp$ איננה חסומה מלעיל ולכן $\lim\limits_{x\to\infty}\exp\left(x\right)=\infty$.

כמו כן, נובע מכך ש $\exp\left(-x\right)=\frac{1}{\exp(x)}$ ומאריתמטיקה של גבולות במובן הרחב, נובע כאמור ש$\lim\limits_{x\to-\infty}\exp\left(x\right)=0$.

הרצאה מס' 8

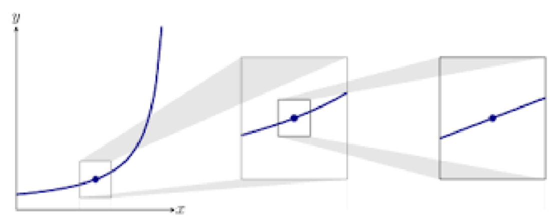
פולינום טיילור

הקדמה

הרעיון האינטואטיבי:
במהלך השיעורים הקרובים נעסוק בטורי טיילור. קודם לכן, נרצה לתת הסבר קצר למשמעות "קירוב". אם ניקח למשל את π, ונרצה למצוא לו ביטוי רציונלי. נוכל לקחת את $\sqrt{10}=3.162\ldots$ למשל, ונוכל להבחין כי $\left|\pi-\sqrt{10}\right|\leq\frac{1}{10}$, כלומר, **ההפרש** בין π ל$\sqrt{10}$ קטן מעשירית (קל לראות זאת באמצעות ההצגה העשרונית). אם נרצה **קירוב קטן יותר** נוכל לקחת את $\frac{22}{7}=3.1428\ldots$ שההפרש בינו לבין π קטן מ $\left(\frac{1}{10}\right)^2=\frac{1}{100}$.
כעת ניגש לישר המשיק.

שאלה:
תהי $f:D\to\mathbb{R}$ ותהי $x_0\in\mathbb{R}$ נקודה פנימית של D. עד כמה המספר $f\left(x_0\right)$ מאפיין את הגרף של f בסביבת הנקודה x_0? מבחינה גיאומטרית, השאלה שקולה ל- "עד כמה הקו הישר האופקי $y=f\left(x_0\right)$ מתאר את הגרף של f בסביבת הנקודה x_0?"

תשובה אינטואטיבית
הישר מתאר את הגרף של f בסביבת הנקודה x_0 אס"ם f פונקציה רציפה בx_0.
מבחינה קונספטואלית נוכל לחזור לתחילת עיסוקנו בנגזרות. חיפשנו למעשה את הקירוב הטוב ביותר של הישר המשיק לגרף בנקודה. התהליך שעשינו הינו בערך כזה:



השאלה שלנו הינה למעשה, **מהו ההפרש בין משוואת המשיק לישר בנקודה ובין הפונקציה**.

הגדרה:
תהי f פונקציה המוגדרת בסביבת נקודה x_0. נאמר שf דיפרנציאבילית בנקודה x_0 אם קיים הישר $l\left(x\right)=mx+b$ כך ש $l\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)$ ומתקיים: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-l(x)}{x-x_0}=0$.
נרצה להוכיח דבר זה, ובכך בעצם נוכל להוכיח כי פונקצית המשיק מתקרבת **"יותר מהר"** לערך הפונקציה בנקודה, מאשר ההתקרבות של x לx_0. לכן, קוראים לישר המקיים דבר זה **קירוב לינארי**.
אם נרצה, נוכל גם לומר $f\left(x\right)=l\left(x\right)+R\left(x\right)$. דהיינו, מבחינה אינטואטיבית, $R\left(x\right)$, **ההפרש**, מבטא את הקירוב שבין המשיק לגרף הפונקציה. בהתאם למה שאמרנו קודם לכן, שהשארית (ההפרש) הולכת וקטנה **מהר יותר** מאשר ההתקרבות של x לx_0, נוכל לומר למעשה כי $\frac{R(x)}{x-x_0}\to 0$ כאשר $x\to x_0$. נוכל להוכיח זאת על ידי העברת אגפים, שהרי $\frac{f(x)-l(x)}{x-x_0}=\frac{R(x)}{x-x_0}$.
(במילים אחרות, ניתן לרשום גם את $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-l(x)}{x-x_0}=0$ בתור $f\left(x\right)=l\left(x\right)+R\left(x\right)$, כאשר $\frac{R(x)}{x-x_0}\to 0$ כאשר $x\to x_0$)

טענה:

תהי f הגזירה בx_0. אז הישר המוגדר על ידי $l\left(x\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+f\left(x_0\right)$ הינו ישר משיק בנקודה, ולכן מתקיים:

$f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+R\left(x\right)$ עבור R כמו שראינו קודם לכן.

הוכחה:

ראשית, נבחין כי עלינו להוכיח כי $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0)}{x-x_0}=0$ (בהתאמה להגדה השקולה כפי שהראינו קודם לכן)

משוואת המשיק לישר בנקודה הינה למעשה: $l\left(x\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+f\left(x_0\right)$.

ולכן, נוכל להבחין כי מתקיים:

$$\frac{f\left(x\right)-l\left(x\right)}{x-x_0}=\frac{f\left(x\right)-\left(f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+f\left(x_0\right)\right)}{x-x_0}=\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}-f'\left(x_0\right)$$

בשלב זה נשים לב כי $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x)}{x-x_0}=f'\left(x_0\right)$ מהגדרת הנגזרת, ולכן למעשה מתקבל:

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-l(x)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)-f'\left(x_0\right)=0$, כנדרש.

דבר זה מוכיח כי הפונקציה מתקרבת **מהר יותר למשיק** מאשר ההתקרבות של x לx_0.

אמנם, לא ניתן הקירוב הלינארי מספיק. לעיתים נצטרך פולינום גדול יותר. תחילה נביא את ההגדרה הכללית, ונסביר אותה לאחר מכן.

משפטים והגדרות

הגדרה

יהי $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ותהי f פונקציה הגזירה n פעמים בנקודה a, כלומר $\left(f\left(a\right),f'\left(a\right),\ldots,f^{(n)}\left(a\right)\right)$ קיימים, אזי הפונקציה:

$$P_{n,f,a}\left(x\right)=f\left(a\right)+\frac{f'\left(a\right)}{1!}\left(x-a\right)+\frac{f''\left(a\right)}{2!}\left(x-a\right)^2+\frac{f^{(3)}\left(a\right)}{3!}+\ldots+\frac{f^{(n)}\left(a\right)}{n!}\left(x-a\right)^n=$$
$$=\sum\frac{f^{(k)}\left(a\right)}{k!}\left(x-a\right)$$

היא פולינום טיילור מסדר n של f סביב a.

הרעיון מאחורי ההגדרה

כאשר מצאנו קירוב לינארי, למעשה דרשנו שתי דרישות: ראשית, ש$P_1\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)$, דהיינו, **שערך המשיק שווה לערך הפונקציה בנקודה** ושנית, ש$P_1'\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)$, כלומר, ש"**השיפוע של המשיק שווה לערך הנגזרת בנקודה**".

לכן נוכל להכליל דבר זה גם עבור $P_n\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)$, וגם ש$P_n^{(n)}\left(x_0\right)=f^{(n)}\left(x_0\right)$.

בנוסף, נוכל להבחין כי כאשר יש לנו פולינום $P\left(n\right)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ מתקיים, לכל $0\le k\le n$, עבור הנגזרת הk כלשהיא:

$P^{(k)}(0)=a_k\cdot k!$. נוכל להוכיח דבר זה, שהרי k הגזירות מבטיחות לנו מחד שהפולינומים בדרגות הנמוכות יותר מתאפסות בוודאות, ומאידך, מהגדרתנו נגזרת של פולינום, שנכפול את a_k ב$k!$. בנוסף, כיוון ש$x=0$, כל הפולינומים הגדולים מk מתאפסים, וסך הכל מתקבל כי $P^{(k)}(0)=a_k\cdot k!\Rightarrow a_k=\frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

אמנם, ההצבה של $x=0$ הייתה מקרה פרטי, שנקרא פולינום מק לורין מסדר n של f.

ובסך הכל נוכל לבחור עבור כל **שורש** a **של הפולינום,** $(x-a)$ **כלשהוא,** ולכן בסך הכל נקבל את ההגדרה דלעיל.

כמו כן, נוכל להבחין כי $P_{1,f,a}(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$ הוא משוואת הקו המשיק לגרף של f בנקודה $(a,f(a))$.

הגדרה

תהי f גזירה n פעמים בנקודה a, אזי הפונקציה:

$$R_{n,f,a}(x)=f(x)-P_{n,f,a}(x)=$$
$$f(x)-\left(f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right)$$

נקראת השארית של פיתוח טיילר מסדר n של f סביב a.

כלומר, מדובר בהכללה למעשה של המקרה הפרטי - **הקירוב הלינארי** שראינו קודם לכן.

הרצאה מס' 9

משפט:

תהי f גזירה n פעמים בנקודה a. אזי מתקיים:

$\lim\limits_{x\to a}\frac{R_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n}=0$.

הוכחה:

באינדוקציה על n.

בסיס האינדוקציה:

כאשר $n=0$, $P_{0,f,a}(x)=f(a)$ ו$(x-a)^0=1$. עלינו להראות כי $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))=0$, וזה כי לפי ההנחה f גזירה 0 פעמים בa, כלומר f רציפה בa.

כאשר $n=1$, $P_{1,f,a}(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$ מתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{1,f,a}(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(f(a)+f'(a)(x-a))}{x-a}=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right)=0$$

צעד האינדוקציה:

כעת, נניח **באינדוקציה מלאה** שכל הפונקציות שעומדות בתנאי המשפט עד סדר $n\geq 1$, ונסיק מכאן עבור כל הפונקציות שעומדות בתנאי המשפט, עבור $n+1$.

תהי f גזירה $n+1$ פעמים בa. אנו כאמור צריכים להראות כי $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n+1,f,a}(x)}{(x-a)^{n+1}}=0$

מכאן נובע כי f' גזירה n פעמים בa. אם כך, היא מקיימת בעקבות כך את הנחת האידנקוציה, כלומר מתקיים כי:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-P_{n,f',a}(x)}{(x-a)^n}=0.$$

ראשית, נשים לב כי $\left(\frac{1}{(k+1)}(x-a)^{k+1}\right)' = \frac{1}{(k+1)!}(x-a)^k \cdot (k+1) = \frac{1}{k!}(x-a)^k$ כשבמהלך האחרון, המונה והמכנה הצטמצמו. נשתמש בטענה זו בפיתוח הביטוי הבא.

נראה כעת מה קורה בפולינום טיילור של הנגזרת מסדר n:

$$P_{n,f',a}(x) = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(3)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(4)}(a)}{3!} + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n \overset{(*)}{=}$$
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k \overset{(**)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}\right)'$$
$$\overset{(***)}{=} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k)!}(x-a)^k\right) \overset{(****)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k)!}(x-a)^k\right) = P'_{n+1,f,a}(x)$$

דהיינו, הוכחנו בסך הכל כי $P_{n,f',a}(x) = P'_{n+1,f,a}(x)$,

כאשר ב$(*)$ השתמשנו בהמרה פשוטה לסיגמא, ב$(**)$ השתמשנו בטענה המקדימה , ב$(***)$ החלפנו את k ב$k+1$, ובהתאמה בכל המחוברים, וב$(****)$ אין שינוי, כיוון שמדובר בגזירה של $f(a)$ שהינו קבוע, דהיינו אמנם מדובר בהוספה של מחובר, אך אמנם מדובר במחובר ששווה ל0.

נרצה להשתמש כעת בכלל לופיטל. נראה שתנאי המשפט מתקיימים:

1. נוכל להבחין כי בהכרח $\lim_{x\to a}(f(x) - P_{n+1,f,a}(x)) = f(a) - f(a) = 0$ (דבר זה נכון בגלל הרציפות של $P_{n+1,f,a}(x)$ וf בa) . כמו כן, נוכל להבחין כי $\lim_{x\to a}(x-a)^{n+1} = 0$.
2. גם המונה וגם המכנה של $\frac{f'(x)-P_{n+1,f,a}(x)}{(x-a)^{n+1}}$ גזירים בסביבה מנוקבת של a שהרי $2 \le n+1$.
3. הנגזרת של המכנה, $(n+1)(x-a)^n$ איננה מתאפסת בסביבה מנוקבת של a.

לכן נוכל להשתמש בכלל לופיטל, ונכתוב:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - P_{n+1,f,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x) - P'_{n+1,f,a}(x)}{(n+1)(x-a)^n} \overset{(**)}{=} \frac{1}{n+1}\lim_{x\to a}\frac{f'(x) - P_{n,f',a}(x)}{(x-a)^n} \overset{(***)}{=} 0$$

כאשר ב$(*)$ השתמשנו בכלל לופיטל, ב$(**)$ השתמשנו בביטוי שפיתחנו בשלב הקודם, וב$(***)$ השתמשנו בהנחת האינדוקציה.

משפט:

תהי f גזירה n פעמים בנקודה a. ויהי Q פולינום מעלה קטנה או שווה n המקיים:

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^n} = 0$.

אזי, $Q = p_{n,f,a}$, כלומר פולינום טיילור מסדר n של f בנקודה a הוא הפולינום **היחיד** ממעלה קטנה או שווה n המקיים את $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^n} = 0$.

הוכחה:

יהיו Q_1 וQ_2 פולינומים ממעלה קטנה או שווה n ששניהם מקיימים:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - Q_1(x)}{(x-a)^n} = 0 = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - Q_2(x)}{(x-a)^n}$$

אם הגבולות קיימים, גם **גבול ההפרש** שלהם קיים, דהיינו:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{Q_1(x)-Q_2(x)}{(x-a)^n}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-Q_1(x)}{(x-a)^n}-\frac{f(x)-Q_2(x)}{(x-a)^n}\right)=0-0=0$$

נגדיר כעת את $S(x)=Q_1(x)-Q_2(x)$. נוכל להבחין כי גם הוא הינו פולינום מדרגה n .
בפרט, קיימים $c_0,c_1,\ldots c_n\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$S(x)=c_0+c_1(x-a)+\ldots+c_n(x-a)^n$$

ראינו כבר קודם כי $\lim_{x\to a}\left(\frac{S(x)}{(x-a)^n}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{Q_1(x)-Q_2(x)}{(x-a)^n}\right)=0$. מכאן נובע בפרט כי גם $\lim_{x\to a}\left((x-a)^n\frac{S(x)}{(x-a)^n}\right)=0$,
שהרי $\lim_{x\to a}(x-a)^n=0$ ועל ידי מכפלת הגבולות. במילים אחרות, נובע מכאן כי $\lim_{x\to a}S(x)=0$.
אם נציב דבר זה בביטוי שקיבלנו קודם לכן, מתקבל כי:

$$\lim_{x\to a}\left(c_0+c_1(x-a)+\ldots+c_n(x-a)^n\right)=0\Rightarrow c_0=0$$

שהרי אם נניח בשלילה ש$c_0\neq 0$, אזי כאשר $x\to a$, כל שאר המחוברים יתאפסו והגבול יהיה שווה לc_0.
אם כך, נוכל לרשום את $S(x)$ בצורה מעט שונה:

$$S(x)=c_1(x-a)+\ldots+c_n(x-a)^n=(x-a)\left(c_1+c_2(x-a)+\ldots+c_n(x-a)^{n-1}\right)$$

כעת, אם נציב בביטוי שקיבלנו קודם לכן:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{S(x)}{(x-a)^n}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{(x-a)\left(c_1+c_2(x-a)+\ldots+c_n(x-a)^{n-1}\right)}{(x-a)^n}\right)=$$
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\left(c_1+c_2(x-a)+\ldots+c_n(x-a)^{n-1}\right)}{(x-a)^{n-1}}\right)$$

כלומר, נקבל כי גם $c_1=0$, מאותם שיקולים שהראינו בשלב הקודם.
אם נמשיך כך (באינדוקציה) עד $c_n=0$, נקבל בסך הכל:

$$S(x)=0=Q_1(x)-Q_2(x)\Rightarrow Q_1(x)=Q_2(x)$$

דבר זה מוכיח את היחידות של Q כפי שרצינו.
פולינום זה מקיים : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^n}=0$, ולכן הינו בהכרח $Q=P_{n,f,a}$, כנדרש.

דוגמה 1

נתבונן ב$f\left(x\right)=Q\left(x\right)$, עם Q שהינו פולינום ממעלה $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. יהי $a\in\mathbb{R}$, ויהי Q פולינום ממעלה n, אזי $Q=P_{n,Q,a}$. כלומר, $Q\left(x\right)$ הינו פולינום טיילור מסדר n של עצמו, סביב כל a,
שהרי $\lim\limits_{x\to a}\frac{Q(x)-Q(x)}{(x-a)^n}=0$, ולכן בהכרח $Q=P_{n,Q,a}$.

דוגמה 2

נתבונן ב$f\left(x\right)=\frac{1}{1-x}$ עם $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ כלשהוא. נרצה למצוא את פולינום טיילור מסדר n של הפונקציה, בנקודה $a=0$.
ניזכר בנוסחה שלמדנו באינפי 1, שבה מתקיים:

$$\forall q\in\mathbb{R}\backslash\{1\}\ \ 1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

אם כך, נציב זאת בנוסחה שלנו ונקבל:

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}\ \ 1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{1}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

נעביר אגפים ונקבל את הדבר הבא:

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}\ \ \frac{1}{1-x}-\left(1+x+x^2+\ldots+x^n\right)=\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

נרצה לסמן $Q\left(x\right)=\left(1+x+x^2+\ldots+x^n\right)$ ונוכל להבחין כי הביטוי הקודם שקול ל:

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}\ \ f\left(x\right)-Q\left(x\right)=\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

כעת, יהי $x\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, ונחלק את שני האגפים ב$x^n$ ונוכל לקבל:

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}\ \ \frac{f\left(x\right)-Q\left(x\right)}{x^n}=\frac{x}{1-x}.$$

אם כך,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-Q(x)}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{1-x}=0$.
המשפט שהוכחנו זה עתה, מאפשר לנו להסיק כי $Q\left(x\right)=P_{n,f,a}$, ובמילים אחרות:

$$Q\left(x\right)=1+x+x^2+\ldots+x^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}\left(0\right)}{k!}\left(x-0\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}\left(0\right)}{k!}x^k$$

זאת אומרת, שני הפולינום שווים, ומכאן שכל המקדמים שלהם שווים. דהיינו, $\forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\ \ \frac{f^{(k)}(0)}{k!}=1$.
ולכן נוכל לומר למעשה , $\forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\ \ f^{(k)}\left(0\right)=k!$.
אם נסכם, נבחין כי המשפט שזה עתה למדנו, מאפשר לנו לקבוע עבור פולינום נתון, מתי הוא פולינום טיילור של הפונקציה, בלי לגזור אותה.

הרצאה מס' 10

משפט טיילור:

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש$a<b$ (או $b<a$), ויהי n מספר **שלם אי שלילי.** תהי f פונקציה בעלת נגזרת $f^{(n)}$, מסדר n **רציפה** בקטע $[a,b]$ (או $[b,a]$) ונגזרת $f^{(n+1)}$ ב(a,b) (או (b,a)) אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ (או $c\in(b,a)$) , אחת לפחות, כך שמתקיים:

$$\begin{aligned} f\left(b\right) &= f\left(a\right)+\frac{f'\left(a\right)}{1!}\left(b-a\right)+\frac{f''\left(a\right)}{2!}\left(b-a\right)^{2}+\ldots+\frac{f^{(n)}\left(a\right)}{n!}\left(b-a\right)^{n}+\frac{f^{(n+1)}\left(c\right)}{(n+1!)}\left(b-a\right)^{n+1} \\ &= f\left(a\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{f^{(i)}\left(a\right)}{i!}\left(b-a\right)^{i}+\frac{f^{(n+1)}\left(c\right)}{(n+1!)}\left(b-a\right)^{n+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}\left(a\right)}{i!}\left(b-a\right)^{i}+\frac{f^{(n+1)}\left(c\right)}{(n+1!)}\left(b-a\right)^{n+1} \end{aligned}$$

כאשר נשתמש במוסכמות הסימון: $f^{(0)}=f$, $\square^{0}=1$ ו$0!=1$.

כמו כן, נשים לב כי הנקודה c תלויה בn, בb ובf.

אם נסכם, נבחין כי ההנחות החזקות יותר של f, מאפשרות לנו לכתוב את השארית בצורה הזאת:

$$R_{n,f,a}=\frac{f^{(n+1)}\left(c\right)}{(n+1!)}\left(x-a\right)^{n+1}$$

הוכחה

נעשה זאת באמצעות **אינדוקציה על** n. נוכיח זאת בהנחה ש$a<b$, אך אמנם, ההוכחה של המקרה $b<a$ זהה כמעט לגמרי.

<u>בסיס האינדוקציה</u>

עבור $n=0$, עולה ממשפט טיילור:

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש$a<b$. תהי f פונקציה **רציפה** בקטע הסגור $[a,b]$ **וגזירה** בקטע הפתוח (a,b):

אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ אחת לפחות כך ש$f\left(b\right)=f\left(a\right)+\frac{f'(c)}{1!}\left(b-a\right)$ ובמילים אחרות: $f'\left(c\right)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

המסקנה הישירה שלנו מבסיס האינדוקציה הינה שמשפט טיילור הינו הכללה של משפט לגרנז'! עבור פונקציות הגזירות מספר פעמים.

<u>עבור $n=1$</u>

נראה את המקרה בו $n=1$ על מנת להמחיש את רעיון ההוכחה.

לפי משפט טיילור, עולה כי אם עבור הפונקציה f, הפונקציה f' **רציפה** בקטע הסגור $[a,b]$ וf' **גזירה** בקטע הפתוח (a,b), אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$, אחת לפחות כך ש:

$$f\left(b\right)=\left(a\right)+\frac{f'\left(a\right)}{1!}\left(b-a\right)+\frac{f''\left(c\right)}{2!}\left(b-a\right)^{2}$$

(יישום פשוט של הנתונים במשפט).

בשלב זה של ההוכחה, נגדיר שתי פונקציות בקטע $[a,b]$:

האחת, $h\left(x\right)=\left(x-a\right)^{2}$ והשנייה $g\left(x\right)=f\left(x\right)-P_{1,f,a}\left(x\right)$ ששווה למעשה, באמצעות הצבה ל- $f\left(x\right)-f\left(a\right)-f'\left(a\right)\left(x-a\right)$.

עבור שתי הפונקציות, בהכרח $g(a)=h(a)=0$.

1. אם כך, תנאי **משפט קושי** מתקיימים h,g פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות ב-(a,b) וגם $h'(x)\neq 0$, עבור כל $x\in(a,b)$), ובעקבות כך, בהכרח ישנה נקודה $z\in(a,b)$ כך ש:

$$\frac{g(b)}{h(b)}\overset{(*)}{=}\frac{g(b)-g(a)}{h(b)-h(a)}=\frac{g'(z)}{h'(z)}\overset{(**)}{=}\frac{f'(z)-f'(a)}{2(z-a)}=\frac{1}{2}\frac{f'(z)-f'(a)}{(z-a)}$$

כאשר ב$(*)$ הסתמכנו על כך ש$g(a)=h(a)=0$. וב$(**)$ גזרנו את הפונקציות בצורה פשוטה.

2. בשלב זה, נבחין כי f' אכן מקיימת את תנאי **משפט לגרנז'** בקטע $[a,z]$ ולכן קיימת נקודה $c\in(a,z)$ כך ש:

$$\frac{f'(z)-f'(a)}{z-a}=(f')'(c)=f''(c)$$

נציב ביטוי זה בביטוי הקודמת שקיבלנו, ונקבל בסך הכל:

$$\frac{g(b)}{h(b)}=\frac{f(b)-P_{1,f,a}(b)}{(b-a)^2}=\frac{1}{2}\frac{f'(z)-f'(a)}{(z-a)}=\frac{1}{2}f''(c)$$

אם נסכם, ונעביר אגפים, נראה שקיבלנו, בסופו של דבר:
$f(b)-P_{1,f,a}(b)=\frac{f''(c)}{2!}(b-a)^2$, כפי שרצינו.

כעת נראה מספר דוגמאות לשימוש במשפט זה.

דוגמה 1

נרשום את נוסחת מקלורין, כלומר, סביב $a=0$, עבור $f(x)=\sin x$ עם $n=6$.

$$f(x)=\sin(x),f'(x)=\cos(x),f''(x)=-\sin(x),f^{(3)}(x)=-\cos(x)$$
$$f^{(4)}(x)=\sin(x),f^{(5)}(x)=\cos(x),f^{(6)}(x)=-\sin(x),f^{(7)}(x)=-\cos(x)$$

ועבור $x=0$:

$$f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=0,f^{(3)}(0)=-1$$
$$f^{(4)}(0)=0,f^{(5)}(0)=1,f^{(6)}(0)=0,$$

נבחר במשפט טיילור $a=0,b=x$ ונקבל כי:

$$\sin x=0+\frac{1}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\frac{0}{3!}x^6+\frac{-\cos(c)}{7!}x^7=$$
$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{\cos(c)}{7!}x^7$$

כעת, אם נבחר למשל $x=\frac{1}{10}$ (עשירית רדיאן, בערך 5.73 מעלות), אזי יתקיים:

$$\sin\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{10}-\frac{1}{3!10^3}+\frac{1}{5!10^5}-\frac{\cos\left(c\right)}{7!}\frac{1}{10^7}$$

כאשר $-\frac{\cos(c)}{7!}\frac{1}{10^7}$ מהווה למעשה את השארית, או אם נרצה את הקירוב.
נחשב את הקירוב ונקבל :

$$\left|\sin\left(\frac{1}{10}\right)-P_6\left(\frac{1}{10}\right)\right|=\left|\frac{\cos\left(c\right)}{7!}\frac{1}{10^7}\right|\leq\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{10^7}<\frac{1}{5}\cdot10^{-10}$$

דוגמה 2

נתבונן בדוגמה שראינו כבר בעבר.
ניקח $f\left(x\right)=\frac{1}{1+x}$ עם $n\in\mathbb{N}$ שרירותי כלשהוא.
נפתח את הנתונים על מנת לקבל תמונה על נגזרות הפונקציות:

$$f\left(x\right)=\frac{1}{1+x},f'\left(x\right)=-\frac{1}{\left(1+x\right)^2},f''\left(x\right)=\frac{1\cdot2}{\left(1+x\right)^2},f^{(k)}=$$
$$\left(-1\right)^k\frac{k!}{\left(1+x\right)^{k+1}},k\in\mathbb{N}\Rightarrow f^{(k)}\left(0\right)=\left(-1\right)^k k!$$

כעת, לכאורה ממשפט טיילור עולה, שקיימת $c\in\left(0,x\right)$ שבעבורה מתקיים:

$$\frac{1}{1+x}=1+\frac{-1}{1!}x^2+\ldots+\left(-1\right)^n x^n+\left(-1\right)^{n+1}\frac{\left(n+1\right)!}{\left(n+1\right)!\left(1+c\right)^{n+2}}x^{n+1}=$$
$$=1-x+x^2+\cdots+\left(-1\right)^n x^+\left(-1\right)^{n+1}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{\left(1+c\right)^{n+2}}x^{n+1}$$

כיוון שמדובר בפונקציה רציונלית, נוכל לחשב את $f\left(2\right)=\frac{1}{3}$.

$$P_{0,f,0}=1,P_{1,f,2}=-1,P_{2,f,2}=3,P_{2,f,2}=-5$$

נוכל להבחין שמתרחשת תופעה מעניינת. בשונה ממה שציפינו, ככל שהn גדל, הערכים מתרחקים מהערך האמיתי! לכאורה, היינו מצפים שנגיע לקירוב "טוב" יותר, ככל שn גדל! אך אכן, הסיבה לכך נובעת מהעובדה שככל שהn גדל, השארית **גדולה יותר!**
במילים אחרות, עלינו לוודא שהשארית אכן **הולכת וקטנה יותר.** ולא להיפך.

הרצאה מס' 11

טורים

הקדמה והגדרות

הגדרה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}=(a_1,a_{2,}a_3,\ldots,a_n,\ldots)$ סדרה ממשית נתונה. נגדיר באמצעותה סדרה חדשה $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ על ידי:

$$s_1=a_1,s_2=a_1+a_2,s_2=a_1+a_2+a_3,\ldots$$

דהיינו אנחנו לוקחים את הסדרה ומסכמים את הרישא שלה. נשים לב שכל איבר בסדרה מוגדר היטב, שהרי הוא סכום סופי של איברים. נוכל להגדיר את האיבר הכללי כך:

$$\forall k\in\mathbb{N}\; s_k=a_1+a_2+\ldots+s_k=\sum_{n=1}^{k}a_n$$

הסדרה $\left(\underbrace{a_1}_{s_1},\underbrace{a_1+a_2}_{s_2},\underbrace{a_1+a_2+a_3}_{s_3},\ldots\right)=(s_k)_{k=1}^{\infty}$ נקראת סדרת הסכומים החלקיים של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

אם $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת (כלומר, אם $\lim\limits_{k\to\infty}s_k=\sum\limits_{n=1}^{k}a_n$ קיים במובן הצר), נסמן את ערכו של הגבול ב$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

טרמינולוגיה

הסימן $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, המסמל את הגבול של סדרת הסכומים החלקיים $(s_k)_{k=1}^{\infty}$, נקרא **טור.**

מטעמי נוחות, המתמטיקאים משתמשים בסימון זה גם לסדרת הסכומים עצמה, $(s_k)_{k=1}^{\infty}$, **בין אם יש לה גבול ובין אם לא**. במילים אחרות, סמל זה מסמל שני דברים **שונים**. כך השאלה "האם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס?", כוונתה לומר שסדרת הסכומים החלקיים מתכנסת. ברוח דומה, נוכל לשאול האם סדרת הסכומים החלקיים **מתבדרת**, או האם הינה **חסומה,** בכך שנשאל "האם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ חסום או מתבדר".

דוגמאות

(I) $a_n=0$, כלומר, $(a_n)_{n=1}^{\infty}=(0,0,0,\ldots)$ וסדרת הסכומים החלקיים שווה כאן:

$$(s_k)_{k=1}^{\infty}=(0,0+0,0+0+0)=(0,0,\ldots,0\ldots)\underset{k\to\infty}{\to}0$$

אם כך, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}0=0$.

(II) $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$. כלומר:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}=\left(\frac{1}{1\cdot 2},\frac{1}{2\cdot 3},0,\ldots\frac{1}{(n\,(n+1))}\right)$$

וסדרת הסכומים החלקיים:

$$s_k=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3},\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\left(\frac{1}{k\left(k+1\right)}\right)$$

נשים לב שמדובר בסכום טלסקופי. ונבחין כי $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$$s_k=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{k+1}\underset{k\to\infty}{\to}1$$

אם כך, הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ מתכנס, וסכומו 1.

(III) $a_k=(-1)^{k+1}$, דהיינו: $(a_n)_{n=1}^{\infty}=(1,-1,1,\ldots)$ ולכן סדרת הסכומים החלקיים:

$$(s_k)_{k=1}^{\infty}=(1,0,\ldots,1,0\ldots)$$

במילים אחרות, הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ מתבדר וחסום.

(IV) $a_n=q^{n-1}$, דהיינו: $(a_n)_{n=1}^{\infty}=\left(1,q,q^2,q^3\ldots\right)$ מדובר בסדרה הנדסית, ולכן סדרת הסכומים החלקיים:

$$s_k=1+q+q^2+\ldots+q^{k-1}=\frac{1-q^k}{1-q}$$

ראינו באינפי 1 שכאשר $-1<q<1$ מתקיים כי $\lim\limits_{k\to\infty}q^k=0$ ולכן $\lim\limits_{k\to\infty}s_k=\frac{1}{1-q}$ ולכן הטור ההנדסי $\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}$ מתכנס וסכומו $\frac{1}{1-q}$.
אם ניקח למשל $q=\frac{1}{2}$ אזי:

$$s_k=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

אמנם, כאשר $q\notin(-1,1)$, אזי הטור ההנדסי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^{n-1}$ מתבדר.

(V) $a_n=\frac{1}{n}$, דהיינו: $(a_n)_{n=1}^{\infty}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\ldots\frac{1}{n}\ldots\right)$.
נראה שהטור ההרמוני מתבדר, כך שנראה שהוא איננו חסום.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots>1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}=\infty$$

(כלומר, החלפנו את שליש ברבע, למשל, והראנו למרות זאת הסכום גדל) בפרט, סכום זה איננו חסום. בנוסף, נשים לב כי:

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)=s_{2^3}>1+3\cdot\frac{1}{2}=\left(1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}}\right)$$

ובאופן אינדוקטיבי, נוכל לומר כי $s_{2^n}>n\cdot\frac{1}{2}\underset{n\to\infty}{\to}\infty$. לכן, ממשפט הפרוסה עולה כי גם הסכום המקורי שואף לאינסוף.

הרצאה מס' 12

משפט

אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

הוכחה

יהי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}s_n=S$. כעת, נביט בתת הסדרה $(s_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ של $(s_n)_{n=1}^{\infty}$. לכן, ממשפט הירושה גם $(s_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, ולאותו הגבול. וכעת:

$$s_{n+1}=a_1+a_2+\ldots+a_{n+1}\Rightarrow a_{n+1}=s_{n+1}-s_n$$

אם כך a_{n+1} הוא הפרש של שתי סדרות מתכנסות, ולפי אריתמטיקה של סדרות מתכנסות:

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}(s_{n+1}-s_n)=\lim_{n\to\infty}s_{n+1}-s_n=S-S=0$$

מספיק שנבחין בכך ש$(a_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ הינה זנב של הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. וניזכר בכך שסדרה מתכנסת אם"ם כל זנב שלה מתכנס ולאותו הגבול.

לכן הוכחנו בהכרח כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

הערה חשובה

מספיק שנתבונן בדוגמה (V) שהבאנו קודם לכן, כדי לראות שלא מדובר באם"ם.

דוגמה

האם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ מתכנס? התשובה היא שלא, כיוון ש$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\neq 0$. כלומר, התנאי ההכרחי לא מתקיים ולכן בהכרח הטור מתבדר!

ניזכר כעת בקריטריון קושי. בקריטריון קושי דרשנו כך: תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב$\mathbb{R}$ ויהיו $m,n\in\mathbb{N}$ כך ש $m\leq n$. מתקיים:

$$\underbrace{\overbrace{a_1+\cdots+a_m}^{s_m}+\cdots+a_n}_{s_n}$$

ולכן בהכרח גם :

$$s_n-s_m=a_{m+1}+\cdots+a_n$$

משפט

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה נתונה ב$\mathbb{R}$. הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אם ורק אם:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}:\ \cdots \forall m,n \in \mathbb{N}\ N \leq m \leq n\ \Rightarrow\ |a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon$$

תכונות של טורים מתכנסים

טענה (כלל הכפל בקבוע באריתמטיקה של טורים)

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה נתונה ויהא $c \in \mathbb{R}$ קבוע נתון. אזי מתקיים:

(I) אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אזי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n)$. מעבר לכך, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

(II) אם $c \neq 0$ ו$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n)$ אזי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס גם הוא.

מסקנה

אם $c \neq 0$ אזי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אס"ם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n)$ מתכנס.

הגדרה

בהינתן מספר טבעי m וסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, נסתכל על m-הזנב שלה $(a_{m+n})_{n=1}^{\infty} = (a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3})$. הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+m}$, המתאים ל$m$-הזנב, $(a_{m+n})_{n=1}^{\infty}$, נקרא m-זנב של הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ והוא יסומן גם $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} a_n$.

טענה (כלל הסכום באריתמטיקה של טורים)

(I) אם הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ו־$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים מתכנסים עם סכומים S,T בהתאמה, אזי מתכנס גם הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n)$$

(II) הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ יכול להתכנס, מבלי שהטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ו$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים.

הוכחה

(I) יהיו $(s_k)_{k=1}^{\infty}$, $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ו$(u_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרות הסכומים החלקיים של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ ו$(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ בהתאמה.
אם כך, מתקיים:

$$\forall k \in \mathbb{N}\ s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n,\ t_k = \sum_{n=1}^{k} b_n,\ u_k = \sum_{n=1}^{k} (a_n + b_n)$$

נוכל להבחין כי לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$u_k = \sum_{n=1}^{k} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=1}^{k} b_n = s_k + t_k$$

ולמעשה הוכחנו כי $(s_k+t_k)_{k=1}^{\infty}=(u_k)_{k=1}^{\infty}$.

(II) נתבונן בסדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}=\left((-1)^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$, ו$(b_n)_{n=1}^{\infty}=((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$. כלומר, מתקיים בסך הכל:

$$\sum_{n=1}^{k}(a_n+b_n)=\left((-1)^{n-1}+(-1)^n\right)=\sum_{n=1}^{k}0=0$$

משפט

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה נתונה. אזי שלושת הטענות הבאות שקולות:

(I) הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

(II) כל m-הזנב של $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

(III) קיים m-זנב של הטור שמתכנס.

במקרה כזה מתקיים למעשה: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{m}a_n+\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}a_n$

הוכחה

תהי $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת הסכומים החלקיים של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש $s_k=\sum\limits_{n=1}^{k}a_n$.

כעת יהי $m\in\mathbb{N}$ ותהי $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת הסכומים החלקיים של m הזנב, דהיינו של של $(a_{m+n})_{n=1}^{\infty}$, כך שמתקיים:

$t_k=\sum\limits_{n=1}^{k}a_{m+n}=\sum\limits_{n=m+1}^{m+k}a_n$.

בפרט מתקיים כי:

$$\forall k\in\mathbb{N}\ s_{m+k}=\sum_{n=1}^{m+k}a_n=\sum_{n=1}^{m}a_n+\sum_{n=m+1}^{m+k}a_n=s_m+t_k$$

נוכיח כעת: $(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$.

$(2)\Leftarrow(1)$: על פי הנתון $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס, ובמילים אחרות, סדרת הסכומים החלקיים $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת.

