מודלים חישוביים וחישוביות - פרופ' אורנה קופרמן - סמסטר א' 2022

~

הרצאות ותרגולים

מסכם: יחיאל מרצבך

תוכן העניינים

I הרצאות 4

1 מודלים חישוביים 5
1.1 שפות רגולריות ואוטומטים דטרמיניסטיים (DFA) 5
1.2 אוטומט סופי לא דטרמיניסטי (NFA) 11
1.3 ביטויים רגולריים 16
1.4 למת הניפוח ומשפט מייהל - נרוד 17
1.5 שפות חסרות הקשר 23

2 תורת החישוביות 28
2.1 מכונת טיורינג 28
2.2 רדוקציות מיפוי 38

3 תורת הסיבוכיות 47
3.1 מבוא לסיבוכיות 47
3.2 המחלקה NP 49
3.3 רדוקציות פולינומיאליות 51
3.4 סיבוכיות זיכרון 61
3.5 סיבוכיות מקום תת ליניארית 69
3.6 שאלות חזרה 77

II תרגולים 79

1 מודלים חישוביים 79
1.1 חזרה על תורת הקבוצות 79
1.2 מבוא לשפות 80
1.3 אוטומטים לא דטרמיניסטיים (NFA) 83
1.4 ביטויים רגולריים 87
1.5 למת הניפוח 90
1.6 משפט מייהל-נרוד 92
1.7 שפות חסרות הקשר 94

2 תורת החישוביות 97
2.1 מכונות טיורינג 97
2.2 רדוקוציות מיפוי 103
2.3 מכונות טיורינג אי דטרמיניסטיות 107

3 סיבוכיות 109
3.1 סיבוכיות זמן ורדוקציות פולינומיאליות 109
3.2 סיבוכיות זיכרון 119
3.3 סיבוכיות מקום תת ליניארית 124

III נספחים 130

1 שפות מוכרות ואפיונן 130

1.1 חישוביות 130

1.2 סיבוכיות 131

2 הירכיית מחלקות הסיבוכיות 132

חלק I

הרצאות

הקדמה

הרצאה מס' 1:
יום שני
11.10.21

הקורס בחישוביות ממשיך את רצף קורסי התיאוריה במדעי המחשב, כאשר במהלך הקורס נתמקד ביכולת הביצוע של המחשבים ובמחיר של ביצוע זה - בזמן ובזיכרון.
עד כה, התייחסנו בעיקר לחסמים עליונים, וכעת נרצה גם להוכיח בין היתר כי אי אפשר למצוא חסם טוב יותר.
הקורס מתחלק לשלושה חלקים:

1. מודלים חישוביים (אוטומטים, דקדוקים).
2. חישוביות.
3. סיבוכיות ("באיזה מחיר?").

מוטיבציה ללמידת סיבוכיות

נציג כאן טעימה מחלק הסיבוכיות, שבו נתמקד בסוף הקורס.

דוגמה

נתון גרף $G = \langle V, E\rangle$ לא מכוון.
האם ניתן למצוא האם קיים **מעגל אוילר** ב-G (מעגל שעובר בכל הקשתות של G, בכל קשת פעם אחת)?
קיים אלגוריתם ליניארי למציאת מעגל אוילר, כיוון שקיים אפיון מתמטי לכך: יש מעגל אוילר $\Leftrightarrow$ כל הדרגות של הקודקודים זוגיות.
לעומת זאת, לגבי **מעגל המילטון** (מעגל שעובר בכל הקודקודים, בדיוק פעם אחת), קיים רק אלגוריתם אקספוננציאלי - שבודק את כל האפשרויות, ב-$|V|!$.

דוגמה נוספת

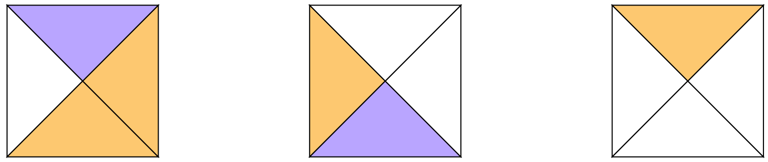
יהיו $p, q \in \mathbb{N}$, ואנו רוצים להחזיר את $n = p \cdot q$. קיים אלגוריתם פולינומיאלי לפתרון בעיה זו.
לעומת זאת, בהינתן n, אם נרצה להחזיר $p, q \neq 1$, כך ש-$n = p \cdot q$, לא ידוע על אלגוריתם פולינומיאלי.

אם נרצה לעשות סיווג של בעיות למחלקות סיבוכיות, מצד אחד לא נשאף ליותר מדי, ולכן יש לגיטימציה לקירובים, ומצד שני ננצל קושי קיים (קריפטוגרפיה).

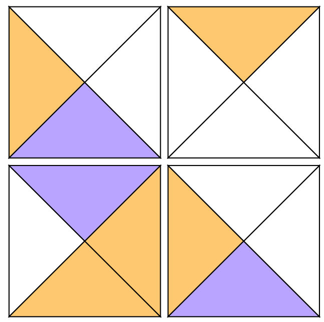
מוטיבציה ללמידת חישוביות

דוגמה

נתונה קבוצה T של אריחים, כאשר כל אריח מחולק לארבע, וכל אחד צבוע בצבע אחר.
עלינו להכריע האם קיים ריצוף חוקי $n \times n$ לכל $n \geq 1$, כאשר ריצוף חוקי הוא כי אריחים סמוכים 'מסכימים' על הצבע.
עבור הקלט הבא מסתבר שהתשובה היא כן:



לדוגמה, ניתן לרצף ריבוע 2×2 באופן הבא:



נוכיח כי אין אלגוריתם לפיתרון בעיה זו.

דוגמה נוספת - בעיית העצירה

נתונה תוכנית מחשב P עם קלט x לתוכנית P, ונרצה להכריע האם P עוצרת על x.

1 מודלים חישוביים

1.1 שפות רגולריות ואוטומטים דטרמיניסטיים (DFA)

על מנת לסבר את האוזן, נתחיל בדוגמה.

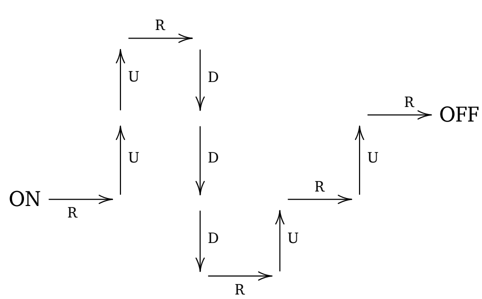
דוגמה

נתון עט דיגיטלי, שיכול לקבל 6 פקודות בכל רגע נתון - ON, OFF, U, D, R, L.

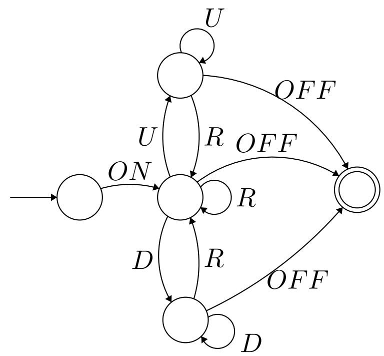
נאמר כי סדרת פקודות חוקית אם היא:

- מתחילה ב-ON ומסתיימת ב-OFF.
- אחרי פקודת U אין פקודת D ולהפך.
- היא מציירת קו רקיע משמאל לימין.

כאשר ניתן לראות דוגמה לקו רקיע בדוגמה הבאה:



אוטומט מגדיר סדרת פקודות חוקית, כפי שנגדיר ונדגים להלן, אך אפשר לראות זאת גם בציור הבא:



הגדרה

אלפבית (א״ ב) הוא קבוצה סופית ולא ריקה של אותיות $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$.

דוגמה

$\Sigma = \{0,1\}$ או $\Sigma = \{0,1\}^4$.

הגדרה

מילה היא סדרה סופית של אותיות, המילה הריקה תסומן בתור ε.

הגדרה

הקבוצה $\Sigma^\star$ היא אוסף כל המילים מאורך סופי מעל Σ.

הגדרה

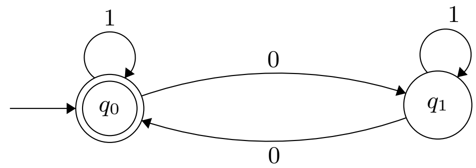
שפה L היא קבוצה של מילים. כלומר, $L \subseteq \Sigma^\star$.

הגדרה

אוטומט דטרמיניסטי automaton או DFA הוא חמישיה $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ כאשר:

1. Q היא קבוצה סופית של מצבים.
2. Σ היא א״ב.
3. $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ היא פונקציית מעברים.
4. $q_0 \in Q_0$ הוא מצב התחלתי.
5. $F \subseteq Q$ קבוצת מקבלים סופיים.

דוגמא (A_1):



בדוגמא הזאת יש אוטומט דטרמיניסטי סופי עם 2 מצבים, כלומר $Q=\{q_0,q_1\}$.
הא"ב הוא $\Sigma=\{0,1\}$, המצב ההתחלתי הוא q_0 והמצבים המקבלים הם $F=\{q_0\}$.

הגדרה
בהינתן מילה $w=w_1\cdot w_2\cdot w_3\cdots w_n\in\Sigma^*$, ריצה של A על w היא סדרה $r=q_0,q_1,\ldots q_n$ של מצבים כך ש:

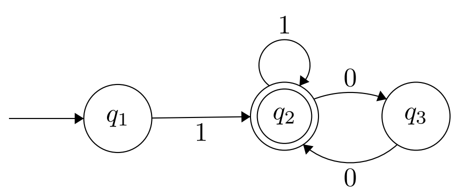
1. r מתחילה במצב ההתחלתי q_0.
2. לכל $n>i\geq 0$ מתקיים כי $q_{i+1}=\delta\left(q_i,w_{i+1}\right)$.

הגדרה
נאמר כי r היא ריצה **מקבלת**, אם $q_n\in F$.
האוטומט A **מקבל** את w, אם הריצה של A היא **מקבלת**.
נאמר כי השפה של A היא כל המילים w כך ש-A **מקבל** את w:

$$L\left(A\right)=\left\{w\mid w\text{ מקבל את } A\right\}$$

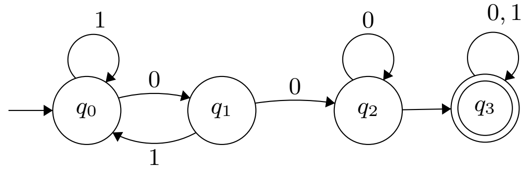
בדוגמה הקודמת, למשל, השפה היא כל המילים כך שיש בהם מספר זוגי של 0-ים.

דוגמת הרצה נוספת
נריץ דוגמה שנייה:



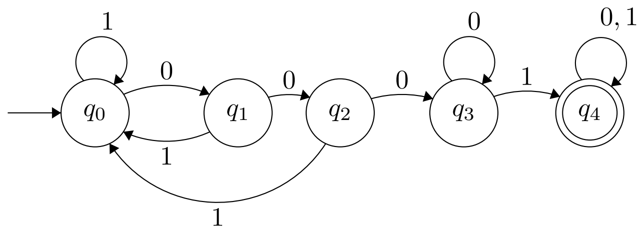
כאן $L\left(A_2\right)$ היא כל המילים שיש להן לפחות 1 אחד ואחרי ה-1 האחרון יש מספר זוגי של 0-ים (ייתכן 0).

דוגמה שלישית
נרצה אוטומט A_3 כזה ש-w מכילה את המילה 001. הדוגמה לכך היא:



דוגמה רביעית

כעת, נרצה אוטומט A_4 כך ש-w מכילה את תת המילה 0001, והדוגמה לכך הינה:



אבחנה

בכלל, נוכל לומר שההגדרה של האוטומט $L\left(A_n\right)$ כך ש-w מכילה את תת המילה 0^n1, הינה:

$$A=\left\langle \left\{ q_0,\ldots,q_{n+1}\right\} ,\left\{ 0,1\right\} ,\delta_n,q_0,\left\{ q_{n+1}\right\} \right\rangle$$

כאשר:

1. $\delta\left(q_{n+1},0\right)=\delta\left(q_{n+1},1\right)=q_{n+1}$ עבור $0\leq i<n$.
2. $\delta\left(q_i,0\right)=q_{i+1}$.
3. $\delta\left(q_i,1\right)=q_0$.
4. $\delta\left(q_n,0\right)=q_n$.
5. $\delta\left(q_n,1\right)=q_{n+1}$.

דוגמה אחרונה

האם יש אוטומט עבור $L_{\textsf{eq}}=\left\{ 0^n1^n:n\geq0\right\}$? לא!

הגדרה

שפה $L\subseteq\Sigma^*$ היא **רגולרית** אם קיים אוטומט A כך ש-$L\left(A\right)=L$.

1.1.1 פעולות על שפות

באפשרותנו לבצע מספר פעולות על שפות. ראשית, איחוד, חיתוך, ושאר פעולות שאפשר לבצע על קבוצות. שנית, קיימות גם שתי פעולות נוספות, שנגדיר אותן כעת.

הגדרה

יהיו L_1,L_2 שפות. נגדיר את **השרשור** להיות:

$L_1\cdot L_2=\left\{ w_1\cdot w_2\mid w_1\in L_1,w_2\in L_2\right\}$.

דוגמה

אם $w_1 = \sigma_1, \sigma. \dots .\sigma_n$ ו-$w_2 = \sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma_{m,}$, נקבל כי $w_1 \cdot w_2 = \sigma_1, \sigma. \dots .\sigma_n, \sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma_m$.

הגדרה

תהי L שפה. נגדיר את פעולת **הכוכב** להיות:

$L^* = \{w_1 \cdot w_2 \dots \cdot w_k \mid k \geq 0 \;\; , w_i \in L, 1 \leq i \leq k\}$

נבחין כי L^* היא סופית, רק כאשר $L = \emptyset$ ו-$L = \{\varepsilon\}$.

במקרה זה $L^* = \{\varepsilon\}$.

1.1.2 תכונות סגור של השפה הרגולריות

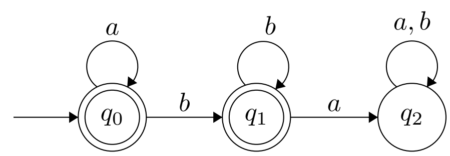
הרצאה מס' 2:

יום רביעי

13.10.21

מוטיביציה

נתבונן לרגע באוטומט הבא - A_1:



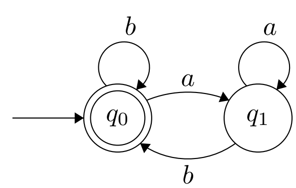
השפה $L(A_1)$ מורכבת משרשרת (ייתכן ריקה) של a-ים ואחר כך שרשרת (ייתכן ריקה) של b-ים.

כלומר, ניתן לרשום זאת גם בתור $a^i, b^j, i, j \geq 0$.

כעת, נשאל את השאלה ההפוכה, מהו האוטומט A_2 של השפה L_2:

"אחרי כל a יש בסופו של דבר b" כאשר $\Sigma = \{a, b\}$.

נקבל את האוטומט הבא:



אם היינו מרחיבים את השפה, כלומר כעת $\Sigma = \{a, b, c\}$, לא היה משתנה דבר.

לעומת זאת, אם נתבונן בשפה $L = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$, נגלה שאין לה אוטומט. למעשה, שפה זו דומה לשפה שראינו, $L_{\text{eq}} = a^n \cdot b^n$, ומעבר לכך מתקיים כי $L_{\text{eq}} = L \cap L(A_1)$.

מכאן יש לנו מוטיבציה ל"תכונות סגור", שהרי ידוע כי L_{eq} לא רגולרית, וגם ידוע כי $L(A_1)$ רגולרית, ואם נוכל להוכיח כי חיתוך שפות רגולריות הוא רגולרי, סימן ש-L לא רגולרית[1].

אבחנה

כשאנו מתייחסים ל"תכונות סגור", או "קבוצה סגורה לפעולה", הכוונה שהתוצאה של הפעלת פעולה כלשהי על איברים בקבוצה, נשארת בקבוצה.

למשל, המספרים הטבעיים סגורים לכפל כי אם $x, y \in \mathbb{N}$ אזי גם $x \cdot y \in \mathbb{N}$, אבל הם לא סגורים לחילוק כי $\frac{x}{y} \notin \mathbb{N}$.

[1] "אם L הייתה רגולרית, אזי מחיתוך שפות רגולריות גם L_{eq} הייתה רגולרית".

נרצה כעת להראות כי הפעולות שהראינו קודם על שפות, סגורות בשפה.

משפט

אם L_1 רגולרית, ו-L_2 רגולרית, אזי $L_1 \cup L_2$ רגולרית.

כלומר, השפות הרגולריות סגורות לאיחוד.

הוכחה

יהי $A_1 = \left\langle Q_1, \Sigma, \delta_1, S_1^0, F_1 \right\rangle$ אוטומט DFA כלשהו עבור L_1 ויהי $L_2 = \left\langle Q_2, \Sigma, \delta_2, S_2^0, F_2 \right\rangle$ אוטומט DFA כלשהו, עבור L_2.[2]

נבנה $A = \left\langle Q, \Sigma, \delta, S^0, F \right\rangle$ כך ש-$L(A) = L(A_1) \cup L(A_2)$, ונוכל לעשות זאת באמצעות אוטומט המכפלה:

$$Q = Q_1 \times Q_2 = \{\langle q_1, q_2 \rangle \mid q_1 \in Q_1, q_2 \in Q_2\}$$

הרעיון: A מבקר במצב $\langle q_1, q_2 \rangle$ אחרי קריאת $w \in \Sigma^*$, אם A_1 מבקר ב-q_1 אחרי קריאת w ו-A_2 מבקר ב-q_2 אחרי קריאת w.

כעת, נגדיר את δ ו-F :

$$\delta(\langle q_1, q_2 \rangle, \sigma) = \langle \delta(q_1, \sigma), \delta(q_2, \sigma) \rangle = S_0 = \left\langle S_1^0, S_2^0 \right\rangle$$

וגם:

$$F = \{\langle q_1, q_2 \rangle \mid q_2 \in F_2 \vee q_1 \in F_1\} = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$$

פונקציית המעברים שלמה (מוגדרת לכל מצב ואות).

הוכחת נכונות של הבנייה

תהי $w = \sigma_1 \cdot \sigma_2 . \ldots, \sigma_n \in \Sigma^*$ מילה.

נתבונן בריצה של A על w:

$$r = \left\langle q_1^0, q_2^0 \right\rangle, \left\langle q_1^1, q_2^1 \right\rangle, \left\langle q_1^2, q_2^2 \right\rangle, \ldots, \left\langle q_1^n, q_2^n \right\rangle$$

ונשים לב כי מתקיים ש-$r_1 = q_1^0\, q_1^1\, q_1^2\, q_1^3\, \ldots\, q_1^n$ היא הריצה של A_1 על w, וגם מתקיים כי $r_2 = q_2^0\, q_2^1\, q_2^2\, q_2\, \ldots\, q_2^n$ היא הריצה של A_2 על w (ההטלה של r על האיבר הראשון או השני בכל זוג).

מהגדרת F מתקיים כי r מקבלת אס"ם r_1 או r_2 מקבלות.

אם כך, סיימנו את ההוכחה, כנדרש.

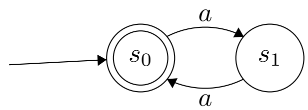
דוגמה

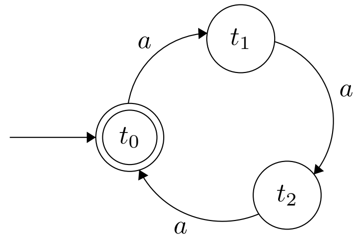
תהי $\Sigma = \{a\}$.

$L_1 = \{w \mid \ |w| \equiv 0 \mod 2\}$ ו-$L_2 = \{w \mid \ |w| \equiv 0 \mod 3\}$.

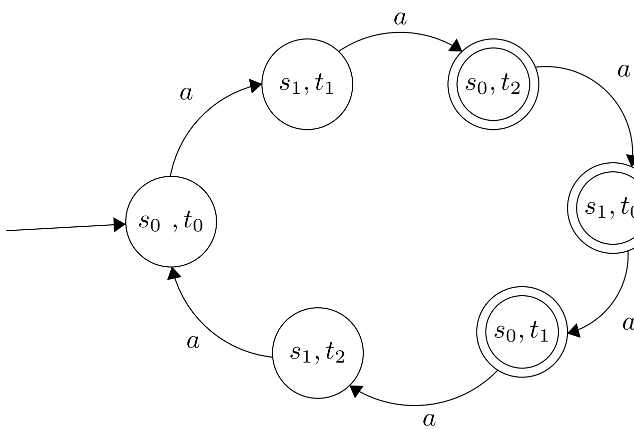
האוטומטים הם:

[2] הנחנו ש-L_1 ו-L_2 מעל אותו א"ב Σ, כיוון שאחרת נוכל לקחת את $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ ולא תהיה בעיה.





והאוטומט שנבנה יהיה אוטומט האיחוד של $A_1 \cup A_3$, כלומר כל המילים שאורכן זוגי או כפולה של 3:



על מנת לבנות אוטומט של חיתוך, נצטרך לבנות את אוטומט המכפלה עם $F = F_1 \times F_2$.
כדי לבנות אוטומט של השלמה, נבנה את אותו אוטומט, עם $\widetilde{F} = Q \setminus F$ (כל המילים שלא התקבלו באוטומט המקורי).

הרצאה מס' 3:

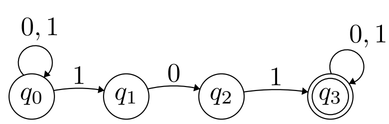
יום שני

18.10.21

1.2 אוטומט סופי לא דטרמיניסטי (NFA)

מוטיבציה

נתבונן באוטומט הבא. הא"ב יהיה $\Sigma = \{0, 1\}$ והשפה תהיה כל המילים שמכילות את תת המילה 101. האוטומט המתאים הוא:



זהו אוטומט שרק לפעמים עובד, כאשר בריצה מסוימת, אם האוטומט 'מנחש', ייתכן והמילים יהיו בשפה. כלומר, ההבדל הוא שקודם לכן היה אפשרות **חד משמעית** לאן ללכת, ואילו כאן אנחנו מאפשרים באמצעות מספר כלשהו, למשל, ללכת לשני מצבים שונים.
כמו כן, יש צעדי ε (לא בציור הזה), שמאפשרים 'לקפוץ' ממצב אחד לאחר. במצב כזה, השפה היא כל המילים שמכילות 101 או 11. דבר זה מוביל אותנו להגדרה הבאה:

הגדרה

אוטומט סופי **לא דטרמיניסטי** (NFA) הוא חמישיה $A = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$ כאשר:

- Q קבוצה סופית של **מצבים**.
- Σ הוא **א"ב**.
- $Q_0 \subseteq Q$ קבוצה סופית של **מצבים התחלתיים**.
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^Q$ **פונקציית מעברים**.
- $F \subseteq Q$ קבוצת **מצבים מקבלים**.

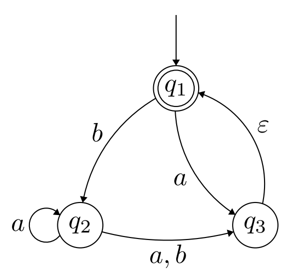
הגדרה

ריצה של A על **מילה** $w = \sigma_1 \dots \sigma_n$ היא סדרת מצבים $r = r_0, r_1, \dots, r_m$ (עבור $n \leq m$).
כך שניתן לכתוב את w כ- $y_1\, y_2\, y_3 \dots y_m$ כאשר $y_i \in \Sigma$ וגם $r_0 \in Q_0$.
כמו כן, לכל $0 \leq i < m$ מתקיים כי $r_{i+1} \in \delta\left(\sigma_i, y_{i+1}\right)$.
נאמר ש-A **מקבלת** את אם קיימת ריצה מקבלת של A על w.

האוטומט הקודם הוא דוגמה לאוטומט לא דטרמיניסטי.

דוגמה נוספות

אוטומט מעל $\Sigma = \{a, b\}$, בתיאור הבא:



אילו מילים בשפה? $\varepsilon, a, baba, \varepsilon a$.

אינטואיציה

נרצה להראות עכשיו שלכל NFA יש DFA - זה כלי שיעזור לנו, כי בסופו של דבר נגלה שלמרות שהפעולה של NFA מרגישה כמו קסם, בסופו של דבר אין שפה שמזהה NFA שלא ניתן לזהות באמצעות DFA.
נוכל לעשות זאת באמצעות בנייה כללית של NFA מכל DFA נתון. אבל מדוע זה נכון? מדוע תמיד קיימת בנייה כזאת? ניתן לומר ש-NFA הוא בעצם מספר מכונה שמכילה בתוכה מספר סימולציות אפשריות: אתה יכול לבחור ללכת עם a ימינה, אבל אתה גם יכול לבחור ללכת עם a שמאלה, ואז יקרה משהו אחר. יש כביכול קסם - 'לנחש' לאן ללכת, אבל למעשה, אפשר לנתח את כל כל עץ הריצות האפשריות, לסמלץ את כל המעברים. אם כך, ננסה באמצעות הבנייה שלנו ללכת לכל האופציות האפשריות, ואם הסתכלנו על זה בתור ניתוח מסלול בעץ, ממילא מספר המצבים שלנו יהיה לכל היותר אקספוננציאלי, $2^{|Q|}$.

משפט

לכל NFA יש DFA שקול.

הוכחה

נוכיח את המשפט ללא צעדי ε. בתרגול נראה כיצד ניתן לעבור מ-NFA עם צעדי ε ל-NFA ללא צעדי ε ובכך נשלים את ההוכחה.
בהינתן NFA שמוגדר על ידי $A = \langle Q, \Sigma, Q_0, \delta, F\rangle$ נבנה DFA שמוגדר על ידי $A' = \langle Q', \Sigma, q_0, \rho, F'\rangle$ כך ש-$L(A') = L(A)$.

<u>הבנייה והרעיון</u>

נגדיר כי $Q' = 2^Q$ ו-A' נמצא במצב $S \in 2^Q$ אחרי קריאת w, אם"ם A עשוי להימצא **בכל אחד** ממצבי S אחרי קריאת w.
כמו כן, מתקיים כי $q_0 = Q_0 \in 2^Q$ - כל מצב הוא בעצם קבוצה של Q.
מעבר לזה, נגדיר $\rho : 2^Q \times \Sigma \to 2^Q$ שהיא פונקציית **המעברים** הדטרמיניסטית של A', כך ש-$\rho(S,\sigma) = \bigcup_{s\in S} \delta(s,\sigma)$.
כלומר, מדובר בכל המצבים **שאפשר להגיע אליהם** מאחד המצבים מ-S.
לבסוף, נגדיר את $F' = \{S :\ S \cap F \neq \emptyset\}$ - כלומר, כל **המצבים שמכילים מצב מקבל** באוטומט ההתחלתי.
בנייה זו נקראת **Subset Construction**.

<u>נכונות הבנייה</u>

ראינו בתרגול כי ניתן להרחיב את ρ ל-ρ^* כאשר $\rho^* : Q' \times \Sigma^* \to Q'$, דהיינו $\rho^*(S,w) = S'$, כשנמצאים במצב $S \in Q'$ וקוראים w, מגיעים למצב $S' \in Q'$.[3]
כמו כן, ניתן להרחיב את פונקציית המעברים גם ב-NFA. כלומר, $\delta^* : 2^Q \times \Sigma^* \to 2^Q$, כך ש-$\delta^*(S,w)$ היא קבוצת המצבים שניתן להגיע אליהם בקריאת w ממצב ב-S.
ההגדרה תהיה באינדוקציה על $|w|$:
לכל קבוצה $S \in 2^Q$, יתקיים כי $\delta^*(S,\varepsilon) = S$ ומאידך, $\delta^*(S, w\cdot\sigma) = \bigcup_{t\in\delta^*(S,w)} \delta(t,\sigma)$.

טענה

לכל מילה $w \in \Sigma^*$ יתקיים כי $\delta^*(Q_0,w) = \rho^*(q_0,w)$
(הצד השמאלי הוא מצבים ש-A עשויה לבקר בהם אחרי קריאת w, והצד הימני הוא המצב - קבוצה של מצבי A, ש-A' נמצאת בו אחרי קריאת w).

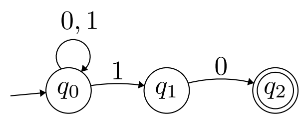
הוכחה

[3] הרחבה של פונקציית המעברים לפונקציית מעברים על מילה.

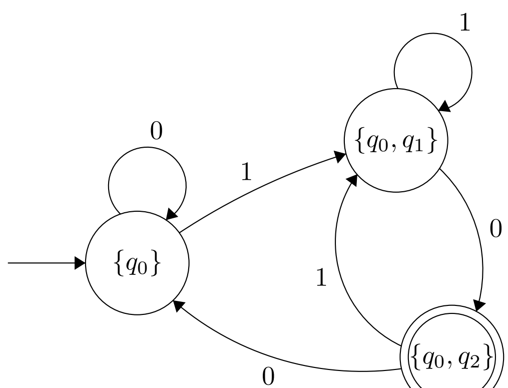
באינדוקציה על $|w|$.

מטענה זו נובעת למעשה נכונות הבנייה:
אנו יודעים כי $w \in L(A)$ אם ורק אם $\delta^*(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ אם ורק אם $\rho^*(q_0, w) \in F'$ אם"ם $w \in L(A')$.

על מנת להסביר זאת, נתבונן בדוגמה הבאה:



השפה היא מילים שמסתיימות ב-10. מדובר באוטומט לא דטרמיניסטי.
על מנת לייצר אוטומט דטרמיניסטי, נוכל לבנות את האוטומט הבא:



1.2.1 חסם תחתון לדטרמיניזציה[4]

הרצאה מס' 4:
יום רביעי
20.10.21

המעבר שעשינו קודם לכן מ-NFA ל-DFA דרש 'ניפוח אקספוננציאלי'. כעת נראה שיש חסם תחתון לפעולת הדטרמיניזציה הזו ("חרצון" בעברית), ולא קיימת בנייה טובה יותר מה-**Subset Construction**.
דוגמה קונקרטית של מספרים לא תעזור כאן כיוון שאנחנו רוצים להוכיח באופן כללי כי **לא קיים** פולינום $P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ כך שבהינתן NFA עם n מצבים, קיים DFA שקול עם $P(n)$ מצבים. הדרך לעשות זאת היא לא דרך דוגמה ספציפית, אלא לסתור קיום של פולינום כזה.
נראה זאת באמצעות משפחה של שפות.

<u>רעיון ההוכחה</u>
נראה משפחה של שפות L_1, L_2, L_3 כך ש-L_i, לכל $1 \leq i \leq n$:

- יש ל-L_n NFA עם $O(n)$ מצבים.
- ה-DFA הקטן ביותר עבור L_n צריך לפחות 2^n מצבים.

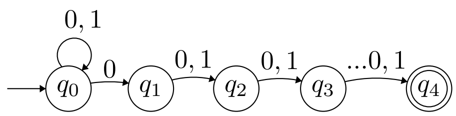
מדוע זה יספיק לנו? אם נניח בשלילה כי יש פולינום p כך ש-DFA $\overset{p(n)}{\to}$ NFA, בהכרח, קיים n_0 כזה ש-$p(n_0) < 2^{n_0}$. נתבונן ב-L_{n_0} שבה יש NFA עם n_0 מצבים ל-L_{n_0} אבל מהגדרת השפה ה-DFA הקטן ביותר צריך לפתור 2^{n_0} מצבים, שזה יותר מ-$p(n_0)$.

[4] הערת המסכם: שיניתי כאן קצת את סדר ההרצאות, כך שההגדרות של הביטויים הרגולריים מופיעות לאחר הוכחת החסם התחתון.

<u>הגדרת משפחת השפות</u>

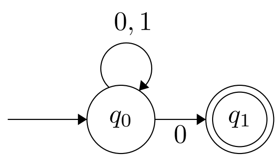
נבחר $\Sigma = \{0,1\}$ ואת השפה להיות כל המילים שיש בהן 0 במקום ה-n מהסוף. במקרה הזה, יש ל-NFA $n+1$ מצבים.

