הרצאות - ליניארית 2 - תש"פ - סמסטר ב'

תוכן העניינים

פולינומים

1. פולינום מעל שדה

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

הגדרה:

פולינום P מעל $\mathbb{F}$ הוא ביטוי פורמלי:

$P(X) = a_0 + a_1X^1 + ... + a_nX^n$ כאשר $a_n \in \mathbb{F}$ ו$n \in \mathbb{N}$.

$a_0...a_n$ הם המקדמים של P. נגדיר ש $a_n \neq 0, m < n$.

אוסף כל הפולינומים מעל $\mathbb{F}$ במשתנה X הוא $\mathbb{F}[X]$.

הגדרה

אם $P, Q \in \mathbb{F}[X]$, עם $P(X) = a_0 + ... + a_nX^n$, $Q(X) = b_0 + ... + b_mX^m$, נגדיר את הסכום של P וQ להיות :

$(P+Q)(X) = \sum_{j=0}^{\max(m,n)} (a_j + b_j) X^j.$

ואם $\lambda \in \mathbb{F}$, אזי מתקיים:

$(\lambda P)(X) = (\lambda a) + ... + (\lambda a_nX^n)$

תזכורת:

$\mathbb{F}[X]$ עם הסכום והמכפלה ע"י סקלר הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.

נזכיר כי הפולינומים $\left(1, x, x^2 ...\right)$ הינם בת"ל. בנוסף, מדובר למעשה בבסיס ל$\mathbb{F}[x]$. בפרט $\dim(\mathbb{F}[x]) = \infty$.

וקטור ה0 של מ"ו זה הינו למעשה פולינום האפס, שכל המקדמים שלו הם 0.

הגדרה

אם $P, Q \in \mathbb{F}[X]$, עם $P(X) = a_0 + ... + a_nX^n$, $Q(X) = b_0 + ... + b_mX^m$.

נגדיר את המכפלה של P עם Q להיות:

$(PQ)(X) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i,j \mid i+j=k} a_ib_j\right) X^k.$

תכונות:

.1 $P\left(Q+R\right)=PQ+PR$

נשים לב שלא מדובר בשדה, שכן הגדרת האיבר ההופכי איננה מתקיימת - לא לכל איבר יש הופכי.

הגדרה

(1) המעלה של פולינום $P\neq 0$ היא האינדקס המקסימלי j, כך שהמקדם של X^{j} איננו 0. נסמנה $\deg\left(P\right)$.
ואם $P=0$, נגדיר $\deg\left(P\right)=-\infty$.

<u>שאלה:</u>

$P\left(X\right)=a_{0}+...+a_{n}X^{n},a_{n}\neq 0$, ו$Q\left(X\right)=b_{0}+...+b_{m}X^{m},b_{m}\neq 0$.

מהן $\deg\left(PQ\right)$ ו$\deg\left(P+Q\right)$?

למה:

$\deg\left(PQ\right)=\deg\left(P\right)+\deg\left(Q\right)$.

$\deg\left(P+Q\right)\leq\max\left(\deg\left(P,Q\right)\right)$. (אם $\deg\left(P\right)\neq\deg\left(Q\right)$ אז יש שוויון.)

הגדרת $\deg\left(P\right)$ **כאשר** $P=0$

יהיו P,Q פולינומים, כאשר $P\left(X\right)=X$, $Q\left(X\right)=0$, ומתקיים $\left(PQ\right)=0$,

בעקבות כך, נגדיר ש$\deg\left(P\right)=-\infty$. ולכן מתקיים שאכן $\deg\left(PQ\right)=\deg\left(P\right)+\deg\left(Q\right)$.

דבר זה נכון לכל $P,Q\in\mathbb{F}\left[X\right]$.

נשים לב שבדוגמה הבאה מתקיים:

$P\left(X\right)=X^{2}+X,Q\left(X\right)=-X^{2},\deg\left(P\right)=2,\deg\left(Q\right)=2$

אך מאידך מתקיים: $\deg\left(P+Q\right)=1$.

הגדרות נוספות:

אם $P\in\mathbb{F}\left[X\right]$, למשל כאשר:$P\left(X\right)=a_{0}+...+a_{n}X^{n}$, כך ש$\deg\left(P\right)=n$, אזי a_{n} הוא **המקדם המוביל**, $a_{n}X^{n}$ **הגורם המוביל.** אם $a_{n}=1$ נאמר שP **מתוקן.** אם $P\left(X\right)=a_{0}$, נאמר שP **פולינום קבוע.** (אפשר לומר גם ש$\deg\left(P\right)$ היא 0 או $-\infty$).

2. חילוק פולינומים

ב$\mathbb{Z}$ יש חיבור וכפל, אבל לא לכל איבר יש הופכי. אומרים ש$a \in \mathbb{Z}$ מחלק את $p \in \mathbb{Z}$. אם קים $q \in \mathbb{Z}$ כך שמתקיים: $p = qd$. זה לא בהכרח מתקיים כמובן. אם לכל איבר היה הופכי, היה ניתן לכתוב את p כך : $p = \left(p \cdot \frac{1}{d}\right) d$.

הגדרה:

$P, D \in \mathbb{F}[X]$. **נאמר ש**D **מחלק את** P, ונסמן $D \mid P$, אם קיים $Q \in \mathbb{F}[x]$, כך ש $P = QD$.

נוכל גם לומר שD **גורם** של P, או שP הוא **כפל** של D.

הערות:

(I) P מחלק את עצמו כי $P = 1 \cdot P$.

(II) 1 (הפולינום הקבוע ששווה ל1), מחלק את כולם.

(III) למעשה, כל פולינום ממעלה 0 מחלק את כולם. יהי $D(X) = d \in \mathbb{F}$. לכל $P \in \mathbb{F}[X]$ מתקיים: $P = d\left(\frac{1}{d}P\right)$.

כעת, נתבונן ב$\mathbb{Z}$, שם ניתן לחלק "עם שארית". למשל: $37 = 5 \cdot 7 + 2$, כאשר 2 הוא השארית. ׳נשים לב שהתכונה העיקרית היא שהשארית קטנה מהגורם המחלק, למשל במקרה שלנו 2 קטן מ7.

כאנלוגיה ל$\mathbb{Z}$ נבצע ב$\mathbb{F}[X]$ פעולה דומה.

טענה:

יהיו $P, D \in \mathbb{F}[X]$ עם $D \neq 0$, אזי קיימים פולניומים יחידים $Q, R \in \mathbb{F}[x]$, כך ש:

(i) $P = QD + R$

(ii) $\deg(R) < \deg(D)$.

הוכחה:

(I) תחילה נוכיח יחידות:

נניח שקיימים $P = Q_1 D + R_1 = Q_2 D + R_2$.

מתקיים:

$$(Q_1 - Q_2) D = R_2 - R_1$$

אם הפולינומים שווים, המעלות שלהם צריכות להיות שוות. כעת נשים לב שאנו יודעים ש$\deg(R_2 - R_1) < \deg(D)$.

אך לפי הלמה שהוכחנו קודם לכן מתקיים:

$$\deg((Q_1 - Q_2) D) = \deg(P) + \deg(Q_1 - Q_2).$$

לכן בהכרח $\deg(Q_1 - Q_2) = -\infty$. כלומר:

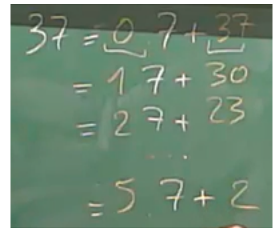
$(Q_1 - Q_2) = 0 \Rightarrow Q_1 = Q_2.$

אבל אז מתקיים ש:

$R_2 - R_1 = 0 \Rightarrow R_1 = R_2$

(II)כעת נוכיח קיום:

קודם לכן, נרצה להבין את התהליך של מציאת שארית ב$\mathbb{Z}$:



כעת בלתי אפשרי למצוא עוד שארית. הוכחת הקיום במרחב הפולינומים דומה.

נגדיר באינדוקציה $Q_n, R_n \in \mathbb{F}[x]$ כך ש$P = Q_n D + R_n$, ו$\deg(R_{n+1}) < \deg(R_n)$.

<u>בסיס האינדוקציה:</u>

נתחיל עם $Q_1 = 0, R_1 = P$, ואכן מתקיים: $P = Q_1 D + R_1$.

<u>צעד האינדוקציה:</u>

נניח שיש לנו $Q_n, R_n \in \mathbb{F}[x]$, כך ש$P = Q_n D + R_n$. כעת קיימות שתי אפשרויות:

א. אם $k = \deg(R_n) < \deg(D) = l$, סיימנו.

ב. אחרת, אם נניח ש:

$R_n(X) = a_0 + ... + a_k X^k, a_k \neq 0$

$D(X) = d_0 + ... + d_l X^l, d_l \neq 0$

אז נגדיר את $Q_{n+1}(X)$ להיות:

$$Q_{n+1}(X) = Q_n(X) + \frac{a_k}{d_l} \cdot X^{k-l}$$

ואת $R_{n+1}(X)$ להיות:

$$R_{n+1}(X) = R_n(X) - \frac{a_k}{d_l} \cdot X^{k-l} D(X)$$

וממילא מתקיים:

$$P = Q_n D + R_n = \left(Q_n + \frac{a_k}{d_l} \cdot X^{k-l}\right) \cdot D + \left(R_n - \frac{a_k}{d_l} \cdot X^{k-l} D(X)\right) = Q_n D + R_n = P$$

נוכל לשים לב שהתנאי הראשון מתקיים. כעת נבדוק את התנאי השני:

$$R_{n+1}(X) = R_n(X) - \frac{a_k}{d_l} \cdot X^{k-l} D(X) = a_0 + \ldots + a_k X^k - a_k X^k - \frac{a_k}{d_l} \cdot X^{k-l} \left(d_0 + \ldots + d_l X^l, d_l\right)$$
$$= a_0 + \ldots + a_k X^k - a_k X^k - \left((\text{times n } X\ ) < X^k\right) = a_0 + \ldots - \left((\text{times n } X\ ) < X^k\right)$$

אם כך, מתקיים:

$\deg\left(R_{n+1}(X)\right) < k = \deg\left(R_n\right)$

כנדרש.

<u>הרצאה מס' 2</u>

<u>דוגמה לחילוק פולינומים:</u>

$P(X) = 4X^3 - 2X^2 + 1, D(X) = X^2 + X + 1$

$$\begin{array}{rl}
4X^3 - 2X^2 & +1 = \left(X^2 + X + 1\right)\left(4X - 6\right) + 2X + 7 \\
\underline{-4X^3 - 4X^2 - 4X} & \\
-6X^2 - 4X + 1 & \\
\underline{6X^2 + 6X + 6} & \\
2X + 7 &
\end{array}$$

3. שורשים של פולינומים

יהי $P\in\mathbb{F}[X]$ כך ש$P(X)=a_0+...+a_nX^n$ אז הפונקציה $f:\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ מוגדרת להיות $f(b)=a_0+a_1b+...+a_nb^n$

נעיר כי ייתכן שיהיו שני פולינומים שונים, אך לשניהם יש את אותה הפונקציה. למשל, ב$\mathbb{F}=\mathbb{F}_2$, ו$P(X)=X\neq Q(X)=X^2$, להם יש את אותה הפונקציה.

הגדרה

יהי $P\in\mathbb{F}[X]$, $a\in\mathbb{F}$ הוא **שורש** של P אם $P(a)=0$. ייתכן שלP כאיבר של$\mathbb{R}[X]$ לא יהיה שורש, ואילו כאיבר של $\mathbb{C}[X]$ יהיה לו שורש.

טענה:

a שורש של P $\Leftrightarrow$ $(x-a)$ מחלק את P.

הוכחה:

$\Rightarrow$ נניח ש$(x-a)$ מחלק את P, כלומר קיים $Q\in\mathbb{F}[X]$, כך ש$P(X)=(x-a)Q(X)$. אזי מתקיים: $P(a)=(a-a)Q(X)=0$.

<u>הערה:</u>

אם $R\,|\,P$ אז כל שורש של R הוא שורש של P.

(אם $R(b)=0$, ו$P(X)=Q(X)R(X)$, אזי $P(b)=Q(b)R(b)=0$).

$\Leftarrow$ נחלק את P ע"י $(x-a)$ עם שארית. הוכחנו שקיים $Q,R\in\mathbb{F}[X]$ כך ש$P(X)=Q\cdot(x-a)+R(X)$ וכך ש$\deg(R)<\deg(x-a)=1$ (כלומר, R הינו סקלר למעשה ונסמנו $r\in\mathbb{F}$). נרצה להוכיח ש$R(x)=0$.

נשים לב שעל פי הנתון, a שורש של P. וכעת מתקבל:

$0=P(a)=Q\cdot(a-a)+R(a)=r$

לכן מתקיים כי R הינו הפולינום הקבוע ששווה ל0. כלומר: $P(X)=(x-a)Q(X)$.

זאת אומרת, $(X-a)$ מחלק את P, כנדרש.

טענה:

$0\neq P\in\mathbb{F}[X]$, אז יש לP לכל היותר $\deg(P)$ שורשים.

הוכחה:

באינדוקציה על $\deg(P)$.

<u>בסיס האינדוקציה:</u>

אם $\deg(P)$ אזי $P(X)=a$, לסקלר $0\neq a\in\mathbb{F}$. כלומר, לכל $b\in\mathbb{F}$ מתקיים $P(b)=a$ לכן לP יש 0 שורשים.

<u>צעד האינדוקציה:</u>

הנחת האינדוקציה היא שלכל פולינום ממעלה $n-1$ יש לכל היותר $n-1$ שורשים.

ניקח $P\in\mathbb{F}[X]$ עם $\deg(P)=n$.

א) אם לP אין שורשים, סיימנו.

ב) נניח ש$a\in\mathbb{F}$ שורש של P. לפי הטענה שהוכחנו, בהכרח קיים $Q\in\mathbb{F}[X]$:

$$P(X)=(x-a)\,Q(X)\Rightarrow\deg(Q)=n-1$$

לפי הנחת האינדוקציה, לQ יש לכל היותר $n-1$ שורשים.

כעת נניח ש$a\neq b$ שורש של P:

$$0=P(b)=(b-a)\,Q(b)\Rightarrow Q(b)=0$$

כלומר, מתקבל שb שורש של Q. עד כה מתקיים:

$$\{P \text{ שלשורש}\}=\{Q \text{ שורש של}\}\cup\{a\}$$

לכן לPיש לכל היותר n שורשים, כנדרש.

משפט (המשפט היסודי של האלגברה):

לכל $P\in\mathbb{F}[X]$ לא קבוע יש שורש.

<u>הערה:</u>

נשים לב, שאם $P\in\mathbb{C}[X]$ יש לו שורש a כך שמתקיים:

$$P(X)=(x-a)\,Q(X)$$

אם Q לא קבוע, יש לו שורש b וניתן לרשום זאת כך:

$$P(X)=(x-a)(x-b)\,R(X)$$

נוכל להמשיך כך עד שנגיע לקבוע, ונרשום את P בעצם כך:

$$P(X)=(x-a)(x-b)\ldots(x-z)\,\lambda$$

אם כך, נוכל להגיע למסקנה הבאה.

מסקנה:

אם $P\in\mathbb{C}[X]$ עם $\deg(P)=n$, אזי קיימים $a_1\ldots,a_n\in\mathbb{C}$ ו$c\in\mathbb{C}$, כך ש:

$P(X) = c(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$

ו$a_1...,a_n$ הם השורשים של P.

4. פולינומים אי פריקים

כאנלוגיה למספרים ראשוניים, שאנו יודעים שמתחלקים ב1 ובעצמם בלבד, נתבונן על מקרה דומה בפולינומים.

הגדרה:

$P \in \mathbb{F}[X]$ לא קבוע נקרא אי פריק, אם לכל $A, B \in \mathbb{F}[X]$ כך ש$P = AB$, אזי $\deg(A) = 0$ או $\deg(B) = 0$.

הערה:

אם $\deg(P) = 1$, אזי P אי פריק.

שאלה:

(I) מה הם הפולינומים האי פריקים ב$\mathbb{C}[X]$? ננסה למצוא פולינומים אחרים מעבר לפולינומים ממעלה 1. נשים לב כי ב$\mathbb{C}$ לכל פולינום לא קבוע יש שורש. אם $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg P \geq 2$, אזי קיים $\alpha \in \mathbb{C}$ כך ש$P(\alpha) = 0$. לכן $P = (x-\alpha)Q$ עבור איזשהוא $Q \in \mathbb{C}[X]$. לכן מכאן נובע שP פריק.

אם כך המסקנה היא שב$\mathbb{C}[x]$ הפולינומים האי פריקים הם בדיוק הפולינומים ממעלה 1.

(II) אם $P \in \mathbb{R}[X]$ ו$\deg P = 1$, אזי כמובן שP הוא אי פריק. אבל אמנם, יש פולינומים ממעלה 2 שהם אי פריקים.

טענה

$$P \in \mathbb{R}[x] \Leftrightarrow \begin{cases} \deg P = 1 \\ \deg P = 2 \quad P(X) = aX^2 + bX + c \wedge b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$$ אי פריק.

הוכחה

בתרגול.

יהי $P \in \mathbb{F}[x]$ פריק . דבר זה גורר ש $P = AB$ עם $\deg A, \deg B \geq 1$, לכן $\deg A < \deg P$. אם A בעצמו פריק, נניח $A = A_1 A_2$ אז נכתוב את $P = A_1 A_2 B$. כלומר, ניתן להמשיך עד שנכתוב את P כמכפלה של פולינומים אי פריקיים. (התהליך עוצר כי המעלות יורדות).

האם הפירוק יחיד? לא בדיוק. למשל, בדוגמה הבאה.

$P\left(X\right)=\left(2X+1\right)\left(X-1\right)=\left(X+2\right)\left(2X-2\right)$. כלומר, הפולינומים הם שונים, עד כדי קבוע.

<u>הרצאה מס' 3</u>

משפט

יהי $P\in\mathbb{F}\left[x\right]$. אזי קיימת קבוצה $A_1,...,A_n,n\in\mathbb{N}$ של פולינומים אי פריקיים ומתוקנים, וקבוע $a\in\mathbb{F}$ יחיד, כך ש$P=aA_1...A_n$.

הערה

אם $Q,P\in\mathbb{F}\left[x\right]$ כך ש$P\mid Q$ ונניח ש$P\left(X\right)=aA_1\left(X\right)...A_n\left(X\right)$ ו$Q\left(X\right)=bB_1\left(X\right)...B_m\left(X\right)$. כשה A_iוה B_j הם פולינומים אי פריקים מתוקנים, וa וb הם קבועים,

אז עד כדי שינוי באינדקסים, $B_m=A_m,...B_1=A_1$ (בפרט $m\leq n$) .

כלומר, קיים $R\in\mathbb{F}\left[x\right]$ כך ש$P=QR$. נכתוב את $R\left(X\right)=cC_1\left(X\right)...C_k\left(X\right)$, עבור C_k אי פריקים ומתוקנים.

ואז נקבל:

$$P\left(X\right)=bcB_1\left(X\right)...B_m\left(X\right)C_1\left(X\right)..C_k\left(X\right)$$

יחידות הפירוק, עד כדי שינוי באינדקסים גורר:

$$C_l=a_m...,C_1=a_{n+1},B_m=A_n...,B_1=A_1,bc=a$$

דבר זה מאפשר לנו לדעת בדיוק איך נראה כל פולינום המחלק את P.

אופרטורים

1. אופרטור על מרחב וקטורי

הגדרה

V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. f **אופרטור** מעל V הוא העתקה לינארית $f:V\to V$. כלומר, f איבר של $\hom\left(V,V\right)$.

דוגמאות

(I) אופרטור הזהות $Id:V\underset{v\to v}{\to}V$. ואופרטור האפס: $V\underset{v\to 0}{\to}V$.

(II) $V=\mathbb{R}^2$. סיבוב $\mathbb{R}_\theta$ בזווית θ, הוא אופרטור מעל V.

(III) $V=\mathbb{R}^2$ סיבוב. T_θ בזווית θ הוא סיבוב ציר הz.

(IV) $V=C^{\infty}(\mathbb{R})$ = $\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid$ גזירות ∞ פעמים$\}$. מדובר במרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. אופרטור הגזירה הינו $D:\underset{\varphi\to\varphi'}{V\to V}$. נבחין כי מדובר באופרטור, בעקבות כללי הגזירה הבאים: $D(\varphi+\psi)=(\varphi+\psi)'=\varphi'+\psi'$ וכן $D(a\varphi)=(a\varphi)'=a\varphi'$.

(V) $V=\mathbb{F}^n_{\text{coll}}=\left\{\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\mid a_i\in\mathbb{F}\right\}$.ותהי $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה ריבועית מעל $\mathbb{F}$. אזי $f:\underset{\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\to A\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}}{V\to V}$ הוא אופרטור.

פעולות על אופרטורים

V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. **יהיו** $g:V\to V, f:V\to V$ אופרטורים .

מתקיים:

(I) סכום. $(f+g):\underset{v\to f(v)+g(v)}{V\to V}$ הוא אופרטור.

(II) מכפלה על ידי סקלר. כאשר $a\in\mathbb{F}$, $(af):\underset{v\to af(v)}{V\to V}$ הוא אופרטור.

כלומר, מדובר במקרה פרטי של טענה מלינארית 1, ש$\hom(V,V)$ הוא מרחב וקטורי.

(III) הרכבה של אופרטרים הינה גם אופרטור. $(f\circ g):\underset{(v)\to f(g(v))}{V\to V}$.

<u>שאלה</u>

מה קורה כאשר $f=Id$ או $f=0$ (אופרטור האפס)? מתקיים כי אופרטור הזהות הוא האיבר הניטרלי להרכבה, ואופרטור הזהות הוא האיבר הניטרלי לסכום.

ניתן להרכיב את f עם עצמו, $f\circ f$ וכו'. נסמן $f^k=f\circ f\cdots f$. עם סימון זה מתקיים $f^0=Id$.

הגדרה

אם $P\in\mathbb{F}[x]$, נגדיר את $P(f)=a_0Id+a_1f+\ldots+a_nf^n$. נשים לב שמדובר באופרטור על V.

נגדיר $P(f):V\to V$ על ידי $P(v)=(a_0Id+a_1f+\ldots+a_nf^n)(v)=a_0v+a_1f(v)+\ldots+a_nf^n(v)$

דוגמה

ניקח את הסיבוב $R_{\frac{\pi}{2}}$(סיבוב בזווית $\frac{\pi}{2}$ב$\mathbb{R}^2$) . כאשר $P(X)=X^2$ ו$Q(X)=X^2+1$, מהם $P\left(R_{\frac{\pi}{2}}\right)$ ו$Q\left(R_{\frac{\pi}{2}}\right)$?

נוכל לשים לב שעבור $P(X)$ מתקיים שמדובר ב$R^2_{\frac{\pi}{2}}$, כלומר ב$R_{\frac{\pi}{2}}\circ R_{\frac{\pi}{2}}$. אם כך, מדובר למעשה בסיבוב של π, כלומר קיבלנו את $-v$. דהיינו, $P\left(R_{\frac{\pi}{2}}\right)=-Id$.

באותה צורה, $Q\left(R_{\frac{\pi}{2}}\right)=R^2_{\frac{\pi}{2}}+Id=-Id+Id=0$. כלומר קיבלנו למעשה את אופרטור האפס.

הרצאה מס' 4

הצגה מטרציאלית

ראינו שעבור V,W מ"ו (נוצרים סופית), והעתקה לינארית $f:V\to W$. אם B בסיס לV וC בסיס לW, ישנה מטריצה $[f]_C^B$שמייצגת את f יחסית לB וC. במקרה של $V=W$, כלומר f אופרטור על V, נרצה לקחת בסיס אחד B של V ולהתבונן ב$[f]_B^B$, שפשוט נסמן $[f]_B$.

ניזכר במשמעות מטריצה מייצגת. מה התפקיד של $A=[f]_B$? אם $B=(b_1,b_2\dots b_n)$, לכל $v\in V$ קיימים $v_1\dots v_n$ יחידים כך ש$v=\sum_{i=1}^n v_ib_i$.

כמו כן, ראינו שמתקיים $[v]_B=\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, כלומר הצגה ש ל וקטור ביחס לבסיס B.

אם כן, $A=[f]_B$ היא המטריצה שמקיימת, לכל $v\in V$, $[f(v)]_B=A\cdot[v]_B$.

כיצד מחשבים מטריצה כזאת? נשים לב שאם $v=b_i$, אזי מתקיים: $[f(v)]_B=A\cdot[b_i]_B=A\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

כאשר ה1 נמצא במקום הi, ו $A\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, זו העמודה ה$i$ית של A.

אם כך, מתקיים:

$$A=\left[\begin{array}{c|c|c|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [f(b_1)]_B & [f(b_2)]_B & \dots & [f(b_n)]_B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right].$$

דבר זה מעיד על כך שמדובר על מטריצה יחידה. נשים לב גם שA ריבועית (כי f אופרטור).

מטריצת מעבר בסיס

יהי $f:V\to V$, ויהיו $B=(b_1\dots b_n)$ ו$C=(c_1\dots c_n)$ בסיסים של V.

נגדיר מטריצת מעבר $[M]_C^B$, שמקיימת, לכל $v\in V$: $[v]_C=[M]_C^B\cdot[v]_B$.

אנו יודעים גם שM הפיכה, ושהמטריצה העושה את הפעולה ההפוכה, היא המטריצה ההופכית שלה. כלומר: $\left([M]_C^B\right)^{-1} = [M]_B^C$.

כאשר נתונה לי $[f]_B$ נרצה כעת לחשב את $[f]_C$.

ראשית, ניקח $[v]_C$ ונעביר אותו לבסיס B באמעות מטריצת המעבר, ולאחר מכן, נכפול במטריצה של f , כלומר מתקיים: $[f]_B[M]_B^C \cdot [v]_C = [f(v)]_B$.

אמנם, אנו מעוניינים לקבל את הקואורדינטות של v ביחס לבסיס C.

לכן, בסך הכל יתקבל: $[M]_C^B [f]_B [M]_B^C \cdot [v]_C = [f(v)]_C$.

זאת אומרת, קיבלנו מכפלה של שלוש מטריצות ריבועיות, שלמעשה מייצגת את $[f]_C$,

היחידות גורמת לכך שבדיוק מתקבל: $[f]_C = [M]_C^B [f]_B [M]_B^C = [M]_C^B [f]_B \left([M]_C^B\right)^{-1}$.

הגדרה

יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ ייקראו **דומות**, אם קיימת מטריצה $M \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה, כך שם $B = MAM^{-1} \Leftrightarrow \left(M^{-1}BM = A\right)$.

מסקנה

אם A, B מייצגות אותו אופרטור $f: V \to V$ (ייתכן גם יחסית לבסיסים שונים) אז A, B דומות.

הערות

(I) דמיון של מטריצות הוא **יחס שקילות** (רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי).

(II) יהי V מ"ו, בעל מימד סופי, ויהי $B = (b_1 \ldots b_n)$ בסיס סדור. אם ניקח f, g אופרטורים על v, אזי:

1. $[f+g]_B = [f]_B + [g]_B$.
2. $[\lambda f]_B = \lambda [f]_B$
3. $[f \circ g]_B = [f]_B \circ [g]_B$ (מכפלת מטריצות)
4. כמו כן מתקיים: $\left[f^k\right]_B = \left([f]_B\right)^k$.
5. אם $P \in \mathbb{F}[X]$, כאשר $P(X) = a_0 + a_1X + \ldots a_kX^k$, ו$[f]_B = A$, אז מתקיים: $[P(f)]_B = \left[a_0Id + a_1f_1 + \ldots + a_kf^k\right]_B = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_KA^k = P(A)$

2. תתי מרחבים אינוויראנטיים

הגדרה

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$. ויהי $f: V \to V$ אופרטור. נאמר שU, שהינו תת מ"ו של V הוא **f- אינווריאנטי** אם לכל $u \in U$, $f(u) \in U$ (באופן שקול $f(u) \subseteq U$).

דוגמאות

(I) V ו$\{0\}$ הוא תתי מ"ו f- אינווראנטי עבור **כל אופרטור** f מעל V.

הערה

$u \in \ker f$, הוא f-אינווריאנטי, כי $f\left(u\right) = 0 \in \ker f$.