ממה שהראינו קודם לכן עולה כי $\forall k\in\mathbb{N}\ t_k=-s_m+s_{m+k}$.

כאמור, $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ולכן בהכרח גם $(s_{m+k})_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת, שהרי מדובר בזנב שלה.

אך נשים לב כי s_m הינו קבוע שאיננו תלוי בk, ולכן מאריתמטיקה של גבולות עולה כי $\lim\limits_{k\to\infty}t_k=-s_m+\lim\limits_{k\to\infty}s_{m+k}$.

כלומר, לפי ההגדרה - $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}a_n=-s_m+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$

$m\in\mathbb{N}$ היה שרירותי, ולכן בהכרח כל m זנב של הטור יתכנס.

$(3)\Leftarrow(2)$: כמובן שאם כל m-זנב של $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס, אז יש m-זנב כלשהוא שמתכנס.

$(1)\Leftarrow(3)$: יהי $m\in\mathbb{N}$ כך שm- הזנב של $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס. ולפי הסימון שהראינו קודם לכן, $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ מתכנס.

כמו כן, הראינו קודם לכן כי $\forall k\in\mathbb{N}\ s_{m+k}=s_m+t_k$. מאריתמטיקה של גבולות עולה כי $(s_{m+k})_{k=1}^{\infty}$ מתכנס.

טורים חיוביים

הגדרה
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ייקרא טור חיובי אם $a_n \geq 0$ עבור כל $n \in \mathbb{N}$.

טענה
יהי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי. אזי סדרת הסכומים החלקיים $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה, ולכן יש לה גבול במובן הרחב. בפרט טור חיובי מתכנס, **אם ורק אם** סדרת הסכומים החלקיים שלו חסומה, ואז מתקיים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{s_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

הוכחה
נשים לב כי $\forall k \in \mathbb{N}\ s_{k+1} = s_k + a_{k+1} \geq s_k \geq 0$ וכל השאר טענות מאינפי 1.

טענה (מבחן ההשוואה)
יהיו $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות כך ש$0 \leq a_n \leq b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. אזי:
(i) אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס עם סכום T, אזי גם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס וסכומו S מקיים $S \leq T$.
(ii) אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אזי גם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר.

הוכחה
תהי $(s_k)_{n=1}^{\infty}$ סדרת הסכומים החלקיים של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ובמילים אחרות: $\forall k \in \mathbb{N}\ s_k = a_1 + \ldots + a_k$.
כמו כן, תהי $(t_k)_{n=1}^{\infty}$ סדרת הסכומים החלקיים של $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, ובמילים אחרות: $\forall k \in \mathbb{N}\ t_k = b_1 + \ldots + b_k$.
נוכיח באינדוקציה כי $\forall k \in \mathbb{N}\ 0 \leq s_k \leq t_k$.
(i) אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אזי $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל. ולכן בהכרח מתקיים:

$$\forall k \in \mathbb{N}\ s_k \leq t_k \leq \sup\{t_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

אם כך, גם $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל, וממילא מתקיים:

$$\sup\{s_k \mid k \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{t_k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

לכן ממילא גם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, והסכום שלו שווה ל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

(ii) אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ היה מתכנס, אזי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ גם הוא היה מתכנס, לפי סעיף (i), זאת בניגוד לנתון.

טענה
יהיו $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות אי שליליות החל ממקום מסוים. נניח שקיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n$ מתקיים $a_n \leq b_n$. אזי:

(i) אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אזי גם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

(ii) אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אזי גם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר.

נעיר כי לא בהכרח ש$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

הוכחה

נוכל להפעיל את מבחן ההשוואה על N-הזנבות $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$ ו$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} b_n$.

טענה (מבחן ההשוואה באמצעות מנה)

יהיו $p,q \in \mathbb{R}$ כך ש$0 < p \leq q$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית ו $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה אי שלילית.

אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n$ מתקיים $0 < p \leq \frac{a_n}{b_n} \leq q$ אזי הטורים$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ו $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

הוכחה

$\Leftarrow$: יהי $N \in \mathbb{N}$ שמבטיח לנו ש$0 < p \leq \frac{a_n}{b_n} \leq q$ לכל $N < n$.

אזי לכל $N < n$ מתקיים אם כן:

$$0 \leq pb_n \leq a_n \leq qb_n$$

אם כך, לכל $N + 1 < k \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$0 < p \sum_{n=N+1}^{k} b_n \leq \sum_{n=N+1}^{k} a_n \leq q \sum_{n=N+1}^{k} b_n$$

אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, אזי גם $\sum\limits_{n=N+1}^{k} b_n$ מתכנס, וכמובן שגם $q \sum\limits_{n=N+1}^{k} b_n$.

כעת $\sum\limits_{n=N+1}^{k} a_n$ חסום מלעיל, ומתכנס, ולכן גם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

$\Rightarrow$: אם נניח ש$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אזי גם הזנב שלו $\sum\limits_{n=N+1}^{k} a_n$ מתכנס, ולכן $p \sum\limits_{n=N+1}^{k} b_n$ חסומה מלעיל, ולכן גם $\sum\limits_{n=N+1}^{k} b_n$ וגם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

טענה (מבחן ההשוואה הגבולי)

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית ו$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה אי שלילית, אם $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ קיים במובן הצר, אזי הטורים$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ו $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

טענה (מבחן המנה של דאלמבר)

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של איברים חיוביים.

(I) אם קיים $q \in \mathbb{R}$ עם $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$ כמעט תמיד, אזי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

(II) אם $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ כמעט תמיד, אזי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

הוכחה

(I) יהי $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N\leq n$ מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q<1$ ובמילים אחרות, $a_{n+1}<qa_n$.
כעת, אם נתבונן באינדקס N, אותו קיבענו, נוכל לומר שלמעשה גם מתקיים־ $a_{N+1}<qa_N$.
נמשיך צעד אחד קדימה, ואז נקבל, בצורה דומה:

$$a_{N+2}<qa_{N+1}\Rightarrow a_{N+2}<qa_{N+1}<q^2a_N$$

כלומר, למעשה כפלנו את המחובר השמאלי מאי השווין הקודם ב־ q, וממילא על מנת לחבר בין אי השוויונים, כפלנו את המחובר השמאלי.
נוכל להמשיך באופן אינדוקטיבי ולומר כי:

$$\forall j\in\mathbb{N}\,a_{N+j}<q^ja_N\Rightarrow\sum_{n=N+1}^{N+k}a_n=\sum_{j=1}^{k}a_{N+j}<\sum_{j=1}^{k}q^ja_N=a_N\sum_{j=1}^{k}q^j$$

נשים לב כי $\sum\limits_{j=1}^{k}q^j$ מתכנס, בתור טור גיאומטרי עם $0<q<1$ ולכן גם $a_N\sum\limits_{j=1}^{k}q^j$ מתכנס, ואם כך, לפי קריטריון ההשוואה, גם $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}a_n$ מתכנס, וגם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

(II) אם $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$ כלומר, a_n הינה סדרה מונטונית עולה, החל ממקום מסוים. ולכן הטור לבטח מתבדר.

טענה (מבחן המנה הגבולי)

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של איברים חיוביים.
(I) אם $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=L<1$ אזי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.
(II) אם $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=L>1$ אזי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.
(III) אם $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=L=1$ אזי הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}$ לא מכריע את שאלת התכנסות או ההתבדרות של $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

טענה (מבחן השורש)

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של איברים חיוביים.
(I) אם $q\in\mathbb{R}$ עם $\sqrt[n]{a_n}<q<1$ כמעט תמיד, אזי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.
(II) אם $\sqrt[n]{a_n}\geq 1$ באופן שכיח, אזי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.

טענה (מבחן השורש הגבולי)

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של איברים חיוביים.
(I) אם $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L<1$ אזי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.
(II) אם $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L>1$ אזי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.
(III) אם $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L=1$ אזי הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ לא מכריע את שאלת התכנסות או ההתבדרות של $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

הרצאה מס' 13

טענה (מבחן העיבוי או הדילול)

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה אי שלילית ומונוטונית יורדת. אזי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם הטור **המעובה** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ **מתכנס.**

הוכחה

תהי $(s_k)_{n=1}^{\infty}$ סדרת הסכומים החלקיים של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, כלומר, $\forall k \in \mathbb{N}\ s_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$.

תהי $(t_k)_{n=1}^{\infty}$ סדרת הסכומים החלקיים של $(2^n a_{2^n})_{n=1}^{\infty}$, כלומר, $\forall k \in \mathbb{N}\ t_k = \sum\limits_{n=1}^{k} 2^n a_{2^n}$.

נבחין כי $(t_k)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה כי $(2^n a_{2^n})_{n=1}^{\infty}$ סדרה אי שלילית.

$\Leftarrow$ על פי הנתון, הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, כלומר $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ מתכנס. בפרט $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ **חסומה מלעיל.**

נוכל לשים לב שלמעשה מתקיים הדבר הבא (בעקבות המונוטוניות יורדת):

$$\begin{aligned}
&t_k = \sum_{n=1}^{k} 2^n a_{2^n} = 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots + 2^k a_{2^k} \leq \\
&(a_1 + a_2) + 2\left(a_3 + a_4\right) + 2\left(a_5 + \ldots + a_8\right) + \ldots + 2\left(a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}\right) \leq \\
&2 \cdot \sum_{n=1}^{k} a_n = 2s_k
\end{aligned}$$

במילים אחרות $(t_k)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל על ידי $2s_k$, כלומר $2\sum\limits_{n=1}^{k} a_n = 2s_k$ ‏$(t_k)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית וחסומה ולכן בהכרח $\sum\limits_{n=1}^{k} 2^n a_{2^n}$ מתכנס.

$\Rightarrow$ על פי הנתון, הטור $\sum\limits_{n=1}^{k} 2^n a_{2^n}$ מתכנס, כלומר $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ מתכנס. בפרט $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ **חסומה מלעיל.**

כעת, נתבונן בתת הסדרה $\left(s_{k_p}\right)_{p=1}^{\infty}$ של $(s_k)_{k=1}^{\infty}$, המוגדרת על ידי $k_p = 2^p - 1$ ונוכיח שהינה חסומה:

$$\begin{aligned}
s_{k_p} &= \sum_{n=1}^{2^p-1} a_n = a_1 + \underbrace{(a_2 + a_3)}_{a_3 \leq a_2} + \underbrace{(a_4 + \ldots + a_7)}_{(a_7, a_6 \ldots) \leq a_4} + \underbrace{(a_8 + \ldots + a_{15})}_{(a_{15}, a_{14} \ldots) \leq a_8} + \ldots (a_{2(p-1)} + \ldots + a_{2^p-1}) \\
&\overset{(i)}{\leq} a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + \ldots + a_4) + (a_8 + \ldots + a_8) + \ldots (a_{2^{p-1}} + \ldots + a_{2^{p-1}}) \overset{(ii)}{=} \\
&\sum_{n=1}^{p} 2^{n-1} a_{2^{n-1}} \overset{(iii)}{=} a_1 + \sum_{n=1}^{p-1} 2^n a_{2^n} = a_1 + t_{p-1} \leq a_1 + \sum_{n=1}^{k} 2^n a_{2^n}
\end{aligned}$$

קיבלנו בסך הכל כי תת הסדרה $\left(s_{k_p}\right)_{p=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל ולכן $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ בהכרח גם היא חסומה (שהרי הינה מונוטונית יורדת וממשפט באינפי 1), ומכאן ש־$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, כנדרש.

דוגמה

יהי β מספר ממשי נתון. עבור אילו ערכים של β הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\beta}}$?

לכל n טבעי נסמן $a_n=\frac{1}{n^{\beta}}$. נשים לב ש$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית.

כעת, אם $\beta\leq 0$, אזי $a_n=n^{-\beta}$ לכל n ואז בהכרח $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\beta}}$ מתבדר. לכן נניח ש$\beta>0$.

נשים לב שבמצב כזה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **מונוטונית יורדת** ולכן נוכל להשתמש ב**מבחן העיבוי.**

כעת, לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$2^n\cdot a_{n^n}=2^n\cdot\frac{1}{(2^n)^{\beta}}=\frac{1}{(2^n)^{\beta-1}}=\frac{1}{(2^{\beta-1})^n}=\left(\frac{1}{2^{\beta-1}}\right)^n$$

נוכל לסמן $q=\frac{1}{2^{\beta-1}}$. כלומר, קיבלנו שהטור המעובה $\sum_{n=1}^{\infty}2^na_{2^n}$שווה בסך הכל ל $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$. מדובר בטור הנדסי, ולכן נרצה לבדוק שהמנה קטנה מ1. כלומר, בסך הכל, **אם ורק אם** $q=\frac{1}{2^{\beta-1}}<1\Rightarrow\beta>1$.

טורים כלליים

עד כה, השגנו אוסף של קריטריונים להתכנסות או התבדרות של טורים חיוביים, בעקבות העובדה שטור חיוביים הם מונטונים עולים. נשים לב שאם טור חיובי כמעט תמיד, ניתן להסתכל על הזנב החיובי ולהפעיל עליו את הקריטריונים. בצורה דומה, אם הטור שלילי כמעט תמיד, המכפלה ב(-1) תיתן לנו טור חיובי כמעט תמיד, איתו נוכל להתמודד.

כעת ננסה לבדוק בטורים ששליליים וחיובים באופן שכיח.

הגדרה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים אי שלילים שיורדת מונוטונית ($0\leq a_{n+1}\leq a_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$), כך ש$\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

טור מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4\ldots$

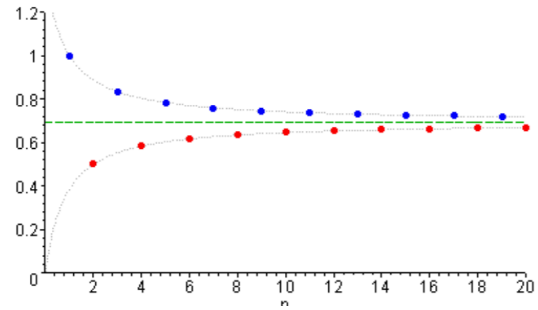
או מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n=-a_1+a_2-a_3+a_4\ldots$

נקרא **טור לייבניץ.**

הערות

(I) אם הסדרה מתאפסת, אז היא אפס כמעט תמיד. ולכן נתעסק במקרה בו הסדרה מונוטונית יורדת **וחיובית ממש**.

(II) נתבונן כדוגמה בטור ההרמוני המתחלף $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, שהינו טור לייביניץ. נשתמש בטור זה על מנת להמחיש את האינטואיציה שמאחורי המשפט.



כאשר הסכומים החלקיים האי זוגיים $(s_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$ מתאימים לנקודות הכחולות ויורדים מונוטונית לL מסוים.
ואילו הסכומים החלקיים זוגיים $(s_{2k})_{k=1}^{\infty}$ מתאימים לנקודות האדומות ועולים מונוטונית לL מסוים.
נוכל להבחין כי סדרת הקטעים $([S_{2k},S_{2k-1}])$ מקיימת את תנאי **הלמה של קנטור** וזאת הסיבה כי **טור לייבניץ** הינו **טור מתכנס.**

משפט לייבניץ

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים אי שליליים שיורדת מונוטונית לאפס, אזי:

(I) הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס.

(II) אם $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=S$ אזי $0\le a_1-a_2\le S\le a_1$.

(III) m- הזנב של הטור r_m מקיים ש $|r_m|\le a_{m+1}$. ובמילים אחרות $\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n\right|\le a_{m+1}$

הוכחה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים **אי שליליים**, **מונוטונית ואפסה.** תהי $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת הסכומים החלקיים של $\left((-1)^{n+1}a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ (ולא של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$).

(I) נבחין כי תת הסדרה של האיברים הזוגיים $(s_{2k})_{k=1}^{\infty}$ עולה ותת הסדרה $(s_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$ יורדת. אזי מתקיים:

$$\forall k\in\mathbb{N}\ s_{2(k+1)}-s_{2k}=\sum_{n=1}^{2k+2}(-1)^{n+1}a_n-\sum_{n=1}^{2k}(-1)^{n+1}a_n=-a_{2k+2}+a_{2k+1}\ge 0$$
$$\forall k\in\mathbb{N}\ s_{2(k+1)-1}-s_{2k-1}=\sum_{n=1}^{2k+1}(-1)^{n+1}a_n-\sum_{n=1}^{2k-1}(-1)^{n+1}a_n=a_{2k+1}-a_{2k}\le 0$$

נוכיח כי $\forall k\in\mathbb{N}\ s_{2k}\le s_{2k-1}$, כלומר למעשה, מתקיים לכל $k\in\mathbb{N}$:

$$s_{2k}=s_{2k-1}+(-1)^{2k+1}\cdot a_{2k}=s_{2k-1}-a_{2k}\le s_{2k-1}-1$$

כעת נוכיח שההפרש בין שתי הקצוות שואף לאפס:

$$\lim_{k\to\infty}(s_{2k-1}-s_{2k})=\lim_{k\to\infty}\left(-1\,(-1)^{2k+1}a_{2k}\right)=\lim_{k\to\infty}a_{2k}=0$$

בסך הכל מתקיים שסדרת הקטעים $([s_{2k}, s_{2k-1}])$ מקיימת את תנאי הלמה של קנטור, ולכן $(s_{2k})_{k=1}^{\infty}$ ו $(s_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$ מתכנסות ולאותו גבול. לכן, ממה שהוכחנו באינפי 1 עולה כי $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת גם היא, כנדרש.

(II) נבחין כי מהלמה של קנטור נובע שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים: $s_{2k} \le S \le s_{2k-1}$. אם נפתח זאת נקבל: $0 \le a_1 - a_2 = s_2 \le S \le s_1 = a_1$, כנדרש.

(III) נתבונן בשלב זה בm הזנב של הטור:

$$r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n - \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n+1} a_n = S - s_m$$

כעת, אם m זוגי, אזי מתקיים:

$$r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_{m+1} - a_{m+2} + a_{m+3} \dots$$

כלומר, r_m בעצמו הינו טור לייבניץ, ולכן $0 \le a_{m+1} - a_{m+2} \le r_m \le a_{m+1}$.
אם m אי זוגי זוגי, אזי מתקיים:

$$r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = -a_{m+1} + a_{m+2} - a_{m+3} \dots$$

כלומר$-r_m = a_{m+1} - a_{m+2} + a_{m+3}$.
ומאותם שיקולים נקבל כי, ולכן $0 \le -r_m \le a_{m+1}$.
בסך הכל קיבלנו $|r_m| \le a_{m+1}$

התכנסות בהחלט

הגדרה

נאמר ש$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **מתכנס בהחלט** אם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אבל $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ איננו מתכנס, נאמר שהינו **מתכנס על תנאי**.

טענה

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, אזי הוא מתכנס. כלומר, התכנסות בהחלט גוררת התכנסות.

הוכחה

מחד מתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n| - |a_n| - a_n\right)$$

על פי הנתון, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס. וכמו כן מתקיים $0 \le |a_n| - a_n \le 2|a_n|$.

כעת, לפי מבחן ההשואה, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| - a_n$ מתכנס. לכן, לפי כלל הסכום, גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, כנדרש.

<u>הוכחה חלופית</u>

יהי $\varepsilon > 0$. אזי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ ולכל $p \in \mathbb{N}$ מתקיים: $\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$.

כעת, לכל $p \in \mathbb{N}$ ו-$n > N$ מתקיים:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_n| < \varepsilon$$

כשאי השוויון נוצר בעקבות כללי ערך מוחלט. לכן הטור עצמו מקיים את תנאי קושי וממילא מתכנס.

<u>הרצאה מס' 14</u>

דוגמאות

(I) הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. טור הערכים המוחלטים הינו: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right|$ שאכן מתכנס. ולכן גם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ מתכנס. דהיינו, טור זה הינו טור מתכנס בהחלט.

(II) אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ בעל זנב חיובי מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.

(III) הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ שהינו טור לייבניץ, מתכנס, אבל $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ איננו מתכנס, ולכן טור זה הינו טור המתכנס על תנאי.

(IV) הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n^2}$. מתקיים: $\left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$. ולכן בהכרח ממבחן ההשוואה $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right|$ מתכנס. ובמילים אחרות, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n^2}$ מתכנס.

נשים לב שנוכל להשתמש בטענות אלו בתור מבחני התכנסות. ראשית, בהינתן טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, נוכל לבדוק התכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ שהינו חיובי.

דוגמה

יהי $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$. כעת, נתבונן בקבוצת הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}$. לשם הנוחות, נסמן $a_n = \frac{\lambda^n}{n}$. אנו לא יודעים אם λ שלילי או חיובי, ולכן נבדוק:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|\lambda|^{n+1} n}{(n+1)\cdot|\lambda|^n} = |\lambda|$$

אם כך, מתקיים בסך הכל:

(I) אם $|\lambda|<1$, אזי לפי מבחן דלמבר גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

(II) אם $|\lambda|>1$, אזי לפי מבחן דלמבר $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתבדר. אנו יודעים כי $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ איננה אפסה, לכן בפרט $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

(III) אם $|\lambda|=$**1**. אז עבור $\lambda=1$ נקבל את הטור ההרמוני שהינו מתבדר, ועבור $\lambda=-1$ נקבל טור לייבניץ שמתכנס, אך **בתנאי**.

הגדרה

יהי $\alpha\in\mathbb{R}$. נגדיר: $\alpha^{+}=\frac{|\alpha|+\alpha}{2}, \alpha^{-}=\frac{|\alpha|-\alpha}{2}$. כאשר α^{+} נקרא **החלק החיובי** של α ואילו α^{-} נקרא **החלק השלילי** של α.

טענה

יהי $\alpha\in\mathbb{R}$. אזי מתקיים:

(i) $0\le\alpha^{+}$

(ii) $0\le\alpha^{-}$

(iii) $\alpha^{+}=\begin{cases}\alpha & 0\le\alpha\\ 0 & \alpha\le 0\end{cases}$

(iv) $\alpha^{-}=\begin{cases}0 & 0\le\alpha\\ -\alpha & \alpha\le 0\end{cases}$

(v) $\alpha^{+}+\alpha^{-}=|\alpha|$

(vi) $\alpha^{+}-\alpha^{-}=\alpha$

הוכחה

מגיעה מיידית מההגדרה והתכונות של הערך המוחלט.

דוגמה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ הסדרה המוגדרת על ידי $(a_n)=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}=\left(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6}\dots\right)$$

וכעת מתקיים:

$$(a_n^{+})_{n=1}^{\infty}=\left(1,-0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{5}\dots\right)$$

$$(a_n^-)_{n=1}^{\infty} = \left(0, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6} \ldots\right)$$

נוכיח כעת את המשפט שהוכחנו קודם לכן בצורה מורחבת.

משפט

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס. ובנוסף, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ מתכנסים לסכומים P ו-N בהתאמה, כאשר הם מקיימים: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = P - N$.

הוכחה

לפי הטענות שהראינו קודם לכן, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $|a_n| \leq a_n^+ \leq 0$ ו-$|a_n| \leq a_n^- \leq 0$.

כעת, לפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים, עולה באופן ישיר כי הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ גם הם מתכנסים.

אם כך, מתקיים מאריתמטיקה של טורים מתכנסים:

$$P - N \overset{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \overset{(**)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^+ - a_n^-\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

כאשר $(*)$ נובע מכלל הסכום, ו-$(**)$ נובע מהטענה שהוכחנו קודם לכן.

טענה

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ מתבדרים לאינסוף.

הוכחה

נבחין כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ הם טורים חיוביים. ולכן כל אחד מהם או מתכנס או מתבדר לאינסוף.

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ היו מתכנסים שניהם, אזי בהכרח, מאריתמטקיה של טורים מתכנסים עולה:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^+ + a_n^-\right) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

לפי זה עולה כי $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס. אך לפי הנתון $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסת על תנאי, כלומר מדובר בסתירה.

אם רק אחד מהם מתכנס, בה"כ, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, אז מתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + a_n^-\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

לפי זה, עולה כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ מתכנס, ולכן חזרנו למקרה הראשון, שהוביל לסתירה. מכאן, שאף אחד משני הטורים איננו מתכנס, כנדרש.

סוגריים בטורים

הגדרה

נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ מתקבל מהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ על ידי הכנסת סוגריים, כאשר קיימת סדרה $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה ממש של מספרים טבעיים, כך שמתקיים:

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1} \\
b_2 &= a_{n_1} + a_{n_1+2} + \ldots + a_{n2} \\
&\vdots \\
b_{k+1} &= a_{n_{k+1}+1} + a_{n_{k+1}+2} + \ldots + a_{n_{k+1}}
\end{aligned}$$

כלומר, מתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n1}}_{b_1} + \underbrace{a_{n_1} + a_{n_1+2} + \ldots + a_{n2}}_{b_2} + \ldots + \underbrace{a_{n_{k+1}+1} + a_{n_{k+1}+2} + \ldots + a_{n_{k+1}}}_{b_{k+1}}$$

משפט

יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס עם סכום S ו־$\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ אשר מתקבל מ־$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ על ידי הכנסת סוגריים, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ מתכנס וסכומו S.

הערה

לא מדובר ב"אם ורק אם".

מסקנה

אם ניקח טור מתכנס ונכניס לו סוגריים, הוא עדיין יתכנס ולאותו סכום.

אך אמנם הכנסת סוגריים לטור מתבדר יכולה להפוך אותו למתכנס.

אם ניקח טור, נכניס לו סוגריים, והטור החדש יתכנס, זה לא אומר כלום על על הטור המקורי.

הרצאה מס' 15

האינטגרל המסוים

בתיכון הגדרנו שטחים בצורה אינטואטיבית, אך לא הגדרנו זאת בצורה פורמלית.
בפרק זה ננסה להגדיר מושג חדש שיעזור לנו להכריע בצורה פורמלית, ושיעזור לנו **בין היתר** לשייך לחלק מפיסות המישור מספר אי שלילי ונקרא לו שטח.

סכומי דרבו

הגדרה

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש$a<b$.
חלוקה (partition) של הקטע $[a,b]$ היא קבוצה סופית של נקודות מהקטע $[a,b]$ הכוללת גם את a וגם את b.
סימון:
יהיו $n\in\mathbb{N}$. אם $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$, נהוג לסמן את הנקודות כך ש:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

אם לא נאמר אחרת, כל חלוקה היא חלוקה מסודרת.

הערה

הקבוצה $\{a,b\}$ גם היא חלוקה של הקטע $[a,b]$, הנקראת החלוקה הטריוויאלית של $[a,b]$.

הגדרה

תהי $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$.
קוטר החלוקה P הוא אורך תת הקטע הארוך ביותר המוגדר על ידי שתי נקודות עוקבות מP .
מסמנים את קוטר החלוקה ב$\Delta\left(P\right)$:
$\Delta\left(P\right)=\max\limits_{1\leq i\leq n}\left(x_i-x_{i-1}\right)$.

דוגמה

יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהי P_n $\left\{0,\frac{1}{2^{n-1}},\ldots,\frac{1}{4},\frac{1}{2},1\right\}$ חלוקה של הקטע $[0,1]$.
אזי למעשה מתקיים:

$$\Delta\left(P_1\right)=\Delta\left(\{0,1\}\right),\Delta\left(P_2\right)=\Delta\left(\left\{0,1,\frac{1}{2}\right\}\right),\Delta\left(P_3\right)=\Delta\left(\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right\}\right)$$

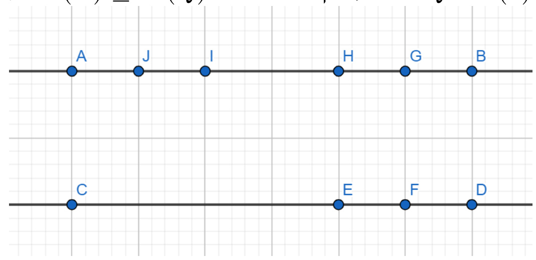
ובאופן כללי נוכל לומר כי $\frac{1}{2}=\Delta\left(P_n\right)=\Delta\left(\left\{0,\frac{1}{2^{n-1}},\ldots,\frac{1}{4},\frac{1}{2},1\right\}\right)$, עבור כל $2\leq n$.

הגדרה

יהיו P וQ חלוקות של $[a,b]$. אם $P\subseteq Q$, נאמר שQ הוא **עידון** של P.
(למשל בדוגמה הקודמת, $P_2\subseteq P_3$ אך)

הערות

(I) אם Q הוא עידון של P אז $\Delta(Q) \leq \Delta(P)$. (למשל, בדוגמה הבאה, Q הוא עידון של P והקוטר קטן)



(II) בהינתן שתי חלוקות P ו-$\tilde{P}$ של $[a,b]$, גם $P \cup \tilde{P}$ הינה חלוקה של $[a,b]$ ($P \cup \tilde{P}$ סופית, וגם $\{a,b\} \subseteq P \cup \tilde{P}$).
נשים לב שמתקיים $P \subseteq P \cup \tilde{P}$ וגם $\tilde{P} \subseteq P \cup \tilde{P}$, ולכן החלוקה $P \cup \tilde{P}$ היא בו זמנית עידון של P וגם של $\tilde{P}$.
הקבוצה $P \cup \tilde{P}$ נקראת ה**עידון המשותף** של P ו-$\tilde{P}$.

הגדרה (סכומי דרבו)

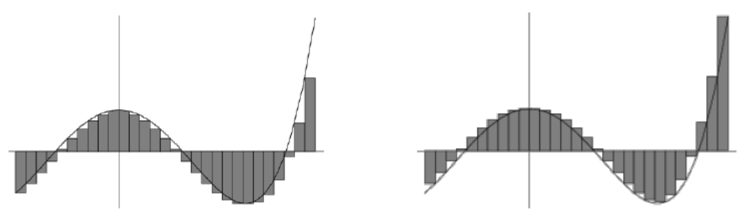
תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה **חסומה** בקטע הסגור $[a,b]$. ותהי $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$. לכל $i \in \{1,2,\dots,n\}$ נסמן:

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)\,, \quad M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

נגדיר את סכום דרבו תחתון של f ביחס לחלוקה P ע"י : $L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$

נגדיר את סכום דרבו עליון של f ביחס לחלוקה P ע"י : $U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$.

אם נתייחס לסכום עליון, למשל מבחינה מפורשת, הרעיון הינו בכל פעם לקחת את ה**סופרימום** של **הפעלת הפונקציה** על איבר בין השניים המצוינים, ולכפול אותו בהפרש בין ביניהם. ולאחר מכן לסכום ביניהם.



סכום דרבו עליון של f = $U(f,P)$ סכום דרבו תחתון של f = $L(f,P)$

דוגמא

תהי $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & x \in \{0,1\} \end{cases}$. ותהי $P = \{0, \frac{1}{3}, 1\}$ חלוקה של $[0,1]$. במקרה זה מתקיים:

$$U\left(f,P\right)=\underbrace{\frac{1}{2}}_{\sup\left\{ f(x)\mid 0\leq x\leq\frac{1}{3}\right\} }\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{3}-0\right)}_{x_{2}-x_{1}}+\underbrace{1}_{\sup\left\{ f(x)\mid\frac{1}{3}\leq x\leq1\right\} }\cdot\underbrace{\left(1-\frac{1}{3}\right)}_{x_{3}-x_{2}}=\frac{5}{6}$$

$$L\left(f,P\right)=\underbrace{0}_{\inf\left\{ f(x)\mid 0\leq x\leq\frac{1}{3}\right\} }\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{3}-0\right)}_{x_{2}-x_{1}}+\underbrace{\frac{1}{3}}_{\inf\left\{ f(x)\mid\frac{1}{3}\leq x\leq1\right\} }\cdot\underbrace{\left(1-\frac{1}{3}\right)}_{x_{3}-x_{2}}=\frac{2}{9}$$

טענה

לכל חלוקה P של $[a,b]$ מתקיים: $L\left(f,P\right)\leq U\left(f,P\right)$

(כלומר, בכל חלוקה, סכום דרבו העליון גדול מסכום דרבו התחתון.)

הוכחה

ההוכחה מתבצעת בעקבות העובדה שהסופרימום של החלוקה גדול מהאינפימום של החלוקה:

$$U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}M_{i}\left(x_{i}-x_{i-1}\right)-\sum_{i=1}^{n}m_{i}\left(x_{i}-x_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(M_{i}-m_{i}\right)\left(x_{i}-x_{i-1}\right)\geq0$$

טענה

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה **חסומה** בקטע הסגור $[a,b]$. ותהי $P=\left\{ x_{0},x_{1},\ldots,x_{n}\right\}$ חלוקה של $[a,b]$.

יהי $\hat{x}\in[a,b]$ ותהי $\hat{P}=P\cup\left\{ \hat{x}\right\}$ עידון של P ע"י תוספת של **נקודת חלוקה אחת**.

אזי מתקיים:

$$L\left(f,P\right)\leq L\left(f,\hat{P}\right)\leq U\left(f,\hat{P}\right)\leq U\left(f,P\right)$$

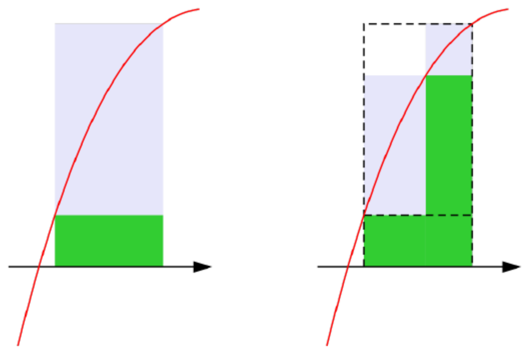
בנוסף מתקיים:

$$L\left(f,\hat{P}\right)-L\left(f,P\right)\leq\left(M-m\right)\Delta\left(P\right),\ \ U\left(f,P\right)-U\left(f,\hat{P}\right)\leq\left(M-m\right)\Delta\left(P\right)$$

כאשר $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}f\left(x\right)$ ומצד שני $m=\inf\limits_{x\in[a,b]}f\left(x\right)$.

בצורה אינטואיטיבית, הרעיון הינו שהוספת נקודת החלוקה מקטינה את ההפרש בין סכום דרבו העליון לסכום דרבו התחתון.

בנוסף, ההפרש בין סכום דרבו העליון החדש לסכום דרבו הקודם, קטן מההפרש בין ההפרש בין הסופרימום לאינפימום כפול הקוטר של החלוקה המקורית)



הוכחה

נוכיח את הטענה עבור סכומי דרבו עליונים. עבור סכומי דרבו תחתונים הטענה מקבילה.

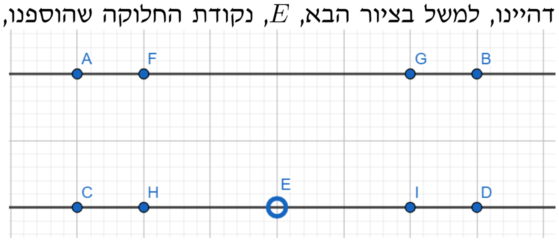
יהי $\hat{x} \in [a,b]$ ותהי $\hat{P} = P \cup \{\hat{x}\}$ עידון של P ע"י תוספת של **נקודת חלוקה אחת**.

אם $\hat{x} \in P$ אזי $\hat{P} = P$ וכל הטענה טריוויאלית.

אם לא, אזי קיים j כך ש$\hat{x}$ נמצאת בתוך תת הקטע הj של P:

$x_{j-1} < \hat{x} < x_j$.

דהיינו, למשל בציור הבא, E, נקודת החלוקה שהוספנו, נמצאת בין F ובין G:



נסמן:

$$M_1 = \sup_{x_{j-1} \leq x \leq \hat{x}} f(x)\,,\; M_2 = \sup_{\hat{x} \leq x \leq x_j} f(x)$$

(כלומר, M_1 הינו הסופרימום של הפעלת הפונקציה על הקטע בין $\hat{x}$ והנקודה הקטנה ממנו, ו M_2 הינו הסופרימום של הפעלת הפונקציה על הקטע בין $\hat{x}$ והנקודה הגדולה ממנו)

מעצם ההגדרה של סכום דרבו מתקיים:

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{j-1} M_i (x_i - x_{i-1}) + M_j (x_j - x_{j-1}) + \sum_{i=j+1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

נציב כעת את הערכים של $\hat{P}$ ונקבל:

$$U\left(f, \hat{P}\right) = \sum_{i=1}^{j-1} M_i (x_i - x_{i-1}) + M_1 (\hat{x} - x_{j-1}) + M_2 (x_j - \hat{x}) - \sum_{i=j+1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

נוכל להבחין מכאן:

$$(*)\ U(f,P)-U\left(f,\hat{P}\right)=M_j\left(x_j-x_{j-1}\right)-M_1\left(\hat{x}-x_{j-1}\right)-M_2\left(x_j-\hat{x}\right)$$

מעצם הגדרתו, מתקיים כי $[x_{j-1},\hat{x}]\subseteq[x_{j-1},x_j]$, ולכן בהכרח $\sup_{x\in[x_{j-1},x_j]}f(x)\le\sup_{x\in[x_{j-1},\hat{x}]}f(x)$, כלומר $M_1\le M_j$.

באותה צורה, מכך ש$[\hat{x},x_j]\subseteq[x_{j-1},x_j]$, נובע כי $M_2\le M_j$.

אם נציב במה שקיבלנו קודם לכן, נבחין שמתקיים:

$$U(f,P)-U\left(f,\hat{P}\right)\ge M_j\left(x_j-x_{j-1}\right)-M_j\left(\hat{x}-x_{j-1}\right)+M_j\left(x_j-\hat{x}\right)=0$$

דבר זה מביא אותנו למסקנה כי $U(f,P)\ge U\left(f,\hat{P}\right)$.