האוטומט המתאים הוא:



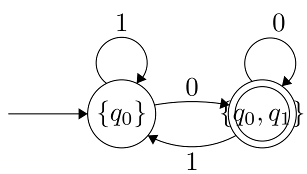
דוגמה

עבור $n=1$, נגדיר את ה-NFA להיות:



שימו לב כי $n=1$ ויש $n+1$ מצבים.

ה-DFA יהיה בעל $2^1 = 2$ מצבים:



טענה

כל DFA שנסמנו D_n המקבל את השפה L_n, מכיל לפחות 2^n מצבים.

הוכחה

נניח בשלילה כי יש D_n(דטרמיניסטי) שמזהה את L_n ויש לו פחות מ-2^n מצבים. אם נתבונן בכל המחרוזות באורך n', בהכרח, מעיקרון שובך היונים, יש שתי מחרוזות $x, y \in \Sigma^*$ כך ש- $x \neq y$ וגם שתיהן מסיימות באותו המצב של A. נבחר את ה- $1 \le i \le n$ הימני ביותר כך ש-$x[i] \neq y[i]$. נניח, בלי הגבלת הכלליות כי ב-x רשומה בתא ה-i הספרה 0 ואילו ב-y רשומה בתא ה-i הספרה 1.

נוסיף מחרוזת u, ונתבונן בשתי המחרוזות החדשות xu ו-yu (כאשר u באורך $i-1$). נבחין כעת כי במקום ה-n מהסוף של xu נמצאת הספרה 0, ואילו ב-yu יש את הספרה 1. אם כך $xu \notin F$ ואילו $yu \in F$. כלומר, קיבלנו שתי ריצות שמסיימות באותו המצב (בתוספת u, ששווה בשניהם), אך האחת מקבלת והאחת לא.

הנחת השלילה קרסה ומכאן שכל D_n מכיל לפחות 2^n מצבים.

דוגמה נוספת למשפחה של שפות

נראה דוגמה נוספת למשפחה של שפות שמקיימת את התנאים למעלה (A_n דורש $O(n)$ מצבים ו-D_n דורש 2^n מצבים).

נגדיר כי $\Sigma_n = \{1, 2, 3, \ldots, n, \#\}$ ואת השפה להיות $L_n = \{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k\#\sigma_{k+1} \mid \sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \sigma_{k+1} \in \{\sigma_1, \ldots \sigma_k\}\}$. כלומר, יש איבר # שמפריד בין קבוצת המצבים, והאיבר הבא בתור מתאים לאחד האיברים שכבר נתקלנו בהם.

לאוטומט זה יהיו $O(n) = 3n+2$ מצבים.

הרצאה מס' 5:

יום שני

25.10.21

(מוקלט)

1.3 ביטויים רגולריים

הגדרה

בהינתן א"ב Σ, ביטוי רגולרי מוגדר רקורסיבית:

- $a \in \Sigma$, ε ו-$\emptyset$ הם ביטויים רגולריים.
- אם r_1 ו-r_2 ביטויים רגולריים כך גם:
  - $r_1 \cup r_2$ ביטוי רגולרי.
  - $r_1 \cdot r_2$ ביטוי רגולרי.
  - r_1^* ביטוי רגולרי.

כל ביטוי רגולרי r, מגדיר את השפה $L(r)$:

- $L(\emptyset) = \emptyset$, $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$, $L(a) = \{a\}$.
- $L(r_1 + r_2) = L(r_1) \cup L(r_2)$.
- $L(r_1 \cdot r_2) = L(r_1) \cdot L(r_2)$.
- $L(r_1^*) = (L(r_1))^*$.

לשם הנוחות, נסמן מעתה ביטוי רגולרי בתור 'ב"ר'. כמו כן, נסמן $r_1^+ = r_1 \cdot r_1^*$.

דוגמאות

מילים מעל $\Sigma = \{0,1\}$.

- מילים עם 0 יחיד, יצוינו בתור $1^* \cdot 0 \cdot 1^*$.
- מילים עם לפחות 0 אחד יצוינו בתור $(0+1)^* \cdot 0 \cdot (0+1)^*$.
- מילים עם לפחות 0 אחד בשלושת האותיות האחרונות יצוינו בתור
  $\left((0+1)^* \cdot 0 \cdot (0+1) \cdot (0+1)\right) + \left((0+1)^* \cdot 0 \cdot (0+1)\right) + \left((0+1)^* \cdot 0\right)$
  או בתור $(0+1)^* \cdot 0((0+1)(0+1) + (0+1) + \varepsilon)$
  או $(0+1)^*0(0+1+\varepsilon)(0+1+\varepsilon)$.
  הביטוי המשלים (מילים שאין בהם 0 באחת משלושת המילים האחרונות) הוא:
  $\varepsilon + 1 + 11 + (0+1)^* 111$.
- מילים שאין בהם את הרצף 00 או הרצף 11 יצוינו בתור $(\varepsilon+1)(10)^*(\varepsilon+0)$.
- מילים באורך זוגי, יצוינו בתור $((0+1)\cdot(0+1))^*$.

משפט

לכל שפה $L \subseteq \Sigma^*$, L רגולרית אם"ם יש ב"ר r כך ש-$L(r) = L$.

הוכחה

נציג רק את מבנה ההוכחה הכללי.

בכיוון הראשון $\Leftarrow$ נצטרך לתרגם ב"ר לאוטומטים.
בכיוון השני $\Rightarrow$ נצטרך לתרגם אוטומט לב"ר.
ההוכחה עצמה מופיעה בתרגול.

1.4 למת הניפוח ומשפט מייהל - נרוד

1.4.1 למת הניפוח

מוטיבציה

כבר ציינו כי השפה $L=\{0^n1^n \mid n\geq 0\}$ איננה רגולרית. אבל לא הוכחנו זאת בצורה קונסטרוקטיבית. נרצה למצוא דרך להוכיח זאת בצורה פורמלית ומלאה.

טענה

השפה $L=\{0^n1^n \mid n\geq 0\}$ איננה רגולרית.

הוכחה

נניח בשלילה כי יש DFA שמתאים לשפה[5] שנסמנו ב-A, כך ש-$L(A)=L$.
יהי p מספר המצבים ב-A, ונתבונן במילה $w=0^p1^p$. בהכרח קיימת ריצה $r=q_0,q_1,\dots,q_{2p}$ של A על w.
מכאן עולה כי $q_{2p}\in F$. לאוטומט יש p מצבים ולכן קיימים $0\leq l<j\leq p$ כך ש-$q_j=q_p$ (מגיעים לאותו מצב פעמיים בקריאת 0, מעיקרון שובך היונים, שהרי קוראים $p+1$ מצבים).
כעת נבחר $j=p-l$, (השמטנו את הסיבוב) - האוטומט A יקבל גם את המילה 0^j1^p, שהרי גם עם פחות 0-ים המילה מתקבלת.
אך לפי הגדרת השפה, אמורות להתקבל מילים רק בעלות מספר אפסים ואחדים שונה. כלומר, קיבלנו סתירה.
מעבר לכך, קיימת סתירה לדטרמיניזם, שכן ישנן שתי 'דרכים' לבחור אפסים, האחת שממשיכה את הסיבוב והאחת שמתקדמת לכיוון ה-1-ים.

מסתבר שההוכחה הזאת והשימוש בעקרון שובך היונים אינם ספציפיים בשפה זו.

אינטואיציה

הרעיון של למת הניפוח מבוסס מאוד על הרעיון שראינו כעת ב-0^n1^n. ככלל, הרעיון של למת הניפוח בא לומר, שאם שפה היא רגולרית, היא לא צריכה זיכרון לטווח ארוך. ואם היא לא צריכה זיכרון לטווח ארוך, יש איזושהי חלוקה כלשהי, שנוכל לעשות שוב ושוב מעגלים, ועדיין להישאר בתוך השפה. לפעמים גם אם שפה דורשת זיכרון אפשר לעשות סיבובים, אבל אם אי אפשר לעשות סיבובים ובהכרח להישאר בשפה, כמו שראינו מקודם ב-0^n1^n, שדורש מונה – בהכרח השפה לא רגולרית.

משפט (למת הניפוח)

אם L רגולרית, אז קיים $p\geq 1$ קבוע ניפוח, כך שלכל $w\in\Sigma^*$, אם $|w|\geq p$, אזי קיימת חלוקה xyz, כך ש-$w=xyz$ וגם:

- $|y|>0$ ($y\neq\varepsilon$).
- $|xy|\leq p$ (מותר כי $z=\varepsilon$ או $x=\varepsilon$).

[5] יש להבחין שכאשר מניחים בשלילה, עדיף לעבוד עם המודל החלש יותר, שכן קל יותר למצוא הפרכה לדטרמיניסטיות.

- לכל $i \geq 0$, המילה $xy^iz \in L$ (למשל $xyyyz \in L$).

הוכחה

תהי L שפה רגולרית. נצטרך למצוא p מתאים, שיוכיח את הטענה.
יהי A DFA עבור L. נבחר את p להיות $|Q| \in A$ (מספר המצבים).
כעת, נתבונן ב-$w \in L$, כך ש-$|w| \geq p$. בריצה של A על w קיימים בהכרח l, j כך ש-$1 \leq l < j \leq p$.
נסמן $w = w_1, \dots, w_n$ ונקבל:

$$\underbrace{q_0 \xrightarrow{w_0} \cdots \xrightarrow{w_l}}_{x} \underbrace{q_l \xrightarrow{w_{l+1}} \cdots \xrightarrow{w_j}}_{y} \underbrace{q_j \xrightarrow{w_{j+1}} \cdots \xrightarrow{w_n} q_n}_{z}$$

נבחין כי המצבים שמסומנים בירוק שווים, לפי מה שהסברנו מקודם ("עשינו סיבוב"). נראה שאכן מתקיימים התנאים:

- $|y| > 0$ כי $j > l$ ולכן $y = j - l$.
- $|xy| \leq p$ כי $j \leq p$ ולכן החזרה תקרה "בתוך" p הצעדים הראשונים.
- לכל $i \geq 0$, המילה $xy^iz \in L$ כי $q_1, \dots q_l, (q_{l+1}, \dots, q_j)^i, q_{j+1}, q_n$ ריצה מקבלת שהרי $q_n \in F$.

דוגמה לשימוש בלמה

ניקח את השפה שכוללת את כל המילים עם 0 במקום הלפני אחרון, כלומר את $L = (0+1)^*0(0+1)$.
נראה ש-L מקיימת את למת הניפוח. נבחר את $p = 3$, ונראה שלכל מילה $w \in L$ ניתן לחלק ל-xyz כנדרש.
נבחר את $x = \varepsilon$, את $y = w[1]$ ו-$z = w[2 - |w|]$ (כל השאר).
נראה שתנאי הלמה מתקיימים:

- אכן $|y| > 0$ מההגדרה, שכן $|y| = 1$.
- $|xy| \leq 3$ שכן $|xy| = 1$.
- לכל $i \geq 0$, מתקיים כי $xy^iz \in L$, שכן הסיפא z לא משתנה וה-0 נמצא בתוכה.

1.4.2 משפט מייהל-נרוד

הרצאה מס' 6:

יום רביעי

27.10.21

(מאיה)

הגדרה
יהי Σ א"ב ותהא $L \subseteq \Sigma^*$. יחס השקילות מייהל-נרוד של L מוגדר כך: לכל $x, y \in \Sigma^*$ נגדיר כי $x \sim_L y$ אם ורק אם לכל $z \in \Sigma^*$ מתקיים כי $x \cdot z \in L \Leftrightarrow y \cdot z \in L$.

דוגמה

ניקח את השפה $(0 \cup 1)^* \cdot 0 \cdot (0 \cup 1)$.
נבחין כי יש 0 במקום אחד לפני האחרון.

- $111 \sim_L 11$ כי הן לא בשפה, אבל אם נוסיף את אותה סיפא לשתיהן (למשל 01), הן יהיו בשפה.
- $11 \not\sim_L 10$ כי למשל $111 \notin L$ אבל $101 \in L$.

טענה

לכל $L \subseteq \Sigma^*v$ היחס $\sim_L$ הוא יחס שקילות.

הוכחה

ראשית, נבחין כי $\sim_L$ רפלקסיבי. כלומר $x \sim_L x$, כי הרי $xz \in L \Leftrightarrow xz \in L$ לכל $z \in \Sigma^*$ (טאוטולוגיה).

כמו כן, $\sim_L$ סימטרי כי הרי מהסימטריה של האופרטור $\Leftrightarrow$ עולה כי
$(yz \in L \Leftrightarrow xz \in L) \Leftrightarrow (xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$.

לבסוף, נשאר להוכיח כי $\sim_L$ טרנזיטיבי. אם נניח בשלילה שלא, אזי קיימות w_1, w_2, w_3 ב-Σ^* כך ש-$w_1 \sim_L w_2$ וגם $w_2 \sim_L w_3$ אבל $w_1 \not\sim_L w_3$.

כלומר, קיים $z \in \Sigma^*$ כך שבלי הגבלת הכלליות $w_1 z \in L$ אבל $w_3 z \notin L$. אמנם, מכך ש-$w_2 \sim_L w_3$, עולה כי $w_2 z \notin L$, ומכאן ש-$w_1 \sim_L w_2$ נדע כי $w_1 z \notin L$, בסתירה.

אבחנה

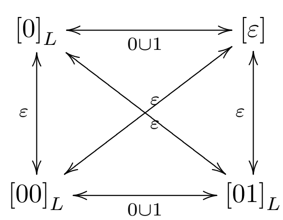
יחס שקילות מחלק את "העולם" למחלקות שקילות זרות. כלומר, קבוצת איברים שמקיימות את היחס, יוצרות חלוקה של L.

נסמן ב-$[w]_L$ את מחלקת השקילות של w ב-L, ונוכל לקחת נציג ספציפי מקבוצת מחלקת השקילות.

דוגמה

עבור השפה $(0 \cup 1)^* \cdot 0 \cdot (0 \cup 1)$ (שפה שבה יש 0 במקום הלפני אחרון), מחלקות השקילות הן:
$S_1 = \varepsilon \cup 1 \cup \Sigma^* 11,\ S_2 = 0 \cup \Sigma^* 10,\ S_3 = \Sigma^* \cdot 00,\ S_4 = \Sigma^* \cdot 01$.

עלינו להראות שיש זנב מפריד בין כל אחת מבין הקבוצות, באמצעות נציג ממחלקת השקילות:



במקרה הקודם, היה מספר סופי של מחלקות שקילות. אמנם, ייתכן שיהיו אינסוף מחלקות שקילות.

למשל, ניקח את השפה $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$. אם נביט במחלקת השקילות של היחס $\sim_L$, נקבל למעשה כי לכל $i < j$ מתקיים כי $0^i \not\sim_L 0^j$.

נשים לב כי המילה 1^i היא **זנב מפריד** בין $0^j, 0^i$, כי $0^i 1^i \in L$, אבל $0^j 1^i \notin L$. כיוון שיש אינסוף זוגות i, j כאלה, עולה כי יש ל-$\sim_L$ אינסוף מחלקות שקילות מייהל-נרוד.

מסתבר שזה לא במקרה, ומכך נגיע למשפט הבא.

אינטואיציה

שימו לב, מדובר בהסבר שנועד לתת תחושה, אבל לא מדוייק עד הסוף ולא מכסה את כל המקרים. המשפט כעת מציג את הקשר בין מספר מחלקות השקילות של מייהל-נרוד ובין רגולריות, וננסה להסביר זאת אינטואיטיבית. ניתן לומר כי אחד המאפיינים המרכזיים של שפות לא רגולריות הוא שהן דורשות זיכרון מתוחכם יותר מאשר דפוס קבוע, למשל ב-0^n1^n - עלינו לשמור מונה של n, ולוודא שעשינו n אפסים ורק לאחר מכן n אחדים. הזיכרון המתוחכם הזה דורש בסופו של דבר סוג של 'אינסוף מצבים', שהרי אם ניקח 0^11^1, מדובר בשפה רגולרית. בהמשך נראה, שאם יש אוטומט, ניתן באמצעות מחלקות השקילות של מייהל-נרוד, שמחלקות את עולם השפות לכמה קבוצות (לפי הזנב), למזער את גודלו לגודל האוטומט המינימלי. אם אנו למעשה צריכים 'אינסוף מצבים', בשביל לאפיין את השפה, אז ברור שאין חסם תחתון, ואין דרך לחלק את השפה למספר סופי של קבוצות.

משפט מייהל-נרוד

תהא $L \subseteq L^*$ שפה, אזי L רגולרית אם ורק אם יש ב-$\sim_L$ מספר סופי של מחלקות שקילות מייהל-נרוד.

הוכחה

בכיוון הראשון $\Leftarrow$:

נניח כי L רגולרית, ונביט ב-DFA שמוגדר על ידי $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$, כך ש- $L(A) = L$.

נגדיר יחס שקילות חדש $\sim_A \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ כך: לכל $x, y \in \Sigma^*$ מתקיים כי $x \sim_A y \Leftrightarrow \delta^*(q_0, x) = \delta^*(q_0, y)$.

כלומר, $x \sim_A y$ אם"ם x ו-y מגיעים **לאותו מצב** בריצה של A מ-q_0.

כעת, נרצה לטעון כי אם $x \sim_A y$ אזי גם $x \sim_L y$. ברגע שנוכיח זאת נסיים את ההוכחה, שהרי מספר מחלקות השקילות של $\sim_L$ הוא לכל היותר מספר מחלקות השקילות של $\sim_A$ וזה מספר סופי כי $|Q|$ סופי.

נבחין כי לכל $z \in \Sigma^*$ עולה כי:

$$\delta^*(q_0, xz) = \delta^*(\delta^*(q_0, x), z) = \delta^*(\delta^*(q_0, y), z) = \delta^*(q_0, yz)$$

כלומר הוכחנו את הנדרש.

בכיוון השני $\Rightarrow$:

נניח כי יש ל-L מספר סופי של מחלקות מייהל-נרוד ונראה כי L רגולרית.

נבנה ל-L DFA כלדהלן: $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ שמוגדר על ידי:

- Q - המצבים יהיו כל מחלקות השקילות MN של L.
- q_0 יהיה $[\varepsilon]$ - מחלקת השקילות של ε.
- δ יאובחן על ידי: לכל מחלקת שקילות $[w]$ ואות $\sigma \in \Sigma^*$ יתקיים כי $\delta([w], \sigma) = [w\sigma]$.
  נשים לב כי δ לא תלויה בנציג, שהרי אם $x \sim_L y$, עולה כי גם $x\sigma \sim_L y\sigma$, לכל $\sigma \in \Sigma^*$
  (אם בשלילה יש z כי $xaz \in L$ ו-$yaz \notin L$, אז az זנב מפריד בין x ל-y).
- F יהיה $F = \{[w] \mid w \in L\}$.

נרצה לטעון כי $L(A) = L$. דבר זה נובע מכך ש-$[w] = \delta(q_0, w)$.

נוכיח זאת באינדוקציה על $|w|$:

<u>בסיס האינדוקציה</u>

עבור $|w| = 0$, עולה כי $w = \varepsilon$ ולכן $\delta\left(q_0, \varepsilon\right) = [\varepsilon]$.

<u>צעד האינדוקציה</u>

נניח כי הטענה נכונה לכל מילה w באורך שקטן שווה מ-n ונוכיח על $n+1$..

ניקח w כך ש-$|w| = n+1$, נסמן $w = w'\sigma$ כך ש-$|w'| \le n$ ונקבל, מההגדרה כי:

$$\delta^*\left(q_0, w\right) = \delta^*\left(q_0, w'\sigma\right) \overset{\overbrace{\text{הגדרה}}}{\overset{\downarrow}{=}}$$

$$\delta^*\left(\delta^*\left(q_0, w'\right), \sigma\right) \overset{\overbrace{\text{הנחה}}}{\overset{\downarrow}{=}}$$

$$\delta\left(\left[w'\right]_L, \sigma\right) \overset{\overbrace{\text{הגדרה}}}{\overset{\downarrow}{=}}$$

$$\left[w'\sigma\right]_L$$

כלומר, מכאן עולה כי לפי הגדרת F, בהכרח $L(A) = A$, כנדרש.

1.4.3 מציאת אוטומט דטרמיניסטי מינימלי

הרצאה מס' 7:

יום שני

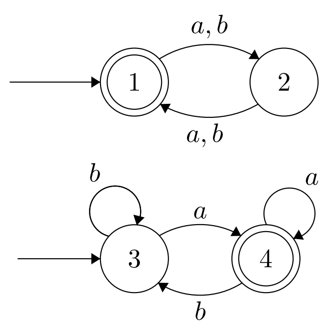
01.11.21

מוטיבציה

ניקח את $\Sigma = \{a, b\}$ ואת $L = \{w \mid a\text{-ב ומסתיימת באורך זוגי } w\}$.

נבחין כי מדובר בשפה רגולרית, שכן ניתן להתבונן על L בתור $L = L_1 \cap L_2$ כך ש-L_1 אלו השפה של המילים באורך זוגי, ו-L_2 הן המילים שמסתיימות ב-a, וכפי שאנחנו יודעים שפות רגולריות סגורות לחיתוך.

שתי השפות הללו מיוצגות בתור:



נתבונן במספר דוגמאות לבדוק אילו מילים נמצאות ביחס מייהל-נרוד:

- $aa \not\sim_L ab$ כי ε זנב מפריד: $ab\varepsilon \notin L$ ואילו $aa\varepsilon \in L$.
- $b \sim_L a$ כי לכל $z \in \Sigma$ יתקיים כי $az \in L$ אס"ם $|z|$ אי זוגי ו-z מסתיימים ב-a ולכן $bz \in L$.
  מכאן עולה כי ברגע שמדובר במילה אי זוגית, אין משמעות ל-a.

האלגוריתם שלנו יבדוק למעשה את הדבר האחרון - אילו מצבים 'מיותרים' וניתן לאחד ביניהם. כלומר, נרצה למצוא את אוסף המצבים המינימלי.

אלגוריתם למזעור אוטומט דטרמיניסטי

נתון $A = \langle Q, \Sigma, q_0, \delta, F \rangle$. נגדיר סדרה $\equiv_i \subseteq Q \times X$ של יחסים מעל Q כך ש-$1 \leq i$.

נרצה למעשה כי $q \equiv_i q' \Leftrightarrow$ לכל מילה w, אם $|w| \geq i$ אזי $\delta^*(q', w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, w) \in F$ - הם ביחס אם סיפא של מילה תגיע משניהם למצב מקבל.

נגדיר זאת אינדוקטיבית:

$q \equiv_0 q'$ אם"ם $(q \in F \Leftrightarrow q' \in F)$. למקרה זה יש שתי מחלקות שקילות למעשה, אם $q \in F$ ואם $q \in Q \setminus F$.

$q \equiv q'$ אם"ם $q \equiv_i q'$ וגם לכל $\sigma \in \Sigma$ יתקיים כי $\delta(q, \sigma) \equiv_i \delta(q', \sigma)$.

טענה

נרצה להוכיח כי $q \equiv_i q'$ אם"ם לכל w, אם $|w| \leq i$, אזי $\delta^*(q, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q', w)$.

הוכחה

באינדוקציה על i.

<u>בסיס האינדוקציה</u>

עבור $i = 0$, מתקיים כי $\delta^*(q, \varepsilon) = q \in F \Leftrightarrow \delta^*(q', \varepsilon) = q' \in F$.

<u>צעד האינדוקציה</u>

נניח כי הטענה נכונה עבור כל $|w| \leq i$ ונוכיח עבור $i + 1$.

כלומר כל שעלינו לבדוק הוא את ה'אות האחרונה'.

כעת, יהיו q ו-q' כך ש-$q \equiv_i q'$. תהי w מילה באורך $i + 1$.

- אם $|w| \leq i$ אזי מהנחת האינדוקציה $\delta^*(q, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q', w) \in F$.

- אם $|w| = i + 1$, אזי $w = \sigma x$ עבור x כך ש-$|x| = i$. במקרה זה יתקיים כי $\delta^*(q, \sigma x) = \delta^*(\delta(q, \sigma), x)$. כעת, מהגדרת $\equiv_{i+1}$ מתקיים כי $\delta(q, \sigma) \equiv_i \delta(q', \sigma)$ ולכן מההנחה בהכרח $\delta^*(q', \sigma x) = \delta^*(\delta(q', \sigma), x)$, כנדרש.

מתי האלגוריתם יעצור? נרצה לטעון כי לסדרה $\equiv_i$ יש נקודת שבת, כלומר נקודה בה $\equiv_i$ זהה ל-$\equiv_{i+1}$. כלומר, קיים i שיותר ממנו לא נפצל יותר.

טענה

לסדרה $\equiv_i$ יש נקודת שבת.

הוכחה

בכל איטרציה שאיננה נקודת שבת, מתפצלת לפחות מחלקה אחת. ה'חסם העליון' הוא מספר המצבים, שהרי לא ניתן לפצל מצב בפני עצמו.

סמנטיקה

נאמר כי $q \equiv_A q'$ אם ורק אם $q \equiv_i q'$ עבור האיטרציה i שבה הגענו לנקודת שבת.

טענה - אוטומט מינימלי

יהיו $Q' = \{S_1, \ldots, S_n\}$. האוטומט המינימלי A' יוגדר על ידי $A' = \langle Q', \Sigma, [q_0], \delta', F' \rangle$, כאשר:

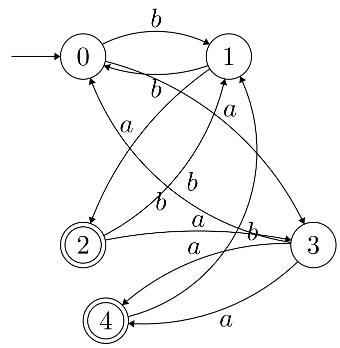
- Q' - מחלקות השקילות של $\equiv_A$.

- δ' - $\delta'([q], a) = [\delta(q, a)]$.

- F' - $\{[q] \mid q \in F\}$.

דוגמה

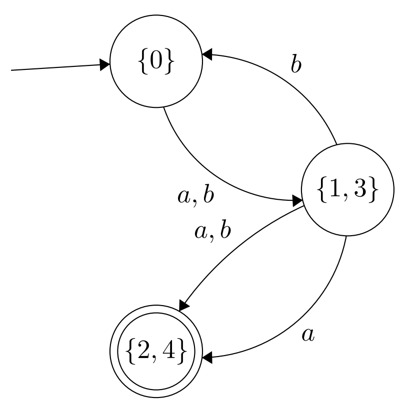
השפה שראינו מקודם הינה:



נתבונן בריצת האלגוריתם:

1. בתחילה, מתקיים כי $\equiv_0$ הינו $\{\{2,4\},\{0,1,3\}\}$, כי הרי החלוקה היא למצבים המקבלים והמצבים הלא מקבלים.
2. נבדוק האם $1 \equiv_1 3$. אכן, מתקיים כי $\delta(1,a) \equiv_0 \delta(3,a)$ שהרי $2 =_0 4$. כמו כן, מתקיים כי $\delta(1,b) \equiv_0 \delta(3,b)$ ו-$0 \equiv_0 0$.
   מאידך, $0 \not\equiv_0 3$ כי הרי $\delta(0,a) \not\equiv_0 \delta(3,a)$ כיוון ש- $3 \not\equiv_0 4$.
   לכן נקבל בסך הכל כי $\equiv_1$ הינו $\{\{2,4\},\{0\},\{1,3\}\}$.
3. מתברר כי $\equiv_2 = \equiv_1$.

ואכן, האוטומט המינימלי יהיה:



1.5 שפות חסרות הקשר

נתחיל קודם כל מדוגמה.

דוגמה

ניקח דקדוק שיוגדר על ידי: $A \to 0A1,\ A \to B,\ B \to \#$.

מסתבר שהדקדוק הזה מגדיר שפה מעל הא"ב $\Sigma = \{0,1,\#\}$.

כי למשל, יתקיים:

$$A \to 0A1 \to 00A11 \to 000A111 \to 000B111 \to 000\#111$$

במצב האחרון קיבלנו רק אותיות שנמצאות בא"ב ללא משתנים, ואז למעשה קיבלנו מילה שנמצאת בשפה.
כך נגדיר למעשה את ה"דקדוק", כעת בצורה פורמלית.

הגדרה
דקדוק חסר הקשר (להלן ח"ה) G מוגדר על ידי $G = \langle V, \Sigma, R, S \rangle$ כאשר:

- V משתנים.
- Σ א"ב.
- R הן חוקי גזירה מהצורה $V \to (V \cup \Sigma)^*$.
- $S \in V$ משתנה התחלתי.

הגדרה
אם $w, u, v \in (V \cup \Sigma)^*$ ו-$A \to w$ חוק בדקדוק, אזי נאמר ש-$uAv \Rightarrow uwv$ **מייצר** את w.
אם $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$ נאמר כי $u \overset{*}{\Rightarrow} v$ אם יש סדרה $u = u_1 \Rightarrow u_2 \Rightarrow u_3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow u_k = V$ ו-$1 \le k$.
השפה של G היא: $L(G) = \left\{ w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\Rightarrow} w \right\}$.

דוגמה
נתבונן ב-$G = \langle \{S, A\}, \{a, b\}, R, S \rangle$ כאשר R מוגדר על ידי $S \to AaA$ ו-$A \to \varepsilon \mid aA \mid bA$.
מה השפה של G? כל המילים שיש בהם a, כלומר למעשה $L(G) = (a+b)^* a (a+b)^*$.

הגדרה
דקדוק **תלוי** הקשר הוא דקדוק בו, בהינתן חוק $a \to b$, ייתכן כי $a \in V^*$.

כהערה, נאמר כי השפה שראינו מקודם היא $L(G) = \{0^n \# 1^n \mid n \ge 0\}$, כי מספר האפסים שמוסיפים שווה למספר האחדות.

דוגמה נוספת
ניקח את הדקדוק חסר ההקשר שמוגדר על ידי $S \to 0S0 \mid 1S1 \mid \varepsilon$.
מדובר בשפה של 'פלינדרום באורך זוגי' מעל $\Sigma = \{0, 1\}$, כי למשל מתקיים: $S \to 0S0 \to 01\varepsilon10 \to 0110$.
אם היינו רוצים פלינדרומים באורך כלשהו, היה עלינו להוסיף כי $S \to 0 \mid 1$.

הרצאה מס' 8:

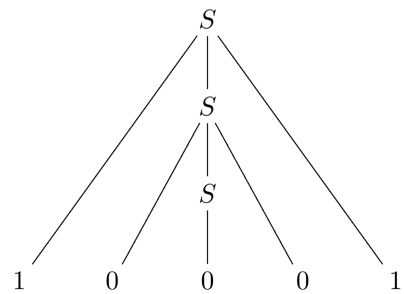
יום רביעי

03.11.21

בהתבסס על הדוגמה האחרונה, נציג אופן נוסף שבו אפשר 'לגזור' מילים בשפה.

עצי גזירה ועיבוד שפות טבעיות

נניח ונרצה לגזור את המילה 10101 באמצעות השפה שראינו בדוגמה האחרונה. נקבל את העץ הבא:



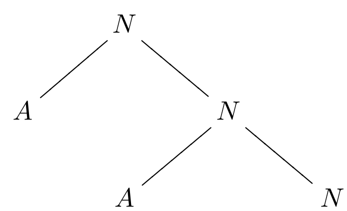
דבר זה נקרא עץ גזירה.

המוטיבציה להשתמש בו קשורה לעיבוד שפות טבעיות, שבעצמן קשורות באופן הדוק לשפות חסרות הקשר.

כי למשל אם ניקח את הדקדוק בשפה האנגלית, נוכל להגדיר אותו בתור

$$\begin{aligned}\text{Noun} &\to \text{Adj Noun}\\ \text{Adj} &\to \text{big}|\text{red}\\ \text{Noun} &\to \text{big}|\text{cat}\end{aligned}$$

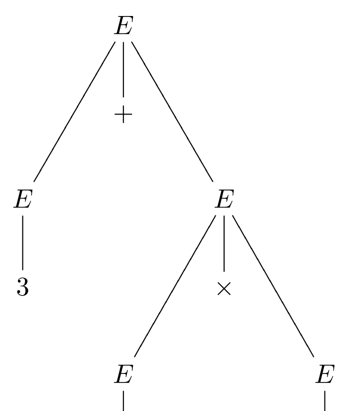
ואז אם נרצה לגזור את המשפט big red dog, אפשר להסתכל על זה בתור עץ גזירה:



נעיר כי שפות טבעיות אינן רגולריות מהסיבה הפשוטה שיש צורך ב'זיכרון', ולעיתים ייתכן ריבוי משמעות.