(II) $V = \mathbb{R}^2$, f הוא R_θסיבוב בזווית θ, כאשר $0 < \theta < \pi$.

- כמובן שV ו$\{0\}$ הם f- אינווריאנטים.

- כל תת מ"ו הוא ממימד 1 והוא לא f- אינווריאנטי.

(III) $V = \mathbb{R}^3$, f הוא סיבוב סביב ציר הz, בזווית $0 < \theta < \pi$.

- כמובן שV ו$\{0\}$ הם f- אינווריאנטים.

- תת המרחב של ציר הz הוא f- אינווריאנטי.

- המישור xy

(IV) $V = C^{\infty}\left(\mathbb{R}\right)$ = $\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid$ גזירות ∞ פעמים$\}$.D הוא אופרטור הגזירה $D : V \underset{\varphi \to \varphi'}{\to} V$.

- נתבונן בתת מרחב וקטורי $U = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \varphi\left(x\right) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + a_k x^k, \alpha_0 \ldots a_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}\right\}$.

מדובר בD-אינווריאנטי (אם $\varphi \in U$, אז גם $\varphi' \in U$).

הערה

אם U תת מ"ו, f- אינווריאנטי של V, אז הצמצום fl_u, הוא אופרטור על U.

מטריצה בבסיס מתאים לתת מ"ו f- אינווריאנטי

יהי f אופרטור על V, U תת מ"ו f- אינווריאנטי. ניקח $B_u = \left(b_1 \ldots b_k\right)$ בסיס לU, נרחיב אותו לבסיס $B = \left(b_1 \ldots b_n\right)$ של V.

מה היא $[f]_B$? נזכיר כי:

$$[f]_{\mathcal{B}} = \left[[f\left(b_1\right)]_{\mathcal{B}} \mid \cdots \mid [f\left(b_k\right)]_{\mathcal{B}} \mid \cdots \mid [f\left(b_n\right)]_{\mathcal{B}}\right] \in M_n(\mathbb{F})$$

כעת, אם $i \leq k$: אז $b_i \in U$, ולכן $f\left(b_i\right) \in U$.

לכן מתקיים כי :

$$[f(b_i)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [f(b_i)]_{\mathcal{B}_U} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [f|_U(b_i)]_{\mathcal{B}_U} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

.

בסך הכל מתקבלת המטריצה הבאה:

$$[f]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} [f|_U]_{\mathcal{B}_V} & A \\ \hline 0_{(n-k)\times k} & B \end{array}\right]$$

טענה

יהיו f,g אופרטורים מעל V. ותהי $\lambda \in \mathbb{F}$. אם U תת מ"ו של V, גם f-אינווריאנטי, וגם g - אינווריאנטי, אזי הוא U גם:

(I) $(f+g)$- אינוויראנטי,

(II) $(f \circ g)$- אינווריאנטי

(III) (λf) - אינווריאנטי

(IV) $P(f)$ - אינווריאנטי, לכל $P \in \mathbb{F}[X]$.

<u>הרצאה מס' 5</u>

3. מרחבים ציקליים

3.1 מסלול של וקטור, פולינום מינימלי של וקטור. הגדרה

יהי $f : V \to V$ אופרטור. ויהי $v \in V$ הקבוצה $v, f(v), f^2(v)$ נקראת המסלול של v יחסית ל-f.

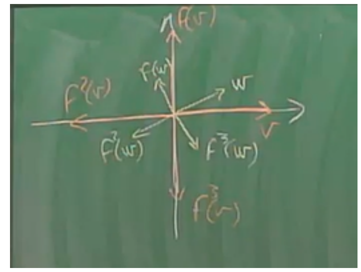
דוגמה

יהי $V = \mathbb{R}^2$. נתבונן בדוגמאות הבאות:

(I) סיבוב ב-$\frac{\pi}{2}$.

(II) סיבוב בזווית $\theta = 1$.

אם נרצה, נוכל לקחת וקטור w כלשהוא, כך שיתקבל :



כלומר, לאחר ארבעה סיבובים של (I) **המסלול** של w הינו חזרה למיקום ההתחלתי שלו.

בדוגמה (II), נוכל להבחין שכיוון שלא מדובר במספר רציונלי כפול π, אז לעולם לא נחזור חזרה, ולכן מדובר למעשה **במסלול אין-סופי** של w.

הערה

אם $\dim V < \infty$, אזי הקבוצה $\left\{v, f(v), f^2(v), \ldots f^n(v)\right\}$ איננה בת"ל.

למעשה, קיים איזשהוא אינדקס k כך שהקבוצה הבאה $\left\{v, f(v), f^2(v), \ldots f^k(v)\right\}$ הינה עדיין בת"ל.

אמנם אם נוסיף את המסלול $f^{k+1}(v)$, נקבל קבוצה ת"ל. נשים לב ש$k \leq n = \dim V$.

במילים אחרות, k הינו האינדקס המקסימלי, שעבורה הקבוצה דלעיל הינה בת"ל.

זאת אומרת, קיימים $\alpha_{0,} \ldots a_{k+1}$ (סקלרים שלא כולם אפסים), כך ש- $\alpha_0 v + \alpha_1 f(v) + \ldots + \alpha_k f^k(v) + \alpha_{k+1} f^{k+1}(v) = 0$.

נוכל להבחין כי $\alpha_{k+1} \neq 0$, שהרי רק $\left\{v, f(v), f^2(v), \ldots f^k(v)\right\}$ בת"ל.

בעקבות כך, אפשר לחלק את כל המקדמים בα_{k+1} ונקבל: $\frac{\alpha_0 v + \alpha_1 f(v) + \ldots + \alpha_k f^k(v)}{\alpha_{k+1}} + f^{k+1}(v) = 0$.

נסמן $\frac{\alpha_0}{\alpha_{k+1}} = a_0, \ldots \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} = a_k$, ונקבל למעשה את הביטוי:

$$a_0 v + a_1 f(v) + \ldots + a_k f^k(v) + f^{k+1}(v) = 0.$$

אם נגדיר את $P \in \mathbb{F}[X]$ ע"י $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_k X^k + X^{k+1}$, אזי ניתן לכתוב את הביטוי דלעיל כך: $P(f)(v) = 0$.

כעת נבחין במספר הגדרות שניתן לדבר עליהם ביחס לפולינום זה.

הגדרה

P הינו הפולינום המינימלי של v יחסית לf. נסמן $\min_v^f(X)$.

הערה

נניח ש$Q\in\mathbb{F}[X]$ מקיים $Q(f)(v)=0$, כשלמשל : $Q(X)=q_0+q_1X+\ldots+q_mX^m+X^{m+1}$,

כלומר: $q_0v+q_1f(v)+\ldots+q_mf^m(v)+f^{m+1}(v)=0$.

לכן $k+1\geq m+1$, במילים אחרות, ישנה תלות לינארית בין $\left\{v,f(v),f^2(v),\ldots f^{m+1}(v)\right\}$.

קיבלנו למעשה כי $\deg Q\geq\deg P$. בעצם, ניתן להוכיח שP מחלק את Q. (הוכחה בתרגול או בהמשך).

3.2 **תת מרחב ציקלי.** יהי V מרחב וקטורי, ויהיו $f:V\to V$ אופרטור. יהי $0\neq v\in V$. אם U תת מ"ו f-אינוואריאנטי כך ש$v\in U$, אזי גם $f(v),f^2(v),\ldots f^n(v)\in U$. כלומר, כל המסלול של v נמצא בU.

הגדרה

תת מרחב הציקלי של v יחסית לf הוא :

$Z(f,v)=\text{span}\left(v,f(v),f^2,\ldots,f^n(v)\right)=\{u_0v+u_1f(v)+\ldots u_nf^n(v)\mid\forall n\in\mathbb{N},\forall u_0,\ldots,u_n\in\mathbb{F}\}$.

נשים לב כי צירוף לינארי של וקטורים הוא תמיד סופי!

טענה

$Z(f,v)$ הינו f-אינווריאנטי.

הוכחה

יהי $u\in Z(f,v)$. מההגדרה קיימים $n\in\mathbb{N},u_0,\ldots,u_n\in\mathbb{F}$ כך ש: $u=u_0v+u_1f(v)+\ldots u_nf^n(v)$.

כלומר, מתקבל:

$$f(u)=f(u_0v+u_1f(v)+\ldots u_nf^n(v))=u_0f(v)+u_1f^2(v)+\ldots u_nf^{n+1}(v)$$

אך, מההגדרה, $f(v),\ldots f^n(v)\in Z(f,v)$.

סך הכל קיבלנו צירוף לינארי של וקטורים השייכים ל$Z(f,v)$, דהיינו $f(u)\in Z(f,v)$. ובכך הוכחנו למעשה כי $Z(f,v)$ הינו f-אינווריאנטי.

הגדרנו את $Z(f,v)$ להיות $\text{span}\left(v,f(v),f^2,\ldots,f^n(v)\right)$. מדובר בקבוצה פורשת של $Z(f,v)$, וכעת אם נניח ש$\dim V<\infty$ נרצה למצוא בסיס ל$Z(f,v)$.

טענה

אם k הוא האינדקס המקסימלי כך ש$\left\{v, f\left(v\right), f^2\left(v\right), \dots f^k\left(v\right)\right\}$ הינו בת"ל, אזי קבוצה זו הינה בסיס ל$Z\left(f,v\right)$.

(משמעות טענה זו הינה שקבוצה זו הינה גם **פורשת**).

הוכחה

כאמור, מספיק להוכיח שהקבוצה זו הינה **פורשת**, שהרי אנו יודעים שהיא בת"ל. כמו כן, נבחין כי מספיק להוכיח שלכל $k<m$, מתקבל כי $f^m\left(v\right)\in \text{span}\left(v, f\left(v\right), f^2\left(v\right), \dots f^k\left(v\right)\right)$.

נוכיח זאת באמצעות אינדוקציה על m.

<u>בסיס האינדוקציה:</u>

אם $m=k+1$, ראינו כבר קודם לכן כי $a_0v+a_1f\left(v\right)+\ldots+a_kf^k\left(v\right)+f^{k+1}\left(v\right)=0$ תלויה לינארית, וממילא מדובר בצירוף לינארי של האיברים הקודמים, כלומר: $f^{k+1}\left(v\right)=-\left(a_0v+a_1f\left(v\right)+\ldots+a_kf^k\left(v\right)\right)$ וממילא, $f^{k+1}\left(v\right)\in \text{span}\left(v, f\left(v\right), f^2\left(v\right), \dots f^k\left(v\right)\right)$.

<u>צעד האינדוקציה</u>

נניח שהטענה נכונה עבור m, ונוכיח עבור $m+1$. משמעות ההנחה הינה ש: $f^m\left(v\right)=u_0v+\ldots+u_kf^k\left(v\right)$ עבור $u_0,\dots u_k$ כלשהם. כעת נמשיך ונתבונן ב$f^{m+1}\left(v\right)$:

$$f^{m+1}\left(v\right)=f\left(f^m\left(v\right)\right)=f\left(u_0v+\ldots+u_kf^k\left(v\right)\right)=u_0f\left(v\right)+\ldots+u_kf^{k+1}\left(v\right)$$

אנו יודעים מהבסיס כי $f^{k+1}\left(v\right)\in \text{span}\left(v, f\left(v\right), f^2\left(v\right), \dots f^k\left(v\right)\right)$ ולכן ממילא קיבלנו כי $f^{m+1}\left(v\right)\in \text{span}\left(v, f\left(v\right), f^2\left(v\right), \dots f^k\left(v\right)\right)$, כנדרש.

3.3 **מטריצה של אופרטור יחסית לבסיס מתאים לתת מרחב ציקלי.** ראינו כבר שאם קיים $\mathcal{B}$ בסיס לV שמרחיב את $\mathcal{B}_Z\left(f,v\right)=\left(v, f\left(v\right), f^2\left(v\right), \dots f^k\left(v\right)\right)$ אז אנו יודעים שהמטריצה הינה:

$$[f]_{\mathcal{B}}=\left[\begin{array}{ccc|c} \left[f|_{Z(f,v)}\right] & \mathcal{B}_{Z(f,v)} & & ? \\ \hline 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & ? \\ 0 & \dots & 0 & \end{array}\right]$$

.

נחשב כעת את המטריצה $\left[f|_{Z(f,v)}\right]\ \mathcal{B}_{Z(f,v)}$.

נשים לב כי $\mathcal{B}_Z\left(f,v\right)=\left(v, f\left(v\right), f^2\left(v\right), \dots f^k\left(v\right)\right)$.

כעת נסמן $b_0 = v, \ldots, f^k(v) = b_k$.

נבחין כי: $f(b_0) = f(v) = b_1$ וגם $f(b_1) = f(f(v)) = f(b_1)$.

כך נוכל להמשיך ולומר למעשה כי $b_k = f^k(v) = f\left(f^{k\bar{-}1}(v)\right) = f(b_{k-1})$.

וכמו כן:

$a_0 b_0 - a_1 b_1 - \ldots - a_k b_k = -a_0 v - a_1 f(v) - \ldots - a_k f^k(v) = f^{k+1}(v) = f\left(f^{\bar{k}}(v)\right) = f(b_{k-1})$.

כלומר,למעשה:

$$[f(b_0)]_{\mathcal{B}_{Z(f,v)}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, [f(b_1)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{Z}(f,v)}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \ldots, [f(b_{k-1})]_{\mathcal{B}_{\mathcal{Z}(f,v)}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, [f(b_k)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{Z}(f,v)}} = \begin{bmatrix} -a_0 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_k \end{bmatrix}$$

כלומר, בסופו של דבר קיבלנו:

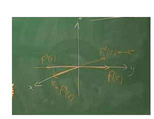
$$\left[f|_{Z(f,v)}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{k-1} \end{bmatrix} \in M_k(\mathbb{F})$$

הגדרה:

מטריצה זו נקראת המטריצה המלווה של $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_k X^k + X^{k+1}$.

דוגמה

ניקח $V = \mathbb{R}^3$ וf יהיה הסיבוב ב$\frac{\pi}{2}$ סביב ציר הZ.



נוכל להבחין כי רק $(v, f(v))$ בת"ל. וכבר $\left(v, f(v), f^2(v)\right)$ ת"ל כי $f^2(v) = -v$.

דהיינו, באנלוגיה לביטוי שפיתחנו בשאלה הקודמת: $v + 0 \cdot f(v) + f^2(v) = 0$. ולכן $\min_v^f(X) = P(X) = 1 + X^2$.

אם כן, $Z(f, v) = \text{span}(v, f(v))$, כלומר מישור xy.

כעת נמצא את המטריצה:

$$\left[f|_{Z(f,v)}\right]_{\mathcal{B}_{Z(f,v)}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

אם נשלים את $\mathcal{B}_{Z(f,v)}$ לבסיס $\mathcal{B} = (v, f(v), e_3)$, נקבל את המטריצה:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

נבחין כי $f(e_3) = e_3 \Rightarrow [f(e_3)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

<u>הרצאה מס' 6</u>

4. וקטורים עצמיים ומרחבים עצמיים

4.1 תת מרחב f-אינווריאנטי ממימד 1. יהי $f : V \to V$ אופרטור. ויהי W תת מ"ו f-אינווריאנטי, כך ש$\dim(W) = 1$, אזי $W = \text{span}(v)$ עם $v \neq 0$. כעת בהכרח מתקיים כי $f(v) \in W$ ולכן $f(v) = \lambda \cdot v$ עבור $\lambda \in \mathbb{F}$ כלשהוא.

הגדרה

יהי $f : V \to V$ אופרטור. סקלר $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא **ערך עצמי** של f אם קיים $v \in V$ כך ש $f(v) = \lambda \cdot v$. במקרה זה, v נקרא **וקטור עצמי** השייך ל**ערך העצמי** λ.

הערה

אם λ ע"ע של f עם ע"ע v, אזי $\text{span}(v)$ הוא f-אינווריאנטי (ממימד 1).

הגדרה

יהי λ ע"ע של f. אזי המרחב העצמי השייך לλ הינו: $V_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$. (כלומר, מדובר בכל הוקטורים העצמיים השייכים לλ וגם וקטור האפס).

הערה

אם $\lambda = 0$ אזי $V_\lambda = V_0 = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} = \ker f$.

אם λ ע"ע של f, אז $\dim(\ker f) > 0$.

דוגמאות

(I) $V = \mathbb{R}^2$, ויהי f סיבוב ב$\mathbb{R}^2$ בזווית π $0 < \theta < \pi$.

אין לf תתי מ"ו f-אינווריאנטים ממימד 1 ולכן אין ע"ע.

(II) $V = \mathbb{R}^3$, ויהי f סיבוב בזווית π $0 < \theta <$ סביב ציר הZ.

e_3 הוא ו"ע השייך לע"ע $\lambda = 1$. המרחב העצמי הינו: $\operatorname{span}(e_3) = V_\lambda$

(III) יהי $f : V \to V$ כך ש$v \to \lambda v$. פיתוח זה נקרא הומוטטיה. אז כל $v \neq 0$ הוא ו"ע, וλ הוא הערך העצמי היחיד. המרחב העצמי $V = V_\lambda$.

(IV) $V = C^\infty(\mathbb{R})$, ויהי $D : V \to V$ כך ש$\varphi \to \varphi'$. הערכים העצמיים האפשריים הינם: הו"ע הינו $\varphi(x) = e^x$ כיוון ש$D(\varphi(x)) = e^x$. ולמעשה גם $D\left(e^{\lambda x + \alpha}\right) = \lambda e^{\lambda x}$, ולכן כל $\lambda \in \mathbb{R}$ הינו ע"ע של D.

4.2 **ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של מטריצות.** יהי מ"ו V כך ש$\dim V < \infty$ ויהי $f : V \to V$ אופרטור. יהי $\mathcal{B}$ בסיס לV כך $A = [f]_\mathcal{B}$. אם $V \ni v \neq 0$ וקטור עצמי של f השייך לע"ע λ, כלומר $f(v) = \lambda v$, אזי $A[v]_\mathcal{B} = [f(v)]_\mathcal{B} = [\lambda v]_\mathcal{B} = \lambda [v]_\mathcal{B}$.

דבר זה מהווה מוטיבציה להגדרה הבאה.

הגדרה

יהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע של A. אם קיים $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n_{\text{coll}}$ $\neq 0$ כך ש$A\bar{x} = \lambda \bar{x}$ אזי $\bar{x}$ הוא ו"ע של A השייך לλ.

בעצם אם λ ע"ע של אופרטור f, אז הוא ע"ע של כל מטריצה שמייצגת את f.

4.4 **אפיון של ערכים עצמיים.** יהי $\lambda \in \mathbb{F}$, ויהי $f : V \to V$ אופרטור. λ ייקרא ע"ע של f. אם ורק אם קיים $V \ni v \neq 0$ כך ש$f(v) = \lambda v$.

נשים לב שמתקיים מהמשוואה האחרונה:

$$f(v)=\lambda v \Rightarrow f(v)-\lambda v=0 \Rightarrow f(v)-\lambda\cdot Id(v)=0$$

$$\Rightarrow (f-\lambda\cdot Id)(v)=0 \Rightarrow v\in\ker(f-\lambda\cdot Id)$$

מכאן ניתן להגיע למסקנה כי:

$$V_\lambda=\{v\in V \mid f(v)=\lambda v\}=\ker(f-\lambda\cdot Id)$$

בפרט הוא תת מ"ו של V.

<u>הרצאה מס' 7</u>

מסקנה:

λ ע"ע של f אם ורק אם $\ker(f-\lambda\cdot Id)\neq\{0\}$.

,

טענה

יהי V מ"ו כך ש$\dim V<\infty$ ויהי $f:V\to V$ אופרטור. ו$\lambda\in\mathbb{F}$. אזי התנאים הבאים שקולים:

$\lambda(I)$ ע"ע של f.

(II) $\ker(f-\lambda\cdot Id)\neq\{0\}$. כלומר, איננו טריוואלי)

(III) $\operatorname{Im}(f-\lambda\cdot Id)$ איננו כל V.

(VI) $(f-\lambda\cdot Id)$ איננו הפיך.

הגרסא המטריציאלית של הטענה

תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$, אזי התנאים הבאים שקולים:

(I) λ ע"ע של A.

(II) $\ker(f_A-\lambda\cdot Id)\neq\{0\}$ כש $f_A:\mathbb{F}^n_{\text{coll}}\to\mathbb{F}^n_{\text{coll}}$ האופרטור שמקיים: $A\bar{x}\leftarrow \begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\bar{x}$.

(III) $\operatorname{Im}(f-\lambda\cdot Id)$ איננה כל $\mathbb{F}^n_{\text{coll}}$.

(VI) $(\lambda I - A)$ איננו מטריצה הפיכה.

(V) $\det(\lambda I - A) = 0$.

4.5 **תתי מרחבים עצמיים.** נזכיר כי הוכחנו קודם לכן ש $V_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} = \ker(f - \lambda \cdot Id)$.

בפרט מדובר בתת מרחב וקטורי.

בגלל שλ ע"ע, קיים $0 \neq v \in V_\lambda$. כלומר, $\dim(V_\lambda) \geq 1$.

דוגמאות

$V = \mathbb{R}^3$ כך שf הטלה על מישור xy במקביל לציר הz. (הטלה על $U = \text{span}(e_1, e_2)$ במקביל ל$W = \text{span}(e_3)$) .

הע"ע העצמיים הם $\{1, 0\}$, כי $f(e_3) = 0$ ו$\ker(f) = V_0 = \text{span}(e_3)$. וגם $f(e_1) = e_1$. ולכן $V_1 = \text{span}(e_1, e_2)$.

הגדרה

אם λ ע"ע של f, **הריבוי הגיאומטרי** של λ הוא $\dim(V_\lambda)$. לפעמים מסמנים זאת ב$m\lambda^{\text{geom}}$.

הערה

אם λ ע"ע של f, אזי V_λ הוא תת מ"ו f -אינווריאנטי.

לכן, אם $\mathcal{B}_\lambda$ בסיס לV_λ, נרחיב אותו לבסיס ל $\mathcal{B}$ של V ואז נקבל:

$$[f]_\mathcal{B} = \left[\begin{array}{ccc|c} [f|_{V_\lambda}] & \mathcal{B}_\lambda & & ? \\ \hline 0 & \ldots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & ? \\ 0 & \ldots & 0 & \end{array}\right]$$

אם כך, מהי $[f|_{V_\lambda}]_{\mathcal{B}_\lambda}$? נשים לב כי $\mathcal{B}_\lambda = (b_1, \ldots, b_k)$, לכל i בהגדרה של V_λ , מתקיים כי $f(b_i) = \lambda b_i$. זאת אומרת, $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda \\ \vdots \end{bmatrix} = [f(b_i)]_{\mathcal{B}_\lambda}$ כשהמקום ששונה מאפס הוא המקום ה-i. דבר זה גורר כי:

$$[f|_{V_\lambda}]_{B_\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

5. סכום ישר

הגדרה

יהי V מ"ו ויהיו $U_1,\ldots,U_k$ תתי מרחב של V. אם $U = U_1 + \ldots + U_k$ אזי נאמר שU הוא **סכום ישר של** $U_1,\ldots,U_k$ אם לכל $u_1 \in U_1,\ldots,u_k \in U_k$ מתקיים: $u_1 + \ldots + u_k = 0 \Leftrightarrow u_1 = \ldots = u_k = 0$.

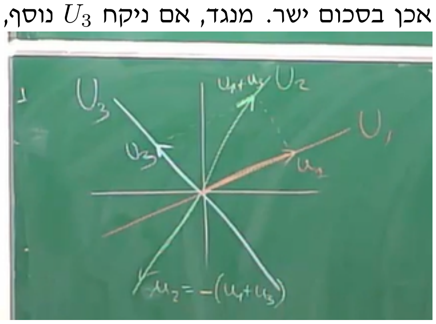
במקרה זה נסמן $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$. (אומרים גם "$U_1,\ldots,U_k$ בסכום ישר" או "$U_1,\ldots,U_k$ בת"ל)

תזכורת

$U = U_1 + \ldots + U_k = \{v \in V \mid v = v_1 + \ldots + v_k, v_i \in U_i\}$. למעשה, מדובר בתת המרחב הוקטורי הקטן ביותר שמכיל את כל $U_1 + \ldots + U_k$.

דוגמא

$V = \mathbb{R}^2$. ניקח $U_1 = \text{span}\,(v_1)\,, U_2 = \text{span}\,(v_2)\,, U_1 \cap U_2 = \{0\}$. אזי $U_1 + U_2 = V$. אם כך, U_1 וU_2 הם אכן בסכום ישר. מנגד, אם ניקח U_3 נוסף, ונראה שU_1, U_2, U_3 לא בסכום ישר.



בחרנו $u_1, u_2, u_3 \neq 0$, וקיבלנו למעשה כי $u_1 + u_2 + u_3 = u_1 - (u_1 + u_3) + u_3 = 0$ למרות שלא כולם שווים לאפס. לכן למעשה לא מדובר בסכום ישר, למרות ש$U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{0\}$. דהיינו, לא מדובר בתנאי מספיק על מנת להוכיח שמדובר בסכום ישר.

טענה

יהי V מ"ו כך ש$U_1, \ldots, U_k$ תתי מ"ו, עם $\dim U_i < \infty$ לכל i. אזי, התנאים הבאים שקולים:

(I) $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$.

(II) אם $\mathcal{B}_i = \left(b_1^i, \ldots, b_l^i\right)$ בסיס לU_i עבור כל $1 \leq i \leq k$, אזי נוכל להציב:

$\mathcal{B} = \left(b_1^1, \ldots, b_l^1, \ldots, b_1^k, \ldots, b_l^k\right)$ שהינו בסיס לU.

(III) $\dim\left(U\right) = \dim U_1 + \ldots + \dim U_k$.

תזכורת

$\dim\left(U_1 + \ldots + U_k\right) \leq \dim U_1 + \ldots + \dim U_k$.

הוכחה

$(I) \Rightarrow (II)$ על פי הנתון $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$.

נוכיח תחילה ש$\mathcal{B}$ פורש את U. יהי $u \in U$. כלומר $u = u_1 + \ldots + u_k$ כאשר $u_i \in U_i$ לכל $1 \leq i \leq k$. כעת נשים לב שנוכל לכתוב כל u_i כצירוף לינארי של וקטורי $\mathcal{B}_i$. כלומר, קיבלנו בסך הכל צירוף לינארי של וקטורי $\mathcal{B}$. כעת נוכיח ש $\mathcal{B}$ בת"ל. ניקח צירוף לינארי של $\mathcal{B}$ ששווה לאפס:

$$a_1^1 b_1^1 + \ldots + a_l^1 b_l^1 + \ldots + a_1^k b_1^k + \ldots + a_l^k b_l^k = 0$$

אם נחלק זאת לצירופים לינארים, נקבל כי כל u_i הוא צירוף לינארי של וקטורי $\mathcal{B}_i$, לכן $u_i \in U_i$. כאמור $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$, מה שאומר למעשה ש$u_1 = \ldots = u_k = 0$. דבר זה גורר כי $a_1^i = \ldots = a_l^i = 0$. לכן, כל המקדמים הינם אפסים, לכן בפרט $\mathcal{B}$ בת"ל, ולכן גם הינו בסיס.

$(II) \Rightarrow (III)$ נבחין כי מתקיים:

$$\dim U = |\mathcal{B}| = l_1 + \ldots + l_k = |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| + \ldots + |\mathcal{B}_k| = \dim U_1 + \ldots \dim U_k$$

<u>הרצאה מס' 8</u>

$(III) \Rightarrow (I)$ נניח בשלילה ש-(I) לא מתקיים ונוכיח ש-(III) לא מתקיים. הנחת השלילה אומרת שקיימים $u_1 \ldots u_k \in U_1 \ldots U_k$ שלא כולם אפסים, כך $u_1 + \ldots + u_k = 0$. נניח ש-$u_k \neq 0$, ונכתוב זאת בצורה שונה:

$$-u_k = u_1 + \ldots + u_{k-1}, u_1 \ldots u_{k-1} \in U_1 \ldots U_{k-1} = W$$

בסך הכל קיבלנו כי:

$$0 \neq -u_k \in W \cap U_k \Rightarrow 1 \leq \dim\left(W \cap U_k\right)$$

כעת נוכל להבחין כי מתקיים:

$$\dim\left(U\right) = \dim\left(U_1 + \ldots + U_{k-1} + U_k\right) = \dim\left(W + U_k\right)$$

$$= \dim\left(W\right) + \dim\left(U_k\right) - \dim\left(W \cap U_k\right)$$

$$< \dim\left(W\right) + \dim\left(U_k\right) \leq U_1 + \ldots + U_{k-1} + U_k$$

אם כך, קיבלנו בסך הכל ש $\dim\left(U\right) < \dim\left(U_1 + \ldots + U_{k-1} + U_k\right)$. כלומר (III) איננו מתקיים. לכן, בסך הכל קיבלנו כי $(I) \Rightarrow (III)$, כנדרש.