בצורה סימטרית, נראה כי $L(f,P)\le L\left(f,\hat{P}\right)$:

מכך ש־$[x_{j-1},\hat{x}]\subseteq[x_{j-1},x_j]$, ש$\inf_{x\in[x_{j-1},x_j]}f(x)\ge\inf_{x\in[x_{j-1},\hat{x}]}f(x)\ge\sup_{x\in[x_{j-1},\hat{x}]}f(x)$.

ולמעשה, $m_j\le M_2$.

הראנו כבר קודם כי $L\left(f,\hat{P}\right)\le U\left(f,\hat{P}\right)$, ולכן נקבל בסופו של דבר:

$$L(f,P)\le L\left(f,\hat{P}\right)\le U\left(f,\hat{P}\right)\le U(f,P)$$

אם כך נקבל, בסופו של דבר:

$$\begin{aligned}U(f,P)-U\left(f,\hat{P}\right)&\overset{(I)}{=}M_j\left(x_j-x_{j-1}\right)-M_1\left(\hat{x}-x_{j-1}\right)-M_2\left(x_j-\hat{x}\right)\\&\overset{(II)}{\le}M_j\left(x_j-x_{j-1}\right)-m_j\left(\hat{x}-x_{j-1}\right)-m_j\left(x_j-\hat{x}\right)\\&\overset{(III)}{=}M_j\left(x_j-x_{j-1}\right)-m_j\left(x_j-x_{j-1}\right)\overset{(IV)}{=}\left(M_j-m_j\right)\left(x_j-x_{j-1}\right)\\&\overset{(V)}{\le}(M-m)\left(x_j-x_{j-1}\right)\overset{(VI)}{\le}(M-m)\Delta P\end{aligned}$$

ב(I) פיתחנו את ההגדרה על סמך $(*)$ שפיתחנו בחלק הקודם, ב(II) הסתמכנו על כך שאנו מחסירים איבר קטן יותר (הוכחנו שקטן רגע קודם לכן)

ב(III) איחדנו את המקטע כולו, ב(IV) איחדנו את האיברים, ב(V) הסתמכנו שוב על כך שהקטנו את הסופרימום והגדלו את האינפימום,

וב(VI) הסתמכנו על כך שהקוטר קטן כאשר מעדנים את החלוקה.

כלומר, קיבלנו בסופו של דבר כי $U(f,P)-U\left(f,\hat{P}\right)\le(M-m)\Delta P$.

הרצאה מס' 16

הגדרה

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה בקטע הסגור $[a,b]$.

נסמן $M=\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\},\ m=\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$.

נגדיר את **התנודה** של f על הקטע $[a,b]$ על ידי $\omega_f([a,b]) = M - m$.

טענה

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה, ותהי P חלוקה כלשהיא של $[a,b]$.
יהי Q עידון של P המתקבל מהחלוקה P על ידי תוספת של k נקודות חלוקה.
אזי מתקיים:

$$L(f,P) \le L(f,Q) \le U(f,Q) \le U(f,P)$$

בנוסף מתקיים:

$$L(f,Q) - L(f,P) \le k\omega\Delta P,\ \ 0 \le U(f,P) - U(f,Q) \le k\omega\Delta(P)$$

כאשר $\Delta(P)$ הוא קוטר החלוקה P ו-$\omega = \omega_f([a,b]) = M - m$.

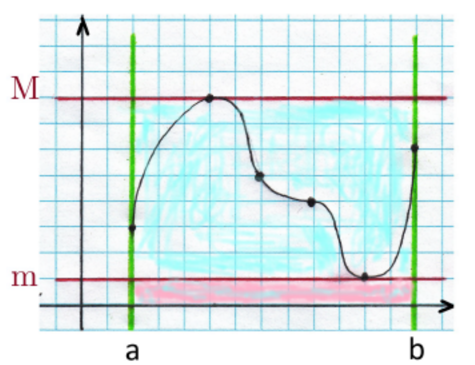
טענה

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה בקטע הסגור $[a,b]$. נסמן:

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)\,,\ \ M_i = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

לכל שתי חלוקות P ו-$\tilde{P}$ של $[a,b]$ מתקיים:

$$m(b-a) \le L(f,P) \le U\left(f,\tilde{P}\right) \le M(b-a)$$



הוכחה

מעצם הגדרתה, כל חלוקה של $[a,b]$ מכילה את החלוקה הטריוואלית $\{a,b\}$.
לכן בהכרח מתקיים:

$$m\left(b-a\right)=L\left(f,\left\{a,b\right\}\right)\leq L\left(f,P\right)$$

וגם:

$$U\left(f,\tilde{P}\right)\leq U\left(f,\left\{a,b\right\}\right)=M\left(b-a\right)$$

כעת נשים לב כי $\tilde{P}\subset P\cup\tilde{P}$ וגם $P\subset P\cup\tilde{P}$ ולכן בהכרח נובע כי :

$$L\left(f,P\right)\leq L\left(f,P\cup\tilde{P}\right)\leq U\left(f,P\cup\tilde{P}\right)\leq U\left(f,\tilde{P}\right)$$

האינטגרל ואיטנגרביליות

הגדרה

תהי $f\ [a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה. נגדיר:

$$\mathscr{L}=\left\{L\left(f,P\right)\ |\ P\text{ partition of }[a,b]\right\},\mathscr{U}=\left\{U\left(f,P\right)\ |\ P\text{ partition of }[a,b]\right\}$$

$\mathscr{L}$ ו$\mathscr{U}$ קבוצות לא ריקות של מספרים ממשיים, ולכן לפי הטענה הקודמת, מתקיים כי:

$$\forall u\in\mathscr{U}\ \forall l\in\mathscr{L}:\ l\leq u$$

הקבוצות $\mathscr{L}$ ו$\mathscr{U}$ חסומות מלעיל ומלרע בהתאמה.
בנוסף, המספריים הממשיים $\sup\mathscr{L}$ ו$\inf\mathscr{U}$ קיימים, ולכן, לפי טענה מאינפי 1 מתקיים $\sup\mathscr{L}\leq\inf\mathscr{U}$.

הגדרה

המספר $\sup\mathscr{L}$ כפי שהוגדר לעיל, יכונה **האינטגרל התחתון** של f ב$[a,b]$ ויסומן $\underline{\int_{a}^{b}}f\left(x\right)dx$.

המספר $\inf\mathscr{U}$ פי שהוגדר לעיל, יכונה **האינטגרל העליון** של f ב$[a,b]$ ויסומן $\overline{\int_{a}^{b}}f\left(x\right)dx$.

דוגמאות

(I) יהיו $a,b,\lambda\in\mathbb{R}$, כך ש$a<b$. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ הפונקציה הקבועה המוגדרת ע"י:
$\forall x\in[a,b]\ \ f\left(x\right)=\lambda$.
תהי $P=\left\{x_{0},x_{1,}\ldots,x_{n}\right\}$ חלוקה כלשהיא של $[a,b]$. מתקיים:

$$m_{i}=\inf\left\{f\left(x\right)|x\in[x_{i-1},x_{i}]\right\}=\lambda\quad,\quad M_{i}=\sup\left\{f\left(x\right)|x\in[x_{i-1},x_{i}]\right\}=\lambda$$

כעת מתקיים כי:

$$L\left(f,P\right)=U\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda\left(x_i-x_{i-1}\right)=\lambda\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{i-1}\right)=\lambda\left(b-a\right)$$

ובסך הכל קיבלנו:

$$\mathscr{L}=\mathscr{U}=\left\{\lambda\left(b-a\right)\right\}\Rightarrow\underline{\int_a^b}f\left(x\right)dx=\overline{\int_a^b}f\left(x\right)dx=\lambda\left(b-a\right)$$

(II) יהיו $a,b\in\mathbb{R}$, כך ש $a<b$. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציית דיריכלה המוגדרת ע"י $f\left(x\right)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\cap[a,b]\\ 0 & x\in[a,b]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

תהי $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ חלוקה כלשהיא של $[a,b]$.

נבחין כי הרציונלים והאי רציונלים צפופים ב$\mathbb{R}$ ולכן כל קטע חלוקה $[x_{i-1},x_i]$ מכיל גם רציונלים וגם אי רציונלים.

מכאן נקבל בסך הכל כי:

$$m_i=\inf\left\{f\left(x\right)|x\in[x_{i-1},x_i]\right\}=0\quad,\quad M_i=\sup\left\{f\left(x\right)|x\in[x_{i-1},x_i]\right\}=1$$

ובסך הכל:

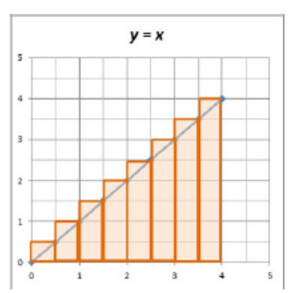
$$U\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}M_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}1\left(x_i-x_{i-1}\right)=b-a$$
$$L\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}0\left(x_i-x_{i-1}\right)=0$$

בסך הכל, $\mathscr{U}=\{b-a\}$ ו$\mathscr{L}=\{0\}$.

ולמסקנה:

$$\underline{\int_a^b}f\left(x\right)dx=0\neq\overline{\int_a^b}f\left(x\right)dx=b-a$$

(III) יהי $0<b$ נתון, ותהי $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת ע"י $f\left(x\right)=x$.



תהי $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ חלוקה כלשהיא של $[0,b]$.

נשים לב כי f מונוטונית עולה ב$[x_{i-1},x_i]$ ולכן:

$$m_i=\inf\left\{f\left(x\right)\ |\ x\in[x_{i-1},x_i]\right\}=f\left(x_{i-1}\right)=x_{i-1}$$
$$M_i=\sup\left\{f\left(x\right)\ |\ x\in[x_{i-1},x_i]\right\}=f\left(x_i\right)=x_i$$

ולכן מכאן נקבל:

$$L\left(f,p\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}\left(x_i-x_{i-1}\right)$$

וגם:

$$U\left(f,p\right)=\sum_{i=1}^{n}M_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i\left(x_i-x_{i-1}\right)$$

נוכל להבחין בקלות כי בניגוד לדוגמה הקודמת, אי אפשר לקבל ביטוי חלופי ללא סכימה ל$L\left(f,P\right)$ וגם ל$U\left(f,P\right)$. במקרה הפרטי בו כל n קטעי החלקוה שווי ערך, נוכל לקבל ביטוי חלופי, כך שלמעשה מתקיים, עבור כל קטע חלוקה: $x_i-x_{i-1}=\frac{b}{n}$ לכל $1\le i\le n$, ולמעשה מתקיים:

$$x_0=0,x_1=\frac{b}{n},x_2=\frac{2b}{n},\ldots,x_{n-1}=\frac{\left(n-1\right)b}{n},x_n=\frac{nb}{n}=b$$

נסמן חלוקה אחידה זו של $[0,b]$ בP_n:

$$P_n=\left\{0=\frac{0b}{b},\frac{b}{n},\frac{2b}{n},\ldots,\frac{\left(n-1\right)b}{n},\frac{nb}{n}=b\right\}=\left\{\frac{ib}{n}\mid 1\le i\le n\right\}$$

לכן נקבל בסך הכל:

$$L\left(f,P_n\right)=\sum_{i=1}^{n}x_{i-1\int}\left(x_i-x_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(i-1\right)b}{n}\cdot\frac{b}{n}=\frac{b^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\cdot\left(i-1\right)=\frac{b^2}{n^2}\left(0+1+2+\ldots+n-1\right)$$

וגם:

$$U\left(f,P_n\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{ib}{n}\cdot\frac{b}{n}=\frac{b^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\cdot i=\frac{b^2}{n^2}\left(1+2+3+\ldots+n\right)$$

כעת, נוכל להשתמש בנוסחת סדרה חשבונית, ונקבל: $0+1+2+\ldots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$ וגם $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

אם כך, בשילוב הטענה הקודמת, נוכל לקבל:

$$L\left(f,P_n\right)=\frac{b^2}{n^2}\left(0+1+2+\ldots+n-1\right)=\frac{b^2}{n^2}\cdot\frac{n\left(n-1\right)}{2}=\frac{b^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

וגם:

$$U\left(f,P_n\right)=\frac{b^2}{n^2}\left(1+2+3+\ldots+n\right)=\frac{b^2}{n^2}\cdot\frac{n\left(n+1\right)}{2}=\frac{b^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

נשים לב שלמעשה מכך ש$\left\{\frac{b^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ |\ n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{L\left(f,P_n\right)\ |\ n\in\mathbb{N}\right\}\subseteq\mathscr{L}$ עולה כי $\sup\left\{\frac{b^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ |\ n\in\mathbb{N}\right\}\leq$ $\mathscr{L}$ וגם מכך ש $\left\{\frac{b^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\ |\ n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{U\left(f,P_n\right)\ |\ n\in\mathbb{N}\right\}\subseteq\mathscr{U}$, עולה כי $\inf\mathscr{U}\leq\inf\left\{\frac{b^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\ |\ n\in\mathbb{N}\right\}$

נבחין כי הסדרה $\left(\frac{b^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ מונטונית עולה, ולכן:

$$\sup\left\{\frac{b^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ |\ n\in\mathbb{N}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{b^2}{2}$$

.

כמו כן, הסדרה $\left(\frac{b^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ מונטונית יורדת ולכן:

$$\inf\left\{\frac{b^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ |\ n\in\mathbb{N}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{b^2}{2}$$

קיבלנו, בסופו של דבר כי:

$$\frac{b^2}{2}\leq\sup\mathscr{L}=\int\limits_{\underline{0}}^{b}f\left(x\right)dx\leq\int\limits_{0}^{\bar{b}}f\left(x\right)dx=\inf\mathscr{U}\leq\frac{b^2}{2}$$

ולמסקנה, נוכל לומר: $\int\limits_{\underline{0}}^{b}f\left(x\right)dx=\int\limits_{0}^{\bar{b}}f\left(x\right)dx=\frac{b^2}{2}$.

הגדרה

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$, כך ש$a<b$. ותהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נאמר שf **אינטגרבלית** ב$[a,b]$, אם ורק אם מתקיים השוויון: $\int\limits_{\underline{a}}^{b}f\left(x\right)dx=\int\limits_{a}^{\bar{b}}f\left(x\right)dx$

במקרה זה מסמנים את הערך המשותף ב$\int\limits_{a}^{b}f\left(x\right)dx$ ומספר זה נקרא האינטגרל של f ב$[a,b]$.

דוגמאות

(I) יהיו $a,b,\lambda\in\mathbb{R}$, כך ש$a<b$. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ הפונקציה הקבועה המוגדרת ע"י:

$f\left(x\right)=\lambda\ \ \forall x\in[a,b]$. ראינו כבר כי $\int\limits_{\underline{a}}^{b}f\left(x\right)dx=\int\limits_{a}^{\bar{b}}f\left(x\right)dx=\lambda\left(b-a\right)$.

כלומר f אינטגרבילית ב$[a,b]$ ומתקיים: $\int\limits_{a}^{b}f\left(x\right)dx=\int\limits_{a}^{b}\lambda dx=\lambda\left(b-a\right)$.

(II)

(III) יהי $b > 0$ נתון, ותהי $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת ע"י $f(x) = x$. ראינו כבר קודם לכן כי $\bar{\int_0^b} f(x)\,dx = \underline{\int_0^b} f(x)\,dx = \frac{b^2}{2}$, ולכן f אינטגרבילית ב$[0,b]$ ומתקיים:

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b x dx = \frac{b^2}{2}$.

הגדרה

אם $f(x) \geq 0$, ו־f **אינטגרבילית ב־**$[a,b]$**,** אזי המספר האי שלילי $\int_a^b f(x)\,dx$ נקרא גם ה**שטח** של הקבוצה $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$.

תזכורת של למת החתכים מאינפי 1

יהיו $L, U \subseteq \mathbb{R}$ לא ריקות כך ש$\forall l \in L, \forall u \in U\ l \leq u$, אזי ארבעת התנאים הבאים שקולים:

(I) קיים $c \in \mathbb{R}$ יחיד כך ש: $\forall l \in L, \forall u \in U\ l \leq c \leq u$

(II) $\sup(L) = \inf(U)$

(III) $\forall \varepsilon > 0\ \exists l \in L\ \exists u \in U\ u - l < \varepsilon$

(IV) קיימות שתי סדרות $(l_n)_{n=1}^{\infty}$ ו־ $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$u_n \in U \wedge l_n \in L$ ו־$\lim_{n\to} (u_n - l_n) = 0$.

למת החתכים עבור סכומי דרבו

תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה. אזי התנאים הבאים שקולים:

(I) קיים $c \in \mathbb{R}$ יחיד כך שלכל שתי חלוקות P_1, P_2 של $[a,b]$ מתקיים: $L(f,P_1) \leq c \leq U(f,P_2)$

(II) f אינטגרבילית ב$[a,b]$ $\Leftrightarrow \sup \mathscr{L} = \inf \mathscr{U}$

(III) לכל $\varepsilon > 0$ קיימות שתי חלוקות P_1, P_2 של $[a,b]$ כך שמתקיים: $U(f,P_2) - L(f,P_1) < \varepsilon$

(IV) קיימות שתי סדרות של חלוקות $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ ו־ $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$\lim_{n\to\infty} (U(f,Q_n) - L(f,P_n)) = 0$.

הרצאה מס' 17

טענה (תנאי דרבו לאינטיגרביליות)

תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה. אזי f אינטגרבילית ב־$[a,b]$ אם"ם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה P של $[a,b]$ כך שמתקיים $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

הוכחה

$\Leftarrow$ נתון כי f אינטגרבילית ב$[a,b]$, כלומר $\bar{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

לכן, לפי למת החתכים, לכל $\varepsilon > 0$ קיימות שתי חלוקות P_1, P_2 של $[a,b]$ כך שמתקיים: $U(f,P_2) - L(f,P_1) < \varepsilon$.

נתבונן בעידון המשותף שלהם, $P_1 \cup P_2$, כך שמתקיים:

$$L(f,P_1) \leq L(f,P_1 \cup P_2) \leq U(f,P_1 \cup P_2) \leq U(f,P_2)$$

כלומר, בסך הכל התנאי הבא מתקיים:

$$U(f,P_1 \cup P_2) - L(f,P_1 \cup P_2) < U(f,P_2) - L(f,P_1) < \varepsilon$$

לכך בסך הכל, החלוקה $P=P_1\cup P_2$ מקיימת את הרצוי לנו.

$\Leftarrow$ על פי הנתון, לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P של$[a,b]$ כך שמתקיים $U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)<\varepsilon$.

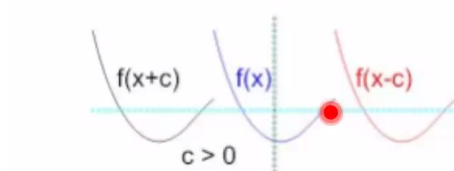
כלומר, בסך הכל התנאי השלישי בלמת החתכים קיים ולכן f אינטגרבילית ב$[a,b]$.

סיכום תכונות האינטגרל:

יהיו $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ו$g:[a,b]\to\mathbb{R}$ שתי פונקציות אינטגרביליות ב$[a,b]$, ויהיו $c,\lambda\in\mathbb{R}$.

1. (הומוגניות) הפונקציה λf גם היא אינטגרבילית ב$[a,b]$ ומתקיים: $\int\limits_a^b\left(\lambda x\right)\left(x\right)dx=\lambda\int_a^b f\left(x\right)dx$
2. (אדיטיביות) הפונקציה $f+g$ גם היא אינטגרבילית ב$[a,b]$ ומתקיים: $\int\limits_a^b\left(f+g\right)\left(x\right)dx=\int_a^b f\left(x\right)dx+\int_a^b g\left(x\right)dx$
3. (הפרש) הפונקציה $f-g$ גם היא אינטגרבילית ב$[a,b]$ ומתקיים: $\int\limits_a^b\left(f-g\right)\left(x\right)dx=\int_a^b f\left(x\right)dx-\int_a^b g\left(x\right)dx$.
4. פונקצית המכפלה $f\cdot g$ גם היא אינטגרבילית ב$[a,b]$ (אבל אין **כפליות!** האינטגרל של המכפלה לא שווה למכפלת האינטגרלים).
5. אם קיים קבוע ממשי $m>0$ כך ש$m<\left|g\left(x\right)\right|$:$\forall x\in[a,b]$, אז הפונקציה $\frac{f}{g}$ היא אינטגרבילית ב$[a,b]$.
6. (חיוביות) אם $0\leq f$ (כלומר $0\leq f\left(x\right)$ לכל x ב$[a,b]$), אז, $0\leqslant\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$.
7. (מונוטוניות) אם $f\leq g$ (כלומר $f\left(x\right)\leq g\left(x\right)$ לכל x ב$[a,b]$) אז $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx\leqslant\int\limits_a^b g\left(x\right)d$.
8. (ערך מוחלט) הפונקציה $|f|$ גם היא אינטגרבילית ב$[a,b]$ ומתקיים: $\left|\int\limits_a^b f\left(x\right)dx\right|\leqslant\int\limits_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx$
9. (ירושה) אם $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ מקיימים $a\leq\alpha\leq\beta$ אזי הפונקציה f גם אינטגרבילית ב$[\alpha,\beta]$.
10. (יחידה) הפונקציה הקבועה $f\left(x\right)=1$ אינטגרבילית ב$[a,b]$ ומתקיים $\int\limits_a^b 1dx=\left(b-a\right)$
11. (אינווריאנטיות להזזה) תהי הפונקציה $h:[a-c,b-c]\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $h\left(x\right)=f\left(x+c\right)$ לכל $x\in[a-c,b-c]$. אזי h אינטגרבילית ב$[a-c,b-c]$, ומתקיים:

$$\int\limits_{a-c}^{b-c}h\left(x\right)dx=\int\limits_{a-c}^{b-c}f\left(x+c\right)\left(x\right)dx=\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$$

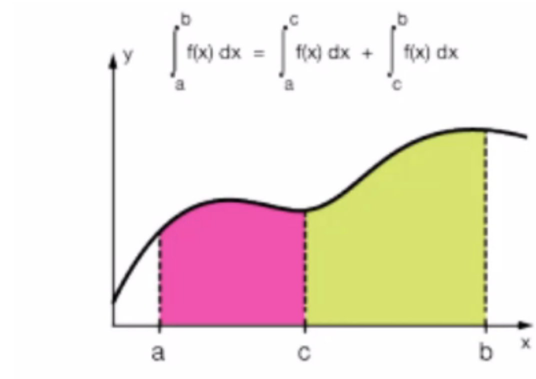


12. (הומותטיה) עבור $0<m\in\mathbb{R}$ נגדיר את הפונקציה $h:\left[\frac{a}{m},\frac{b}{m}\right]\to\mathbb{R}$ על ידי $h\left(x\right)=f\left(mx\right)$ לכל $x\in\left[\frac{a}{m},\frac{b}{m}\right]$, אזי h אינטגרבילית ב$\left[\frac{a}{m},\frac{b}{m}\right]$ ומתקיים:

$$\int\limits_{a/m}^{b/m}h\left(x\right)dx=\int\limits_{a/m}^{b/m}f\left(mx\right)\left(x\right)dx=\frac{1}{m}\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$$

13. (אדיטיביות לאיחוד קטעים בלי נקודות פנימיות משותפות) אם $a<c<b$ והפונקציה f אינטגרבילית ב$[a,c]$ וב$[c,b]$ אזי f אינטגרבילית ב$[a,b]=[a,c]\cup[c,b]$ ומתקיים:

$$\int_a^b h(x)\,dx=\int_a^c f(x)+\int_c^b f(x)$$



הגדרה

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש$a<b$ ותהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית ב$[a,b]$, נגדיר:

$$\int_a^a f(x)\,dx=0\ ,\ \int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

טענה

יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ ותהי f פונקציה אינטגרבילית על $\{\min\{a,b,c\},\max\{a,c,c\}\}$, אזי ללא קשר לסדר הנקודות a,b,c על הישר הממשי, מתקיים: $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

הוכחה

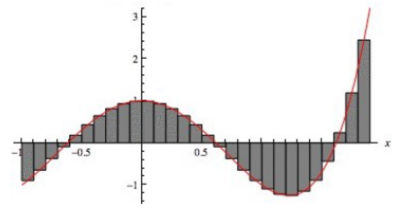
עלינו לבדוק את כל המקרים הבאים:

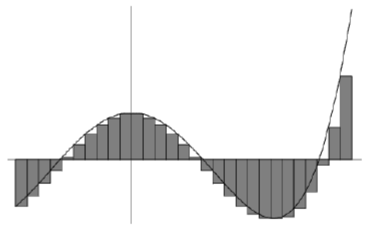
$$a=b=c$$

$$a=b\neq c\quad,\quad a=c\neq b\quad,\quad a\neq b=c$$
$$a<c<b\quad,\quad a<b<c\quad,\quad b<a<c,\quad b<c<a,\quad c<a<b,\quad c<b<a$$

הגדרה

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ב $[a,b]$ ותהי $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$.
תהי $P^*=\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$ קבוצה של נקודות כך ש $x_{i-1}\le c_i\le x_i$ עבור $1\le i\le n$.
המספר $S(f,P,P^*)=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i-x_{i-1})$ נקרא **סכום רימן** של f ביחס לחלוקה P והקבוצה P^*.


סכום רימן


סכום דרבו תחתון

הערה

בהינתן $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ וחלוקה P ב$[a,b]$, קיימים אינסוף סכומי רימן של f ביחס לחלוקה P, הנבדלים בבחירת הc_iים הבאים.

טענה

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה **חסומה** ב$[a,b]$ ותהי $[a,b]$ ותהי $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$.
תהי $P^*=\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$ קבוצה של נקודות כך ש $x_{i-1}\le c_i\le x_i$ עבור $1\le i\le n$.
אזי מתקיים:

$$L\left(f,P\right)\le S\left(f,P,P^*\right)\le U\left(f,P\right)$$

הוכחה

נסמן, כרגיל:

$$m_i=\inf_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}\{f\left(x\right)\}\ ,\ M_i=\sup_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}\{f\left(x\right)\}$$

נשים לב כי מהגדרת סופרימום ואינפימום, עבור כל i מתקיים, $m_i\le f\left(c_i\right)\le M_i$ ולכן מתקיים:

$$m_i\left(x_i-x_{i-1}\right)\leqslant f\left(c_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)\leqslant M_i\left(x_i-x_{i-1}\right)$$

כלומר, בסך הכל נקבל:

$$L\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i\left(x_i-x_{i-1}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}f\left(c_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}M_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=U\left(f,P\right)$$

כנדרש.

הרצאה מס' 18

משפט

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית. אזי f אינטגרבלית ב$[a,b]$.

הוכחה

(I) נניח שf מונטונית עולה ב$[a,b]$.

נשים לב כי f חסומה ב$[a,b]$, שהרי מתקיים $\forall x\in[a,b]: f(a)\le f(x)\le f(b)$.

כעת אם f **קבועה** ב$[a,b]$, אזי היא בהכרח אינטגרבילית ב$[a,b]$כפי שראינו כבר.

אם היא איננה קבועה, אזי מתקיים: $f(a)<f(b)$.

כעת,יהי $\varepsilon>0$. נבחר חלוקה $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ של $[a,b]$, בצורה כזאת שמתקיים: $\Delta(P)<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$.

נבחין כי f מונטונית עולה בכל קטע $[x_i,x_{i-1}]$ולכן למעשה מתקיים:

$$m_i=\inf_{x_{1-1}\leqslant x\leqslant x_1}\{f(x)\}=f(x_{i-1})\quad,\quad M_i=\sup_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}\{f(x)\}=f(x_i)$$

בשלב זה נבחין כי מתקיים:

$$\begin{aligned}&U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})=\\&\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))(x_i-x_{i-1})\le\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\Delta P\\&=\Delta P\sum_{i=1}^{n}f(x_i-f(x_{i-1}))\overset{\text{telscopic}}{=}\Delta P(f(b)-f(a))\\&<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(b)-f(a))=\varepsilon\end{aligned}$$

כלומר, f איטנגרבילית מתנאי דרבו, כנדרש.

(II) אם f מונוטונית יורדת ב$[a,b]$, בפרט $-f$ מונטונית עולה ב$[a,b]$, ולכן לפי סעיף א', $-f$ אינטגרבילית ב$[a,b]$.
לפי ההומוגניות של האינטגרל, מתקיים כי גם $-(-f)$ אינטגרבילית ב$[a,b]$. כלומר, f אינטגרבילית ב$[a,b]$, כנדרש.

רציפות במידה שווה

תחילה, על מנת לקבל מוטיבציה למושג, נסתכל על המושג רציפות בקטע שהגדרנו באינפי 1.

דוגמה

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=x^2$. נוכיח כי f רציפה ב$\mathbb{R}$, כלומר כי למעשה לכל $x_0\in\mathbb{R}$ מתקיים $\lim\limits_{x\to x_0}=x_0^2$.

נרצה להוכיח באמצעות ההגדרה כי מתקיים:

$$\forall x_0\in\mathbb{R}\quad\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in\mathbb{R}\quad|x-x_0|<\delta\Rightarrow\left|x^2-x_0^2\right|<\varepsilon$$

נוכל להבחין כי לכל x,x_0 מתקיים:

$$\left|x^2-x_0^2\right|=|(x+x_0)(x-x_0)|=|x+x_0||x-x_0|\overset{\text{triangular}}{\le}(|x|+|x_0|)|x-x_0|$$

בשלב זה נשים לב כי אם $|x-x_0|<1$ אזי עולה מ**אי שוויון המשולש ההפוך** כי:

$$|x|-|x_0|\le|x-x_0|<1\Rightarrow|x|<1+|x_0|$$

לכן, אם לכל x המקיים $|x-x_0|<1$ בהכרח יתקבל כי:

$$(|x|+|x_0|)\,|x-x_0|<(1+|x_0|+|x_0|)\,|x-x_0|=1+2\cdot|x_0|$$

יהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\min\left(1,\frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}\right)$ ואזי יתקיים כי:

$$\forall x\in\mathbb{R}\ |x-x_0|<\delta\Rightarrow\left|x^2-x_0^2\right|<(|x|+|x_0|)\,|x-x_0|<1+2\cdot|x_0|<\varepsilon$$

נוכל להבחין כי ככל שx_0 רחוק יותר מהראשית, אזי $\delta=\min\left(1,\frac{\varepsilon}{1+2\cdot|x_0|}\right)$ קטן יותר.
אם נסתכל על הפונקציה $f(x)=x^2$ בתחום $D=[1,5]$, בהינתן $\varepsilon>0$, הבחירה $\delta=\min\left(1,\frac{\varepsilon}{11}\right)$ מתאימה **עבור כל הנקודות** D **בבת אחת**.

הגדרה

יהי $D\subseteq\mathbb{R}$ ותהי $f:D\to\mathbb{R}$. נאמר שf רציפה **במידה שווה** בD , אס"ם מתקיים:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x_1,x_2\in D\quad|x_2-x_1|<\delta\Rightarrow|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$$

טענה

יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ ותהי $f:I\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה במידה שווה בI. אז f רציפה ב־I.

הוכחה

על פי הנתון, מתקיים מההגדרה:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x_1,x_2\in I\quad|x_2-x_1|<\delta\Rightarrow|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$$

נשים לב כי על פי ההגדרה, f רציפה בI אס"ם :

$$\forall x_0\in I\,\forall\varepsilon_1>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in I\quad|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

נציב $\varepsilon=\varepsilon_1$, $x_1=x_0$ ו$x_2=x$ וקיבלנו את הדרוש.

(I) הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=2x+1$. היא רציפה במידה שווה ב$\mathbb{R}$.

שהרי בהינתן $\varepsilon > 0$ נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ ואז לכל $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ כך ש$|x_2 - x_2| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$. וכעת מתקיים:

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |2x_2 + 1 - (2x_1 + 1)| = |2x_2 - 2x_1| = 2|x_2 - x_1| < 2\delta = \varepsilon$$

(II) הפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = \sin(x)$. היא רציפה במידה שווה ב$\mathbb{R}$.
שהרי בהינתן $\varepsilon > 0$ נבחר $\delta = \varepsilon$ ואז לכל $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ כך ש$|x_2 - x_2| < \delta = \varepsilon$ ואז מתקיים:

$$\begin{aligned}|f(x_2) - f(x_1)| = |\sin(x_2) - \sin(x_1)| &= \left|2\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{1}\right)\cos\left(\frac{x_2 - x_1}{1}\right)\right| = \\ &= 2\left|\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)\right|\left|\cos\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)\right| \le 2\left|\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)\right| \cdot 1 \\ &\le 2\left|\frac{x_2 - x_1}{2}\right| = |x_2 - x_1| < \delta = \varepsilon\end{aligned}$$

(III) הפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$המוגדרת ע"י $f(x) = x^2$. היא רציפה במידה שווה ב$[1,5]$.
שהרי בהינתן $\varepsilon > 0$ בחרנו $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{11}\right)$, שהתאים לנו בהגדרת רציפות במידה שווה של f ב$[1,5]$.

(VI) מאידך, נשים לב כי הפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = x^2$ איננה רציפה במידה שווה ב$\mathbb{R}$.
נניח בשלילה שf רציפה במידה שווה ב$\mathbb{R}$. נבחר $\varepsilon = 1$ וδ מתאימה בהגדרת הגבול, כך שלמעשה יתקיים:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow \left|x_2^2 - x_1^2\right| < 1$$

כעת נבחר $n \in \mathbb{N}$ כך ש$\frac{1}{n} < \delta$ (קיים כזה, מאריכמדיאות).
נגדיר $x_1 = n, x_2 = n + \frac{1}{n}$, על מנת שיתקיים: $|x_2 - x_1| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \delta$.
נשים לב שלמעשה, מבחירת הδ מתקיים:

$$\left|x_2^2 - x_1^2\right| < 1 \Rightarrow \left|\left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2\right| = \left|n^2 - n^2 + 2\frac{1}{n} \cdot n + \frac{1}{n^2}\right| = \left|2 + \frac{1}{n^2}\right| = 2 + \frac{1}{n^2}$$

נוכל להבחין כי $2 < \left|x_2^2 - x_1^2\right| < 1$. כלומר, מדובר בסתירה, שנבעה מהנחת השלילה שf רציפה במידה שווה ב$\mathbb{R}$.

(V) הפונקציה $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x) = \frac{1}{x}$ **איננה רציפה במידה שווה** ב$(0,1)$.

הרצאה מס' 19

משפט

נתונה $D \subseteq \mathbb{R}$. אזי $f : D \to \mathbb{R}$ איננה רציפה במ"ש בD אם ורק אם קיים $\varepsilon_0 > 0$ וקיימות שתי סדרות $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (\hat{x}_n)_{n=1}^{\infty}$. המקיימות את שלושת התנאים הבאים:
(I) $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n, \hat{x}_n \in D$ (II) $\lim_{n\to\infty}(x_n - \hat{x_n}) = 0$ (III) $\forall n \in \mathbb{N}\ |f(x_n) - f(\hat{x}_n)| \ge \varepsilon_0$.

הוכחה

$\Leftarrow$ נניח כי f איננה רציפה במידה שווה, ולכן נראה שקיימות הסדרות האמורות לעיל.

אם f איננה רציפה במידה שווה, אז לפי ההגדרה מתקיים:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \forall x, \hat{x} \in D \quad |x - \hat{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\hat{x})| \geq \varepsilon_0$$

נבנה סדרות בצורה אינדוקטיבית.
עבור $\delta = 1$ קיימים $x_1, \hat{x}_1 \in D$ כך ש$|x_1 - \hat{x}_1| < 1$ וגם $|f(x_1) - f(\hat{x}_1)| \geq \varepsilon_0$.
כמו כן, עבור $\delta = \frac{1}{2}$ קיימים $x_1, \hat{x}_1 \in D$ כך ש$|x_2 - \hat{x}_2| < \frac{1}{2}$ וגם $|f(x_2) - f(\hat{x}_2)| \geq \varepsilon_0$.
נוכל להמשיך כך באופן כללי, ולומר כי בהינתן $n \in \mathbb{N}$, עבור $\delta = \frac{1}{n}$ קיימים $x_n, \hat{x}_n \in D$ כך ש$|x_n - \hat{x}_n| < \frac{1}{n}$ וגם $|f(x_n) - f(\hat{x}_n)| \geq \varepsilon_0$.
כעת, מכך $|x_n - \hat{x}_n| < \frac{1}{n} \Rightarrow -\frac{1}{n} < x_n - \hat{x}_n < \frac{1}{n}$, עולה כי $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - \hat{x}_n) = 0$ וגם $|f(x_n) - f(\hat{x}_n)| \geq \varepsilon_0$, כנדרש.

$\Leftarrow$ נניח שקיימות סדרות כאלו, ונוכיח כי f איננה רציפה במידה שווה בD.
נוכל להבחין כי עבור $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$, לא נוכל למצוא $\delta > 0$, שמתאימה להגדרת רציפות במידה שווה.
שהרי, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - \hat{x}_n) = 0$, דהיינו, עבור כל $\delta > 0$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים: $|x_n - \hat{x}_n| < \delta$.
נבחר $n = N + 1$ ואז מתקיים: $|x_{N+1} - \hat{x}_{N+1}| < \delta$וגם $|f(x_{N+1}) - f(\hat{x}_{N+1})| \geq \varepsilon$, כנדרש.

משפט קנטור
יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש$a < b$ ותהי $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה בקטע הסגור והחסום $[a, b]$. אזי f רציפה במידה שווה ב־$[a, b]$.