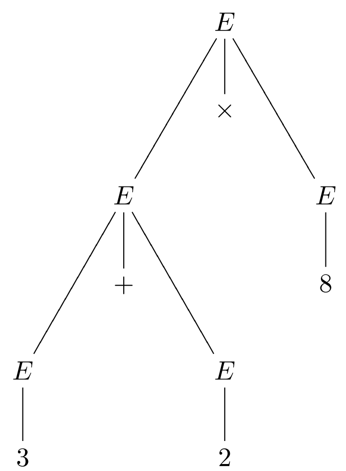
ריבוי משמעות

למשל, אם ניקח את השפה $E \to E \times E \mid E + E$, ונרצה לגזור את הביטוי $3 + 2 \times 8$, ייתכנו שני ביטויים:



וביטוי זה שקול ל-$3 + (2 \times 8)$.

מאידך, נוכל גם לקחת את הביטוי הזה:



כשביטוי זה שקול ל-$8 \times (3+2)$.

עוד דוגמה לדקדוק

ניקח את הדקדוק שמוגדר על ידי $S \to aSb \mid SS \mid \varepsilon$. אילו מילים בשפה?
$aabb, abab, s \to SS \to \ldots \in L$ אבל $abba \notin l$. כלומר, מדובר בשפת הסוגריים המקוננים באופן חוקי (באמצעות קידוד של a ו-b עם סוגריים מתאימים).
נעיר כי מדובר בשפה לא רגולרית. מספיק להוכיח באמצעות תכונות סגור, כי הרי החיתוך של שפה זו עם a^*b^* הוא השפה a^nb^n.

משפט

$\mathsf{REG} \subseteq \mathsf{CFL}$ - השפות הרגולריות כולן שפות חסרות הקשר.

הוכחה

בהינתן DFA שמוגדר על ידי A, נגדיר דקדוק חסר הקשר G כך ש-$L(G) = L(A)$.
יהי $A = \langle Q, \Sigma, q_0, \delta, F\rangle$ ונגדיר $G = \langle V, \Sigma, R, S\rangle$ על ידי $V = \{V_q \mid q \in Q\}$ (גוזר מלים שמתקבלות ממצב q).
כמו כן $S = V_{q_0}$ ו-R הוא $V_q \to aV_{q'}$: לכל מעבר $\delta(q,a) = q'$ נוסיף את החוק $V_q \to aV_{q'}$. בנוסף, אם $q \in F$ אזי $V_q \to \varepsilon$.
נקבל כי אם $r = q_0, \ldots, q_m$ ריצה של A על $w = \sigma_1, \ldots, \sigma_m$, נקבל כי $V_{q_0} \Rightarrow \sigma_1 V_{q_1} \Rightarrow \sigma_1\sigma_2 V_{q_2} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_m$.
מעבר לזה, מדובר בדקדוק לינארי ימיני.

הגדרה

דקדוק **ליניארי ימני** הוא דקדוק שכל החוקים שלו מהצורה $A \to aB$.

1.5.1 למת הניפוח לשפות חסרות הקשר ואוטומט מחסנית

אם נרצה לראות דוגמה לשפה שאינה חסרת הקשר, נוכל לקחת את השפה $L = \{a^nb^nc^n \mid n \geq 0\}$. האינטואיציה היא שיש צורך ב'שלושה מונים', ואילו בשפות חסרות הקשר יש שני מונים (ובאוטומטים מונה אחד).

נרצה להוכיח כי השפה $L = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$ אינה חסרת הקשר. נוכל לעשות זאת באמצעות למת הניפוח לשפות חסרות הקשר.

למת הניפוח לשפות חסרות הקשר

אם L ח"ה, אזי קיים $1 \leq p$, כך שלכל מילה w אם $|w| \geq p$ יש חלוקה $w = uvxyz$ וכך ש:

1. $|vxy| \leq p$.
2. $|vy| > 0$.
3. $uv^ixy^iz \in L$ לכל $0 \leq i$.

אוטומט מחסניות

עד כה עסקנו באוטומטים רגילים, שלהם כאמור אין זיכרון.

אוטומט המחסנית עובד אחרת - יש לו אפשרות למצוא את האיבר האחרון שהוכנס.

לאוטומט כזה יש אפשרות לאבחן את השפה $\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$ - בקוראו 0, דוחף a למחסנית, בקוראו 1, מוציא a מהמחסנית. אם הגיע לסוף המילה וגם המחסנית ריקה, סימן שהמילה בשפה.

2 תורת החישוביות

הרצאה מס' 9: יום שני 08.11.21

הקדמה

במהלך חלק זה, נרצה קודם כל לבדוק 'מה מחשבים יכולים לעשות'. לשם כך, נרצה 'להתקרב' למחשב קצת יותר.

2.1 מכונת טיורינג

המודל של מכונת טיורינג מאפשר לנו לבדוק מה היכולת של מחשבים.
בדומה לאוטומט, קיים במכונה רצף של אותיות, אלא שבשונה מאוטומט, אפשר להכניס רווחים, וגם מדובר בסרט אינסופי (לאחר האותיות מופיעים אינסוף רווחים).
בנוסף, ישנה יכולת לכתוב על הסרט, ולא רק לקרוא כמו באוטומט, וגם קיימת אפשרות לתזוזה עם ה'ראש הקורא' שמאלה וימינה.

			q				
a	b	b	a	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\ldots$

כדי לאפיין מתי 'נגמרת' המילה, נגדיר מצבי קבלה ודחייה, שיעזרו לנו.

דוגמה

ניקח למשל את השפה הבאה - $L = \left\{ w\#w \mid w \in (0+1)^* \right\}$ - מדובר בשפה לא רגולרית (ואפילו לא חסרת הקשר), אך בכל זאת תוכנית מחשב יכולה לבצע זאת.
למשל, מכונת טיורינג עם הסרט הבא:

	q								
0	0	1	1	#	0	1	1	0	$\sqcup$

ואז נגדיר את האלגוריתם הבא:

אלגוריתם 1 אלגוריתם למציאת $w\#w$

1. סרוק את הסרט וודא שיש לפחות # אחת.
2. כל עוד יש אותיות לא מחוקות משמאל ל-# הראשונה:
   (א) זגזג בין מיקומים תואמים לפני ואחרי ה-# הראשונה, וודא שמסומנים באותה אות.
   (ב) אם מצאנו חוסר התאמה: דחה.
3. אם נותרו אותיות לא מחוקות מימין ל-#: דחה.
4. אחרת: קבל.

שימו לב שעדיין לא מדובר בהגדרה פורמלית מלאה ונראה הגדרה מלאה בהמשך.

הגדרה

מכונת טיורינג (להלן - מ"ט) היא שביעייה $M=\langle Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{\text{acc}},q_{\text{rej}}\rangle$ כאשר:

- Q קבוצת מצבים סופית.
- Σ א"ב הקלט, כך ש-$\sqcup\notin\Sigma$.
- Γ א"ב העבודה, כך ש-$\sqcup\in\Gamma$ וכך ש-$\Sigma\subseteq\Gamma$.
- $\delta:Q\times\Gamma\to Q\times\Gamma\times\{L,R\}$ מוגדרת על ידי $\delta(q,a)=\langle q',b,R\rangle$ - כש-M במצב q, הראש הקורא מצביע על תא שכתוב בו a, אזי M עובר למצב q', כותבת b במקום a וזזה עם הראש הקורא תא אחד ימינה.
- $q_0\in Q$ מצב התחלתי.
- $q_{\text{acc}}\in Q$ מצב מקבל.
- $q_{\text{rej}}\in Q$ מצב דוחה.

הגדרה

קונפיגורציה של מכונת טיורינג מוגדרת על ידי **המצב, תוכן הסרט ומיקום הראש הקורא**.
נתאר קונפיגורציה כך: עבור $v,u\in\Gamma^*$ ומצב $q\in Q$, נקבל vqu, קונפיגורציה שבה המצב הוא q, תוכן הסרט $v\cdot u$ והראש מצביע על האות הראשונה ב-u:

$$\begin{array}{cccccc} & & & q & & \\ & & & \downarrow & & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{a} & \multicolumn{1}{c|}{b} & \multicolumn{1}{c|}{\dots} & \multicolumn{1}{c|}{b} & \multicolumn{1}{c|}{c} & \multicolumn{1}{c|}{\dots} \\ \hline & v & & & u & \end{array}$$

הקונפיגורציה ההתחלית של M על מילה $w\in\Sigma^*$ היא q_0w.
בהינתן $a,b,c\in\Gamma$ ו-$u,v\in\Gamma^*$ ו-$q,q'\in Q$, והקונפיגורציה ההתחלתית היא $uaqbv$ - כלומר מצביעים על b:

$$\begin{array}{cccc} & & q & \\ & & \downarrow & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{u} & \multicolumn{1}{c|}{a} & \multicolumn{1}{c|}{b} & \multicolumn{1}{c|}{v} \\ \hline \end{array}$$

אם $q\in\{q_{\text{acc}},q_{\text{rej}}\}$ (מצב עצירה), אין קונפיגורציה עוקבת והריצה מסתיימת. אחרת, אם $\delta(q,b)=(q',c,L)$ (לך ל-q, שים שם c ולך אחד שמאלה ל-q') אזי $uaqbv\to uq'acv$:

$$\begin{array}{cccc} & q' & & \\ & \downarrow & & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{u} & \multicolumn{1}{c|}{a} & \multicolumn{1}{c|}{c} & \multicolumn{1}{c|}{v} \\ \hline \end{array}$$

ואם $\delta(q,b)=(q',c,R)$ אזי $uaqbv\to uacq'v$, בצורה דומה.
כשהקונפיגורציה היא qav ו-$\delta(q,a)=\delta(q',b,L)$ אז הקוניפגורציה העוקבת היא $\delta(q,b)$ (לא נופלים מהסרט שמאלה).

הגדרה
ריצה של M על מילה $w = w_1w_2, \dots w_n \in \Sigma^*$ היא סדרה $r = c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$ של קונפ', כך ש-$c_0 = q_0w$ היא הקונפ' ההתחלתית של M על w, ולכל $0 \le i \le M$ מתקיים כי c_{i+1} עוקבת ל-c_i, ו-c_m היא **קונפ' עוצרת** (המצב שלה הוא q_{acc} או q_{rej}).
השפה של M מוגדרת על ידי $L(M) = \{w \mid w$ יש ריצה מקבלת של M על $\}$.

נשים לב כי יש שלושה גורלות לריצה של M על w:

1. עוצרת ומקבלת.
2. עוצרת ודוחה.
3. לא עוצרת.

דבר זה מביא אותנו שוב לבעיית העצירה (שניפגש בה שוב עוד בהמשך). בבעייה זו, הקלט הוא תכנית מחשב P וקלט x ל-P ונרצה לבדוק האם P עוצרת על x.

דוגמה
מ"ט M עבור $L = \left\{w\#w \mid w \in (0+1)^*\right\}$ ו-M שיוגדר על ידי:

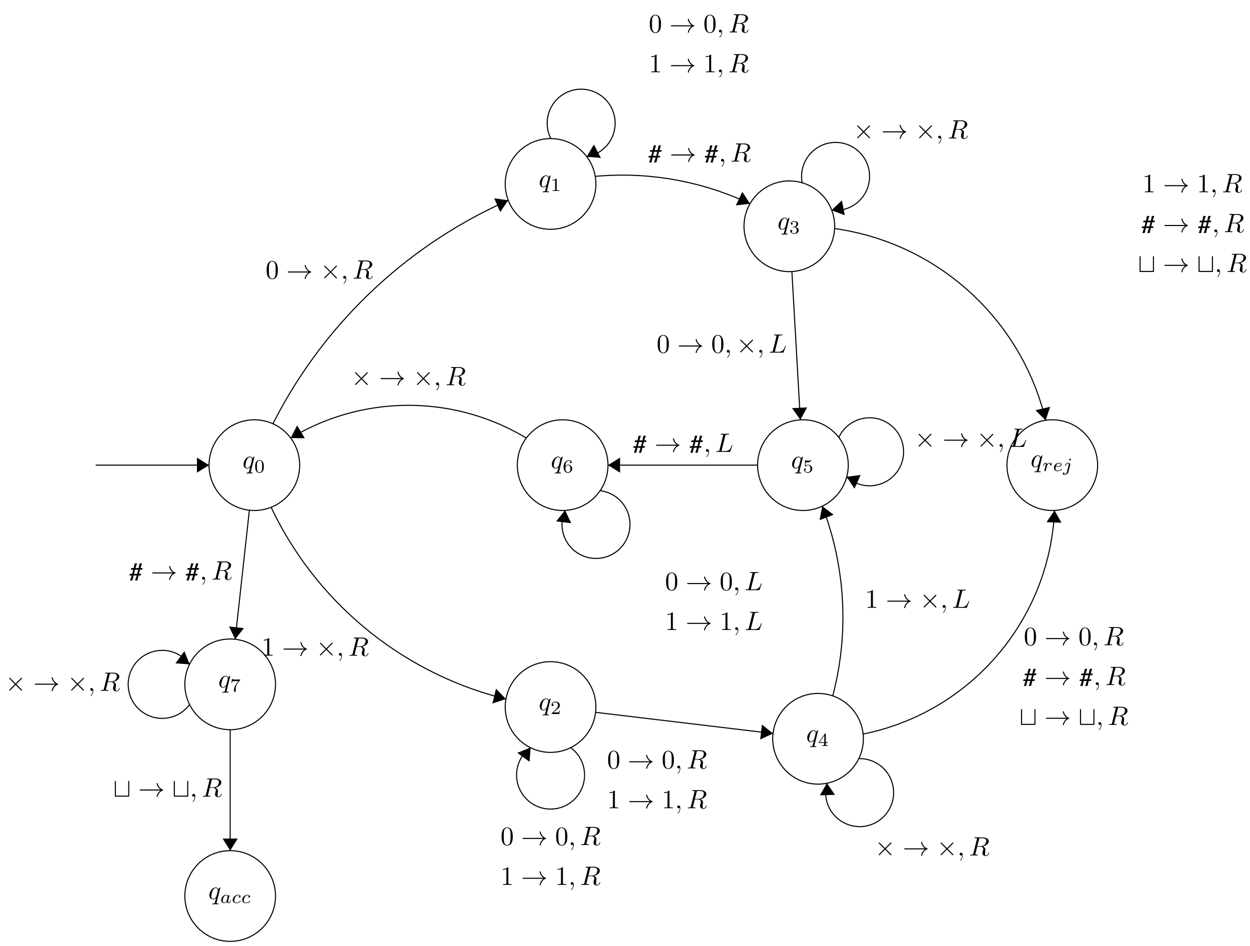
$$M = \langle Q, \Sigma = \{0, 1, \#\}, \Gamma = \{0, 1, \#, x, \sqcup\}, q_0, \delta, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\rangle$$

כיצד נוכל לתאר את האלגוריתם דלעיל בתור פעולות של מכונת טיורינג?

אלגוריתם 2 מכונת טיורינג למציאת $w\#w$

1. אם התא הנוכחי מסומן ב-#, בדוק האם יש 0 או 1 מימינו.
   (א) אם אין: קבל.
   (ב) אחרת: דחה.
2. אם התא הנוכחי מסומן ב-0, לך ימינה עד ל-#, ואחר כך ימינה עד לתא הלא מחוק הראשון.
   (א) אם מסומן ב-$\#, \sqcup, 1$: דחה.
   (ב) אחרת: מחוק אותו ועבור ל-4.
3. כמו 2, כשהתא הנוכחי מסומן ב-1 (מצפים לראות 1 אחרי #).
4. לך שמאלה (על מחוקים) עד ל-# ואז לך שמאלה עד המחוק הימני לפני ה-# ואז חזור תא אחד ימינה. חזור ל-1.

כעת, נצייר זאת:



הגדרה

נאמר שמ"ט M **מזהה** את השפה $L \subseteq \Sigma^*$ אם $L(M) = L$.

נאמר ששפה היא 'ניתנת למנייה רקורסיבית', כלומר ב-RE, אם קיימת מ"ט M שמזהה את L.

נאמר שמ"ט M **מכריעה** את השפה $L \subseteq \Sigma^*$ את השפה $L \subseteq \Sigma^*$ אם M מזהה את L ובנוסף M עוצרת על כל קלט.

נאמר ששפה היא רקורסיבית כלומר, ב-R, אם קיימת מ"ט שמכריעה אותה.

נבחין כי מההגדרה R⊆RE אבל ההפך לא בהכרח נכון.

כמו כן, המחלקה coRE הינה המשלים של RE. מההגדרה עולה כי אם $L \in$ coRE אזי $\overline{L} \in$ RE, כלומר יש מ"ט M עבור $\overline{L}$ כזו שלכל $w \in \Sigma^*$, אם $w \notin L$ אזי M עוצרת ומקבלת, ואם $w \in L$, אזי M דוחה או לא עוצרת.

הרצאה מס' 10:

יום רביעי

10.11.21

משפט

מתקיים כי R = RE ∩ coRE.

הוכחה

נוכיח זאת באמצעות הכלה דו כיוונית.

בכיוון הראשון, נוכיח כי $\mathsf{R} \subseteq \mathsf{RE} \cap \mathsf{coRE}$.
תהי $L \in \mathsf{R}$. מההגדרה בהכרח כי $L \in \mathsf{RE}$. נשאר לנו להוכיח כי $L \in \mathsf{coRE}$. נוכל לעשות זאת אם נראה כי $\overline{L} \in \mathsf{R} \subseteq \mathsf{RE}$.

למה

$\overline{L} \in \mathsf{R}$.

הוכחה

בהינתן מכונה M שמכריעה את L, אז המכונה $\widetilde{M}$ שמתקבלת מ-M על ידי החלפת q_{acc} ו-q_{rej}, מכריעה את $\overline{L}$ (אם יודעים רק ש-M מזהה את L, אז ההחלפה הזאת לא בהכרח תעזור!).

בכיוון השני, נרצה להראות כי $\mathsf{RE} \cap \mathsf{coRE} \subseteq \mathsf{R}$.
כלומר, עלינו להוכיח כי אם $L \in \mathsf{RE}$ וגם $L \in \mathsf{coRE}$ אזי $L \in \mathsf{R}$.
בהינתן מכונה M שמזהה את L (יש כזו כי $L \in \mathsf{RE}$) ומכונה $\overline{M}$ שמזהה את $\overline{L}$ (יש כזו, מסיבה הפוכה).
נבנה כעת מכונה M' שמכריעה את L. M' תפעל כך (הרצה במקביל):
עבור $1 \leq i$:

1. הרץ את M על w i צעדים, אם קיבלה, עצור וקבל.
2. הרץ את $\overline{M}$ על w i צעדים, אם קיבלה, עצור ודחה.

נבחין כי M' בטוח עוצרת: $w \in L$ או $w \notin L$. מתקיים כי M עוצרת על w או $\overline{M}$ עוצרת על w. ולכן בהכרח קיים i כך ש-M עוצרת על w אחרי i צעדים, או $\overline{M}$ עוצרת על w אחרי i צעדים.
כמו כן, M' מזהה את L, שהרי היא עוצרת ומקבלת בדיוק את כל המילים ב-L.
אם כך, בהכרח M' מכריעה את L, כפי שרצינו לבנות.

2.1.1 ספרן (Enumerator)

הגדרה

מודל **הספרן** (**Enumerator**), מורכב ממ"ט ללא קלט, עם מדפסת, שמדפיסה מילים ב-Σ^*.
השפה של הספרן E היא מילים שמודפסות בסופו של דבר (ייתכן שמילה תודפס מספר - אפילו ∞- פעמים).

משפט

$L \in \mathsf{RE}$ אם ורק אם יש ספרן E כזה ש-$L(E) = L$.

הוכחה

נוכיח זאת באמצעות הכלה דו כיוונית. בכיוון הראשון, נניח כי יש ספרן E עבור L ונבנה מ"ט שמזהה את L.
המ"ט M תפעל כך: בהינתן מילה w, M מריצה את E. כל פעם ש-E מדפיסה מילה x, M בודקת האם $x = w$.
אם כן, עוצרת ומקבלת (את w). אם לא, ממשיכה להריץ את E.
אם $w \in L$, אזי w תודפס ע"י E ולכן M תעצור ותקבל את w.
אם $w \notin L$, אזי M לא תקבל את w (תתקע, בהנחה ש-E נתקעת).

בכיוון השני, בהינתן מ"ט M שמזהה את L, נבנה ספרן E עבור L.
תהי $w_1, w_2, w_3, \ldots$ סדרה של כל המילים ב-Σ^* (יש כזה, כי Σ היא בת מנייה).
נוכל להציע כמה פתרונות רעים:

נריץ את M על w_1, אם קיבלה, נדפיס את w_1. אם לא, נעבור ל-w_2. מדובר בפיתרון רע[6] שכן ייתכן כי M לא תעצור על w_1 אלא תיתקע.
פתרון רע נוסף הוא לרוץ צעד 1 על w_1 ולעבור לצעד הבא. מדובר בפתרון רע שכן זו סדרה אינסופית ולא נגיע ל-2.

הפתרון הנכון הוא ליצור מונה $1 \leq i$ ובאיטרציה ה-i לרוץ על $w_1, \ldots, w_i$ i צעדים. אם M קיבלה את w_j, נדפיס את w_j (למעשה, אנחנו עוברים על כל המילים האפשריות בשפה).
נבחין כי אם $w \in L$, אזי יש איטרציה i כך שנרוץ על w את מספר הצעדים הדרוש לריצה המקבלת ולכן למעשה w תודפס (למעשה תודפס ∞ פעמים).
מצד שני, אם $w \notin L$, אזי w לא תודפס.

הרצאה מס' 11:

יום שני

2.1.2 קידוד אלגוריתמים ואוטומטים

15.11.21

הבעייה ה-10 של הילברט

בשנת 1900, הילברט ניסה לתאר אלגוריתם, כך שבהינתן פולינום במספר משתנים, יכריע האם יש לו שורש שלם. הוא ניסה לחפש תהליך שאותו ניתן להכריע אחרי מספר סופי של פעולות. למעשה, **בלתי אפשרי למצוא אלגוריתם כזה** ואת זה נוכיח בקרוב (ספויילר!).

התזה של צ'רץ' וטיורינג

צ'רץ' וטיורינג הוכיחו למעשה כי **אלגוריתם** שקול **להכרעה על ידי מכונת טיורינג**. דבר זה יעזור לנו בהמשך.

ישנן שלוש רמות של תיאור אלגוריתם:

1. באמצעות מכונת טיורינג.
2. באמצעות תיאור הפעולה של מכונת טיורינג.
3. בפסאודו קוד (שפה עילית).

אנו יודעים כי אלגוריתמים פועלים על פולינומים, גרפים, מטריצות ועוד. מכונות טיורינג, לעומת זאת, מקבלות רק מילה ב-Σ^*. נרצה להיווכח שאכן ניתן לקודד כל אלגוריתם למכונת טיורינג:

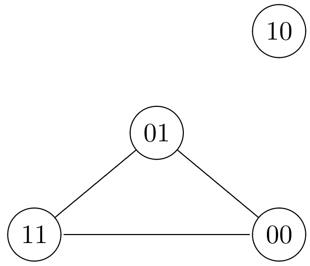
- נסמן ב-$\langle A \rangle$ את הקידוד של A.
- המכונת טיורינג בודקת שהקידוד נכון.

למשל, יכולנו לקחת את הדוגמאות הללו:
$L = \{\langle G \rangle \mid$ גרף לא מכוון וקשיר $G\}$ או את $\overline{L} = \{\langle G \rangle \mid$ גרף לא מכוון ולא קשיר $G\}$ ולקודד אותן.
הרעיון של הקידוד הוא "תרגום" של מכונת הטיורינג לאיזשהו טקסט שמסמן את הפלט שהיא מוציאה.

דוגמאות לקידודים

נוכל לקחת את הגרף G הבא:

[6] "אל תכתבו את זה במבחן!" (א.ק)



ולקודד אותו באמצעות $\underbrace{\$ \ldots v_{i2}\#v_{i1}}_{\text{קשתות}}\underbrace{\$v_n\#\ldots\#v_3\#v_2\#v_1}_{\text{קודקודים}}$.

הקידוד יהיה $^*(\$ + \# + 1 + 0) \in \langle G \rangle$ ו:

$$\underbrace{00\#01\#10\#11\#\$}_{\text{קודקודים}}\underbrace{00\#01\ \$\ 01\#11\ \ \$\ 00\#11\#\ \$}_{\text{קשתות}}$$

נבנה אלגוריתם כפי שאנחנו מכירים:

אלגוריתם 3 אלגוריתם לבדיקת קשירות

---

1. $C = \emptyset, T = \{v_0\}$.
2. כל עוד $T \neq \emptyset$:
   (א) $v = pop(T)$.
   (ב) $push(C, v)$.
   (ג) לכל $u \in V \setminus (C \cup T)$:
      i. אם $E(v,u)$, אז $push(T,u)$.
3. אם $C = V$, תקבל, אחרת תדחה.

נרצה כעת לבנות מכונת טיורינג מתאימה.

קודם כל נראה מהו א"ב העבודה - $\Gamma = \Sigma \cup \{0,1\} \times \{T,C,A\}$. כמו כן, יתקיים כי קודקוד $v \in T$ אם הביט הראשון שלו מסומן ב-T. (הכוונה ב-A היא active).

כעת נתאר את פעולת המכונה:

אלגוריתם 4 מכונת טיורינג למציאת קשירות

1. T-סמן את הקודקוד הראשון (= "בחר את v_0").
2. כל עוד יש קודקודים T-מסומנים (= "כל עוד $T \neq \emptyset$"):
   (א) A-סמן קודקוד T-מסומן.
   (ב) עבור על רשימת הקודקודים.
   אם יש קודקוד לא מסומן, בדוק האם יש קשת בינו לבין הקודקוד ה-A-מסומן. אם כן, T-סמן אותו.
   (ג) C- סמן את הקודקוד שהיה A-מסומן.
3. אם כל הקודקודים C-מסומנים - קבל. אחרת - דחה.

אפשר לקודד גם פולינומים, למשל $L = \{\langle p\rangle \mid$ יש ל-p שורש שלם$\}$.

בעיית הכרעה וחיפוש

עד כה דיברנו בעיקר על בעיות הכרעה. אמנם, מסתבר שאפשר להמיר בעיות חיפוש גם לרצף של בעיות הכרעה.

קידוד אוטומטים

נוכל לקדד אוטומט $A = \langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F\rangle$ ו-$\{\langle A, w\rangle \mid w \in L(A), A \text{ DFA}\}$ A_{DFA}.
ואז:

$$\sigma_1\#\sigma_2\#\ldots\#\sigma_n\$q_0\#q_1\#\ldots\#q_m\$q_0\#q_i\#\sigma_j\#q_l\$\ldots\$q_{i_1}\#\ldots\#q_{i_k}\$w\$$$

טענה

$A_{\mathsf{DFA}} \in \mathsf{R}$.

הרעיון

מכונת טיורינג יכולה לסמלץ ריצה של A על w ולענות כמוה.

פרטי מימוש:

1. אתחול:
   (א) כתוב q_0 על סרט נוסף.
   (ב) כתוב את w על סרט נוסף.
2. כל עוד קריאת w לא הסתיימה:
   (א) מצא את המעבר שמתאים למצב שבסרט הנוסף והאות שהראש הקורא בסרט של w מצביע עליה.
   (ב) עדכן את המצב והראש הקורא על w.
3. קבל אם"ם המצב בסרט הנוסף שייך ל-F.

2.1.3 אי כריעות

טענה

לכל א"ב סופי Σ בגודל 2 או יותר יש שפה $L \notin \mathsf{R}$.

הוכחה

משיקולי ספירה. ראינו בעבר כי יש $2^{\aleph_0}$ שפות (ראו בתרגול 1).

מכיוון שניתן לקודד כל מ"ט מעל א"ב Σ על א"ב סופי $\Sigma \cup \{\#, \$\}$, אז יש לכל היותר $\aleph_0$ מ"ט. אם כך, יש יותר שפות ממכונות טיורינג ואם כך יש לכל היותר $\aleph_0$ שפות שניתנות להכרעה.

טענה

$A_{\mathsf{TM}} = \{\langle M, w\rangle \mid w \in L(M)$ ו-M מ"ט$\} \notin \mathsf{R}$.

הוכחה

נראה ש-$A_{\mathsf{TM}} \notin \mathsf{R}$.

נשים לב כי $A_{\mathsf{TM}} \in \mathsf{RE}$. מ"ט M' שמזהה את A_{TM} פועלת כך: מסמלצת ריצה של M על w (למשל על ידי שמירה של הקונפ' הנוכחית בסרט נוסף). אם M מקבלת את w, אזי M' מקבלת את $\langle M, w\rangle$.

מצד שני, $A_{\mathsf{TM}} \notin \mathsf{R}$.

שלב I

נניח בשלילה שהיא כן שייכת. אזי יש מ"ט H כך שלכל קלט $\langle M, w\rangle$ H עוצרת ו:

$$H(\langle M, w\rangle) = \begin{cases} \text{acc} & M(w) = \text{acc} \\ \text{rej} & M(w) \neq \text{acc} \end{cases}$$

נעיר כי הביטוי $M(w) \neq \text{acc}$ אומר שייתכן ונתקענו על המילה.

שלב II

נבנה מ-H מ"ט D שמקבלת בקלט רק מ"ט M ופועלת כך:

$$D(\langle M\rangle) = \begin{cases} \text{acc} & M(\langle M\rangle) = \text{acc} \\ \text{rej} & M(\langle M\rangle) \neq \text{acc} \end{cases}$$

יש מכונה כזאת, כי במקום w נכניס למכונה H את הקידוד של המכונה M על w.

שלב III

נבנה מ-D מ"ט $\widetilde{D}$ שמקבלת בקלט מ"ט M ופועלת כך:

$$\widetilde{D}(\langle M\rangle) = \begin{cases} \text{rej} & M(\langle M\rangle) = \text{acc} \\ \text{acc} & M(\langle M\rangle) \neq \text{acc} \end{cases}$$

$\widetilde{D}$ מתקבלת מ-D על ידי החלפת q_{acc} ו-q_{rej}.

אם M מזהה את L , אזי $\widetilde{M}$ (שמתקבל מהחלפת מצבי q_{acc} ו-q_{rej}) לא בהכרח מזהה את $\overline{L}$ כי מילה שנתקעת ב-M יכולה להיתקע גם ב-$\widetilde{M}$. מצד שני, אם M מכריעה את L, $\widetilde{M}$ מכריעה את $\overline{L}$.

שלב IV
נתבונן בריצה של $\widetilde{D}$ על $\left\langle\widetilde{D}\right\rangle$ (המקרה בו $\langle M\rangle$ שבקלט היא $\left\langle\widetilde{D}\right\rangle$):

$$\widetilde{D}\left(\left\langle\widetilde{D}\right\rangle\right)=\begin{cases}\text{rej} & \widetilde{D}\left(\left\langle\widetilde{D}\right\rangle\right)=\text{acc}\\ \text{acc} & \widetilde{D}\left(\left\langle\widetilde{D}\right\rangle\right)\neq\text{acc}\end{cases}$$

אם כך, קיבלנו סתירה!

הרצאה מס' 12:

יום רביעי

17.11.21

אבחנה

להוכחה מהסוג שעשינו כאן קוראים 'הוכחה בלכסון'. מדוע? אם ניזכר בהוכחה שעשינו באינפי 1, שאין סידור של $[0,1]$, נראה כי למעשה הסתכלנו על האלכסון והראינו שאין דרך להציג את המספר האלכסוני - אין תצוגה מתאימה. במידה מסוימת, גם ההוכחה שלנו כעת הייתה הוכחה מסוג זה, כי גם כאן אנחנו יכולים להסתכל על סידור של כל מכונות הטיורינג בעולם, כאשר בכניסה ה-(i,j) בטבלה נאמר האם M_i מקבלת את $\langle M_j\rangle$.