הערה

יהי $f : V \to V$ כך ש$\dim\left(V\right) < \infty$.

נניח ש-$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$, כך שלכל i, U_i הינו f אינווריאנטי.

ניקח בסיס $\mathcal{B}$ של V כמו ב(II) וננסה למצוא את $[f]_{\mathcal{B}}$.

נשים לב ש: $\left[f\left(b_j^1\right)\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \left[f\left(b_j^1\right)\right]_{\mathcal{B}_1} \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

ובאופן כללי נוכל לכתוב $\left[f\left(b_j^i\right)\right]_{\mathcal{B}}=\left[\begin{array}{c}0\\ \vdots\\ 0\\ \hline \left[f\left(b_j^i\right)\right]_{\mathcal{B}_i}\\ \hline 0\\ \vdots\\ 0\end{array}\right]$.

אם כך, המטריצה שווה בסך הכל:

$$[f]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}\left[f|_{U_1}\right]_{\mathcal{B}_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \left[f|_{U_2}\right]_{\mathcal{B}_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \left[f|_{U_k}\right]_{\mathcal{B}_k}\end{bmatrix}$$

מטריצה זאת נקראת מטריצה אלכסונית בבלוקים.

6. לכסון

6.1 **הקדמה.** נניח שיש לנו מטריצה בגודל $n\times n$. כמה אפסים יכולים להיות במקסימום? n^2. אם יש רק איברים באלכסון שאינם אפס, אזי כמה אפסים יש? לפחות n^2-n אפסים. אם יש פחות מ-n איברים שהם לא אפס, דבר זה אומר שהמטריצה לא הפיכה.

נבחין כי על מנת שמטריצה תהיה הפיכה, הדטרמיננטה שלה צריכה להיות אפס. מבחינה סטטיסטית, הסיכוי שנבחר דווקא מטריצה שהדטרמיננטה שלה שווה לאפס, נמוך, ולכן לכאורה ישנן יותר מטריצות הפיכות ממטריצות שאינן הפיכות.

כעת נרצה לבחון מתי נוכל למצוא בסיס למטריצות שרק האלכסון שלהם שונה מאפס.

הגדרה

$A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ היא **אלכסונית** אם כל האיברים שלא על האלכסון הם 0. כלומר:

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \alpha_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & & & \\ 0 & & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}=\text{diag}\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n\right)$$

כאשר $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}$.

הערה

נניח ש$f:V\to V$ אופרטור, כש$\dim\left(V\right)=n$, ושקיים בסיס $\mathcal{B}=\left(b_1,\ldots,b_n\right)$ כך ש:

$$[f]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \alpha_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & & & \\ 0 & & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}$$

אנו יודעים כי $[f\left(b_1\right)]_{\mathcal{B}}=[f]_{\mathcal{B}}\cdot[b_i]_{\mathcal{B}}$. כלומר, מדובר בסך הכל ב:

$$\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \alpha_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & & & \\ 0 & & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \alpha_i\\ 0\end{bmatrix}=[\alpha_ib_i]_{\mathcal{B}}$$

לכן מתקיים כי $f\left(b_i\right)=\alpha_ib_i$. קיבלנו בסך הכל כי b_i הינו ו"ע של f השייך לע"ע α_i.

הגדרה

יהי $f:V\to V$ אופרטור כך ש$\dim\left(V\right)<\infty$. נאמר ש-$f$ **ניתן ללכסון** אם קיים בסיס $\mathcal{B}$ של f כך ש$[f]_{\mathcal{B}}$ היא אלכסונית.

טענה

f ניתן ללכסון, **אם ורק אם** קיים **בסיס** לV של **וקטורים עצמיים** של f.

הוכחה

$\Leftarrow$ ראינו קודם לכן.

$\Rightarrow$ נניח ש $\mathcal{B}=(b_1,\ldots,b_n)$ בסיס לV של וקטורים עצמיים של f. במילים אחרות, לכל i קיים $\lambda_i\in\mathbb{F}$ כך ש$f(b_i)=\lambda_i b_i$.

כעת, אם נתבונן ב$[f(b_i)]_{\mathcal{B}}$ נקבל:

$$[\lambda_i b_i]_{\mathcal{B}}=[f(b_i)]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \lambda_i\\ 0\end{bmatrix}$$

כלומר, קיבלנו בסך הכל:

$$[f]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & & & \\ 0 & & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

דהיינו, מדובר במטריצה אלכסונית. כלומר, f ניתן ללכסון, כנדרש.

דוגמה

ניקח את $V=\mathbb{R}^2$ וf המוגדר על ידי $f:\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}x\\ 0\end{bmatrix}$. נבחין כי $f(e_1)=e_1$. וגם $f(e_2)=0\cdot e_2$. כלומר, יש בסיס של ו"ע עצמיים של f, אך נשים לב שלא כל וקטור הוא וקטור עצמי. (למשל, $f\left(\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$.)

על מנת לפתור זאת, נשים לב כי

$$f(v)=f(e_1+e_2)=f(e_1)+f(e_2)=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2$$

לכסון של מטריצות

יהי $f: V \to V$ כך ש $A = [f]_{\mathcal{B}}$ לבסיס $\mathcal{B}$ (כשמדובר במטריצה לא אלכסונית). נרצה למצוא בסיס $\mathcal{D}$ כך ש$[f]_{\mathcal{D}}$ תהיה אלכסונית.

ניזכר שקיימת מטריצה $M \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש$[f]_{\mathcal{D}} = MAM^{-1}$.

כלומר, שאלת הלכסון של f הופכת לשאלה האם A דומה למטריצה אלכסונית.

הגדרה

תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה. A **לכסינה** אם היא **דומה** למטריצה אלכסונית.

6.4 **תנאי מספיק ללכסון של אופרטור. טענה**

יהי $f: V \to V$ אופרטור. אם $v_1, \ldots, v_m$ ו"ע של f השייכים לע"ע שונים זה מזה, אזי $v_1, \ldots, v_m$ בת"ל.

הוכחה

נתון לנו אופרטור $f: V \to V$.

נוכיח את הטענה באינדוקציה על m.

<u>בסיס האינדוקציה</u>

$m = 1$: v_1 הינו ו"ע ולכן $v_1 \neq 0$. כלומר, $\{v_1\}$ בת"ל, כנדרש.

<u>צעד האינדוקציה</u>

נניח ש$v_1, \ldots, v_n$ בת"ל (v_i ו"ע השייך לλ_i). נוסיף v_m השייך לλ_m, כך ש $\lambda_i \neq \lambda_i$ עבור $i \neq j$.

נניח בשלילה שאינם בת"ל, כלומר $v_m \in \text{span}(v_1, \ldots, v_n)$ (אנו יודעים ש$(v_1, \ldots, v_n)$ בת"ל מהנחת האינדוקציה).

כעת, נקבל כי:

$$v_m = a_1 v_1 + \ldots + a_{m-1} v_{m-1}$$

$$f(v_m) = f(a_1 v_1 + \ldots + a_{m-1} v_{m-1})$$

$$= a_1 f(v_1) + \ldots + a_{m-1} f(v_{m-1})$$

$$= a_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + a_{m-1} \lambda_{m-1} v_{m-1} = \lambda_m v_m$$

אך מצד שני נקבל:

$$\lambda_m v_m = \lambda_m a_1 v_1 + \ldots + \lambda_m a_{m-1} v_{m-1}$$

נחסר בין שתי המשוואת ונקבל:

$$0 = a_1 \left(\lambda_1 - \lambda_m\right) v_1 + \ldots + a_{m-1} \left(\lambda_{m-1} - \lambda_m\right) v_{m-1}$$

מהנחת האינדוקציה, $v_1, \ldots, v_{m-1}$ בת"ל, ולכן:

$$a_1 \left(\lambda_1 - \lambda_m\right) = \ldots = a_{m-1} \left(\lambda_{m-1} - \lambda_m\right) = 0$$

אך אנו יודעים שהערכים העצמיים שונים מאפס, ולכן $a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$. כלומר $v_m = 0$, אך מדובר בסתירה, כי v_m ו"ע.

מסקנה (I)

יהי $f : V \to V$ אופרטור כך ש$\dim\left(V\right) = n$, אם יש לf n ע"ע שונים זה מזה, אזי f ניתן ללכסון.

הוכחת מסקנה (I)

ניקח $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ של f כך ש $\lambda_i \neq \lambda_i$ עבור $j \neq i$. ולכל i ניקח v_i ו"ע המתאים לλ_i. לפי הטענה, $v_1, \ldots, v_n$ בת"ל, ולכן הם בסיס. כלומר f ניתן ללכסון.

מסקנה (II)

יהי $f : V \to V$ אופרטור כך ש$\dim\left(V\right) = n$, אזי יש לf לכל היותר n ע"ע.

הערה

מסקנה (I) נותנת תנאי מספיק אך לא הכרחי. לדוגמה, אם ניקח את $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדר על ידי $f\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2x\\2y\end{bmatrix}$, נקבל כי $[f]_{(e_1,e_2)}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$. כלומר, f ניתן ללכסון אך יש לו רק ע"ע אחד ($\lambda=2$).

6.5 סכום ישר של מרחבים עצמיים. טענה

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי. אם $\lambda_1\ldots\lambda_n$ ע"ע שונים של $f:V\to V$ שהינו אופרטור, אזי $V_{\lambda_1}\ldots V_{\lambda_n}$ הם **בסכום ישר**.

הוכחה

יהיו $u_1,\ldots,u_n\in V_{\lambda_1}\ldots V_{\lambda_n}$ בהתאמה, כך ש$u_1+\ldots+u_n=0$.

אם נניח בשלילה שלא כולם אפסים, נקבל סכום של ו"ע השייכים לע"ע שונים, שהוא אפס. ומדובר בסתירה להטענה שהבאנו קודם לכן. לכן בהכרח כל הוקטורים הינם אפסים.

טענה

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי, ויהי $f:V\to V$. אם $\lambda_1\ldots\lambda_n$ הינם כל הע"ע העצמיים של f, אזי התנאים הבאים שקולים:

(I) f ניתן ללכסון.

(II) $V=V_{\lambda_1}\oplus\ldots\oplus V_{\lambda_n}$.

(III) $\dim(v)=\dim V_{\lambda_1}+\ldots+\dim V_{\lambda_n}$.

הוכחה

$(II)\Rightarrow(III)$ מגיע ישירות מהטענה על תנאים שקולים לסכום ישר.

$(II)\Rightarrow(I)$ ניקח $\mathcal{B}_i$ בסיס לV_{λ_i}. אנו יודעים כי כי $\mathcal{B}=(\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_n)$ בסיס לV. מאידך, נשים לב שכל $\mathcal{B}_i$ מורכב מוקטורים עצמיים. לכן $\mathcal{B}$ הינו בסיס של ו"ע. אם כך, דבר זה גורר אופן ישיר כי f ניתן ללכסון.

$(II)\Rightarrow(I)$ נניח שטענה (II) איננה נכונה. כלומר, $V_{\lambda_1}\oplus\ldots\oplus V_{\lambda_n}$ הינו תת מ"ו ממש של V. לכל משפחה $u_1,\ldots u_n$ של ו"ע, $\operatorname{span}(u_1,\ldots u_n)\in V_{\lambda_1}\oplus\ldots\oplus V_{\lambda_n}\subset V$. אם כך, אין ל$V$ בסיס של ו"ע, ולכן טענה (I) איננה מתקיימת.

דוגמה

נתבונן ב$V=\mathbb{R}^3$ כשהאופרטור הינו השיקוף המקיים: $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \end{bmatrix}$. האם האופרטור ניתן ללכסון? מהם הע"ע והמרחבים העצמיים?

נבחין כי $\lambda_1=-1$. ובנוסף $V_{(-1)}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -z \end{bmatrix}$. כמו כן, $\lambda_2=1$, ובנוסף $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$. אפשר לשים לב שהממד הראשון הינו ממימד 1, והממד השני הינו ממימד 2 , ולכן f ניתן ללכסון. אם נסתכל ב$\mathcal{E}$ הבסיס הסטדנרטי, נקבל:

$$[f]_{\mathcal{E}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

7. הפולינום האופייני

7.1 **הגדרה.** תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$. מהם הע"ע של A? הוכחנו כי $\lambda\in\mathbb{F}$ הוא ע"ע של A אם ורק $\det(\lambda I-A)=0$.

הערה

הע"ע של A הם הפתרונות של המשוואה $\det(\lambda I-A)=0$.

דוגמה

ניקח $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. מהם הערכים של t המקיימים: $\det(tI-A)=0$?

נשים לב כי $tI-A=t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}-A=\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t-1 & -2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$

$$\det(tI-A)=\det\begin{bmatrix} t-1 & -2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}=(t-1)\cdot t-2=t^2-t-2=(t+1)(t-2)$$

לכן, $\det(tI-A)$ אם $t=-1$ או $t=2$.

הגדרה

תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. הפולינום האופיניי של A הוא $\chi_A(X) = \det(XI - A)$.

למשל, אם ניקח את המטריצה A:

$$\begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{bmatrix}$$

אזי XI:

$$\begin{bmatrix} X & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & X \end{bmatrix}$$

ולכן מתקיים, עבור $XI - A$:

$$X \cdot I - A = \begin{bmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{12} & X - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & X - a_{nn} \end{bmatrix}$$

זוהי למעשה מטריצה של פולינום. כלומר, $XI - A \in M_n(\mathbb{F}[X])$.

הערה (I)

מחשבים את הדטרמינטה של מטריצה של פולינומים בדיוק כמו שמחשבים דטרמינטטה של מטריצה של סקלרים.

ההבדל היחיד שבסוף נקבל פולינום ולא סקלר.

ניתן להוכיח שאם $M_1, M_2 \in M_n(\mathbb{F}[X])$ אזי: $\det(M_1 M_2) = \det(M_1) \cdot \det(M_2)$

הערה (II)

תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. ניתן להוכיח כי $\deg \chi_A(X) = n$ ו-χ_A מתוקן. כלומר, למעשה מתקיים:

$$\chi_A(X) = X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \ldots + \alpha_0$$

טענה

$\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ע"ע של A אם ורק אם הוא שורש של χ_A.

הוכחה

ראינו בעבר כי $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של מטריצה, אם ורק אם $\det(\lambda I - A) = 0$. במילים אחרות, אם $\chi_A(\lambda) = 0$.

מסקנה

לA יש לכל היותר n ע"ע שונים.

הוכחה

$\deg \chi_A = n$ ולפולינום ממעלה n יש לכל היותר n שורשים.

אם מצאנו את הע"ע של A, על מנת למצוא ו"ע $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, השייך לλ ע"ע, צריך לפתור את $A\bar{x} = \lambda\bar{x} \Rightarrow (\lambda I - A)\bar{x} = 0$. ולמדנו לעשות זאת בלינארית 1.

דוגמה

ניקח את המטריצה הבאה: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. מתקיים: $\chi_A(X) = \det\left(\begin{bmatrix} X & -1 \\ 1 & X \end{bmatrix}\right) = X^2 + 1$. מהם הערכים העצמיים של A? שאלה זו תלויה בשדה. אם חושבים על $A \in M_n(\mathbb{R})$ אין ע"ע. אם חושבים על $A \in M_n(\mathbb{C})$ אזי הע"ע העצמיים שווים ל± 1.

הרצאה 10

7.2 פולינום אופייני לאופרטור. למה

אם $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ דומות, אזי $\chi_A(X) = \chi_B(X)$.

הוכחה

מכך שA וB דומות, עולה כי קיימת מטריצה $M \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש$B = MAM^{-1}$.

כעת, נחשב את את הפולינום האופייני של B:

$$\chi_B(X) = \det(XI - B) = \det\left(XI - MAM^{-1}\right)$$

כעת נטען כי $XI = M(XI)M^{-1}$ שהרי $M(XI)M^{-1} = XMM^{-1} = XI$.

וממילא מתקיים כי:

$$\det\left(XI - MAM^{-1}\right) = \det\left(M(XI)M^{-1} - MAM^{-1}\right) = \det\left(M(XI - A)M^{-1}\right) =$$
$$\det M \cdot \det(XI - A)\det\left(M^{-1}\right) = \det(XI - A) = \chi_A(X)$$

הגדרה

יהי $f : V \to V$ אופרטור, כך ש$\dim V < \infty$. נגדיר את הפולינום האופייני של f להיות $\chi_f(X) = \chi_{[f]_{\mathcal{B}}}(X)$,
כאשר $\mathcal{B}$ הינו בסיס כלשהוא של V.

דוגמה

$V = \mathbb{R}^2$ וf הינו סיבוב בזווית של $\frac{\pi}{2}$. נרצה לחשב את הפולינום האופייני של האופרטור. ניקח את המטריצה לפי הבסיס הסטנדרטי, כלומר: $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, ולכן הפולינו האופייני הינו:

$$\chi_f(X) = \det\left(XI - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} X & 1 \\ =1 & X \end{bmatrix} = X^2 + 1$$

אין לפולינם זה שורשים ב$\mathbb{R}$ ודבר זה מתחבר לדברים שאמרנו קודם, כי אין לפולינום זה ערכים עצמיים.

טענה

$\lambda \in \mathbb{F}$ ע״ע של f אם ורק אם מתקיים $\chi_f(f) = 0$.

7.3 גורמים של הפולינום האופייני. טענה

יהי $f : V \to V$ כאשר $\dim V < \infty$. ויהי U תת מ"ו f-אינווריאנטי. הוכחנו כי הצמצום $f|_U : U \to U$ הינו אופרטור. אזי $\chi_{f|_U}$ מחלק את χ_f.

למה

בהינתן מטריצה שניתן לחלקה לבלוקים, מתקיים:

$$\det \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A} & B \\ \hline 0 & 0 & \multirow{2}{*}{C} \\ 0 & 0 & \end{array}\right] = \det A \det C$$

הוכחה

באינדוקציה על k, הגודל של המטריצה שאינה אפסים.

<u>בסיס האינדוקציה</u>

אם $k = 1$ אזי מתקיים:

$$\det \left[\begin{array}{c|c} a & B \\ \hline 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{array}\right] = a \cdot \det C$$

כאשר נחשב לפי עמודה ראשונה.

<u>צעד האינדוקציה</u>

נניח שהטענה נכונה עבור $k - 1$, ונוכיח עבור k:

$$\det\left[\begin{array}{cc|c} a_1^1 & \overset{k}{\to} & \\ \vdots & & B \\ a_1^k & & \\ \hline 0 & 0 & \\ 0 & 0 & C \end{array}\right] = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\,a_1^i\cdot\det\left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\hat{A}_1^i} & B \\ \hline 0 & 0 & \\ 0 & 0 & C \end{array}\right]$$

כאשר $\hat{A}_1^i$ הינו המטריצה A אחרי שמחקנו את שורה מספר i ועמודה מספר 1. ולכן נקבל בסך הכל, מהנחת המטריצה:

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\,a_1^i\det\hat{A}_1^i\det C=\det C\left(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\,a_1^i\det\hat{A}_1^i\right)=\det C\det A$$

הוכחת הטענה

ניקח $\mathcal{B}$ בסיס ל-U, נרחיב אותו לבסיס $\mathcal{B}$, שהינו בסיס של V. הוכחנו בעבר שהמטריצה המתקבלת הינה:

$$[f]_{\mathcal{B}}=\det=\left[\begin{array}{c|c} [f|_U]_{\mathcal{B}_V} & A \\ \hline 0_{(n-k)\times k} & B \end{array}\right]$$

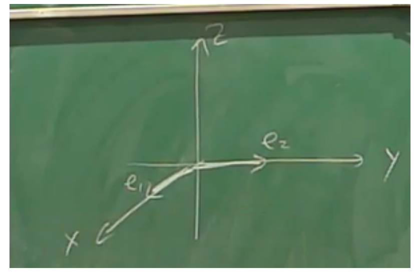
ולכן מתקיים:

$$\chi_f(X)=\det\left(XI-[f]_{\mathcal{B}}\right)=\det\left(\left[\begin{array}{c|c} X\cdot I_k-[f|_U]_{B_V} & -A \\ \hline 0_{(n-k)\times k} & X\cdot I_{n-k}-B \end{array}\right]\right)=$$
$$\det\left(XI-[f|_U]_{\mathcal{B}}\right)\cdot\det\left(XI-C\right)$$

כלומר, למעשה קיבלנו כי $\det\left(XI-[f|_U]_{\mathcal{B}}\right)=\chi_{f|_U}(X)$ מחלק את χ_f, הפולינום האופייני של f, כנדרש.

דוגמה

$V=\mathbb{R}^3$ ו-f הינו סיבוב ב-$\frac{\pi}{2}$ סביב ציר ה-Z, כאשר U הוא המישור xy.



נשים לב כי $f(e_1)=e_2, f(e_2)-e_1, f(e_3)=e^3$ ולכן למעשה מתקיים:

$$[f]_{\mathcal{E}}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\chi_f(X)=\det\left(XI-[f]_{\mathcal{E}}\right)=$$

$$\det\left[\begin{array}{cc|c}X&1&0\\-1&X&0\\\hline 0&0&X=1\end{array}\right]=\det\left(\begin{bmatrix}X&1\\-1&X\end{bmatrix}\right)\det\left([X-1]\right)=$$

$$=\left(X^2+1\right)(X-1)$$

כעת, אם ניקח את U בתור מישור xy אזי, $f|_U$ הוא סיבוב בזווית $\frac{\pi}{2}$. ראינו שהפולינום האופייני של $f|_U$ הוא $\left(X^2+1\right)$. למעשה, אם נשים לב נוכל להסתכל ולהבחין שבמטריצה המקורית למעשה מתקיים:

$$[f]_{\mathcal{E}}=\left[\begin{array}{cc|c}0&-1&0\\1&0&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right]$$

כאשר הבלוק השמאלי העליון הוא למעשה $f|_U$.

מקרים פרטיים של הטענה

(I) אם $U=\operatorname{span}(v)$, כאשר v הוא ו"ע עצמי של f השייך ל-λ. אם ניקח בסיס $\mathcal{B}_U=\{v\}$, אזי $\left[f|_{\operatorname{span}(v)}\right]_{\mathcal{B}_U}=$ $[\lambda]$. ולכן $\chi_{f|\operatorname{span}(v)}=\det\left(X[1]-[\lambda]\right)=X-\lambda$.

כלומר, אם λ ע"ע של f, אזי $(X-\lambda)$ מחלק את χ_f.

(II) אם $U=V_\lambda$ אזי לכל בסיס $\mathcal{B}$ של V_λ: $[f|_{V_\lambda}]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}\lambda & & 0\\ 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & 0 & \lambda\end{bmatrix}$ ולכן

$$\chi_{f|_{V_\lambda}}=\det\begin{bmatrix}X-\lambda & & 0\\ 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & 0 & X-\lambda\end{bmatrix}=(X-\lambda)^{\dim V_\lambda}=(X-\lambda)^{V_\lambda^{\text{geom}}}$$

כלומר,אם $\lambda\in\mathbb{F}$ ע"ע של f, אזי $(X-\lambda)^{V_\lambda^{\text{geom}}}$ מחלק את χ_f.

(III) אם $U=Z(f,v)$. אם קיים k כך ש $\mathcal{B}=\left\{v,f(v),\ldots,f^k(v)\right\}$ בסיס ל$Z(f,v)$ אז ראינו כי:

$$\left[f|_{\mathcal{Z}(f,v)}\right]\mathcal{B}_{\mathcal{Z}(f,v)}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&-a_0\\1&0&0&0&-a_1\\0&1&0&0&-a_2\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-a_{k-1}\end{bmatrix}\in M_k(\mathbb{F})$$

למה

$$\det\begin{bmatrix}X&0&0&0&a_0\\-1&X&0&0&a_1\\0&-1&X&0&a_2\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&-1&X+a_{k-1}\end{bmatrix}\in M_k(\mathbb{F})=a_0+a_1X+\ldots+a_kX^k+a_{k+1}X^{k+1}$$

הוכחה

באינדוקציה על k.

<u>בסיס האינדוקציה</u>

$k=0$ זו למעשה המטריצה: $M_0=[X+a_0]$ ולכן $\det M_0=a_0+X$.

<u>צעד האינדוקציה</u>

נניח שהטענה נכונה עבור $k-1$ ונוכיח עבור k:

$$\det\begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 & a_0 \\ \hline -1 & X & & 0 & a_i \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & -1 & X+a_k \end{bmatrix} = X\det\begin{bmatrix} X & & 0 & a_i \\ 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & -1 & X+a_k \end{bmatrix} + (-1)^{1+(k+1)}\cdot a_0\cdot\begin{bmatrix} -1 & X & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\overset{\text{inductaion}}{=} X\left(a_1 + a_2X + a_kX^{k-1} + a_{k+1}X^k\right) + (-1)^{2k+2}a_0 =$$

$$= a_0 + a_1X + \ldots + a_kX^k + a_{k+1}X^{k+1}$$

ולכן, מכך עולה כי $\chi_{f|z(f,v)} = \min_v^f$.

מסקנה

בהינתן $f : V \to V$ אופרטור כאשר $\dim V < \infty$ לכל $0 \neq v \in V$, מתקיים כי $\min_v^f$ מחלק את χ_f (כלומר, קיים $Q(X) \in \mathbb{F}[X]$ כך שמתקיים: $\chi_f(X) = \min_v^f(X)\cdot Q(X)$.

הערה

ניזכר כי $\deg\chi_f = \dim V$. ולפי הטענה דלעיל, אם U הינו f-אינווריאנטי, אזי יש פולינום ממעלה $\dim U$ (הפולינום $\chi_{f|_U}$) שמחלק את χ_f.

בפרט אם χ_f אי פריק, אין לV תתי מ"ו f-אינווריאנטים לא טריוואלים.

<u>הרצאה 11</u>

7.5 משפט קיילי המילטון. משפט

יהי אופרטור $f : V \to V$ כך ש$\dim V < \infty$, אזי $\chi_f(f) = 0$ (אופרטור האפס).

הוכחה "לא נכונה"

יהי $A = [f]_{\mathcal{B}}$

$$\chi_A(X) = \det(XI - A) = \chi_A(A) = \det(AI - A) = \det(0) = 0$$

הוכחה זה שגויה!

הוכחה

יהי $v \in V$, ונוכיח כי $\chi_f(f)(v) = 0$.

ממה שכתבנו לעיל, אנו יודעים כי קיים $Q \in \mathbb{F}[X]$ כך ש $\chi_f(X) = \min_n^f(X) \cdot Q(X)$.

כעת, מהגדרת כפל פולינומים:

$$\chi_f(f) = \min{}_n^f(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ \min{}_n^f(f) \Rightarrow$$

$$\chi_f(f)(v) = Q(f)\left(\min{}_n^f(f)(v)\right) \stackrel{\text{def}}{=} Q(f)\left(\overbrace{0}^{\text{vector zero}}\right) = 0$$

משפט קיילי המילטון למטריצות

תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$, אזי $\chi_A(A) = \overbrace{0}^{\text{matrix}}$.

הוכחה

יהי $f_A : \mathbb{F}^n_{\text{coll}} \to \mathbb{F}^n_{\text{coll}}$ האופרטור המוגדר על ידי $\underline{x} A = f\begin{bmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{bmatrix}$. $f_A(\underline{x}) = $. כלומר, $A = [f]_{\mathcal{E}}$. אזי $\chi_{f_A} = \chi_A$.

כעת ממשפט קיילי המילטון לאופרטורים מתקיים מחד כי $\chi_A(f_A) = 0$ ומצד שני אם $P \in \mathbb{F}[X]$ אז ראינו כי $[P(f_A)]_{\mathcal{E}} = P(A)$. לכן החיבור של שני דברים אלו יקיים:

$$\chi_A(A) = [\chi_A(f_A)] = \overbrace{0}^{\text{matrix}}$$

7.6 ריבוי אלגברי

ראינו שאם λ ע"ע של f, אזי $(X-\lambda)^{m_\lambda^{\text{geom}}}$ מחלק את χ_f.