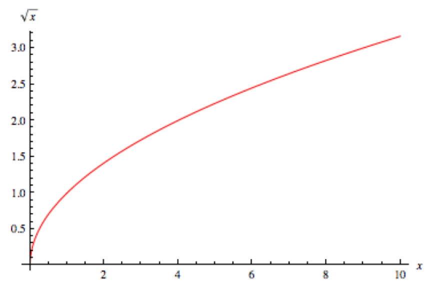
הוכחה
נניח שf רציפה ב־$[a, b]$ אך לא רציפה במידה שווה.
כלומר, לפי המשפט הקודם, קיימת $\varepsilon_0 > 0$ וקיימות שתי קיימות שתי סדרות $(\hat{x}_n)_{n=1}^{\infty}, (x_n)_{n=1}^{\infty}$ של איברי $[a, b]$ כך ש$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - \hat{x_n}) = 0$ וגם $|f(x_n) - f(\hat{x}_n)| \geq \varepsilon_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
$(\hat{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה על ידי a וb, ולכן מ**משפט בולצאנו ויירשטרס**, יש ל$(\hat{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ תת סדרה $(\hat{x}_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ תת סדרה מתכנסת.
נסמן את הגבול: $\lim\limits_{n\to\infty}(\hat{x}_{n_k})_{k=1}^{\infty} = x_0$.
נציג סדרה נוספת, בצורה מעט מפתיעה: $x_{n_k} = \hat{x}_{n_k} + (x_{n_k} - \hat{x}_{n_k})$.
נבחין כי על פי הנתון $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - \hat{x_n}) = 0$, ובפרט הדבר נכון עבור תת הסדרה. ולכן, מאריתמטיקה של גבולות (אגף ימין הוא חיבור של סדרות מתכנסות), גם $\lim\limits_{k\to\infty}\hat{x}_{n_k} = x_0 + 0 = x_0$.
כעת, נבחין כי $x_0 \in [a, b]$, ולכן מהגדרת רציפות הפונקציה ב$[a, b]$, מתקיים כי $\lim\limits_{k\to\infty}(f(x_{n_k})) = f(x_0) = \lim\limits_{k\to\infty}(f(\hat{x}_{n_k}))$.
כלומר, בסך הכל $\lim\limits_{k\to\infty}(f(x_{n_k}) - f(\hat{x}_{n_k})) = 0$. אך על פי הנתון, מתקיים, כי:

$$\forall k \in \mathbb{N} \ |f(x_{n_k}) - f(\hat{x}_{n_k})| \geq \varepsilon_0 > 0$$

סתירה זו נובעת מכך שהנחנו שf איננה רציפה במידה שווה.

דוגמה

נתבונן בפונקציה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x)=\sqrt{x}$. הוכחנו בעבר כי f רציפה ב$[0,1]$, ולכן לפי משפט קנטור, היא גם רציפה במידה שווה ב$[0,1]$.
דבר זה מפתיע, שכן בדוגמאות לעיל, כשהוכחנו שהפונקציות אינן רציפות במידה שווה, חשבנו על כך שהשיפוע הולך וגדל בצורה בלתי מוגבלת. אבל אם נתבונן בפונקציה זאת, גם במקרה זה השיפוע הולך וגדל כשמתקרבים לראשית, ועדיין הפונקציה רציפה במידה שווה.



משפט

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. אזי f אינטגרבילית ב־$[a,b]$.

הוכחה

f רציפה ב$[a,b]$, ולכן, **מהמשפט הראשון של ויירשטרס**, היא חסומה ב$[a,b]$.
כעת, מ**משפט קנטור**, נובע שf רציפה במידה שווה ב$[a,b]$. כלומר, לפי ההגדרה:

$$\forall\varepsilon_1>0\quad\exists\delta>0\quad\forall t_1,t_2\in D\quad |t_2-t_1|<\delta\Rightarrow|f(t_2)-f(t_1)|<\varepsilon_1$$

כעת, יהי $\varepsilon>0$. נציב $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{b-a}$ ונקבל בסך הכל $\delta>0$ כך שמתקיים:

$$|t_2-t_1|<\delta\Rightarrow|f(t_2)-f(t_1)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

ניקח כעת $P=\{x_0,x_1\ldots x_n\}$, שבבחירתנו נקבע $\Delta(P)<\delta$.
f רציפה ב־ $[a,b]$ ולכן בפרט רציפה ב־$[x_{i-1},x_i]$ לכל $1\le i\le n$. ולכן נובע כעת **מהמשפט השני של ויירשטרס** כי f מקבלת ערכי מקסימום (ולא סופרימום) בקטע.
דהיינו, קיימים c_i וd_i ב$[x_{i-1},x_i]$ כך שלמעשה נקבל:

$$f(c_i)=\min_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}\{f(x)\}=m_i\quad,\quad f(d_i)=\max_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}|f(x)|=M_i$$

כמו כן, נבחין כי c_i וd_i הינן בפנים הקטע, לכן בפרט $|d_i-c_i|\le x_i-x_{i-1}$.
כמו כן, נשים לב כי $|f(d_i)-f(c_i)|=f(d_i)-f(c_i)$, שהרי $f(d_i)\ge f(c_i)$ בתור מקסימום ומינימום.
לכן, נקבל, מהגדרת רציפות במידה שווה כי :

$$|d_i - c_i| \leq x_i - x_{i-1} < \delta \Rightarrow |f(d_i) - f(c_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

כלומר, בסך הכל יתקיים:

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (f(d_i) - f(c_i))(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) =$$
$$\frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

זאת אומרת, קיבלנו מתנאי דרבו לאינגטרביליות, כי f אינטגרבילית ב־$[a,b]$, כנדרש.

האינטגרל כפונקציה של קצהו העליון והמשפט היסודי של החשבון האינטגרלי

המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי

תהי $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבלית ב$[a,b]$. נסמן $\widetilde{F}(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ $\forall x \in [a,b]:$. אזי:

(I) $\widetilde{F}$ רציפה ב$[a,b]$.

(II) אם בנוסף, f רציפה (מימין או משמאל) בנקודה $x_0 \in [a,b]$ אזי $\widetilde{F}$ גזירה (מימין או משמאל) בx_0 ומתקיים: $\widetilde{F}(x_0)' = f(x_0)$ (אם f רציפה רק מימין או משמאל, אזי $\widetilde{F}'_+(x_0) = f(x_0)$ או $\widetilde{F}'_-(x_0) = f(x_0)$)

הוכחה

(I) על פי הנתון, f אינטגרבילית ב$[a,b]$. כלומר, בפרט f חסומה ב$[a,b]$. מהגדרת חסימות, קיים $0 < M \in \mathbb{R}$ כך ש$|f(x)| \leq M$ $\forall x \in [a,b]$.

כעת, יהיו $x_1, x_2 \in [a,b]$ כך שבה"כ $x_1 < x_2$. ואז מתקיים:

$$\left|\widetilde{F}(x_2) - \widetilde{F}(x_1)\right| = \left|\int\limits_a^{x_2} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x_1} f(t)\,dt\right| \overset{(i)}{=}$$
$$\left|\int\limits_a^{x_2} f(t)\,dt + \int\limits_{x_1}^{a} f(t)\,dt\right| \overset{(ii)}{=} \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\right| \overset{(iii)}{\leq}$$
$$\int\limits_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,dt \overset{(iv)}{\leq} \int\limits_{x_1}^{x_2} M dt = M(x_2 - x_1) = M\,|x_2 - x_1|$$

כאשר ב(i) המעבר נובע מכך ש$\int\limits_a^{x_1} f(t)\,dt = -\int\limits_{x_1}^{a} f(t)\,dt$(כביכול לוקחים את מינוס השטח), ב(ii) מכלל 13 בכללי **אינטגרל**, ב(iii) מכלל אינטגרל בערך מוחלט וב(iv) מהגדרת **החסימות** שפיתחנו בתחילת השאלה.

בפרט קיבלנו כי $\widetilde{F}$ הינה M**-ליפשיצית ב**$[a,b]$**.**

לכן, מטענה שהוכחנו בתרגול, היא בהכרח רציפה במידה שווה ב$[a,b]$ ובפרט $\widetilde{F}$ רציפה כנדרש.

(II) נוכיח את הטענה עבור המקרה בו קיימת הנגזרת משמאל.

תהי $x_0 \in (a,b]$ ויהי $\varepsilon > 0$ נתון. על פי הנתון, f רציפה משמאל בx_0 ולכן מההגדרה קיים $\delta > 0$ כך שלכל $t \in [a,b]$ מתקיים:

$$x_0 - \delta < t \le x_0 \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

נרצה להוכיח גזירות לפי ההגדרה, דהיינו: $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{\widetilde{F}(x) - \widetilde{F}(x_0)}{x - x_0}$ קיים למעשה.

יהי $x \in [a,b]$ בצורה כזאת ש$x_0 - \delta < x < x_0$, ואז מתקיים:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\widetilde{F}(x) - \widetilde{F}(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x - x_0}\left(\widetilde{F}(x) - \widetilde{F}(x_0)\right) - \frac{1}{x - x_0} f(x_0)(x - x_0)\right| \\
&\overset{(i)}{=} \frac{1}{|x - x_0|}\left|\left(\widetilde{F}(x) - \widetilde{F}(x_0)\right) - f(x_0)(x - x_0)\right| \\
&\overset{(ii)}{=} \frac{1}{x_0 - x}\left|\left(\widetilde{F}(x) - \tilde{F}(x_0)\right) + f(x_0)(x_0 - x)\right| \\
&\overset{(iii)}{=} \frac{1}{x_0 - x}\left|\left(\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right) + \int_x^{x_0} f(x_0)\,dt\right| \\
&\overset{(iv)}{=} \frac{1}{x_0 - x}\left|\int_{x_0}^x f(t)\,dt + \int_x^{x_0} f(x_0)\,dt\right| \\
&\overset{(v)}{=} \frac{1}{x_0 - x}\left|\int_x^{x_0} f(x_0)\,dt - \int_x^{x_0} f(t)\,dt\right| \\
&\overset{(vi)}{=} \frac{1}{x_0 - x}\left|\int_x^{x_0} \left(f(x_0) - f(t)\right)dt\right| \\
&\overset{(vii)}{\le} \frac{1}{x_0 - x}\int_x^{x_0} |f(t) - f(x_0)|\,dt
\end{aligned}$$

כאשר ב(i) הוצאנו את הערך המוחלט החוצה, מכללי ערך מוחלט, ב(ii) החלפנו בין הסימנים, ב(iii) הפכנו את הקבוע לאינטגרל של עצמו ($dt = (x_0 - x)$), ב(iv) השתמנו ב$\int_a^{x_0} f(t)\,dt = -\int_{x_0}^a f(t)\,dt$ו**בכלל** 13 **בכללי אינטגרל**, ב(v) השמשנו בכלל הקודם, ב(vi)הוצאנו מכנה משותף, וב(vii) השתמשנו ב**כללי ערך מוחלט**.

על פי מה שכתבנו בתחילת דברינו, מהרציפות משמאל של הפונקציה f בנקודה x_0, מתקיים $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$.

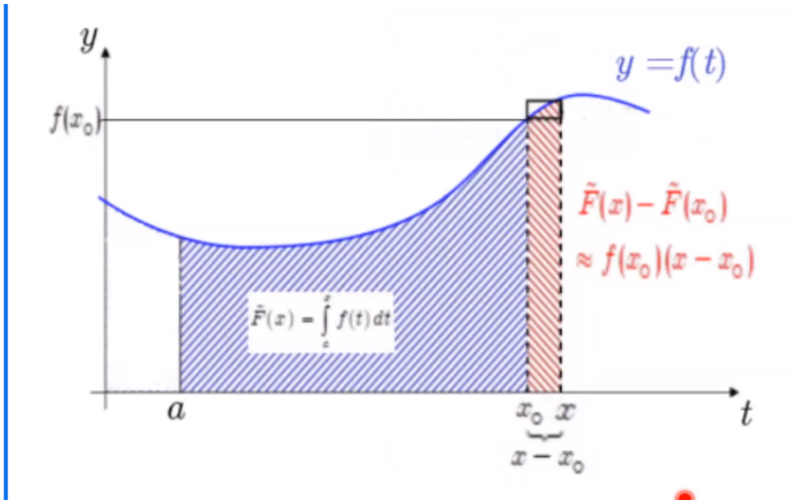
כמו כן, נבחין כי $\int_x^{x_0} \varepsilon dt = \varepsilon (x_0 - x)$ (ε הינו קבוע, ו$dt = (x - x_0)$) . לכן, מכלל **המונוטוניות** של האינטגרל מתקיים כי:

$$\frac{1}{x_0 - x}\int_x^{x_0} |f(t) - f(x_0)|\,dt < \frac{1}{x_0 - x}\int_x^{x_0} \varepsilon dt = \frac{1}{x_0 - x} \cdot \varepsilon (x_0 - x) = \varepsilon$$

לכן, קיבלנו בסך הכל קיבלנו כי:

$$\left|\frac{\widetilde{F}(x)-\widetilde{F}(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|<\varepsilon$$

דהיינו, הראינו כי $x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow \left|\frac{\widetilde{F}(x)-\widetilde{F}(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|<\varepsilon$,
ובמילים אחרות, הוכחנו כי $\lim_{x\to x_0^-}\frac{\widetilde{F}(x)-\widetilde{F}(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$, כנדרש.



הרצאה מס' 20

טענה

יהי I קטע (לאו דוקא חסום). ותהיינה F_1 וF_2 פונקציות גזירות בI.
אזי $F_1'(x)=F_2'(x)$ עבור כל $x\in I$ אם"ם קיים קבוע $C\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in I$ מתקיים $F_2(x)=F_1(x)+C$.

הוכחה

$\Rightarrow$ נתון שקיים קבוע $C\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in I$ מתקיים $F_2(x)=F_1(x)+C$.
אנו יודעים כי פונקציה קבועה הינה גזירה, ולכן נובע מאריתמטיקה של נגזרות ש: $F_2'=(F_1(x)+C)'=F_1'+0=F_1'$, כנדרש.

$\Leftarrow$ על פי הנתון, הנגזרות שוות בכל נקודה, דהיינו, $F_1'(x)=F_2'(x)$ עבור כל $x\in I$.
נגדיר את הפונקציה $F:I\to\mathbb{R}$ על ידי $F=F_2-F_1$.
F גזירה בהכרח כהפרש של פונקציות גזירות בI.
אך כעת מתקיים: $F'=(F_2-F_1)=F_2'-F_1'=0$.
כלומר, $F'(x)=0$, עבור כל $x\in I$. לפי המסקנות ממשפט לגרנז', F בהכרח קבועה.
לכן, בהכרח קיים $C\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in I$ מתקיים $F(x)=C$.
דהיינו, קיבלנו כי $F=(F_2-F_1)=F_2(x)-F_1(x)=C$.
אם נעביר אגפים נקבל כי $F_2(x)=F_1(x)+C$, כנדרש.

הגדרה

יהי $D\subseteq\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בD.

פונקציה F תיקרא פונקציה **קדומה** של f בD אם"ם F גזירה בD ולכל $x \in D$ מתקיים $F'(x) = f(x)$.
אוסף כל הפונקציות הקדומות של f בD מסומן $\int f(x)\,dx$. (שימו לב כי D איננה מופיעה בו).

שימו לב כי הסמל $\int f(x)\,dx$ בלתי תלוי לחלוטין בסמל $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.
כלומר, הראשון הינו קבוצה המוגדרת באמצעות תורת הנגזרת, והשני הינו מספר המוגדר באמצעות תורת האינטגרציה של רימן-דרבו.
שימו לב שלסימן הראשון קוראים לפעמים **האינטגרל הלא מסוים**, ולסימן השני קוראים **האינטגרל המסוים**.
כעת נשים לב כי אם I (לאו דוקא חסום) ו־F פונקציה קדומה אחת של f ב־I אזי נובע מהטענה הקודמת כי (פונקציה קבועה נקבעת עד כדי קבוע חיבורי):

$$\int f(x)\,dx = \{F + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$

משפט
אם $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב$[a,b]$, אזי יש לf פונקציה קדומה ב$[a,b]$.

הוכחה
היות וf רציפה ב$[a,b]$. מתקיים מ**המשפט היסודי** כי $\widetilde{F}(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ גזירה ב(a,b) ו$\widetilde{F}'(x) = f(x)$ עבור כל $x \in (a,b)$.
בנוסף, מאותו משפט עולה כי $\widetilde{F}_+(a) = f(a)$, וגם $F'_-(b) = f(b)$.
כלומר, בסך הכל קיבלנו כי $\widetilde{F}$ הינה פונקציה קדומה של f ב$[a,b]$.

הערה
נשים לב גם כי $\widetilde{F}(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ היא פונקציה קדומה של f ב$[a,b]$ המקיימת $\widetilde{F}(a) = \int\limits_a^x f(t)\,dt = 0$
תהי כעת p, נקודה שרירותית בקטע $[a,b]$. נסמן $H(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt \;\; \forall x \in [a,b]$
לכל $x \in [a,b]$ מתקיים:

$$H(x) = \int\limits_p^x f(x)\,dt = \int\limits_p^a f(t)\,dt + \int\limits_a^x f(t)\,dt = \int\limits_p^a f(t)\,dt + \widetilde{F}(x)$$

כעת נשים לב כי $\int\limits_p^a f(t)\,dt$ הינו קבוע (שהינו תלוי בx). ראינו כבר כי $\widetilde{F}$ גזירה ב$[a,b]$, ולכן גם H גזירה ב$[a,b]$, ולכל x ב$[a,b]$ מתקיים:
$H'(x) = 0 + \widetilde{F}'(x) = f(x)$. כלומר בסך הכל קיבלנו כי גם H פונקציה קדומה של f ב$[a,b]$.

יהיו $a,b \in \mathbb{R}$ כך ש$a < b$. האם קיימת לf פונקציה קדומה ב$[a,b]$?
אין לנו אפיון מוחלט כזה.

טענה
רציפות איננה תנאי הכרחי לקיום פונקציה קדומה.

הוכחה

נציג f רציפה שאיננה רציפה, אך כן בעלת פונקציה קדומה.

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי $f(x)=\begin{cases}2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$.

נראה כי f איננה רציפה ב0.

לכל $x\neq 0$ מתקיים כי: $\cos\left(\frac{1}{x}\right)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)$.

בנוסף, גם מתקיים כי $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x-\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0\right)$.

אם נניח בשלילה כי קיים גבול לפונקציה, דהיינו, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=L\in\mathbb{R}$, אזי היה נובע, מאריתמטיקה של גבולות כי:

$$\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)\right)=0-L=-L$$

אך ראינו שלפונקציה $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ אין גבול ב0 , ולכן בהכרח גם $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ לא קיים.

כעת, נראה שיש לf פונקציה בכל $\mathbb{R}$. נגדיר: $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & =0\end{cases}$.

ראינו כבר בעבר כי F גזירה בכל $\mathbb{R}$ ו$F'(x)=f(x)$.

משפט (הנוסחה היסודית של החשבון האינטגרלי - משפט ניוטון לייבניץ - גרסה קלה**).**

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב$[a,b]$.

תהי F פונקציה קדומה שרירותית של f ב$[a,b]$.

אזי מתקיים: $\int\limits_a^b f(t)=F(b)-F(a)$.

הוכחה

נסמן: $\forall x\in[a,b]:\widetilde{F}(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$.

כעת נבחין כי f רציפה ב$[a,b]$. כלומר, $\widetilde{F}$ היא פונקציה קדומה של f ב$[a,b]$.

נשים לב כי תחום ההגדרה במקרה שלנו הוא קטע, וכבר הוכחנו כי כל שתי פונקציות קדומות של f באותו הקטע, נבדלות זו מזו ב**קבוע חיבורי** בלבד.

כלומר, קיים $C\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים: $\forall x\in[a,b]:F(x)=\widetilde{F}(x)+C$.

ובסך הכל נקבל:

$$F(b)-F(a)=\left(\widetilde{F}(b)+C\right)-\left(\widetilde{F}(a)+C\right)=\widetilde{F}(x)-\widetilde{F}(a)=\int\limits_a^b f(t)\,dt-\int\limits_a^a f(t)\,dt=\int^b f(t)\,dt$$

כפי שרצינו להוכיח.

החשיבות של המשפט הינה בכך שהוא מאפשר לחשב אינטגרל של פונקציה באמצעות מציאת פונקציה קדומה.

משפט (הנוסחה היסודית של החשבון האינטגרלי - משפט ניוטון לייבניץ - גרסה כללית**).**

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבלית ב$[a,b]$. ותהי F פונקציה קדומה שרירותית של f ב$[a,b]$. אזי מתקיים:

$$\int\limits_b^a f(t)=F(b)-F(a)$$

הוכחה

תהי $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ חלוקה כלשהיא של $[a,b]$.

נשים לב כי F גזירה ב$[a,b]$ ולכן F מקיימת את תנאי משפט לגרנז' בכל קטע $[x_{i-1},x_i]$.

כלומר, למעשה עבור כל $1\le i\le n$ קיים c_i בקטע (x_{i-1},x_i) כך ש(ממשפט לגרנז'):

$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\hat{c}_i)(x_i-x_{i-1})=f(\hat{c}_i)(x_i-x_{i-1})$ נסמן כעת חלוקה נוספת:

$\hat{P}^*=\{\hat{c}_1,\hat{c}_2,\ldots,\hat{c}_n\}$.

נמצא כעת את סכומי רימן של חלוקה זו:

$$S\left(f,P,\hat{P}^*\right)=\sum_{i=1}^{n}f(\hat{c}_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}F(x_i)-F(x_{i-1})=F(b)-F(a)$$

כשהמעבר האחרון נובע מסכום טלסקופי.

ראינו בעבר כי $L(f,P)\le S(f,P,P^*)\le U(f,P)$.

כלומר, קיבלנו בסך הכל כי $(f,P)\le F(b)-F(a)\le U(f,P)$.

דהינו, $F(b)-F(a)$ נמצא בין כל סכומי עליונים והתחתונים של f.

כעת, נבחין כי f הינה אינטגרבילית ב$[a,b]$. ולכן בהכרח $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ הוא המספר **היחיד** שמקיים:

$$(f,P)\le\int\limits_a^b f(t)\,dt\le U(f,P)$$

ולכן בהכרח $\int\limits_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$

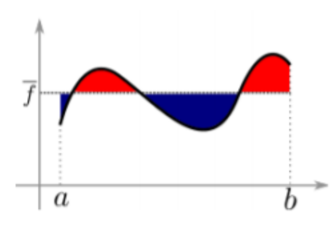
כנדרש.

משפט הערך הממוצע האינטגרלי

הגדרה

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש$a<b$ ותהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית ב$[a,b]$.

המספר הממשי $\mu=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(t)\,dt$ נקרא הערך הממוצע של f בקטע $[a,b]$.



בציור זה מדובר על השטח מתחת לגרף הפונקציה.

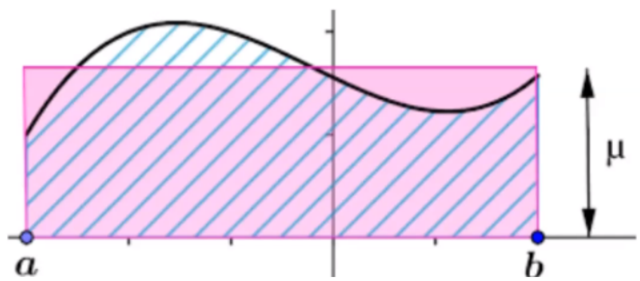
<u>הרצאה מס' 21</u>

משפט

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש$a<b$ ותהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

אזי קיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך שמתקיים:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(t)\,dt = f(c)$$



הוכחה

על פי הנתון, f רציפה ב$[a,b]$, ולכן מהמשפט השני של ויירשטרס, קיימים $m, M \in \mathbb{R}$ כך ש$\mathrm{Im}\,(f) = [m, M]$.
הוכחנו כבר קודם כי f אינטגרבילית ב$[a,b]$ ולכן גם:

$$m\,(b-a) \le \int\limits_a^b f(t)\,dt \le M\,(b-a)$$

נחלק את שלושת האגפים ב$(b-a) > 0$ ולכן נקבל בסך הכל:

$$m \le \frac{1}{b-a}\cdot\int\limits_a^b f(t)\,dt \le M$$

משמעות דבר זה היא שבעצם $\mu = \frac{1}{b-a}\cdot\int\limits_a^b f(t)\,dt \in [m, M]$
כלומר, למעשה הוכחנו כי קיימת נקודה $c \in [a,b]$ כך שמתקיים:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(t)\,dt = f(c)$$

כנדרש.

משפט

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש$a < b$ ותהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.
אזי קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך שמתקיים:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(t)\,dt = f(c)$$

הוכחה

נתבונן בפונקציה הבאה: $\widetilde{F}(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$, שהינה הפונקציה הצוברת.

f רציפה ולכן לפי ה**משפט היסודי** $\widetilde{F}$ **גזירה** ב$[a,b]$ ואף מהווה פונקציה קדומה לf בקטע $[a,b]$.

נפעיל כעת את משפט הערך הממוצע של לגרנז', ונקבל כי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך שבסך הכל מתקיים:

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(t)\,dt=\frac{\widetilde{F}(b)}{b-a}=\frac{\widetilde{F}(b)-\widetilde{F}(a)}{b-a}=\widetilde{F}'(c)=f(c)$$

כנדרש.

פונקציית רימן

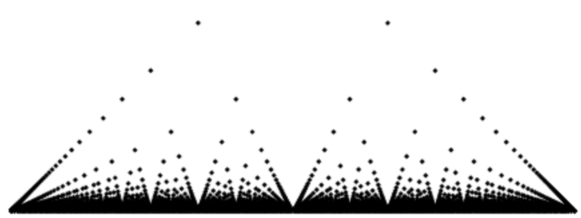
הגדרה

יהי $x\in\mathbb{Q}$. הצגה $x=\frac{m}{n}$ נקראת מצומצמת אם לא ניתן לרשום $x=\frac{m'}{n'}$ עם $n'<n$ כך ש$m'\in\mathbb{Z},n'\in\mathbb{Z}$.

נתבונן כעת בפונקציית רימן $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי :

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\notin\mathbb{Q}\\ \frac{1}{q} & x\in\mathbb{Q},\quad \text{הצגה מצומצמת } x=\frac{p}{q},p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}\end{cases}$$

והגרף שלה בקטע $[0,1]$ נראה למעשה כך:



הערות

(I) נשים לה שהדרך היחידה לרשום את 0 בצורה המצומצמת הינה כך: $f(0)=f\left(\frac{0}{1}\right)=\frac{1}{1}=1$ וגם $0\leq f(x)$ לכל x ממשי.

(II) ברגע שנבין את הגרף ב$(0,1)$, אנחנו מבינים את הגרף בשלמותו ולכן $f(x+1)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$,

שהרי אם x אי רציונלי, אזי גם $x+1$ אי רציונלי, ולכן מהגדרת f שניהם מתאפסים.

אם $x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ אזי $x+1=\frac{p+q}{q}$ הינו גם שבר מצומצם.

טענה

פונקצית רימן איננה רציפה, באף בנקודה רציונלית $x_0\in\mathbb{Q}$.

הוכחה

$|f(x)-f(x_0)|=|-f(x_0)|=f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q}>\frac{1}{2q}=\varepsilon$

טענה

פונקצית רימן רציפה בכל נקודה $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

טענה

פונקצית רימן אינטגרבילית בכל קטע $[a, b]$. בנוסף מתקיים: $\int\limits_a^b f(t)\,dt = 0$

כללי אינטגרציה

משפט (אינטגרציה בחלקים)

יהיו u ו־v פונקציות גזירות ב־$[a, b]$ כך ש־u' ו־v' אינטגרביליות ב־$[a, b]$

אזי גם $u' \cdot v$ ו־$u \cdot v'$ אינטגרביליות ב־$[a, b]$,

ומתקיים:

$$\int\limits_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

כאשר $h = u(x)\,v(x)$ ו־$u(x)\,v(x)\big|_a^b = h(b) - h(a)$

הוכחה

אנו יודעים כי u ו־v גזירות ב־$[a, b]$ ולכן רציפות ואינטגרביליות ב־$[a, b]$.

לכן גם $u' \cdot v$ ו־$u \cdot v'$ אינטגרביליות ב־$[a, b]$ כמפלה של פונקציות אינטגרביליות.

לפי כלל הנגזרת, מתקיים כי $(uv)' = u \cdot v' + u' \cdot v$ ב־$[a, b]$.

לכן גם $(uv)'$ אינטגרביליות, כסכום של פונקציות אינטגרביליות.

כעת, נקבל בסך הכל מהנוסחה היסודית כי:

$$\int\limits_a^b (u(x)\,v(x))'\,dx = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) = u(x)\,v(x)\big|_a^b$$

וממה שפיתחנו לעיל, ניתן לכתוב זאת גם כך:

$$\int\limits_a^b u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)\,dx = u(x)\,v(x)\big|_a^b$$

כעת, מליניאריות האינטגרל מתקבל:

$$\int\limits_a^b u(x) \cdot v'(x) + \int\limits_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx = u(x)\,v(x)\big|_a^b \Rightarrow$$

$$\int\limits_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

משפט (אינטגרציה בהצבה - שינוי משתנה)

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב־$[a,b]$ ותהי F פונקציה קדומה של f ב$[a,b]$.
תהי $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ פונקציה גזירה ב־$[\alpha,\beta]$ כך שφ' אינטגרבילית ב$[\alpha,\beta]$ אזי :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\left(\varphi\left(x\right)\right)\varphi'\left(x\right)dx=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f\left(u\right)du=F\left(\varphi\left(\beta\right)\right)-\left(\varphi\left(\alpha\right)\right)$$

הוכחה

נבחין כי f רציפה ב$[a,b]$ ולכן בפרט אינטגרבילית ב$[a,b]$.
לכן, f אינטגרבילית גם ב$[\varphi\left(\alpha\right),\varphi\left(\beta\right)]$ או ($[\varphi\left(\beta\right),\varphi\left(\alpha\right)]$), שהרי מדובר על תת קטע של $[a,b]$(φ גזירה ולכן רציפה ולכן תמונתה הינה קטע סגור).
כמו כן, מכך שφ גזירה ב$[\alpha,\beta]$ היא בהכרח רציפה ב$[\alpha,\beta]$ ולכן גם $f\circ\varphi$ רציפה ב$[\alpha,\beta]$. ומכאן $\left(f\circ\varphi\right)\varphi'$ אינטגרבילית ב$[\alpha,\beta]$.
מכלל השרשרת נקבל בסך הכל כי:

$$\left(F\left(\left(\varphi\right)\left(x\right)\right)\right)'=F'\left(\varphi\left(x\right)\right)\varphi'\left(x\right)=f\left(\varphi\left(x\right)\right)\varphi'\left(x\right)$$

לכל x ב־$[\alpha,\beta]$ מתקיים כי $F\circ\varphi$ פונקציה קדומה של $\left(f\circ\varphi\right)\circ\varphi'$ ב־$[\alpha,\beta]$.
אם נפעיל כעת את הנוסחה היסודית, נקבל בסך הכל:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f\left(u\right)du=F\left(\varphi\left(\beta\right)\right)-F\left(\varphi\left(\alpha\right)\right)=\int_{\alpha}^{\beta}\left(F\circ\varphi\right)'\left(x\right)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f\left(\varphi\left(x\right)\right)\varphi'\left(x\right)dx$$

הרצאה מס' 22

אינטגרלים מוכללים (או אינטגרלים לא אמיתיים)

כעת נעסוק בדבר דומה למשהו שעסקנו בגבולות באינפי 1. בזמנו, הגדרנו את המושג גבול בצורה מסוימת, ואחר כך הרחבנו את המושג, על אף שאינו עונה על התנאים המקוריים. קראנו לזאת גבול במובן הרחב, אך בכל זאת לא היה מדובר על אותו מושג.

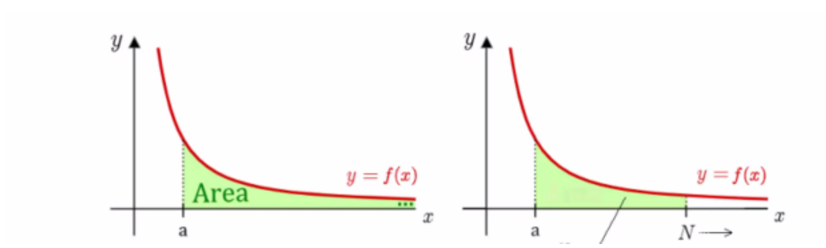
כעת, נעשה פעולה דומה עם אינטגרל, ונרחיב את המושג אינטגרל למקרים שאינם כלולים בתנאים שהגדרנו עד עכשיו. מסיבה זו המתמטיקאים קוראים לאינטגרל זה אינטגרלים לא אמיתיים.

עד כה הנחת היסוד שלנו היתה שהפונקציה חסומה (אפשר אף להגיד שהיא חסומה במלבן מסוים).

הגדרות

אינטגרל לא אמיתי מסוג 1 (קרן אינסופית):

תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית בכל קטע חסום $[a,N]$ עבור $a<N\in\mathbb{R}$.



אם קיים הגבול במובן הצר $\lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_a^N f(x)\,dx = L$, אזי נאמר כי האינטגרל הלא אמיתי $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס (או כי f אינטגרבילית ב $[a,\infty)$). במקרה זה נסמן $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = L$.

אם הגבול $\lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_a^N f(x)\,dx$ לא קיים במובן הצר, נאמר ש$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ לא קיים או מתבדר.

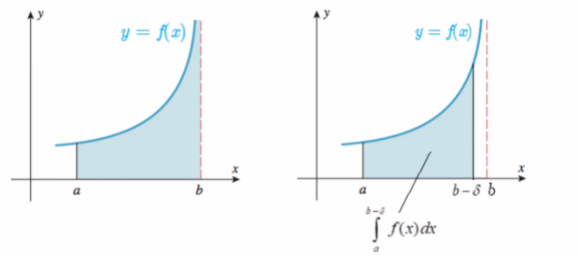
כעת, בצורה דומה, תהי $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית בכל קטע חסום $[N,b]$ עבור $N<b\in\mathbb{R}$.

אם קיים הגבול במובן הצר $\lim\limits_{N\to-\infty}\int\limits_N^b f(x)\,dx = L$, אזי נאמר כי האינטגרל הלא אמיתי $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx$ מתכנס (או כי f אינטגרבילית ב $(-\infty,b]$). במקרה זה נסמן $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx = L$.

אם הגבול $\lim\limits_{N\to-\infty}\int\limits_N^b f(x)\,dx$ לא קיים במובן הצר, נאמר ש$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx$ לא קיים או מתבדר.

אינטגרל לא אמיתי מסוג 2 (פונקציה לא חסומה בנקודת קצה):

תהי $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה כך שלכל $0<\delta<b-a$ הפונקציה f אינטגרבילית בקטע $[a,b-\delta]$ אולם f איננה חסומה בסביבה שמאלית של b (למשל $\lim\limits_{\delta\to 0^+} f(b-\delta)=\pm\infty$)



אם קיים הגבול במובן הצר $\lim\limits_{\delta\to0^+}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx = L\in\mathbb{R}$, אזי נאמר כי האינטגרל הלא אמיתי $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ מתכנס.

(או נאמר כי f אינטגרבילית ב$[a,b)$) . במקרה זה נסמן $\int\limits_a^b f(x)\,dx = L$.

בצורה דומה, תהי $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה כך שלכל $0<\delta<b-a$ הפונקציה f אינטגרבילית בקטע $[a+\delta,b]$ אולם f איננה חסומה בסביבה ימנית של a (למשל $\lim\limits_{\delta\to0^+} f(a+\delta)=\pm\infty$)

אם קיים הגבול במובן הצר $\lim\limits_{\delta\to0^+}\int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx = \widehat{L}\in\mathbb{R}$, אזי נאמר כי האינטגרל הלא אמיתי $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ מתכנס.

(או נאמר כי f אינטגרבילית ב$(a,b]$) . במקרה זה נסמן $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \widehat{L}$..

נשים לב כי כעת לסימון $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ישנן מספר אפשרויות, או כשf אינטגרבילית ב$[a,b]$ והאינטגרל הוא **אמיתי**, והאחרות כשהאינטגרל הוא איננו אמיתי, כמו שראינו במקרה 2.

באותה מידה, היינו יכולים לסמן את האינטגרלים הלא אמיתיים בצורה שונה, באמצעות $\int\limits_{a^+}^b$ או $\int\limits_a^{b_-} f(x)\,dx$. אך אמנם, הסימנים הללו לא השתרשו.

יחד עם זאת, נשים לב כי כאשר f אינטגרבילית ב$[a,b]$, ואכן האינטגרל אמיתי, אזי שני הגבולות $\int\limits_{a^+}^b$ ו $\int\limits_a^{b_-} f(x)\,dx$ קיימים, ושווים לערך של **האינטגרל האמיתי** $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, שהרי (הוכחנו) כי $F(\delta)=\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx$ פונקציה רציפה ב$[0,b-a]$, ולכן גם רציפה משמאל ב0, (באותה מידה נוכל לדבר גם על $\widehat{F}(\delta)=\int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx$).

דוגמאות

(I) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ ($p\in\mathbb{R}$).

כעת, נבחין כי לכל $p\neq1$ מתקיים (מדובר בפונקציה הקדומה) :

$$\int\limits_1^N \frac{1}{x^p}dx = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^N = \frac{N^{1-p}-1}{1-p}$$

הסימון $[F(x)]_a^b = F(b)-f(a)$.

נחלק למקרים:

אם $p>1$ אז $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N^{p-1}}=0$ $\lim\limits_{N\to\infty}N^{1-P}=$ ולכן $\frac{1}{p-1}=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{N^{1-p}}{1-p}$.

כלומר, במקרה זה האינטגרל $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$.

אם $p<1$ אזי נקבל: $\lim\limits_{N\to\infty} N^{1-P}=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N^{p-1}}=\infty$. כלומר $\lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^p}dx=\infty$. דהיינו, האינטגרל $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ מתבדר.

אם $p=1$ אז נבדוק את המקרה בנפרד: $\int\limits_1^N \frac{1}{x}dx=\ln(N)-\ln(1)$ ולכן $\lim\limits_{N\to\infty}\ln(N)=\infty$.

מסקנה: האינטגרל $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ מתכנס אם"ם $p>1$ ואז למעשה $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{p-1}$.

(II) $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ ($p\in\mathbb{R}$).