המכונה H ממלאת את הטבלה ב-rej (זה אפשרי כי A_{TM} מכריעה) והמכונה D היא למעשה האלכסון (עונה על $D\left(M_i,\langle M_i\rangle\right)$, כי היא מקבלת את M_i ומריצה אותו על $\langle M_i\rangle$. המכונה $\widetilde{D}$ לעומת זאת, מוציאה פשוט את ההפך מ-D. ניתן לראות שלא ניתן למצוא סידור על האלכסון ל-$\widetilde{D}\left(\left\langle\widetilde{D}\right\rangle\right)$.

מצד אחר, אנחנו יודעים כי R=RE∩coRE ומכאן נובע כי $\Rightarrow A_{\mathsf{TM}}\notin$ coRE $\begin{matrix}A_{\mathsf{TM}}\notin \mathsf{R}\\ A_{\mathsf{TM}}\in \mathsf{RE}\end{matrix}$ כלומר $\overline{A_{\mathsf{TM}}}\notin$ RE.

נתבונן במכונה $\mathsf{HALT_{TM}}=\{\langle M,w\rangle \mid M \text{ עוצרת על } w\}$ - מ"ט שמריצה את M על w. אם M מגיעה ל-q_{acc} או ל-q_{rej}, עוצרת ומקבלת. (כלומר, מכונה שמקבלת מכונה ומילה, ובודקת האם המכונה שקיבלה כקלט עוצרת על המילה הזאת)

כיצד נוכל להוכיח זאת? באמצעות רדוקציה.[7]

טענה

$\mathsf{HALT_{TM}}\notin \mathsf{R}$.

הוכחה

תהי M מ"ט שמכריעה את $\mathsf{HALT_{TM}}$ (נניח בשלילה שיש כזאת). נבנה בעזרתה מ"ט M' שמכריעה את A_{TM}.
בהינתן $\langle M,w\rangle$, המכונה M' פועלת כך: היא מריצה את M (שבודקת האם המכונה עוצרת) על $\langle M,w\rangle$. מובטח שתעצור מהנחת השלילה. אם M דוחה, אז M' דוחה את $\langle M,w\rangle$ (כי יודעים ש-M לא עוצרת על w ולכן M לא מקבלת את w).
אם M מקבלת את $\langle M,w\rangle$, נריץ (ללא חשש) את M על w. מובטח שנעצור, ונענה כאן כי $\langle M,w\rangle\in A_{\mathsf{TM}}$.

[7] שתכף נגדיר מה זה בכלל.

2.2 רדוקציות מיפוי

הגדרה
עבור א"ב Σ, נאמר ש-$f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ **ניתנת לחישוב** (computable) אם קיימת מ"ט M_f שבהינתן קלט $x \in \Sigma^*$, עוצרת עם $f(x)$ על הסרט.

דוגמה
תהי $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ המוגדרת על ידי $f(x,y) = x + y$.
אם x ו-y נתונים באונרית $111\ldots1\#11\ldots1$ נוכל למחוק את הסולמית ולהזיז אחד שמאלה, ואז למעשה נקיים את הפונקצייה, והמ"ט תעצור על $f(x)$, כפי שרצינו.

הגדרה
עבור א"ב Σ, ושתי שפות $A, B \subseteq \Sigma^*$, נאמר ש-A **ניתנת לרדוקציית מיפוי** ל-B $A \leq_m B$ ("A קלה יותר מ-B") אם קיימת פונקצייה ניתנת לחישוב $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ כך שלכל $x \in \Sigma^*$ יתקיים כי $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$.

הרצאה מס' 13:

יום שני
22.11.21

2.2.1 משפטי הרדוקציה

משפט הרדוקציה
אם $A \leq_m B$ ו-$B \in \mathsf{R}$, אזי $A \in \mathsf{R}$.
הוכחה
תהי M_B מ"ט שמכריעה את B. תהי M_{R} מ"ט שמחשבת פונקציה קלטים ל-A→קלטים ל-B : f שבזכותה $A \leq_m B$.
תהי M_A שמכריעה את A: בהינתן קלט w, מריצה את M_{R}, מריצה את M_{B} על $f(w)$ ועונה כמוה.

משפט הרדוקציה 2
אם $A \leq_m B$ ו-$A \notin \mathsf{R}$ אזי $B \notin \mathsf{R}$.

אינטואיציה

לפני שאנו ניגשים לעובי הקורה של רדוקציות מיפוי, מסובכות יותר ופחות, חשוב שנבין מה עלינו לעשות במהלך הרדוקציה.

מה יש בידינו? שתי שפות, A ו-B, שיש פונקציית מיפוי ביניהם, או שעלינו למצוא אותה. לפי ההגדרה, כפי שראינו, זה אומר שיש פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$, **שאם נפעיל את הפונקציה הזאת על ערכים מ-A, נקבל בהכרח ערכים ששייכים ל-B.**

הפונקציה הזאת **חשיבה** - יש מ"ט שעוצרת עם $f(x)$ **על כל קלט** x. העובדה שהפונקציה עוצרת על כל קלט מאפשרת לנו למעשה למפות ערכים מ-A לערכים ב-B. אם אכן נתון לנו ש-B מכריעה גם היא, כל שנותר לנו הוא להפעיל את f על קלטים מ-A (גם אם A לא עצרה לנו, אחרי ההפעלה היא תעצור), והופ, הכרענו את A. אם נרצה להשתמש במשפט הרדוקציה, עלינו פשוט למצוא פונקציית מיפוי כזאת (ולהוכיח שהיא חשיבה!) ולהשתמש בנתונים שיש לנו כבר על B.

אם נרצה **לשלול** תכונות של B, בהינתן תכונות של A, נבצע את הפעולה ההפוכה. אם למשל אנו יודעים כי A לא ניתנת להכרעה, אזי אם B הייתה ניתנת להכרעה, פשוט היינו לוקחים קלטים מ-A, מפעילים עליה את פונקציית המיפוי, ומכריעים את הקלטים.

חשוב תמיד לזכור מה הקלטים של A ומה הקלטים של B, וליצור פונקציה מתאימה על פי זה.

2.2.2 דוגמאות לרדוקציות

שלילת כריעות $\mathsf{HALT_{TM}}$

נוכיח כי $A_{\mathsf{TM}} \leq_m \mathsf{HALT_{TM}}$ ונרצה להוכיח כי $\mathsf{HALT_{TM}} \notin \mathsf{R}$, באמצעות משפט הרדוקציה ההפוך.

אם ניקח קלטים ל-$A$$\to$קלטים ל-$B$ כאשר $f : A = A_{\mathsf{TM}}$ ו-$B = \mathsf{HALT_{TM}}$ ו-f פונקציית הרדוקציה מוגדרת על ידי $f(\langle M, w\rangle) = \langle M', w'\rangle$. נשים לב כי $\langle M, w\rangle$ היא בתחום הקלטים ל-A_{TM} וכי $\langle M', w'\rangle$ שייכים לתחום הקלטים של $\mathsf{HALT_{TM}}$, שהרי מדובר בקשר שבין מכונה ומילה - האם המכונה מקבלת את המילה או לא.

<u>בנייה</u>

M' תתקבל מ-M על ידי החלפת המצב q_{rej} במצב חדש q_{loop} כזה ש-$\delta(q_{\text{loop}}, \sigma) = \langle q_{\text{loop}}, \sigma, R\rangle$, כמו כן, $w' = w$.

<u>נכונות</u>

א. תחילה, נוכיח כי f חשיבה. בהכרח קיימת מ"ט M_{R} שמחשבת את f: היא עוברת על התיאור של M, מוסיפה מצב q_{loop} במקרה שמגיעים ל-q_{rej}, מוסיפה מעבר $\langle q_{\text{loop}}, \sigma, q_{\text{loop}}, \sigma, R\rangle$ לכל $\sigma \in \Gamma$ (המעבר שתיארנו לעיל), משנה מעברים שהלכו ל-q_{rej} כך שילכו ל-q_{loop}, ומעתיקה את w ל-w'.

ב. כעת, נוכיח כי אכן מדובר בפונקציית מיפוי. כלומר כי $f(x) \in \mathsf{HALT_{TM}} \Leftrightarrow x \in A_{\mathsf{TM}}$.
כלומר, נרצה להוכיח כי $f(\langle M, w\rangle) \in \mathsf{HALT_{TM}} \Leftrightarrow \langle M, w\rangle \in A_{\mathsf{TM}}$:

- אם $\langle M, w\rangle \in A_{\mathsf{TM}}$, כלומר מ"ט M מקבלת את w (כי מזהה אותה), אזי הריצה של M' על w' זהה לריצה של M על w, כי הרי לא הגענו ל-q_{rej} ולכן M' עוצרת על w'. כלומר, $\langle M', w'\rangle \in \mathsf{HALT_{TM}}$.
- אם $\langle M, w\rangle \notin A_{\mathsf{TM}}$, אזי אם M נתקעת על w אזי גם M' נתקעת על w' (אותה ריצה) ולכן לא עוצרת, ואם M דוחה את w, אזי M' מגיעה ל-q_{loop} ונתקעת ולכן בהכרח המכונה M' נתקעת על w' ולא עוצרת, כלומר $\langle M', w'\rangle \notin \mathsf{HALT_{TM}}$.

שלילת כריעות $\mathsf{HALT}^{\varepsilon}_{\mathsf{TM}}$

ניקח את:

$$\mathsf{HALT}^{\varepsilon}_{\mathsf{TM}} = \{\langle M\rangle \mid \text{עוצרת על } \varepsilon \ M\}$$

נבחין כי השפה שייכת ל-RE. מאידך, נשים לב כי היא איננה שייכת ל-R.
נוכל להוכיח זאת באמצעות ה'רדוקציה ההפוכה', ולהראות כי $\mathsf{HALT}_{\mathsf{TM}} \leq_m \mathsf{HALT}^{\varepsilon}_{\mathsf{TM}}$ (ולמצוא f כמו שראינו).
נבנה מכונה M', כך ש-$f\left(\langle M,w\rangle\right) = \langle M',w'\rangle$. בהינתן $\langle M,w\rangle$ שהינם קלטים ל-$\mathsf{HALT}_{\mathsf{TM}}$, המכונה M' כותבת w על הסרט, זזה עם הראש הקורא לאות הראשונה של w, עוברת למצב ההתחלתי של M.
f ניתנת לחישוב: נוסיף $|w|+1$ מצבים, בהם M'כותבת w על הסרט וגם מצבים לחזור עם הראש הקורא שמאלה, ואת התיאור של M.
הנכונות נובעת מכך ש-M' מסמלצת ריצה של M על w, ולכן M עוצרת על w אס"ם M'עוצרת על ε.

דוגמה

$\mathsf{HALT}^{aba}_{\mathsf{TM}} = \{\langle M\rangle \mid \text{עוצרת על } w \ M\}$. במקרה שלנו, M' תבדוק שכתוב aba על הסרט, מוחקת אותו, כותבת את w וזזה שמאלה.

שלילת כריעות $\mathsf{REG}_{\mathsf{TM}}$

ניקח את $\mathsf{REG}_{\mathsf{TM}} = \{\langle M\rangle \mid \text{רגולרית } (M)L\}$ - כל **המכונות** ששפתן רגולרית.
נראה ש-$A_{\mathsf{TM}} \leq \mathsf{REG}_{\mathsf{TM}}$ ולכן $\mathsf{REG}_{\mathsf{TM}} \notin R$.
עלינו למצוא f כך ש-$\langle M,w\rangle \in A_{TM}$ אם ורק אם $f\left(\langle M,w\rangle\right) = \langle M'\rangle \in \mathsf{REG}_{\mathsf{TM}}$.

<u>בנייה</u>

ניקח M' שפועלת על $x \in \{0,1\}^*$ כך:

1. אם $x \in \{0^n1^n \mid n \geq 0\}$, אזי M' מקבלת את x.
2. אחרת, M' מריצה את M על w ועונה כמוה (M' מקבלת את x אס"ם M קיבלה את w).[8]

נבחין כי f חשיבה (בהינתן M,w ניתן לייצר את M' ולעצור תמיד).

<u>נכונות</u>

נוכיח כי M מקבל את w אם ורק אם $L\left(M'\right)$ רגולרית.

- אם $\langle M,w\rangle \in A_{\mathsf{TM}}$ כלומר, M מקבל את w, אזי $L\left(M'\right) = (0+1)^*$ בהכרח, כי הרי לכל $x \in (0+1)^*$, אם $x \in 0^n1^n$ אזי M' תקבל את x בשלב הראשון. בכל מקרה, יתקיים כי $L\left(M'\right)$ רגולרית, כלומר $\langle M'\rangle \in \mathsf{REG}_{\mathsf{TM}}$.
- אם $\langle M,w\rangle \notin A_{\mathsf{TM}}$, אזי $L\left(M'\right) = \{0^n1^n \mid n \geq 0\}$ כי הרי ישנן שתי אפשרויות:
  - אם $x \in 0^n1^n$ אזי M' מקבלת את x בשלב 1 ולכן רק 0^n1^n מתקבל.
  - אם $x \notin 0^n1^n$, אזי M' לא מקבלת את x בשלב הראשון וגם לא בשלב השני ולכן בהכרח M' תיתקע או תידחה. כלומר, קיבלנו כי במצב זה $L\left(M'\right)$ איננה רגולרית, כלומר $\langle M'\rangle \notin \mathsf{REG}_{\mathsf{TM}}$.

[8] שימו לב, יצרנו פה מכונה חדשה, ששומרת כקלט את M,w, ומשתמשת בו בשעת הצורך.

משפט רדוקציה ל-RE ול-coRE

1. אם B $A \leq_m B$ ∈RE-ו A אזי ∈RE.
2. אם B $A \leq_m B$ ∈coRE-ו A אזי ∈coRE.

דוגמה - שלילת זיהוי $\mathsf{REG_{TM}}$

נרצה כעת להראות כי $\mathsf{REG_{TM}} \notin \mathsf{RE}$.

אנו יודעים כי $\overline{A_{\mathsf{TM}}} \notin \mathsf{RE}$ (ראינו כבר כי $A_{\mathsf{TM}} \notin \mathsf{coRE}$ ולכן זה נובע באופן ישיר). אם נראה כי $\overline{A_{\mathsf{TM}}} \leq_m \mathsf{REG_{TM}}$ נוכל להסיק כי $\mathsf{REG_{TM}} \notin \mathsf{RE}$ כיוון ש-$A_{\mathsf{TM}} \leq_m \overline{\mathsf{REG_{TM}}}$ שקול ל-$\overline{A_{\mathsf{TM}}} \leq_m \mathsf{REG_{TM}}$.

f מוגדרת על ידי $f(\langle M,w\rangle) \to \langle M'\rangle$. נרצה לבנות את M' בצורה כזאת ש-M מקבלת את w אם"ם $L(M')$ לא רגולרית.

<u>בנייה</u>

M' תוגדר כך - בהינתן $x \in (0+1)^*$:

- אם $x \in \{0^n1^n \mid n \geq 0\}$ אזי M' מריצה את M על w ועונה כמוה (M' מקבלת את x, אם M מקבלת את x).
- אחרת: M' דוחה את x.

כלומר, אם M מקבלת את w, אזי $L(M')$ לא רגולרית ואם M לא מקבלת את w, אזי $L(M')$ רגולרית.

בסופו של דבר, הראינו כי $\mathsf{REG_{TM}} \in \overline{\mathsf{RE} \cup \mathsf{coRE}}$ (גם אי אפשר לזהות אותה, וגם אי אפשר לזהות את המשלים שלה).

הרצאה מס' 14:

יום רביעי

24.11.21

הוכחת $\mathsf{INF_{TM}} \in \overline{\mathsf{RE} \cup \mathsf{coRE}}$

נתבונן בשפה $\mathsf{INF_{TM}} = \{\langle M\rangle \mid L\langle M\rangle \text{ אינסופית}\}$ - כל המכונות ששפתן אינסופית.

אם היינו צריכים לבדוק האם שפה של אוטומט היא אינסופית, היינו צריכים למצוא האם יש מעגל בגרף של האוטומט, נרצה לשאול את עצמנו האם ניתן לעשות אותו דבר גם על מכונות טיורינג, באמצעות גרף הקונפיגורציות, למשל.

אמנם, נראה כי $\mathsf{INF_{TM}} \notin \mathsf{RE}$ וגם $\mathsf{INF_{TM}} \notin \mathsf{coRE}$ - כלומר, לא ניתן לזהות האם שפה של מכונת טיורינג היא אינסופית, וגם לא לזהות האם היא סופית. נעשה זאת באמצעות שתי רדוקציות.

תחילה, נעשה רדוקציה באמצעות A_{TM}: נראה כי $A_{\mathsf{TM}} \leq_m \mathsf{INF_{TM}}$ ונוכיח כי $\mathsf{INF_{TM}} \notin \mathsf{coRE}$- כלומר ניקח $\langle M,w\rangle$ ונייצר מהם M', כך ש-$L(M')$ אינסופית אם ורק אם M מקבלת את w (אנחנו מתחילים להתעלם מ-f, אך ברור כי מתחת לפני השטח קיימת f שמעבירה את $\langle M,w\rangle$ ומייצרת את $\langle M'\rangle$.

<u>בנייה</u>

בהינתן קלט $x \in \Sigma^*$ (א"ב של M', לבחירתנו), M' מתעלמת מ-x לגמרי, ומריצה את M על w ועונה כמותה.

<u>נכונות</u>

- אם $\langle M,w\rangle \in A_{\mathsf{TM}}$, כלומר M מקבלת את w, אזי $L(M') = \Sigma^*$ כי למעשה השפה של M' היא כל המילים (כל x מתקבל). כלומר $L(M') \in \mathsf{INF_{TM}}$.

- אם $\langle M,w\rangle \notin A_{\mathsf{TM}}$ אזי $L\left(M'\right)=\emptyset$ ואז $L\left(M'\right)\notin \mathsf{INF}_{\mathsf{TM}}$.

נבצע רדוקציה באמצעות $\overline{\mathsf{INF}_{\mathsf{TM}}} \leq_m \mathsf{HALT}_{\mathsf{TM}}$ ונראה כי $\mathsf{INF}_{\mathsf{TM}} \notin \mathsf{RE}$.

<u>בנייה</u>
נציג g חשיבה, כך ש-$g\left(\langle M,m\rangle\right)\to\langle M'\rangle$.
על קלט x, המכונה M' פועלת כך:
M' מריצה את M על w במשך $|x|$ צעדים. אם M עצרה על w במהלך $||x|$ הצעדים, המכונה דוחה את x. אחרת, M מקבלת את x.

<u>נכונות</u>
נרצה להוכיח כי $\langle M,w\rangle\in\mathsf{HALT}_{\mathsf{TM}}$ אם ורק אם $\langle M'\rangle\notin\mathsf{INF}_{\mathsf{TM}}$.

- אם $\langle M,w\rangle\in\mathsf{HALT}_{\mathsf{TM}}$, אזי קיים $m\geq 0$ כך ש-M עוצרת על w אחרי m צעדים. לכל קלט x, אם $m<|x|$ אזי M לא תעצור על w תוך $|x|$ צעדים, ולכן $x\in L\left(M'\right)$. מצד שני, אם $m\geq|x|$, אזי M מספיקה לעצור על w ולכן $x\notin L\left(M'\right)$. כלומר, קיבלנו כי אם $\langle M,w\rangle\in\mathsf{HALT}_{\mathsf{TM}}$ אזי $L\left(M'\right)=\Sigma^{<m}$ - כל המילים באורך קטן מ-m ומדובר בשפה סופית, ולכן $\langle M'\rangle\notin\mathsf{INF}_{\mathsf{TM}}$.
- אם $\langle M,w\rangle\notin\mathsf{HALT}_{\mathsf{TM}}$ אזי $L\left(M'\right)=\Sigma^*$, כי לכל x, M לא תעצור על w תוך $|x|$ צעדים ולכן M' תקבל את x ולכן $\langle M'\rangle\in\mathsf{INF}_{\mathsf{TM}}$.

היינו יכולים לעשות את הרדוקציה הראשונה גם באמצעות הרדוקציה השנייה, אם היינו משנים זאת לקבלה ולא לעצירה.

2.2.3 בעיית הריצוף

ניזכר בבעיית הריצוף, עליה דיברנו בתחילת הקורס.

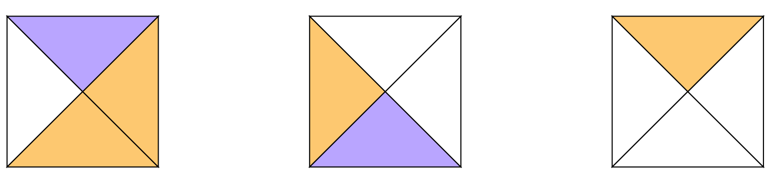
הרצאה מס' 15:

יום שני

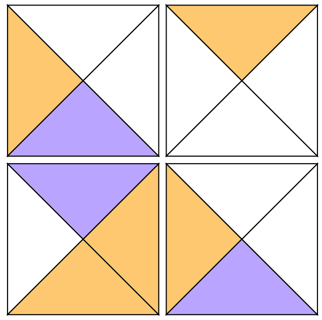
29.11.21

<u>קלט:</u>
קבוצה סופית T של אריחים $T=\{t_0,t_1,\ldots,t_n\}$
תנאי שכנות במאוזן ובמאונך $H\subseteq T\times T$ ו-$V\subseteq T\times T$.
אריח התחלתי $t_{\text{init}}\in T$.

דוגמה
נניח כי ריצוף חוקי הוא כי אריחים סמוכים 'מסכימים' על הצבע.
עבור הקלט הבא מסתבר שהתשובה היא כן:



לדוגמה, ניתן לרצף ריבוע 2×2 באופן הבא:



הגדרת השפה

נתבונן בשפה $\text{TILE}=\{\langle T,V,H,t_{\text{init}}\rangle \mid \text{יש ריצוף חוקי } n\times n \text{ לכל } 1\le n\}$.

ריצוף חוקי $n\times n$ מוגדר על ידי פונקציה $f_i:\{1\ldots n\}\times\{1\ldots n\}\to T$ כאשר לכל $1\le i\le n$ מתקיים כי $1\le j\le n$ וגם כי $f(1,1)=t_{\text{init}}$.

וגם $(f(i,j),f(i,j+1))\in V$ ו-$(f(i,j),f(i+1,j))\in H$.

טענה

יש ריצוף חוקי $n\times n$ לכל n, אם"ם יש ריצוף חוקי (אינסופי) לרבע המישור החיובי.

הוכחה

תחילה, נזכיר את הלמה של קניג.

הלמה של קניג

בכל עץ אינסופי עם דרגת פיצול סופית, יש מסלול אינסופי.

אם יש ריצוף $n\times n$ לכל $1\le i\le n$, נבנה עץ אינסופי כזה:

- ברמה i: ריצופים חוקיים $i\times i$.
- הבנים של קודקוד f (ריצוף חוקי $i\times i$): ריצופים חוקיים $i+1\times i+1$ שמרחיבים את f .

העץ מקיים את תנאי הלמה של קניג ולכן יש מסלול אינסופי, כלומר יש ריצוף אינסופי של רבע המישור.

בכיוון השני, אם יש ריצוף אינסופי של רבע המישור, אזי נתבונן על הרישא שלו.

הוכחת האפיון של TILE

נרצה להוכיח כי TILE $\in$ coRE כלומר, כי $\overline{\text{TILE}}\in$ RE (קיים m שאין לו ריצוף חוקי).

נבנה מ"ט שמזהה את $\overline{\text{TILE}}$:

עבור $1\le m$ המכונה בודקת את כל הריצופים $m\times m$. אם מוצאת ריצוף חוקי כלשהו, אזי מגדילה את m ב-1.

אם בדקה את כל הריצופים $m\times m$ (יש מספר סופי - לכל היותר $|T|^{m\times m}$) וכולם לא חוקיים, מקבלת.

כעת, נראה כי TILE $\notin$ RE ונראה זאת באמצעות רדוקציה ל-$\overline{\text{HALT}^{\varepsilon}_{\text{TM}}}$ (כל מכונת הטיורינג שלא עוצרות על ε).

נרצה להראות כי אם היינו יכולים לפתור את בעיית הריצוף, היינו יכולים גם לפתור את בעיה זו, כלומר נרצה למצוא f כך ש-$\langle M\rangle\in\overline{\text{HALT}^{\varepsilon}_{\text{TM}}}$ אם ורק אם $f(\langle M\rangle)=(T,H,V,t_{\text{init}})\in$ TILE.

רעיון הרדוקציה

נזכיר כי קונפיגורציה של מכונת טיורינג מוגדרת על ידי $\Gamma^* \cdot (0 \times \Gamma) \cdot \Gamma^*$ ולאחר מכן אינסוף אותיות ב-Γ. למשל, קונפיגורציה התחלתית על המילה aba היא $(q_0, a) \cdot b \cdot a \cdot \sqcup \ldots \sqcup$. זוג קונפיגורצות עוקבות הן כמעט זהות - ההבדל היחיד הוא מיקום הראש והמצב הנוכחי של כל אחת, והוא מוגדל על פי δ.
נוכל להמיר כל קונפיגורציה לתיאור של אריחים
כל קומה בריצוף תהיה קונפיגורציה, וכל מעבר בין קומות יהיה מעבר בין קונפיגורציות עוקבות.
הקומה הראשונה תהיה הקונפיגורציה ההתחלתית של M על ε, נוכל להגדיר אילו קונפיגורציות עוצרות ואילו לא.

<u>הגדרת האריחים</u>
אריחי השורה הראשונה יתחילו בשורה מהצורה הבאה:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & (q_0, \sqcup) & \\ \sqcup & & \sqcup \\ & \sqcup & \end{array}}$$

ונוסיף לה ריפודים מהצורה:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & \sqcup & \\ \sqcup & & \sqcup \\ & * & \end{array}}$$

כלומר, סך הכל השורה הראשונה תיראה כך:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & (q_0, \sqcup) & \\ \sqcup & & \sqcup \\ & \sqcup & \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ccc} & \sqcup & \\ \sqcup & & \sqcup \\ & * & \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ccc} & \sqcup & \\ \sqcup & & \sqcup \\ & * & \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ccc} & \sqcup & \\ \sqcup & & \sqcup \\ & * & \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ccc} & \sqcup & \\ \sqcup & & \sqcup \\ & * & \end{array}} \quad \ldots$$

מרצפות מסוג $2\mathrm{R}$: לכל מעבר $\delta(q, a) = (q', b, R)$ עבור $q \neq q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}$ ולכל $c \in \Gamma$, נוסיף $|\Gamma| + 1$ מרצפות:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & b & \\ * & & (q', R) \\ & (q, a) & \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ccc} & (q', c) & \\ (q', R) & & * \\ & c & \end{array}}$$

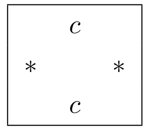
המרצפת השמאלית דואגת להזיז את הראש הקורא ימינה, ואילו המרצפת הימנית דואגת להציב את הראש הקורא על $c \in \Gamma$.
כלומר, הצביעה (q, a) דואגת לומר 'היינו במצב q וקראנו a', הצביעה (q', R) דואגת לומר 'זזנו ימינה והחלפנו את המצב במצב q'', ואילו הצביעה b אומרת לנו לאיזה אות החלפנו. במרצפת הימנית, לעומת זאת, (q', c) מייצג את המקום הנוכחי בו אנו נמצאים.

מרצפות מסוג $2\mathrm{L}$: לכל מעבר $\delta(q, a) = (q', b, L)$ עבור $q \neq q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}$ ולכל $c \in \Gamma$ נוסיף $|\Gamma| + 1$ מרצפות:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & (q', c) & \\ * & & (q', L) \\ & c & \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ccc} & (q', c) & \\ (q', L) & & * \\ & (q, a) & \end{array}}$$

המרצפת הימנית דואגת להזיז את הראש הקורא שמאלה, ואילו המרצפת השמאלית דואגת להציב את הראש הקורא על $c \in \Gamma$.

מעבר לכך, לכל $c \in \Gamma$, נוסיף אריחי ריפוד מהצורה:

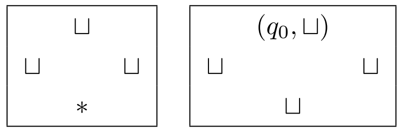


דוגמה

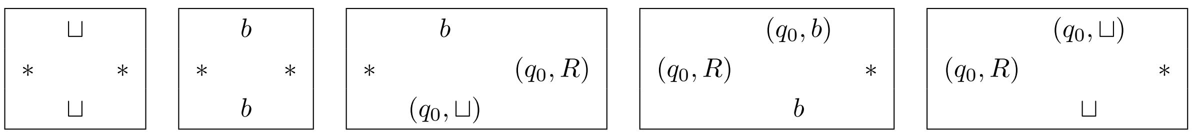
תהי M כך ש-$\delta\left(q_0,\sqcup\right)=\left(q_0,b,R\right)$.

כלומר, למעשה יש לנו שתי קונפיגורציות, $C_1=\left(q_0,\sqcup\right)\cdot\sqcup\cdot\sqcup$ ו-$\ldots C_2=b\left(q_0,\sqcup\right)\cdot\sqcup\cdot\sqcup$.

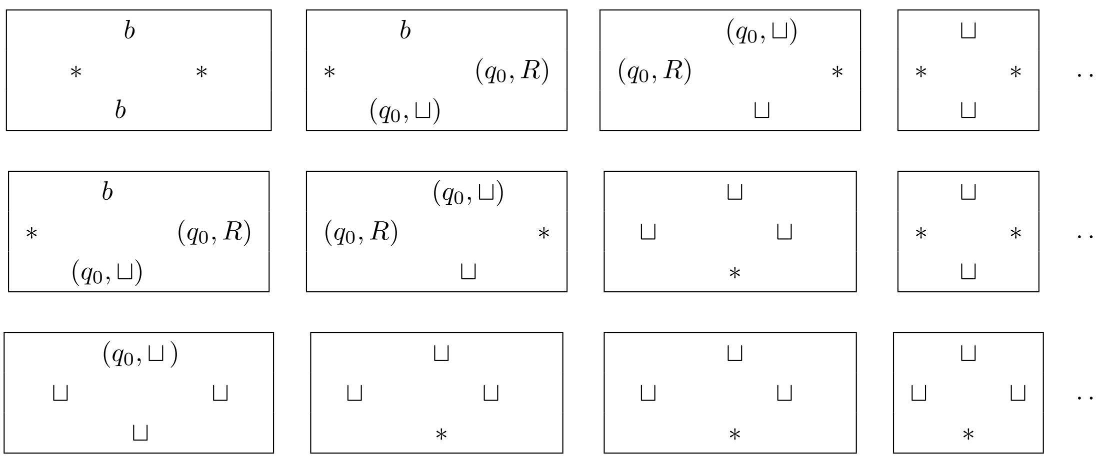
המרצפות ההתחלתיות:



כל שאר המרצפות:



וטבלת המעברים בין הקונפיגורציות תיראה כך:



למעשה, כל מעבר בין שורות מייצג מעבר בין קונפיגורציות - רמז, תסתכלו על השורה העליונה בכל קומה, שמייצגת את הקונפיגורציה הנוכחית.

נבחין כי הרדוקציה ניתנת לחישוב, בהינתן M ניתן לייצר את $\langle T,V,H,t_{\text{init}}\rangle$.

למעט בטור השמאלי ביותר (ניתן לפתרון ע״י הגדרה מורכבת יותר):

- בכל קומה יש $*$ בכל הצדדים, למעט במקום אחד (מעבר של הראש הקורא).
- כל קומה מייצגת קונפיגורציה. מעבר בין קומות: מעבר בין קונפיגורציות.

אם $\langle M\rangle\in\overline{\mathsf{HALT}_{\mathsf{TM}}^{\varepsilon}}$, כלומר M לא עוצרת על ε, כלומר רצה עד אינסוף, אזי נמצא ריצוף שמתאים לקונפיגורציה האינסופית, ולכן $(T,H,V,t_{\text{init}})\in\mathsf{TILE}$.

אם $(T,H,V,t_{\text{init}})\in\mathsf{TILE}$, נוכל ליצור ממנו ריצוף אינסופי,כלומר M לא עוצרת על ε ולכן $\langle M\rangle\in\overline{\mathsf{HALT}_{\mathsf{TM}}^{\varepsilon}}$.

בעיית ההתאמה של פוסט (Post Correspondence Problem).