הגדרה

יהי $P \in \mathbb{F}[X]$ פולינום ויהי α שורש של P. מכיוון ש- $(X-\alpha)$ מחלקת את P,

אזי נגדיר את הריבוי האלגברי של α להיות $m^{\text{alg}} = \max\{m \mid (x-\alpha)^m \mid P\}$

הגדרה

לכל λ ע"ע של f, נגדיר את הריבוי האלגברי של λ להיות $m_\lambda^{\text{alg}} = \max\{m \mid (x-\lambda)^m \mid \chi_f\}$.

הערה

לכל λ ע"ע של f $m_\lambda^{\text{geom}} \le m_\lambda^{\text{alg}}$.

דוגמה

תהי מטריצה $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$. חשבו את הפולינום האופייני של A, הע"ע של A, הריבוי הגיאומטרי והריבוי האלגברי.

נבחין כי $\chi_f = \det A = \begin{bmatrix} X-2 & -1 & 0 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (X-2)^2(X-1)$

ולכן הע"ע העצמיים של A הם $1,2$. נחשב כעת את הריבוי האלגברי והריבוי הגיאומטרי.

נמצא את המרחב העצמי עבור $\lambda = 2$ ונקבל:

$$\begin{bmatrix} 2x+y \\ 2y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix} \Rightarrow y=0, z=0, x \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \operatorname{span} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dim V_2 = 1$$

ע"ע של A	$\lambda=1$	$\lambda=2$
ריבוי אלגברי	1	2
ריבוי גיאומטרי	1	1

תזכורת

ראינו שאם $P,Q \in \mathbb{F}[X]$ ו$P = aA_1A_2\ldots A_r$, ו-$Q = bB_1\ldots B_s$, עם $a,b \in \mathbb{F}$ ו-A_i, B_j אי פריקים ומתוקנים.

אם Q מחלק את P אזי (עד כדי שינוי אינדקסים) $A_1 = B_1 \ldots A_s = B_s$.

בפרט, אם $P(X) = (X-\alpha_1)^{m_1}\ldots(X-\alpha_l)^{m_l}$, וגם $Q(X) = (X-\lambda)^m$. אזי, אם Q מחלק את P, נובע כי קיים i כך ש$\lambda = \alpha_i$ ו-$m \le m_i$.

טענה

יהי $f: V \to V$ כך ש$\dim V < \infty$, וV מעל $\mathbb{F}$. אזי f ניתן ללכסון, אם ורק אם:

(I) χ_f מתפרק לגורמים לינארים ממעלה 1.

(II) לכל λ ע"ע של f, $m_\lambda^{\text{geom}} = m_\lambda^{\text{alg}}$

הוכחה

$\Leftarrow$ ניקח $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ ע"ע של f. ניזכר כי f ניתן ללכסון אם"ם $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$. כלומר, למעשה אם"ם $\mathcal{B}_1 \ldots \mathcal{B}_k$ בסיסים ל$\lambda_1 \ldots \lambda_k$ ו-$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$.

כעת, נניח כי f ניתן ללכסון. וש$-$ $\mathcal{B} = \left(\underbrace{b_1}_{\mathcal{B}_1}, \ldots, \underbrace{b_k}_{\mathcal{B}_k}\right)$. אזי מתקיים:

$$[f]_{\mathcal{B}} = diag\left(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_{\text{geo}}(\lambda_1)}, \cdots, \underbrace{\lambda_k, \ldots, \lambda_k}_{m_{\text{geo}}(\lambda_k)}\right)$$

כלומר, מדובר במטריצה אלכסונית כאשר כל ערך עצמי λ_i מופיע בדיוק $m_{\text{geo}}(\lambda_i)$ פעמים על האלכסון. ולכן:

$$\chi_f(X) = (X-\lambda)^{m_{\lambda_1}^{\text{geom}}} \ldots (X-\lambda)^{m_{\lambda_k}^{\text{geom}}}$$

כלומר, ניתן לרשום את χ_f כמכפלה של גורמים לינארים ממעלה 1. לכן תנאי (I) מתקיים.

כמו כן לכל λ_i אם $(X-\lambda_i)^m$ מחלק את χ_f אזי $m \leq m_{\lambda_i}^{\text{geom}}$. במילים אחרות, $m_\lambda^{\text{geom}} = m_\lambda^{\text{alg}}$, כנדרש.

$\Rightarrow$ תחילה, נבחין כי בהינתן פולינום $P \in \mathbb{F}[X]$ ממעלה 1, למשל, $P(X) = a_0 + a_1 X$, אזי ניתן לרשום אותו גם כך: $P(X) = a_1\left(\frac{a_0}{a_1} + X\right)$.

כלומר, למעשה תנאי (I) שקול לביטוי הבא: $\chi_f(X) = 1 \cdot (X+b_1) \ldots (X+b_n)$ (כי χ_f פולינום **מתוקן**). כמו כן, אמרנו שהשורשים של הפולינום הינם הערכים העצמיים שלו, ולכן $\alpha_i = -b_i$. דהיינו, נוכל לרשום את הפולינום האופייני כך: $\chi_f(X) = (X-\alpha_1) \ldots (X-\alpha_n)$.

בנוסף, נוכל לשים לב כי אם תנאי (I) מתקיים, וλ ע"ע, אזי ה**ריבוי האלגברי** של λ הינו מספר האינדקסים i כך ש$\alpha_i = \lambda$ (כמה פעמים הע"ע מופיע במכפלת הגורמים ממעלה 1).

כעת, ניגש להוכחה. נניח כי התנאים (I) ו-(II) מתקיימים. לפי מה שכתבנו קודם לכן, נרשום את הפולינום האופייני בצורה שונה:

$$\chi_f(X) = (X-\lambda_1)^{m_1} \ldots (X-\lambda_n)^{m_k}$$

כאשר λ_i שונים זה מזה. כעת נוכל להבחין לפי הטענה הקודמת כי $m_i = m_{\lambda_i}^{\text{alg}}$ (כלומר החזקות שוות לריבוי האלגברי).

בנוסף, נבחין $m_{\lambda_1}^{\text{alg}} + \ldots + m_{\lambda_k}^{\text{alg}} = m_1 + \ldots m_k = n = \dim V$ (שהרי ישנם n ערכים עצמיים, ולכן המימד הינו n, ומספר הריבויים האלגבריים שווה ל"מספר השורשים", כביכול).

כעת, מתנאי (II) עולה כי $\dim V_{\lambda_i} = m_{\lambda_i}^{\text{geom}} = m_{\lambda_i}^{\text{alg}}$. כלומר, אנחנו מקבלים בסך הכל כי $\dim V = \dim V_{\lambda_1} + \ldots + \dim V_k$.

אנו יודעים כי במקרה זה המרחבים העצמיים הם בסכום ישר, ולכן קיבלנו כי: $\dim V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$. ולמעשה הראינו כבר בעבר שמדובר בתנאי מספיק ללכסון, כנדרש.

הרצאה 12

8. צורת ג'ורדן

ראשית, נשים לב כי לא כל אופרטור הינו לכסין.

למשל, בדוגמה הבאה: יהי $f : V \to V$ כך שקיים $1 \leq m$ עם $f^m = 0$ (דהיינו, אופרטור האפס). (אם נרצה דוגמה קונקרטית, נוכל לקחת $V = \underset{<m}{\mathbb{F}}[X]$ וניקח את f בתור אופרטור הגזירה, אזי $f^m = 0$.)

אופרטור כזה איננו יכול להיות לכסין (אלא אם כן $f = 0$) . שהרי אם הוא היה לכסין, אזי דבר זה אומר שקיים בסיס $\mathcal{B}$ כך ש- $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$.

במקרה זה, ניקח למשל v, ו"ע השייך ל-λ_1. כלומר, $f(v) = \lambda_1$. אם נמשיך הלאה, נקבל כי $f^m(v) = \lambda_1^m v = 0$, ולכן למעשה בהכרח $\lambda_1 = 0$. ואם כך, נקבל כי לכל λ_i, $\lambda_i = 0$. דהיינו האופרטור היחיד שיכול להתקיים עבורו הינו אופרטור האפס.

אז תחילה נטפל ב"משפחה זו", ולאחר מכן נראה שבאמצעותה נוכל לטפל באופרטורים האחרים שאינם לכסינים.

8.1 אופרטורים נילפוטנטיים. הגדרה

נאמר שאופרטור $f : V \to V$ הינו **נילפוטנטי** אם קיים $1 \leq m$ כך ש-$f^m = 0$. אם m מינימלי, הוא ייקרא ה**גובה** של f.

אם $0 \neq v \in V$, אזי האינדקס l המינימלי כך ש-$f^l(v) = 0$, הוא ה**גובה** של v יחסית ל-f.

הערה

אם $0 \neq v \in V$, נתבונן בתת המרחב הציקלי שלו. מספיק שניקח את $Z(f, v) = \text{span}\left(v, f(v), \ldots f^{l-1}(v)\right)$.

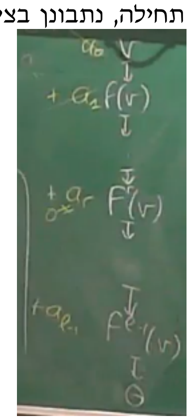
ברור שאחרי $f^l(v)$ ישנו תלות לינארית (כי זה מתאפס), אבל האם ייתכן שתהיה תלות לינארית כבר קודם לכן? נוכיח שדבר זה איננו ייתכן.

למה

בהינתן $f:V\to V$ נילפוטנטי, ו-$0\neq v\in V$ מגובה l יחסית ל-f. אזי $\left\{ v,\ldots,f^{l-1}\left(v\right)\right\}$ בת"ל. כלומר, הם בסיס ל-$Z\left(f,v\right)$.

הוכחה

תחילה, נתבונן בציור, על מנת להבין את רעיון ההוכחה:



נניח שקיימים סקלרים $a_{0},\ldots,a_{l-1}$ כך ש-$a_{0}v+\ldots+a_{l-1}f^{v-1}\left(v\right)=0$.

ניקח את a_{r} להיות האינדקס המינימלי כך ש-$a_{r}\neq0$.

כעת נקבל בסך הכל $a_{r}f^{r}\left(v\right)+\ldots+a_{l-1}f^{l-1}\left(v\right)=0$. נפעיל את f^{l-1-r} על שני הצדדים, ונקבל כי $a_{r}f^{l-1}\left(v\right)=0$. הנחנו כי $a_{r}\neq0$, ולכן קיבלנו כי $f^{l-1}\left(v\right)=0$, בסתירה לכך שהגובה של f הוא l.

הגדרה

בהינתן f נילפוטנטי, ו-$0\neq v\in V$ מגובה l, נאמר שהקבוצה $\left\{ v,f\left(v\right),\ldots,f^{l-1}\left(v\right)\right\}$ הינה **שרשרת.**

כעת, נתבונן בבסיס $\mathcal{B}_{Z\left(f,v\right)}=\left(v,f\left(v\right),\ldots,f^{l-1}\left(v\right)\right)$. המטריצה של הצמצום $f|_{Z\left(f,v\right)}$ הינה:

$$\left[f|_{Z\left(f,v\right)}\right]_{\mathcal{B}\left(f,v\right)}=\begin{bmatrix}0\\1 & 0\\ & \ddots & \ddots\\ & & 1 & 0\end{bmatrix}\in M_{l}(\mathbb{F})$$

נשים לב כי $X^{l}=\min_{v}^{f}\left(X\right)$.

הגדרה

בלוק ג'ורדן נילפוטנטי אלמנטרי הוא מטריצה בצורה הבאה:

$$\begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

נסמנו $J_l\left(0\right)$, כאשר l הינו הגובה של המטריצה.

הערה

אם $g\,:\,U\,\to\,U$ אופרטור, ו-$\mathcal{B}=\left(b_1,\ldots,b_{l-1}\right)$ בסיס לU כך ש $\left[g\right]_{\mathcal{B}}$ בלוק ג'ורדן נילפוטנטי אלמנטרי, אזי $g\left(b_i\right)=b_{i+1}$ לכל $i<l-1$, ו-$g\left(b_{i-1}\right)=0$, ולכן $\mathcal{B}$ הינו למעשה שרשרת.

8.2 צורת ג'ורדן לאופרטורים נילפוטנטיים. משפט

בהינתן $f\,:\,V\,\to\,V$ אופרטור ניפלוטנטי, כך ש$\dim V<\infty$, אזי ניתן לרשום את V כסכום ישר של מרחבים ציקליים, דהיינו, קיימים $v_1\ldots v_r\in V$ כך ש-$V=Z\left(f,v_1\right)\oplus\ldots\oplus Z\left(f,v_r\right)$.

בעקבות כך, אם ניקח בסיס שרשרת לכל $Z\left(f,v_i\right)$, האיחוד שלהם הוא בסיס $\mathcal{B}$ של V.ואז נקבל כי המטריצה המייצגת הינה:

$$\left[f\right]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} J_{l_1}\left(0\right) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{l_r}\left(0\right) \end{bmatrix}$$

מטריצה זו נקראת בלוק ג'ורדן נילפוטנטי. כל בלוק ג'ורדן נילפוטנטי הוא בעצמו מטריצת בלוקים אלכסונית שמורכבת מבלוקי ג'ורדן נילפוטנטיים אלמנטריית.

הגדרה

בלוק גו'רדן נילפוטנטי היא מטריצה אלכסונית בבלוקים, עם בלוקי ג'ורדנים נילפוטנטיים אלמנטיים, כך ש$J_{l_1}\left(0\right)\ldots J_{lr}\left(0\right)$ על האלכסון, עם $l_1\ldots\leq l_r$.

תרגיל

נעבור על כל הבלוקי ג'ורדן מסדר 4×4 :

$$J^{(1,1,1,1)}(0)=\left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & & & \\ \hline & 0 & & \\ \hline & & 0 & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right], J^{(2,2)}(0)=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{array}\right], J^{(2,1,1)}(0)=\left[\begin{array}{cc|c|c} 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right],$$

$$J^{(3,1)}(0)=\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 0 \end{array}\right], J^{(4)}(0)=\left[\begin{array}{cccc} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & 1 & 0 \end{array}\right]$$

הרצאה 13

נזכיר כי אנחנו עוסקים כעת באופרטורים ניפלוטנטים, כך ש$f^m=0$ עבור m כלשהוא.

אנו רוצים כעת למצוא בסיס $\mathcal{B}$ ל-V שהוא איחוד של שרשראות, שהינה למעשה בלוק ג'ורדן ניפלוטנטי.

למה

יהי $f:V\to V$ אופרטור נילפוטנטי, ויהיו $v_1,\ldots v_s\in V\setminus\{0\}$ ו-C_i השרשראות המתאימות עבור כל v_i.

אזי $Z(f,v_1),\ldots,Z(f,v_s)$ בסכום ישר, אם"ם $f^{k_1}(v_1),\ldots,f^{k_s}(\vec{v_s})$ בת"ל.

הוכחה

$\Leftarrow$ נשים לב כי $Z(f,v_1),\ldots,Z(f,v_s)$ בסכום ישר, אם"ם האיחוד הזר של $C_1,\ldots C_s$ בסיס ל-$Z(f,v_1)+\ldots+$ $Z(f,v_s)$.

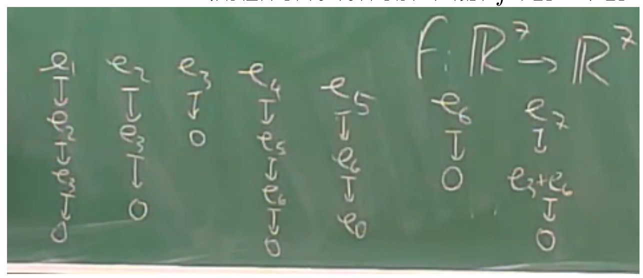
ולמעשה דבר זה אומר כי האיחוד של $C_1,\ldots C_s$ הינו קבוצה בת"ל.

כמו כן, נשים לב כי אם $Z(f,v_1),\ldots,Z(f,v_s)$ בסכום ישר, אזי $f^{k_1}(v_1),\ldots,f^{k_s}(\vec{v_s})$ בת"ל, כי הרי מדובר בתת קבוצה של הקבוצה $C_1\cup\ldots\cup C_S$ שהינה קבוצה בת"ל על פי הנתון ולכן בהכרח $f^{k_1}(v_1),\ldots,f^{k_s}(\vec{v_s})$ בת"ל, כדרוש.

$\Rightarrow$ נניח כי $f^{k_1}(v_1),\ldots,f^{k_s}(\vec{v_s})$ בת"ל. ניקח צירוף לינארי כללי של $f^{k_1}(v_1),\ldots,f^{k_s}(\vec{v_s})$, כך ששווה לאפס, ונשים לב שאנחנו יכולים להפעיל עליו את f^{k_r}, ואז למעשה כל השרשראות שקטנים או שווים לk_r מתאפסות. אם נמשיך בפעולה זאת ונפעיל על חזקות קטנות יותר, נוכל להמשיך ולהוכיח שכל המקדמים שווים לאפס, כנדרש.

דוגמה

יהי $f:V\to V$ אופרטור ליפוטנטי. נרצה למצוא בסיס לV שהינו איחוד של שרשראות. למשל, אם ניקח $f:\mathbb{R}^7\to\mathbb{R}^7$ ונגדיר את השרשרת הבאה:



ראשית, נוכל להוריד את השרשראות של e^2,e^3,e^5,e^6 כיוון שהן מופיעות בשרשראות האחרות. אך לא נוכל להוריד עוד מסלולים כי אז לא יישארו לנו וקטורים.

נוכיח זאת בהמשך לדוגמה כללית ונחזור לדוגמה זו לאחר מכן.

הערה

אם $v\in \text{span}\left(C_1,\ldots,C_k\right)$ אז כל השרשרת של v שייכת ל– $\text{span}\left(C_1,\ldots,C_k\right)$, שהרי v שווה לצירוף לינארי של השרשראות, וגם f של v מהווה צירוף לינארי של השרשראות.

טענה

יהי $f:V\to V$ אופרטור נילפוטנטי, ויהיו $C_1,\ldots,C_k$ שרשראות, אזי **קיימות** $B_1,\ldots,B_r$ שרשראות זרות כך ש$B_1\cup\ldots,\cup B_r$ בת"ל וגם ש $\text{span}\left(B_1\cup\ldots\cup B_r\right)=\text{span}\left(C_1\cup\ldots\cup C_k\right)$.

הוכחה

נפעיל את האלגוריתם הבא, בהינתן שרשראות $C_1\ldots,C_k$:

(I) אם הינן בת"ל, אזי סיימנו.

(II) נניח שהן אינן בת"ל, לפי הלמה, ישנה תלות לינארית בין $f^{k_1}\left(v_1\right),\ldots,f^{k_s}\left(v_l\right)$. ייתכן שישנם כאלו ששוים לאפס, אך נתבונן בa_r הראשון ששונה מאפס, כלומר התלות הלינאריות אומרת:

$$a_1f^{k_1}\left(v_1\right)+\ldots+a_rf^{k_r}\left(v_r\right)=0,a_r\neq0$$

ועכשיו נוכל להתבונן בשרשרת של $f\left(v_r\right)$.

נגדיר כעת $v'=a_1f^{k-k_r}+a_2f^{k-k_r}\left(v_2\right)+\ldots+a_rv_r$.

כעת ישנן שתי אפשרויות:

(i) $v' = 0$, ואז ניתן לכתוב את v_r כך: $v_r = -\frac{1}{a_r}\left(a_1 f^{k-k_r} + a_2 f^{k-k_r}(v_2) + \ldots a_{r-1} f^{k_{r-1}-k_r}(v_{r-1})\right)$.

כלומר למעשה $v_r \in \text{span}\left(C_1 \cup \ldots \cup C_{r-1}\right)$. כלומר $C_r \in \text{span}\left(C_1 \cup \ldots \cup C_{r-1}\right)$

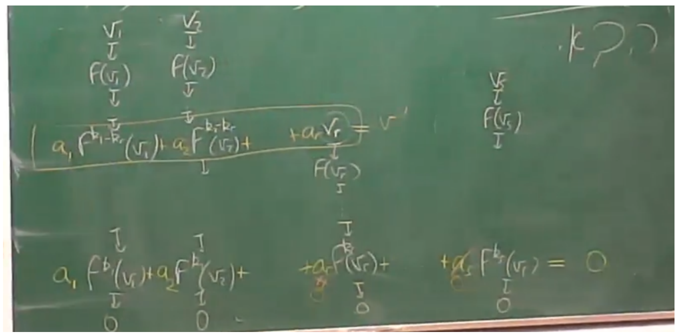
אם כך, לא נצטרך את השרשרת שלו.

ונחזור לתחילת האלגוריתם.

(ii) $v' \neq 0$, ואז נשים לב כי $v_r \in \text{span}\left(C_1 \cup \ldots \cup C_{r-1} \cup \{v'\}\right)$.

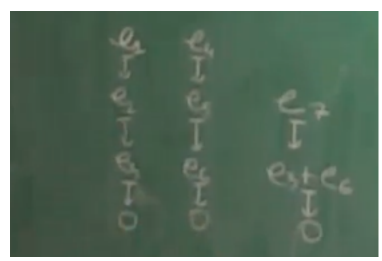
במקרה זה נחליף את c_r ע"י השרשרת C' של v'.

כלומר, קיבלנו כי האורך שרשרת C'הוא לכל היותר k_r.



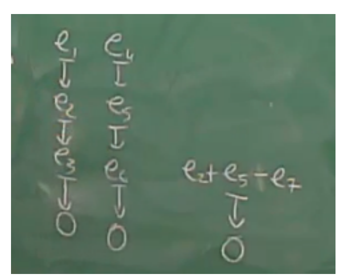
נמשיך עם האלגוריתם עד שנגיע לקבוצה בת"ל.

כעת, נחזור לדוגמה שהבאנו, כך שנשארנו עם השרשראות הבאות בלבד:



אך שרשראות אלו אינן בת"ל. ניקח $e_2 + e_5(-1)e_7 = v' \neq 0$, כעת נחליף את השרשרת של e_7 בשרשרת הבאה,

ונקבל בסך הכל שיש לנו שבעה וקטורים:



8.3 צורת ג'ורדן לאופרטור כללי. משפט (פיטינג)

יהי $g: V \to V$ אופרטור כך ש$\dim V < \infty$. אזי קיימים V_I, V_N תתי מ"ו, g אינווריאנטים של V כך ש$V = V_I \oplus V_N$ ו $g|_{V_N}$ נילפוטנטי, $g|_{V_I}$ הפיך.

טענת עזר

בהינתן $g: V \to V$, קיים $m \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $\ker g^{m+1} \subseteq \ker g^m$ וגם $\text{Im}\left(g^{m+1}\right) \subseteq \text{Im}\left(g^m\right)$.

הוכחת טענת העזר

ניקח $v \in \ker g^m$. כלומר, מתקיים: $g^m(v) = 0$. כעת מתקיים: $g^{m+1}(v) = g(g^m(v)) = g(0) = 0$. כלומר, בפרט $v \in \ker\left(g^{m+1}\right)$.

בטענה השנייה, ניקח $w \in Im\left(g^{m+1}\right)$. משמעות הדבר היא שישנו u כך ש $w = \left(g^{m+1}\right)(u)$. אבל כעת, $g^m(g(u)) = w$. כלומר, בפרט $w \in \text{Im}\left(g^m\right)$.

הוכחת המשפט

נבחין כי מתקיים:

$$\{0\} \subseteq \ker(g) \subseteq \ker\left(g^2\right) \ldots \subseteq g^m \ldots \subseteq V$$

ומאידך מתקיים:

$$V \supseteq \text{Im}(g) \supseteq \text{Im}\left(g^2\right) \supseteq \ldots \supseteq \text{Im} g^m$$

אמנם, נוכל לשים לב כי לפי הטענה הראשונה, קיים איזשהוא $k \in \mathbb{N}$ כך ש$\ker\left(g^{k+1}\right) = \ker\left(g^k\right)$ וכן הלאה.

כלומר, בשלב מסוים הוא איננו אפס.

מאידך, בצד השני,קיים איזשהוא $l \in \mathbb{N}$ כך ש$\text{Im}\left(g^{l+1}\right) = \text{Im}\left(g^l\right)$. נוכל להניח כי $k = l$.

על מנת להוכיח את המשפט שאנו רוצים, נגדיר $V_N = \ker\left(g^k\right)$ ואת $V_I = \text{Im}\left(g^k\right)$.

וכעת נוכיח את תוכן המשפט עצמו:

(i) V_N g - אינווריאנטי. ניקח $v \in \ker\left(g^k\right)$ ונרצה להוכיח כי $g(v) \in \ker\left(g^k\right)$. נבחין כי מתקיים:

$$g^{k+1}(v)=g^k(g(v))=g\left(g^k(v)\right)=g(0)=0$$

אם כך, $g(v)\in V_N$. כלומר, הוכחנו כי V_N g-אינווריאנטי.

(ii) $g|_{V_N}$ נילפוטנטי: נבחין כי לכל $v\in V_N$ מתקיים כי $g^k(v)=0$. ובמילים אחרות, $g|_{V_N}$ הינו אופרטור האפס, בפרט נילפוטנטי.

(iii) V_I g- אינווריאנטי. ניקח $v\in V_I=\mathrm{Im}\left(g^k\right)$. משמעות הדבר שהינו בתמונה היא:

$$v=g^k(u)\Rightarrow g(v)=g\left(g^k(u)\right)=g^{k+1}(u)=g^k(g(u))$$
$$\Rightarrow g(v)\in Im\left(g^k\right)=V_I$$

(iv) $g|_{V_I}$ הפיך: אנו יודעים כי $g|_{V_I}:V_I\to V_I$. לכן מספיק שנוכיח שהוא על. ניקח $w\in V_I$. כעת מתקיים:

$$g^{k+1}(u)=w\in V_I\Rightarrow w=g\left(g^k(u)\right)\in\mathrm{Im}\left(g^k\right)$$

כלומר, דבר זה גורר כי $g|_{V_I}$ הוא על, ולכן הוא בהכרח הפיך, כיוון שאנחנו במימד סופי.

(v) $V=V_N\oplus V_I$. כיוון שמדובר בשני תתי מרחבים, מספיק שנוכיח כי $V_N\cap V_I=\{0\}$. אם $v\in V_N\cap V_I$ אזי $g^k(v)=0$. מצד שני, $g|_{V_I}$ הפיך ולכן $g^k|_{V_I}$ הפיך. כלומר:

$$v=\left(g^k|_{V_I}\right)^{-1}\left(g^k(v)\right)=\left(g^k|_{V_I}\right)^{-1}(0)=0$$

כלומר, בהכרח $v=0$. כעת ניזכר כי $V_N=\ker\left(g^k\right)$ וגם $V_I=Im\left(g^k\right)$. לכן, לפי משפט המימדים מתקיים כי:

$$\dim(V_N)+\dim(V_I)=\dim(V)$$

כלומר, סיימנו את הוכחת הטענה.

הערה

אם ניקח $f:V\rightarrow V$, ולפי הוכחת הטענה נבחר $V=V_N\oplus V_I$, נקבל מ$\mathcal{B}_N$ בסיס של שרשראות, ואם נרחיב את $\mathcal{B}_N$ לבסיס של V , נקבל בחלק הניפלוטנטי חלק לא הפיך.

הרעיון הוא כזה: אם λ ע"ע של f עם ו"ע, נתבונן ב$g=f-\lambda\mathrm{id}$. אנו יודעים כי g איננו הפיך, כי הרי $g\left(v\right)=\lambda v-f\left(v\right)=0$.

לכן כעת, ניתן למצוא בסיס $\mathcal{B}$ כך ש:

$$[f]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}\left[f|_{V_N}\right]_{B_N} & \\ & \left[f|_{V_I}\right]_{\mathcal{B}_I}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J\left(\lambda_1\right) & & \\ & \ddots & \\ & & J\left(\lambda_k\right)\end{bmatrix}$$

אך אנו יודעים כי $f=g-\lambda\mathrm{id}$. כלומר: $[f]_{\mathcal{B}}=[g]_{\mathcal{B}}-\lambda I$.