כעת, נבחין כי לכל $p\neq 1$ מתקיים (:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^p}dx=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_\delta^1=\frac{1-\delta^{1-p}}{1-p}$$

כעת, נחלק למקרים:

אם $p<1$ אזי נקבל: $\lim\limits_{\delta\to 0^+}\delta^{1-P}=\frac{1}{1-p}$. כולכן $\lim\limits_{\delta\to 0^+}\frac{1-\delta^{1-p}}{1-p}=\frac{1}{p-1}$. דהיינו, האינטגרל $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ מתכנס.

אם $p>1$ אזי נקבל $\lim\limits_{\delta\to 0^+}\frac{1-\delta^{1-p}}{1-p}=0$, כלומר האינטגרל $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ מתבדר.

אם $p=1$ אז נקבל שוב כי $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}d=-\ln(\delta)-\ln(1)$ ו־ $\lim\limits_{\delta\to 0^+}(-\ln(\delta))=\infty$.

מסקנה: האינטגרל $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ מתכנס אם"ם $p<1$ ואז למעשה $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{p-1}$.

(III) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^N \frac{dx}{1+x^2}=\lim_{N\to\infty}\left[\arctan(x)\right]_0^N=\lim_{N\to\infty}\arctan(N)=\frac{\pi}{2}$$

(IV) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

ראשית, נבחין כי הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ מוגדרת בקטע החצי פתוח $[0,1)$ ושמקיימת $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\infty$.

זאת אומרת, הפונקציה לא חסומה ולא אינטגרבילית רימן ב$[0,1]$.

אמנם, עבור $0<\delta<1$ הפונקציה אינטגרבילית בקטע הסגור $[0,1-\delta]$, שהרי f רציפה שם.

כלומר, $\int\limits_0^{1-\delta}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ מוגדר.

כעת מתקיים:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\overset{\text{def}}{=}\lim_{\delta\to 0^+}\int\limits_0^{1-\delta}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{\delta\to 0^+}[\arcsin(x)]_0^{1-\delta}=$$

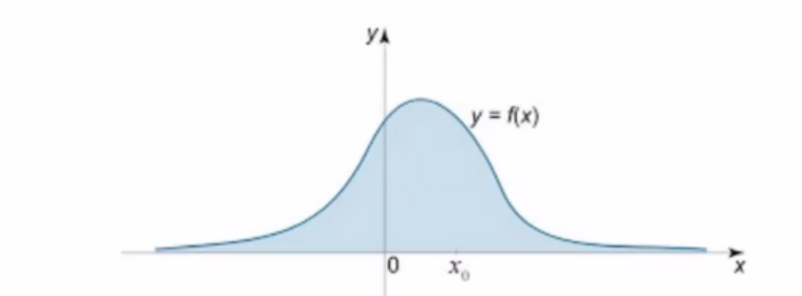
$$\lim_{\delta\to 0^+}(\arcsin(1-\delta)-)\,0=\frac{\pi}{2}$$

אינטגרלים לא אמיתיים בצורה מרובה

כעת נעבור למקרה בו ישנן מספר "בעיות" בצורת האינטגרביליות.

1. אינטגרל $-\infty$ ל∞

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בכל קטע סגור וחסום.



כעת, נניח שקיים $x_0\in\mathbb{R}$ כך ששני האינטגרלים, הלא אמיתיים מהסוג הראשון $\int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx$ וגם $\int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx$ מתכנסים.
במקרה זה נגדיר:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx+\int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx$$

נבחין כי על מנת שהאינטגרל $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ יהיה מוגדר, על שני הגבולות $\lim\limits_{M\to\infty}\int\limits_{x_0}^{M} f(x)\,dx$ ו$\lim\limits_{N\to-\infty}\int\limits_{N}^{x_0} f(x)\,dx$ להיות קיימים בנפרד ובאופן בלתי תלוי. כלומר, למשל, לא מספיק להראות קיום של גבול מהצורה $\lim\limits_{M\to\infty}\int\limits_{-M}^{M} f(x)\,dx$.

דוגמה

נתבונן באינטגרל $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin(x)\,dx$. נבחין כי לכל $x_0\in\mathbb{R}$ ולכל $x_0<M$ מתקיים:

$$\int\limits_{x_0}^{M}\sin(x)\,dx=\cos(x_0)-\cos(M)$$

מחד, $\lim\limits_{M\to\infty}\cos(M)$ איננו קיים, ולכן האינטגרל הלא אמיתי $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin(x)\,dx$ לא קיים.
מאידך, ניזכר כי סינוס היא פונקציה אי זוגית:

$$\lim_{M\to\infty}\int\limits_{-M}^{M}\sin(x)\,dx=\lim_{M\to\infty}\left(\cos(-M)-\cos(M)\right)=\lim_{M\to\infty}0=0$$

טענה

הגדרת האינטגרל ב$(-\infty,\infty)$ איננה תלויה בבחירת x_0.

הוכחה

יהי $x_1 \in \mathbb{R}$ כלשהוא. נבחין כי לכל $M \in \mathbb{R}$ מתקיים (היפוך אינטגרלים ואדיטיביות):

$$\int\limits_{x_1}^{M} f(x)\,dx = \int\limits_{x_0}^{M} f(x)\,dx - \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$$

וכעת, אם נניח כי $\int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx$ מתכנס, נקבל כי גם $\int\limits_{x_1}^{\infty} f(x)\,dx$ מתכנס, ואז למעשה מתקיים (i):

$$\int\limits_{x_1}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx - \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$$

כעת, נוכל לומר כי $\int\limits_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx$ מתכנס, שהרי מתקיים (ii):

$$\int\limits_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx - \int\limits_{x_1}^{x_0} f(x)\,dx$$

ובסך הכל, נוכל לרשום, על סמך השלבים הקודמים:

$$\int\limits_{x_1}^{\infty} f(x)\,dx + \int\limits_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx \overset{(i)+(ii)}{=}$$

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx - \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx - \int\limits_{x_1}^{x_0} f(x)\,dx \overset{i\text{rules ntergral}}{=}$$

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx + \int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx + \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\,d - \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\,d =$$

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx + \int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)\,d$$

כלומר, בסך הכל קיבלנו כי האינטגרל וערכו אינם תלויים בבחירת הנקודה x_0.

הרצאה מס' 23

דוגמה

נתבונן, למשל, בדוגמה הבאה - $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{x-e^x}dx$.

נבדוק את התכנסות $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{x}e^{-e^x}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{x-e^x}dx$. על מנת לפתור זאת, ניעזר בשיטת ההצבה, כאשר $y = e^x$.

(כלומר, למעשה $dy = e^x dx$).

כעת, נקבל:

$$\lim_{M\to\infty}\int\limits_0^M e^{x-e^x}dx=\lim_{M\to\infty}\int\limits_0^M e^x e^{-e^x}dx \overset{(i)}{=} \lim_{M\to\infty}\int\limits_0^{e^M} e^{-y}dy=$$
$$\lim_{M\to\infty}\left[e^{-1}-e^{-e^M}\right]=e^{-1}$$

כאשר (i) נובע מאי שוויון הבא:

$$y'=\frac{dy}{dx}=e^x\Rightarrow e^x dx=dy$$

ומכך שאנו עובדים כאן עם פונקציה שהמשתנה שלה הינו y, ולמעשה $y=e^x$, ואז כשx "זז" מ0 עד M, אזי y "זז" מ$e^0=1$ עד e^M.

באותו אופן, נקבל בכיוון השני, עבור $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{x-e^x}$:

$$\lim_{n\to-\infty}\int\limits_N^0 e^{x-e^x}dx=\lim_{n\to-\infty}\int\limits_{e^N}^0 e^{-y}dy=$$
$$\lim_{n\to-\infty}\left[e^{-e^N}-e^{-1}\right]=1-e^{-1}$$

כלומר, בסך הכל קיבלנו כי $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{x-e^x}dx$ קיים, ושווה למעשה ל$e^{-1}+\left(1-e^{-1}\right)$.

2. אינטגרל בקטע חסום ופתוח עם פונקציה לא חסומה בשני קצות הקטע

הגדרה

תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית על כל קטע מהצורה $[a+\delta,b-\delta]$ עבור $0<\delta<\frac{b-a}{2}$.

נניח שקיימת נקודה $x_0\in(a,b)$ כך ששני האינטגרלים הלא אמיתיים מסוג 2, $\int\limits_a^{x_0} f(x)\,dx$ וגם $\int\limits_{x_0}^{b} f(x)\,dx$ מתכנסים.

במקרה זה נגדיר:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^{x_0} f(x)\,dx+\int\limits_{x_0}^b f(x)\,dx$$

ונאמר שהאינטגרל הלא אמיתי $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ מתכנס (או שf אינטגרבילית ב(a,b)).

כמו קודם, גם כאן ההגדרה איננה תלויה בנקודה x_0, ועל מנת לבדוק האם האינטגרל קיים, עלינו לבדוק האם שני הגבולות קיימים בצורה בלתי תלויה.

3. אינטגרל בקרן פתוחה (התחום לא חסום והפונקציה לא חסומה בקצה הממשי)

הגדרה

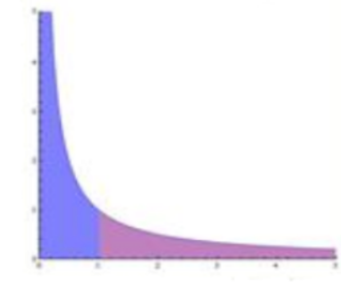
תהי $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית על כל קטע מהצורה $[a+\delta,N]$ ו$a+\delta<N$.

נניח שקיימת נקודה $x_0 \in (a,\infty)$ כך ששני האינטגרלים הלא אמיתיים מסוג 2, $\int\limits_a^{x_0} f(x)\,dx$ וגם $\int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx$ מתכנסים.

במקרה זה נגדיר:

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_a^{x_0} f(x)\,dx + \int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx$$

ונאמר שהאינטגרל הלא אמיתי $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ מתכנס (או שf אינטגרבילית ב(a,∞)) .



כמו קודם, גם כאן ההגדרה איננה תלויה בנקודה x_0, ועל מנת לבדוק האם האינטגרל קיים, עלינו לבדוק האם שני הגבולות קיימים בצורה בלתי תלויה.

משפט

תהיינה $f,g:[a,\infty)$ פונקציות אינטגרביליות בכל תת קטע $[a,N]$ עבור $a<N$.

(i) אם f אינטגרבילית ב$[a,\infty)$ אזי λf אינטגרבילית ב$[a,\infty)$ לכל $\lambda\in\mathbb{R}$ ומתקיים:

$$\int\limits_a^{\infty} \lambda f(x)\,dx = \lambda\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx.$$

(ii) אם f וg אינטגרביליות ב$[a,\infty)$ אזי $f+g$ אינטגרבילית ב $[a,\infty)$ ומתקיים:

$$\int\limits_a^{\infty} (f(x)+g(x))\,dx = \int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx + \int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx.$$

(iii) אם f אינטגרבילית ב$[a,\infty)$ ו$a<c$ אזי f אינטגרבילית ב$[c,\infty)$ ומתקיים: .

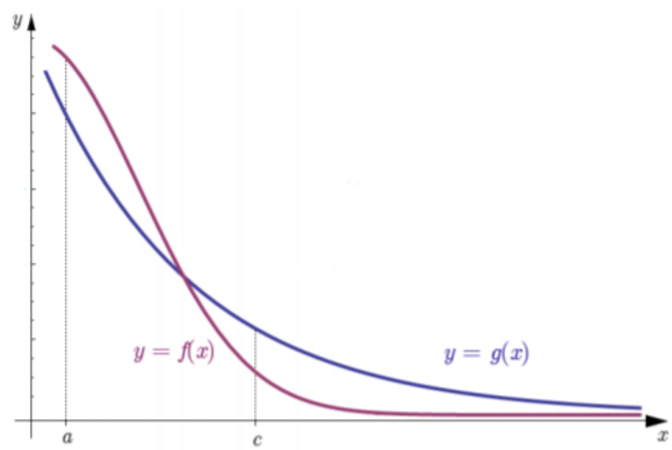
$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_a^{c} f(x)\,dx + \int\limits_c^{\infty} f(x)\,dx$$

מבחני השוואה להתכנסות

אמנם בדרך כלל איננו מכירים פונקציה קדומה של f, ולכן לא נוכל למצוא ביטוי מפורש עבור $\widehat{F}(N)=\int\limits_a^{N} f(x)\,dx$, או עבור $F(\delta)=\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx$, שמאפשר לנו להוכיח את התכנסות האינטגרל על ידי חישוב הגבול.

בנוסף, לפעמים גם כשנכיר פונקציה קדומה, הינה מורכבת ביותר, והמעבר איננו פשוט. לכן, נרצה למצוא דרך אחרת להוכיח שהאינטגרל מתכנס.
נשים לב כי אנו מפרידים בין שני שלבים שונים: ראשית, נרצה להוכיח שהאינטגרל הלא אמיתי **מתכנס** ואחר כן נחשב את **ערכו**.

טענה (מבחן ההשוואה לאינטגרלים לא אמיתיים של פונקציות אי שליליות)
תהיינה $f,g:[a,\infty)$ פונקציות אינטגרביליות בכל תת קטע $[a,N]$ עבור $a<N$.
נניח כי קיים $c\in[a,\infty)$ כך שלכל $x\geq c$ מתקיים: $0\leq f\left(x\right)\leq g\left(x\right)$, אזי:
(i) אם $\int\limits_a^\infty g\left(x\right)dx$ מתכנס, אזי גם $\int\limits_a^\infty f\left(x\right)dx$ מתכנס.
(ii) אם $\int\limits_a^\infty f\left(x\right)dx$ מתבדר, אזי גם $\int\limits_a^\infty g\left(x\right)dx$ מתבדר.



אותם מסקנות נכונות גם עבור $f,g:[a,b)$ (עבור $a<b$ ממשיים) כך ש-f,g אינטגרביליות בכל תת קטע $[a,b-\delta]$ וכך שקיים $c\in[a,b)$ עבורו $c\leq x<b$ מתקיים $0\leq f\left(x\right)\leq g\left(x\right)$.

הוכחה
נתבונן כעת בפונקציה הצוברת $\widetilde{F}\left(x\right)=\int\limits_a^x f\left(t\right)dt$.
אם $c\leq x_1<x_2$, אזי מתקיים:

$$\widehat{F}\left(x_2\right)=\int_a^{x_2}f\left(t\right)dt=\int_a^{x_1}f\left(t\right)dt+\underbrace{\int_{x_1}^{x_2}\underbrace{f\left(t\right)}_{\geqslant 0}dt}_{\geqslant 0}\geqslant\int_a^{x_1}f\left(t\right)dt=\widetilde{F}\left(x_1\right)$$

כלומר, $\widetilde{F}$ מונטונית עולה ב$[c,\infty)$. ולכן הגבול $\lim\limits_{N\to\infty}\widetilde{F}\left(N\right)$ קיים במובן הצר, אם ורק אם $\widetilde{F}$ חסומה מלעיל ב$[c,\infty)$.
בצורה דומה, אם נסמן $\widetilde{G}\left(x\right)=\int\limits_a^x g\left(t\right)=dt$, אזי $\lim\limits_{N\to\infty}\widetilde{G}\left(N\right)$ קיים במובן הצר, אם ורק אם $\widetilde{G}$ חסומה מלעיל ב$[c,\infty)$.
כמו כן, $\int\limits_a^\infty g\left(x\right)dx$ מתכנס אם"ם $\int\limits_c^\infty g\left(x\right)dx$ אם ורק אם $\widetilde{G}$ חסומה מלעיל ב$[c,\infty)$

ובדומה לכך גם f.

נשים לב כעת כי $f(x) \le g(x)$ עבור כל $c \le x$, מה שגורר בהכרח כי $\int_c^x f(t)\,dt \le \int_c^x g(t)\,dt$.

כלומר, החסימות מלעיל של $\widetilde{G}$ ב$[c,\infty)$, גוררת את החסימות מלעיל של $\int_c^x f(t)\,dt$, ודבר זה מוכיח בהכרח את סעיף א'.

סעיף ב' נובע ישירות מלוגיקה.

משפט (קריטריון קושי לאינטגרלים לא אמיתיים)

יהי $a \in \mathbb{R}$ ותהי $f:[a,\infty)$ אינטגרבילית בכל קטע סגור $[a,N]$, כאשר $a<N$.

אזי $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $B\in\mathbb{R}$ כך שלכל $b_1,b_2>B$, מתקיים כי $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

הוכחה

האינטגרל $\int_a^\infty f(x)\,dx$ קיים במובן הצר (המרנו את הטענה לצורה פשוטה) קיים אך ורק אם $\lim\limits_{N\to\infty}\widetilde{F}(N)=\lim\limits_{N\to\infty}\int_a^N f(x)\,dx$

כעת, מטענה באינפי 1, לפי תנאי קושי עבור גבולות של פונקציות באינסוף, בהכרח הגבול קיים אם ורק אם:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists B\in\mathbb{R}\ B<x_1,x_2 \Rightarrow \left|\widetilde{F}(x_2)-\widetilde{F}(x_1)\right|<\varepsilon$$

כעת, נבחין כי מעצם הגדרנו, לפי הנוסחה היסודית, מתקיים:

$$\widetilde{F}(x_2)-\widetilde{F}(x_1)=\int_a^{x_2} f(x)\,dx-\int_a^{x_1} f(x)\,dx=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

כנדרש.

<u>הרצאה מס' 24</u>

התכנסות בהחלט

הגדרה

יהי $a\in\mathbb{R}$ ותהי $f:[a,\infty)$ אינטגרבילית בכל קטע סגור $[a,N]$ עבור $a<N$.

נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס בהחלט, אם"ם האינטגרל $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ מתכנס.

משפט

אם האינטגרל הלא אמיתי $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס בהחלט, אזי האינטגרל $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס.

במקרה זה אף מתקיים, $\left|\int_a^\infty f(x)\,dx\right| \le \int_a^\infty |f(x)|\,dx$.

הוכחה ראשונה

נגדיר כעת שתי פונקציות, f_- וf^+ ב$[a,\infty)$ על ידי:

$$\forall x \in [a, \infty] \quad f^{+}(x) = \max\{f(x), 0\} \quad , \quad f_{-}(x) = -\min\{f(x), 0\}$$

כעת מתקיים, מעצם הגדרתם:

$0 \leqslant f^{+}\ (i)$

$0 \leqslant f_{-}\ (ii)$

$f = f^{+} - f_{-}\ (iii)$

$|f| = f^{+} + f_{-}\ (vi)$

$f^{+} \leqslant |f\ (v)$

$f_{-} \leqslant |f\ (vi)$

ממבחן ההשוואה עולה כי f_{-} וגם f^{+} אינטגרביליות ב$[a, \infty)$ ולכן גם $f = f^{+} - f_{-}$ גם אינטגרביליות ב$[a, \infty)$.
כעת נבחין כי מתקיים למעשה:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_a^{\infty} f^{+}(x)\,dx - \int_a^{\infty} f_{-}(x)\,dx \leq \int_a^{\infty} f^{+}(x)\,dx + \int_a^{\infty} f_{-}(x)\,dx = \int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$$

בצורה דומה, מתקיים:

$$-\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx = -\int_a^{\infty} f^{+}(x)\,dx - \int_a^{\infty} f_{-}(x)\,dx \leq \int_a^{\infty} f^{+}(x)\,dx - \int_a^{\infty} f_{-}(x)\,dx = \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

כלומר, בסך הכל קיבלנו כי:

$$-\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx \leq \int_a^{\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$$

לכן, מטענה באינפי 1 ומחוקי ערך מוחלט מתקיים:

$$\left|\int_a^{\infty} f(x)\,dx\right| \leq \int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$$

הוכחה שנייה

אנו יודעים כי האינטגרל $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ מתכנס, ,ולכן מקריטריון קושי, קיים $B \in \mathbb{R}$ כך שלכל $b_1, b_2 > B$ מתקיים בהכרח $\int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx < \varepsilon$, כעת בפרט נקבל מערך מוחלט באינטגרלים כי $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx < \varepsilon$.
כלומר, בפרט $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ גם כן מקיים את קריטריון קושי, ולכן מתכנס.

בנוסף, נבחין כי ידוע לנו ש־ $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ לכל x ששייך ל־ $[a,\infty)$ ולכן בהכרח $-\int\limits_a^N |f(x)| \le \int\limits_a^N f(x) \le \int\limits_a^N |f(x)|$ לכל $a<N$.

אנו יודעים כי לכל אחת מהפונקציות הללו יש גבול כאשר N שואף לאינסוף, ולכן בפרט נקבל:

$$-\int\limits_a^\infty |f(x)| \le \int\limits_a^\infty f(x) \le \int\limits_a^\infty |f(x)|$$

כנדרש.

הערה

נשים לב כי לא ניתן להפעיל את מבחן ההשוואה ישירות על f ביחס ל$|f|$, כי לא בהכרח מובטח לנו כי f אי שלילית.

כעת נראה שבעזרת התכנסות בהחלט ומבחן ההשוואה אפשר להוכיח את ההתכנסות של אינטגרלים מסוימים. נראה זאת באמצעות הדוגמה הבאה.

טענה

תהי $f:[1,\infty)$ אינטגרבילית בכל תת קטע סגור $[1,N]$ עבור $1<N$.

אם f חסומה ב$[1,\infty)$ (כלומר, קיים $0<M$ כך ש$|f(x)| \le M$ עבור כל $1 \le x$) אזי $\int\limits_1^\infty \frac{f(x)}{x^p}dx$ מתכנס לכל $p>1$.

הוכחה

על פי הנתון, מתקיים, לכל $x \le 1$:

$$0 \le \left|\frac{f(x)}{x^p}\right| \le \frac{M}{x^p}$$

כמו כן, ראינו כי $\int\limits_1^\infty \frac{M}{x^p}dx$ מתכנס, עבור $1<p$, כעת $\int\limits_1^\infty \frac{f(x)}{x^p}dx$ מתכנס בהחלט, כנדרש.

משפט (מבחן האינטגרל לטורים חיוביים)

תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ חיובית ומונוטונית יורדת ב$[1,\infty)$.

אזי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ מתכנס אם ורק אם האינטגרל $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ מתכנס.

הוכחה

ראשית, נבחין כי הפונקציה הינה מונוטונית יורדת, לכן היא בפרט אינטגרבילית.

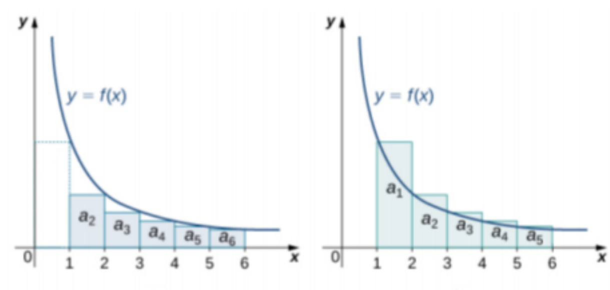
בהמשך, נסמן, לכל n טבעי, כי $a_n = f(n)$. כמו כן, נסמן ב$(s_k)_{k=1}^{\infty}$ את סדרת הסכומים החלקיים של $s_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$.

מכיוון שf חיובית (על פי הנתון), האינטגרל $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ מתכנס, אם ורק אם הפונקציה $\widetilde{F}(N) = \int\limits_1^N f(x)\,dx$ חסומה מלעיל ב$[1,\infty)$.

בפרט, הכוונה כאן היא אם ורק אם הסדרה $\left(\int\limits_1^k f\left(x\right)dx\right)_{k=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל.

בצורה דומה, נאמר כי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(n\right)$ מתכנס, אם ורק אם $\left(s_k\right)_{k=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל.

כעת, נדגים את הקישור בין שני הדברים באמצעות הציור הבא:



בחרנו כאן להסתכל על האינטגרל של $[1,6]$. אם נסתכל למשל על המלבן הראשון, מדובר למעשה ב$1\cdot a_2=a_2$ וכן הלאה.

סכום דרבו במקרה הזה הוא למעשה $s_6-a_1\leq\int\limits_1^6 f\left(x\right)dx$, שהרי a_1 לא נכלל כאן.

אם נתבונן בציור השמאלי, נקבל סכום דרבו תחתון של $[1,5]$. כלומר, בסך הכל קיבלנו כי:

$$s_6-a_1\leq\int\limits_1^6 f\left(x\right)dx\leq s_5$$

כעת נוכיח זאת בצורה כללית.

נבחין כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$f\left(n+1\right)=\int\limits_n^{n+1} f\left(n+1\right)dx\leq\int\limits_n^{n+1} f\left(x\right)dx$$

הסיבה לכך הינה מהגדרתנו אינטגרל של קבוע ומכך שאנו רק מוסיפים איברים כשאנו סוכמים את האיברים שאינם טבעיים.

כעת, מהמונוטוניות היורדת, מתקיים כי $f\left(n+1\right)\leq f\left(n\right)$.

אם ניקח את הפונקציה הקבועה $f\left(n\right)$ נקבל כי:

$$\int\limits_n^{n+1} f\left(x\right)dx\leq f\left(n\right)=\int\limits_n^{n+1} f\left(n\right)dx$$

כלומר בסך הכל:

$$f\left(n+1\right)\leq\int\limits_n^{n+1} f\left(x\right)dx\leq f\left(n\right)$$

יהי $2 \le k \in \mathbb{N}$. בשלב זה, נסכום את אי השוויונים אגף אגף, עבור $n=1$ עד $n=k-1$ ולכן נקבל בסך הכל:

$$\sum_{n=1}^{k-1} f(n+1) \le \sum_{n=1}^{k-1} \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{k-1} f(n)$$

כלומר, בסך הכל נקבל:

$$s_k - f(1) \le \int_{1}^{k} f(x)\,dx \le s_{k-1}$$

מאי השוויון האחרון נובע בהכרח שהסדרה $\left(\int_1^k f(x)\,dx,\right)_{k=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל אם ורק אם $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל.

דוגמה

יהי $p \in \mathbb{R}$. ראינו כבר כי $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}$ מתכנס, אמ"ם $1 < p$.

עבור $0 < p$ הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^p}$ חיובית ומונטוניות יורדת ב$[1,\infty)$, ולכן בהכרח ממבחן האינטגרל נובע כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ מתכנס, אמ"ם $1 < p$.

הרצאה מס' 25

פונקציות ממשיות במספר משתנים

הקדמה

באופן כללי, פונקציה היא אובייקט שמתאים לכל איבר בקבוצה, איבר יחיד בטווח.
באינפי 1 התעסקנו בפונקציות ממשיות במשתנה ממשי, כלומר למעשה $f : D \to \mathbb{R}$, כאשר $D \subseteq R$.
כעת, באינפי 2, אנחנו מתעסקים גם בפונקציות ממשיות בשניים או שלושה משתנים ממשיים - כלומר, פונקציות $f : D \to \mathbb{R}$ כאשר $D \subseteq \mathbb{R}^2$ או $D \subseteq \mathbb{R}^3$.

דוגמאות

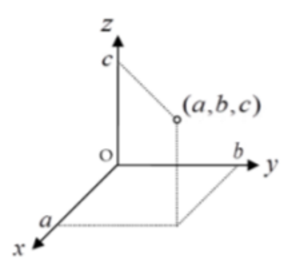
(i) הפונקציה $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

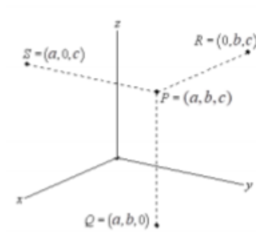
$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad f\left(\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(x,y) = 3x - 2y + 5$$

(ii) הפונקציה $f : [0,\infty) \times (\mathbb{R} \setminus \{2\}) \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in [0,\infty) \times (\mathbb{R} \setminus \{2\}) \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{x}}{y-2}$$

ישנה דרך סטנדרטית להציג פונקציה כאלו בצורה גרפית.
כל אובייקט בתחום הוא איבר ב$\mathbb{R}^2$ וכל איבר בטווח הוא ב$\mathbb{R}$. כלומר נוכל להציג זאת כך $\left(\binom{x}{y}, z\right)$, או במילים אחרות, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x,y,z)$.
בצורה כזאת, הגרף של הפונקציה הינו ב$\mathbb{R}^3$.

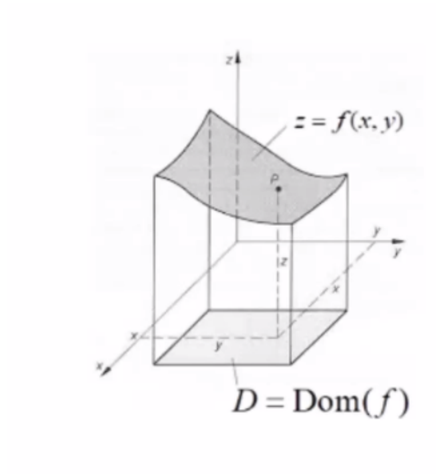




כך נוכל לאתר נקודה במרחב התלת ממדי.
נשים לב שבמערכת צירים "רגילה" אנו לעיתים רגילה לקרוא לנקודה $(2,0)$, "2", למרות שלמעשה לא מדובר בהגדרה מדויקת לחלוטין. כך גם בצורה דומה, נצטרך, באופן רשמי, לקרוא לנקודה $(a,0,0)$ ולא a. אמנם, אנו חוסכים כתיבת אפסים וסוגריים ומסתפקים ב"מרחק" מהראשית.
דבר זה נקרא גרף הפונקציה f, כלומר למעשה הקבוצה:

$$\Gamma_f = \left\{ \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, z \right) \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \wedge z = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$$

בשלב זה מתקיים כי Γ_f הינו תת קבוצה של $\mathbb{R}^3$. Γ_f היא דוגמה של קבוצות כלליות יותר, הנקראת **יריעות דו ממדיות.**



כמו באינפי 1, גם כאן מוסכמת הטווח המקסימלי היא $\mathbb{R}$. וכמו כן מוסכמת התחום המקסימלי היא $D \subseteq \mathbb{R}^2$, היא כל הנקודות שעבורן הביטוי מוגדר היטב.

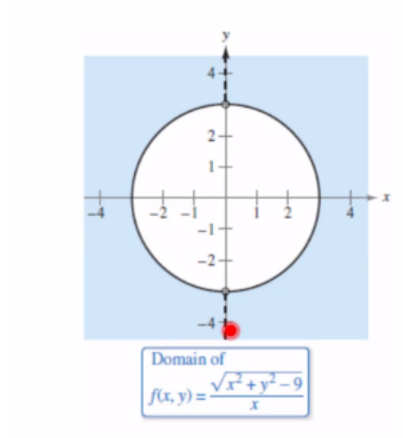
דוגמה

נתבונן בדוגמה הבאה:

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{x}$$

נבחין כי הביטוי מוגדר היטב אם"ם $x^2+y^2 \geq 9$, וגם $x \neq 0$.

$x^2+y^2=9$ זו משוואה של מעגל שרדיוסו שווה ל3. אנחנו רוצים גדול או שווה, ולכן בפרט, כל הנקודות מחוץ למעגל מתארים את המשוואה. מעבר לכך, הנקודות בהם $x=0$, אינם חלק מתחום ההגדרה והן מקווקות, כלומר בסך הכל:



הרצאה מס' 26

מרחק בין שתי נקודות על הישר

בישר הממשי, באינפי 1, הגדרנו פונקצית מרחק $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ באמצעות $\forall x,y\in\mathbb{R}\ d(x,y)=|x-y|$, ובאמצעות התכונות הבאות:

(i) חיוביות: $d(x,y)\geqslant 0\quad \forall x,y\in\mathbb{R}, d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$.

(ii) סימטריה : $\forall x,y\in\mathbb{R}\ d(x,y)=\ d(x,y)$

(iii) אי שוויון המשולש: $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\ d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$.

המשך, השתמשנו בפונקצית המרחק על מנת להגדיר את המושג סביבה של נקודה x_0. הגדרנו זאת בתור תת קבוצה של $\mathbb{R}$ כך ש: $B_r(x_0)=\{x\in\mathbb{R}|d(x,x_0)<r\}$. כש־$0<r$.

הגדרנו סביבה מנוקבת באמצעות קבוצה מהצורה $B_r(x_0)\setminus\{x_0\}$.

ניזכר לרגע גם בהגדרת גבול של פונקציה בנקודה:

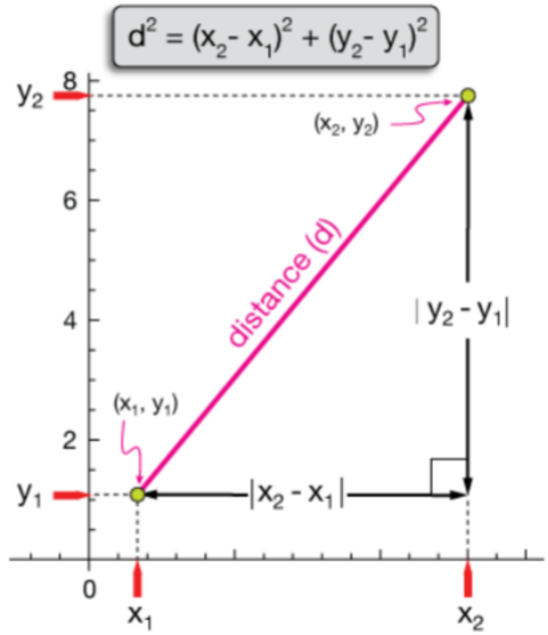
$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in\mathrm{Dom}(f)\quad(0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon)$$

נבחין כי גם ניתן לכתוב את הביטוי בצורה הבאה:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in\mathrm{Dom}(f)\quad(0<d(x,x_0)<\delta\Rightarrow d(f(x),L)<\varepsilon)$$

מרחק בין שתי נקודות במישור

בהינתן שתי נקודות $P=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ ו־$Q=\begin{pmatrix}x_1\\y_2\end{pmatrix}$ במישור, נגדיר את המרחק ביניהן על ידי $d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.



ניתן לראות שפונקצית המרחק $d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ מקיימת את התכונות הבאות:

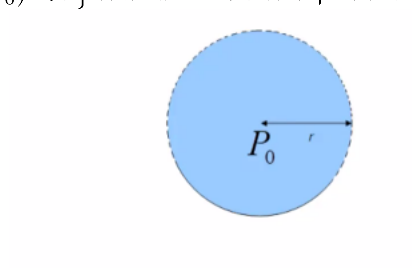
(i) חיוביות: $d(P,Q)\geqslant 0 \quad \forall P,Q\in\mathbb{R}$, $d(P,Q)=0\Leftrightarrow P=Q$.

(ii) סימטריה : $d(P,Q)=d(Q,P) \quad \forall P,Q\in\mathbb{R}^2$

(iii) אי שוויון המשולש: $d(P,Q)\leq d(P,R)+d(P,Q) \quad \forall P,Q,R\in\mathbb{R}^2$.

כעת, נגדיר באמצעות פונקצית המרחק סביבה של נקודה P_0.

זאת תת קבוצה של $\mathbb{R}^2$ מהצורה $B_r(P_0)=\left\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,P_0)<r\right\}$, כאשר $0<r$.

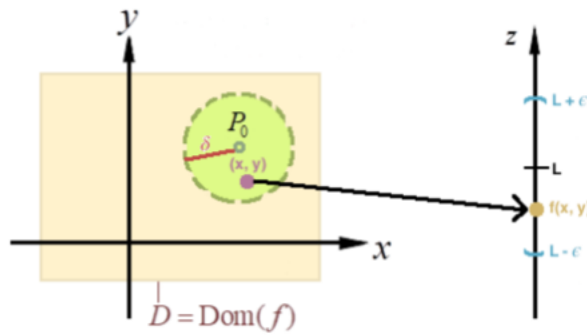


הגדרה

תהי $f:D\to\mathbb{R}^2$ עם פונקציה נתונה, כך ש-D מכיל בסביבה מנוקבת של P_0. נאמר שהמספר הממשי L הוא גבול של הפונקציה f בנקודה P_0 אם"ם:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall P\in D \quad (0<d(P,P_0)<\delta\Rightarrow|f(P)-L|<\varepsilon)$$
$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall P\in D \quad (0<d(P,P_0)<\delta\Rightarrow d(f(P),L)<\varepsilon)$$

כך למשל בציור הבא:



הרצאה מס' 27

גבולות

משפט (יחידות הגבול)

תהי $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של $P_0=\binom{x_0}{y_0}\in\mathbb{R}^2$ ויהיו $L_1,L_2\in\mathbb{R}$. אם L_1 ו-L_2 הם גבולות של f בנקודה P_0 אזי $L_1=L_2$.

כלומר, אם יש ל-f גבול בנקודה P_0, אזי הוא יחיד. במקרה זה נסמן את הגבול: $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ או $\lim\limits_{P_0} f$.

הוכחה

על פי הנתון, קיים $\delta_0>0$ כך ש-$B_{\delta_0}(P_0)\setminus\{P_0\}\subseteq D$ (כלומר ישנה סביבה מנוקבת שמוכלת בסביבת D).

נניח כעת בשלילה ש-$L_2\neq L_1$. נסמן את ε כך: $0<\varepsilon=\frac{|L_1-L_2|}{2}$.

על פי הנתון, L_1 הוא גבול של f בנקודה P_0 ולכן קיים $0<\delta_1$ כך ש-$\forall P\in D\ 0<d(P,P_0)<\delta_1 \Rightarrow |f(P)-L_1|<\varepsilon$.

על פי הנתון, L_1 הוא גבול של f בנקודה P_0 ולכן קיים $0<\delta_2$ כך ש-$\forall P\in D\ 0<d(P,P_0)<\delta_2 \Rightarrow |f(P)-L_2|<\varepsilon$.

נבחר $0<\delta=\min(\delta_0,\delta_1,\delta_2)$ ואז $\widetilde{P}\in B_{\delta_0}(P_0)\setminus\{P_0\}$.