קלט: אוסף סופי של אבני דומינו, e_i שמורכבים מ-$u_i, d_i \in \Sigma^*$, כלומר, כל אבן היא מהצורה:

$$e_i = \begin{array}{|c|}\hline u_i \\ \hline d_i \\ \hline \end{array}$$

פלט: $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m}$ כך ש-$u_{i_1} \cdot u_{i_1} \dots \cdot u_{i_m} = d_{i_1} \cdot d_{i_2} \cdot \dots \cdot d_{i_m}$.

דוגמה

$$\begin{array}{|c|}\hline c \\ \hline ca \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline a \\ \hline bc \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline bc \\ \hline c \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline c \\ \hline ca \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline cab \\ \hline b \\ \hline \end{array}$$

ראשית, נראה כי הבעייה ניתנת לזיהוי (שייכת ל-RE). נוכל לבנות מ"ט שתעבור על כל הסדרות בגודל $1, 2, 3, \dots$, אם יש match, תמצא אותו ותעצור.

כעת, נראה כי המשלים של הבעייה אינו ניתן לזיהוי.

כלומר $\mathsf{PCP} = \{\langle e_1, \dots, e_n \rangle \mid$ קיים match ב $e_1, \dots, e_n\} \notin \mathsf{coRE}$.

הרדוקציה תיעשה באמצעות A_{TM}, דהיינו $A_{\mathsf{TM}} \leq \mathsf{PCP}$.

3 תורת הסיבוכיות

הרצאה מס' 16:

יום רביעי

01.12.21

בחלק הזה נעשה אפיון של שפות כריעות.

למעשה, כבר ראינו כמה אפיונים, למשל REG או CFL, שאלו הן שפות כריעות.

כעת, נראה אפיון לפי משאבים: זמן ומקום.

3.1 מבוא לסיבוכיות

סיבוכיות זמן

הגדרה

חסם עליון על אלגוריתם הוא מציאת סיבוכיות זמן **ישיגה** באלגוריתם.

חסם תחתון על אלגוריתם הוא מציאת סיבוכיות הזמן הטוב ביותר האפשרית.

דוגמה

נתבונן לרגע במ"ט שמכריעה את $\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$:

1. בודקת שהקלט מהצורה 0^*1^*.
2. כל עוד אפשר: מוחקת 0 ראשון ו-1 ראשון.
3. מקבלת אם המחיקות בשני הצדדים הסתיימו יחד.

ניתוח הסיבוכיות על קלט באורך n:

1. $O(n)$ צעדים.
2. לכל היותר, n איטרציות שכל אחת מהן היא $O(n)$ צעדים, ולכן $O\left(n^2\right)$.

אם כך, סיבוכיות הזמן היא $O\left(n^2\right)$.

הגדרה

עבור פונקציה $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, נגדיר את מחלקת הסיבוכיות $\mathsf{TIME}\left(t\left(n\right)\right)$, שהינן כל השפות שניתנות להערכה על ידי מכונות טיורינג **דטרמיניסטיות** עם סרט יחיד, הרצות על קלט באורך n, לכל היותר $O\left(t\left(n\right)\right)$ צעדים.

נשים לב כי השפה שראינו מקודם ניתנת להכרעה ע"י מ"ט עם שני סרטים בזמן ליניארי.

משפט

לכל מ"ט מרובת סרטים שעובדת בזמן $t\left(n\right)$, יש מ"ט שקולה בעלת סרט יחיד שעובדת בזמן $O\left(t^2\left(n\right)\right)$.

ניתן להכריע את השפה שראינו מקודם ב-$O\left(n\log n\right)$ צעדים. בכל איטרציה מוחקים חצי מה-0-ים וה-1-ים. ישנן $\log\left(n\right)$ איטרציות כשבכל איטרציה $O\left(n\right)$ צעדים.

משפט

אם L ניתנת להכרעה בזמן $o\left(n\log n\right)$ אזי L רגולרית.

ראינו בתרגול את ההגדרה של מ"ט אי דטרמיניסטיות:

הגדרה

מכונת טיורינג אי דטרמיניסטית היא שביעייה:

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}} \rangle$$

כאשר δ מוגדרת על ידי:

$$\delta : Q \setminus \{q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}\} \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma \times \{L,R\}} \setminus \{\emptyset\}$$

ראינו כי למכונה זו קיים עץ ריצות, לפי הקונפיגורציות שקיימות על ריצות המילה. כמו כן, אמרנו ש-M **מכריעה** את L, אם M עוצרת על כל מילה בכל החישובים על המילה. מעבר לכך, הראינו כי $w \in L$ אם קיים חישוב מקבל כלשהו.

הגדרה

מכונת טיורינג אי דטרמיניסטית שעוצרת בכל הריצות שלה נקראת decider.

הגדרה

עבור פונקציה $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, נגדיר את מחלקת הסיבוכיות $\mathsf{NTIME}\left(t\left(n\right)\right)$, שהינן כל השפות שניתנות להערכה על ידי מכונות טיורינג **אי דטרמיניסטיות** עם סרט יחיד, הרצות על קלט באורך n, לכל היותר $O\left(t\left(n\right)\right)$ צעדים **בכל הריצות**.

3.1.1 המחלקות P ו-NP

הגדרה

המחלקה P היא מחלקת השפות שניתנות להכרעה בזמן פולינומיאלי עם מ"ט דטרמיניסטית, כלומר $\mathsf{P} = \bigcup\limits_{k} \mathsf{TIME}\left(n^k\right)$.

הגדרה

המחלקה NP היא מחלקת השפות שניתנות להכרעה בזמן פולינומיאלי עם מ"ט א"ד, כלומר $\mathsf{NP} = \bigcup\limits_{k} \mathsf{NTIME}\left(n^k\right)$.

הגדרה

המחלקה EXPTIME היא מחלקת השפות שניתנות להכרעות בזמן אקספוננציאלי,כלומר $\mathsf{EXPTIME} = \bigcup\limits_{k} \mathsf{TIME}\left(2^{n^k}\right)$.

טענה

$\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP} \subseteq \mathsf{EXPTIME}$.

הוכחה

$\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$ יחסית פשוט, שהרי כל דבר שאפשר לעשות עם מכונת טיורינג דטרמיניסטית, אפשר לעשות עם מכונה אי דטרמיניסטית.

את ההכלה השנייה נוכיח בהמשך.

השאלה האם $\mathsf{P} \stackrel{?}{=} \mathsf{NP}$ היא שאלה פתוחה במדעי המחשב, ואחת השאלות הפתוחות הכבדות הקיימות היום.

משפט

אם L ניתנת להכרעה ע"י מ"ט א"ד בזמן $t\left(n\right)$, אזי L ניתנת להכרעה על ידי מ"ט דטרמיניסטית בזמן $2^{O(t(n))}$.

הרצאה מס' 17:

יום שני

06.12.21

3.2 המחלקה NP

הגדרה

מסלול המילטוני בגרף הוא מסלול שעובר בכל הקודקודים, בדיוק פעם אחת.

3.2.1 שייכות D-ST-HAMPATH ל-NP

נתבונן בשפה $\text{D-ST-HAMPATH}=\{\langle G,s,t\rangle \mid$ קיים מסלול המילטון בגרף G בין $s-t$ $\}$.

נבחין כי D-ST-HAMPATH$\in$ EXPTIME שהרי נוכל לבנות מ"ט שמכריעה את D-ST-HAMPATH בזמן אקספוננציאלי:

- המכונה עוברת על כל הסדרות ב-$|V|^n$. אם יש סדרה שמתחילה ב-s, מסתיימת ב-t ומהווה פרמוטציה של V וקודקודים עוקבים יש ביניהם קשת - אזי מקבלת.

כהערה, נשים לב כי לא פולינומיאלי קשה למצוא, למשל לבדוק האם יש מסלול המליטון. פולינומיאלי קל לאמת: כלומר, קל לבדוק האם סדרה של קודקודים היא מסלול המילטון.

נראה כי D-ST-HAMPATH$\in$ NP.

מ"ט א"ד שרצה בזמן פולינומיאלי, תעבוד כך:

אלגוריתם 5 מוודא עבור DST

1. המוודא מנחש סדרה $v_1, v_2, \ldots, v_n$ של קודקודים.
   (א) אם $v_1 \neq s$ - דוחה.
   (ב) אם $v_n \neq t$ - דוחה.
   (ג) אם יש קודקוד שחוזר על עצמו יותר מפעם אחת - דוחה.
   (ד) אם יש $1 \leq i \leq n$ כך ש-E-$(v_i, v_{i+1}) \notin$ - דוחה.
   (ה) אחרת, מקבלת.

3.2.2 **אפיון של המחלקה NP** על ידי מאמת\מוודא (Verifier)

הגדרה

עבור שפה L: **מוודא** עבור L, הוא מ"ט דטרמיניסטית V כך ש:

$$L = \{w \mid \text{קיים } c \in \Sigma^* \text{ כך ש-} V \text{ מקבלת את } \langle w,c\rangle\}$$

ל-$c \in \Sigma^*$ שבתוך $\langle w,c\rangle$, נקרא עֵד (או Certificate).

דוגמה - מוודא עבור D-ST-HAMPATH

נוכל למצוא מ"ט V כך ש:

$$L(V) = \{\langle (G,s,t), \pi\rangle \mid \pi \text{ מסלול המילטון ב-} G \text{ מ-} s \text{ ל-} t\}$$

דוגמה נוספת

נתבונן בשפה:

$$\mathsf{COMPOSIME} = \{x \mid x \in \mathbb{N}, \text{ יש } p,q \in \mathbb{N}, \text{ כך ש-} p,q \neq 1 \text{ ו-} p \cdot q = x\}$$

אלגוריתם אקספוננציאלי עבור מציאת השפה:

1. עוברים על כל $p = 2,3\ldots,\sqrt{x}$ ובודקים האם p מחלק את x.

מכיוון ש-x נתון בבינארית, אורך הקלט הוא $\log_2 x$ ולכן מדובר באלגוריתם אקספוננציאלי.
קשה להכריע האם x פריק אבל קל לבדוק שעֵד p הוא כזה ש-p מחלק את x, ללא שארית, וכך נוכל למצוא את המוודא עבור השפה:

$$V = \{\langle x,p\rangle \mid x = 0 \mod p\}$$

הגדרה

סיבוכיות של מוודא היא זמן הריצה ביחס למילה w.

הגדרה

נאמר כי מוודא הוא **מוודא פולינומיאלי** אם הוא רץ על $\langle w,c\rangle$ בזמן פולינומיאלי ב-$|w|$.
במילים אחרות, נאמר כי קיים מוודא פולינומיאלי ל-L אם:

$$L = \{w \mid \text{קיים } c \text{ פולינומיאלי ב-} w \text{ כך ש-} V \text{ מקבלת בזמן פולינומיאלי את } \langle w,c\rangle\}$$

משפט

$L \in \mathsf{NP}$ אם"ם יש ל-L מוודא פולינומיאלי.

הוכחה

$\Rightarrow$ יש ל-L מוודא פולינומיאלי V, כלומר יש פולינום $t_V : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ שחוסם את זמן הריצה של V. נבנה מ"ט א"ד שמכריעה את L בזמן פולינומיאלי: בהינתן מילה w, מְכונה זו מנחשת עד c באורך **קטן שווה** מ-$t_V\left(w\right)$, מריצה את V על $\langle w,c\rangle$ ועונה כמו V.

V היא מ"ט דטרמיניסטית, כך שיש פולינום $t_V : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ כשעל קלט $\left(w,c\right)$ V רצה לכל היותר $t_V\left(|w|\right)$ צעדים ו:

$$L = \{w \mid \text{קיים } c \text{ כזה כך ש-} |c| \le t_V\left(w\right) \text{ מקבלת את } \left(w,c\right)\}$$

ולכן $L \in \mathsf{NP}$.

$\Leftarrow$ יש מ"ט M שרצה בזמן פולינומיאלי ו$L\left(M\right) = L$.

המוודא הוא:

$$L\left(V\right) = \{\left(w,r\right) \mid r \text{ ריצה מקבלת של } M \text{ על } w\}$$

מתקיים, אם כך:

$$L = \{w \mid \text{יש } r \text{ כך ש-} V \text{ מקבל את } \left(w,r\right)\}$$

ברור כי V פולינומיאלי כי M פולינומיאלית (האורך של r חסום על ידי אורכי הריצות של M + בדיקה שאכן הריצה מקבלת).

נשים לב כי על פניו, לא ברור האם כל בעיה שב-EXPTIME היא ב-NP, למשל $\overline{\mathsf{D-ST-HAMPATH}}$, כלומר המשלים של השפה שראינו מקודם, קשה להוכיח כי שייך ל-NP, שהרי לא ברור שיש עֵד קצר שמשכנע שאין מסלול המילטון.

3.3 רדוקציות פולינומיאליות

הגדרה

נאמר כי שפה L היא NP- שלמה אם:

1. חסם עליון -$L \in \mathsf{NP}$.
2. חסם תחתון - L היא NP-קשה.
"אם $L \in \mathsf{P}$ אז $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$".

ראינו כי $A \le_m B$ אם יש פונקציה f, ניתנת לחישוב כך שלכל $w \in \Sigma^*$, $w \in A \Leftrightarrow f\left(w\right) \in B$, כעת נצטמצם לרדוקציה מסוג מסוים.

הגדרה
נאמר כי f ניתנת לחישוב **בזמן פולינומיאלי** אם יש פולינום $t:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ומ"ט M_t שעל קלט w, עוצרת אחרי $t\left(w\right)$ עם $f\left(w\right)$ על הסרט.

הגדרה
נאמר כי $A\leq_{P}B$ אם יש פונקציה f ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי כך שלכל $w\in\Sigma^{*}$, יתקיים כי $w\in A\Leftrightarrow f\left(w\right)\in B$.

משפט
אם $A\leq_{P}B$ ו-$B\in\mathsf{P}$ אזי $A\in\mathsf{P}$.

הוכחה
בהינתן M_{B}, מ"ט דטרמיניסטית שמכריעה את B בזמן פולינומיאלי, M_{t} מ"ט דטרמיניסטית שמחשבת בזמן פולינומיאלי פונקציה f כך ש-$w\in A\Leftrightarrow f\left(w\right)\in B$.
נבנה M_{A} שמכריעה את A בזמן פולינומיאלי: בהינתן w, תריץ את M_{t}, תקבל את $f\left(w\right)$ (נשים לב כי $\left|f\left(w\right)\right|$ פולינומיאלי ב-$\left|w\right|$) ותריץ את M_{f} על $f\left(w\right)$ ותענה כמותה.

הגדרה
L היא NP-קשה, אם לכל $L'\in\mathsf{NP}$ יתקיים כי $L'\leq_{P}L$.

טענה
אם L היא NP-קשה לפי הגדרת השלימות, אם L היא NP- קשה לפי ההגדרה הנוכחית.

הגדרה נוספת
L היא NP קשה אם יש שפה L'' כך ש-L'' היא NP- קשה לפי ההגדרה האחרונה ו-$L''\leq_{P}L$.

נשים לב כי אם L היא NP קשה לפי ההגדרה האלטרנטיבית אזי L היא NP-קשה לפי ההגדרה השנייה, כי לכל $L'\in\mathsf{NP}$ אנו יודעים כי $L'\leq_{P}L''$ ולכן $L''\leq_{P}L$, מהטרנזיטיביות של $\leq_{P}$ עולה כי $L'\leq_{P}L$.

הרצאה מס' 18:

יום רביעי
08.12.21

3.3.1 בעיית SAT ומשפט קוק לוין

הגדרה
SAT היא ספיקות של נוסחאות בלוגיקה פסוקית, בעלת התכונות הבאות:

- משתנים בוליאנים $x_{i}\in\left\{ \mathbb{T},\mathbb{F}\right\}$.
- נוסחא בוליאנית פסוקית:
  - משתנה בוליאני הוא נוסחא: אם φ_{1} ו-φ_{2} נוסחאות, אזי גם $\neg\varphi_{1}$ ו-$\varphi_{1}\vee\varphi_{2}$ ו-$\varphi_{1}\wedge\varphi_{2}$ נוסחאות.

כלומר, $\mathsf{SAT}=\left\{ \left\langle \varphi\right\rangle \mid \varphi\text{ נוסחה ספיקה}\right\}$.

הגדרה

הנוסחה 3SAT היא מהצורה:

- משתנים בוליאנים $x_i \in \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$
- ליטרלים - משתנה x_i או שלילתו $\neg x_i$.
- פסוקית בנוסחת 3CNF : אוסף של שלושה ליטרלים ודיסיונקציה (או אימום) ביניהם. למשל, $(x_1 \vee \neg x_n \vee x_4)$.
- קוניונקציה (או גימום) של פסוקיות. למשל: $(x_1 \vee \neg x_n \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$.

בשנות ה-70, קוק ולוין הוכיח כי SAT $\in$ P אס"ם P=NP, כלומר מדובר בבעיית NP-קשה. אנו נוכיח את המשפט באחת ההרצאות הבאות.

רדוקציה מ-3SAT לבעיית הקליקה (CLIQUE)

<u>קלט</u>

גרף לא מכוון $G = \langle V, E \rangle$, $k \in \mathbb{N}$.

<u>פלט</u>

קליקה בגודל k, כאשר קליקה היא קבוצה של קודקודים שמחוברים כולם אחד לשני.

נרצה להראות כי הבעיה הזאת היא NP-קשה ונראה זאת באמצעות רדוקציה פולינומיאלית מ-3SAT, ולפי ההגדרה האחרונה של NP-קשה.

נרצה להראות אם כך, כי 3SAT $\leq_P$ CLIQUE.

<u>בנייה</u>

בהינתן $\varphi \in$ 3CNF, שנתון על ידי $\varphi = \left(\ell_1^1 \vee \ell_1^2 \vee \ell_1^3\right) \wedge \left(\ell_1^2 \vee \ell_2^2 \vee \ell_2^3\right) \wedge \ldots \wedge \left(\ell_m^1 \vee \ell_m^2 \vee \ell_n^3\right)$,

נבנה $\langle G, k \rangle$ כך ש-$G = \langle V, E \rangle$,ו-V מוגדר על ידי:

$$V = \left\{\ell_1^1, \ell_1^2 \ldots, \ell_m^1, \ell_m^2, \ell_m^3\right\}$$

ו-E מוגדר על ידי:

$$E = V \times V \setminus (\{(v_1, v_2) \mid \text{הליטרלים של } v_1 \text{ו-} v_2 \text{ מתאימים למשתנה ושלילתו}\} \cup$$
$$\{(v_1, v_2) \mid \text{הליטרלים של } v_1 \text{ו-} v_2 \text{ מתאימים לאותה פסוקית}\})$$

כלומר, לא יהיה צלע בין שני קודקודים, אם הם באותה פסוקית, או אם מדובר במשתנה ושלילתו.

<u>נכונות</u>

- הרדוקציה פולינומיאלית - $|V| = 3m$ ויש מספר פולינומיאלי של מבחנים בהגדרת E.
- הרדוקציה נכונה - (משמרת שייכות) $\varphi \in$ 3SAT $\Leftrightarrow (G, k) \in$ CLIQUE.

1. נניח כי φ ספיקה, כלומר, קיימת $f : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{\mathbb{F}, \mathbb{T}\}$ שמספקת את φ.
בכל פסוקית $\ell_i^1 \vee \ell_i^2 \vee \ell_i^3$ יש $1 \leq j \leq 3$ כך ש-$f\left(\ell_i^j\right) = \mathbb{T}$. אם $\ell_i^j = x$, אזי $f(x) = \mathbb{T}$, ואם

$\ell_i^j = \overline{x}$, אזי $f(x) = \mathbb{F}$.

נראה כי יש קשתות בין כל נציגי הפסוקיות:

- הן בפסוקיות שונות.
- מכיוון שנבחרו על סמך f, כל המשתנים מופיעים.
- אם הם מסכימים על ההשמה, יש קשת, ולכן יש $k = m$ קודקודים עם k-קליקה.

2. נניח שיש ב-G קליקה בגודל k. מהגדרת E, יש לכל פסוקית, לכל היותר (בדיוק, כי $k = m$) נציג אחד ב-S.

לכל משתנה, אם ליטרלים שמתאימים לו משתתפים בקליקה, הם מסכימים על ההשמה, לכן הקליק משרה $f : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{\mathbb{F}, \mathbb{T}\}$.

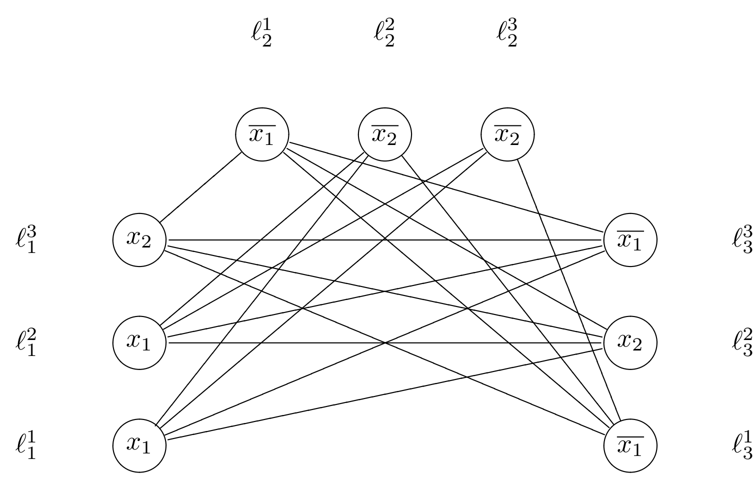
היא מספקת כיוון שכל פסוקית משרה ערך אחד ולכן הפסוקית ספיקה.

דוגמה

ניקח את הקלט הבא:

$$\varphi = (x_1 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_2)$$

ובאמצעות הרדוקציה, נוכל לבנות את הקליקה הבאה:



הרצאה מס' 19:

יום רביעי

13.12.21

משפט קוק לוין

אם SAT∈P אזי P=NP, כלומר SAT הינו NP-שלימה.

הוכחה

תהי $L \in$ NP. בהינתן מילה $w \in \Sigma^*$, נרצה בזמן פולינומיאלי למצוא נוסחה φ כך ש-$w \in L$ אם"ם φ ספיקה.

הרעיון הינו כזה: φ תבדוק אם יש ריצה מקבלת של M על w. אם יש ריצה מקבלת, אזי יש סדרה של קונפ' $c_0, c_1, \ldots, c_m$ כך ש-c_0 היא הקונפ' ההתחלתית של M על w, לכל $0 \leq i \leq m$ הקונפ' c_{i+1} עוקבת לקונפ' c_i, והקונפ' c_m מקבלת. במהלך ההוכחה, ננסה להפוך קונפיגורציה של מכונת טיורינג, ל-CNF3, ולהראות כי כל התנאים שהראינו אכן מתקיימים.

נבחין כי המכונה M, מ"ט א"ד עם פונקציית זמן פולינומיאלית $t:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ קיימת כי $L\in\mathsf{NP}$.
נזכיר כי אנו מציגים קונפיגורציות באמצעות $S=\Gamma\cup Q\cup\{\#\}$, כאשר קונפיגורציה תתואר בתור $\#\delta_1\ldots,\delta_k q'\delta_{k+1}\ldots\delta_n\#$ (מילה לפני הראש, מצב, מילה אחרי הראש). החסם על זמן הריצה יכתיב אורך קונפיגורציה, ובהינתן $n=|w|$, כיוון ש- M עוצרת על w ב-$t(w)$ צעדים, לכן היא משתמשת לכל היותר ב-$t(n)$ תאים.

כעת, נרצה כי הנוסחה תתאר **מטריצה**: לכל מילה תהיה מטריצה ייחודית משלה.

המשתנים - לכל כתובת (i,j) במטריצה ואות $s\in S$, יהיה המשתנה $X_{i,j,s}$ שמביע: האות s נמצאת בכתובת ה-i,j (**שימו לב, כאן i זה עמודות, ו-j שורות!**).

גובה הטבלה - מתאים לזמן הריצה, ולכן חסום על ידי $t(n)$.

אורך הטבלה - $t(n)+3$, כיוון שמוסיפים סולמית בהתחלה, וסולמית בסוף.

אם כך, הטבלה תראה כך:

#	q_0	w_1	w_2	$\ldots$	w_n	$\sqcup$	$\ldots$	$\sqcup$	#

הנוסחה φ תהיה גימום של הביטויים הבאים:

$$\varphi=\underbrace{\varphi_{\text{cell}}}_{\text{ההשמה מתאימה למילוי המטריצה}}\wedge\underbrace{\varphi_{\text{init}}}_{\text{בשורה הראשונה יש } q_0}\wedge\underbrace{\varphi_{\text{move}}}_{\text{טיפוס בין שורות תואם לקונפיגורציות עוקבות}}\wedge\underbrace{\varphi_{\text{acc}}}_{\text{מגיעים לקונפ' מקבלת}}$$

נבחין כי יש מספר פולינומיאלי של משתנים $|S|\cdot t(n)\cdot(t(n)+2)$.

כיצד φ_{cell} נראה? כדי שתהיה השמה מתאימה לכל משתנה, כל משתנה, או כל תא, אמור לקבל ערך יחיד. ולכן נגדיר אותו להיות:

$$\varphi_{\text{cell}}=\underbrace{\left(\bigwedge_{\substack{1\le i\le t(n)+3\\1\le j\le t(n)}}\bigvee_{s\in S}X_{i,j,s}\right)}_{\text{בתא ה-}i,j\text{ יש לפחות אות אחת}}\wedge\underbrace{\left(\bigwedge_{\substack{s_1,s_2\in S\\s_1\ne s_2}}\left(\overline{X_{i.j,s_1}}\vee\overline{X_{i.j,s_2}}\right)\right)}_{\text{כל אות מופיעה בדיוק פעם אחת}}$$

כיצד φ_{init} נראה?

$$\varphi_{\text{init}} = X_{1,1,\#} \wedge X_{2,1,q_0} \wedge X_{3,1,w_1} \wedge \ldots \wedge X_{n+2,1,w_n} \wedge X_{n+3,1,\sqcup} \wedge \ldots \wedge X_{t(n)+2,1,\sqcup} \wedge X_{t(n)+3,1,\#}$$

הבדיקה הראשונה צריכה לוודא כי $X_{2,1,q_0}$ מקבל ערך $\mathbb{T}$ וכל השאר מקבלים ערך $\mathbb{F}$, ולאחר מכן מופיעה המילה w ואז רווחים.
כיצד φ_{acc} נראה?

$$\varphi_{\text{acc}} = \bigvee_{\substack{2 \leq i \leq t(n)+2 \\ 1 \leq j \leq t(n)}} X_{i,j,q_{\text{acc}}}$$

כלומר, הבדיקה הזאת מוודא כי יש כתובת שמאכלסת את q_{acc}, כלומר שיש בה ערך $\mathbb{T}$.

נשים לב כי $\varphi_{\text{acc}}, \varphi_{\text{init}}, \varphi_{\text{cell}}$ כולן פולינומיאלות ב-n. בנוסף, שלושתן ב-CNF, כי הן מהצורה של $(\vee \ldots \vee) \wedge$ $.(\vee \ldots \wedge)$
כל שנותר לנו הוא לעשות את פונקציית המעברים, כלומר את φ_{move}.
כיצד φ_{move} נראה? "כל החלונות בגדול 3×2 שמותרים" - כלומר שייכים לקבוצה W של חלונות אפשריים, ולמעשה:

$$\varphi_{\text{move}} = \bigwedge_{\substack{1 \leq i \leq t(n)+1 \\ 1 \leq j \leq t(n)+1}} legal\,(i,j)$$

כאשר נגדיר:

$$\text{legal}\,(i,j) = \bigvee_{s_1,\ldots,s_6 \in S} X_{i,j,s_1} \wedge X_{i+1,j,s_2} \wedge X_{i+2,j,s_3} \wedge X_{i,j+1,s_4} \wedge X_{i+1,j+1,s_5} \wedge X_{i+2,j+1,s_6}$$

באופן מפורט יותר, ניזכר בדרך שבה קונפיגורציות עוברות. אם הסמן נמצא בתוך קונפיגורציה מסוימת $w_i q_t w_j$, אזי הוא יכול לעבור שמאלה או ימינה במעבר הבא, כלומר $w_i w_k q_t$ למשל, אך אם הוא לא נמצא, עלינו **להעתיק את הקונפיגורציה** בחלון, לקומה הבאה (מלבד מקרה של 'ימינה', שיש בקצה השמאלי, ו'שמאלה', שיש בקצה הימני).
למשל, זהו חלון חוקי:

a	b	c
a	b	c

וזהו חלון לא חוקי:

a	q_0	c
a	b	c

טענה

יש קבוצה W של חלונות חוקיים, בגודל פולינומיאלי בקלט (ב-$|w|$), כאשר:

$$\varphi_{\text{move}} = \bigwedge_{\substack{1 \le i \le t(n)+1 \\ 1 \le j \le t(n)+1}} legal\,(i,j)$$

הוכחה

לכל $a,b,c,d,e \in \Gamma$:

לכל מעבר, $(q_2,b,R) \in \delta\,(q_1,a)$ נוסיף חלונות:

b	q_2	c
q_1	a	c

c	b	q_2
c	q_1	a

q_2	c	d
a	c	d

d	c	b
d	c	q_1

לכל מעבר $(q_2,b,L) \in \delta\,(q_1,a)$ נוסיף חלונות:

q_2	c	b
c	q_1	a

d	q_2	c
d	c	q_1

e	d	q_2
e	d	c

c	b	d
q_1	a	d

הטיפול ב-# מתבצע באמצעות הוספת אפשרות ל-# בחלונות שבהם אין שינוי במצב.

מדובר בזמן פולינומיאלי כי לכל מעבר מוסיפים מספר קבוע (תלוי ב-$|\Gamma|$ של חלונות אבל $|\Gamma|$ קבוע).

לא הראינו כי φ_{move} ב-CNF, ניתן לעשות זאת אך **לא נראה זאת בשלב זה**.

<u>נכונות</u>

אם $w \in L$ יש ריצה מקבלת של M על w ולכן יש דרך למלא את המטריצה באופן שמייצג סדרת קונפ' שהיא ריצה חוקית מקבלת ולכן φ ספיקה.

אם φ ספיקה, אז' φ_{cell} מתארת מטריצה ו-φ_{init} גוררת כי יש בשורה הראשונה את הקונפ' ההתחלתית של M על w, ו-φ_{move} גוררת כי טיפוס במטריצה מתאים לקונפ' עוקבות, ו-φ_{acc} גוררת כי מגיעים לקונפ' מקבלת, ולכן $w \in L$.

כל שנותר לנו הוא להראות כיצד ניתן לעבור מ-CNF ל-3CNF.

מעבר מ-CNF ל-3CNF

בהינתן נוסחה φ ב-CNF, נרצה לייצר בזמן פולינומיאלי נוסחה φ' ב-3CNF, כך ש-φ ספיקה אם"ם φ' ספיקה.

<u>בנייה</u>

לכל פסוקית c_j, אם $n_j = 3$, הפסוקית נשארת. אם $n_j < 3$, מכפילים ליטרלים, כלומר $x_1 \vee x_2 \to x_1 \vee x_1 \vee x_2$.

אם $n_j > 3$, מוסיפים משתני עזר: פסוקית עם n_j ליטרלים תומר ב-$n_j - 2$ פסוקיות עם $n_j - 3$ משתנים חדשים:

$$\begin{aligned}&a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee \ldots \vee a_q \to \\ &(a_1 \vee a_2 \vee z_1) \wedge (\overline{z_1} \vee a_3 \vee z_2) \wedge \ldots \wedge (\overline{z_{q-3}} \vee a_{q-1} \vee a_q)\end{aligned}$$

אם כך, הראינו כי ניתן לעבור מתצוגה כללית של CNF ל-3CNF, בזמן פולינומיאלי, ולכן הוכחנו את המשפט, כנדרש.

3.3.2 הוכחת NP-קשה באמצעות רדוקציה פולינומיאלית

הרצאה מס' 20:

יום רביעי

15.12.21

הגדרה
יהי $G=\langle V,E\rangle$ גרף לא מכוון. קבוצה $S\subseteq V$ תקרא בלתי תלוייה אם לכל $v_1,v_2\in S$ יתקיים כי $(v_1,v_2)\in E$.