<u>הרצאה 15</u>

הגדרה

בלוק גו'רדן **אלמנטרי** $J_l\left(\lambda\right)$ הוא מטריצה מהצורה:

$$J_l(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda\end{bmatrix}=J_l(0)+\lambda I_l\in M_l(\mathbb{F})$$

בלוק ג'ורדן $J(\lambda)=J^{(l_1,\ldots,l_r)}(\lambda)$. הוא מטריצה אלכסונית בבלוקים, עם $J_{l_1}(\lambda)\ldots J_{l_r}\left(\lambda\right)$ על האלכסון עם $l_1\leq\ldots\leq l_r$.

מטריצת גו'רדן היא מטריצה אלכסונית בבלוקים עם בלוקי ג'ורדן, עם $J^{(l_1,\ldots,l_r)}(\lambda_1)\ldots J^{(l_1,\ldots,l_r)}(\lambda_k)$, ובסך הכל:

$$\begin{bmatrix} J(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

משפט ג'ורדן

יהי $f : V \to V$ אופרטור ו-$\dim V < \infty$, כך שχ_f מתפרק לגורמים לינארים ממעלה 1:

$$\chi_f(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$$

אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ של V כך ש$[f]_{\mathcal{B}}$ היא מטריצת ג'ורדן.

בנוסף, אם $\mathcal{C}$ בסיס אחר, כך ש-$[f]_{\mathcal{C}}$ היא גם מטריצת ג'ורדן, אזי $[f]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{C}}$ עד כדי שינוי סדר בבלוקי ג'ורדן.

הוכחה

באינדקציה על $\dim V$.

<u>בסיס האינדוקציה</u>

אם $\dim(V) = 1$, אזי כל מטריצה 1×1 היא מטריצת ג'ורדן.

<u>צעד האינדוקציה</u>

נניח שלכל אופרטור $T : W \to W$ עם $\dim W < \dim V$, וכך שχ_T מתפרק לגורמים ממעלה אחד, קיים בסיס $\mathcal{B}_W$ כך ש $[T]_{\mathcal{B}_W}$ היא מטריצת ג'ורדן.

כעת, ניקח $f : V \to V$. על פי הנתון, χ_f מתפרק לגורמים לינארים, ולכן קיים λ ע"ע של f.

נגדיר $g : f - \lambda \mathrm{id}$. כעת, ממשפט פיטינג מתקיים כי $V = V_N + V_I$ עם V_I, V_N g- אינווריאנטים. ו$g|_{V_N}$ נילפוטנטי ו$g|_{V_I}$ הפיך.

אנו יודעים כי g איננו הפיך, כלומר, $V \neq V_I$ ולכן $\dim V_I < \dim V$.

בנוסף, $f = g + \lambda \mathrm{id}$ ולכן V_I, V_N הם גם f-אינווריאנטים.

ניקח כעת, $f|_{V_I} : V_I \to V_I$. בנוסף, נתבונן בפולינום האופייני $\chi_{f|_{V_I}}$.

ניזכר בכך שהפולינום האופייני של הצמצום מחלק את הפולינום האופייני של האופרטור, ולכן הפולינום הזה מחלק את χ_f. לכן, מכך ש $\chi_{f|_{V_I}}$ מתפרק לגורמים לינארים ממעלה 1, מתקיים מהנחת האינדוקציה כי קיים בסיס $\mathcal{B}_I$ כך ש $[f|_{V_I}]_{\mathcal{B}_I}$ היא מטריצת ג'ורדן.

במקרה של $f|_{V_N}$. אנו יודעים כי $g|_{V_N}$ נילפוטנטי, ולכן קיים בסיס בסיס $\mathcal{B}_N$ כך ש $[g|_{V_N}]_{\mathcal{B}_N}$ היא מטריצת ג'ורדן נילפוטנטית. אם כך מתקיים כי $[f|_{V_N}]_{\mathcal{B}_N} = [g|_{V_N}]_{\mathcal{B}_N} + \lambda I$, כלומר קיבלנו כי $[f|_{V_N}]_{\mathcal{B}_N}$ הינו בלוק גו'רדן עם λ על האלכסון.

ניקח $\mathcal{B} = \mathcal{B}_I \cup \mathcal{B}_N$ בסיס לV ונקבל:

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [f|_{V_N}]_{B_N} & \\ & [f|_{V_I}]_{\mathcal{B}_I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

הערה

אם V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$, אז כל אופרטור $f : V \to V$ מקיים את תנאי המשפט (כי כל פולינום עם מקדמים ב$\mathbb{C}$ מתפרק למכפלה של גורמים ממעלה 1).

מסקנה (צורת ג'ורדן למטריצות)

תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. אם χ_A מתפרק כמכפלה של גורמים לינארים ממעלה 1, אז A דומה למטריצת ג'ורדן. כלומר, קיימת מטריצה M הפיכה, כך שהמטריצה MAM^{-1} היא מטריצת ג'ורדן.

הוכחה

נפעיל את המשפט על האופרטור $f_A : \mathbb{F}^n_{\text{coll}} \to \mathbb{F}^n_{\text{coll}}$ המוגדר על ידי $f_A(x) = Ax$. קיים בסיס $\mathcal{B}$ כך ש$[f]_{\mathcal{B}}$ היא מטריצת ג'ורדן.

כעת $[f_A]_{\mathcal{E}} = A$ ולכן $[f_A]_{\mathcal{B}} = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} [F_A]_{\mathcal{E}} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$,

ולכן A ו$[f]_{\mathcal{B}}$ דומות, כנדרש.

הערה

ניתן להוכיח שמספר הבלוקים האלמנטריים ב$J(\lambda_i)$ שווה לריבוי הגיאומטרי של λ_i.

<u>הרצאה 16</u>

9. מרחבי מכפלה פנימית

הקדמה

נבחין כי כל מה שאנחנו עושים במרחבים וקטורים בדרך כלל הוא הכללה של מה שמתרחש ב$\mathbb{R}^2$ ו-$\mathbb{R}^3$. כך למשל מכפלה בסקלר, מורחבת לרעיון מרחבים וקטורים. אמנם, ישנם דברים שאנחנו עושים ב$\mathbb{R}^2$ ו-$\mathbb{R}^3$ שאיננו יודעים לעשות בשאר המרחבים. למשל, רעיון המרחק, כיצד ניתן להביע אותו בשאר המרחבים? כיצד ניתן לעשות מרחק בין שתי פונקציות? (הרי הוכחנו שמדובר בסוג של וקטור).

הגדרה

מכפלה סקלרית ב$\mathbb{R}^2$ היא העתקה $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2$. תוצאת מכפלה זו היא סקלר.

נבחין שמכפלה סקלרית היא לינארית, דהיינו:

$$(\underline{x} + a\underline{x}') \cdot \underline{y} = \cdot\underline{y}\cdot\underline{y} + a\underline{x}'\underline{x}$$

אורך של וקטור

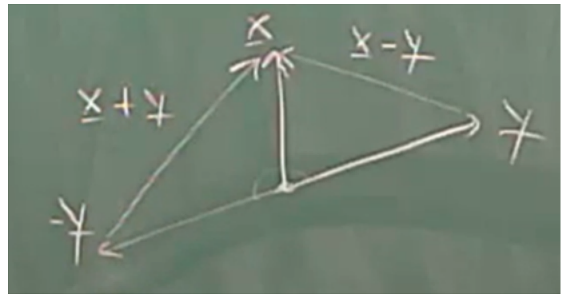
אם נתבונן ב$\mathbb{R}^2$, ובהינתן וקטור $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ אזי למשל, באמצעות פיתגורס, אפשר להגדיר מרחק באמצעות $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. כלומר מדובר במכפלה הסקלרית של הוקטור עם עצמו, דהיינו $\sqrt{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}$. לעיתים מכנים זאת נורמה ומסמנים זאת כך: $\|x\| = \sqrt{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}$.

מרחק בין $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ו $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

נבחין כי למעשה מדובר באורך של $x - y$. כלומר, למעשה $\|y - x\| = \sqrt{(\underline{y} - \underline{x})\ (\underline{y} - \underline{x})}$.

ניצבות

אם אנחנו ב$\mathbb{R}^2$, נאמר ששני וקטורים $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ו־ $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ הם ניצבים, אם ורק אם $\|x + y\| = \|x - y\|$, מהסיבה הבאה:



כלומר, למעשה נקבל:

$$\|x-y\| = \begin{bmatrix} x_1-y_1 \\ x_2-y_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1-y_1 \\ x_2-y_2 \end{bmatrix} = (x_1-y_1)^2 + \left(x_2-y_2^2\right) =$$

$$x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-2x_1y_2-2x_2y_2$$

ומאידך:

$$\|x+y\| = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix} = (x_1+y_1)^2 + \left(x_2+y_2^2\right) =$$

$$x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2x_1y_2+2x_2y_2$$

ולכן:

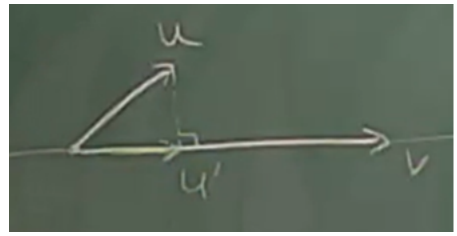
$$\|x+y\| = \|x-y\| \Rightarrow 2x_1y_2+2x_2y_2 = -2x_1y_2-2x_2y_2 \Leftrightarrow$$

$$4x_1y_2+4x_2y_2 = 0 \Leftrightarrow \underline{x}\cdot\underline{y} = 0$$

כלומר, רק במקרה זה $\underline{x}$ ו-$\underline{y}$ ניצבים.

משמעות גיאומטרית של המכפלה הסקלרית

אם ניקח שני וקטורים, u ו-v, ואקח "הטלה אורתוגונלית" (מושג שנכיר בהמשך), כך למשל:



במצב זה אנו מעוניינים לקבל $u-u'=0$. נשים לב שמהלינאריות מתקיים כי $u\cdot v-u'\cdot v=0$ ולכן $u\cdot v=u'\cdot v$.

נבחין כי $u'=\alpha v$ ולכן קיבלנו ש- $u\cdot v=\alpha v\cdot v=\alpha\left(v\cdot v\right)=\alpha\|v\|^2$.

דבר זה מאפשר לנו להסיק כי ככל שα גדל, הביטוי עצמו גדל.

נוכל לומר למעשה כי $|u\cdot v|=\|u'\|\cdot\|v\|$. נוכל להבחין גם שככל שהזווית קטנה הביטוי גדל. אם כך, בפרט הביטוי של המכפלה הפנימית תלוי בגודל של כל אחד מהם ובזווית ביניהם.

ולמעשה אף מתקיים כי $\frac{u}{\|u\|}=\cos\theta\cdot\frac{v}{\|v\|}$, כש-$\theta$ זו הזווית ביניהם.

הכללה ל$\mathbb{R}^n$ של המכפלה הסקלרית

אם נרצה להכליל ל$\mathbb{R}^n$ כולו, פשוט נגדיר:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=x_1y_1+\ldots+x_ny_n$$

הכללה ל$\mathbb{C}^2$

מה יקרה במידה ונרצה להכליל את המכפלה הסקלרית ל$\mathbb{C}$?

למשל:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}=w_1z_1+w_2z_2$$

אמנם, במצב זה תהיה לנו בעיה לדבר על אורך של וקטור. אם למשל נתבונן בi $= \sqrt{\begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}}$, ואיך נוכל לדבר על מרחק של i? אנו מעוניינים שהאורך יהיה מספר ממשי חיובי! על מנת לעשות זאת, נשנה מעט את הנוסחה, ונקבל הגדרה חדשה.

הגדרה

ב$\mathbb{C}^2$ נגדיר את המכפלה הסקלרית להיות:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = w_1\bar{z_1} + w_2\bar{z_2}$$

דבר זה פותר לנו את הבעיה שהייתה לנו קודם לכן.

הערה

המכפלה הסקלרית מעל $\mathbb{R}^n_{\text{coll}}$ מקיימת את התכונות הבאות:

(I) לינאריות:

$$(\underline{x} + a\underline{x'}) \cdot \underline{y} = \cdot\underline{y}\cdot\underline{y} + a\underline{x}'\underline{x}$$

ניתן להוכיח באמצעות הנוסחה:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1^{'} \\ \vdots \\ y_n^{'} \end{bmatrix} \right) = x_1\left(y_1 + ay_1'\right) + \ldots + x_n\left(y_n + y_n'\right)$$

וכעת:

$$x_1y_1 + ax_1y_1' + \ldots + x_ny_n + x_ny_n'$$

שזה בדיוק מה שרצינו להוכיח.

(II) סימטריות: $\underline{x}\cdot\underline{y}=\underline{y}\cdot\underline{x}$ (מעל $\mathbb{C}$ $\underline{x}\cdot\underline{y}=\overline{x\cdot y}$)

(III) לכל $\underline{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$ מתקיים כי $\underline{x}\cdot\in\mathbb{R}x_n{}^2=x^2+\ldots+\underline{x}$.

9.1 **מכפלה פנימית, הגדרה ודוגמאות.** נעיר כי בכל הפרק, $\mathbb{F}$ הוא $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$.

הגדרה

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. מכפלה פנימית מעל V היא פונקציה $\langle|\rangle : V\times V\to\mathbb{F}$ שמקיימת:

(I) לינאריות במשתנה השני - לכל $v,v'\in V$ ו-$a\in\mathbb{F}$ $\langle u\mid v+av'\rangle=\langle u\mid v\rangle+a\langle u\mid v'\rangle$

(II) לכל $u,v\in V$ מתקיים כי $\langle u|v\rangle=\left\langle\overline{v|u}\right\rangle$.

(III) חיוביות בהחלט - לכל $v\in V$ $\langle v|v\rangle$ממשי חיובי. ו-$v=0$ אם"ם $\langle v|v\rangle=0$

<u>הרצאה 16</u>

הערות

(i) אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, אזי תנאי (II) שקול לסימטריות.

(ii) מאידך, מתקיים:

$$\langle u+au'\mid v\rangle=\overline{\langle v\mid u+au'\rangle}=\overline{\langle u\mid v\rangle+a\langle v\mid u'\rangle}=\overline{\langle u\mid v\rangle}+a\overline{\langle v\mid u'\rangle}=$$

$$\langle u\mid v\rangle+\overline{a}\langle v\mid u'\rangle$$

כלומר, קיבלנו שאין ליניאריות מוחלטת, שהרי מה שקיבלנו בסופו של דבר הוא כי $\overline{a}$. אלא אם כן מתקיים $\mathbb{F}=\mathbb{R}$.

(iii) לכל $u\in V$ מתקיים: $\langle u\mid 0\rangle=\langle u\mid 0\cdot u\rangle=0\langle u\mid u\rangle=0$.

דוגמאות

(i) המכפלה הסקלרית (או המכפלה הפנימית הסטנדרטית) על $\mathbb{F}^n_{\text{coll}}$. בהינתן $\underline{y}=\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$, $\underline{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$, אזי

המכפלה מוגדרת על ידי־ $\langle\underline{x}\mid\underline{y}\rangle=\underline{x}\cdot\underline{y}=\overline{x_1}\cdot y_1+\ldots+\overline{x_n}y_n$.

(ii) אפשר למצוא מכפלות פנימיות אחרות על $\mathbb{F}^2_{\text{coll}}$. למשל־ $\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = (x_1 + x_2) \cdot (y_1 \cdot y_2) +$ $x_2 y_2$. ניתן לראות שתנאי (II) מתקיים, וגם שתנאי (III) מתקיים כי הרי $\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\rangle = (x_1 + x_2) \cdot$ $(x_1 \cdot x_2) + x_2^2$ ולכן $x_2 = 0$ וגם $x_1 + x_2 = 0$ אם"ם $x_2 = 0$ וגם $x_1 = 0$, כנדרש.

(iii) $V = C([0,1])$. כלומר, מדובר בכל הפונקציות הרציפות $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. ראינו שמדובר כבר במרחב וקטורי. כעת נגדיר את המכפלה הפנימית על ידי: $\langle f \mid g \rangle = \int\limits_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$. נבדוק שהתנאים מתקיימים:

(I)

$$\langle f \mid g_1 + a + g_2 \rangle = \int\limits_0^1 f(t)\,(g_1 + a + g_2(t))\, dt = \int\limits_0^1 f(t)\, g_1 + af(t)\, g_2(t)\, dt$$

$$\int\limits_0^1 f(t)\, g_1 td + a \int\limits_0^1 f(t)\, g_2(t)\, dt = \langle f \mid g_1 \rangle + a \langle f \mid g_2 \rangle$$

(III) עלינו לבדוק שהאינטגרל הינו חיובי, ובנוסף עלינו לבדוק שאם האינטגרל שווה לאפס, אזי הפונקציה שווה לאפס. והוכחנו זאת בקורס אינפי 2. דהיינו סך הכל נקבל:

$$\langle f \mid f \rangle = \int\limits_0^1 f^2(t)\, dt \geq 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 f^2(t)\, dt = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

(iv) נניח ש$\langle | \rangle$ מ"פ על V מרחב וקטורי כלשהוא. נניח שקיים אופרטור $f : V \to V$ הפיך. נוכל לבנות באמצעותו מכפלה פנימית חדשה, כך שיתקיים: לכל $u, v \in V$, נגדיר: $\{u \mid v\} = \langle f(u) \mid f(v) \rangle$. נבדוק האם מתקיימים התנאים:

(I)

$$\{u \mid v + av'\} = \langle f(u) \mid f(v + av') \rangle = \langle f(u) \mid f(v) + af(v') \rangle =$$

$$\langle f(u) \mid f(v) \rangle + a \langle f(u) \mid f(v') \rangle =$$

$$\{u \mid v\} + a \{u \mid v'\}$$

(II)

$$\{v \mid u\} = \langle f(v) \mid f(u)\rangle = \overline{\langle f(u) \mid f(v)\rangle} = \overline{\{u \mid v\}}$$

(III)

$$\{v \mid v\} = \langle f(v) \mid f(v)\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle f(v) \mid f(v)\rangle = 0 \Leftrightarrow f(v) = 0$$

$$\overset{\text{הפיך}}{\Rightarrow} f(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

הערה

אם ניקח את $\langle|\rangle$ להיות המכפלה הסקלרית, ו־$f : \mathbb{F}^2_{\text{coll}} \to \mathbb{F}^2_{\text{coll}}$ המוגדר על ידי $f\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$ שהינו אופרטור לינארי, נקבל:

$$\left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right\} = \left\langle f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) \mid f\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)\right\rangle = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ y_2 \end{bmatrix} =$$

$$(x_1 + x_2) \cdot (y_1 \cdot y_2) + x_2 y_2$$

הגדרה

מרחב מכפלה פנימית הוא מרחב וקטורי V יחד עם מכפלה פנימית $\langle|\rangle$ על V. נסמנו $(V, \langle|\rangle)$.

ממ"ו מעל $\mathbb{R}$ ממימד סופי נקרא מרחב אוקלידי, ואם הוא מעל $\mathbb{C}$ הוא נקרא מרחב פרמיטי.

9.2 נורמות $(V, \langle|\rangle)$ ממ"פ. הגדרה

לכל $v \in V$ נגדיר את הנורמה של V ע"י $\|v\| = \sqrt{\langle v \mid v\rangle}$

הערות

נורמה משמרת את התכונות הבאות

(i) חיוביות $\|V\|$ מוגדר היטב כיוון שמדובר במספר ממשי חיובי.

(ii) בהחלט - $v = 0 \Leftrightarrow 0 = \langle v \mid v\rangle \Leftrightarrow 0 = \|v\| = \sqrt{\langle v \mid v\rangle}$

(ii) הומוגניות. יהיו $u \in U$ ו־ $a \in \mathbb{F}$, אזי מתקיים:

$$\|au\|^2 = \langle au \mid au \rangle = \overline{a} \cdot a \cdot \langle u \mid u \rangle = \|a\|^2 \cdot \|u\|^2 \Rightarrow$$
$$\|au\| = \|a\| \cdot \|u\|$$

הגדרה

אם $\|u\| = 1$, נאמר ש־u הוא וקטור יחידה.

הערה

אם $0 \neq u \in V$, אזי $\frac{u}{\|u\|}$ הוא וקטור יחידה, כי הרי מתקיים:

$$\|\frac{u}{\|u\|}\| = \|\underbrace{\left(\frac{1}{\|u\|}\right)}_{\text{סקלר}} \cdot u\| = \left|\frac{1}{\|u\|}\right| \|u\| = \frac{1}{\|u\|} \cdot \|u\| = 1$$

דוגמה

ניקח את $V = \mathbb{R}^2_{\text{coll}}$ ואת ה־ $\langle | \rangle$ המכפלה הפנימית הסטנדרטית או $\{|\}$, מהי הנורמה $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ יחסית לכל אחת מהמכפלות?

נבחין כי מתקיים:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = 1$$
$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 \Rightarrow \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{2}$$

אם כך, הנורמה נובעת מהמכפלה הפנימית. אבל כעת נוכיח שאם יש לנו נורמה של וקטורים, נוכל לחשב את המכפלה הפנימית שלה.

טענה (פולריזציה)

יהי $(V, \langle i \rangle)$ ממ"פ מעל $\mathbb{R}$. אזי לכל $u, v \in V$ אזי מתקיים:

$$\langle u \mid v \rangle = \frac{1}{4} \cdot \left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$$

הוכחה

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v \mid u+v \rangle =$$
$$\langle u+v \mid u \rangle + \langle u+v \mid v \rangle =$$
$$\langle u \mid u \rangle + \langle v \mid u \rangle + \langle u \mid v \rangle + \langle v \mid v \rangle =$$
$$\langle u \mid u \rangle + 2\left\langle u \mid v \right\rangle + \langle v \mid v \rangle$$

והנורמה השנייה:

$$\|u-v\|^2 = \langle u-v \mid u-v \rangle =$$
$$\langle u \mid u \rangle - 2\left\langle u \mid v \right\rangle + \langle v \mid v \rangle$$

וכעת מתקיים:

$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4 \cdot \langle u \mid v \rangle$$

כנדרש.

טענה

יהי $(V, \langle i \rangle)$ ממ"פ מעל $\mathbb{C}$. אזי לכל $u, v \in V$ אזי מתקיים:

$$\langle u \mid v \rangle = \frac{1}{4} = \left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 - i\|u+v\|^2 + i\|u-v\|^2\right)$$

ההוכחה של הממשיים איננה עובדת כיוון שהסתמכנו בה על הסימטריות של הממשיים.

הגדרה

יהי $(V,\langle i\rangle)$ ממ"פ. נאמר ש־ $u,v\in V$ ניצבים אם $\langle u\mid v\rangle=0$. במקרה זה נסמן־ $u\perp v$. זהו יחס סימטרי.

משפט פיתגורס

לכל $u,v\in V$. אם־ $u\perp v$ אזי־ $\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.

הוכחה

$$\|u+v\|^2=\langle u+v\mid u+v\rangle=\langle u+v\mid v\rangle+\langle u+v\mid v\rangle=$$

$$\langle u\mid u\rangle+\langle u\mid v\rangle+\langle v\mid u\rangle+\langle v\mid v\rangle\overset{\perp}{=}$$

$$\|u\|^2+\|v\|^2$$

הערה

נשים לב שלכל u,v מתקיים:

$$\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2+\langle u\mid v\rangle+\overline{\langle u\mid v\rangle}=$$

$$\|u\|^2+\|v\|^2+2\text{Re}\left(\langle u\mid v\rangle\right)$$

כעת, אם־ $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אזי נקבל כי:

$$\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2\Leftrightarrow u\perp v$$

אמנם, מעל המרוכבים זה לא נכון.

<u>הרצאה 17</u>

אי שוויון קושי - שוורץ

יהי $(V,\langle i\rangle)$ ממ"פ. לכל $u,v\in V$ מתקיים: $|\langle u\mid v\rangle|\leq\|u\|\cdot\|v\|$ ושוויון ביניהם אם ורק אם u,v תלויים ליניארית.

הוכחה

נניח ו־u,v תלויים ליניארית. אם u או v שווים לאפס, אז בהכרח אי שוויון המתקיים, מבחינה טרוויאלית.

לכן נניח כי u ו־ v שונים מאפס. כעת נתבונן במכפלה הפנימית הבאה:

$$\langle v|u\rangle-\alpha\langle v|v\rangle=\langle v|u-\alpha v\rangle$$

כעת, נצטרך לקחת α המקיים־ $\alpha=\frac{\langle v|u\rangle}{\langle v|v\rangle}=\frac{\langle v|u\rangle}{\|v\|^2}$, על מנת שאי השוויון יתאפס. כלומר בסך הכל קיבלנו כי $v\perp(u-\alpha v)$ ולכן גם $\alpha v\perp u-\alpha v$. לכן, לפי פיתגורס אנחנו מקבלים:

$$\|u\|^2=\|av\|^2+\|u-\alpha v\|^2$$

נבחין כי כל המחוברים חיוביים, ולכן בהכרח מתקיים:

$$\|av\|^2\leq\|av\|^2+\|u-\alpha v\|^2$$

כמו כן, נבחין כי מתקיים:

$$\|av\|^2=|a|^2\cdot\|v\|^2=\left|\frac{\langle v|u\rangle}{\|v\|^2}\right|\|v\|^2=\left|\frac{\langle v|u\rangle^2}{\|v\|^4}\right|\|v\|^2=\frac{\left|\langle v|u\rangle^2\right|}{\|v\|^2}$$

כלומר, בסופו של דבר קיבלנו כי:

$$\|u\|^2\cdot\|v\|^2\geq\left|\langle v|u\rangle^2\right|\Rightarrow|\langle u|v\rangle|\leq\|u\|\cdot\|v\|$$

כנדרש.

השוויון מתקיים כאשר $\|u-\alpha v\|^2=0$. כלומר בפרט $u=av$, דהיינו תלויים ליניארית.

דוגמאות

(I) לכל $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפות אזי- $\left|\int\limits_0^1 f\left(x\right)g\left(x\right)dx\right|^2\leq\int\limits_0^1 f^2\left(x\right)dx\cdot\int\limits_0^1 g^2\left(x\right)dx$.

אי שוויון המשולש

לכל $u,v\in V$ מתקיים $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$, כאשר יש שוויון רק כאשר אחד מהוקטורים הוא מכפלה בסקלר אי שלילי של האחר.

הוכחה

נבחין כי מתקיים:

$$\|u+v\|^2=\|u\|^2+\langle u|v\rangle+\overline{|\langle u|v\rangle|}+\|v\|^2\leq\|u\|^2+2\left|\langle u|v\rangle\right|+\|v\|^2$$

כעת נשתמש באי שוויון **קושי-שוורץ**:

$$\|u\|^2+2\left|\langle u|v\rangle\right|+\|v\|^2\leq\|u\|^2+2\|u\|\cdot\|v\|+\|v\|^2=\left(\|u\|+\|v\|\right)^2$$

כלומר קיבלנו כי- $\|u+v\|^2\leq\left(\|u\|+\|v\|\right)^2$ ומכאן $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$, כנדרש.

השוויון הראשון מתקיים כאשר $\mathbb{R}\ni\langle u|v\rangle\geq 0$ וגם אם מתקיים ש- u,v תלויים ליניארית.

לכן בפרט מתקיים $v=\alpha u$, כלומר נקבל:

$$\langle u|v\rangle=\alpha\left\langle u\|u\right\rangle=a\|u\|^2$$

כלומר בהכרח רק כאשר $a\geq 0$.

פונקציית המרחק

נגדיר כעת פונקציית מרחק על ידי $d : V \times V \to \mathbb{R}$, באמצעות־ $d(v,w) = \|w - v\|$.

תכונות פונקציית המרחק.

(I) $d(v,w) = 0$ אם ורק אם $\|w - v\| = 0$, כלומר בפרט מאי השוויון הקודם רק אם $\langle w - v | w - v \rangle = 0$, כלומר רק אם $w - v = 0$, כלומר בפרט $w = v$.

(II) אי שוויון המשולש. כלומר היא מקיימת: $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$.

(III) סימטריות. שהרי מתקיים: $d(v,w) = d(w,v)$.

9.3 בסיס ומרחב אורתגונלי.

9.3.1 ניצבות. הגדרה

יהי $T, S \subseteq V$ תתי קבוצות, כאשר $u \in V$. נאמר ש־ $u \perp S$ אם $\langle u | v \rangle = 0$ לכל $v \in S$.

נאמר ש־ $T \perp S$ אם לכל $t \in T$ ולכל $s \in S$ מתקיים $\langle t | s \rangle = 0$.