כעת נקבל:

$$|L_1-L_2|=\left|L_1-f\left(\widetilde{P}\right)+f\left(\widetilde{P}\right)-L_2\right|\leqslant\left|L-f\left(\widetilde{P}\right)\right|+\left|f\left(\widetilde{P}\right)-L_2\right|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon=|L_1-L_2|$$

כלומר, קיבלנו סתירה, שנבעה מכך שהנחנו שהגבולו שונים. לכך בהכרח $L_1=L_2$, כנדרש.

טענה

תהי $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של P_0, ונניח ש-$\lim\limits_{P\to P_0}=L\in\mathbb{R}$. אזי קיימת סביבה מנוקבת U של P_0 בה f חסומה. (כלומר $f(U)=\{f(P)\mid P\in U\}$ היא תת קבוצה חסומה של $\mathbb{R}$).

הוכחה

על פי הנתון:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall P\in D\quad\left(0<d(P,P_0)<\delta\Rightarrow|f(P)-L|<\varepsilon\right)$$

נבחר $\varepsilon = 1$ ונקבל $\delta > 0$ כך ש $0 < d(P, P_0) < \delta \Rightarrow |f(P) - L| < 1$.

בפרט, כל $P \in B_{\delta_0}(P_0) \setminus \{P_0\}$ מתקיים $-1 < f(P) - L < 1$. בפרט $L - 1 < f(P) < L + 1$.

(אפשר לומר שלמעשה הגרף של f נמצא בתוך גליל ישר עם בסיסים מקבילים למישור XY בגובה $z = L - 1$ ו $z = L + 1$).

לכן $U = B_{\delta_0}(P_0) \setminus \{P_0\}$, מעניק לנו את הדרוש.

טענה

תהי $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של P_0, ונניח ש$\lim\limits_{P \to P_0} = L \in \mathbb{R}$

אם $L > 0$ אזי קיימת סביבה מנוקבת U של P_0 כך שלכל P ב־ U מתקיים $\frac{L}{2} < f(P) < \frac{3L}{2}$.

אם $L < 0$ אזי קיימת סביבה מנוקבת U של P_0 כך שלכל P ב־ U מתקיים $\frac{3L}{2} < f(P) < \frac{L}{2}$.

הגדרה

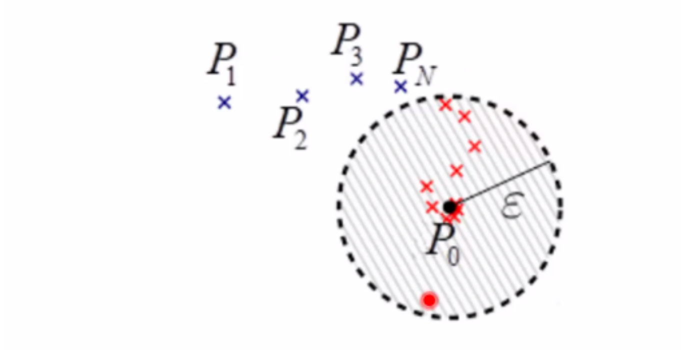
סדרה של נקודות ב־ $\mathbb{R}^2$ היא פונקציה $p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$. נהוג לסמן P_n במקום $p(n)$ וגם נהוג לסמן את הסדרה ב־ $(P_n)_{n=1}^{\infty}$.

לכל n טבעי מתקיים $\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = P_n$, עם $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. כלומר סדרה ב-$\mathbb{R}^2$ היא בעצם סוג של סדרות ממשיות.

הגדרה

תהי $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של נקודות ב$\mathbb{R}^2$ ותהי $P_0 \in \mathbb{R}^2$. נאמר שP_0 הוא גבול של $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ אם"ם $\lim\limits_{n \to \infty} d(P_n, P_0)$. כלומר, למעשה:

$$\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} \quad N < n \Rightarrow d(f(P), L) < \varepsilon$$



טענה

אם יש לסדרה של נקודות ב-$\mathbb{R}^2$ גבול, אזי יש לה גבול יחיד. במקרה זה נסמן את הגבול $\lim\limits_{n \to \infty} P_n$.

הוכחה

תרגיל.

משפט

תהי $(P_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\binom{x_n}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של נקודות ב$\mathbb{R}^2$ ותהי $P_0 = \binom{x_0}{y_0}$ אזי $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_n \wedge \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0\right)$ אם"ם $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$.

הוכחה

בכיוון הראשון, נבחין כי על פי הנתון $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$.כלומר, בפרט $\lim\limits_{n\to\infty} d\left(P_n, P_0\right) = 0$.
כעת, נובע ממשפט הסנדוויץ' ומכך ש $0 \le |x_n - x_0| \le d\left(P_n, P_0\right)$ שבהכרח־ $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x_0| = 0$, כלומר $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.
ובצורה דומה נקבל ש־ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ כנדרש.

בכיוון השני, על פי הנתון $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_n \wedge \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ ולכן מאי השוויון הבא ומשפט הסנדוויץ נקבל:

$$0 \le d\left(P_n, P_0\right) \le |x_n - x_0| + |y_n - y_0|$$

ממילא מתקיים כי־ $\lim\limits_{n\to\infty} d\left(P_n, P_0\right) = 0$.כלומר, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$, כנדרש.

אפיון היינה

תהי $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של $\in \mathbb{R}^2$ $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ויהי $L \in \mathbb{R}$.
אזי $\lim\limits_{P\to P_0} f\left(P\right) = L$ אם"ם לכל סדרה המקיימת את שלושת התנאים הבאים:
(i) $P_n \neq P_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $P_n \in D \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$
יתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(P_n\right) = L$

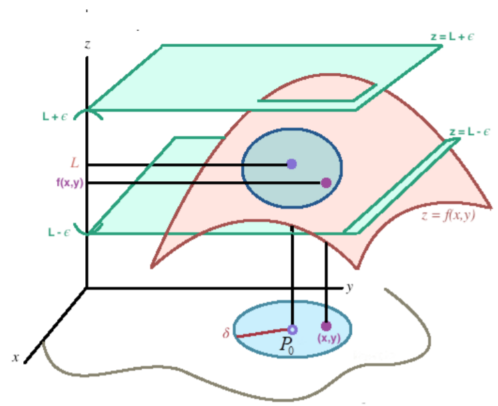
הוכחה

בכיוון הראשון $\Leftarrow$ על פי הנתון $\lim\limits_{P\to P_0} f\left(P\right) = L$.
כעת, ניקח סדרה $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ שמקיימת את שלושת התנאים דלעיל. נראה כעת כי $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(P_n\right) = L$.
יהי $\varepsilon > 0$. מהגדרת הגבול של קושי, נובע שקיים $\delta > 0$ כך שלמעשה $|f\left(P\right) - L| < \varepsilon$ לכל P שמקיים $0 < d\left(P, P_0\right)$.
מתנאי (iii) והגדרות הגבול, אנחנו מקבלים מספר טבעי $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $d\left(P_n, P_0\right)$.
כעת, מתנאי (i) עולה כי $0 < d\left(P_n, P_0\right)$ לכל n ובפרט קיבלנו כי לכל $n > N$ מתקיים $0 < d\left(P_n, P_0\right) < \delta$.
כלומר, למעשה, עבור $n > N$ מתקיים מעצם הגדרת הגבול $|f\left(P_n\right) - L| < \varepsilon$שזו ההגדרה להתכנסות הסדרה ל־ L.

בכיוון השני $\Rightarrow$ נתון שכל סדרה שמקיימת את שלושת התנאים דלעיל, $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(P_n\right) = L$.
נניח שלא מתקיים $\lim\limits_{P\to P_0} f\left(P\right) = L$.
אז לפי שלילת הגבול של קושי, קיבלנו:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists P \in D \quad 0 < d\left(P, P_0\right) < \delta \wedge |f(P) - L| \geqslant \varepsilon_0$$

יהי $n\in\mathbb{N}$. ניקח $\delta=\frac{1}{n}$, שקיימת בהכרח $P_n\in D$ בעבורה כך ש־ $0<d\left(P_n,P_0\right)<\frac{1}{n}$ וגם $|f(P_n)-L|\geqslant\varepsilon_0$.
כעת, נסמן $P_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, עם $x_n,y_n\in\mathbb{R}$. מכך ש־ $0<d\left(P_n,P_0\right)$ עולה ש־ $P_n\neq P_0$.
מכך ש־ $d\left(P_n,P_0\right)<\frac{1}{n}$ ולפי משפט הסנדוויץ, אנחנו מקבלים ש־ $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$.
כלומר, הסדרה P_n מקיימת את שלושת התנאים דלעיל, ובנוסף $|f(P_n)-L|\geqslant\varepsilon_0$.
זאת בסתירה להתכנסות של $f\left(P\right)$ ל־ L.



דוגמה 1
הוכיחו באמצעות ההגדרה של קושי ובאמצעות אפיון היינה ש־ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(3x-2y+4)=3$

<u>באמצעות ההגדרה של קושי</u>
אנו רוצים להוכיח למעשה:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\quad\left(0<d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)<\delta\Rightarrow\quad|(3x-2y+4)-3|<\varepsilon\right):$$

כעת נבחין שמתקיים:

$$\begin{aligned}|(3x-2y+4)-3|&=|(3x-2y+4)-(3-2\cdot2+4)|\\&=|(3x-3-2y+2\cdot2)|\\&=|3(x-1)-2(y-2)|\\&\leqslant|3(x-1)|+|2(y-2)|\\&=3|x-1|+2|y-2|\end{aligned}$$

נוכל לראות שלמעשה מתקיים:

$$d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)<\delta\Rightarrow|x-1|<\delta\quad\wedge|y-2|<\delta\Rightarrow3|x-1|+2|y-2|<5\delta$$
$$\cdot d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)<\delta\Rightarrow|(3x-2y+4)-3|\leqslant3|x-1|+2|y-2|<5\delta$$

כלומר, מספיק שנבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$, על מנת לקיים את הדרוש.

באמצעות היינה

תהי $\left(\left(\begin{array}{c} x_n \\ y_n \end{array}\right)\right)_{n=1}^{\infty} = (P_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כלשהיא, כך שמתקיים:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n \neq P_0 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\right) \lim_{n\to\infty} P_n = P_0$$

כלומר, בסך הכל מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 2$$

כמו כן, נשים לב שמעצם ההגדרה אנחנו מקבלים:

$$f(P_n) = f(x_n, y_n) = 3x_n - 2y_n + 4$$

ולכן קיבלנו, בסופו של דבר:

$$\lim_{n\to\infty} f(P_n) = \lim_{n\to\infty} (3x_n - 2y_n + 4) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 4 = 3$$

כלומר:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (3x - 2y + 4) = 3$$

כנדרש.

הרצאה מס' 28

דוגמה 2

הוכיחו ש־0 $= \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

נבחין כי תחום ההגדרה כאן הינו־ $\mathrm{Dom}(f) = D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \binom{0}{0}$, המכיל סביבה מנוקבת של $P_0 = \binom{0}{0}$. כעת, נסמן $P = \binom{x}{y}$.

נבחין כי אנו רוצים להוכיח כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $P = \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) \neq \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right)$, מתקיים:

$$0 < d(P, P_0) = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| < \varepsilon$$

בשלב זה נוכל להבחין שלכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$0 \leq (|x| - |y|)^2 = x^2 - 2|xy| + y^2$$

אם נעביר אגפים נקבל בסך הכל את אי השוויון הבא: $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$.
נוכל להשתמש בשלב זה באי השוויון ולקבל:

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = \frac{1}{2} d(P, P_0)$$

כעת, יהי $\varepsilon > 0$. נבחר $\delta = 2\varepsilon$, ונקבל $0 < d(P, P_0) = \sqrt{x^2+y^2}$ אזי $|f(x,y) - 0| < \frac{\delta}{2} = \varepsilon$.

משפט (אריתמטיקה של גבולות)

יהיו f ו־g שתי פונקציות המוגדרת בסביבה מנוקבת של V של $P_0 \in \mathbb{R}^2$. נניח ש־ $\lim_{P \to P_0} f(P) = L_1$ ו־ $\lim_{P \to P_0} g(P) = L_1$, כאשר $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. אזי מתקיים:

(I) ל־ $f + g$ יש גבול בנקודה P_0 ומתקיים: $\lim_{P \to P_0} (f+g)(P) = L_1 + L_2$.

(II) ל־ $f \cdot g$ יש גבול בנקודה P_0 ומתקיים: $\lim_{P \to P_0} (f \cdot g)(P) = L_1 L_2$.

(III) אם בנוסף $L_2 \neq 0$, אזי קיימת סביבה מנוקבת של P_0 שבה g איננה מתאפסת. ולכן ל־ $\frac{1}{g}$ יש גבול בנקודה P_0 ומתקיים: $\lim_{P \to P_0} \left(\frac{1}{g}\right)(P) = \frac{1}{L_2}$.

(IV) אם בנוסף $L_2 \neq 0$ אזי יש ל־$\frac{f}{g}$ גבול בנקודה P_0 ומתקיים: $\lim_{P \to P_0} \left(\frac{f}{g}\right)(P) = \frac{L_2}{L_2}$

טענה

יהי $\lambda \in \mathbb{R}$ מספר נתון ותהי $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ הפונקציה הקבועה המוגדרת עבור כל $P \in \mathbb{R}^2$ על ידי $g(P) = \lambda$. אזי לכל $P_0 \in \mathbb{R}^2$ יש ל־ g גבול בנקודה P_0 ומתקיים $\lim_{P \to P_0} (g)(P) = \lambda$.

משפט

יהיו f ו־ g שתי פונקציות בעלות כל אחת גבול בנקודה $P_0 \in \mathbb{R}^2$.

(I) יהי $\lambda \in \mathbb{R}$ מספר נתון. אזי מתקיים: $\lim_{P \to P_0} ((\lambda f)(P)) = \lambda \lim_{P \to P_0} (f)(P)$ (אפשר לבחור את הפונקציה הקבועה $g(P) = \lambda$.

(II) $\lim_{P \to P_0} (f-g)(P) = \lim_{P \to P_0} f(P) - \lim_{P \to P_0} g(P)$.

משפט (גבול של מכפלת פונקציה חסומה בפונקציה אפסה)

יהיו f ו־ g פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של $P_0 \in \mathbb{R}^2$. נניח ש־ $\lim_{P \to P_0} f(P)$ וש־g חסומה ב־ U.
אז פונקצית המכפלה $f \cdot g$ בעלת גבולת ב־ P_0 ומתקיים $\lim_{P \to P_0} (f \cdot g)(P) = 0$.

גבול ויחס סדר

טענה

יהיו f ו־ g שתי פונקציות המוגדרות כל אחת בסביבה מנוקבת של $P_0 \in \mathbb{R}^2$.
נניח ש־$\lim_{P \to P_0} f(P) = L_1$ ו־ $\lim_{P \to P_0} g(P) = L_2$.

אם קיימת סביבה מנוקבת של U של P_0 כך שלכל P ב־ U מתקיים: $f(P) \leq g(P)$, אזי $\lim_{P \to P_0} f(P) = L_1 \leq$
$L_2 = \lim_{P \to P_0} g(P) = L_2$.

הוכחה

נגדיר $h = g - f$. כעת נובע מהנתון כי לכל P ב־ U מתקיים:

$$h(P) = g(P) - f(P) \geq 0$$

מאריתמטיקה של גבולות נקבל שגם ל־ h יש גבול בP_0 ושמתקיים:

$$\lim_{P \to P_0} h(P) = L_2 - L_1$$

אם נניח בשלילה כי $L_2 - L_1 < 0$, אז נקבל כי ישנה סביבה מנוקבת V של P_0 כך שלכל P ב־ V מתקיים $h(P) < 0$.
כעת, יהי $\widetilde{P} \in U \cap V$ בהכרח מתקיים $0 \leq h\left(\widetilde{P}\right) < 0$.
כלומר קבילנו סתירה שמראה שבהכרח $L_2 - L_1 \geq 0$.
ובסך הכל נקבל כי $L_2 \geq L_1$, כפי שרצינו.

הערה

אי שוויון חריף בין פונקציות גורר רק אי שוויון חלש בין הגבולות שלהם.

טענה

יהיו f ו־ g שתי פונקציות המוגדרות כל אחת בסביבה מנוקבת של $P_0 \in \mathbb{R}^2$.
נניח ש־$\lim_{P \to P_0} f(P) = L_1$ ו־ $\lim_{P \to P_0} g(P) = L_2$.
אם $\lim_{P \to P_0} f(P) = L_1 < L_2 = \lim_{P \to P_0} g(P) = L_2$ אז קיימת סביבה מנוקבת של U של P_0 כך שלכל P ב־ U מתקיים: $f(P) < g(P)$.

משפט הסנדוויץ'

יהי f, g, h שלוש פונקציות המוגדרות בסביבה המנוקבת של $P_0 \in \mathbb{R}^2$ ונניח שמתקיימים שלושת התנאים הבאים:
(I) קיימת סביבה מנוקבת U של P_0 כך שלכל P ב־ U מתקיים $f(P) \leq g(P) \leq h(P)$.
(II) ל־ f ול־ h יש גבול בנקודה P_0.
(II) $\lim_{P \to P_0} f(P) = \lim_{P \to P_0} h(P)$
אזי גם ל־ g יש גבול בנקודה P_0 ומתקיים:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = \lim_{P \to P_0} g(P) = \lim_{P \to P_0} h(P)$$

רציפות

הגדרה

תהי $f:D\rightarrow\mathbb{R}$ פונקציה נתונה, (כאשר $D\subseteq\mathbb{R}^2$) ויהי $P_0\in\mathbb{R}^2$. נאמר ש־ f רציפה ב־ P_0 אם"ם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

(i) הפונקציה f מוגדרת בסביבה מלאה של $P_0\in\mathbb{R}^2$

(ii) f בעלת גבול בנקודה P_0.

(iii) מתקיים השוויון $\lim\limits_{P\rightarrow P_0}f(P)=f(P_0)$.

דוגמאות

(i) יהי λ מספר ממשי כלשהוא ותהי $f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$ הפונקציה הקבועה המוגדרת על ידי $f(P)=\lambda \quad \forall P\in\mathbb{R}^2$.
אזי בפרט f רציפה בכל $P_0\in\mathbb{R}^2$, שהרי ל־f יש גבול בכל נקודה P_0 ושמתקיים $\lim\limits_{P\rightarrow P_0}f(P)=\lambda=f(P_0)$.

(ii) תהי $f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי $f(x,y)=3x-2+4 \quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$. אזי בפרט f רציפה ב $P_0=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, שהרי ראינו כי ל־$f$ יש גבול ב P_0 ושמתקיים $\lim\limits_{(x,y)\rightarrow(1,2)}f(P)=3=f(1,2)$.

אריתמטיקה של פונקציות רציפות

יהיו f ו־g שתי פונקציות רציפות ב־$P_0\in\mathbb{R}^2$. אזי מתקיים:

(I) $f+g$ רציפה ב־P_0.

(II) $f\cdot g$ רציפה ב־P_0

(III) אם בנוסף g לא מתאפסת ב־P_0, אז ל־$\frac{1}{g}$ יש גבול בנקודה P_0 והיא רציפה בו.

(IV)אם בנוסף g לא מתאפסת ב־P_0, אז ל־$\frac{f}{g}$ יש גבול בנקודה P_0 והיא רציפה בו.

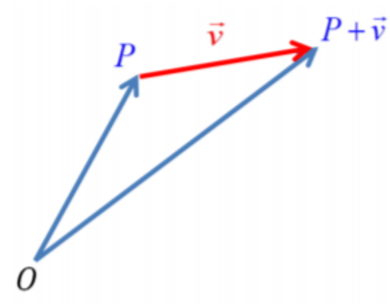
נקודות ווקטורים

אנו רוצים להבחין בין שני מושגים. הראשון הוא נקודה במישור (שהוא מיקום או מצב), אותו נגדיר בתור $P=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_k\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^k$ ובין וקטור, שהוא למעשה הזזה או העתקה של נקודה, אותו נגדיר בתור $\overrightarrow{v}=\begin{bmatrix}v_1\\\vdots\\v_k\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^k$.

הגדרה

$$\text{Points}\ \times\ \text{Vectors}\ \rightarrow\ \text{Points}$$
$$(P,\vec{v})\mapsto P+\vec{v}$$
$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_k\end{pmatrix},\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_k\end{bmatrix}\right)\mapsto\begin{pmatrix}x_1+v_1\\x_2+v_2\\\vdots\\x_k+v_k\end{pmatrix}$$

כלומר, ההגדרה היא קבוצת כל הנקודות, שנתאים להם קבוצה של וקטורים כך שתתקבל נקודה.
הרעיון הוא להבחין בין המקום שאני נמצא למקום שאני "מוזז".
האינטואיציה מופיעה בציור הבא:



יציה

כעת נתבונן בתכונות הבאות של הוקטורים, או ליתר דיוק **האקסיומות** שלהם.

תכונות

לכל נקודה $P \in \mathbb{R}^k$ ולכל וקטורים $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^k$ מתקיים:

(I) $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{0} = P$

(II) $\left(\overrightarrow{P} + \overrightarrow{v}\right) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{P} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$

(III) לכל $P, Q \in \mathbb{R}^k$ קיים $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^K$ יחיד אשר מקיים $P + \overrightarrow{v} = Q$.

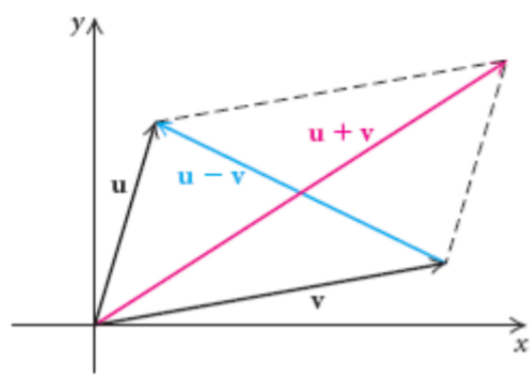
נסמן זאת כך: $\overrightarrow{v} = Q - P = \overrightarrow{PQ}$, ואז מתקיים בסופו של דבר:

$$P + (Q - P) = P + \overrightarrow{PQ} = Q$$

(IV) כמו כן, מתקיים, לכל $P, Q, R \in \mathbb{R}^k$:

$$P + (Q - P) + (R - Q) = P + [(Q - P) + (R - Q)] = R \Leftrightarrow R - P = (Q - P) + (R - Q)$$
$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$$

רעיון זה מופיע בציור הבא:



מסילות במישור ובמרחב

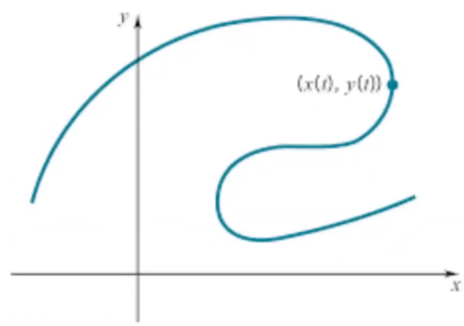
אחת המוטיבציות שלנו לדבר על מסילות, הייתה שלמעשה יש אינסוף דרכים להגיע לנקודה מסוימת.
כעת נתבונן בהגדרה הפורמלית.

הגדרה

יהי $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ קטע. **מסילה ב־** $\mathbb{R}^2$ היא פונקציה $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$.
נוכל לסמן זאת כך:

$$\forall t \in I \; \gamma(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$$

עם $f : I \to \mathbb{R}$ ו־ $g : I \to \mathbb{R}$.
כלומר, מסילה ב־$\mathbb{R}^2$ היא למעשה זוג של פונקציות מאינפי 1. זאת אומרת, מדובר למעשה בפונקציות ממשיות עם משתנה ממשי.
התמונה של γ היא למעשה תת הקבוצה של המישור $\{\gamma(t) \mid t \in I\}$ היא המסלול של צירו יש תנועה.
וליתר הבחנה, אפשר גם לומר שמסילה היא פונקציה של זמן, דהיינו השאלה היכן אנחנו נמצאים על המסלול עבור t כלשהוא ב־ I.



כמו כן, נוכל באותו אופן להגדיר מסילה ב־ $\mathbb{R}^3$, באמצעות:

$$\forall t \in I \; \gamma(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$$

עם $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ ו־ $h : I \to \mathbb{R}$.

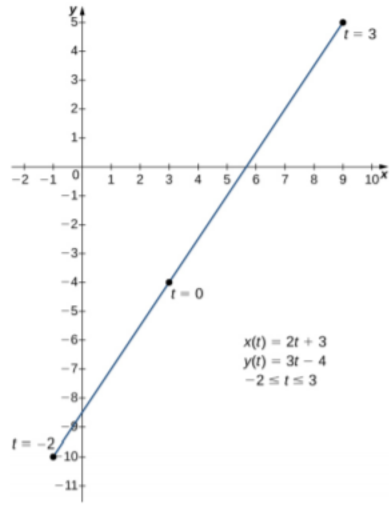
דוגמאות

(I) $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$. המוגדרת על ידי־ $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. זוהי מסילה קבועה, שלמעשה מתקיים בה: $\begin{cases} x = f(t) \equiv 1 \\ y = g(t) \equiv 3 \end{cases}$.

(II) $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$. המוגדרת על ידי־ $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ -4+3t \end{pmatrix}$. למעשה מתקיים במסילה זו: $\begin{cases} x = f(t) \equiv 3+2t \\ y = g(t) \equiv -4+3t \end{cases}$.

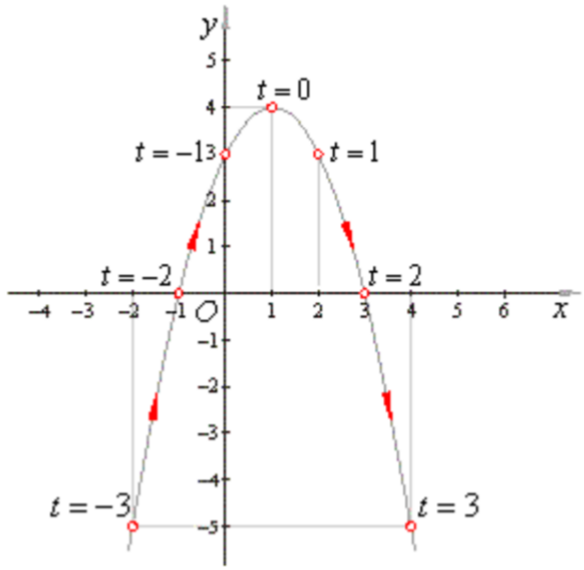
אם נניח $I = \mathbb{R}$ אז המסלול של γ הינו למעשה הקו שעובר דרך הנקודה $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ עם וקטור הכיוון $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

במידה ו־ $I = [-2, 3]$ אזי המסלול של γ הינו למעשה הקטע על הישר, המחבר בין הנקודה $\begin{pmatrix} -1 \\ -10 \end{pmatrix}$ והנקודה $\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$



(III) $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$. המוגדרת על ידי־ $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 3+2t \\ -4+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, כאשר $I = [-3, 3]$.

למעשה מתקיים במסילה זו: $\begin{cases} x = f(t) \equiv t+1 \\ y = g(t) \equiv -4 - t^2 \end{cases}$



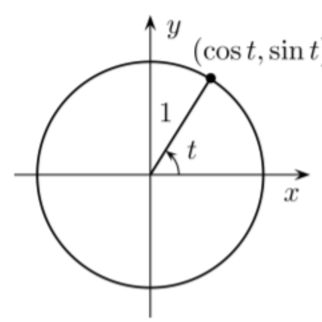
כאשר למעשה מתקיים:

x	y	t
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-2	-5	-3
-1	0	-2
0	3	-1
1	4	0
2	3	1
3	0	2
4	-5	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(IV) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$. המוגדרת על ידי־ $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, כאשר . למעשה מתקיים במסילה זו: $\begin{cases} x = f(t) \equiv \cos(t) \\ y = g(t) \equiv \sin(t) \end{cases}$ ובנוסף מתקיים:

$$\forall t \in [0,2\pi] \ x^2 + y^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

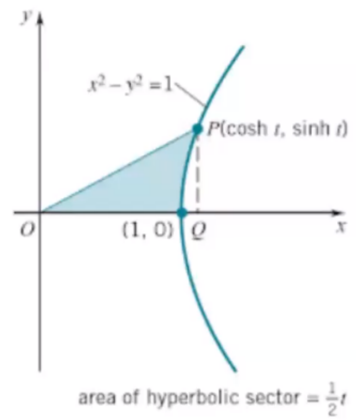
כלומר, משוואת מעגל:



(V) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. המוגדרת על ידי־ $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \\ \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \end{pmatrix}$, כאשר . למעשה מתקיים במסילה זו: $\begin{cases} x = f(t) \equiv \cosh(t) \\ y = g(t) \equiv \sinh(t) \end{cases}$ ובנוסף מתקיים:

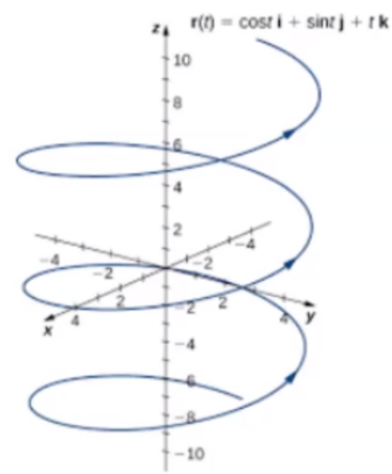
$$\forall t \in [0,2\pi] \ x^2 - y^2 = \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

ובציור אנו מקבלים היפרבולה:

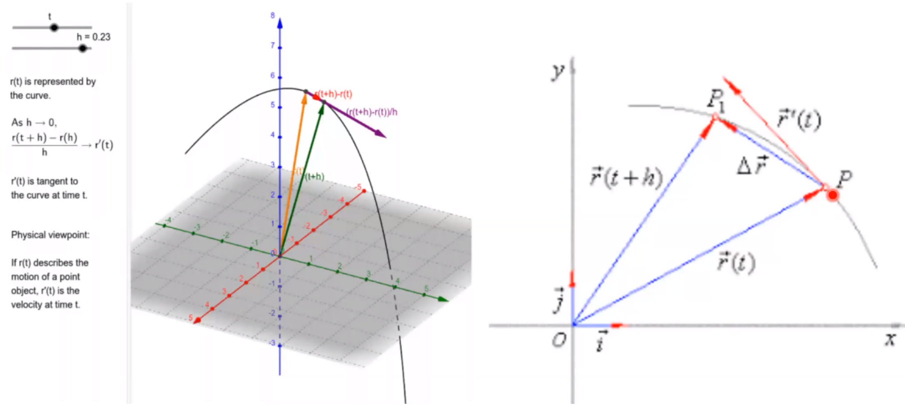


(VI) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. המוגדרת על ידי־ $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$, כאשר . למעשה מתקיים במסילה זו:

$\begin{cases} x = f(t) \equiv \cos(t) \\ y = g(t) \equiv \sin(t) \\ z = h(t) = t \end{cases}$. כלומר, קיבלנו מעגל על הציר x, y שעולה סביב ציר ה־z, כמו בציור הבא:



נתבונן בשתי המסילות הבאות:



אם נסתכל על ההפרש בין שני הוקטורים, נוכל בסופו של דבר להגדיר נגזרת עבור מסילה.

הגדרה

יהי $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ קטע. **ותהי** $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ **מסילה ב־** $\mathbb{R}^2$. תהי t_0 נקודה פנימית של I .
נאמר ש־ γ גזירה בנקודה t_0 אם ורק אם קיים הגבול הבא:

$$\gamma'(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \to h} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h}$$

$$\forall t \in I \; \gamma(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$$

עם $f : I \to \mathbb{R}$ ו־ $g : I \to \mathbb{R}$. כעת, לכל $t_0 \neq t \in I$ מתקיים:

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{t - t(t_0)} = \left(\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f(t_0) \\ g(t_0) \end{pmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \\ \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \end{bmatrix}$$

כלומר, למעשה γ גזירה בנקודה t_0 אם ורק אם f ו־ g גזירות בנקודה t_0, ואז, בסופו של דבר מתקיים:

$$\gamma'(t_0) = \begin{bmatrix} f'(t_0) \\ g'(t_0) \end{bmatrix}$$

דוגמאות

(I) ניקח את המסילה הבאה: $\gamma(t) : I \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ואז מתקיים $f(t) = 1$ ו־ $g(t) = 3$. כעת, אם נתבונן בנגזרת, נקבל כי $\gamma'(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. כלומר, למעשה איננו זזים, וזהו וקטור האפס.

(II) תהי מסילה $\gamma(t): I \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ -4+3t \end{pmatrix}$. במצב זה נקבל:,

$$\gamma'(t_0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

שזהו בדיוק וקטור הכיוון שראינו. כלומר, למעשה דבר זה אומר שאנחנו "זזים" על המסילה בקצב קבוע.
במידה וניקח מסילה אחרת, $\widetilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t^3\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, כאשר $t \in \mathbb{R}$. מבחינת מסלול, יש להם את את אותו המסלול, אך אם נתבונן בוקטור ה"מהירות", כאשר נגזור, נקבל:

$$\widetilde{\gamma}'(t_0) = \begin{bmatrix} 6t_0^2 \\ 9t_0^2 \end{bmatrix} = 3t_0^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

כלומר, המסילה מכילה רק מידע מסוים ווקטור המהירות באמצעות הנגזרת עוזר להבין את קצב המהירות.

<u>הרצאה מס' 30</u>

משפט (אנלוג רציף לאפיון היינה)

תהי $f: D \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ויהי $L \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = L$ אם ורק אם לכל מסילה רציפה־ $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ המקיימת את שלושת התנאים הבאים:

(i) $\forall t \in (a,b]\ \gamma(t) \in D$

(ii) $\forall t \in (a,b]\ \gamma(t) \neq P_0$

(iii) $\gamma(a) = P_0$

יתקיים $\lim\limits_{t \to a^+} f(\gamma(t)) = L$.

נשים לב שלמעשה מתקיים־ $f \circ \gamma: (a,b] \to \mathbb{R}$.

דוגמה

הראו שלא קיים הגבול ב־ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ של־ $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

תהי $\gamma_1: (0,1) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ ואז בהכרח נקבל:

$$f(\gamma_1(t)) = f\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = \frac{t^2}{t^2+t^2} = \frac{1}{2} \underset{t \to 0^+}{\to} \frac{1}{2}$$

תהי $\gamma_2: (0,1) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ ואז נקבל:

$$f(\gamma_1(t)) = f\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{0}{t^2+t^2} = 0 \underset{t \to 0^+}{\to} 0$$

הגבולות שונים ולכן בהכרח אין ל־ f גבול ב־ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

רציפות, קבוצות פתוחות וסגורות ומשפטי רציפות

ניזכר כי באינפי־ 1, לאחר שהגדרנו רציפות בנקודה, הגדרנו רציפות בקבוצה, על ידי רציפות של הפונקציה בכל נקודה באותה הקבוצה. אמנם, קודם לכן הסברנו שבמקרה זה הפונקציה חייבת להכיל נקודות פנימיות של D, ולכן כעת נרצה גם להגדיר "נקודות פנימיות" בקבוצה במישור.

הגדרה

$U \subseteq \mathbb{R}^2$ תיקרא קבוצה פתוחה של $\mathbb{R}^2$ אס"ם U מכילה סביבה מלאה של כל אחת מהנקודות שבה, ובמילים אחרות:

$$\forall P_0 \in U \quad \exists r > 0 \quad B_r(P_0) \subseteq U$$

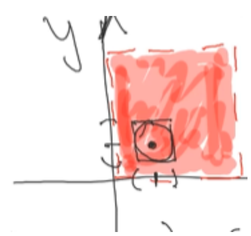
$$\forall x_0 \in (a,b[\quad \exists r > 0 \quad B_r(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq (a,b]$$

דוגמאות

(i) ניקח את הקבוצה הבאה: $U = (0,1) \times (0,1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{c} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{array} \right\}$.

נבחין כי מדובר בקבוצה פתוחה, מדוע? כי אם ניקח־ $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in U$, נקבל כי $(x_0 - r_1, x_0 + r_1) \subseteq (0,1)$ וגם־ $(y_0 - r_2, y_0 + r_2) \subseteq (0,1)$. נניח וניקח־ $r = \min(r_1, r_2)$, ואז נקבל כי:

$$(x_0 - r, x_0 + r) \times (y_0 - r, y_0 + r) \subseteq U$$



(ii) נתבונן בקבוצה הבאה:

$$U = [0,1) \times (0,1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{c} 0 \leq x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{array} \right\}$$

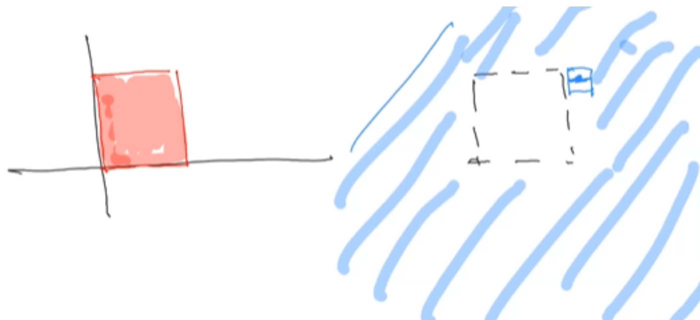
נשים לב שהקבוצה הזאת איננה פתוחה. ניקח למשל את־ $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in U$, ונראה שעבור־ $0 < r$ כלשהוא, תמיד $B_r(P_0) \nsubseteq U$. כלומר, למעשה קבוצה פתוחה מאפשרת לנו "לזוז" למקומות אחרים במישור, כשיוצאים מנקודה אחת. ובמקרה הזה, הדבר איננו אפשרי.

הגדרה

$X^- \subseteq \mathbb{R}^2$ תיקרא קבוצה **סגורה** של $\mathbb{R}^2$ אם"ם $\mathbb{R}^2 \setminus X^-$ הינו קבוצה פתוחה.

דוגמא

(i) ניקח את הקבוצה $X^- = [0,1] \times [0,1]$. נתבונן בקבוצה ובמשלים שלה:



אפשר לראות שהמשלים הינו קבוצה פתוחה. וממילא החלק האדום הינו קבוצה סגורה.