כעת, נגדיר את השפה:

$$\text{IS}=\{\langle G,K\rangle \mid 1\leq k \text{ ,}k \text{ גרף לא מכוון, יש ב-}G\text{ קבוצה בלתי תלוייה בגודל } G\}$$

ניתן להראות כי קיימת רדוקציה CLIQUE $\leq_p$ IS. כדי להראות כי L' היא NP-קשה מספיק להראות כי ישנה רדוקציה פולינומילאית בינה ובין שפה ב-NP-קשה. הרדוקציה קיימת כיוון ש-S הוא קליקה ב-G אם"ם S הוא IS ב-G', גרף הקשתות המשלימות.

רדוקציה מ-3SAT **להוכחת** NP**-קשיות של** CLIQUE
נראה כי 3-SAT$\leq_P$CLIQUE ונוכיח כי CLIQUE היא NP-קשה.

אבחנה

בהינתן 3SAT $\ni\varphi$ כך ש-$\varphi=C_1\wedge C_2\wedge\ldots\wedge C_m$, לכל פסוקית C_j יש לכל היותר $F_j=\left\{f_j^1,f_j^2,\ldots,f_j^7\right\}$ השמות חלקיות למשתני C_j שמספקות את C_j(לכל היותר, כי ייתכן שבפסוקית אחת מופיעה אותו משתנה פעמיים). זה נכון, כי למשל בהינתן פסוקית $(x_1\vee x_2\vee x_3)$, האפשרויות הן:
$(\mathbb{T},\mathbb{T},\mathbb{T}),(\mathbb{T},\mathbb{T},\mathbb{F}),(\mathbb{T},\mathbb{F},\mathbb{F}),(\mathbb{F},\mathbb{T},\mathbb{F}),(\mathbb{F},\mathbb{T},\mathbb{T}),(\mathbb{F},\mathbb{F},\mathbb{T}),(\mathbb{T},\mathbb{F},\mathbb{T})$

<u>בנייה</u>
בהינתן 3SAT$\ni\varphi$, נגדיר $G=\langle V,E\rangle$ כך ש-$V=\bigcup_{1\leq j\leq m}F_j$ (כל השמה חלקית היא קודקוד ולכן יש לכל היותר $7m$ קודקודים), ו-
$\left(f_{j_1}^{i_1},f_{j_2}^{i_2}\right)\in E$ אם ורק אם $f_{j_1}^{i_1}$ ו-$f_{j_2}^{i_2}$ מסכימות על המשתנים המשותפים (אין קשתות בין $f_i^{j_1}$ ו-$f_i^{j_2}$ ואין קשתות אם באחד יש משתנה ובשני שלילתו). בנוסף, יתקיים כי $k=m$.
הרדוקציה פולינומיאלית (כי השתמשנו רק בדברים פולינומיאלים בגודל הקלט).
<u>נכונות</u>

1. אם φ ספיקה, אזי יש ב-G k-קליקה, כי אם φ ספיקה על ידי $f:X\to\{0,1\}$, אזי לכל $1\leq j\leq m$ יש ליטרל ש-f מספקת, ולכן יש i כך ש-f_j^i מסכימה עם f, כלומר בקבוצה F_j יש קודקוד שמסכים עם f ולא סותרים אחד את השני, שניקח אותו לקליקה. מדובר בקליקה, כי כל הקודקודים שנבחרו מסכימים עם f ולכן מסכימים זה עם זה ויש קשת ביניהם.

2. אם יש ב-G k-קליקה, אזי φ ספיקה, כי ב-k-קליקה חייב להיות נציג אחד מכל קבוצה F_j (אין קשתות בין ההשמות החלקיות שמתאימות לאותה פסוקית), ולכן יש קשתות בין כל הנציגים ואין סתירות בהשמות החלקיות, ולכן האיחוד של ההשמות החלקיות משרה השמה מספקת.

רדוקציה מ-CLIQUE **ל-**3SAT
אפשר לעשות גם רדוקציה הפוכה, CLIQUE $\leq_P$ 3SAT, שונה מזו שראינו אצל קוק-לוין.

<u>ניסיון ראשון:</u>
ננסה להגדיר לכל $i \in V$ משתנה x_i(כך ש-$x_i = \mathbb{T}$ אם ורק אם $i \in S$). אמנם, הקושי הוא למצוא כי הקליקה הוא בגודל k, ולכן הרדוקציה במקרה זה לא תהיה פולינומיאלית (עלינו לעשות choose שהוא לא פולינומיאלי).
<u>ניסיון שני:</u>
נתבונן בכל הקודקודים בסדר מסוים $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ובקליקה $S = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$.
לכל $1 \leq i \leq n$ ולכל $1 \leq j \leq k$, נסמן $x_{ij} = \mathbb{T}$ אם קודקוד v_i נמצא בקליקה בתור הקודקוד ה-j בקליקה.
אינטואיטיבית, ברור לנו כי קודקוד כלשהו **נמצא פעם אחת בקליקה** - לכל קודקוד j בקליקה יש קודקוד i מתאים בסדר הקודקודים. פורמלית, מתקיים כי לכל $1 \leq j \leq k$ יש בדיוק $1 \leq i \leq n$ כך ש-$x_{ij} = \mathbb{T}$. עוד יותר פורמלית, נקבל כי $\bigwedge\limits_{1 \leq j \leq k} \bigvee\limits_{1 \leq i \leq n} x_{ij}$ - יש לפחות i אחד שנבחר, ומצד שני $\bigwedge\limits_{1 \leq j \leq k} \bigwedge\limits_{\substack{1 \leq i_1, i_2 \leq n \\ i_1 \neq i_2}} \overline{x_{i_1 j}} \vee \overline{x_{i_2 j}}$ - יש רק i אחד שנבחר.
אם $x_{i_1 j_1} = \mathbb{T}$ ו-$x_{i_2 j_2} = \mathbb{T}$, אזי יש קשתות בין i_1 ו-i_2 - כלומר אם שתיהן מופיעות בקליקה, יש קשת ביניהם:

$$\bigwedge_{(i_1, i_2) \in (V \times V) \setminus E} \; \bigwedge_{1 \leq j_1, j_2 \leq k} \overline{x_{i_1 j_1}} \vee \overline{x_{i_2 j_2}}$$

כלומר, עוברים על כל הזוגות שלא שייכים ל-E (אין ביניהם קשתות), לכל ה-j הקיימים, ואומרים כי 'לא ייתכן שבחרנו את $x_{i_1 j_1}$ ו-$x_{i_2 j_2}$ אם אין ביניהם קשת'.
שימו לב שהנוסחה היא ב-CNF ולא בעייה לעבור ל-3CNF.

3.3.3 בעיית SubsetSum

הרצאה מס' 21:

יום שני

20.12.21

<u>קלט:</u> קבוצה $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \in \mathbb{N}$ ומספר יעד $s \in \mathbb{N}$.
<u>פלט:</u> האם יש $B \subseteq A$ כך ש-$\sum\limits_{i \in B} i = s$.

דוגמה
$A = \{5, 2, 10, 4, 7\}$ ו-$s = 16$ - אפשרי כי $2 + 10 + 4$.
עבור $s = 20$, אין דוגמה כזו, ואין מנוס מלעבור על כל האפשרויות.

טענה
השפה $\left\{ \langle \varphi \rangle \mid \text{קיימת } B \subseteq A \text{ כך -ש} \sum\limits_{i \in B} i = s \right\}$ =SS הינה שפה NP-שלימה.
הוכחה
קודם כל, נבחין כי SS ב-NP.
מוודא פולינומיאלי עבור SS הינו $V = \left\{ \langle A, s, B \rangle \mid B \subseteq A \quad \sum\limits_{i \in B} i = s \right\}$.
כלומר, ניקח תת קבוצה מ-A ונבדוק האם הסכום של הערכים בה שווה ל-s. דבר זה נכון בין אם המספרים ב-A בבינארית, ובין אם נתונים באונרית.

נראה כעת קושי ב-NP, באמצעות רדוקציה 3SAT$\leq_P$SS.
בהינתן φ ב-3CNF, נבנה (בזמן פולינומיאלי) קבוצה A ומספר יעד s, כך ש-φ ספיקה אם"ם $(A, s) \in$ SS.

בנייה

נניח כי φ מעל n משתנים, כך ש-$X = \{x_1, \dots, x_n\}$, ושיש בה m פסוקיות, כך שמתקיים כי $\varphi = c_1 \wedge c_2 \dots \wedge c_m$.

- כל משתנה x_i כך ש-$1 \leq i \leq n$, משרה שני מספרים, t_i ו-f_i.
- כל פסוקית c_j, כך ש-$1 \leq j \leq m$, משרה שני מספרים p_j ו-q_j.

שני המספרים יהיו בבסיס 10.

מילוי הטבלה

עבור המשתנה x_i:

- הספרה ה-i-ית של t_i ו-f_i מסומנת ב-1. כל שאר הספרות הן 0.
- הספרה $n+j$ עבור $1 \leq j \leq m$:
  - ב-t_i:
    * 1 אם x_i מופיע ב-c_j.
    * 0 אם x_i לא מופיע ב-c_j.
  - ב-f_i:
    * 1 אם $\overline{x_i}$ מופיע ב-c_j.
    * 0 אם $\overline{x_i}$ לא מופיע ב-c_j.

עבור הפסוקית c_i:

- הספרה ה-$n+j$ של p_i ו-q_j עבור $1 \leq j \leq m$ היא 1. כל שאר הספרות הן 0.
- הספרה ה-i-ית של p_j וq_j, לכל $1 \leq i \leq n$, היא 0.

מספר היעד s:

- עבור $1 \leq i \leq n$, הספרה ה-i היא 1, עבור $1 \leq j \leq m$, הספרה ה-$n+j$ היא 3.

הרדוקציה **פולינומיאלית** (שהרי ממלאים טבלה בגודל $O\left((n+m)^2\right)$.

הרדוקציה נכונה:

- אם φ ספיקה, אזי תהי $f_i : X \to \{\mathbb{F}, \mathbb{T}\}$, השמה שמספקת את φ. נבחר את B כך: לכל $1 \leq i \leq n$, אם $f(x_i) = \mathbb{T}$, נוסיף ל-B את t_i. אם $f(x_i) = \mathbb{F}$, נוסיף ל-B את f_i.
  - לכל $1 \leq j \leq m$, נתבונן בפסוקית c_j.
    * אם f מספקת ליטרל אחד, נוסיף ל-B את p_j ו-q_j.
    * אם f מספקת שני ליטרלים, נוסיף ל-B את p_j.
    * אם f מספקת שלושה ליטרלים, לא נוסיף את p_j וגם לא את q_j.

    (אין מצב ש-f לא מספקת אף ליטרל)
- אם קיים B כך ש-$s = \sum_{i \in B} i$, אזי נשים לב כי B מכיל בדיוק אחד מתוך t_i ו-f_i לכל $1 \leq i \leq n$, ולכן הוא משרה השמה. תת הקבוצה של B שמגיעה מ-$\{p_1, q_1, \dots, p_m, q_m\}$, תורמת לכל היותר ספרה $n+j$-ית, עבור $1 \leq j \leq m$, לכל היותר 2, ולכן בחרנו לפחות שורה אחת עם ליטרל שמסתפק בכל פסוקית, ולכן ההשמה מספקת.

דוגמה

ניקח את הנוסחה הבאה:

$$\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)$$

ונבנה לה את הטבלה המתאימה:

	x_1	x_2	x_3	c_1	c_2	c_3	c_4
	1	2	3	1	2	3	4
t_1	1	0	0	1	0	0	1
f_1	1	0	0	0	1	1	0
t_2	0	1	0	1	0	1	0
f_2	0	1	0	0	1	0	1
t_3	0	0	1	1	1	0	1
f_3	0	0	1	0	0	1	0
q_1	0	0	0	1			
p_1	0	0	0	1			
q_2	0	0	0		1		
p_2	0	0	0		1		
q_3	0	0	0			1	
p_3	0	0	0			1	
q_4	0	0	0				1
p_4	0	0	0				1

מה נעשה כעת? נתבונן בהשמה מספקת, נניח $x_1 \to \mathbb{F}$, $x_2 \to \mathbb{T}$, $x_3 \to \mathbb{T}$. כל השמה שלנו, מסמנת שורה מסוימת. כלומר, בחרו את השורה של f_1, t_2, t_3.

נוכל לשים לב שכיוון שתמיד יש השמה אחת - או $\mathbb{T}$ או $\mathbb{F}$, תמיד סכום כל טור יהיה 1. מצד שני, ה"מלבן" הטורים במלבן הימני העליון יכולים להיות בין 1 ל-3. כיוון שבחרנו השמה מספקת, כל משתנה מספק לפחות פסוקית אחת, אך ייתכן שיספק יותר. אם הוא מספק פחות מ-3, נשלים זאת באמצעות p_j ו-q_j שהם סוג של filler-ים, ואז נקבל כי s הוא $s = \underbrace{111}_{n}, \underbrace{3333}_{m}$.

3.4 סיבוכיות זיכרון

נרצה לבדוק מהו שטח הנדרש - מהו צוואר הבקבוק שלא ניתן לפתור על ידי סבלנות.

הגדרה

בהינתן מ"ט חד-סרטית M, העוצרת על כל קלט, סיבוכיות הזיכרון של M הינה פונקציה $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ כך ש-$S(n)$ הוא מספר התאים ש-M משתמשת בהם בריצתה על מילה באורך n.

הגדרה
עבור $n \leq S(n)$ נגדיר את $\text{SPACE}(S(n))$ להיות

$$\{L \mid O(S(n)) \text{ יש מכונה } M \text{ דטרמיניסטית שמכריעה את } L \text{ בסיבוכיות זיכרון}\}$$

הגדרה
עבור $n \leq S(n)$ נגדיר את $\text{NSPACE}(S(n))$ להיות

$$\{L \mid O(S(n)) \text{ יש מכונה } M\text{, ייתכן אי דטרמיניסטית שמכריעה את } L \text{ בסיבוכיות זיכרון}\}$$

חשוב לציין כי ההערה $n \leq S(n)$ תבוא לידי ביטוי יותר בהמשך - בסיבוכיות מקום תת ליניארית.

3.4.1 קשרים בין סיבוכיות זמן ומקום

טענה
לכל $f(n)$, מתקיים כי $\text{TIME}(f(n)) \subseteq \text{SPACE}(f(n))$.
הוכחה
מכונה שעוצרת תוך $f(n)$ צעדים, לא יכולה להשתמש ביותר ב-$f(n)$ תאים.

טענה
לכל $f(n)$ יתקיים כי $\text{SPACE}(f(n)) \subseteq \text{TIME}\left(2^{f(n)}\right)$.
הוכחה
למ"ט דטרמיניסטית עם סיבוכיות זיכרון $S(n)$ ישנם

$$\underbrace{|Q|}_{\text{מצב}} \cdot \underbrace{|\Gamma|^{S(n)}}_{\text{א"ב העבודה}} \cdot \underbrace{S(n)}_{\text{מיקום הראש הקורא}}$$

מצבים. זה מספיק לנו, כי מדובר בחסם על זמן הריצה, שהרי M לא חוזרת על אותה קונפ' פעמיים, שכן אחרת הייתה נתקעת בלולאה.
אם נסתכל על $|Q|$ ו-$|\Gamma|$ בתור קבועים c_1, c_2,נקבל:

$$c_1 \cdot c_2^{S(n)} \cdot S(n) = c_1 \cdot 2^{S(n)\cdot \log c_2} \cdot 2^{\log S(n)} = 2^{O(S(n))}$$

כלומר, אם אנו מכריעים בסיבוכיות זיכרון של $O(S(n))$, נכריע בסיבוכיות זמן של $2^{O(S(n))}$.

דוגמה
נראה כי SAT ניתנת להכרעה בשטח פולינומיאלי.
הרעיון: נעבור כל השמות האמת האפשריות, אם נגיע להשמה מספקת, נעצור ונקבל. אם נסיים את המעבר, נעצור ונדחה.

תהי φ נוסחה מעל $X=\{x_1,\ldots x_n\}$. יהי $f_0,f_1,\ldots,f_{2^n-1}$ סידור של השמות אפשריות ל-X, כזה שיש פונקציה $g:F\to F\cup\{\perp\}$, כך שבהינתן f_i: אם $i<2^n-1$, אזי $g(f_i)=f_{i-1}$, ואם $i=2^n-1$, אזי $g(f_i)=\perp$.

אלגוריתם 6 מכונה שמכריעה את SAT בשטח ליניארי

1. כותבת על הסרט את f_0.
2. אם ההשמה f שכתובה על הסרט היא $\perp$, עוצרת ודוחה.
3. משערכת את φ לפי ההשמה שכתובה על הסרט (f) - בכל האיטרציות משתמשת באותן תאים לפעולת השערוך.
   (א) אם φ מסתפקת, עוצרת ומקבלת.
   (ב) אחרת $f=g(f)$ (מעדכנת את ההשמה הנבדקת) וחוזרת ל-2.

הזכרון הדרוש הוא:

- לחישוב g, נדרש מקום ליניארי ב-n.
- לפעולת השערוך, נדרש מקום ליניארי ב-$|\varphi|$.

סך הכל, קיבלנו מספר ליניארי בקלט של תאים.

דוגמה נוספת

ראינו כי $\mathsf{VAL}=\{\langle\varphi\rangle\mid\varphi$ כל השמה מספקת את$\}$ לא שייכת ל-NP. מצד שני, הדרך שראינו מקודם תעבור גם על VAL. כלומר, ניתנת לחישוב במקום פולינומיאלי בקלט.

הרצאה מס' 22:

יום רביעי

22.12.21

משפט

מתקיים כי NP⊆PSPACE.

הוכחה

תהי $L\in\mathsf{NP}$. אם כך, בהכרח קיים פולינום p ומוודא V כך ש-

$L=\{w\mid(w,c)$ קיים עד c באורך לכל היותר $p(|w|)$ כך ש-V מקבל את$\}$.

תהי מ"ט M שמכריעה את L בשטח פולינומיאלי: נניח כי העדים הם מעל הא"ב Σ'.

בהינתן w, המכונה M עוברת על כל המילים c מעל Σ' באורך לכל היותר $p(|w|)$, מריצה את V על (w,c). אם V קיבל, אזי M מקבלת. אם V לא קיבל, מוחקת את הסרט, חוזרת עם הראש הקורא לתחילת האזור של הרצת V, ועוברת לעד העוקב. אם עברנו על כל העדים האפשריים, עוצרת ודוחה.

נבחין כי הזיכרון של M הינו:

- המנגנון לשמירה על c ומעבר לעד העוקב לוקח $O(p(|w|))$ תאים.
- הרצה של V - מכיוון ש-V עובדת בזמן פולינומיאלי, גם השטח הנדרש להרצה שלה הוא פולינומיאלי.

אם כך, הראינו כי בהכרח כל שפה שניתנת להכרעה באמצעות מכונה אי דטרמיניסטית בזמן פולינומיאלי, ניתן להכרח בשטח פולינומיאל ובמכונה דטרמיניסטית.

3.4.2 ניתוח מקום של $\mathsf{EMPTY_{NFA}}$

נגדיר את השפה:

$$\mathsf{EMPTY_{NFA}} = \{\langle A\rangle \mid \text{הוא NFA ו-} L(A)=\emptyset \ A\}$$

וגם את השפה:

$$\overline{\mathsf{EMPTY_{NFA}}} = \{\langle A\rangle \mid \text{הוא NFA ו-} L(A)\neq\emptyset \ A\}$$

נבחין כי שתיהן ב-P. מדוע? $L(A)\neq\emptyset$ אם ורק אם בגרף הקונפיגרוציות של A קיים מסלול מ-Q_0 ל-F - דבר שניתן למצוא בזמן בזמן פולינומיאלי. אם כך, $\overline{\mathsf{EMPTY_{NFA}}}\in\mathsf{PTIME}$ וכיון ש-P סגורה למשלים, אזי גם $\mathsf{EMPTY_{NFA}}\in\mathsf{PTIME}$. מכך שראינו כי $\mathsf{P}\subseteq\mathsf{NP}\subseteq\mathsf{PSPACE}$, עולה כי שתי השפות ב-PSPACE.

3.4.3 ניתוח סיבוכיות מקום של $\mathsf{ALL_{NFA}}$

נגדיר את:

$$\mathsf{ALL_{NFA}} = \{\langle A\rangle \mid \text{הוא NFA ו-} L(A)=\Sigma^* \ A\}$$

וגם את השפה:

$$\overline{\mathsf{ALL_{NFA}}} = \{\langle A\rangle \mid \text{הוא NFA ו-} L(A)\neq\Sigma^* \ A\}$$

שפה זו למעשה אומרת כי יש מילה ש-A לא מקבל.

נבחין כי $L(A)=\Sigma^*$ אם ורק אם $L(\overline{A})=\emptyset$.[9]
אלגוריתם ב-EXPTIME להכרעת $\mathsf{ALL_{NFA}}$:

- בהינתן אוטומט A NFA, נבנה את $\overline{A}$ האוטומט הדטרמיניסטי (אם ל-A יש n מצבים, אזי ל-$\overline{A}$ יש 2^n מצבים). נבדוק ריקנות של $\overline{A}$. אנו יודעים כי $L(A)=\Sigma^*$ אם"ם $L(\overline{A})=\emptyset$, ולכן נענה בהתאם.

האם $\overline{\mathsf{ALL_{NFA}}}\in\mathsf{NP}$?
אם היינו יודעים את **הטענה** הבאה: "בהינתן A הינו NFA ו-$L(A)\neq\Sigma^*$, אזי יש מילה w כך ש-$w\notin L(A)$ ו-$|w|$ פולינומיאלי ב-$|A|$",
אזי היינו יודעים כי $\overline{\mathsf{ALL_{NFA}}}\in\mathsf{NP}$.
בהינתן A שהינו NFA ומילה w, ניתן לבדוק בזמן פולינומיאלי אם $w\in L(A)$. נשים לב כי $w\in L(A)$ אם"ם $L\left(\underbrace{A_w}_{w \text{ אוטומט שמקבל רק את}}\right)\cap L(A)\neq\emptyset$. את זה ניתן לעשות באמצעות בניית אוטומט מכפלה של $L(A_w\times A)$ החיתוך בין השפות בזמן פולינומיאלי, ובדיקתו האם הוא ריק.

[9] $\overline{A}$ הוא NFA כזה ש-$L(\overline{A})=\Sigma^*-L(A)$ וכיוון ש-A הוא א"ד, לא מדובר ב-$\tilde{A}$.

אבל **האמת היא שזה לא אפשרי**[10] ולכן **'הטענה' הזאת לא נכונה**.

מה שאנחנו **כן יודעים** הוא כי אם $L(A) \neq \Sigma^*$, אזי יש מילה w כך ש-$|w| \leq 2^n$(אקספוננציאלי) כזו ש-$w \notin L(A)$ ול-A יש n מצבים. למה? כי המילה w מתקבלת ב-$\overline{A}$: כלומר, יש מסלול פשוט מ-q_0 ל-F ב-$\overline{A}$, שמתקבל מהפעלת ה-SubsetConstruction, שלו יש 2^n מצבים.

על כל פנים, לא הצלחנו להראות כי $\overline{\mathsf{ALL_{NFA}}} \in \mathsf{NP}$ - ובהמשך אף נראה כי אם היינו יודעים את זה, אזי $\mathsf{NP} = \mathsf{PSPACE}$.

כעת, נראה כי $\overline{\mathsf{ALL_{NFA}}} \in \mathsf{NPSPACE}$ ובהמשך נראה כי זה מעיד גם כי $\mathsf{ALL_{NFA}} \in \mathsf{PSPACE}$.

הרצאה מס' 23:

יום שני

27.12.21

באמצעות ה-SubsetConstruction נוכל כאמור לעבור ממכונה אי דטרמיניסטית A למכונה דטרמיניסטית D, עם $2^{|Q|}$ מצבים. לאחר מכן, נוכל ליצור משלים ל-D, כלומר ליצור DFA שמקבל את $\overline{L(A)}$ ונקרא $\overline{D}$.

בהינתן A NFA, המכונה M (המ"ט האי דטרמיניסטית שמכריעה את $\overline{\mathsf{ALL_{NFA}}}$ בשטח פולינומיאלי), מחזיקה בזיכרון בכל רגע שני דברים:

1. מצב S באוטומט $\overline{D}$ ($S \subseteq Q$).
2. מונה i שסופר עד $2^{|Q|}$.

נבחין כי ב-S אנו צריכים לכל היותר $|Q|$ מספרים וב-i יש צורך ב-$\log\left(2^{|Q|}\right) = O(|Q|)$ תאים כיוון שהוא נכתב בבינארית.

אלגוריתם 7 מכונה שמכריעה את $\overline{\mathsf{ALL_{NFA}}}$ ב-NPSPACE

1. M כותבת על הסרט $S = Q_0$ ו-$i = 0$.
2. כל עוד $i \leq 2^{|Q|}$:
   (א) אם $S \cap F = \emptyset$:
      i. אזי M עוצרת ומקבלת.
   (ב) אחרת:
      i. M מנחשת אות $\sigma \in \Sigma$.
      ii. מעדכנת את S להיות $\delta(S, \sigma) = \bigcup\limits_{s \in S} \delta(s, \sigma)$.
      iii. מגדילה את i ב-1.

<u>נכונות</u>

אם $A \in \overline{\mathsf{ALL_{NFA}}}$ אזי יש ריצה של M שתנחש מילה $w \notin L(A)$, ובפרט יש מילה w כזו ש-$|w| \leq 2^{|Q|}$ ו-M תקבל את A.

אם $A \notin \overline{\mathsf{ALL_{NFA}}}$ אזי כל הריצות של M דוחות.

<u>זיכרון</u>

M כותבת על הסרט את הקבוצה S (שפולינומיאלית ב-A) ואת המונה i (שפולינומיאלי ב-A).

אם כך, גילינו כי $\overline{\mathsf{ALL_{NFA}}} \in \mathsf{NPSPACE}$, וכעת נראה את משפט סביץ', שינבע ממנו כי NPSPACE=PSPACE.

[10] הדוגמה הנגדית הובאה כהעשרה בסוף השיעור.

3.4.4 משפט סביץ'

משפט

לכל פונקציה $S(n) \geq n$ מתקיים כי $\text{NPSPACE}(S(n)) \subseteq \text{SPACE}(S^2(n))$.
כלומר, בהינתן מ"ט א"ד שעובדת בזיכרון $S(n)$, יש מ"ט דטרמיניסטית שקולה שעובדת בזיכרון $S^2(n)$.

הוכחה

תחילה, נציג מספר הנחות וסימונים לטובת ההוכחה.

סימונים והנחות

- עבור מילה w, הקונפ' ההתחלתית של M על w: C_{init}^w.
- נניח של-M יש קונפ' מקבלת יחידה שנסמנה ב-C_{acc}.

(הנחה לגיטימית, כי לכל מ"ט יש מכונה שקולה שכזו. למשל מכונה שמנקה את הסרט והולכת עם הראש הקורא שמאלה לפני המעבר ל-q_{acc})

- יהי $d \geq 1$ כך שיש ל-M לכל היותר $2^{d\cdot S(n)}$ קונפיגורציות שונות.

יש d כזה כי יש ל-M $S(n) \cdot |\Gamma|^{S(n)} \cdot |Q|$ קונפיגורציות (ואת השאר ראינו לפני כמה שיעורים).

הרעיון

M' מחפשת למעשה מסלול מ-C_{init}^w ל-C_{acc} בגרף הקונפ' של M על w.
נבנה שגרה דטרמיניסטית $\text{reach}(C_1, C_2, t)$ עבור קונפ' $C_1 \subseteq C_2$ ו-$t \geq 1$, שתענה כן אם יש אפשרות ל-M להגיע מ-C_1 ל-C_2 תוך t צעדים.
סיבוכיות הזיכרון של reach תהיה $O((\log t + S(n) \cdot \log(t)))$.
המכונה M' תריץ את $\text{reach}(C_{\text{init}}^w, C_{\text{acc}}, 2^{d\cdot S(n)})$, שהרי $\text{reach}(C_{\text{init}}^w, C_{\text{acc}}, 2^{d\cdot S(n)}) = \mathbb{T}$ אם ורק אם M מקבלת את w אם"ם יש ריצה מקבלת (באורך $2^{d\cdot S(n)}$) של M על w. מדוע זה נכון? אם M מקבלת את w, אזי יש ריצה מקבלת של M על w, ומספר הקונפ' הוא בין k ל-$2^{d\cdot S(n)}$.

סיבוכיות הזמן של reach עבור $t = 2^{d\cdot S(n)}$ הינה $O\left(\log 2^{d\cdot S(n)} + S(n)\right) \cdot \log 2^{d\cdot S(n)}$,
כלומר סך הכל $O(d \cdot S(n) + S(n)) \cdot d(S(n))$, כלומר סיבוכיות הזיכרון היא $O\left(S^2(n)\right)$.

בנייה

השגרה $\text{reach}(C_1, C_2, t)$ תעבור על כל הקונפ' c ותבדוק האם $\text{reach}\left(C, C_2, \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil\right) \wedge \text{reach}\left(C_1, C, \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil\right)$.

אלגוריתם 8 השגרה reach

---

1. אם $t = 1$:
   (א) אם $C_1 = C_2$ או שניתן להגיע מ-C_1 ל-C_2 בצעד אחד, החזר "כן".
   (ב) אחרת, החזר "לא".
2. אחרת ($t > 1$), עבור על כל הקונפיגורציות C:
   (א) בדוק $\text{reach}\left(C_1, C, \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil\right)$ ו-$\text{reach}\left(C, C_2, \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil\right)$. אם שניהם החזירו "כן" החזר כן.
3. אם עברנו על כל הקונפיגורציות, החזר "לא".

עץ הרקורסיה של reach הוא:

$$C^{w}_{\text{init}}, C_{\text{acc}}, 2^{d\cdot S(n)}$$

$$C^{w}_{\text{init}}, C, 2^{d\cdot S(n)-1} \qquad\qquad C^{w}_{\text{init}}, C, 2^{d\cdot S(n)-1}$$

- עומק הרקורסיה הוא $\log(t)$.
- השגרה שומרת בזכרון את המסלול מהשורש לקודקוד הנוכחי בעץ. בכל קודקוד צריך לשמור 2 קונפ' ומונה עד t, לכל היותר.

אם כך, בעקבות משפט סביץ' נובע PSPACE=NSPACE, ובאמצעות העובדה שמחלקות דטרמיניסטיות סגורות למשלים, נקבל כי $\overline{\text{PSAPCE}}$ שווה ל-$\overline{\text{NPSPACE}}$ (ומהפעלת סביץ' על המשלים).
כלומר:

$$\begin{array}{ccc} \text{PSPACE} & \overset{\text{savich}}{=} & \text{NPSPACE} \\ \| & & \| \\ \overline{\text{PSPACE}} & \underset{\text{savich}}{=} & \overline{\text{NPSPACE}} \end{array}$$

כל שנותר לנו הוא לדבר על שלימות ב-PSPACE.

3.4.5 שלימות ב-PSPACE

הגדרה
נאמר כי L היא PSPACE-שלימה אם:

1. $L \in \text{PSAPCE}$.
2. L היא PSPACE-קשה (לכל $L' \in \text{PSAPCE}$ $L' \leq_P L$).

נשים לב, כי חשוב שהרדוקציה בהגדרה תהיה פולינומיאלית, כי אם $L \in \text{PTIME}$ ו-$L' \leq_P L$ אזי גם $L' \in \text{PTIME}$.
אם היינו מבצעים רדוקציה רק עם זיכרון פולינומיאלי, זה לא היה מספיק.

נבחין כי כעת יש לנו את אוסף ההכלות הבאות: PTIME⊆NP⊆PSAPCE=NPSPACE⊆EXPTIME ואנו גם יודעים כי PTIME≠EXPTIME ולכן בהכרח אחת ההכלות היא הכלה ממש.[11]

הרצאה מס' 24:

יום רביעי

29.12.21

קשיות מקום ל-ALL_{NFA}
נראה כי ALL_{NFA} היא PSAPCE-קשה, כלומר כי לכל $L \in \text{PSPACE}$ מתקיים כי $L \leq_P \text{ALL}_{\text{NFA}}$.
בהינתן מ"ט M דטרמיניסטית, שעובדת בזיכרון $S(n)$ פולינומיאלי ומילה w, נבנה NFA A כך ש-$A \in \text{ALL}_{\text{NFA}}$ אם"ם M דוחה את w.