נסמן $S^{\perp} = \{v \in V \mid v \perp S\}$.

טענה

אם $S \subseteq V$ אזי:

(I) $v \perp s$ אם ורק אם $v \perp \operatorname{span}(s)$

(II) $S^{\perp}$ תת מרחב של V.

(III) אם $S \subseteq T \subseteq V$ אזי $T^{\perp} \subseteq S^{\perp}$.

9.3.2 הטלה אורתוגונלית. הגדרה

יהי W ת"מ של V. ויהי $v \in V$. נאמר שוקטור v_w הוא הטלה אורתגונלית של v על w אם:

(I) $v_w \in W$.

(II) $v - v_w \in W^{\perp}$.

הערה

נשים לב כי לא תמיד v_w קיים (אכן קיים אם $\dim W < \infty$).

דוגמה

נתבונן ב־ V שהינו מרחב כל הפונקציות $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ הרציפות, וב־ W שהינו תת מרחב המכיל את כל אותן הפונקציות, רק שהינן גזירות, ובמכפלה הפנימית $\langle f|g\rangle=\int\limits_0^1 g\left(x\right)f\left(x\right)dx$.

נסיים אם נראה כי $W^{\perp}=\{0\}$.

9.3.3 **יחידות וקיום ההטלה האורתוגונלית. טענה**

יהי W ת"מ בממ"פ, ויהי $V\in V$ עם הטלה אורתגונלית, v_w על W. אזי מתקיים כי לכל $w\in W$ מתקיים: $\|v-w\|\leq\|v-v_w\|$ ושוויון אם $w=v_w$.

הגדרה

יהיו $v_1\dots v_k\in V$. נאמר ש־ $\{v_1\dots v_k\}$ היא משפחה **אורתגונלית**, אם מתקיים:

$\forall i\neq j\ \ \langle v_i|v_j\rangle=0\Rightarrow i\perp j\ (I)$

$\forall i\ \|v_i\|=1\ (II)$.

אם בנוסף, $\|v_i\|^2=\langle v_i\mid v_i\rangle=1$, אזי נאמר שהמשפחה היא **אורתונורמלית**.

טענה

תהי $(v_1\dots v_k)$ משפחה אורתגונלית ב־ V של וקטורים שונים מאפס. אזי $(v_1\dots v_k)$ בת"ל.

הוכחה

נניח שהמשפחה אורתגונלית, כאשר כל הוקטורים שונים מאפס.

כעת ניקח צירוף לינארי ונשווה ל־ 0:

$$\sum_{i=1}^{k}a_iv_i=a_1v_1+\ldots+a_kv_k=0\ a_1\dots a_k\in\mathbb{F}$$

נרצה שכל המקדמים יהיו שווים לאפס.

ניקח כעת הטלה אורתגונלית ונראה שמתקיים:

$$0=\langle v_i|0\rangle=\left\langle v_j|\sum_{i=1}^{k}a_iv_i\right\rangle=\sum_{i=1}^{k}a_i\left\langle v_j|v_i\right\rangle$$

כעת נבחין כי $v_j,v_i\neq0$ ולכן בהכרח $\sum\limits_{i=1}^{k}a_i=0$. כלומר, כל המקדמים הינם אפסים, כנדרש.

טענה (תנאי מספיק לקיום הטלה אורתוגונלית)

יהי $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ממ"פ, ו- W תת מ"ו ממימד סופי, ונניח שקיים בסיס אורתונורמלי $w_1, \ldots, w_k$ של W, אם- $v \in V$,
אזי הוקטור $v_w = \sum_{i=1}^{k} \langle w_i|v\rangle\, w_i$ הוא הטלה אורתוגונלית של v על w.

הוכחה

נבדוק שתנאי ההטלה האורתוגונלית מתקיים:

(i) הינו מיידי, כי הרי v_w צירוף ליניארי של וקטורי הבסיס w_i.

(ii) אנו רוצים לבדוק כי $(v - v_w) \perp W$. אך נבחין כי $W = \text{span}(w_1, \ldots w_n)$, לכן מספיק שנבדוק שהוקטור ניצב לכל אחד מהם. כלומר, לכל j- $(v - v_w) \perp w_j$.

נתבונן במכפלה הפנימית ביניהם ונקבל:

$$\langle w_j|v - v_w\rangle = \left\langle w_j \mid v - \sum_{i=1}^{k} \langle w_i|v\rangle\, w_i \right\rangle =$$

$$\langle w_j \mid v\rangle - \left\langle w_j \mid \sum_{i=1}^{k} \langle w_i|v\rangle\, w_i \right\rangle =$$

$$\langle w_j \mid v\rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle w_i|v\rangle \langle w_j \mid w_i\rangle$$

מההגדרה של המשפחה האורתגונלית, אנחנו מקבלים כי רק כאשר $i = j$ נשארים איברים שאינם אפסים, ובמקרה זה התוצאה הינה 1 , כלומר:

$$\langle w_j \mid v\rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle w_i|v\rangle \langle w_j \mid w_i\rangle =$$

$$\langle w_j \mid v\rangle - \langle w_j \mid v\rangle = 0$$

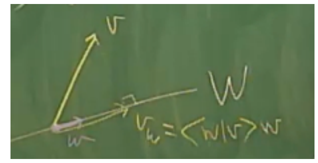
כנדרש.

מסקנה

אם W תת מ"ו ממימד סופי ויש לו בסיס אורתונורמלי, אזי לכל $v \in V$ יש הטלה אורתוגונלית של v.

דוגמה

ניקח $V = \mathbb{R}^2$ ו-$w \in V$, כאשר $\|w\| = 1$ ומאידך $W = \text{span}\,(w)$. נוכל להתבונן בציור הבא שממחיש את הטענה:



תהליך גראם שמידט

יהי $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ממ"פ, ו־ $(b_1, \ldots, b_m)$ קבוצה בת"ל. אזי יש קבוצה אורתונורמלית־ $(u_1, \ldots u_m)$ כך שלכל $1 \leq k \leq m$ מתקיים $\text{span}\left(b_1, \ldots, b_m\right) = \text{span}\left(u_1, \ldots u_m\right)$.

הוכחה

באינדוקציה על k.

<u>בסיס האינדוקציה</u>

נגדיר $u_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}$, ולכן נקבל כי u_1 הינו "משפחה" אורתונורמלית, ובפרט $\text{span}\left(b_1\right) = \text{span}\left(u_1\right)$.

<u>צעד האינדוקציה</u>

נניח שמצאנו $u_1, \ldots, u_j$ משפחה אורתונורמלית, כך שלכל $i \leq j$ מתקיים כי $\text{span}\left(b_1 \ldots b_j\right) = \text{span}\left(u_1, \ldots, u_j\right)$.
כעת, נכתוב $W = \text{span}\left(u_1, \ldots, u_j\right)$. נבחין כי $b_{j+1} \notin W$. מהטענה הקודמת, קיים b'_{j+1} שהינו הטלה אורתוגונלית של b_{j+1} על W (כי $u_1, \ldots, u_j$ בסיס אורתונורמלי של W), שהרי b'_{j+1} שייך ל־ W וגם־ $\left(b_{j+1} - b'_{j+1}\right) \perp u_i$ לכל $i \leq j$.
בשלב זה, נגדיר את $u_{j+1} = \frac{b_{j+1} - b'_{j+1}}{\|b_{j+1} - b'_{j+1}\| b_{j+1} - b'_{j+1}}$ (מוגדר היטב כי $b_{j+1} - b'_{j+1}$ איננו אפס.).
לכן קיבלנו כי בסופו של דבר $u_1, \ldots, u_{j+1}$ הינו משפחה אורתונומלית.
נחשב כעת את $\text{span}\left(u_1, \ldots, u_j, u_{j+1}\right)$. אנו יודעים, מהנחת האינדוקציה, כי לכל $i \leq j$ מתקיים ש־ $b_i \in \text{span}\left(u_1, \ldots, u_j\right)$. נתבונן ב־ b_{j+1} ונקבל:

$$b_{j+1} = \left(b_{j+1} - b'_{j+1}\right) + b'_{j+1}$$

נוכל להבחין כי $\left(b_{j+1} - b'_{j+1}\right) \in \text{span}\left(u_{j+1}\right)$ ואילו $b'_{j+1} \in \text{span}\left(u_1, \ldots, u_j\right)$.
לכן $\text{span}\left(b_1 \ldots b_{j+1}\right) \subseteq \text{span}\left(u_1, \ldots, u_{j+1}\right)$. שניהם בת"ל, הראשון מההנחה והשני מהעובדה שהינו אורתונורמלי, ולכן, מהמימדים שלהם רואים כי $\text{span}\left(b_1 \ldots b_j\right) = \text{span}\left(u_1, \ldots, u_j\right)$, כנדרש.

מסקנה

אם $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ממ"פ ממימד סופי, יש לו **בסיס אורתונורמלי**.

הוכחה

מפעילים את גראם שמידט, על בסיס $b_1, \ldots, b_m$ של V.

9.3.4 **בסיס אורתונורמלי. טענה**

אם $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ממ"פ ו־ $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ בסיס אורתונורמלי, אזי לכל $v \in V$ נקבל כי:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \langle u_1 \mid v \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n \mid v \rangle \end{bmatrix}$$

ניתן לכתוב זאת גם בדרך הבאה: $v = \sum_{i=1}^{n} \langle u_i \mid v \rangle \, u_i$.

הוכחה

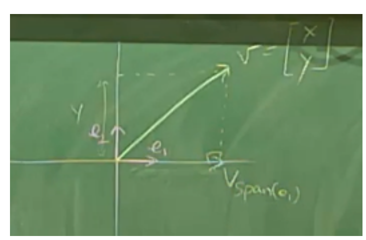
נכתוב את את v כצירוף ליניארי של איברי הבסיס. דהיינו: $v = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$, וכעת נקבל:

$$\langle u_j \mid v \rangle = \left\langle u_j \mid \sum_{i=1}^{n} a_i u_i. \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i. \langle u_j \mid u_i \rangle = a_j$$

כאשר דבר זה נובע מהעובדה ש־ $\mathcal{B}$ הינו בסיס אורתונורמלי.

דוגמה

נתבונן בציור הבא:



במקרה זה נקבל כי $x = \langle e_1 \mid v \rangle \, e_1$.

מסקנות

אם $(V,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ ממ"פ ו־ $\mathcal{B}=(u_1,\ldots,u_n)$ בסיס אורתונורמלי, אזי לכל $v,w\in V$ מתקיים:

(i) פרסבל:

$$\langle v\mid w\rangle=\sum_{i=1}^{n}\overline{\langle u_i\mid v\rangle}\,\langle u_i\mid v\rangle=\left[\overline{\langle u_1\mid v\rangle}\ldots\overline{\langle u_n\mid v\rangle}\right]\cdot\begin{bmatrix}\langle u_1\mid w\rangle\\ \vdots\\ \langle u_1\mid w\rangle\end{bmatrix}=$$

$$\overline{[v]}_{\mathcal{B}}^{t}\cdot[w]_{\mathcal{B}}$$

(ii) בסל:

$$\|v\|^2=\sum_{i=1}^{n}|\langle u_i\mid v\rangle|^2$$

הערה

המשמעות של המסקנה של פרסבל: בחירה של בסיס אורתונורלי ל־ V, נותנת איזומורפיזם־ $V\to\mathbb{F}^n_{\text{coll}}$, דבר שמאפשר לנו לשלוח את $\langle\cdot|\cdot\rangle$ למ"פ הסטנדטרטית על $\mathbb{F}^n_{\text{coll}}$.

הוכחה

מהטענה הקודמת, נוכל לרשום את v כך: $v=\sum_{i=1}^{n}\langle u_i\mid v\rangle\,u_i$ וכך גם את $w=\sum_{j=1}^{n}\langle u_{\mathrm{j}}\mid v\rangle\,u_j$.

(i) כעת מתקיים:

$$\langle v\mid w\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{n}\langle u_i\mid v\rangle\,u_i\mid\sum_{j=1}^{n}\langle u_{\mathrm{j}}\mid v\rangle\,u_j\right\rangle=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{\langle u_i\mid v\rangle}\,\sum_{j=1}^{n}\langle u_j\mid w\rangle\,\langle u_i\mid u_j\rangle\right)\cdot=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{\langle u_i\mid v\rangle}\,\langle u_i\mid w\rangle$$

$$\|v\|^2 = \langle v \mid v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle u_i \mid v \rangle} \langle u_i \mid v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left|\langle u_i \mid v \rangle\right|^2 \ (ii)$$

עד כה התמקדנו במכפלות פנימיות, אבל כעת נרצה להתבונן באופרטורים על מרחבי מכפלות פנימית. אבל כעת אנו רוצים שהם גם ישמרו על המכפלה הפנימית (שהרי מדובר בהעתקה ליניארית מהמרחב לעצמו).

הרצאה מס' 19

9.4 **אופרטורים אורתוגונליים\אוניטריים. הגדרה**

יהי $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ממ"פ.

אם $f : V \to V$ אופרטור כך שלכל $v, w \in V$ מתקיים: $\langle f(v) \mid f(w) \rangle = \langle v \mid w \rangle$

אזי נאמר ש־ f:

- אורתוגנולי אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (או אוניטרי ממשי).

- אוניטרי אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (מלשון - שומר על וקטור יחידה - unit).

הערות

(i) אם f אורתגונלי\אוניטרי, אזי הוא שומר על הנורמה. כלומר, לכל $v \in V$ אזי־ $\|v\| = \|f(v)\|$.

(ii) f שומר גם על ניצבות. כלומר:

$$v \perp w \Rightarrow \langle v \mid w \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(v) \mid f(w) \rangle = f(v) \perp f(w)$$

זהירות, לא כל אופרטור ששומר על ניצבות הינו אורתגונלי:

דוגמה

ניקח את $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ו־ $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ממ"פ. ניקח את האופרטור $f : V \to V$ המוגדר על ידי $f(v) = 2v$.

אם $v \perp w$ אזי נקבל:

$$\langle f(v) \mid f(w) \rangle = \langle 2v \mid 2w \rangle = 4 \langle v \mid w \rangle = 0$$

כלומר, הראינו ש־ f שומרת על ניצבות).

אבל מאידך, f איננה אורתוגונלית, שהרי מתקיים:

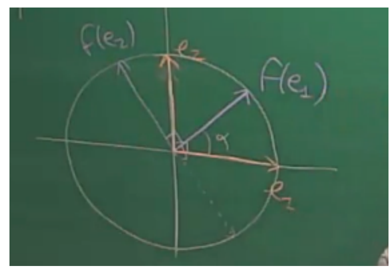
$$\langle f(v) \mid f(v)\rangle = \langle 2v \mid 2v\rangle = 4\langle v \mid v\rangle \neq \langle v \mid v\rangle$$

כלומר, איננו שומר על המכפלה הפנימית שלו עם עצמו.

דוגמה לאופרטור אורתגונלי ב־ $\mathbb{R}^2_{\text{coll}}$

ניקח את $V = \mathbb{R}^2_{\text{coll}}$, ואת $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ המכפלה הסקלרית. אילו אופרטורים אורתגונליים יכולים להיות?

נניח שישנו $f : V \to V$ אורתגונלי, אזי $f(e_1)$ חייב להיות על מעגל היחידה (כיוון שהנורמה הינה 1) . וכעת, בגלל העובדה ששומר על ניצבות, f הינו או סיבוב, או שיקוף, כמו שרואים בציור הבא:



טענה

יהי $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ממ"פ, ו־ $f : V \to V$ אופרטור. אזי התנאים הבאים שקולים:

(i) f אורתוגונלי \אוניטרי.

(ii) לכל $v \in V$ מתקיים כי $\|f(v)\| = \|v\|$

(iii) לכל $v \in V$ אם $\|v\| = 1$ אזי $\|f(v)\| = 1$.

הוכחה

$(ii) \Leftarrow (i)$ ראינו כבר קודם לכן.

$(ii) \Rightarrow (i)$ פולריזציה, שטוענת כי לכל $v, w \in V$ מעל $\mathbb{R}$ מתקיים כי $\langle u \mid v\rangle = \frac{1}{4} \cdot \left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$.

כעת נציב את הנוסחה ונראה כי:

$$\langle f(v) \mid f(w)\rangle = \frac{1}{4}\cdot\left(\|f(v)+f(w)\|^2-\|f(v)-f(w)\|^2\right) =$$
$$\frac{1}{4}\cdot\left(\|f(v+w)\|^2-\|f(v-w)\|^2\right) = \left(\|v+w\|^2-\|v-w\|^2\right) =$$
$$\langle v \mid w\rangle$$

מעל $\mathbb{C}$ ההוכחה עובדת בצורה דומה.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ מיידי.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ נניח שלכל v שהינו וקטור יחידה, גם $f(v)$ הינו וקטור יחידה.

כעת, ניקח $u \in V$. אם $u = 0$, אזי בהכרח $f(u) = 0$ ולכן $\|u\| = 0 = \|u\|$.

אם $u \neq 0$ נגדיר $v = \frac{u}{\|u\|}$ אזי v הינו וקטור יחידה (ראינו זאת). ולכן על פי הנתון, f שולחת אותו לוקטור יחידה. כלומר:

$$1 = \|f(v)\| = \|f\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\| = \|\frac{1}{\|u\|}f(u)\| = \frac{1}{\|u\|}\|f(u)\|$$

כלומר קיבלנו כי $\|u\| = \|f(u)\|$.

טענה

יהי $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ממ"פ, עם $\dim V < \infty$. ויהי $f : V \to V$ אופרטור. אם f אורתגונלי\אוניטרי, אזי f הפיך.

הוכחה

מספיק להוכיח ש- f חח"ע.

ניקח $v \in V$. אם $f(v) = 0$, אזי $\|v\| = \|f(v)\| = 0$, כלומר $v = 0$, ולכן בהכרח הינה חח"ע.

הערה

גם f^{-1} אורתגנולי\אוניטרי. כי לכל $v \in V$ מתקיים:

$$\|f^{-1}(v)\| = \|f\left(f^{-1}(v)\right)\| = \|v\|$$

ערכים עצמיים במרחב אורתגנולי\אוניטרי

מה ניתן להגיד על ערכים עצמיים של אופרטור אורתגונלי?

כלומר, בהינתן λ שהינו ע"ע של f אורתגנולי\אוניטרי, מה ניתן להגיד על λ?

למעשה העובדה שמדובר בערך עצמי, אומרת כי קיים $v \in V$ כך ש- $f(v) = \lambda v$. אך כיוון שהינו אופרטור אורתגונלי, השומר על הנורמה, אזי מתקיים:

$$\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\| \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow$$

כעת מתקיים כי $\mathbb{F} = \mathbb{R} : \lambda = \pm 1$

ומאידך, אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ דבר זה אומר ש- λ נמצאת על מעגל היחידה.

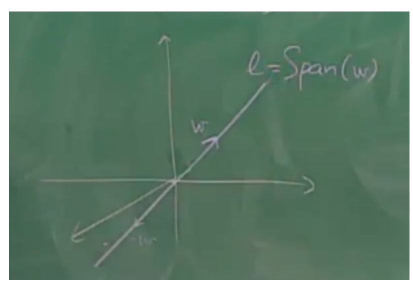
דוגמה

ניקח $V = \mathbb{R}^3_{\text{coll}}$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

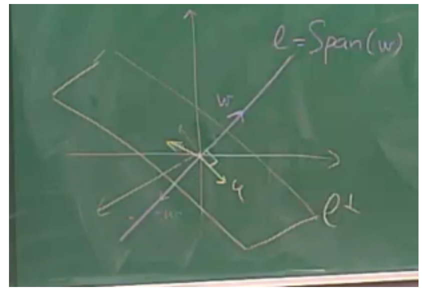
אנו יודעים שלאופרטור $f : V \to V$ אורתגונלי, יש ע"ע λ.

הוכחנו כי חייב להתקיים כי $\lambda \pm 1$. ניקח כעת w שהינו וקטור עצמי,

דבר זה מחייב כי $f(w) = \pm w$:



ומאידך מתקיים:



כלומר, העובדה ש־ f שומרת על ניצבות גוררת כי $f\left(l^{\perp}\right)\subseteq l^{\perp}$ ולמעשה מדובר בתת מרחב f־ אינווריאנטי.

על $l^{\perp}$, מתקיים כי f שומר גם על מ"פ, כלומר למעשה f הינה או סיבוב או סיבוב+שיקוף.

טענה

יהי $(V,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ ממ"פ, עם $\dim V<\infty$. ויהי $f:V\to V$ אופרטור. אזי התנאים הבאים שקולים:

(i) f אורתוגונלי\אוניטרי.

(ii) לכל $\mathcal{B}=(b_1,\dots b_n)$ בסיס אורתונורמלי של V, אזי $(f(b_1),\dots,f(b_n))$ הינו גם בסיס אורתונורמלי.

(iii) קיים בסיס אורתונורמלי $\mathcal{B}=(b_1,\dots b_n)$ כך ש־ $(f(b_1),\dots,f(b_n))$ הינו גם בסיס אורתונורמלי.

הוכחה

ניזכר כי אם ידוע לנו כי $\mathcal{B}=(b_1,\dots b_n)$ בסיס אורתנורמלי, אזי $\langle b_i\mid b_j\rangle=\delta_{ij}$.

כעת נוכיח את כל הכיוונים:

$(i)\Rightarrow(ii)$ לכל i,j מתקיים כי:

$$\langle f(b_i)\mid f(b_j)\rangle=\langle b_i\mid b_j\rangle=\delta_{ij}$$

ולכן $(f(b_1),\dots,f(b_n))$ בסיס אורתונורמלי, לפי ההגדרה.

$(ii)\Rightarrow(iii)$ מיידי - אם לכל בסיס אז בהכרח קיים אחד.

$(iii)\Rightarrow(i)$ נניח שקיים בסיס אורתונורמלי $\mathcal{B}=(b_1,\dots b_n)$ כך ש־ $(f(b_1),\dots,f(b_n))$ הינו גם בסיס אורתונורמלי.

ניזכר כי לכל $v,w\in V$ אם $[v]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}$ וגם $[w]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{bmatrix}$ אזי מתקיים (מפרסבל) : $\langle v\mid w\rangle=\sum_{i=1}^{n}\overline{v}_iw_i$.

ממילא מתקיים גם כי:

$$\left\langle f\left(\sum_{i=1}^{n} v_i b_i\right) \mid f\left(\sum_{i=1}^{n} w_j b_j\right)\right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} v_i f\left(b_i\right) \mid \sum_{i=1}^{n} w_j f\left(b_j\right)\right\rangle =$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{v} w_j \left\langle f\left(b_i\right) \mid f\left(b_j\right)\right\rangle \overset{\delta_{ij}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{v} w_j = \langle v \mid w\rangle$$

נניח ש־ $f : V \to V$ אינו אופרטור אורתגונולי\אוניטרי, ולקחנו $\mathcal{B} = (b_1, \dots b_n)$ בסיס אורתנורמלי של V,
מה אפשר להגיד על $A = [f]_{\mathcal{B}}$?

טענה

יהי $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ממ"פ, עם $\dim V < \infty$. ויהי $f : V \to V$ אופרטור.
$\mathcal{B} = (b_1, \dots b_n)$ בסיס אורתנורמלי ו-$A = [f]_{\mathcal{B}}$.
אזי f הינו אורתוגנולי\אוניטרי אם ורק אם $\overline{A^t} \cdot A = I$.

..

הוכחה

ראינו כבר כי אם f הינו אורתוגנולי\אוניטרי אז בהכרח מתקיים - $\langle f(b_i) \mid f(b_j)\rangle = \langle b_i \mid b_j\rangle = \delta_{ij}$.
דבר זה גורר לנו, כאמור, מפרסבל ומכך שמדובר בבסיס אורתונורמלי, כי:

$$\overline{[f(b_i)]_{\mathcal{B}}}^t \cdot \begin{bmatrix} f(b_j) \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \left(\overline{A[b_i]_{\mathcal{B}}}^t\right) \cdot \left(A \begin{bmatrix} b_j \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}\right) = \delta_{ij} \Rightarrow$$
$$\overline{\left(A \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)}^t \cdot \left(A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \overline{\left(\begin{bmatrix} a_1^i \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n^i \end{bmatrix}\right)}^t \cdot \left(\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}\right) =$$
$$\begin{bmatrix} \overline{a_{1i}} & \dots & \overline{a_{ni}} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \overline{A^t}\ A \end{bmatrix}_{ij}$$

מה שקיבלנו זה למעשה כי $\begin{bmatrix} \overline{A^t}\ A \end{bmatrix}_{ij} = \delta_{ij}$, כלומר מטריצת היחידה. ולכן קיבלנו כי $A^{-1} = \overline{A^t}$.

הגדרה

תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ הינה אורתוגונלית, אם $A^tA = I$.

ו־ $A \in M_n(\mathbb{C})$ הינה אוניטרית, אם $\overline{A^t}A = I$.

<u>הרצאה מס' 20</u>

עד כה, כשדיברנו על אופרטורים, ניסינו להבין מתי אפשר ללכסן אופרטור. כעת, כשיש לנו גם מכפלה פנימית על המרחב, אנו רוצים ללכסן אותו בבסיס אורתונורמלי. כעת נמצא תנאי, מתי אפשר ללכסן אופרטור, כדי שיהיה בסיס אורתנורמלי, שבו המטריצה אלכסונית.

קודם לכן, נגדיר:

9.5 **האופרטור הצמוד.**

9.5.1 **משפט (ההצגה של ריס).** יהי $(V, \langle | \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית. נקבע וקטור $u \in V$ ונקבל העתקה $v \to \langle u \mid v \rangle$, כאשר $v \in V$ כלשהוא. ההעתקה הזאת תלויה ב־ u כמובן.

כיוון שההעתקה ליניארית במשתנה השני (לפי האקסיומות שפיתחנו בתחילת הפרק), אזי מדובר בהעתקה ליניארית.

נסמן העתקה זו על ידי $\langle u|$.

דוגמה:

יהי $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ בסיס אורתונורמלי של V. ראינו שלכל $v \in V$ קיבלו כי $\langle b_1 \mid v \rangle$ היא הקוארדינטה הראשונה של v בבסיס $\mathcal{B}$.

לכן $\langle b_1|$. היא העתקה שמחזירה את הקוארדינטה הראשונה של וקטור. (לא משהו חדש, אבל אנחנו חושבים על זה כעת כפונקציה).

הגדרה

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. פונקציונל לינארי (לפעמים קוראים לזה תבנית ליניארית), הוא העתקה ליניארית $V \to \mathbb{F}$.

ולמעשה, הפעולה שעשינו קודם לכן היא בעצמה פונקציונל.

המשפט של ריס טוען שלמעשה, כאשר אנחנו במרחב סופי, כל פונקציונל מגיע מוקטור מהצורה הזאת.

משפט

יהי $(V, \langle | \rangle)$ ממ"פ כאשר $\dim V < \infty$.

ויהי $l : V \to \mathbb{F}$ פונקציונל. אזי קיים וקטור $u \in V$ יחיד כך ש־ $l = \langle u|$. כלומר, לכל $v \in V$ מתקיים כי $l(v) = \langle u \mid v \rangle$.

הוכחה

תחילה נוכיח יחידות.

נניח ש־ $u, w \in V$ כך ש־ $\langle u| = \langle w|$.

כלומר בפרט לכל $v \in V$ מתקיים כי $\langle u \mid v\rangle = \langle w \mid v\rangle$.

ובנוסף, אם ניקח $v = u - w$ אזי נקבל $\langle u \mid u-w\rangle = \langle w \mid u-w\rangle$, ואז משם נקבל כי $\langle u \mid u-w\rangle - \langle w \mid u-w\rangle = 0$ ומכאן $\langle u-w \mid u-w\rangle = 0$ ולכן $w - u = 0 \Rightarrow u = w$.

כעת נוכיח קיום.

יהי $l : V \to \mathbb{F}$. נגדיר $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ בסיס אורתונורמלי. נגדיר $u = \sum_{i=1}^{n} \overline{l(b_i)} b_i$.

כעת, נוכיח כי $l = \langle u|$.

מספיק לבדוק שלכל j מתקיים כי $l(b_j) = \langle u \mid b_j\rangle$.