(ii) הקבוצה־ $X^- = [0,1) \times (0,1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{matrix} 0 \leq x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{matrix} \right\}$, איננה פתוחה ואיננה סגורה.

הגדרה

תהי $U \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה ותהי $f : D \to \mathbb{R}$ כך ש־ $U \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^2$. נאמר ש־ f רציפה ב־ U אם"ם f רציפה בכל P_0 השייך ל־ U. כלומר, למעשה:

$$\forall P_0 \in U \quad \lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$$

דוגמה

תהי $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי־ $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3x^5y^2 - 2xy + 5$. הפונקציה הזאת רציפה ב־ $\mathbb{R}^2$. למעשה, כל פולינום בשני משתנים הינו רציף, שהרי אפשר להוכיח כי כל פולינום היו למעשה של שתי פונקציות מהצורה־ $f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x$ ו־ $f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y$, וממילא אפשר להוכיח רציפות.

הגדרה

בהינתן $P, Q \in \mathbb{R}^2$, כך ש־ $P \neq Q$, אזי הקבוצה:

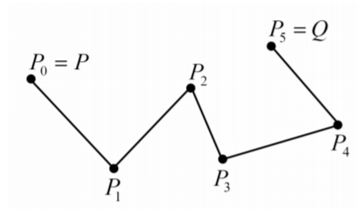
$$[P,Q] = \{(1-t)P + tQ \mid t \in [0,1]\}$$

הינה הקטע המחבר את־ P עם Q.

הגדרה

קו פוליגונלי במישור הוא איחוד של מספר סופי של קטעים כך שנקודת הסיום של קטע אחד היא נקודת ההתחלה של הקטע הבא.

נוכל להגדיר זאת גם בצורה יותר מדויקת, על ידי זה שנאמר שזהו המסלול של מסילה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}$ כך שקיימת חלוקה סופית $\{t_0,t_1,\ldots,t_n\}$ של $[a,b]$ כך ש־ $t_0=a, t_n=b$ ו־ $P_i=\gamma(t_1)$, וגם $\gamma([t_{i-1},t_i])=[P_{i-1},P_i]$.



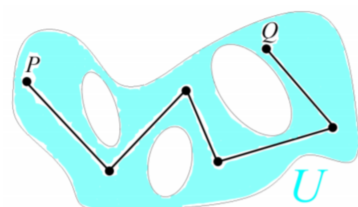
במילים אחרות, ניתן להגדיר זאת גם כך:

$$A=\bigcup_{i=1}^{n}[P_{i-1},P_i]=[P_0,P_1]\cup[P_1,P_2]\cup\ldots\cup[P_{n-1},P_n]$$

הגדרה

קבוצה פתוחה־ U תיקרא קשירה, אם"ם לכל שתי נקודות P ו־ Q ב־ U, קיים קו פוליגונלי המחבר אותן המוכל כולו ב־ U.

קבוצה פתוחה וקשירה ב־ $\mathbb{R}^2$ תיקרא פשוט תחום.



<u>הרצאה מס' 31</u>

משפט ערך הביניים לפונקציות רציפות

תהי $D\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום ותהי $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. יהיו $P,Q\in D$ ויהי $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש־ $f(P)<\lambda<f(Q)$, אזי קיימת $C\in D$ אחת לפחות כך ש־ $f(C)=\lambda$.

הוכחה

הואיל ו־ D תחום, מעצם ההגדרה של תחום, קיימת קבוצה סופית $\{P_0,P_1,\ldots,P_n\}$ של נקודות ב־ D כך ש־ $P_0=P$ ו־ $P_n=Q$.

ובהכרח מתקיים (אם נתבונן בהגדרת הקו הפוליגונלי) $D\subseteq[P_0,P_1]\cup[P_1,P_2]\cup\ldots\cup[P_{n-1},P_n]$.

כל אחד מהקווים האלה, הוא פשוט פונקציה של משתנה אחד.כעת נגדיר m, המספר הטבעי הקטן ביותר בין 1 ל־ n שהוא למעשה האינדקס הראשון שבו $\lambda<f(P_m)$.

זהו הערך המינימלי, ולכן לכן $f(P_{m_1})<\lambda$ בהכרח (או שווה, ואז סיימנו).

כעת נתבונן בקטע הספציפי של $[P_{m-1},P]$, שכאמור, מתקיים בעבורו :

$$[P_{m-1},P_m]=\left\{\left[P_{m-1}+t\overrightarrow{P_{m-1}P_m}|0\leqslant t\leqslant 1\right\}$$

וכמו שאמרנו, אפשר להציג אותו כפונקציה של משתנה אחד, $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ שמוגדרת על ידי:

$$g(t)=f\left(P_{m-1}+t\overrightarrow{P_{m-1}P_m}\right)$$

g רציפה ב$[0,1]$ וכאמור לעיל מקיימת $g(0)=f(P_{m-1})<\lambda$ וגם־ $g(1)=f(P_m)>\lambda$.
לכן לפי ערך הביניים לפונקציות רציפות במשתנה אחד, קיבלנו כי קיים $0<c<1$ שמקיים־ $g(c)=\lambda$.
כל שנותר לנו הוא לסמן:

$$C=P_{m-1}+c\overrightarrow{P_{m-1}P_m}\in[P_{m-1},P_m]\subseteq D$$

וממילא נקבל כי $\lambda=g(c)=f(C)$, כנדרש.

משפט בולצאנו - ויירשטרס ב־ $\mathbb{R}^2$

תהי $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה של נקודות ב־ $\mathbb{R}^2$. כלומר, קיים $0<M\in\mathbb{R}$ כך ש־ $\forall n\in\mathbb{N}\ \|P_n\|=d(O,P_n)\leq$ M, אזי יש ל־ $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ תת סדרה מתכנסת.

הוכחה

נסמן ב־ $P_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.
כעת, נבחין כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$|x_n|\leq\sqrt{x_n^2+y_n^2}=\|P_n\|=d(O,P_n)\leq M$$

כלומר $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה, ומאותן סיבות $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ גם היא חסומה.
ולכן בהכרח מבולצנאו ווירשטרס ב־ $\mathbb{R}$ יש ל־ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ תת סדרה $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת. נסמן: $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}=$ x_0.
מאותן סיבות גם $(y_{n_k})_{n=1}^{\infty}$ חסומה, וגם לה יש תת סדרה מתכנסת $\left(y_{n_{k_l}}\right)_{l=1}^{\infty}=y_0$.
כעת, ניקח את $\left(x_{n_{k_l}}\right)_{l=1}^{\infty}$. ממשפט הירושה בהכרח גם היא מתכנסת ל־x_0 ולכן בהכרח נקבל בסך הכל:

$$\lim_{l\to\infty}P_{n_{k_,}}=\lim_{l\to\infty}\begin{pmatrix}x_{n_{k_1}}\\y_{n_{k_1}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$$

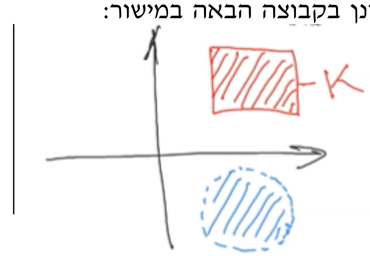
כלומר מצאנו תת סדרה של $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ שמתכנסת, כנדרש.

משפט והגדרה - קומפקטיות

תהי $K\subseteq\mathbb{R}^2$. אזי התנאים הבאים שקולים:

(I) K סגורה וחסומה
(כלומר קיים $0 < M \in \mathbb{R}$ כך ש $\forall P \in K \ \|P\| = d(O,P) \leq M$)
(II) לכל סדרה $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ של נקודות ב־ K קיימת תת סדרה $(P_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת, ובהכרח $\lim\limits_{k\to\infty} P_{n_k} \in K$.
קבוצה שמקיימת את התנאים האלו נקראת קבוצה קומפקטית.

דוגמה
נתבונן בקבוצה הבאה במישור:



ציפה.

משפט - המשפט הראשון של ויירשטרס
תהי $U \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה ותהי $K \subseteq U$ קבוצה קומפקטית. תהי $f : U \to \mathbb{R}$ רציפה. אזי f חסומה ב־ K.

הוכחה
נניח בשלילה ש־ f איננה חסומה. כלומר, בפרט הקבוצה הבאה איננה חסומה:

$$\{f(P) \mid P \in K\}$$

בפרט, יש איזו סדרה $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ של נקודות ב־ K כך ש־ $|f(P_n)| > n$ לכל $n \in \mathbb{R}$.
כעת נבחין כי K **קומפקטית** ולכן בהכרח קיימת תת סדרה $(P_{n_k})_{n=1}^{\infty}$ שמתכנסת לנקודה $P_0 \in K$.
f רציפה ולכן בהכרח אנחנו מקבלים:

$$\lim_{k\to\infty} f(P_{n_k}) = f(P_0)$$

כלומר, קיבלנו סדרה מתכנסת שאיננה חסומה, בסתירה.

משפט - המשפט השני של ויירשטרס
תהי $U \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה ותהי $K \subseteq U$ קבוצה קומפקטית. תהי $f : U \to \mathbb{R}$ רציפה. אזי f משיגה ב־ K ערך מינימלי וערך מקסימלי, כלומר קיימות $P_{\max}$ ו־ $P_{\min}$ ב־K כך שלכל $P \in K$ מתקיים:

$$f(P_{\min}) \leqslant f(P) \leqslant f(P_{\max})$$

הוכחה
נניח שלא. אז בהכרח קיים $M = \sup\{f(P) \mid P \in K\}$. על פי הנחת השלילה היא איננה מקבלת ערכי מקסימום, ולכן בהכרח מתקיים כי $f(P) < M \quad \forall P \in K$ (אי שוויון חזק).

כעת נגדיר את הפונקציה $g:K\to\mathbb{R}$ על ידי $g\left(P\right)=\frac{1}{M-f(P)}$.
הפונקציה מוגדרת היטב בגלל אי השוויון החזק ואי התאפסות המכנה.
בפרט קיבלנו כי $\forall P\in K\ 0<g\left(P\right)$.
נגדיר כעת פונקציה נוספת $\varphi:\left(-\infty,M\right)\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $\varphi\left(u\right)=\frac{1}{M-u}$, נרכיב את הפונקציה φ על הפונקציה f, ונקבל את g ולכן מהרכבה של פונקציות רציפות גם היא רציפה.
כלומר בפרט g גם היא חסומה, ובפרט חסומה מלעיל, ולמעשה מתקיים:

$$\exists\widetilde{M}\in\mathbb{R}\,\forall P\in K\ g\left(P\right)\leq\widetilde{M}$$

נבחין כי כמו כן מתקיים:

$$g\left(P\right)=\frac{1}{M-f\left(P\right)}\leq\widetilde{M}\Rightarrow\frac{1}{\widetilde{M}}\leq M-f\left(P\right)\Rightarrow$$
$$f\left(P\right)\leq M-\frac{1}{\widetilde{M}}<M$$

כלומר קיבלנו חסם מלעיל קטן יותר מהסופרימום, בסתירה. הסתירה נבעה מההנחה שהפונקציה לא מקבלת מקסימום, ולכן בהכרח הפונקציה מקבלת מקסימום, כנדרש.
על מנת להוכיח את הצד השני, נתבונן ב־ $-f$.

נגזרת של פונקציה בשני משתנים

כאשר דיברנו על פונקציה במשתנה אחד, הגדרנו את הנגזרת, שהינה גבול של שיפועים של מיתרים. ובעזרת המספר הזה הגדרנו קו משיק לגרף בנקודה.

תזכורת

תהי f פונקציה המוגדרת בסביבת נקודה x_0. נאמר שf דיפרנציאבילית בנקודה x_0 אם קיים הישר $l\left(x\right)=mx+b$ כך ש $l\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)$ ומתקיים: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-l(x)}{x-x_0}=0$.
נוכל להוכיח כי פונקצית המשיק מתקרבת **"יותר מהר"** לערך הפונקציה בנקודה, מאשר ההתקרבות של x לx_0.
לכן, קוראים לישר המקיים דבר זה **קירוב לינארי**.
אם נרצה, נוכל גם לומר $f\left(x\right)=l\left(x\right)+R\left(x\right)$. דהיינו, מבחינה אינטואטיבית, $R\left(x\right)$, **ההפרש**, מבטא את הקירוב שבין המשיק לגרף הפונקציה. בהתאם למה שאמרנו קודם לכן, שהשארית (ההפרש) הולכת וקטנה **מהר יותר** מאשר ההתקרבות של x לx_0, נוכל לומר למעשה כי $\frac{R(x)}{x-x_0}\to0$ כאשר $x\to x_0$. נוכל להוכיח זאת על ידי העברת אגפים, שהרי $\frac{f(x)-l(x)}{x-x_0}=\frac{R(x)}{x-x_0}$.

תהי f הגזירה בx_0. אז קיים ישר יחיד המהווה קירוב לינארי של f ב־ x_0 המוגדר על ידי $l\left(x\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+f\left(x_0\right)$.
כלומר למעשה, כפי שהסברנו קודם לכן

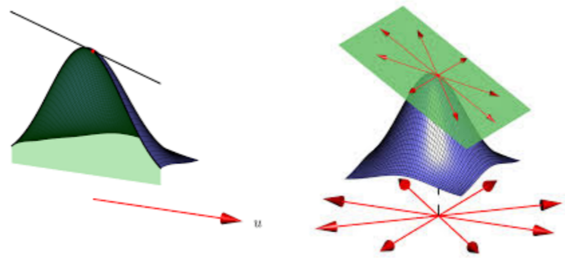
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)-\left(f\left(x_0\right)+m\left(x-x_0\right)\right)}{x-x_0}=0$$

דבר זה אומר שהישר כל כך קרוב לפונקציה, עד כדי זה שהוא "מנצח" את המכנה. המונה קטן מהר יותר. הוכחנו שאם דבר זה קורה, אזי יש m יחיד המקיים זאת והוא הנגזרת שלה בנקודה.

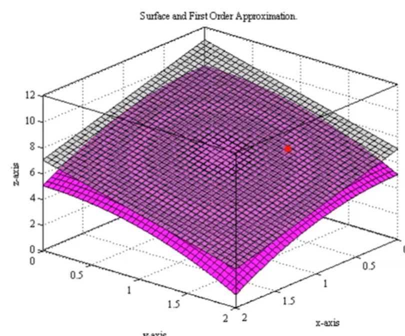
כעת נחזור לתהליך הזה עם פונקציות בשני משתנים.

כשהתבוננו בנגזרות בפונקציה עם משתנה אחד, נוכל להתבונן בקו הישר הבא, ובהשוואתו עם $(x-x_0)$, וראינו שמדובר בהגדרה שקולה לגזירות.

בנוסף, נבחין שבניגוד לפונקציות במשתנה אחד, קיום של קירוב כזה הוא **חזק יותר** מגזירות בכל כיוון.



נסתכל למשל ב"אוהל" הבא:



נוכל לשאול, מבין כל המישורים, האם יש איזשהוא מישור שמתאר את המישור המדובר בצורה הטובה ביותר.

כלומר, אנחנו מסתכלים על הנקודה על הגרף $\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = z_0\right)$.

אז ראשית, עלינו למצוא את משוואת המישור שעובר דרך שלושת הנקודות הללו. משוואה כזאת הינה מהצורה הבאה:

$$z - z_0 = A(x-x_0) + B(y-y_0) \quad A, B \in \mathbb{R}$$

ניתן לרשום זאת גם כך:

$$z = A(x-x_0) + B(y-y_0) + z_0 = Ax + By + c \qquad , c = z_0 - Ax_0 - By_0$$

כעת, כיצד נוכל להגדיר דיפרנציבילאיות במקרה זה. נשתמש באנלוגיה לפונקציה בשני משתנים:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (A(x-x_0) + B(y-y_0) + z_0)$$

אמנם, במה עלינו לחלק במקרה הזה?

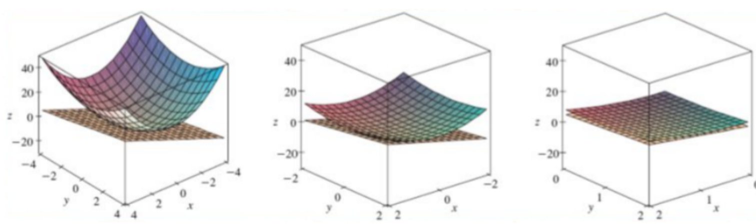
הגדרה

תהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בקבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{R}^2$ ותהי $P_0\in U$.

נאמר ש־ f דיפרנציאבלית בנקודה P_0 אם קיים מישור $z=L(x,y)=m_1x+m_2y+b$ כך ש־ $z=l(x_0,y_0)=$ $f(x_0,y_0)$ ומתקיים:

$$\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)-L(x,y)}{\|P-P_0\|}=0$$

נוכל לראות זאת בציור הבא:



טענה

אם קיים מישור כזה אזי הוא יחיד והוא נתון על ידי:

$$z=L(x,y)=D_{\overrightarrow{e_1}}f(P_0)(x-x_0)+D_{\overrightarrow{e_2}}f(P_0)(y-y_0)+f(x_0,y_0)$$

כאשר $\overrightarrow{e_1}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ וגם - $\overrightarrow{e_2}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

עד כה דיברנו על נגזרות חלקיות (בתרגול), שלמעשה הרעיון שלהן היה "מציאת השיפוע ביחס לוקטור המקביל לציר ה־ x או לוקטור המקביל לציר ה־ y".

אך אנחנו יכולים להרחיב את הרעיון גם למציאת השיפוע (או השינוי), בוקטור כלשהוא, שיהווה למעשה שילוב בין וקטור המקביל לציר ה־ x, ובין וקטור המקביל לציר ה־ y.

וכך למעשה נקראת "נגזרת כיוונית".

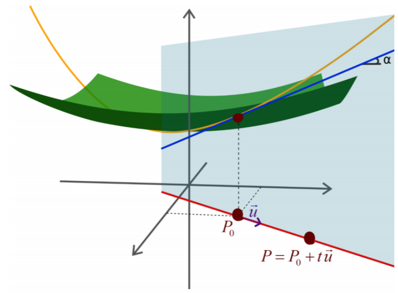
הגדרה

תהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בקבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{R}^2$, תהי $P_0\in U$ ויהי $\overrightarrow{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$ וקטור כלשהוא כך ש־ $\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}=1$.

נאמר ש־ f גזירה ב־ P_0 בכיוון $\overrightarrow{u}$ אם ורק אם קיים הגבול (במובן הצר!):

$$\lim_{t\to0}\frac{f(P_0+t\overrightarrow{u})-f(P_0)}{t}$$

במקרה זה נקרא לגבול בשם **הנגזרת הכיוונית** של f ב־ P_0 בכיוון $\overrightarrow{u}$ ונסמנו $D_{\overrightarrow{u}} f\left(P_0\right)$ או $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}\left(P_0\right)$.



<u>הרצאה מס' 33</u>

כעת, נרצה להגדיר את הדיפרנצביאליות בצורה מדויקת יותר.

כשהתבוננו בפונקציות במשתנה אחד, ראינו שכאשר f דיפרנצביאלית בנקודה x_0, אם"ם $y = l\left(x\right) = mx + b$, וגם מתקיים $y_0 = l\left(x_0\right) = f\left(x_0\right)$, וכמו כן מתקיים:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f\left(x\right) - l\left(x\right)}{x - x_0} = 0$$

מכך ש־ $y = l\left(x\right) = mx + b$ ו־ $l\left(x_0\right) = f\left(x_0\right)$, אנחנו מקבלים באופן ישיר כמובן כי $f\left(x_0\right) = mx_0 + b$.

כעת, נעבר אגפים ונקבל:

$$\begin{aligned} f\left(x_0\right) = mx_0 + b \Rightarrow f\left(x_0\right) - mx_0 = b \Rightarrow \\ y = l\left(x\right) = mx + f\left(x_0\right) - mx_0 = m\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right) \end{aligned}$$

וממילא נוכל להגדיר את ההגדרה הקודמת כך:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f\left(x\right) - m\left(x - x_0\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = 0$$

אם נסמן $h = x - x_0$, נקבל גם:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\left(x_0 + h\right) - mh - f\left(x_0\right)}{h} = 0$$

בנוסף, נוכל להבחין שהפונקציה $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שמוגדרת על ידי $L\left(h\right) = mh$. ולכן, נוכל להגדיר את הטענה הבאה.

טענה

תהי f המוגדרת בסביבת $x_0 \in \mathbb{R}$. אזי f דיפרנציאבלית ב־ x_0 אם"ם קיימת העתקה ליניארית $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך ש:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-L(h)}{h}=0$$

כעת נוכל לעבור לפונקציות של שני משתנים.

תהי $f:D\to\mathbb{R}$, פונקציה המוגדרת בקבוצה $D\subseteq\mathbb{R}^2$, ותהי $P_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ נקודה פנימית של D.

נבחין כי בצורה אנולגית לפונקציות במשתנה אחד, מישור ב־ $\mathbb{R}^3$ שמשוואתו הינה $z=m_1x+m_2y+b$ עובר דרך הנקודה $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\f(x_0,y_0)\end{pmatrix}$ אם"ם $f(x_0,y_0)=m_1x_0+m_2y_0$.

ובמילים אחרות, רק אם $f(x_0,y_0)-m_1x_0-m_2y_0=b$.

כעת, נעשה פעולה לזו שעשינו במשתנה אחד:

$$\begin{aligned}&z=m_1x+m_2y+f(x_0,y_0)-m_1x_0-m_2y_0=\\&m_1(x-x_0)+m_2(y-y_0)+f(P_0)\Rightarrow\\&f(P)-z=f(P)-f(P_0)-(m_1(x-x_0)+m_2(y-y_0))\end{aligned}$$

כעת, נוכל לסמן:

$$\overrightarrow{h}=P-P_0=\overrightarrow{P_0P}=\begin{bmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}$$

וממילא נקבל כי $P=P_0+\overrightarrow{h}$. אנחנו רוצים לדעת מה קורה כאשר P קרוב ל־ P_0, וזה בעצם כמו להגיד שהמרחק $\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}$ בעל אורך מאוד קטן.

כעת, נחזור לביטוי שפיתחנו קודם לכן ונוכל להציב:

$$(P)-z=f\left(P+\overrightarrow{h}\right)-f(P_0)-(m_1h+m_2k)$$

כמו כן, נוכל להבחין שהפונקציה $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, הינה גם כאן העתקה ליניארית, שמוגדרת על ידי $L\left(\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}\right)=$ m_1h+m_2k.

ולכן, בצורה אנלוגית לפונקציה במשתנה אחד, נוכל להגיע להגדרה הבאה.

הגדרה

תהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בקבוצה $U\subseteq\mathbb{R}^2$ ותהי P_0 נקודה פנימית של U. נאמר כי f דיפרנציאבלית ב־ P_0 אם"ם קיימת העתקה ליניארית $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ כך ש:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(P+\overrightarrow{h}\right)-f(P_0)-L\left(\overrightarrow{h}\right)}{\|\overrightarrow{h}\|}=0$$

טענה

אם f דיפרנציאבלית בנקודה P_0, אז כל הנגזרות הכיוונית של f ב־ P_0 קיימות.

הוכחה

יהי $\overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^2$ וקטור כלשהוא, כך ש־ $\|\overrightarrow{h}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 = 1}$.
כעת יהי $0 \neq t \in \mathbb{R}$. נסמן $\overrightarrow{h} = t\overrightarrow{u}$. וממילא, מתקבל בצורה ישירה: $\|\overrightarrow{h}\| = \|t\overrightarrow{u}\| = |t|$.
כעת, נתבונן בנגזרת הכיוונית של u, ונוכיח שהיא קיימת:

$$D_{\overrightarrow{h}} f(P_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(P + t\overrightarrow{u}) - f(P_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(P + t\overrightarrow{u}) - f(P_0) - L(t\overrightarrow{u}) + L(t\overrightarrow{u})}{t}$$

(במעבר האחרון החסרנו והוספנו $L(t\overrightarrow{u})$).
כעת נציב $\overrightarrow{h} = t\overrightarrow{u}$ ונקבל:

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0} \frac{f(P+h) - f(P_0) - L(h) + L(h)}{t} = \\
&\lim_{t\to 0} \left(\frac{f(P + t\overrightarrow{u}) - f(P_0) - L(t\overrightarrow{u})}{t} + \frac{L(t\overrightarrow{u})}{t} \right) \overset{\text{linear}}{=} \\
&\lim_{t\to 0} \left(\frac{f(P + t\overrightarrow{u}) - f(P_0) - L(t\overrightarrow{u})}{t} + \frac{tL(\overrightarrow{u})}{t} \right) = \\
&\lim_{t\to 0} \left(\frac{|t|}{t} \cdot \frac{f(P + t\overrightarrow{u}) - f(P_0) - L(t\overrightarrow{u})}{|t|} + L(\overrightarrow{u}) \right) = \\
&\lim_{t\to 0} \left(\frac{|t|}{t} \cdot \frac{f(P + t\overrightarrow{u}) - f(P_0) - L(t\overrightarrow{u})}{\|\overrightarrow{h}\|} + L(\overrightarrow{u}) \right)
\end{aligned}$$

נבחין בשלב זה כי $\lim_{h\to 0} \frac{f\left(P+\overrightarrow{h}\right) - f(P_0) - L\left(\overrightarrow{h}\right)}{\|\overrightarrow{h}\|} = 0$ מהגדרת דיפרנצביאליות, וכמו כן $\frac{|t|}{t}$ חסום (שהרי הוא שווה ל־ $\operatorname{sgn}(t)$).
כמו כן, $L(\overrightarrow{u})$ הינו קבוע. ולכן קיבלנו מאריתמטיקה של גבולות כי

$$\lim_{t\to 0} \left(\frac{|t|}{t} \cdot \frac{f(P + t\overrightarrow{u}) - f(P_0) - L(t\overrightarrow{u})}{\|\overrightarrow{h}\|} + L(\overrightarrow{u}) \right) = 0 + L(\overrightarrow{u})$$

כנדרש.

טענה

אם $f : U \to \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית ב־ $P_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^2$, אזי קיימת העתקה ליניארית $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ שמקיימת את הנוסחה דלעיל והיא מוגדרת על ידי:

$$L\left(\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}\right) = D_{e_1} f(P_0)\, h + D_{\overrightarrow{e_2}} f(P_0)\, k$$

כאשר $\overrightarrow{e_1}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ וגם $\overrightarrow{e_2}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

הוכחה

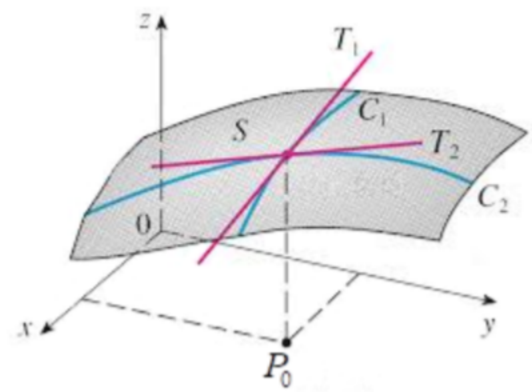
ראשית, תהי $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ העתקה ליניארית שמקיימת את הנוסחה דלעיל.
מההוכחה של הטענה הקודמת, קיבלנו כי $D_{\overrightarrow{e_1}}f(P_0)=L(\overrightarrow{e_1})$ וגם כי $D_{\overrightarrow{e_2}}f(P_0)=L(\overrightarrow{e_2})$.
לכן מתקיים בסך הכל, עבור $h,k\in\mathbb{R}$:

$$L\left(\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}\right)=L\left(h\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=L(h\overrightarrow{e_1})+L(k\overrightarrow{e_2})=$$
$$hL(\overrightarrow{e_1})+kL(\overrightarrow{e_2})=L\left(\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}\right)=D_{e_1}f(P_0)h+D_{\overrightarrow{e_2}}f(P_0)k$$

כנדרש.

הגדרה

$D_{\overrightarrow{e_1}}f(P_0)$ נקראת הנגזרת החלקית של f לפי x ב- P_0 ומסומנת גם $D_1f(P_0)$ או- $\frac{\partial f}{\partial x}P_0$.
$D_{\overrightarrow{e_2}}f(P_0)$ נקראת הנגזרת החלקית של f לפי y ב- P_0 ומסומנת גם $D_2f(P_0)$ או- $\frac{\partial f}{\partial y}P_0$.



<u>הרצאה מס' 34</u>

הגדרה

אם $f:U\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבלית ב- $P_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\in U\subseteq\mathbb{R}^2$, אזי המישור ב- $\mathbb{R}^3$ שמשוואתו:

$$z=D_1f(P_0)(x-x_0)+D_2f(P_0)(y-y_0)+f(P_0)$$

נקרא המישור המשיק לגרף של f בנקודה P_0.

למה

תהי $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ העתקה ליניארית, אזי קיים $0\le C\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$\forall\overrightarrow{h}\in\mathbb{R}^2\quad |L(h)|\le C\|\overrightarrow{h}\|$$

(אינטואטיבית, דבר זה גורר שהפונקציה הזאת רציפה ב־0)

הוכחה

ראשית, נסמן לשם הנוחות:

$\overrightarrow{h}=\begin{bmatrix} h\\ k\end{bmatrix}$, כאשר $h,k\in\mathbb{R}$.

נבחין כי $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ הינה העתקה ליניארית, ולכן בהכרח מהגדרת העתקה ליניארית, קיימים $a_1,a_2\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$L\left(\overrightarrow{h}\right)=L\left(\begin{bmatrix} h\\ k\end{bmatrix}\right)=a_1h+a_2k$$

כעת, נוכיח בשתי דרכים.

<u>דרך א'</u>

$$\forall\vec{h}\in\mathbb{R}^2|L(\vec{h})|\overset{\text{def}}{=}|a_1h+a_2k|\overset{\Delta}{\le}|a_1|\,|h|+|a_2|\,|k|\overset{(i)}{\le}$$
$$|a_1|\,\|\vec{h}\|+|a_2|\,\|\vec{h}\|=(|a_1|+|a_2|)\,\|\vec{h}\|\overset{(ii)}{=}C\|\vec{h}\|$$

(i) נובע מכך ש־ $|h|$ ו־ $|k|$ שניהם קטנים מהגודל של הרכיב כולו $\|\vec{h}\|$.

(ii) הקבוע הנדרש.

<u>דרך ב'</u>

נסמן $\overrightarrow{a}=\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\end{bmatrix}$, ונוכל להציג את ההעתקה הליניארית כמכפלה סקלרית:

$$|L(\vec{h})|=|a_1h+a_2k|=\left\langle\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\end{bmatrix}\mid\begin{bmatrix} h\\ k\end{bmatrix}\right\rangle=\left\langle\overrightarrow{a}\mid\overrightarrow{h}\right\rangle$$

נוכל כעת להשתמש **באי שוויון קושי שוורץ** ולקבל:

$$\left\langle\overrightarrow{a}\mid\overrightarrow{h}\right\rangle\le\|\overrightarrow{a}\|\cdot\|\overrightarrow{h}\|$$

בשלב זה, נסמן $C=\|\overrightarrow{a}\|$ וסיימנו את הדרוש.

טענה

אם $f:U\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית בנקודה $P_0\in U\subseteq\mathbb{R}^2$, אזי f רציפה ב־ P_0.

הוכחה

ניזכר שאנו רוצים להוכיח כי $\lim_{P\to P_0} f(P) = P_0$.

תהי $P_0 \neq P \in U$. כעת, נסמן: $\overrightarrow{h} = P - P_0 = \overrightarrow{P_0P} = \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$.

כעת, נקבל:

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(P+\overrightarrow{h}\right)-f\left(P_0\right)\right| = \left|f\left(P+\overrightarrow{h}\right)-f\left(P_0\right)-L\left(\overrightarrow{h}\right)+L\left(\overrightarrow{h}\right)\right| = \\
&\left|\frac{f\left(P+\overrightarrow{h}\right)-f\left(P_0\right)-L\left(\overrightarrow{h}\right)+L\left(\overrightarrow{h}\right)}{\|\overrightarrow{h}\|}\|\overrightarrow{h}\|+L\left(\overrightarrow{h}\right)\right| \overset{\triangle}{\leq} \\
&\left|\frac{f\left(P+\overrightarrow{h}\right)-f\left(P_0\right)-L\left(\overrightarrow{h}\right)+L\left(\overrightarrow{h}\right)}{\|\overrightarrow{h}\|}\|\overrightarrow{h}\|\right| + \left|L\left(\overrightarrow{h}\right)\right| \overset{\text{lemma}}{\leq} \\
&\left|\frac{f\left(P+\overrightarrow{h}\right)-f\left(P_0\right)-L\left(\overrightarrow{h}\right)+L\left(\overrightarrow{h}\right)}{\|\overrightarrow{h}\|}\right|\|\overrightarrow{h}\|+C\|\overrightarrow{h}\|
\end{aligned}$$

נבחין כעת כי f דיפרנציאבלית ב־ P_0 ולכן מתקיים:

$$\lim_{\|\overrightarrow{h}\|\to 0}\left|\frac{f\left(P+\overrightarrow{h}\right)-f\left(P_0\right)-L\left(\overrightarrow{h}\right)+L\left(\overrightarrow{h}\right)}{\|\overrightarrow{h}\|}\right| = 0$$

ולכן בהכרח מתקיים כי:

$$\lim_{\|\overrightarrow{h}\|\to 0}\left(\left|\frac{f\left(P+\overrightarrow{h}\right)-f\left(P_0\right)-L\left(\overrightarrow{h}\right)+L\left(\overrightarrow{h}\right)}{\|\overrightarrow{h}\|}\right|\|\overrightarrow{h}\|+C\|\overrightarrow{h}\|\right) = 0$$

כלומר קיבלנו ממשפט הסנדוויץ' כי:

$$\lim_{\|h\|\to 0}\left|f\left(P+\overrightarrow{h}\right)-f\left(P_0\right)\right| = 0$$

כלומר בפרט $\lim_{P\to P_0} f(P) = P_0$, כנדרש.

הגדרה

תהי $f: U \to \mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבלית ב־ $P_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^2$.

אזי הוקטור $\begin{bmatrix} D_1 f(P_0) \\ D_2 f(P_0) \end{bmatrix}$ נקרא **הגרדיאנט** של f בנקודה P_0 והוא מסומן $\overrightarrow{\text{grad}}\left(P_0\right)$ או $\overrightarrow{\nabla} f\left(P_0\right)$.

משפט (תנאי מספיק לדיפרנציאבליות)

תהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה ותהי P_0 נקודה פנימית של $U\subseteq\mathbb{R}^2$, אזי f דיפרנציאבלית ב־ P_0 אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

(i) שתי הנגזרות החלקיות D_1f ו־ D_2f קיימות בסביבת P_0.

(ii) D_1f ו־ D_2f רציפות בנקודה P_0.

דוגמה

ניקח את הפונקציה $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=4x^2y-\sin(xy)$.

נבחין כי:

$$D_1f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=8xy-y\cos(xy)$$
$$D_2f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=4x^2-x\cos(xy)$$

D_1f ו־ D_2f שתיהן רציפות ב־ P_0 ולכן תנאי המשפט מתקיימים והפונקציה דיפרנציאבלית.

הוכחה

ראשית, נסמן $P_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$. נבחין כי עלינו להראות למעשה את הדבר הבא:

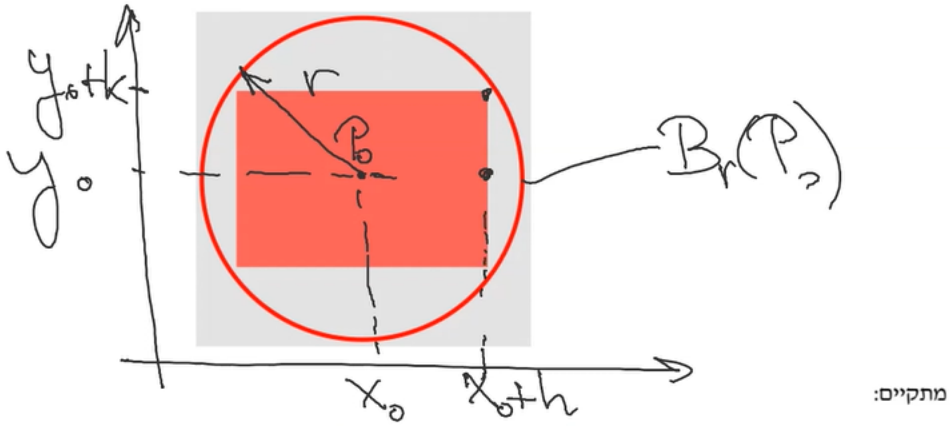
$$\lim_{\left\|\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}\right\|\to0}\frac{f\begin{pmatrix}x_0+h\\y_0+k\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}-\left[D_1f(P_0)h+D_2f(P_0)k\right]}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

נבחין כי על פי הנתון, ישנה סביבה כדורית כלשהיא, $B_r(P_0)\subseteq U$.

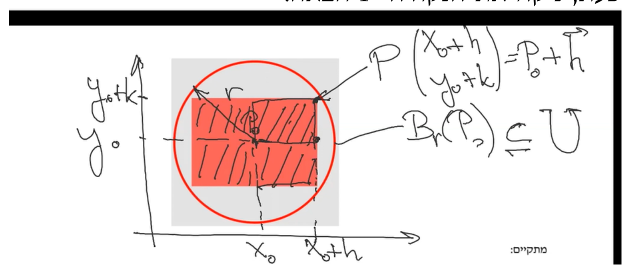
נמצא h,k מספיק קטנים כך שלמעשה נקבל מלבן שמקיים:

$$[a,a+h]\times[b,b+k]\subseteq B_r(P_0)\subseteq U$$

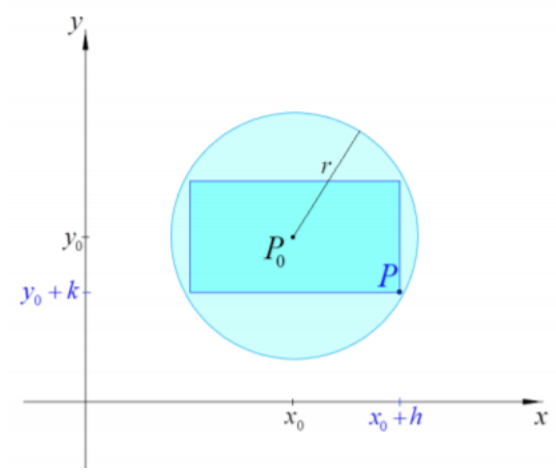
כלומר, למעשה נקבל:



כעת, ניקח את הנקודה P הבאה:



אם אם נרצה, בציור הבא:



נתבונן כעת בשוויון הבא:

$$f\begin{pmatrix} x_0+h \\ y_0+k \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_0+h \\ y_0+k \end{pmatrix} \underbrace{-f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0+k \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0+k \end{pmatrix}}_{0} - f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

כלומר, סך הכל הוספנו והחסרנו.