<u>הרעיון</u>

[11] השפה CONT_{NFA} שהובאה בחלק זה של השיעור, הועברה לחלק שאחרי הוכחת קשיות ALL_{NFA}.

נגדיר את A כך שיקבל מילה $x \in \Sigma^*$, אם"ם:

1. x לא מקודד חישוב חוקי של M על w (q_{reg}, γ).
2. x מקודד חישוב שמגיע ל-q_{rej} (נבדוק שהמילה מכילה אות מהסוג $\gamma \times \{q_{\text{rej}}\}$ כאשר $\gamma \in \Gamma$)

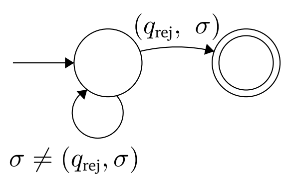
תהי $M = \langle Q, \Sigma^*, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}} \rangle$ המכונה שמכריעה את L ב-PSAPCE.
הקונפ' ההתחלתית של M על w (שמורכבת מ-$w_1, w_2, \dots, w_n$) תהיה:

$$(q_0, w_1)\, w_2 w_3, \dots w_n \sqcup \sqcup \dots \#$$

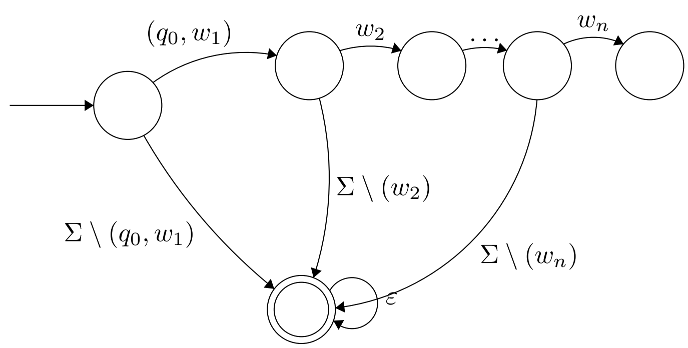
נבחין כי x **מקודד חישוב חוקי**, אם x הוא קידוד של סדרת קונפ', $c_0 c_1, \dots, c_n$, כאשר c_0 הוא הקונפ' ההתחלתית של M על w, ולכל $0 \leq j$ יתקיים כי הקונפ' c_{j+1} עוקבת ל-c_j.
<u>נכונות</u>
נשים לב כי אם M דוחה את w, אזי לכל מילה $x \in \Sigma^*$:

1. אם x היא קידוד של החישוב של M על w, אזי x מקודדת חישוב דוחה ולכן A יקבל את x ולכן $A \in \mathsf{ALL_{NFA}}$.
2. אם $A \in \mathsf{ALL_{NFA}}$ אזי A מקבלת את כל המילים $x \in \Sigma^*$ ולכן אין חישוב מקבל של M על w (כי קידוד של חישוב כזה היה נדחה על ידי A), ולכן M דוחה את w.

כל שנותר לנו כעת הוא להגדיר את האוטומט A שיעשה זאת.
<u>בנייה</u>
הגדרת ה-NFA A היא $L(A) = L(A_1) \cup L(A_2)$.
A_2 מוגדר על ידי:



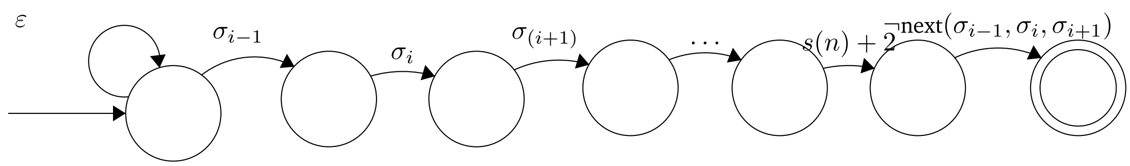
מצד שני, A_1 "מנחש הפרה":
A_1' מנחש כי x לא מתחילה בקידוד של הקונפ' ההתחלתית:



A_1'' מנחש שיש מקום שבו יש הפרה של "מתקדמים מקונפ' לקונפ' עוקבת".
אם נרצה לעשות זאת, למשל אם יהיו לנו שתי קונפ':

$$\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{i-1}\left(q\sigma_i\right)\sigma_{i+1}\ldots\sigma_{S(n)}\#$$
$$\sigma_1'\sigma_2'\ldots\sigma_{i-1}'\left(q'\sigma_i'\right)\sigma_{i+1}'\ldots\sigma_{S(n)}'\#$$

ונרצה לעבור ביניהן, אזי נצטרך לוודא שהמעברים בין הקונפ' חוקיים (כמו שעשינו בעבר עם החלונות של ה-3 על 2).
מבחינת האוטומט עצמו, עלינו לזכור בכל שלב שלוש אותיות, $S\left(n\right)$ מצבים, כלומר סך הכל יש לנו $\left|\Sigma\right|^3\cdot O\left(S\left(n\right)\right)$ מצבים והאוטומט עצמו נראה כך:



השפה $\mathsf{CONT}_{\mathsf{NFA}}$
נתבונן בשפה:

$$\mathsf{CONT}_{\mathsf{NFA}}=\left\{\left\langle A_1,A_2\right\rangle \mid \text{NFA הם } A_1,A_2 \text{-ו } L\left(A_1\right)\subseteq L\left(A_2\right)\right\}$$

קודם כל, נבחין כי $L\left(A_1\right)\subseteq L\left(A_2\right)$ אם ורק אם $L\left(A_1\right)\cap\overline{L\left(A_1\right)}=\emptyset$. אם היה מדובר ב-DFA, היינו יודעים לפתור זאת בזמן פולינומיאלי, אבל עבור NFA אנו יודעים לעשות זאת רק בזמן אקספוננציאלי או במקום פולינומיאלי. כמו כן, מתקיימת הטענה הבאה.

טענה
השפה $\mathsf{CONT}_{\mathsf{NFA}}$ היא PSPACE-קשה, ומתקיים $\mathsf{ALL}_{\mathsf{NFA}}\leq_P\mathsf{CONT}_{\mathsf{NFA}}$.
הוכחה
נוכל לעשות זאת בקלות, אם נעתיק את המכונה שממנה אנו יוצאים $A=A_1$, וניצור מכונה אחרת שמקבלת הכל A_2. אם A מקבלת את הכל, אזי $A_2\subseteq A_1$.

הרצאה מס' 25:

יום שני

03.01.22

3.5 סיבוכיות מקום תת ליניארית

3.5.1 הקדמה

בחלק זה נתעסק בשטח תת ליניארי. סיבוכיות זמן תת ליניארית לא מאוד מעניין אותנו, אבל שטח תת ליניארי כן רלוונטי, כי אנו חוסמים את שטח העבודה.
מודל החישוב שלנו יהיה כזה: תהיה לנו מכונה עם שני סרטים, האחד סרט קלט שניתן רק לקרוא ממנו (read only), ואחד סרט עבודה "קטן" שבו ניתן לכתוב ולקרוא.

הגדרה
המחלקה LOGSPACE היא אוסף כל השפות שיש מ"ט דטרמיניסטית שמכריעה את L עם סרט עבודה שמשתמש ב-$O\left(\log n\right)$ תאים על מילה באורך n.

הגדרה
המחלקה NLOGSPACE היא אוסף כל השפות שיש מ"ט אי דטרמיניסטית שמכריעה את L עם סרט עבודה שמשתמש ב-$O\left(\log n\right)$ תאים על מילה באורך n.

הקשר בין NL ו-L
ממשפט סביץ' עולה כי NL $\subseteq$ SPACE $\left(\log^2\left(n\right)\right) \neq$ L ולכן לא ניתן להסיק זאת ממנו.
השאלה L$\stackrel{?}{=}$NL היא שאלה פתוחה במדעי המחשב כיום.

דוגמא
ניקח את המחלקה $\mathsf{EQ} = \left\{0^k1^k \mid k \geq 0\right\} \in L$ - האלגוריתם שראינו (בזמן $O\left(n^2\right)$), משתמש בזיכרון ליניארי, כי כתב X-ים על הסרט.
נוכל למצוא אלגוריתם ב-LOGSPACE עבור EQ:

- המכונה תחזיק שני מונים.
- תסרוק את הקלט, תעדכן את המונה הראשון למספר ה-0-ים השני למספר ה-1-ים.
- תשווה את המונים.

כיוון שהמונים הם באונרית, אזי סיבוכיות המקום היא תת ליניארית.

דוגמא למ"ט שעובדת בשטח קבוע
<u>קלט:</u> $w \in \Sigma^*$ ו-$\Sigma = \{1, \ldots n\}$.
<u>פלט:</u> הספרה הכי גדולה שהופיעה.
אם n קבוע, המכונה צריכה תא אחד. אם n לא קבוע, המכונה צריכה $\log n$ תאים (לקודד את המספר הגדול ביותר).

3.5.2 השפה PATH

נתבונן בשפה PATH$= \{\langle G, s, t\rangle \mid$ t-ל s-גרף מכוון ויש מסלול מ $G\}$.
אנו יודעים כי PATH $\in$ P (למשל BFS או DFS), אך נרצה כעת למצוא אלגוריתם ב-NL.
המכונה זוכרת בכל רגע נתון: קודקוד נוכחי v ומונה צעדים i:

אלגוריתם 9 אלגוריתם ל-PATH ב-NL

1. אתחול: $v = s$, $i = 0$.
2. כל עוד $i < |v|$:
   (א) אם $v = t$, עוצרת ומקבלת.
   (ב) אחרת:
      i. מעדכנת את v להיות אחד העוקבים של v (באמצעות ניחוש).
      ii. מעלה את i ב-1.

סיבוכיות זיכרון

נראה כי אכן לא השתמשנו ביותר מ-$\log(n)$ תאים.

עבור v נצטרך $\log(|V|)$ תאים ועבור i נצטרך $\log(|V|)$ תאים, ולכן סך הכל נצטרך $O(\log(|V|))$.

נכונות

אם יש מסלול מ-s ל-t ב-G, אז יש מסלול פשוט, ואורכו לכל היותר $|V|$ ולכן יהיה חישוב של המכונה שיעצור.

3.5.3 מספר הקונפיגורציות

בעבר, היו תוצאות שדרשנו עבורן ש-$S(n) \geq n$, כי רצינו שיהיה קבוע d כך שמספר הקונפ' של המכונה חסום על ידי $2^{d \cdot S(n)}$.[12]

כמה קונפ' יש למכונה $S(n) = O(\log n)$?

הקונפ' כוללת: מצב + תוכן סרט העבודה + מיקום הראש הקורא והכותב+ מיקום הראש הקורא.

כלומר, כוללת מילה ב-$(\Gamma \cup (Q \times \Gamma))^{S(n)}$ + מונה של $\log(n)$ ביטים, ובסך הכל $C_1^{S(n)} + (0+1)^{\log(n)} = 2^{d \cdot S(n)} = 2^{O(n)}$.

3.5.4 רדוקציות logspace

תחילה, נגדיר מכונת טיורינג שנצטרך לטובת ההגדרה.

הגדרה

משרן בשטח לוגריתמי (logspace tranducer) היא מ"ט דטרמיניסטית עם שלושה סרטים, אחד לקריאה, אחד לכתיבה ואחד לעבודה.

על קלט w באורך n, המכונה משתמשת ב-$\log(n)$ תאים בסרט העבודה, ואת הפלט כותבת על הסרט לכתיבה.

הגדרה

נאמר כי $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ניתנת לחישוב בשטח לוגריתמי, **אם קיים משרן בשטח לוגריתמי**, שעל קלט w, עוצר עם $f(w)$ בסרט הפלט, לכל $w \in \Sigma^*$.

דוגמה

[12] במודל שבו סרט הקלט הוא RW, יש $|Q| \cdot |\Gamma|^{S(n)} \cdot S(n)$ קונפיגרוציות - המצב הנוכחי, תוכן הסרט ומיקום הראש.

f מעבירה גרף ממושקל לגרף לא ממושקל. $f(G)$ הינו G' שבו יש קשת מ-u ל-v, אם"ם $w(u,v)$ ב-G, קטן מ-10.

הגדרה

עבור $A,B\in\Sigma^*$, נאמר כי $A\leq_L B$ אם יש פונקציה f ניתנת לחישוב בשטח לוגריתמי, כך שלכל $w\in\Sigma$ מתקיים כי $w\in A\leftrightarrow f(w)\in B$.

משפט הרדוקציה ל-logspace

אם $A\leq_L B$ ו-$B\in L$ אזי $A\in L$.

הוכחה

ניסיון ראשון(שלא יעבוד)

מכונת טיורינג עם M_A עבור A תפעל כך:

בהינתן מילה w, תחשב את $f(w)$ (עבור הפונקציה f שבזכותה $A\leq_L B$) ותריץ את M_B (המכונה שמכריעה את B ב-logspace) על $f(w)$.

נקבל אכן תוצאה נכונה, אבל האם השטח לוגריתמי? אם נשתמש בשטח לוגריתמי, לא יהיה די זיכרון כדי לכתוב את $f(w)$, כי M_A שתיארנו דורשת שטח ליניארי.

ניסיון שני (שיעבוד)

המכונה M_A לא מחשבת את $f(w)$. במקום זה, כש-M_B רוצה לקרוא את האות ה-i ב-$f(w)$, מריצה את M_f (שמחשבת את f). ומריצה את M_B צעד אחד, על האות $f(w)[i]$, ולכן דבר זה דורש רק את הזיכרון של M_f+M_B, שהינו logspace.

הגדרה

נאמר כי שפה A היא שלימה ב-NL אם :

1. $A\in\mathsf{NL}$.
2. לכל שפה $B\in\mathsf{NL}$ מתקיים כי $B\leq_L A$.

הערה

מספר הקונפיגורציות של המשרן הוא $|Q|\cdot\underbrace{\overbrace{B}^{\log(n)}}_{\text{מיקום הראש הכותב}}\cdot\underbrace{\overbrace{B}^{n}}_{\text{מיקום הראש הקורא}}\cdot\underbrace{\overbrace{A}^{|\Gamma|^{\log(n)}}}_{\text{תוכן סרט העבודה}}$.

טענה

אם נדע כי A היא NL-שלימה, ו-$A\in\mathsf{L}$, אזי $\mathsf{NL}=\mathsf{L}$.

שלימות PATH

נראה כי PATH היא שלימה ב-NL, ראינו כבר כי $\mathsf{PATH}\in\mathsf{NL}$ ולכן נראה PATH היא NL-קשה, כך שלכל $B\in\mathsf{NL}$ יתקיים כי $B\leq_L\mathsf{PATH}$.

הרעיון

בהינתן מכונה B, G יהיה גרף הקונפ' של המכונה M_B בריצותיה על w (קודקודים: קונפ'. קשתות: מעבר בין קונפ' עוקבות).

s יהיה הקונפ' ההתחלתית של M_B על w. t יהיה הקונפ' המקבלת (נניח שיחידה) על M_B.

<u>נכונות</u>

$w \in B$ אם"ם יש ריצה מקבלת של M_B על w, אם"ם יש בגרף הקונפ' מסלול מהקונפ' ההתחלתית למקבלת.

<u>סיבוכיות מקום</u>

נראה כי הרדוקציה ניתנת לחישוב בשטח לוגריתמי.

ניזכר כי קונפ' של M_B מורכבת מ:

$$\Gamma^i \underbrace{(Q\times\Gamma)}_{\text{מיקום הראש הקורא}} \cdot \Gamma^{S(n)-(i+1)}\#\underbrace{(0+1)^{\log(n)}}_{\text{תאור מיקום הראש הקורא}} \in \Sigma^{O(\log(n))}$$

כלומר, הכוונה היא שהראש הקורא נמצא בקואורדינטה ה-i ולפני כן ואחריו כן יש אוסף של אותיות. לאחר מכן, כיוון שיש n מספרים, יש צורך ב-$\log(n)$ ביטים כדי לתאר את המונה.

הרדוקציה תעבור על כל המילים ב-$\Sigma^{c\log(n)}$ עבור c קבוע כלשהו, תעתיק לסרט הפלט את אלה שמתארות קונפ' (כלומר, תכתוב את קודקודי G), תכתוב בסרט הפלט זוגות של מילים ב-$\Sigma^{c\log(n)}$ שמתאימות לקונפ' עוקבות (כלומר תכתוב קשתות), ולבסוף תכתוב בפלט את הקונפ' ההתחלתית והסופית.

הערה

נשים לב שאמנם בסרט הפלט השתמשנו במקום אקספוננציאלי, אבל בסופו של דבר סיבוכיות הזיכרון נמדדת לפי **סרט העבודה**, שבו סיבוכיות המקום היא לוגריתמית.

נשים לב כי $\mathsf{PATH}\in\mathsf{PTIME}$ ומכאן ניתן להגיע למסקנה כי $\mathsf{NL}\subseteq\mathsf{PTIME}$.

הרצאה מס' 26:

יום רביעי

05.01.22

כלומר, בסיכום יתקיים כי:

$$\mathsf{L}\subseteq\mathsf{NL}\subseteq\mathsf{PTIME}\subseteq\mathsf{NP}\subseteq\mathsf{PSPACE}=\mathsf{NPSPACE}\subseteq\mathsf{EXPTIME}$$

3.5.5 שפות על גרפים ממושקלים

השפה BAR

נבדוק היכן השפה הבאה:

$$\mathsf{BAR}=\left\{\langle G,s,t,b\rangle \;\middle|\; \begin{array}{c} G \text{ גרף מכוון ממושקל עם משקולות ב-} \mathbb{N}^+ \\ s,t\in V, b\geq 0 \\ \text{יש מסלול מ-} s \text{ ל-} t \text{ במשקל } \leq b \\ \text{כל המשקולות וגם } b \text{ נתונים באונרית} \end{array}\right\}$$, כאשר.

שייכות ל-NL

נראה כי $\mathsf{BAR}\in\mathsf{NL}$:

מ"ט א"ד עבור BAR: מנחשת מסלול מ-s ל-t, שומרת בזיכרון בכל רגע: קודקוד נוכחי + סכום מצטבר של המשקולות במסלול עד כה.

המכונה מקבלת אם המסלול המנחש הגיע ל-s כשהסוכם קטן או שווה ל-b ודוחה כש-x עוקף את b.

כיוון ש-b נתון באונרית, בהכרח שמרנו סך הכל מקום לוגריתמי ב-b, ולכן $\mathsf{BAR}\in\mathsf{NL}$.

קשיות ב-NL

נראה כי BAR היא NL-קשה, באמצעות רדוקציה $\text{PATH} \leq_L \text{BAR}$ - כלומר כי $\langle G, s, t\rangle \to \langle G', s', t', b\rangle$.

<u>בנייה</u>

נעתיק את הגרף ונוסיף לכל הקשתות משקלות של 1 ונקבל $\langle G, s, t, |V|\rangle$.

<u>נכונות</u>

אם יש מסלול בגרף, יש בפרט מסלול פשוט (נוריד את כל הקשתות שיש בהם מעגל), ולכן בפרט יש מסלול באורך $|V|$ לכל היותר .

<u>סיבוכיות מקום</u>

הרדוקציה ב-logsapce כי אנו מעתיקים את G, מוסיפים את w ומוסיפים את b, וכל זה באונרית.

השפה BBR

כעת, נתבונן בשפה:

$$\text{BBR} = \left\{ \langle G, s, t, b\rangle \mid \begin{array}{c} \text{גרף מכוון ממושקל עם משקולות ב-}\mathbb{N}^+\ G \\ s, t \in V, b \geq 0 \\ \text{יש מסלול מ-}s\text{ ל-}t\text{ במשקל }\geq b \\ \text{כל המשקלות וגם }b\text{ נתונים באונרית} \end{array} \right\}.$$

שייכות ל-NL

נראה כי $\text{BBR} \in \text{NL}$.

מ"ט א"ד עבור BBR:

1. מנחשת מסלול מ-s שמשקלו מעל b, שמגיע לקודקוד v. אם אין כזה, דוחה.
2. מנחשת מסלול פשוט מ-v ל-t ומקבלת אם המסלול המנחש אכן הגיע ל-t.

המכונה שומרת בזיכרון בכל רגע: קודקוד נוכחי + סכום מצטבר של המשקולות במסלול עד כה. מכיוון שהמשקולות ב-$\mathbb{N}^+$, מובטח שתגיע לקדקוד v עם משקל $b \leq x$ (אלא אם כן, אין מסלול כזה בכלל כי b גדול ממשקל המסלול האפשרי). בשלב השני המכונה שומרת את הקדקוד הנוכחי + מונה של $|V|$ צעדים.

כיוון שכל המשקלים הם באונרית, בהכרח סיבוכיות הזיכרון תהיה $\log(|V|)$.

קשיות ב-NL

נראה כי BBR היא NL-קשה, באמצעות רדוקציה $\text{PATH} \leq_L \text{BBR}$ - כלומר כי $\langle G, s, t\rangle \to \langle G', s', t', b\rangle$.

<u>בנייה</u>

נעתיק את הגרף בהתאמה, ואת b נגדיר כך:

1. אם יש דרישה ב-BBR ש-$b \geq 1$, נוסיף קודקוד s' וקשת במשקל 1 ממנו ל-s, ונוסיף לכל הקשתות משקל 1, ונגדיר את b להיות 1.
2. אחרת, נגדיר כי $b = 0$.

<u>נכונות</u>

אם יש מסלול ב-s ל-t, אזי בפרט יהיה מסלול שמשקלו גדול מ-0, ואם הדרישה ש-$b \geq 1$, אזי אם יש מסלול, לאחר הוספת הקשת גם יהיה משקלו גדול מ-1.

השפה SBBR

כעת, נתבונן בשפה:

$$\text{SBBR} = \left\{ \langle G,s,t,b\rangle \;\middle|\; \begin{array}{c} G \text{ גרף מכוון ממושקל עם משקולות ב-} \mathbb{N}^{+} \\ s,t \in V, b \geq 0 \\ \text{יש מסלול פשוט מ-} s \text{ ל-} t \text{ במשקל } \geq b \end{array} \right\}.$$

ברור כי $\text{SBBR} \in \text{NP}$- העד הוא המסלול המבוקש.

מצד שני, נראה כי SBBR היא NP-קשה, באמצעות רדוקציה $\text{HAMPATH} \leq_P \text{SBBR}$.

<u>בנייה</u>

בהינתן $\langle G,s,t\rangle$ הרדוקציה תפלוט $\langle G',s,t,b\rangle$ כך ש-$G' \langle V,E,w\rangle$ כאשר $w(e)=1$ ו-$b=|V|-1$.

<u>נכונות</u>

יש ב-G מסלול המילטון מ-s ל-t, אם"ם יש ב-G מסלול פשוט באורך $|V|-1$, אם"ם יש ב-G' מסלול פשוט ממושקל $\leq |V|-1$.

<u>חישוב</u>

הרדוקציה פולינומיאלית כי משתמשים רק בגורמים מהקלט בצורה פולינומיאלית.

הרצאה מס' 27:

יום שני

10.01.22

3.5.6 הקשר בין NL ו-coNL

משפט אימרמן

מתקיים כי NL=coNL.

הוכחה

היינו יכולים לכאורה להוכיח זאת עם סביץ', אבל אז היינו מקבלים כי $\text{NPSPACE}(\log(n)) = \text{SPACE}(\log^2(n))$, כאשר $\text{SPACE}(\log^2(n))$ אינו ב-L.

כיוון שמדובר בשוויון בין קבוצות, עלינו להוכיח הכלה דו כיוונית, אבל נבחין כי די להוכיח כי $\text{NL}\subseteq\text{coNL}$, כיוון שאם נניח בשלילה כי $\text{coNL}\nsubseteq\text{NL}$ אזי יש $A\in\text{coNL}\setminus\text{NL}$ אבל אז $\overline{A}\in\text{NL}\setminus\text{coNL}$, בסתירה.

אם כך, נוכיח כעת כי $\text{NL}\subseteq\text{coNL}$. כלומר, נוכיח כי אם $L\in\text{NL}$ אז גם $\overline{L}\in\text{NL}$.

נתבונן בשפה הבאה:

$$\overline{\text{PATH}} = \{\langle G,s,t\rangle \mid G \text{ גרף מכוון ואין מסלול מ-} s \text{ ל-} t\}$$

ונראה כי $\overline{\text{PATH}}\in\text{NL}$.

למה

אם נוכיח כי $\overline{\text{PATH}}\in\text{NL}$ ינבע כי $\text{NL}\subseteq\text{coNL}$.

הוכחה

תהי $L\in\text{NL}$. כיוון ש-PATH היא NL-קשה, מתקיים כי לכל $A\in\text{NL}$ בהכרח $A\leq_L \text{PATH}$ ולכן בפרט $\overline{A}\leq_P\overline{\text{PATH}}$ (ראינו זאת בעבר, מדובר באותה רדוקציה). בעקבות כך, אם $\overline{\text{PATH}}\in\text{NL}$ ינבע ממשפט הרדוקציה כי $A\in\text{NL}$.

נשים לב כי אנו רוצים מ"ט א"ד שמשתמשת בשטח לוגריתמי ($\log(|G|+s+t)=\log(|G|)$, כלומר $O(\log(|G|))$ תאים) ויש לה חישוב מקבל אם אין מסלול מ-s ל-t.

<u>הרעיון</u>

נראה תחילה מ"ט שמקבלת בקלט $\langle G,s,t,c\rangle$, עבור מספר $c\in\mathbb{N}$, כך שמובטח שיש ב-G c קדקודים ישיגים מ-s ומקבלת אם אין מסלול מ-s ל-t.
אם ידוע שסך הכל יש c קודקודים ישיגים מ-s ויש c קודקודים ישיגים מ-s ששונים מ-t, אז t לא ישיג מ-s.
בהמשך נצטרך להשתכנע שאכן יש c קודקודים ישיגים מ-s, אך כעת נתבונן בשפה:

$$\overline{\mathsf{PATH_{wp}}}=\left\{\langle G,s,t,c\rangle \mid \begin{array}{c}\text{גרף מכוון ואין מסלול מ-}s\text{ ל-}t\ G\\ \text{ויש }c\text{ קדקודים ישיגים מ-}s\end{array}\right\}$$

נמצא לה מ"ט שעובדת בשטח לוגריתמי. בהינתן $\langle G,s,t,c\rangle$, מ"ט עבור $\overline{\mathsf{PATH_{wp}}}$ עובדת כך:

אלגוריתם 10 מ"ט עבור $\overline{\mathsf{PATH_{wp}}}$

---

1. מאתחלת מונה x ל-0 (שיספור את מס' הקדקודים השונים הישיגים מ-s).
2. $V=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$. לכל צומת u_i (M עוברת סדרתית על כל הקודקודים), M מנחשת האם u_i ישיג מ-s ו-$u_i\neq t$:
   (א) אם ניחשה שלא, מקיימת כי $i++$.
   (ב) אם ניחשה שכן, בודקת את הניחוש:
      i. בודקת שאכן $u_i\neq t$ ומנחשת מסלול מ-s ל-u_i (באמצעות השיטה שעשינו ב-PATH).
      ii. אם הניחוש הצליח, מבצעת $x++$ ו-$i++$.
      iii. אם $u_i=t$, אזי המכונה דוחה.
3. אם M סיימה לעבור על V, אם $x=c$, מקבלת, ואחרת דוחה.

נשים לב כי יש ל-M חישוב מקבל אם ורק אם אין מסלול מ-s ל-t.
כיצד מחשבים את c? מ"ט שכל חישוב שלה, או דוחה או עוצר עם ה-c הנכון.
<u>הרעיון</u>
לכל $1\le i\le|V|$, נגדיר את $V_i=\{u\mid$ ישיג מ-s , תוך i צעדים לכל היותר $u\}$.
נגדיר את $V_0=\{s\}$, וכן שבהכרח $V_i\subseteq V_{i+1}$, נרצה כי $|V_i|=c_i$. במצב זה, c המבוקש יהיה $|V_n|$.
השגרה (שלא נראה) ופועלת ב-nlogspace: בהינתן c_i, מחשבת את c_{i+1}, עד למציאת c_n.

ניתוח $\overline{\mathsf{ALL_{DFA}}}$
נתבונן בשפה:

$$\mathsf{ALL_{DFA}}=\left\{\langle A\rangle \mid \begin{array}{c}A\text{ הוא DFA}\\ L(A)=\Sigma^*\end{array}\right\}$$

ברור כי השפה שייכת ל-PTIME, אך האם שייכת ל-NL? יותר קל להתבונן במשלים:

$$\overline{\mathsf{ALL_{DFA}}}=\left\{\langle A\rangle \mid \begin{array}{c}A\text{ הוא DFA}\\ L(A)\neq\Sigma^*\end{array}\right\}$$

נוכל להכריע זאת ב-NL, כיון שאם $L(A) \neq \Sigma^*$, אזי $L(\overline{A}) \neq \emptyset$, כלומר יש מסלול מ-$q_0$ למצב לא מקבל.
ממשפט אימרמן עולה אם כן כי $\mathsf{ALL_{DFA}} \in \mathsf{NL}$.

ניתוח $\overline{\mathsf{INF_{DFA}}}$

נתבונן בשפה $\mathsf{INF_{DFA}} = \left\{ \langle A \rangle \mid \begin{array}{c} A \text{ הוא DFA} \\ L(A) \text{ היא אינסופית} \end{array} \right\}$. נבחין כי $L(A)$ היא אינסופית אם יש מעגל באוטומט, שישיג מ-q_0 ומעצמו, ויש מצב ב-F שישיג ממנו.
אפיון זה ניתן לבדיקה ב-NL. המכונה תנחש s, תנחש $q \in F$, ותבדוק שלוש בדיקות ישיגות.

ניתוח $\overline{\mathsf{MIN_{DFA}}}$

נתבונן בשפה $\overline{\mathsf{MIN_{DFA}}} = \{\langle A, k\rangle \mid$ יש ל-A DFA שקול עם k מצבים$\}$.
ראינו בתרגיל כי $\mathsf{MIN_{NFA}}$ היא PSPACE-שלימה באמצעות רדוקציה מ-$\mathsf{ALL_{NFA}}$.
ראינו אלגוריתם בתחילת הקורס שמצמצם אוטומט בזמן פולינומיאלי, ולכן $\mathsf{MIN_{DFA}} \in \mathsf{PTIME}$.

3.5.7 שלימות ב-PTIME

הגדרה
נאמר כי שפה A היא שלימה ב-PTIME אם :

1. $A \in \mathsf{PTIME}$.
2. לכל $B \in \mathsf{P}$ מתקיים כי $B \leq_L A$.

נשים לב כי אם A היא P-קשה, ו-$A \in \mathsf{NL}$, אזי NL=P.
אם היינו דורשים כי $B \leq_P A$ בלבד, אז כל שפה לא טרוויאלית הייתה P-קשה.

דוגמאות לשפות P-שלימות

שערוך מעגלים בוליאנים

נתבונן בשפה $\mathsf{CE} = \left\{ \langle C, x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \begin{array}{c} c \text{ מעגל עם שערי or ו-and} \\ x_1, \ldots, x_m \in \{0,1\}, C(x_1, \ldots, x_n) = 1 \end{array} \right\}$ שהיא PTIME-קשה.[13]

3.6 שאלות חזרה

לכל אחת מהטענות הבאות, סמנו אם היא נכונה, לא נכונה או שנכונותה לא ידועה. במקרה שנכונות הטענה לא ידועה, סמנו את כל הטענות מבין הטענות שכתובות.

טענה

מתקיים כי $\mathsf{PATH} \leq_P \mathsf{HAMCYCLE}$.

תשובה

הטענה נכונה. נבחין כי $\mathsf{PATH} \in \mathsf{NL}$ ולכן $\mathsf{PATH} \in \mathsf{P}$.
בהינתן $\langle G, s, t\rangle$, הרדוקציה תבדוק האם $\langle G, s, t\rangle \in \mathsf{PATH}$(ניתן לבדיקה בזמן פולינומיאלי).
אם כן, תחזיר מופע חיובי של מעגל המילטון, אחרת, תחזור מופע שלילי של מעגל המילטון.

[13] הזכרנו כהערה את ישיגות מתחלפת בגרף, אך לא הוכחנו.

טענה

מתקיים כי $\mathsf{TQBF} \in \mathsf{P}$.