נבחין כי:

$$\langle u \mid b_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \overline{l(b_i)} b_i \mid b_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{l(b_i)}} \langle b_i \mid b_j\rangle =$$
$$\sum_{i=1}^{n} l(b_i) \langle b_i \mid b_j\rangle = l(b_j)$$

כעת, באמצעות המשפט הזה, נגדיר את האופרטור הצמוד.

9.5.2 **הגדרת האופרטור הצמוד**. יהי $(V, \langle | \rangle)$ ממ"פ. כעת יהי $f : V \to V$ אופרטור. נקבע $u \in V$. ונתבונן בפונקציונל ש־ u מגדיר, אך נוסיף לו את ההרכבה של f.

כלומר, ניקח v נרכיב עליו $f(v)$, ועליו נפעיל את הפוקציונל ונקבל $\langle u \mid f(v)\rangle$.

אם כך, קיבלנו בפרט כי $\langle u| \circ f$ הינו בעצמו פונקציונל ליניארי.

משפט ריס שבדיוק הוכחנו, אומר למעשה שקיים $u' \in V$ יחיד כך ש־ $\langle u| \circ f = \langle u'|$.

נתבונן כעת בקשר בין u ובין u'. נוכיח כי ההעתקה שמעבירה מ u ל u' היא אופרטור, ונקרא לה "האופרטור הצמוד".

נבחין כי אם שתי ההעתקות שוות, דבר זה גורר כי לכל $v \in V$ מתקיים:

$$\langle u'| v = \langle u| \circ f(v) = \langle u \mid f(v)\rangle = \langle u \mid f(v)\rangle$$

כעת נראה שההעתקה $u' \to u$ היא ליניארית.

טענה

יהי $(V,\langle|\rangle)$ ממ"פ כאשר $\dim V<\infty$.

יהי $f:V\to V$ אופרטור. אז קיים אופרטור יחיד $f^*:V\to V$ כך שלכל $u,v\in V$ מתקיים כי:

$$\langle u\mid f(v)\rangle=\langle f^*(u)\mid v\rangle$$

בנוסף, אם $A=[f]_{\mathcal{B}}$ ל- $\mathcal{B}$ בסיס אורתונורמלי של V, אזי $[f^*]_{\mathcal{B}}=A^*=\overline{A^t}$.

הוכחה

אם $\mathcal{B}=(b_1\dots b_n)$ בסיס אורתונורמלי של V, כאשר $A=[f]_{\mathcal{B}}$. אזי לכל $u,v\in V$ נחשב את $\langle u\mid f(v)\rangle$. כעת נבחין כי:

$$\langle u\mid f(v)\rangle\overset{\text{parseval}}{=}\overline{[u]_{\mathcal{B}}^t}\,[f(v)]_{\mathcal{B}}=$$
$$\overline{[u]_{\mathcal{B}}^t}A\,[v]_{\mathcal{B}}$$

כעת נגדיר $f^*:V\to V$ ע"י $[f^*]_{\mathcal{B}}=\overline{A^t}$. ונבחין כי $[f^*(u)]_{\mathcal{B}}=\overline{A^t}\,[u]_{\mathcal{B}}$.

לכן קיבלנו למעשה כי :

$$\langle u\mid f(v)\rangle=\overline{[f^*(u)]_{\mathcal{B}}^t}\,[v]_{\mathcal{B}}\overset{\text{parseval}}{=}\langle f^*(v)\mid v\rangle$$

כעת נבחין כי f^* היו אופרטור והוא מקיים את המשוואה שהראינו לעיל. היחידות נובעת ממשפט ריס.

הגדרה

f^* הוא האופרטור הצמוד של f.

המטריצה A^* היא המטריצה הצמודה של A.

הערות

(i) אם אנחנו במקרה הממשי, המטריצה הצמודה הינה $A^*=A^t$.

(ii) אם $\dim V=1$ מעל $\mathbb{C}$, אז $[a]^*=[\overline{a}]$. כלומר למעשה מדובר בהכללה של צמודים מעל $\mathbb{C}$.

(iii) אם $V \to V$: $\mathbb{F}$ הוא אורתוגנלי\אוניטרי. ו- $\mathcal{B}$ בסיס אורתונורמלי ו-$A = [f]_{\mathcal{B}}$, ראינו ש־ $A^tA = I$. כלומר, $A^{-1} = \overline{A^t}$. לכן, $f^{-1} = f^*$.

למה

יהי $(V, \langle | \rangle)$ ממ"פ כאשר $\dim V < \infty$. ויהיו $f, g : V \to V$ אופרטורים. יהי $\lambda \in \mathbb{F}$. אזי:

(i) $(f+g)^* = f^* + g^*$

(ii) $(\lambda f)^* = \lambda f^*$

(iii) $(f^*)^* = f$.

למה

יהי $(V, \langle | \rangle)$ ממ"פ כאשר $\dim V < \infty$. ויהי $f : V \to V$ אופרטור.

יהי W תת מ"ו f-אינווריאנטי.

אזי $w^\perp$ תת מ"ו f^* אינווריאנטי.

הוכחה

אנו יודעים כי לכל $w \in W$ מתקיים כי $f(w) \in W$. ניקח $u \in W^\perp$ ונרצה להראות ש- $f^*(u) \in W^\perp$.

על מנת לבדוק שוקטור מסוים נמצא ב- $W^\perp$, אנו צריכים לבדוק שהוא ניצב לכל וקטור ב-W.

יהי $w \in W$. נרצה להוכיח כי $\langle f^*(u) \mid w \rangle = 0$.

אך כעת נבחין שמתקיים:

$$\langle f^*(u) \mid w \rangle = \langle u \mid f(w) \rangle \overset{f(w)\in w}{=}{}^{, u \in W^\perp} 0$$

לכן הוכחנו בפרט כי $f^*(u) \in W^\perp$.

9.5.3 **אופרטורים צמודים לעצמם. הגדרה**

יהי $f : V \to V$ אופרטור צמוד לעצמו אם $f^* = f$.

כלומר, למעשה לכל $u, v \in V$ מתקיים כי $\langle u \mid f(v) \rangle = \langle f(u) \mid v \rangle$.

הערות

(i) בהינתן $\mathcal{B} = (b_1, \dots b_n)$ בסיס אורתונורמלי (ממימד סופי). ויהי $A = [f]_{\mathcal{B}}$. אזי אם נאמר כי f צמוד לעצמו דבר זה שקול ללומר כי $A = A^*$.

(ii) אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אזי $A^*=A^t$, ודבר זה גורם כי $A=A^t$.

הגדרה

מטריצה $A\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ כך ש- $A^t=A$, תיקרא מטריצה סימטרית.

$A\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ כך ש $A^*=A$ נקראת מטריצה הרמיטית. (באופן כללי מטריצה כך ש- $A=A^*$ צמודה לעצמה)

דוגמה

ניקח את המטריצות:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & i+1 \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

המטריצה $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ צמודה לעצמה.

המטריצה $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ לא צמודה לעצמה.

המטריצה $\begin{bmatrix} 1 & i+1 \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}$ כן צמודה לעצמה.

והמטריצה $\begin{bmatrix} 1 & i+1 \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}$ לא צמודה לעצמה.

הערה

אם A צמודה לעצמה, האיברים על האלכסון של A הם ממשיים.

טענה

אם $f:V\to V$ צמוד לעצמו, ו- $\lambda\in\mathbb{F}$ ע"ע של f, אזי $\lambda\in\mathbb{R}$.

הוכחה

אנו יודעים כי $f=f^*$. ניקח $\lambda\in\mathbb{F}$ ע"ע , ו- $u\in V$ ו"ע המתאים ל- λ. כלומר, $f\left(u\right)=\lambda u$. הדרך לעשות זאת היא למעשה לחשב את $\langle u\mid f\left(u\right)\rangle=\langle u\mid \lambda u\rangle=\lambda\langle u\mid u\rangle$.

נבחין כי גם מתקיים:

$$\langle u \mid f(u) \rangle = \langle f^*(u) \mid u \rangle = \langle \lambda u \mid u \rangle = \overline{\lambda} \langle u \mid u \rangle$$

כלומר קיבלנו בסך:

$$\lambda \langle u \mid u \rangle = \overline{\lambda} \langle u \mid u \rangle$$

אנו יודעים כי $u \neq 0$ ולכן $\langle u \mid u \rangle \neq 0$. כלומר בסך הכל:

$$\lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

מסקנה

יהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ כך ש- $A^* = A$. אז כל ע"ע של A הוא ממשי.

הרצאה מס' 21

טענה

אם f אופרטור צמוד לעצמו ונתונים שני ערכים עצמיים λ, μ של f עם u, v בהתאמה. אם $\lambda \neq \mu$, אזי $u \perp v$.

(זה מעניין אותי כי זה מאפשר לנו למצוא בסיס אורתנורמלי וללכסן אותם)

הוכחה

ניקח את המכפלה הפנימית הבאה:

$$\langle u \mid f(v) \rangle = \langle u \mid \mu v \rangle = \mu \langle u \mid v \rangle$$

ובנוסף:

$$\langle u \mid f(v)\rangle = \langle f^*(u) \mid v\rangle = \langle f(u) \mid v\rangle = \langle \lambda u \mid v\rangle$$
$$= \overline{\lambda}\langle u \mid v\rangle = \lambda \langle u \mid v\rangle$$

כלומר, קיבלנו:

$$\lambda \langle u \mid v\rangle = \mu \langle u \mid v\rangle \Rightarrow (\lambda - \mu)\langle u \mid v\rangle = 0 \Rightarrow \langle u \mid v\rangle = 0$$

טענה

בהינתן מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ צמודה לעצמה , אזי ל- A יש ע"ע.

הוכחה

נבחין כי אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, לכל מטריצה יש ע"ע (גם אם היא לא צמודה לעצמה).

אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, ניתן לחשוב על A כעל מטריצה מ- $M_n(\mathbb{C})$ ולכן יש לה ע"ע $\lambda \in \mathbb{C}$.

אמנם, $A^* = A$, לכן בהכרח $\lambda \in \mathbb{R}$.

מסקנה

אם $(V, \langle | \rangle)$ ממ"פ כאשר $\dim V < \infty$, ו-$f : V \to V$ צמוד לעצמו, אזי ל-f יש ע"ע.

9.6 **משפטים ספקטרליים. שאלה**

אם $(V, \langle | \rangle)$ ממ"פ ממימד סופי. ו- $f : V \to V$ אופרטור. מתי ניתן למצוא בסיס אורתונורמלי $\mathcal{B}$ כך ש- $[f]_{\mathcal{B}}$ היא אלכסונית? כלומר, מתי ניתן למצוא בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של f.

הערה

אם נצליח למצוא בסיס אורתוגונלי, $(b_1, \ldots, b_n)$ של וקטורים עצמיים, אזי $\left(\frac{b_1}{\|b_1\|}, \ldots \frac{b_n}{\|b_n\|}\right)$ הוא בסיס אורתונורמלי של ו"ע.

הגדרה

אם קיים $\mathcal{B}$ בסיס אורתונורמלי של ו"ע של f, נאמר ש- f ניתן ללכסון בבסיס אורתנורמלי.

9.6.1 **שאלה מקבילה למטריצות**. נניח ש- $A=[f]_{\mathcal{B}}$ כך ש- $\mathcal{B}$ בסיס אורתונורמלי. אם $\mathcal{L}$ בסיס אורתונורמלי, אחר כך ש- $[f]_{\mathcal{L}}$ כך ש- $[f]_{\mathcal{L}}$ אלכסונית, אזי $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{L}}AM^{\mathcal{L}}_{\mathcal{B}}$ היא אלכסונית (זו למעשה מטריצת מעבר בין שני בסיסים אורתונורמלים). נרצה להוכיח שהמטריצה הזאת היא אורתונורמלית.

למה

בהינתן $(V,\langle|\rangle)$ ממ"פ ממימד סופי, ויש $\mathcal{B}$ בסיס אורתונורמלי. ויהי $\mathcal{C}$ בסיס. אזי $\mathcal{C}$ בסיס אורתוגונלי אם ורק אם $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ אורתוגונלית.

הוכחה

ניקח בסיס $\mathcal{B}=(b_1,\ldots,b_n)$ ובסיס $\mathcal{C}=(c_1,\ldots,c_n)$.

נבחין כי המטריצה הבאה הינה:

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}[c_1]_{\mathcal{B}} & \ldots[c_n]_{\mathcal{B}}\end{bmatrix}$$

וכאן, אם ניקח את המטריצה הבאה נקבל:

$$\overline{M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}}^t=\begin{bmatrix}\overline{[c_1]_{\mathcal{B}}}\\ \vdots\\ \overline{[c_n]_{\mathcal{B}}}\end{bmatrix}$$

כעת, אם נכפול את שתי המטריצות נקבל:

$$\left[\overline{M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}}^tM^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\right]=\overline{[c_1]_{\mathcal{B}}}\cdot[c_j]_{\mathcal{B}}\overset{\text{parseval}}{=}\langle c_i\mid c_j\rangle$$

כעת נבחין כי $\mathcal{C}$ הוא בסיס אורתונורמלי אם ורק אם לכל i,j מתקיים כי $\langle c_i\mid c_j\rangle=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$.

אך דבר זה גורר שהמטריצה $\overline{M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}}^tM^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}=I$ היא מטריצת הזהות.

לכן f ניתן ללכסון בבסיס אורתונורמלי, אם ורק אם קיימת מטריצה אורתוגונלית M כך ש- MAM^{-1} אלכסונית.

נשים לב שבגלל ש- M אורתוגונלית, $M^{-1}=\overline{M^t}$. לכן בפרט $MAM^{-1}=MA\overline{M^t}$.

הגדרה

בהינתן מטריצה $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ כך ש $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ או $\mathbb{F}=\mathbb{R}$.

נאמר ש- A ניתנת ללכסון אורתוגונלי אם קיימת מטריצה M אורתוגונלית, כך ש- MAM^{-1} היא אלכסונית.

נאמר ש- A ניתנת ללכסון אוניטרי, אם קיימת מטריצה אוניטרית M כך ש-MAM^{-1} היא אלכסונית.

טענה

בהינתן $(V,\langle|\rangle)$ ממ"פ ממימד סופי, $f:V\to V$ אופרטור, ו-$\mathcal{B}$ בסיס אורתונורמלי, ו-$A=[f]_{\mathcal{B}}$. אזי f ניתן ללכסון בבסיס אורתונורמלי אם ורק אם A ניתנת ללכסון אורתוגונלי\אוניטרי.

9.6.2 **תנאי הכרחי ללכסון אורתוגונלי.** בהינתן אופרטור $f:V\to V$, נניח ש- $\mathcal{B}$ בסיס אורתוגונלי, כך ש- $A=[f]_{\mathcal{B}}$ היא אלכסונית.

אזי קיבלנו למעשה:

$$A=[f]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0 & \cdots\\ 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}$$

כעת, אם נתבונן ב-מטריצה הצמודה נקבל:

$$A^*=[f^*]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}\overline{\alpha_1} & 0 & \cdots\\ 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \cdots & \overline{\alpha_n}\end{bmatrix}$$

כעת, אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, נקבל ש- $f=f^*$. כלומר, f צמוד לעצמו.

אם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, אזי נשים לב כי $A^*A=AA^*$ ולכן קיבלנו כי $f^*\circ f=f\circ f^*$.

כלומר, למעשה הוכחנו את הטענה הבאה:

טענה

בהינתן $(V,\langle|\rangle)$ ממ"פ ממימד סופי, $f:V\to V$ אופרטור, אם f ניתן ללכסון בבסיס אורתונורמלי, אז f צמוד לעצמו אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, או $f^*\circ f=f\circ f^*$ אם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$.

כעת נראה שהתנאים האלו גם מספיקים.

9.6.3 **מקרה ממשי.** יהי $(V,\langle|\rangle)$ ממ"פ מעל $\mathbb{R}$ ממימד סופי, ויהי $f:V\to V$ אופרטור. אזי f ניתן ללכסון בבסיס אורתונורמלי, אם ורק אם f צמוד לעצמו.

הוכחה

הוכחנו כבר שאם f ניתן ללכסון אזי הוא צמוד לעצמו.

נשאר לנו רק להוכיח שאם הוא צמוד לעצמו אזי f ניתן ללכסון. ונוכיח זאת באמצעות אינדוקציה על המימד של V.

אם $\dim V=1$, אזי בכל בסיס $\mathcal{B}$, מתקיים כי $[f]_{\mathcal{B}}$ היא אלכסונית.

נניח שכל אופרטור על מ"ו ממימד קטן או שווה ל- n שהוא צמוד לעצמו ניתן ללכסון בבא"נ. כעת נתבונן ב- $f:V\to V$. ראינו כבר של- f יש ערך עצמי λ וו"ע v. אנו יכולים להניח ש- $\|v\|=1$.

כעת נתבונן ב - $W=\text{span}\,(v)$.

נבחין כי $V=W\oplus W^{\perp}$, וכמו כן W הינו f-אינווריאנטי, ומצד שני $W^{\perp}$ הוא f^* אינווריאנטי.

אך $f=f^*$ ולכן $W^{\perp}$ הוא f - אינווריאנטי.

כעת, נתבונן בצמצום ל-$W^{\perp}$ - $f|_{W^{\perp}}$, שהינו **צמוד לעצמו** ולכן, לפי הנחת האינדקוציה, קיים בסיס אורתונורמלי כך ש- $[f|_{W^{\perp}}]_{\mathcal{B}_{W^{\perp}}}$ אלכסונית.

כעת, ניקח את $\{v\}\cup\mathcal{B}_{W^{\perp}}=\mathcal{B}$ שהינו בסיס אורתונורמלי של V ונתבונן במטריצה ביחס לאופרטור:

$$[f]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & [f|_{W^{\perp}}]_{\mathcal{B}_{W^{\perp}}}\end{bmatrix}$$

כלומר, קיבלנו בסך הכל מטריצה אלכסונית, ולכן f ניתן ללכסון בבסיס אורתונורמלי.

מסקנה

מטריצה $A\in M_n(\mathbb{R})$ ניתנת ללכסון אורתוגונלי, אם ורק אם A סימטרית.

9.6.4 **מקרה מרוכב. הגדרה**

יהי $(V,\langle|\rangle)$ ממ"פ מעל $\mathbb{C}$ ממימד סופי, אזי $f:V\to V$ נורמלי אם $f^*\circ f=f\circ f^*$.

דוגמה

- אם f צמוד לעצמו, $f^*\circ f=f\circ f=f\circ f^*$, אזי f נורמלי.
- אם f אוניטרי, דבר זה גורר כי $f^*=f^{-1}$ ולכן $f^*\circ f=\mathrm{Id}=f\circ f^*$ ולכן f נורמלי.

משפט

אם $(V,\langle|\rangle)$ ממ"פ מעל $\mathbb{C}$ ממימד סופי, אזי f ניתן ללכסון בבסיס אורתונורמלי אם ורק אם f נורמלי.

למה

בהינתן $f:V\to V$ כאשר $W\subseteq V$ f אינווריאנטי וגם f^* אינווריאנטי, אזי $(f|_W)^*=f^*|_W$

הוכחה

נובעת מיחידות האופרטור הצמוד.

<u>הרצאה מס' 22</u>

הוכחת המשפט

$\Leftarrow$ נזכור שאם A מייצגת f בבסיס אורתונורמלי, אזי f^* מיוצגת באותו בסיס על ידי A^*. מעבר לכך, במקרה שלנו A אלכסונית, ולכן גם A^* אלכסונית (שהרי ההיפוך לא משנה את הלכסון).

מכך גם $AA^*=A^*A$ אלכסונית, שהרי מטריצות אלכסוניות מתחלפות, דבר שגורר כי $ff^*=f^*f$ ו- f נורמלי.

$\Rightarrow$ באינדוקציה על n. כאשר $n=0$ מדובר במקרה טריוואילי, וכאשר $n=1$, כל אופרטור מקיים את שני התנאים.

כעת, נניח שהדבר נכון למימד $n>$ ונניח כי $\dim V=n$ ו-f אופרטור נורמלי על V.

מכך ש-$\mathbb{C}$ סגור אלגברית, בהכרח יש ע"ע $\lambda\neq 0$ ולכן $V_\lambda\neq\{0\}$.

כעת, נבחין כי V_λ הינו f-אינווריאנטי, ולכן $V_\lambda^\perp$ הינו גםf^* - אינווריאנטי.

מנורמליות f נקבל שאם $v\in V_\lambda$ אזי מתקיים כי:

$$f\left(f^*\left(v\right)\right)\overset{\text{normality}}{=}f^*\left(f\left(v\right)\right)=f^*\left(\lambda v\right)=\lambda f^*\left(v\right)$$

כלומר בפרט $f^*\left(v\right)\in V_\lambda$, וממילא V_λ הינו f^* אינווריאנטי, וממילא $V_\lambda^\perp$ הינו f-אינווריאנטי.

כמו כן, מכך ש- $V_\lambda\neq\{0\}$, אנחנו מקבלים כי $k=\dim V_\lambda^\perp<n$, וכעת מהלמה שהוכחנו מתקיים כי $\left(f|_{V_\lambda^\perp}\right)^*=$ $f^*|_{V_\lambda^\perp}$ ולכן הנורמליות של f גוררת כי $f|_{V_\lambda^\perp}$ הינו נורמלי.

ולכן כעת מהנחת האינדוקציה קיים בסיס $\mathcal{B}_{V_\lambda} = (b_1, \ldots, b_k)$ של V_λ בו $f|_{V_\lambda}$ אלכסונית, אבל V_λ מרחב עצמי, ולכן $f|_{V_\lambda}$ אלכסונית בכל בסיס, וכעת אם $\mathcal{B}_{V_\lambda^\perp} = (b_{k+1}, \ldots, b_n)$ הינו בסיס אורתונורמלי ל- V_λ, אזי בפרט מניצבות $V_\lambda \perp V_\lambda^\perp$ הבסיס $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ הוא אורתונורמלי ומלכסן את f.

בנוסף, נבחין שמכך שהוכחנו כי $f|_{V_\lambda} = \lambda \mathrm{Id} V_\lambda$ ומכך ש-f נורמלי, מתקיימים תנאי הלמה שהוכחנו קודם לכן ובפרט אנו מקבלים:

$$f^*|_{V_\lambda} = (f|_{V_\lambda})^* = (\lambda \mathrm{Id} V_\lambda)^* = \overline{\lambda} \mathrm{Id} V_\lambda$$

כאשר השוויון האחרון נובע מכללי האופרטור הצמוד.

אנו יודעים כי f-נורמלי, ולכן מכך מתקיים כי f מיוצגת כך:

$$f = \begin{bmatrix} \mathrm{diag} V_\lambda^\perp & \\ & \lambda Id \end{bmatrix} = A$$

ולכן גם מתקיים:

$$f^* = \begin{bmatrix} f^*|_{V_\lambda^\perp} & \\ & \overline{\lambda} Id \end{bmatrix} = A^*$$

כנדרש.

המשפט הספקטריאלי למטריצות

עבור $A \in M_n(\mathbb{C})$ קיימת מטריצה $U \in M_n(\mathbb{C})$ אוניטרית כך ש - UAU^{-1} אלכסונית אם ורק אם $AA^* = A^*A$.

f אורתוגונלי מעל $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ שומר מכ"פ $\Leftrightarrow$ $AA^t = I$. במימד 1 זה קורה עבור ± 1 בלבד ואלו הערכים העצמיים.

f אורתוגונלי מעל $\mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ שומר מכ"פ $\Leftrightarrow$ $AA^* = I$. במימד 1 זה קורה עבור $|1|$ בלבד ואלו הערכים העצמיים.

f צמוד לעצמו $\Leftrightarrow$ $\langle u \mid f(v) \rangle = \langle f(u) \mid v \rangle$ $\Leftrightarrow$ $A^* = A$. במימד 1 זה קורה בסקלריים ממשיים.

f נורמלי $\Leftrightarrow$ $\langle f(u) \mid f(v) \rangle = \langle f^*(u) \mid f^*(v) \rangle$ $\Leftrightarrow$ $AA^* = AA^*$. במימד 1 זה קורה תמיד וערכים העצמיים יכולים להיות הכל.

10. תבניות בילינאריות

הגדרה

יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$. תבנית בילינאריות על V היא פונקציה $g: V\times V\to\mathbb{F}$ שבהינתן $u,v\in V$ ו- $c\in\mathbb{F}$ מקיימת:

(i) $g\left(v,v+w\right)=g\left(u,v\right)+g\left(g,w\right)$

(ii) $g\left(u+w,v\right)=g\left(u,v\right)+g\left(w,v\right)$

(iii) $g\left(cu,v\right)=cg\left(u,v\right)+g\left(u,cv\right)$

(תבנית בילינארית - לוקחת וקטור ומחזירה סקלר. הכללה של המכפלה הפנימית מעל $\mathbb{R}$)

דוגמאות

(i) מ"פ מעל $\mathbb{R}$ (מעל $\mathbb{C}$ זה לא עובד)

(ii) $g=0$.

(iii) עבור וקטורים $u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ ו- $v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ ב-$\mathbb{F}^2$,אזי נקבל כי $g\left(u,v\right)=\det\begin{bmatrix}u_1&v_1\\u_2&v_2\end{bmatrix}$ הוא בילינארי

(iv) עבור מרחב הפונקציות הרציפות מ-$[0,1]$ ל-$\mathbb{R}$, נקבל כי $g\left(\varphi,\psi\right)=\int\limits_0^1\psi\left(t\right)\varphi\left(t\right)dt$ היא ביניליארית

(v) ניקח את $\mathbb{R}^4$ ואת הפונקציה $g\left(x,y\right)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_4y_4$, היא בילינארית.

(vi) אם $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ ו-$x,y\in\mathbb{F}$, אזי $g\left(x,y\right)=x^tAy$ הינו בילינארי.

קל לבדוק ש-g בילינארית אם"ם ההעתקות $l_u,r_v\left(V\right)\to\mathbb{F}$ המקיימות $l_u\left(v\right)=g\left(u,v\right)$ ו-$r_v\left(u\right)=g\left(u,v\right)$ הם ליניאריות לכל u,v.

ייצוג ע"י מטריצה

אם V ממימד סופי, ו-$\mathcal{B}=\left(b_1,\ldots,b_n\right)$ בסיס, אזי נגדיר $\mathrm{Gr}=\left(g\left(b_i,b_j\right)\right)_{ij}$ נקראת מטריצת $Gram$ של g בבסיס.

טענה

אם G מטריצת גראם של g בבסיס $\mathcal{B}$ אזי מתקיים $g\left(u,v\right)=\left[u\right]_{\mathcal{B}}^t G\left[v\right]_{\mathcal{B}}$ לכל $u,v\in V$.

הוכחה

ניקח u שמבוטא על ידי $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ וכנ"ל לגבי v.

כעת נקבל:

$$g(u,v) = g\left(u, \sum_{j=1}^{n} v_j b_j\right) = \sum_{j=1}^{n} v_j g(u, b_j) = \sum_{j=1}^{n} v_j g\left(\sum_{i=1}^{n} u_i b_i, b_j\right) = \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{n} u_i g(b_i, b_j) = [u]_{\mathcal{B}}^t G [v]_{\mathcal{B}}$$

בפרט, G קובעת את g. ההתאמה הזאת היא חח"ע ועל בין תבניות ביליניאריות על V לבין $M_n(\mathbb{F})$.

שינוי בסיס

נניח כי G ו- $\widetilde{G}$ מטריצות gram של g בבסיסים C, B ו-$M = M_B^C$, אזי המטריצה $\widetilde{G}$ הינה $\widetilde{G} = M^t G M$.

הוכחה

ניקח שני וקטורים u, v, שאותם ניתן להציג בתור וקטורים מ-B ווקטורים מ-C.

אזי נקבל:

$$g(u,v) = [u]_B^t G [v]_B = [u]_C^t M^t G M [v]_C$$

נבחין כי טענה זו נכונה לכל $u, v \in V$ ולכן נובע בפרט כי $G = M^t G M$.

דבר זה מביא אותנו להגדרה הבאה.

הגדרה

מטריצות $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ייקראו חופפות אם ישנה M הפיכה כך ש- $A = M^t B M$.

טענה

מטריצות הן חופפות אם ורק אם הן מייצגות אותה g בילינארית בבסיסים שונים.

הגדרה

עבור g בילינארית, נבחין כי $g^t(u,v)=g(v,y)$ גם בילינארית.