כעת נחלק למקרים.

ראשית, נשים לב שמתקיים:

$$\frac{f\begin{pmatrix} x_0+h \\ y_0+k \end{pmatrix}-f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0+k \end{pmatrix}}{h}=D_1f$$

נבחין שלפי לגראנז' בהכרח קיים $c\in(x_0,x_0+h)$, כך שנקבל:

$$\frac{f\begin{pmatrix} x_0+h \\ y_0+k \end{pmatrix}-f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0+k \end{pmatrix}}{h}=D_1f\begin{pmatrix} c \\ y_0+k \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_0+h \\ y_0+k \end{pmatrix}-f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0+k \end{pmatrix}=D_1f\begin{pmatrix} c \\ y_0+k \end{pmatrix}\cdot h$$

אם נרצה שתהיה משמעות לביטוי גם ב־ $h=0$, אזי ניקח $c\in[x_0,x_0+h]$.

בפרט, קיבלנו שהדבר נכון עבור כל h.

נעשה את התהליך בצורה דומה גם לגבי הזוג השני:

$$\frac{f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0+k \end{pmatrix}-f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}{k}=D_2f$$

נבחין שלפי לגראנז' בהכרח קיים $d\in(y_0,y_0+k)$, כך שנקבל:

$$\frac{f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0+k \end{pmatrix}-f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}{k}=D_2f\begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix}$$
$$f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0+k \end{pmatrix}-f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=D_2f\begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix}\cdot k$$

אם נרצה שתהיה משמעות לביטוי גם ב־ $k=0$, אזי ניקח $d\in[y_0,y_0+k]$.

בפרט, קיבלנו שהדבר נכון עבור כל k.

אם כך, קיבלנו בצירוף שני הביטויים:

$$f\begin{pmatrix} x_0+h \\ y_0+k \end{pmatrix}-f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=D_1f\begin{pmatrix} c \\ y_0+k \end{pmatrix}\cdot h+D_2f\begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix}\cdot k$$

ניזכר בגבול שאנו רוצים להתייחס אליו ונציב בו את הביטוי שקיבלנו:

$$\lim_{\left\|\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}\right\|\to 0} \frac{f\begin{pmatrix} x_0+h \\ y_0+k \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \left(D_1 f\left(P_0\right)h + D_2 f\left(P_0\right)k\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} \overset{\text{הצבה}}{=}$$

$$\lim_{\left\|\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}\right\|\to 0} \frac{D_1 f\begin{pmatrix} c \\ y_0+k \end{pmatrix}\cdot h + D_2 f\begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix}\cdot k - \left(D_1 f\left(P_0\right)h + D_2 f\left(P_0\right)k\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} \overset{\text{אלגברה}}{=}$$

$$\lim_{\left\|\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}\right\|\to 0} \frac{h\left(D_1 f\begin{pmatrix} c \\ y_0+k \end{pmatrix} - D_1 f\left(P_0\right)\right) + k\left(D_2 f\begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix} - D_2 f\left(P_0\right)\right)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

נציג את הביטוי בצורה נוחה יותר, לצורך ההבנה:

$$\lim_{\left\|\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}\right\|\to 0} \left(\left(D_1 f\begin{pmatrix} c \\ y_0+k \end{pmatrix} - D_1 f\left(P_0\right)\right)\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + \left(D_2 f\begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix} - D_2 f\left(P_0\right)\right)\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)$$

עכשיו, נסתכל בכל אחד מהכיוונים הללו.

כאמור לעיל, $c \in [x_0, x_0+h]$ וגם $d \in [y_0, y_0+h]$.

לכן, כאשר $h \to 0$ או $k \to 0$, בהכרח נקבל כי $c \to x_0$ ו־ $d \to y_0$ בהתאמה.

כלומר, בסך הכל:

$$\lim_{\left\|\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}\right\|\to 0} \begin{pmatrix} c \\ y_0+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \qquad \lim_{\left\|\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}\right\|\to 0} \begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

מהרציפות של $D_1 f$ ב־ $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, נקבל, עבור שני הצדדים:

$$\lim_{\left\|\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}\right\|\to 0} \left(D_1 f\begin{pmatrix} c \\ y_0+k \end{pmatrix} - D_1 f\left(P_0\right)\right) = \lim_{\left\|\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}\right\|\to 0} \left(D_1 f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - D_1 f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

וגם:

$$\lim_{\left\|\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}\right\|\to 0}\left(D_2 f\begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix} - D_2 f\left(P_0\right)\right) = \lim_{\left\|\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}\right\|\to 0}\left(D_2 f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - D_2 f\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right)\right) = 0$$

אם נתבונן כעת במכנה, נקבל כי בהכרח:

$$|h|, |k| \le \sqrt{h^2+k^2} \Rightarrow -1 \le \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}, \quad \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le 1$$

כלומר שני הצדדים הללו חסומים, ולכן, מחסומה כפול אפסה נקבל:

$$\lim_{\left\|\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}\right\|\to 0}\left(D_1 f\begin{pmatrix} c \\ y_0+k \end{pmatrix} - D_1 f\left(P_0\right)\right)\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + \left(D_2 f\begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix} - D_2 f\left(P_0\right)\right)\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

כנדרש.

<u>הרצאה מס' 35</u>

דוגמה

תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^7y+2x^3y^5+1$.

נבחין כי שתי הנגזרות החלקיות של f קיימות בכל נקודה ב־ $\mathbb{R}^2$ ולכן, נוצרות למעשה מ־ f שתי פונקציות חדשות:

$D_1 f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $D_1 f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7x^6y+6x^2y^5$

$D_2 f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $D_1 f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^7+10x^3y^4$

כעת, נוכל לחזור על התהליך גם עם הפונקציות האלו בעצמן, ונקבל למעשה ארבע פונקציות:

$$D_1\left(D_1 f\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 42x^5y+12xy^5 \quad , \quad D_2\left(D_1 f\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7x^6+30x^2y^4$$
$$D_1\left(D_2 f\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7x^6+30x^2y^4 \quad , \quad D_2\left(D_2 f\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 40x^3y^3$$

ולמעשה, ארבע פונקציות אלו נקראות נגזרות חלקיות מסדר שני.

בנוסף $D_1\left(D_2 f\right)$ ו־$D_2\left(D_1 f\right)$ נקראות **הנגזרות המעורבות** לעיל.

במצבים לא מאוד פתולוגיים, הן יוצאות שוות, ונוכיח דבר זה כעת.

משפט (הלמה של שוורץ).

תהי $U\subseteq\mathbb{R}^2$ קבוצה ותהי P_0 נקודה פנימית של U.

יהי $0<r\in\mathbb{R}$ כך ש־ $B_r\left(P_0\right)\subseteq U$, ותהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה כך שהנגזרות החלקיות המעורבות $D_1\left(D_2 f\right)$ ו־$D_2\left(D_1 f\right)$ קיימות בכל נקודה של $B_r\left(P_0\right)$, ורציפות ב־ P_0.

אזי $D_1\left(D_2 f\right)\left(P_0\right) = D_2\left(D_1 f\right)\left(P_0\right)$.

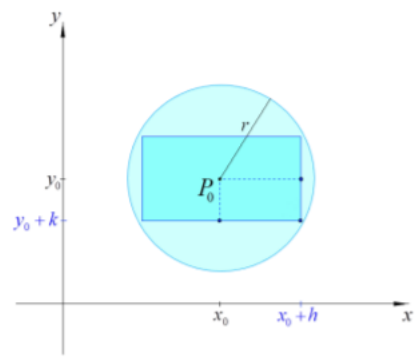
הוכחה

תחילה, נעיר כי העובדה שהנגזרות המעורבות $D_1(D_2f)$ ו-$D_2(D_1f)$ קיימות גורר כמובן שהנגזרות מסדר ראשון קיימות בכל נקודה, כי הנגזרות המעורבות מתקבלות על ידי גזירה של נגזרות מסדר ראשון.

כעת, נביט בנקודה $P_0+\overrightarrow{h}$ כאשר למעשה $\overrightarrow{h}=\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$, ובמרובע שנוצר מ-$P_0+\overrightarrow{h}$:

$$P_0=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},\quad P_0+h\overrightarrow{e_1}=\begin{pmatrix} x_0+h \\ y_0 \end{pmatrix},$$
$$\overrightarrow{h}=\begin{pmatrix} x_0+h \\ y_0+k \end{pmatrix},\quad P_0+k\overrightarrow{e_2}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0+k \end{pmatrix},$$

כמו שלמעשה רואים בציור הבא:



כעת, נגדיר, בצורה מעט דומה להוכחה הקודמת (הסימון הינו מלשון "הפרש של הפרשים"):

$$\triangle^2 f\left(\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}\right)=f\begin{pmatrix} x_0+h \\ y_0+k \end{pmatrix}-f\begin{pmatrix} x_0+h \\ y_0 \end{pmatrix}-f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0+k \end{pmatrix}+f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

הרעיון הוא כעת להראות שעבור כל וקטור $\overrightarrow{h}=\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$ שמקיים $0<\|\overrightarrow{h}\|<r$, קיימות שתי נקודות $P_{1,2},P_{2,1}$ במלבן דלעיל $[x_0,x_0+h]\times[y_0,y_0+k]$, אשר הינן מקיימות:

$$D_1,D_2f\left(P_{1,2}\right)hk=\triangle^2 f\left(\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}\right)=D_2,D_1f\left(P_{2,1}\right)hk$$

נגדיר פונקצית עזר ϕ, פונקציה המוגדרת בקטע $[0,h]$ על ידי:

$$\phi(s)=f\begin{pmatrix} x_0+s \\ y_0+k \end{pmatrix}-f\begin{pmatrix} x_0+s \\ y_0 \end{pmatrix}$$

כלומר, למעשה בפונקציה הזאת אנחנו מקבעים את k. הדבר היחיד ש"זז" כאן הוא s.
נציב ל $\phi(0)$ ונקבל:

$$\phi(0) = f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0+k \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

ולעומת זאת, אם נציב $\phi(h)$ נקבל:

$$\phi(h) = f\begin{pmatrix} x_0+h \\ y_0+k \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x_0+h \\ y_0 \end{pmatrix}$$

נחסיר כעת בין שני הגדלים ונקבל:

$$\triangle^2 = f\begin{pmatrix} x_0+h \\ y_0+k \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x_0+h \\ y_0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0+k \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

נחזור כעת לפונקציה שהגדרנו, ϕ בעצמה גזירה בקטע $[0,h]$, ולכן לפי משפט לגרנז', קיימת $c \in [0,h]$, כך שלמעשה:

$$\phi(h) - \phi(0) = \phi'(h-0) = \left[D_1 f\begin{pmatrix} x_0+c \\ y_0+k \end{pmatrix} - D_1 f\begin{pmatrix} x_0+c \\ y_0 \end{pmatrix}\right] h$$

נגדיר פונקציה ψ הפונקציה שמוגדרת בקטע $[0,k]$, על ידי:

$$\psi(t) = D_1 f\begin{pmatrix} x_0+c \\ y_0+t \end{pmatrix}$$

נבחין כי כאשר $t=0$ נקבל את $D_1 f\begin{pmatrix} x_0+c \\ y_0 \end{pmatrix}$ ואילו כאשר $t=k$ נקבל את $D_1 f\begin{pmatrix} x_0+c \\ y_0+k \end{pmatrix}$.

נתון ש־ $D_2(D_1 f)$ קיימת ולכן בהכרח ψ גזירה בקטע $[0,k]$.

כעת, ממשפט לגרנז' מתקיים:

$$\psi(k) - \psi(0) = \psi'(d)(k-0) = D_2 D_1 f\left(\underbrace{\begin{pmatrix} x_0+c \\ y_0+d \end{pmatrix}}_{P_{2,1}}\right) k$$

כעת, נסמן ב־ $P_{2,1} = \begin{pmatrix} x_0+c \\ y_0+d \end{pmatrix}$ ולכן סך הכל נקבל:

$$\Delta^2 f\left(\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}\right) = \left(D_2 D_1 f(P_2,1)\, k\right) h$$

ההוכחה סימטרית לחלוטין עבור $P_{1,2}$.

כעת, אם ניקח $t \neq 0$, כך ש־ $\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$, אזי נקבל:

$$\left(D_2 D_1 f\left(P_{2,1}\right)\right) t^2 =\triangle^2 f\left(\left[\begin{array}{c} t \\ t \end{array}\right]\right)=D_1, D_2 f\left(P_{1,2}\right) t^2$$

ובסופו של דבר

$$\left(D_2 D_1 f\left(P_{2,1}\right)\right)=\frac{\triangle^2 f\left(\left[\begin{array}{c} t \\ t \end{array}\right]\right)}{t^2}=D_1, D_2 f\left(P_{1,2}\right)$$

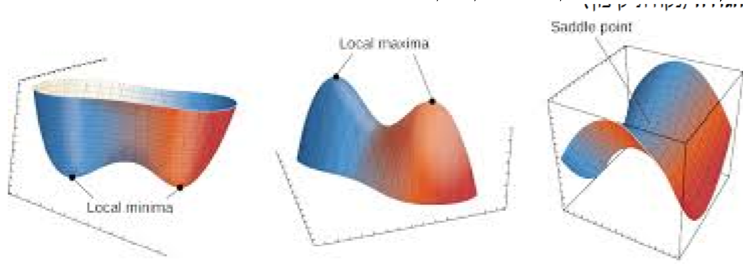
נבחין כי $\lim\limits_{t \rightarrow 0} P_{1,2}=\left(\begin{array}{c} x_0 \\ y_0 \end{array}\right)=P_0$ וגם $\lim\limits_{t \rightarrow 0} P_{2,1}=\left(\begin{array}{c} x_0 \\ y_0 \end{array}\right)=P_0$.

ולכן בהכרח מהרציפות של הנגזרות החלקיות מסדר שני, גם הגבולות $\lim\limits_{t \rightarrow 0} D_1, D_2 f\left(P_{1,2}\right) t^2$ ו- $\left(D_2 D_1 f\left(P_{2,1}\right)\right) t^2$ קיימים ושווים, ובסך הכל גם $\lim\limits_{t \rightarrow 0} \frac{\triangle^2 f\left(\left[\begin{array}{c} t \\ t \end{array}\right]\right)}{t^2}$ קיים, וקיבלנו את השוויון:

$$\lim _{t \rightarrow 0}\left(D_2 D_1 f\left(P_{2,1}\right)\right)=\left(D_2 D_1 f\left(\begin{array}{c} x_0 \\ y_0 \end{array}\right)\right)=\left(D_1 D_f f\left(\begin{array}{c} x_0 \\ y_0 \end{array}\right)\right)=\lim _{t \rightarrow 0} D_1, D_2 f\left(P_{1,2}\right)$$

כנדרש.

נתבונן כעת במושג נקודות מקומי, לפי הציורים הבאים:



(a) (b) (c)

<u>הרצאה מס' 36</u>

הגדרה (מינימום ומקסימום גלובלי)

תהי $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ותהי $A \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^2$. נאמר ש- $P_0 \in A$ היא נקודת מקסימום (או מינימום) גלובלי של f בנקודה A אם"ם מתקיים:

$$\forall P \in A: f(P) \leqslant f\left(P_0\right) \quad\left(\forall P \in A: f(P) \geqslant f\left(P_0\right)\right).$$

ל- $f\left(P_0\right)$ עצמו קוראים הערך המקסימלי (או הערך המינימלי) של f ב- A.

הערות

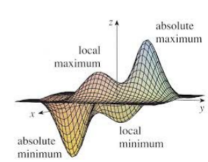
(i) אם נתונים לנו $f : U \to \mathbb{R}$ ו־ $A \subseteq U$, לא בהכרח קיימת נקודת מקסימום (או מינימום) גלובלי של f בקבוצה A.

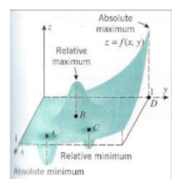
(ii) הערך המקסימלי (או המינימלי) של f ב־ A הוא $\max\{f(P) \mid P \in A\}$ $(\min\{f(P) \mid P \in A\})$. כלומר, זו היחידות, אם הינו קיים, אבל נקודת מקסימום (או מינימום) גלובלי של f ב־A, לא בהכרח יחידה. למשל, במקרה בו f קבועה.

הגדרה (נקודת קיצון מקומי)

תהי $A \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהי $f : U \to \mathbb{R}$ פונקציה. נקודה $P_0 \in U$ תיקרא נקודת מקסימום (או מינימום) מקומי של f אם"ם U מכילה סביבה מלאה $B_r\left(P_0\right)$ של P_0 היא נקודת מקסימום (או מינימום) גלובלי של f בקבוצה $B_r\left(P_0\right)$.
נאמר ש־ P_0 היא נקודת קיצון מקומי של f, אם P_0 היא מקסימום או מינימום מקומי של f.

נשים לב ש־ P_0 היא נקודת קיצון מקומי של f, אם"ם מתקיימים שני התנאים הבאים:
(i) P_0 היא נקודה פנימית של U, כלומר U מכילה סביבה מלאה של P_0.
(ii) קיים $0 < r$ כך ש־ $\forall P \in B_r\left(P_0\right) : f\left(P\right) \leq f\left(P_0\right)$ (או $\forall P \in B_r\left(P_0\right) : f\left(P_0\right) \leq f\left(P\right)$).



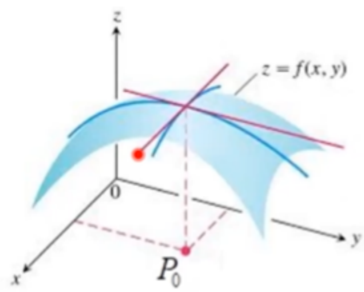


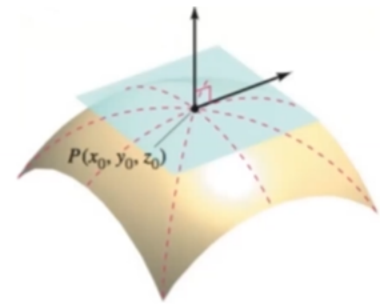
טענה

תהי $P_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ נקודת קיצון מקומי של $f : U \to \mathbb{R}$. יהי $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$, כך ש־ $\|\overrightarrow{u}\| = 1$.
אם יש ל־ f ב־ P_0 נגזרת כיוונית בכיון $\overrightarrow{h}$, אזי $D_{\overrightarrow{u}} f\left(P_0\right) = 0$.

הוכחה

נניח שיש ל־ f מקסימום מקומי ב- P_0 (במקרה השני נתבונן ב־ $-f$) .
יהי $0 < r$ כך ש־ $\forall P \in B_r\left(P_0\right) : f\left(P\right) \leq f\left(P_0\right)$.
נגדיר כעת $g : (-r, r) \to \mathbb{R}$ על ידי $g\left(t\right) = f\left(P_0 + t\overrightarrow{u}\right)$.
בפרט לכל $t \in (-r, r)$, מתקיים כי $P_0 + t\overrightarrow{u} \in B_r\left(P_0\right)$.
לכן בסך הכל נקבל: $g\left(t\right) = f\left(P_0 + t\overrightarrow{u}\right) \leq f\left(P_0\right) = g\left(0\right)$.
בסך הכל נקבל כי ל־ g יש מקסימום מקומי ב־ $t = 0$.
g גזירה ב־$t = 0$, כי ל־ f יש נגזרת כיוונית ב־ P_0 בכיוון $\overrightarrow{u}$.
לכן, לפי משפט פרמה נובע כי $D_{\overrightarrow{u}} f\left(P_0\right) = g'\left(0\right) = 0$.





משפט פרמה

תהי $P_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ נקודת קיצון מקומי של $f : U \to \mathbb{R}$.

כעת, אם f דיפרנציאבלית ב-P_0, אזי בפרט $D_f\left(P_0\right) = 0$.

הוכחה

מכך שf דיפרנציאבלית ב- P_0, כל הנגזרות הכיוונית של f ב־ P_0 קיימות, ולכן הן מתאפסות לפי הטענה הקודמת.

כלומר $D_1 f\left(P_0\right) = 0$ וגם $D_2 f\left(P_0\right) = 0$.

בפרט $Df\left(P_0\right) = 0$, כנדרש.

הגדרה (נקודה קריטית)

תהי $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהי $f : U \to \mathbb{R}$ פונקציה נתונה. נקודה $P_0 \in U$ תיקרא **נקודה קריטית** של f אם"ם מתקיים אחד הבאים:

(i) אם $D_1 f\left(P_0\right) = D_2 f\left(P_0\right) = 0$.

(ii) לפחות אחד מהגבולות $D_1 f\left(P_0\right)$ ו־ $D_2 f\left(P_0\right)$ איננו קיים.

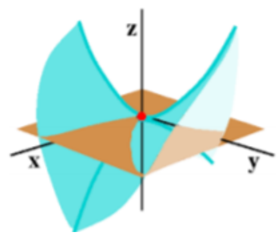
מסקנה

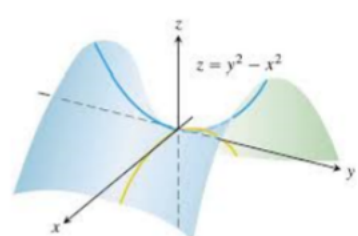
אם יש לפונקציה $f : U \to \mathbb{R}$ נקודת קיצון מקומי ב־ P_0, אזי P_0 נקודה קריטית של f.

בפונקציות ממשתנה אחד, ראינו שלכל נקודה קריטית היא נקודת קיצון מקומי. כעת, ניתן שם לאפשרות זו עבור פונקציה בשני משתנים.

הגדרה (אוכף)

תהי $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהי $f : U \to \mathbb{R}$ פונקציה נתונה. נקודה קריטית של f שאיננה נקודת קיצון מקומי של f תיקרא **נקודת אוכף** של f.





דוגמה

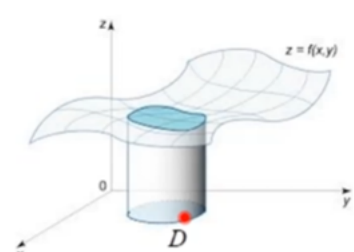
תהי $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^3+y^3-3xy$.
מצאו את כל הנקודות ב- $\mathbb{R}^2$ המועמדות להיות נקודת קיצון מקומי של f.

פתרון:
כיוון ש-f הינה פולינום, בהכרח שתי הנגזרות החלקיות קיימות בכל נקודה.
בפרט מתקיים $D_1 f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3x^2-3y$ ו- $D_2 f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3y^2-3x$.
כלומר, הנקודות הקריטיות $P=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ של f מקיימות את מערכת המשוואת $\begin{cases} 3x^2-3y=0 \\ 3y^2-3x=0 \end{cases}$ ובמילים אחרות $\begin{cases} x^2-y=0 \\ y^2-x=0 \end{cases}$.
כעת נבחין כי מהמשוואה הראשונה עולה כי $y=x^2$. אם נציב זאת במשוואה התחתונה נקבל $x^4-x=0$.
בפרט $x\left(x^3-1\right)=0$.
ולמעשה $x=0$ או $x=1$. מכך ש- $y=x^2$ נובע כי ל-f יש שתי נקודות קריטיות: $P_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו-$P_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

הערה
תהי $U\subseteq\mathbb{R}^2$ ותהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה נתונה. תהי P_0 נקודה קריטית של f.
אם f בעלת כל הנגזרות עד סדר שלישי, וכולן רציפות ב-P_0.
באמצעות הנגזרות מסדר שני, אפשר להכריע האם P_0 היא נקודת מינימום מקומי, נקודת מקסימום מקומי או נקודת אוכף.
אמנם, לא נלמד זאת במסגרת הקורס.

אינטגרלים מרובים

כשדיברנו על פונקציה ממשית במשתנה אחד, השתמשנו באינטגרל על מנת לדבר על המושג האינטואטיבי של שטח.
כעת, נשתמש במושג "אינטגרל כפול" על מנת שנוכל לדבר על המושג האינטואיטיבי של "נפח".

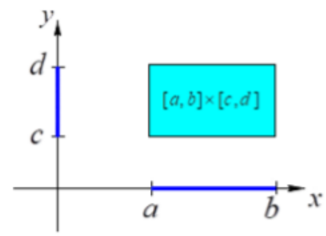


נתבונן בהגדרות הבאות, ותחילה במקרה הפרטי הבא.

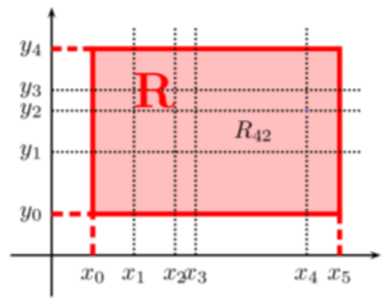
הגדרה
מלבן ב- $\mathbb{R}^2$ הוא קבוצה R מהצורה:

$$R=[a,b]\times[c,d]=\left\{\left(\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right)\in\mathrm{R}^2\ \middle|\ \begin{array}{c}a\leqslant x\leqslant b\\c\leqslant y\leqslant d\end{array}\right\}$$

כאשר $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, ובפרט מקיימים $a<b$ וגם $c<d$.



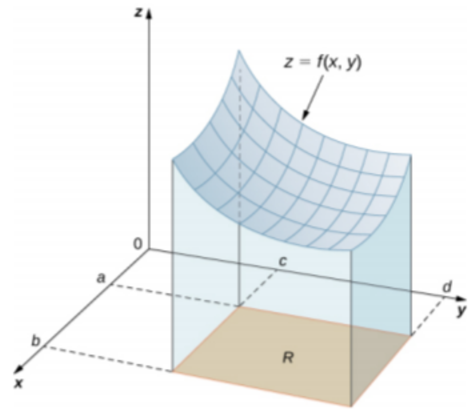
כעת, נסמן $A\left(R\right)=\left(b-a\right)\left(d-c\right)$.
נקרא ל- $P=\{P_1,P_2\}$ בשם שריג, כאשר P_1 הוא חלוקה של $[a,b]$ ו- P_2 היא חלוקה של $[c,d]$.



כעת, אם P_1 מכילה n_1+1 נקודות, ו- P_2 מכילה n_2+1 נקודות, אזי נוכל לחלק את המלבן R ל- $n=n_1n_2$ תת מלבנים, מהצורה $R_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$.
אם נסדר אותם בסדר ה"לקסיקוגרפי", נקבל רשימה $R_1,R_2,\ldots,R_n$.

הגדרה (עידון של שריג)
השריג $Q_1=\{Q_1,Q_2\}$ על R ייקרא עידון של השריג $P=\{P_1,P_2\}$ על R אם ורק אם $Q_1\subseteq P_1$ וגם $Q_2\subseteq P_2$.
(למעשה, אם ורק אם החלוקה Q_1 עידון של החלוקה P_1 והחלוקה Q_2 עידון של החלוקה P_2).

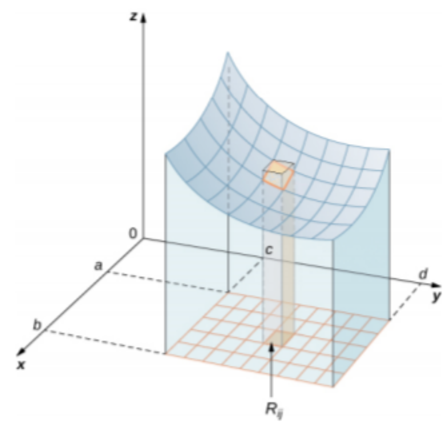
תהי $R\subseteq U\subseteq\mathbb{R}^2$ ותהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה על R.
כלומר, מעצם ההגדרה $m\leq f\left(\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right)\leq M$.
בפרט, בהינתן חלוקה P של R, נגדיר $M_i=\sup\limits_{T\in R_i}f(\vec{x})\quad,\quad m_i=\inf\limits_{Z\in R_i}f(\vec{x})$.



כעת נגדיר סכומי דרבו.

נגדיר את סכום דרבו תחתון של f ביחס לחלוקה P ע"י: $L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i A\left(R_i\right)$

נגדיר את סכום דרבו עליון של f ביחס לחלוקה P ע"י: $U(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i A\left(R_i\right)$



<u>הרצאה מס' 37</u>

טענה

לכל שריג P של R מתקיים $L\left(f,P\right)\leq U\left(f,P\right)$.

טענה

יהי Q עידון של השריג P אזי מתקיים $L\left(f,P\right)\leq L\left(f,Q\right)\leq U\left(f,Q\right)\leq U\left(f,P\right)$.

טענה

תהי $R\subseteq U\subseteq\mathbb{R}^2$ ותהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה על R, כאשר $m\leq f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\leq M$:

לכל שתי שריגים P ו$\tilde{P}$ של R מתקיים:

$$mA\left(R\right)\leq L\left(f,P\right)\leq U\left(f,\tilde{P}\right)\leq MA\left(R\right)$$

הגדרה

תהי $R \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהי $f : U \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה על R,נגדיר

$$\mathscr{L} = \{L(f,P) \mid P \text{ lattice of } [a,b]\},\ \mathscr{U} = \{U(f,P) \mid P \text{ lattice of } [a,b]\}$$

$\mathscr{L}$ ו $\mathscr{U}$ קבוצות לא ריקות של מספרים ממשיים, ולכן לפי הטענה הקודמת, מתקיים כי:

$$\forall u \in \mathscr{U}\ \forall l \in \mathscr{L} :\ l \leq u$$

הקבוצות $\mathscr{L}$ ו $\mathscr{U}$ חסומות מלעיל ומלרע בהתאמה.
בנוסף, המספריים הממשיים $\sup \mathscr{L}$ ו $\inf \mathscr{U}$ קיימים, ולכן, לפי טענה מאינפי 1 מתקיים $\sup \mathscr{L} \leq \inf \mathscr{U}$.

הגדרה

המספר $\sup \mathscr{L}$ כפי שהוגדר לעיל, יכונה **האינטגרל התחתון** של f ב$[a,b]$ ויסומן $\underline{\iint_R} f dA$.
המספר $\inf \mathscr{U}$ פי שהוגדר לעיל, יכונה **האינטגרל העליון** של f ב$[a,b]$ ויסומן $\overline{\iint}_R f dA$
לכל שני שריגים מתקיים:

$$mA(R) \leqslant L(f,P) \leqslant \underline{\iint_R} f dA \leqslant \overline{\lim} \int_R f dA \leqslant U(f,\tilde{P}) \leqslant MA(R)$$

הגדרה

יהי $R \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^2$ מלבן ותהי $f : R \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה.
נאמר שf **אינטגרבלית** ב$[a,b]$, אם ורק אם מתקיים השוויון: $\underline{\iint_R} f dA = \overline{\iint}_R f dA$.
במקרה זה מסמנים את הערך המשותף ב$\iint_R f A$ ומספר זה נקרא האינטגרל של f בR.

הגדרה

אם $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0$, ו־$f$ עבור כל $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ **ו-אינטגרבילית ב־R**, אזי המספר האי שלילי $\iint_R f A$ נקרא גם **הנפח** של הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R \wedge 0 \leqslant z \leqslant f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$$

טענה (תנאי דרבו לאינטיגרביליות)

יהי $R \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^2$ מלבן ותהי $f : R \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה. אזי f אינטגרבילית ב־R אם"ם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת שריג P של R כך שמתקיים $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

סיכום תכונות האינטגרל:

יהי $R \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^2$ מלבן ויהיו $f : R \to \mathbb{R}$ ו- $f : R \to \mathbb{R}$. פונקציות אינטגרביליות אינטגרבילית ב־R, ויהיו $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. (הומוגניות) הפונקציה λf גם היא אינטגרבילית בR ומתקיים: $\iint_R (\lambda f)\, dA = \lambda \iint_R f dA$
2. (אדיטיביות) הפונקציה $f + g$ גם היא אינטגרבילית בR ומתקיים: $\iint_R (f+g)\, dA = \iint_R f dA + \iint_R g dA$
3. (הפרש) הפונקציה $f - g$ גם היא אינטגרבילית בR ומתקיים: $\iint_R (f-g)\, dA = \iint_R f dA - \iint_R g dA$.
4. פונקצית המכפלה $f \cdot g$ גם היא אינטגרבילית בR (אבל אין **כפליות**! האינטגרל של המכפלה לא שווה למכפלת האינטגרלים).
5. אם קיים קבוע ממשי $m > 0$ כך ש $\left| g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| > m$: $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R$, אז הפונקציה $\frac{f}{g}$ היא אינטגרבילית בR.
6. (חיוביות) אם $0 \le f$ (כלומר $0 \le f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R$ אז, $0 \leqslant \iint_R (f)\, dA$.
7. (מונוטוניות) אם $f \le g$ (כלומר $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \le g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R$) אז $\iint_R (f) \leqslant \iint_R (g)$.
8. (ערך מוחלט) הפונקציה $|f|$ גם היא אינטגרבילית בR ומתקיים: $\left|\iint_R (f)\right| \leqslant \iint_R |f|$
9. (ירושה) אם המלבן R_1 מקיים $R_1 \subseteq R$ אזי הפונקציה f גם אינטגרבילית ב־ R_1 .
10. (יחידה) הפונקציה הקבועה $f = 1$ אינטגרבילית בR ומתקיים $\iint_R 1 dA = A(R)$
11. (אדיטיביות ביחס לאיחוד מלבנים בלי נקודות פנימיות משותפות) אם $a < \gamma < b$ והפונקציה f אינטגרבילית על $R_1 = [a,\gamma] \times [c,d]$ ועל $R_2 = [\gamma, b] \times [c,d]$ וב$[c,b]$ אזי f אינטגרבילית ב־ $R = R_1 \cup R_2 = [a,b] \times [c,d]$ ומתקיים:

$$\iint_R f dA = \iint_{R_1} f dA + \iint_{R_2} f dA$$

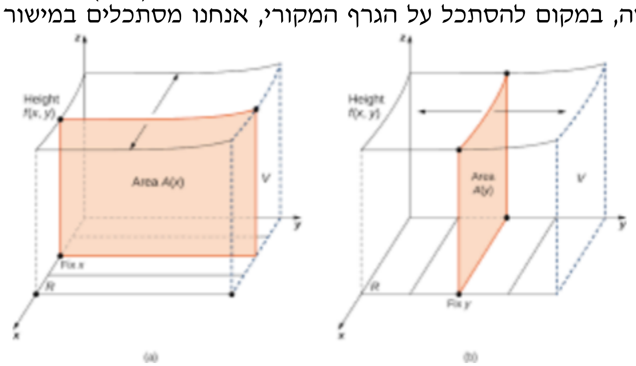
אינטגרלים נשנים - שיטת הסלמי

יהי $R = [a,b] \times [c,d]$ מלבן ותהי $f : R \to \mathbb{R}$ אינגטרבילית על R.

על מנת להקל על עצמנו, נקבע $y \in [c,d]$ וניתן ל־x לנוע ב־ $[a,b]$.

בעצם, נגדיר את הפונקציה $f_y : [a,b] \to \mathbb{R}$, על ידי $f_y(x) = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

למעשה, במקום להסתכל על הגרף המקורי, אנחנו מסתכלים במישור קבוע, שחותך את גרף הפונקציה:



אם נאפשר ל־ y לזוז קצת, אז בכל תזוזה נקבל מישור נוסף. בכך אנחנו למעשה "פורסים את גרף הפונקציה". הנפח יהיה סכימה של כל פרוסה.

כעת, את השטח שנוצר לנו, נוכל לסכום על פני המשתנה השני, כלומר על פי y (כך שנקבל את x), ואז נקבל:

$$\int_c^d A(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx \right) dy$$

באותה מידה, נוכל לחשב קודם כל את האינטגרל לפי y ואז את האינטגרל לפי x.
כעת, נראה שהאינטגרלים הללו שווים.

משפט פוביני

יהי $R = [a,b] \times [c,d]$ מלבן ותהי $f : R \to \mathbb{R}$ אינגטרבילית על R.
אז קיימים שני **האינטגרלים הנשנים** $\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx \right) dy$ ו־ $\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dy \right) dx$ ומתקיים השוויון:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx \right) dy = \iint_R f dA = \int_a^b \left(\int_c^d f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dy \right) dx$$

דוגמה

חשבו את $\iint x \cos y dA$ כאשר R הוא המלבן שקודקודיו $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

פתרון

נכתוב $R = [0,2] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ונקבל:

$$\iint_R x \cos y dA = \int_0^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos y dy \right] dx = \int_0^2 x[\sin y]_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \int_0^2 x(1-0)dx$$
$$= \int_0^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 2 - 0 = 2$$

כעת, נחשב את האינטגרל בסדר ההפוך ונקבל:

$$\iint_R x \cos y dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^2 x \cos y dx \right] dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 dy =$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos y dy = 2[\sin y]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(1-0) = 2$$

משפט

תהי f אינטגרבילית ב־ $D = \left\{ \begin{array}{c} a \le x \le b \\ g(x) \le y \le h(x) \end{array} \right\}$ אזי $\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx$.
בפרט, מתקיים שנוכל לחשב את **האינטגרל הכפול** באמצעות האינטגרל הנשנה.