נאמר ש-g סימטרית אם $g^t=g$ ו-g אנטי סימטרית אם $g^t=-g$.

(מ"פ מעל $\mathbb{R}$ הן סימטריות, למשל, וכן תבניות בלינאריות שמגיעות מ-det).

טענה

מטריצת גראם של g^t בבסיס B, היא G^t, ולכן g סימטרית או אנטי סימטרית אם ורק אם G סימטרית או אנטי סימטרית.

הוכחה

$\Leftarrow$ $g(b_j,b_i)=g(b_i,b_j)=G_{ij}$ ולכן $G=G^t$.

$\Rightarrow$ אנו יודעים כי $G=G^t$. נבחין כי מתקיים:

$$
\begin{aligned}
g(v,u) &= \left([v]_{\mathcal{B}}^t\, G\, [u]_{\mathcal{B}}\right)^t = [u]_{\mathcal{B}}^t\, G^t\, [v]_{\mathcal{B}} \\
&= [u]_{\mathcal{B}}^t\, G\, [v]_{\mathcal{B}} = g(u,v)
\end{aligned}
$$

<u>הרצאה מס' 23</u>

הערה

תבנית בילינאירית $g:V\times V\to\mathbb{F}$ סימטרית מקיימת את שני התנאים הראשונים של הגדרת מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ (ליניאריות במשתנה השני וסימטריות). אך נבחין שכאן איננו מעל $\mathbb{R}$ אלא מעל שדה כללי. בנוסף, אין לנו כאן חיוביות בהחלט, כי ייתכן שמדובר בשדה לא סדור.

$10.2.1$ g **אורתוגונליות. הגדרה**

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי g תבנית בילינארית סימטרית על V.

יהיו $u,v\in V$. אם $g(u,v)=0$ נאמר ש-u ו-v אורתוגונלים יחסית ל-g ונכתוב $u\perp_g v$.

הערה

הסימטריות של g גוררת כי $u\perp_g v$ אם"ם $v\perp_g u$.

דוגמאות

(i) $u=0$. אזי לכל $v\in V$ נקבל כי $g(0,v)=0$.

(ii) $V=\mathbb{R}^4$, g תבנית לורנץ שהינה:

$$[g]_{\mathcal{E}}=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-1\end{bmatrix}$$

אזי ניקח את $v=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ ונחשב את $g(v,v)$ ונקבל:

$$g(v,v)=\begin{bmatrix}1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}=1+0+0-1=0$$

במקרה זה v הינו g אורתוגונלי לעצמו.

(iii) אם ניקח את $G=\begin{bmatrix}5&0\\0&0\end{bmatrix}$, ו-$V=\mathbb{R}^2_{\text{coll}}$, נגדיר $u=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ אזי $u\perp_g v$ לכל $v\in V$.

נבחין כי מתקיים, עבור $v=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$:

$$g(u,v)=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0$$

10.2.2 תבניות ריבועיות. הגדרה

g תבנית בילינארית סימטרית מעל V. התבנית הריבועית q המתאימה ל-g היא העתקה- $g:V\to\mathbb{F}$ המוגדרת על ידי $v\to g(v,v)$.

תבנית ריבועית לוקחת וקטור ומחזירה סקלר אבל היא איננה ליניארית, שהרי מתקיים:

$$g(\lambda v) = g(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 g(v, v) = \lambda^2 q(v)$$

<u>טענה (פורליזציה לתבניות בילניאריות סימטריות)</u>

אם $\mathrm{char}\mathbb{F} \neq 2$, ו-$q$ הינה התבנית הריבועית המתאימה לתבנית בילינארית g, אזי לכל $u, v \in V$ ניתן לחשב:

$$g(u, v) = \frac{1}{2}\left(q(u+v) - q(u) - q(v)\right)$$

הוכחה

ניקח $u, v \in V$. נבחין כי מתקיים:

$$\begin{aligned}
q(u+v) = g(u+v, u+v) = g(u, u+v) + v(v, u+v) = \\
g(u,u) + g(v,u) + g(u,v) + g(v,v) = \\
2g(u,v) + q(u) + q(v) \Rightarrow \\
g(u,v) = \frac{1}{2}\left(q(u+v) - q(u) - q(v)\right)
\end{aligned}$$

מסקנה

אם g_1 ו-g_2 תבניות בילינאריות סימטריות עם אותה תבנית ריבועית, אזי $g_1 = g_2$.

טענה

אם g תבנית בילינארית סימטרית (עם מציין שונה מ-2), שונה מתבנית ה-0, אזי קיים $w \in V$ כך ש-$g(w, w) \neq 0$.

הוכחה

נתבונן בנוסחה שפיתוחנו לפני רגע:

$$g(u,v)=\frac{1}{2}\left(q(u+v)-q(u)-q(v)\right)$$

ניקח $u,v\in V$ כך ש- $g(u,v)\neq 0$. ולכן לפחות אחד משלושת האיברים שונה מ-0. לכן, ניתן לבחור את $w\in\{q(u+v),q(u),q(v)\}$ כך ש- $g(w,w)=g(w)\neq 0$.

10.2.3 **תת מרחב ניצב וגרעין.** תהי g תבנית בילינארית סימטרית, כאשר המציין של השדה שונה מ-2.

הגדרה

יהי W תת מ"ו של V. אזי $W^{\perp_g}=\{u\in V\mid \forall w\in W\quad u\perp_g w\}$.

הגדרה

נגדיר את הגרעין של g להיות:

$$V_0=\{u\in V\mid \forall v\in V\quad g(u,v)=0\}$$

נשים לב כי $V_0=V^{\perp_g}$.

הערה

כאשר קובעים $u\in V$ אזי מקבלים פונקציונל לינארי המקיים: $g(u,\cdot):V\to\mathbb{F}$. במקרה זה נקבל כי $u\in V_0$ אם ורק אם הפונקציונל $g(u,\cdot)$ הינו פונקציונל האפס.

הגדרה

אם $V_0=\{0\}$ נאמר ש-g מנוונת.

דוגמאות

(i) מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$, היא תבנית בילינארית סימטרית לא מנוונת.

(ii) תבניץ לורנץ שראינו - ניתן לבדוק שאיננה מנוונת.

נשים לב שאם ניקח $u\in V$, כאשר $\dim V<\infty$ ו-$\mathcal{B}$ בסיס ל-V, ניקח את $G=[g]_{\mathcal{B}}$.

כמו כן, נשים לב כי $u \in V_0$ אם ורק אם לכל $v \in V$ נקבל $g(u,v)$ ובמונחים של מטריצות מדובר על $[u]_{\mathcal{B}}^t G [v]_{\mathcal{B}} = 0$ לכל $v \in V$.

אמנם, דבר זה נכון עבור לכל $1 \leq i \leq n$ המקיים b_i, דהיינו עבור כל וקטור מהבסיס נקבל: $[u]_{\mathcal{B}}^t G [b_i]_{\mathcal{B}} = 0$. נבחין כי מכפלת הוקטור השמאלי הינה וקטור שורה, בפרט דבר זה גורר כי מדובר בוקטור ה-0. כלומר, קיבלנו כי:

$$u \in V_0^g \Leftrightarrow \left([u]_{\mathcal{B}}^t G\right)^t = \left(\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}\right)^t \Leftrightarrow G^t [u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

דבר זה גורר כי $[u]_{\mathcal{B}}$ בגרעין של G^t.

טענה

g תבנית סימיטרית מעל V ממימד סופי ותהי G מטריצת גראם של g.

אזי g לא מנוונת אם ורק אם G הפיכה.

הוכחה

g לא מנוונת אם ורק אם $V_0^g = \{0\}$. דבר זה גורר כי הגרעין של G^t הוא $\{0\}$. בפרט קיבלנו כי G^t הפיכה ולכן $\det G^t \neq 0$ וממילא $\det G \neq 0$, ולכן גם G הפיכה.

שבוע 13

הרצאה 23

ב' תמוז, 24/06

תבניות בילינאריות סימטריות

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. **תבנית בילינארית סימטרית** בV היא העתקה מ$g: V \times V \to \mathbb{R}$, שמקיימת:

- $g(u, v + v') = g(u, v) + g(u, v')$ לכל $u, v, v' \in V$ (אדיטיביות במשתנה השני).
- $g(u, cv) = cg(u, v)$ לכל $u, v \in V$ ו$c \in \mathbb{R}$ (הומוגניות במשתנה השני).
- $g(u, v) = g(v, u)$ לכל $u, v \in V$ (סימטריה).

למעשה זוהי הכללה של מכפלה פנימית, מכפלה פנימית ללא האקסיומה האחרונה.

תכונות:

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ וg תבנית בילינארית סימטרית. אז:

- $g(u, 0) = 0$ לכל $u \in V$.
- $g(u + u', v) = g(u, v) + g(u', v)$ לכל $u, u', v \in V$.
- $g(cu, v) = cg(u, v)$.

ההוכחות זהות להוכחות של התכונות במכפלה הפנימית, כי השתמשנו שם רק באקסיומות שקיימות גם בתבנית בילינארית.

דוגמאות:

- יהי $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ממ"פ מעל $\mathbb{R}$. ההעתקה $g: V \times V \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $g(u, v) = \langle u | v \rangle$ היא תבנית בילינארית סימטרית.
- יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$. ההעתקה g המוגדרת על ידי $g(u, v) = 0$ לכל $u, v \in V$ היא תבנית בילינארית סימטרית.
- יהי $V = \mathbb{R}^2$. נגדיר $g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ על ידי $g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 y_1 - x_2 y_2$.

  היא לא באה ממכפלה פנימית, כי $g\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 1 - 1 = 0$ בסתירה לאקסיומה האחרונה של המכפלה הפנימית.
- יהי $V = \mathbb{R}^n$. תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה סימטרית ($A^t = A$). נגדיר $g_A: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ על ידי $g_A(x, y) = x \cdot (Ay) = x^t Ay$.

הוכחה:

$$g_A(x, y + y') = x \cdot (A(y + y')) \stackrel{*}{=} x \cdot (Ay + Ay') \stackrel{**}{=} x \cdot (Ay) + x \cdot (Ay') = g_A(x, y) + g_A(x, y')$$

$*$ דיסטריבוטיביות של כפל מטריצות.
$**$ ליניאריות של מכפלה סקלרית.

$$g_A(x, cy) = x \cdot (A(cy)) = x \cdot (c(Ay)) \stackrel{*}{=} c(x \cdot Ay) = cg_A(x, y)$$

∗ ליניאריות של מכפלה סקלרית.

$$g_A(x,y)=x^tAy\overset{*}{=}\left(x^tAy\right)^t=y^tA^t\left(x^t\right)^t\overset{**}{=}y^tAx=g_A(y,x)$$

∗ התמונה של g_A היא סקלר, בפרט מטריצה 1×1 ששווה לשחלוף שלה.
∗∗ $\left(x^t\right)^t=x$ לכל x, ו$A^t=A$ מהנתון שA סימטרית.

הערה: הדוגמה מ$\mathbb{R}^2$ היא מקרה פרטי של הדוגמה האחרונה, כאשר $n=2$ ו $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$, כי $g_A\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\cdot\left(A\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_1\\-y_2\end{bmatrix}=x_1y_1-x_2y_2$.

מטריצה של תבנית בילינארית
הגדרה: יהיו V מ"ו מעל $\mathbb{R}$, $g:V\times V\to\mathbb{R}$ תבנית בילינארית סימטרית, ו$\mathcal{B}=(b_1,\dots,b_n)$ בסיס סדור של V.
המטריצה G **של** g **ביחס ל**$\mathcal{B}$ מוגדרת על ידי $G^i_j=g(b_i,b_j)$.

תכונה: G היא מטריצה סימטרית, כי $G^i_j=g(b_i,b_j)=g(b_j,b_i)=G^j_i$.

דוגמאות:
- יהיו $(V,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ ממ"פ מעל $\mathbb{R}$, ההעתקה $g:V\times V\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $g(u,v)=\langle u|v\rangle$, ו$\mathcal{B}=(b_1,\dots,b_n)$ בסיס אורתונורמלי של V. אזי G ביחס ל$\mathcal{B}$ היא מטריצה היחידה, כי $G^i_j=g(b_i,b_j)=\langle b_i,b_j\rangle=\delta^i_j=I^i_j$.
- יהיו V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ וההעתקה g המוגדרת על ידי $g(u,v)=0$. לכל $\mathcal{B}$ בסיס סדור של V, נקבל שG היא מטריצת ה0.
- יהיו $V=\mathbb{R}^n$, $A\in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה סימטרית, ההעתקה g_A שהוגדרה קודם, ו$\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$. אז המטריצה G ביחס ל$\mathcal{B}$ היא A.

הוכחה:

$$G^i_j=g_A(e_i,e_j)=e_i\cdot(Ae_j)=e_i\cdot A_j=A^i_j$$

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$, $g:V\times V\to\mathbb{R}$ תבנית בילינארית סימטרית ו$\mathcal{B}=(b_1,\dots,b_n)$ בסיס סדור של V, וG מטריצה של g ביחס ל$\mathcal{B}$. אזי לכל $v,w\in V$ מתקיים $g(v,w)=[v]_{\mathcal{B}}\cdot\left(G[w]_{\mathcal{B}}\right)$.
הוכחה:
נסמן $[v]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}$ ו $[w]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}d_1\\\vdots\\d_n\end{bmatrix}$, כלומר $v=\sum\limits_{i=1}^n c_ib_i$ ו$w=\sum\limits_{i=1}^n d_ib_i$. נקבל:

$$g(v,w)=g\left(\sum_{i=1}^{n}c_ib_i,\sum_{j=1}^{n}d_jb_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_id_jg(b_i,b_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_id_jG_j^i$$

מצד שני:

$$[v]_{\mathcal{B}}\cdot(G[w]_{\mathcal{B}})=\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}\cdot G\begin{bmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}G_j^1d_j\\ \vdots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}G_j^nd_j\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}c_i\sum_{j=1}^{n}G_j^id_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_id_jG_j^i$$

מסקנה: אם $g:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ **תבנית בילינארית סימטרית,** $\mathcal{B}$ **הבסיס הסטנדרטי, ו**G **מטריצה של** g **ביחס ל**$\mathcal{B}$**, אז** $g=g_G$**:**

$$g(x,y)=[x]_{\mathcal{B}}\cdot(G[y]_{\mathcal{B}})=x\cdot(Gy)=g_G(x,y)$$

(כי וקטור הקוארדינטות של וקטור ביחס לבסיס הסטנדרטי הוא הוקטור עצמו).

מסקנה: קיימת העתקה חח"ע ועל בין תבניות בילינאריות סימטריות ב$\mathbb{R}^n$ לבין מטריצות סימטריות ב$M_n(\mathbb{R})$.

טענה: יהיו V **מ"ו מעל** $\mathbb{R}$**,** $g:V\times V\to\mathbb{R}$ **תבנית בילניארית סימטרית,** $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ **בסיסים סדורים של** V**,** $M=M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ **(מטריצת המעבר), ו**G,G' **מטריצות של** g **ביחס ל**$\mathcal{B},\mathcal{B}'$ **בהתאמה.**
אזי $G'=M^tGM$**.**
הוכחה:
נסמן $\mathcal{B}=(b_1,\dots,b_n)$ ו$\mathcal{B}'=(b_1',\dots,b_n')$.

$$\begin{aligned}G'^i_j=g\left(b_i',b_j'\right)=[b_i']_{\mathcal{B}}\cdot\left(G\left[b_j'\right]_{\mathcal{B}}\right)=M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[b_i']_{\mathcal{B}'}\left(GM_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\left[b_j'\right]_{\mathcal{B}'}\right)=\\ =Me_i\cdot(GMe_j)=(Me_i)^tGMe_j=(e_i)^tM^tGMe_j=(e_i)^t\left(M^tGM\right)e_j=\left(M^tGM\right)_j^i\end{aligned}$$

ולכן $G'=M^tGM$ כנדרש.

הגדרה: תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{R})$. נאמר כי A **חופפת ל**B כאשר קיימת מטריצה הפיכה $P\in M_n(\mathbb{R})$ כך ש$A=P^tBP$.

תכונה: אם A חופפת לB אז B חופפת לA.
הוכחה:
קיים P הפיכה כך ש$A = P^tBP$. נסמן $Q = P^{-1}$, ואז

$$Q^tAQ = Q^t\left(P^tBP\right)Q = (PQ)^t\,B\,(PQ) = I^tBI = B$$

מסקנה: בטענה האחרונה, המטריצות G, G' חופפות.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$, g תבנית בילינארית סימטרית, $\mathcal{B}$ בסיס סדור של V, G מטריצה של g ביחס ל$\mathcal{B}$, וG' מטריצה חופפת לG. אזי קיים בסיס סדור $\mathcal{C}$ של V כך שהמטריצה של g ביחס ל$\mathcal{C}$ היא G'.
הוכחה:
נבחר בסיס כך שP (המטריצה ה"מחפפת" של G וG') היא מטריצת מעבר בסיס מ$\mathcal{B}$ ל$\mathcal{C}$, ואז מהטענה האחרונה נקבל את הדרוש.

שבוע 14

הרצאה 24

טענה (הרצאה קודמת): יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$, g תב"ס על V, $\mathcal{B}$ בסיס סדור של V, G מטריצה של g ביחס ל$\mathcal{B}$. אזי:
- **אם $\mathcal{B}'$ בסיס סדור של V, וG' מטריצה של g ביחס ל$\mathcal{B}'$, אז G' חופפת לG.**
- **אם G' מטריצה חופפת לG, אז קיים בסיס סדור $\mathcal{B}'$ של V כך שG' היא המטריצה של g ביחס ל$\mathcal{B}'$.**

הגדרה: יהיו V מ"ו מעל $\mathbb{R}$, וg תב"ס על V. וקטורים $u, v \in V$ נקראים **ניצבים** ביחס לg כאשר $g(v, u) = 0$.

הערות:
- וקטור שונה מ0 יכול להיות ניצב לעצמו.

למשל $V = \mathbb{R}^2$ וg מוגדרת על ידי $g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = x_1y_1 - x_2y_2$. הוקטור $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ניצב לעצמו כי $g\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 0$.
- וקטור שונה מ0 יכול להיות ניצב לכל המרחב.

למשל $V = \mathbb{R}^2$ וg מוגדר על ידי $g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = x_1y_1$. ניתן לראות שזו מכפלה סקלרית, והוקטור $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ניצב לכל הוקטורים ב$\mathbb{R}^2$, כי $g\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = 0 \cdot x_1 = 0$.

הגדרה: יהיו V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ וg תב"ס ל V. סדרה $(v_{1,\dots}, v_k)$ נקראת **אורתוגונלית** כאשר $v_i \perp v_j$ לכל $i \neq j$.

הגדרה: בסיס סדור $\mathcal{B}$ של V נקרא **בסיס אורתוגונלי** כאשר הוא מהווה סדרה אורתוגונלית.

עובדה פשוטה: יהיו V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, g תב"ס על V, $\mathcal{B}$ בסיס סדור של V, וG מטריצה של g ביחס ל$\mathcal{B}$. אז $\mathcal{B}$ הוא בסיס אורתוגונלי $\Leftrightarrow$ G אלכסונית.

טענה: תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה סימטרית. אזי קיימת מטריצה אלכסונית שחופפת לA.
הוכחה:
מאחר שA סימטרית, קיימת מטריצה אורתוגונלית O כך ש$O^{-1}AO$ אלכסונית.
מכיוון שO אורתוגונלית, אז $O^{-1} = O^t$. מכאשר שO^tAO מטריצה אלכסונית חופפת לA (כי O הפיכה).

הערה: הטענה נכונה לכל שדה ממציין שונה מ2 (כמובן שנצטרך להוכיח אחרת, וההוכחה פה טובה רק ל$\mathbb{R}$).

מסקנה: יהיו V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ סוף מימדי וg תב"ס, אזי קיים בסיס אורתוגונלי של V ביחס לg.

הוכחה: יהי $\mathcal{B}$ בסיס סדור כלשהו של V. נסמן בG את המטריצה של g ביחס ל$\mathcal{B}$. מכיוון שG סימטרית, מהטענה קיימת מטריצה אלכסונית D שחופפת לG, ולכן קיים בסיס $\mathcal{D}$ של V כך שD היא המטריצה של g ביחס ל$\mathcal{D}$, ולכן $\mathcal{D}$ בסיס אורתוגונלי.

סימון: יהיו $p,m,z\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. נסמן $G\left(p,m,z\right):=\left[\begin{array}{c|c|c} I_p & & \\ \hline & I_m & \\ \hline & & 0_z \end{array}\right]\in M_{p+m+z}\left(\mathbb{R}\right)$ (מטריצה שמכילה p אחדות על האלכסון (Plus), m מינוס אחד על האלכסון (Minus), ועוד z אפסים על שאר האלכסון (Zero)).

טענה: יהיו V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ כך ש$\dim V=n<\infty$ וg תב"ס. אזי קיימים $p,m,z\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ובסיס סדור $\mathcal{B}$ של V כך ש$n=p+m+z$ וגם $G\left(p,m,z\right)$ היא המטריצה של g ביחס ל$\mathcal{B}$.

הוכחה:

יהי $\mathcal{C}=\left(c_1,\ldots,c_n\right)$ בסיס אורתוגונלי ביחס לg.

נסמן $\begin{array}{l} p=\left|\left\{1\le i\le n\mid g\left(c_i,c_i\right)>0\right\}\right| \\ m=\left|\left\{1\le i\le n\mid g\left(c_i,c_i\right)<0\right\}\right| \\ z=\left|\left\{1\le i\le n\mid g\left(c_i,c_i\right)=0\right\}\right| \end{array}$. נשנה את סדר הוקטורים בבסיס כדי לקבל $\mathcal{C}'=\left(c_1',\ldots,c_n'\right)$ כך ש $\begin{array}{ll} \forall 1\le i\le p & g\left(c_i',c_i'\right)>0 \\ \forall p<i\le p+m & g\left(c_i',c_i'\right)<0 \\ \forall p+m<i\le n & g\left(c_i',c_i'\right)=0 \end{array}$.

לכל $1\le i\le p$ נגדיר $b_i=\frac{c_i'}{\sqrt{g\left(c_i',c_i'\right)}}$, ואז $g\left(b_i,b_i\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{g\left(c_i',c_i'\right)}}\right)^2\cdot g\left(c_i',c_i'\right)\cdot=1$.

לכל $p<i\le p+m$ נגדיר $b_i=\frac{c_i'}{\sqrt{-g\left(c_i',c_i'\right)}}$, ואז $g\left(b_i,b_i\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{-g\left(c_i',c_i'\right)}}\right)^2\cdot g\left(c_i',c_i'\right)=-1$.

לכל $p+m<i\le n$ נגדיר $b_i=c_i'$ ואז $g\left(b_i,b_i\right)=0$.

נגדיר $\mathcal{B}=\left(b_{1,\ldots},b_n\right)$, ואז המטריצה של g ביחס ל$\mathcal{B}$ היא בדיוק $G\left(p,m,z\right)$.

מסקנה: תהי $A\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ מטריצה סימטרית. אזי קיימים $p,m,z\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ כך ש$n=p+m+z$ ו$G\left(p,m,z\right)$ חופפת לA.

הוכחה:

נסתכל על g_A מעל $\mathbb{R}^n$. המטריצה של g_A ביחס לבסיס הסטנדרטי היא A, מהטענה האחרונה קיימים p,m,z ובסיס $\mathcal{B}$ של $\mathbb{R}^n$ כך ש$G\left(p,m,z\right)$ היא המטריצה של g_A ביחס ל$\mathcal{B}$, ולכן $G\left(p,m,z\right)$ חופפת לA.

הגדרה: יהיו V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ וg תב"ס על V. נגדיר את **הגרעין** של g להיות $\left\{u\in V\mid\forall v\in V\quad g\left(v,u\right)=0\right\}$.

הערה: קל לבדוק שהגרעין של g הוא תת מרחב של V.

טענה: יהי V ו מ"ו מעל $\mathbb{R}$ כך ש$\dim V = n < \infty$, g תב"ס על V, $\mathcal{B}$ בסיס סדור של V, G מטריצה של g ביחס ל$\mathcal{B}$ וU הגרעין של g. אזי $\dim U = n - \mathbf{rank}G$.

הוכחה:

נגדיר $R_G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ על ידי $T_G(v) = Gv$.

יהי $u \in V$. נוכיח כי $u \in U$ **אם"ם** $[u]_{\mathcal{B}} \in \ker T_G$.

נסמן $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$.

כעת $u \in U$, **אם"ם** $g(v,u) = 0$ לכל $v \in V$, **אם"ם*** $g(b_i, u) = 0$ לכל $1 \le i \le n$, **אם"ם**** $[b_i]_{\mathcal{B}} \cdot G[u]_{\mathcal{B}} = 0$ לכל $1 \le i \le n$, **אם"ם** $e_i \cdot T_G([u]_{\mathcal{B}}) = 0$ לכל $1 \le i \le n$, **אם"ם** $T_G([u]_{\mathcal{B}}) = 0$, **אם"ם** $[u]_{\mathcal{B}} \in \ker T_G$.

* כי כל $v \in V$ ניתן לכתוב כצ"ל של איברי הבסיס, ואז מליניאריות התב"ס.

** הוכחנו.

מכאן ש$\dim U = \dim\ker T_G = n - rank T_G = n - \mathrm{rank}G$.

משפט סילבסטר: יהיו V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ כך ש$\dim V = n < \infty$, g תב"ס על V ו$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ בסיסים סדורים של V כך שהמטריצות של g ביחס ל$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ הן $G(p,m,z), G(p',m',z')$ בהתאמה. אז $\begin{matrix} p = p' \\ m = m' \\ z = z' \end{matrix}$ **.**

הוכחה:

נסמן בU את הגרעין של g. מהטענה הקודמת, $z = n - (p+m) = n - \mathrm{rank}(G(p+m+z)) = \dim U$.

באופן דומה $\dim U = z'$, ולכן $z = z'$.

נניח בשלילה כי $p \neq p'$, בה"כ $p > p'$. נסמן $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ ו$\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$.

נגדיר $W_1 = \mathrm{Span}(b_1, \dots, b_p)$ ו$W_2 = \mathrm{Span}\left(b'_{p'+1}, \dots, b'_{n'}\right)$.

$\dim W_1 = p$ ו$\dim W_2 = n - p'$.

מתקיים:

$$\dim W_1 \cap W_2 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) \ge \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(V) =$$
$$= p + (n - p') - n = p - p' > 0$$

כלומר קיים $w \neq 0$ בחיתוך $w \in W_1 \cap W_2$.

כעת נסתכל על $g(w,w)$.

קיימים $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R}$ לא כולם אפסים כך ש$w = \sum_{i=1}^{p} c_i b_i$. לכן:

$$g(w,w) = g\left(\sum_{i=1}^{p} c_i b_i, \sum_{j=1}^{p} c_j b_j\right) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} c_i c_j \underbrace{g(b_i, b_j)}_{\delta_j^i} = \sum_{i=1}^{p} c_i^2 > 0$$

מצד שני קיימים $d_{p'+1},\dots,d_n$ כך ש$w=\sum_{i=p'+1}^{n} d_i b'_i$. לכן:

$$g(w,w)=g\left(\sum_{i=p'+1}^{n} d_i b'_i,\sum_{j=p'+1}^{n} d_j b'_j\right)=\sum_{i=p'+1}^{n}\sum_{j=p'+1}^{n} d_i d_j \underbrace{g\left(b'_i,b'_j\right)}_{i\neq j \text{ אם } 0}=\sum_{i=p'+1}^{n} d_i^2 g\left(b'_i,b'_i\right)=$$

$$=\sum_{i=p'+1}^{n} d_i^2\cdot\begin{cases}-1 & p'<i\leq p'+m'\\ 0 & p'+m'<i\leq n\end{cases}=\sum_{i=p'+1}^{p'+m'}-d_i^2\leq 0$$

קיבלנו סתירה, ולכן $p=p'$ ולכן גם $m=m'$.

מסקנה: אם $p,m,z,p',m',z'\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ **כך ש** $p+m+z=p'+m'+z'$ **וגם המטריצות** $G(p,m,z),G(p',m',z')$ **חופפות, אז** $\begin{matrix}p=p'\\ m=m'\\ z=z'\end{matrix}$.

תודה שצפיתם

(אלכס, הרצאה מוקלטת, חסרת סטודנטים לקטול)