תשובה

נכונות הטענה לא ידועה, ואם היא נכונה תגרור את $\mathsf{P}{=}\mathsf{NP}$ וגם את $\mathsf{NP}{=}\mathsf{coNP}$ וגם את $\mathsf{P}{=}\mathsf{PSPACE}$.

מדוע? TQBF היא PSPACE-שלימה, ולכן כיוון שמתקיים כי $\mathsf{P}{\subseteq}\mathsf{NP}{\subseteq}\mathsf{PSPACE}$

וגם מתקיים כי $\mathsf{P}{\subseteq}\mathsf{coNP}{\subseteq}\mathsf{PSPACE}$, יתקיימו כל הטענות מלמעלה.

טענה

מתקיים כי $\mathsf{CLIQUE}{\leq_P}\mathsf{PATH}$.

תשובה

נכונות הטענה לא ידועה, ואם היא נכונה היא תגרור כי $\mathsf{P}{=}\mathsf{NP}$ וגם את $\mathsf{NP}{=}\mathsf{coNP}$.

נבחין כי CLIQUE היא שפה NP-שלימה ומצד שני $\mathsf{PATH} \in \mathsf{NL}$ וממילא $\mathsf{PATH} \in \mathsf{P}$.

נבחין כי הרדוקציה פולינומיאלית ולכן דבר זה יגרור כי $\mathsf{P}{=}\mathsf{NP}$ ולא כי $\mathsf{NL}{=}\mathsf{NP}$.

ממילא אם $\mathsf{P}{=}\mathsf{NP}$ אז $\mathsf{NP}{=}\mathsf{coNP}$.

חלק II

תרגולים

1 מודלים חישוביים

תרגול מס' 1:

יום שני

11.10.21

(בדר)

1.1 חזרה על תורת הקבוצות

1. קבוצה היא אוסף של איברים, כך שלכל איבר x וקבוצה A מתקיים כי $x \in A$ או $x \notin A$ אך לא שניהם.

2. פעולות על קבוצות:

   - **האיחוד** הוא כל האיברים שנמצאים ב-A או ב-B:
     $A \cup B = \{x : x \in A \quad \vee \quad x \in B\}$
   - **החיתוך** הוא כל האיברים שנמצאים ב-A וגם ב-B.
     $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.
   - **המשלים** $\overline{A}$ הוא קבוצת כל האיברים שלא נמצאים ב-A.
   - **ההפרש** $A \setminus B$ הוא קבוצת כל האיברים שנמצאים ב-A ולא ב-B:
     $A \setminus B = \{x : \; x \in A \wedge x \notin B\}$.
   - **הכלה** $A \subseteq B$: נאמר כי A מוכלת ב-B אם:
     $\forall x \;\; x \in A \Rightarrow x \in B$.
   - **שוויון**: נאמר כי A שווה ל-B אם"ם:
     $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

3. קבוצת **החזקה** מוגדרת על ידי $2^A = P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$.

4. המכפלה הקרטזית $A \times B$ היא קבוצות כל הזוגים הסדורים מ-A ו-B:
   $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$
   דוגמה: $\{1, 2\} \times \{a, b, c\} = \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b), (1, c), (2, c)\}$
   אנו מרשים גם מכפלה קרטזית ארוכה, כך שכל אחד מהאלמנטים הוא סדרה בפני עצמו. למשל:
   $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : \forall i, a_i \in A_i\}$.

5. יחס מעל קבוצה A הוא תת הקבוצה $R \subseteq A \times A$.

   - R הוא רפלקסיבי, אם $\forall a \in A, (a, a) \in R$.
   - R הוא סימטרי, אם $\forall a, b \in A$ מתקיים כי $(a, b) \in R \to (b, a) \in R$.
   - R הוא טרנזיטיבי, אם $(a, b) \in R, \; \wedge (b, c) \in R \to (a, c) \in R$.
     דוגמה: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ו-$R = \{(a, b) \in A \times A : |a - b| \leq 1\}$ -
     רפלקסיבי, סימטרי, אך לא טרנזיטיבי ($(1, 2) \in R, (2, 3) \in R, (1, 3) \notin R$)

6. **העוצמה** של קבוצה, היא **המדד** של כמה איברים יש בקבוצה.
   אם מדובר בקבוצה אינסופית, נאמר כי קבוצות שוות בעוצמתם, אם קיימת פונקציה חח"ע ועל ביניהם.
   נאמר כי $|A| < |B|$ אם קיימת פונקציה כנ"ל ואין פונקציה על.

הערה

העוצמה של $\mathbb{N}$ הינה $\aleph_0$, והיא שווה גם לעוצמת $\mathbb{Q}$ ו-$\mathbb{Z}$. כלומר, קיימת העתקה חח"ע ועל בין הטבעיים ובין הרציונליים.

מאידך, $\left|2^{\mathbb{N}}\right| = 2^{\aleph_0} = |[0,1]|$ - כלומר, יש העתקה חח"ע מ-$\mathbb{N}$ ל-$2^{\mathbb{N}}$ אבל אין העתקה על ביניהם.

1.2 מבוא לשפות

1.2.1 הגדרות ופעולות

תזכורת להגדרות:

1. **אלפבית** (א"ב) הוא קבוצה סופית ולא ריקה של אותיות $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$.
   דוגמה: $\Sigma = \{a, b\}$.
   לכל $n \geq 1$ נתבונן ב-Σ^n.
   נגדיר את Σ^0 בתור כל המילים באורך 0, דהיינו המילה הריקה $Z^0 = \{\varepsilon\}$.
   נגדיר את Σ^* בתור אוסף כל המילים הסופיות מעל Σ, כלומר $\Sigma^\star = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \Sigma^n$.
   דוגמה: למשל $\Sigma^2 = \{(a,b), (b,a,), (b,b), (b,a)\}$
2. **מילה** היא סדרה סופית של אותיות, המילה הריקה תסומן בתור ε.
   כיוון ש-Σ^* מכילה את כל המילים בעלות אורך סופי, היא סגורה לשרשור.
   דוגמה: $abb \cdot bab = abbbab$.
3. **שפה** מעל א"ב Σ היא קבוצה $L \subseteq \Sigma^*$.
   דוגמאות:
   - $L_1 = \{\varepsilon, a, aa, b\}$.
   - $L_2 = \{w \mid a \text{ מתחילה עם } w\}$.
   - $L_3 = \{\varepsilon\}$.
   - $L_4 = \emptyset$.
   - $L_5 = \{w \mid |w| < 24\}$.
4. ניתן לבצע על שפות כל פעולה שאפשר לבצע על קבוצות וגם **שרשור**, שמוגדר על ידי:
   $L_1 \cdot L_2 = \{w_1 \cdot w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$.
   דוגמה: $L = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$
   $\overline{L} = \left\{x = x_1, \ldots x_m \mid x_1 \cdots x_{n/2} \neq x_{n/2+1} \cdots x_n \text{ וגם } n\text{-זוגי או ש} n \text{ אי}\right\}$.
   $L \cdot \overline{L} = \{wwxx \mid w \in \Sigma^*, x \in \Sigma^*\}$.

עוצמות ושפות

אם נחזור לרגע לעוצמות וקבוצות, נוכל לשאול: "כמה מילים יש ב-Σ^*?"
התשובה לכך היא $\aleph_0$ וניתן להראות זאת באמצעות סידור המילים לפי האורך ובסדר לקסיקוגרפי.
נוכל גם לשאול "כמה שפות יש?" ונקבל: $\left|2^{\Sigma^*}\right| = \left|2^{\mathbb{N}}\right| = 2^{\aleph_0}$.
אם כך, כיוון ש-$2^{\aleph_0} > \aleph_0$, עולה כי יש יותר שפות מעל Σ מאשר מילים מעל Σ, כלומר, אין ההעתקה חח"ע ועל בין מספר השפות למספר המילים.

האם כל השפות הן רגולריות?

כפי שאנחנו יכולים לשער, התשובה היא לא. הסיבה לכך היא שיש $2^{\aleph_0}$ שפות, ורק $\aleph_0$ שפות רגולריות.
כלומר, כיוון שכל DFA ניתן לייצוג באמצעות מספר בינארי סופי, יש בסך הכל מספר בן מנייה של שפות.
אמנם, זו אינה הוכחה קונסטרוקטיבית, ובהמשך נראה כיצד אפשר להראות ששפות מסוימות **אינן רגולריות**.

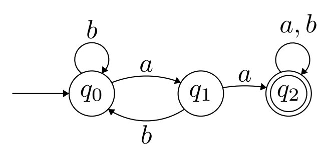
1.2.2 הפונקציה δ^*

נתבונן באוטומט כלשהו, ונניח כי כעת האוטומט $\mathcal{A}$ הוא במצב q, והאות שנקרא כעת תהיה σ. המצב הבא ניתן לתיאור באמצעות הפונקציה שראינו, $\delta : Q \times \Sigma \to Q$, ויהיה למעשה $\delta\left(q, \sigma\right)$.
על מנת להרחיב את אוצר הכלים שלנו ולאפשר התייחסות רקרוסיבית לקריאת מספר אותיות, נגדיר כעת פונקציה חדשה, ש'מחברת' בין מצבים ומילים.

הגדרה
יהי $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$. נגדיר את **פונקציית המעברים המוכללת** δ^* להיות:

$$\delta^*\left(q, w\right) = \begin{cases} q & w = \varepsilon \\ \delta\left(\delta^*\left(q, w'\right), \sigma\right) & w = w' \cdot \sigma,\ w' \in \Sigma^*, \sigma \in \Sigma \end{cases}$$

דוגמה
נתבונן באוטומט $\mathcal{A}$ הבא:



נניח כי אנחנו נמצאים ב-q_1 ונרצה לקרוא את המילה ba. לפי ההגדרה לעיל, נקבל:

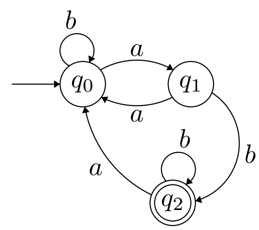
$$\delta^*\left(q_1, ba\right) = \delta\left(\delta^*\left(q_1, b\right), a\right) = \delta\left(\delta\left(\delta^*\left(q_1, \epsilon\right), b\right), a\right) = \delta\left(\delta\left(q_1, b\right), a\right) = \delta\left(q_0, a\right) = q_1$$

אבחנה

בהינתן Q ו-Σ, לא כל פונקציה $Q \times \Sigma^* \to Q$ היא פונקציה δ^* של DFA כלשהו. עלינו קודם כל להגדיר את ה-δ שלו, ורק לאחר מכן נקבל את ה-δ^* שנגזרת ממנו באופן ישיר.
אם נבחר את δ^* באופן ישיר מההגדרה, עלולה להתקבל הגדרה לא תקינה.

1.2.3 הוכחת שפה של אוטומט

בכיתה הראינו מספר DFA-ים והצבענו על השפה שלהם, אך לא הוכחנו זאת פורמלית. בחלק זה נראה, באופן חד פעמי, כיצד יש להוכיח זאת פורמלית, ומכאן והלאה ניתן יהיה להשתמש בהסבר בלבד.
נתבונן באוטומט $\mathcal{A}$ מעל $\Sigma = \{a, b\}$, כך שהשפה מורכבת ממילים בעלות מספר אי זוגי של a, שמסתיימות ב-b.
דהיינו, פורמלית: $\mathcal{A} = \langle \{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_2\} \rangle$, ובציור:



לפני שניגש להוכחה הפורמלית, ננסה לזהות מספר מצבים בצורה אינטואיטיבית, כך למשל, אם נקרא a מ-q_0, נלך למצב אחר, ואם נקרא a ממצב אחר, נחזור ל-q_0. כך נוכל 'לספור' את מספר האותיות, ולזכור אותם לפי המצבים.

טרמינלוגיה

עבור $w \in \Sigma^*$ ואות $\sigma \in \Sigma$, נסמן את מספר ההופעות של σ ב-w בתור $\#_\sigma(w)$.

טענה

לכל $w \in \Sigma^*$, מתקיים:

1. $\delta^*(q_0, w) = q_0$ אם"ם $\#_a(w)$ הוא זוגי.
2. $\delta^*(q_0, w) = q_1$ אם"ם $\#_a(w)$ הוא אי זוגי ו-w מסתיים ב-a.
3. $\delta^*(q_0, w) = q_2$ אם"ם $\#_a(w)$ הוא אי זוגי ו-w מסתיים ב-b.

הוכחה

נוכיח זאת באינדוקציה על $|w|$.

<u>בסיס האינדוקציה, עבור $|w| = 0$:</u>
$\delta^*(q_0, w) = \delta^*(q_0, \varepsilon) = q_0$, ואכן $\#_a(w) = 0$, כלומר זוגי.

<u>צעד האינדוקציה:</u>

נניח כי $|w| > 0$ ולכן w יכול להיכתב בתור $w = u\sigma$ כאשר $u \in \Sigma^*$ ו-$w \in \Sigma$.
נניח באינדוקציה מלאה כי הטענה נכונה לכל $|u| < |w|$ ונוכיח עבור $|w|$.
נחלק למקרים:

- אם $\sigma = a$:

1. $\delta^*(q_0, w) = q_0 \Leftrightarrow \delta^*(q_0, ua) = q_0 \Leftrightarrow \delta(\delta^*(q_0, u), a) = q_0 \Leftrightarrow \delta^*(q_0, u) \in \{q_1, q_2\}$.
מצעד האינדוקציה, עולה כי $\#_a(u)$ הוא אי זוגי. בתוספת a, נקבל כי $\#_a(ua)$ הוא זוגי.
2. $\delta^*(q_0, w) = q_1 \Leftrightarrow \delta^*(q_0, ua) = q_1 \Leftrightarrow \delta(\delta^*(q_0, u), a) = q_1 \Leftrightarrow \delta^*(q_0, u) = q_0$.
מצעד האינדוקציה, עולה כי $\#_a(u)$ הוא זוגי. בתוספת a, נקבל כי $\#_a(ua)$ הוא אי זוגי ו-w מסתיימת ב-a.
3. $\delta^*(q_0, w) = q_2 \Leftrightarrow \delta^*(q_0, ua) = q_2 \Leftrightarrow \delta(\delta^*(q_0, u), a) = q_2 \Leftrightarrow \delta^*(q_0, u) = q_2$.
כיוון של-q_2 אין מעברים נכנסים עם a, אין אפשרות לכך.

- אם $\sigma = b$:

1. $\delta^*(q_0, w) = q_0 \Leftrightarrow \delta^*(q_0, ub) = q_0 \Leftrightarrow \delta(\delta^*(q_0, u), b) = q_0 \Leftrightarrow \delta^*(q_0, u) = q_0$.
מצעד האינדוקציה, עולה כי $\#_a(u)$ הוא אי זוגי. נקבל כי $\#_a(ua)$ הוא אי זוגי.
2. $\delta^*(q_0, w) = q_0 \Leftrightarrow \delta^*(q_0, ub) = q_0 \Leftrightarrow \delta(\delta^*(q_0, u), b) = q_1$.
כיוון של-q_1 אין מצבים נכנסים עם b, אין אפשרות לכך.
3. $\delta^*(q_0, w) = q_2 \Leftrightarrow \delta^*(q_0, ub) = q_2 \Leftrightarrow \delta(\delta^*(q_0, u), b) = q_2 \Leftrightarrow \delta^*(q_0, u) \in \{q_1, q_2\}$
מצעד האינדוקציה, עולה כי $\#_a(u)$ הוא זוגי. נקבל כי $\#_a(ua)$ הוא אי זוגי ו-w מסתיימת ב-b.

אם כך, באמצעות הנחת האינדוקציה והצעד, הראינו כי הטענה נכונה לכל $|w|$.

1.3 אוטומטים לא דטרמיניסטיים (NFA)

תרגול מס' 2:

יום שני

18.10.21

(בדר)

תחילה, נזכיר את ההגדרה שראינו בכיתה:

הגדרה
אוטומט סופי לא דטרמיניסטי (NFA) הוא חמישיה $A = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F\rangle$ כאשר:

- Q קבוצה סופית של **מצבים**.
- Σ הוא **א"ב**.
- $Q_0 \subseteq Q$ קבוצה סופית של **מצבים התחלתיים**.
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^Q$ **פונקציית מעברים**.
- $F \subseteq Q$ קבוצת **מצבים מקבלים**.

ראינו בהרצאה כי קיימים NFA עם מעברי ε, שאותו אפשר לסמן בתור ε-NFA, כך שניתן לקפוץ בין מצבים.
ניתן לתרגם ε-NFA ל-NFA רגיל, ונוכיח זאת כעת, פורמלית.

טענה

כל ε-NFA ניתן להמרה ל-NFA.

הוכחה

לכל מצב $q \in Q$ נגדיר את:

$$E(q) = \{q' \in Q \mid \text{ישיג מ-} q \text{ בשימוש רק במעברי } \varepsilon \ q'\}$$

כעת, נוכל להגדיר את $\mathcal{B}$ NFA:

$$\mathcal{B} = \left\langle Q, \Sigma, \eta, \bigcup_{q \in Q_0} E(q), F \right\rangle$$

כאשר $\eta(q, \sigma) = \bigcup_{s \in \delta(q,\sigma)} E(s)$ לכל $q \in Q$ ו-$\sigma \in \Sigma$.

בתרגיל בית נוכיח כי $L(\mathcal{B}) = L(\mathcal{A})$. מעבר לכך, ניתן בזמן פולינומיאלי לחשב את $\mathcal{B}$ בהינתן האוטומט $\mathcal{A}$.

1.3.1 תכונות סגור בשימוש ב-NFA

ראינו בשיעור כי שפות רגולריות סגורות לאיחוד. כעת נראה דרך נוספת, קלה יותר, שמשתמשת ב-NFA.

טענה

לכל שתי שפות רגולריות, L_1, L_2 מעל Σ מתקיים כי $L_1 \cup L_2$ רגולרית.

הוכחה

יהיו $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, אזי:

$$L_1 \cup L_2 = \{x \mid x \in L_1 \vee x \in L_2\}$$

אנחנו רוצים להראות כי קיים NFA שמזהה את $L_1 \cup L_2$.

יהיו $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, q_0, \delta, F\rangle$ ו-$\mathcal{B} = \langle S, \Sigma, s_0, \eta, G\rangle$ אוטומטים תואמים, כך ש-$L(\mathcal{A}) = L_1$ ו-$L(\mathcal{B}) = L_2$. נניח בה"כ כי $S \cap Q = \emptyset$.

נגדיר כעת NFA חדש שיסומן בתור $\mathcal{C}$ ויוגדר על ידי $\mathcal{C} = \langle Q \cup S, \Sigma, \{q_0, s_0\}, \alpha, F \cup G\rangle$, כאשר α הינו:

$$\alpha(q,\sigma) = \begin{cases} \{\delta(q,\sigma)\} & \text{if } q \in Q \\ \{\eta(q,\sigma)\} & \text{if } q \in S \end{cases}$$

על מנת להראות כי $L_1 \cup L_2 = L(\mathcal{C})$, נשתמש בהכלה דו כיוונית.

<u>בכיוון הראשון $\Leftarrow$, נראה כי $L_1 \cup L_2 \subseteq L(\mathcal{C})$:</u>

יהי $x = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \ldots \cdot \sigma_m \in L_1 \cup L_2$ כך שלכל $i \in [m]$ יתקיים כי $\sigma_i \in \Sigma$.

דהיינו, x היא מילה מאורך m ששייכת ל-$L_1 \cup L_2$, כלומר, x שייכת ל-L_1 או x שייכת ל-L_2. נניח, בלי הגבלת הכלליות, כי $x \in L_1$.

נתבונן בריצה של $\mathcal{A}$ על x, שאנו יודעים שהיא ריצה מקבלת. כלומר:

- קיימת סדרת מצבים $r = r_0, r_1, \ldots, r_m$ כך ש-$r_0 = q_0$ ו-$r_m \in F$.
- לכל $0 \leq i < m$ יתקיים כי $\delta\left(r_i, \sigma_{i+1}\right) = r_{i+1}$.

כעת, אנו יודעים כי $r_0 = q_0 \in \{q_0, s_0\}$ וכמו כן $r_m \in F \subseteq F \cup G$ ולכן r היא ריצה מקבלת של $\mathcal{C}$ על x (=הן המצב ההתחלתי, הן המצב המקבל, והן שאר המצבים נמצאים ב-$\mathcal{C}$ ולכן מדובר בריצה מקבלת גם ב-$\mathcal{C}$).

<u>בכיוון השני $\Rightarrow$, נראה כי $L\left(\mathcal{C}\right) \subseteq L_1 \cup L_2$</u>:
יהי $y = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \ldots \cdot \sigma_m \in L\left(\mathcal{C}\right)$ באורך m. אזי יש ריצה מקבלת r כלשהי של $\mathcal{C}$ על y.
כלומר, $r_0 \in \{q_0, s_0\}, r_1, \ldots, r_m \in Q \cup S,\ r_m \in F \cup G$ וגם $r_{i+1} \in \alpha\left(r_i, \sigma_{i+1}\right)$ לכל $0 \leq i < m$.
מההגדרה של $\mathcal{C}$, r_m שייכת ל-F או ל-G. לכן נניח בה"כ כי $r_m \in F$. כמו כן, מההגדרה של α מתקיים כי $Q \cap S = \emptyset$, ולכן $r_m \in F \setminus G$.
מכיוון ש-$\mathcal{C}$ משמר את המעברים של $\mathcal{A}$, כל המעברים האלו נמצאים ב-A ולכן נקבל כי $r_{m-1} \in Q$ וגם $\delta\left(r_{m-1}, \sigma_m\right) = r_m$.
מכאן ניתן להראות באינדוקציה כי $r_0 = q_0$ וכל המעברים בריצה r קיימים גם ב-$\mathcal{A}$.
אם כך, מדובר בריצה מקבלת של $\mathcal{A}$ על y, כלומר $y \in L_1 \subseteq L_1 \cup L_2$.

טענה
לכל שתי שפות רגולריות L_1, L_2 מעל Σ מתקיים כי $L_1 \cdot L_2$ רגולרית.
הוכחה
יהיו $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ שפות רגולריות. נתבונן ב-DFA-ים המתאימים להם:

$$\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, q_0, \delta, F\rangle$$
$$\mathcal{B} = \langle S, \Sigma, s_0, \eta, G\rangle$$

נתבונן ב-$L_1 \cdot L_2$ בתור:

$$L_1 \cdot L_2 = \{w = \sigma_1 \cdots \sigma_n : \exists 1 \leq k \leq n, \sigma_1 \cdots \sigma_k \in L_1, \wedge, \sigma_{k+1} \cdots \sigma_n \in L_2\}$$

נגדיר כעת את ה-NFA המתאים שהינו $\mathcal{C} = \langle Q \cup S, \Sigma, \{q_0\}, \alpha, G\rangle$, כאשר α מוגדר על ידי:

$$\alpha\left(q, \sigma\right) = \begin{cases} \{\delta\left(q, \sigma\right)\} & q \in Q \\ \{\eta\left(q, \sigma\right)\} & q \in S \end{cases}$$

בנוסף, לכל $q \in F$ נקבל כי $\alpha\left(q, \varepsilon\right) = \{s_0\}$ ולכל $q \in \left(Q \cup S\right) \setminus F$ נקבל כי $\alpha\left(q, \varepsilon\right) = \emptyset$.
נרצה כעת להוכיח כי $L\left(\mathcal{C}\right) = L_1 \cdot L_2$.

<u>בכיוון הראשון, $\Leftarrow$ נראה כי $L_1 \cdot L_2 \subseteq L\left(\mathcal{C}\right)$</u>:
תהי $w \in L_1 \cdot L_2$ ויהיו $u \in L_1$ ו-$v \in L_2$ כך ש-$w = u \cdot v$.

נתבונן בריצות של $\mathcal{A}$ ו-$\mathcal{B}$ על u ו-v בהתאמה. נסמן את הריצה של $\mathcal{A}$ על u ב-$r = a_0, a_1, \ldots, a_{|u|}$ ואת הריצה של $\mathcal{B}$ על v בתור $p = b_0, b_1, \ldots, b_{|v|}$. בהכרח מתקיים כי $a_{|u|} \in F$ ו-$b_{|v|} \in G$.
כעת, נחבר את שתי הריצות r ו-p ונוסיף ריצת ε ביניהן, ונקבל $a_0, a_1, \ldots, a_{|u|}, \varepsilon, b_0, b_1, \ldots, b_{|v|}$.
כיוון ש-$\mathcal{C}$ משמר את המעברים של $\mathcal{A}$ו-$\mathcal{B}$, נקבל כי הריצות r ו-p קיימות ב-$\mathcal{C}$. בנוסף, מכיוון ש-$a_{|u|} \in F$, יש מעבר ε מ-$a_{|u|}$ ל-b_0, שמסתיימת במצב ב-G, נקבל שהיא ריצה מקבלת של $\mathcal{C}$ על $u \cdot v$.

<u>בכיוון השני, $\Rightarrow$ נראה כי $L(\mathcal{C}) \subseteq L_1 \cdot L_2$:</u>
תהי $u \in L(\mathcal{C})$ ותהי $r_0, r_1, \ldots, r_m$ ריצה מקבלת של $\mathcal{C}$ על w.
אנו יודעים כי $r_m \in G$ וגם $q_0 = r_0$, ולכן כיוון שבה"כ $Q \cap S = \emptyset$, בהכרח קיים $0 \leq k \leq m-1$ כך ש-$\{r_0, \ldots r_k\} \subseteq Q$ וגם $\{r_{k+1}, \ldots, r_m\} \subseteq S$ ו-$r_k \to r_{k+1}$ הוא המעבר ε היחיד בריצה r. כלומר, בהכרח $r_k \in F$ וגם $r_{k+1} = s_0$. מכיוון ש-$\mathcal{C}$ משמר מעברים של $\mathcal{A}$ ו-$\mathcal{B}$, נקבל כי $r_0, r_1, \ldots, r_k$ היא ריצה מקבלת של $\mathcal{A}$ על $w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots w_k$ ו$r_{k+1}, \ldots, r_m$ היא ריצה מקבלת של $\mathcal{B}$ על $w_{k+1}, \ldots, w_{m-1}$.
סך הכל $w = w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}$ היא ריצה מקבלת של $L_1 \cdot L_2$, כנדרש.

טענה
אם L רגולרית, אזי L^* רגורלרית.
הוכחה
בתרגיל נראה את ההוכחה המלאה, כאן נראה רק את הבנייה עצמה.
נבנה $\mathcal{A}' = \langle \Sigma, Q \cup \{q_{\text{start}}\}, \delta', \{q_{\text{start}}\}, \{q_{\text{start}}\} \rangle$ כך ש-q_{start} הוא מצב חדש, כך שלכל $q \in Q \cup \{q_{\text{start}}\}$ יתקיים:

$$\delta'(q, \sigma) = \begin{cases} \{\delta(q, \sigma)\} & \text{if } q \in Q \\ \emptyset & \text{if } q = q_{\text{start}} \end{cases}$$

וגם נגדיר:

$$\delta'(q, \epsilon) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } q \in Q \backslash F \\ \{q_{\text{start}}\} & \text{if } q \in F \\ \{q_0\} & \text{if } q = q_{\text{start}} \end{cases}$$

תרגול מס' 3:

יום שני

25.10.21

(בדר)

1.4 ביטויים רגולריים

עד כה דיברנו על אוטומטים, אבל כיצד מחשבים יכולים לחשב זאת? ראינו בהרצאה שיש דרך נוחה יותר לתאר שפות רגולריות, באמצעות ביטויים רגולריים.

תזכורת להגדרות

בהינתן א"ב Σ, ביטוי רגולרי מוגדר רקורסיבית:

- $a\in\Sigma$, ε ו-$\emptyset$ הם ביטויים רגולריים.
- אם r_1 ו-r_2 ביטויים רגולריים כך גם:
  - $r_1\cup r_2$ ביטוי רגולרי.
  - $r_1\cdot r_2$ ביטוי רגולרי.
  - r_1^* ביטוי רגולרי.

כל ביטוי רגולרי r, מגדיר את השפה $L\left(r\right)$:

- $L\left(\emptyset\right)=\emptyset$, $L\left(\varepsilon\right)=\left\{ \varepsilon\right\}$, $L\left(a\right)=\left\{ a\right\}$.
- $L\left(r_1+r_2\right)=L\left(r_1\right)\cup L\left(r_2\right)$.
- $L\left(r_1\cdot r_2\right)=L\left(r_1\right)\cdot L\left(r_2\right)$.
- $L\left(r_1^*\right)=\left(L\left(r_1\right)\right)^*$.

דוגמא

ניקח את $r=a^*\cdot\left(a\cup b\right)$, ואז נקבל כי:

$$\begin{aligned}L\left(a^*\cdot\left(a\cup b\right)\right)=L\left(a^*\right)\cdot L\left(a\cup b\right)=L\left(a\right)^*\cdot\left(L\left(a\right)\cup L\left(b\right)\right)=\\ \left\{ a\right\}^*\cdot\left(\left\{ a\right\}\cup\left\{ b\right\}\right)=\left\{ a^*\right\}\cdot\Sigma=\left\{ a^k\mid k\geq0\right\}\cdot\Sigma\end{aligned}$$

משפט

L היא רגולרית אם ורק אם קיים ביטוי רגולרי r כך ש-$L\left(r\right)=L$.

הוכחה

נתחיל מהכיוון הפשוט בו קודם כל נראה כי לכל ביטוי רגולרי יש אוטומט שקול, כך שכל שפה שמוגדרת על ידי הביטוי הרגולרי, היא רגולרית.

למה

לכל ביטוי רגולרי r, קיים NFA שנסמנו $\mathcal{A}_r$, כך ש-$L\left(r\right)=L\left(\mathcal{A}_r\right)$.

הוכחה

נוכיח זאת באינדוקציה על מבנה הביטוי r:

<u>בסיס האינדוקציה</u>

- אם $r=\emptyset$, אזי $\mathcal{A}_r$ יהיה ה-NFA שמקבל את השפה הריקה.
- אם $r=\varepsilon$, אזי $\mathcal{A}_r$ יהיה ה-NFA שמקבל את $\{\varepsilon\}$.
- אם $r=a\in\Sigma$, אזי $\mathcal{A}_r$ יהיה ה-NFA שמקבל את $\{a\}$.

<u>צעד האינדוקציה</u>

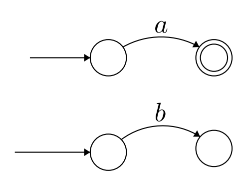
נניח כי הטענה נכונה לכל ביטוי שקטן מ-$|r|$:

- אם $r=s\cup t$, אזי $\mathcal{A}_r$ יהיה ה-NFA שמקבל את $L\left(\mathcal{A}_s\right)\cup L\left(\mathcal{A}_t\right)$.
  מסגירות שפות רגולריות תחת איחוד, בהכרח קיים NFA שמקיים
  $L\left(\mathcal{A}_r\right)=L\left(\mathcal{A}_s\right)\cup L\left(\mathcal{A}_t\right)=L\left(s\right)\cup L\left(t\right)=L\left(s\cup t\right)=L\left(r\right)$.
- אם $r=s\cdot t$, אזי $\mathcal{A}_r$ יהיה ה-NFA שמקבל את $L\left(\mathcal{A}_s\right)\cdot L\left(\mathcal{A}_t\right)$.
  מסגירות שפות רגולריות תחת שרשור, בהכרח קיים NFA שמקיים
  $L\left(\mathcal{A}_r\right)=L\left(\mathcal{A}_s\right)\cdot L\left(\mathcal{A}_t\right)=L\left(s\right)\cdot L\left(t\right)=L\left(s\cdot t\right)=L\left(r\right)$.
- אם $r=s^*$, עלינו לבנות NFA עבור $L\left(\mathcal{A}_s\right)^*$. נבנה זאת בתרגיל.

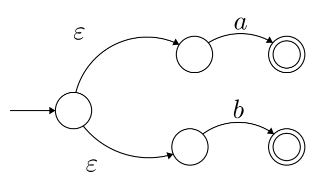
דוגמה לכיוון הראשון

ניקח את הא"ב $\Sigma=\{a,b\}$ ואת הביטוי הרגולרי $r=((a\cup b)\cdot b)^*$. נראה זאת בשלבים:

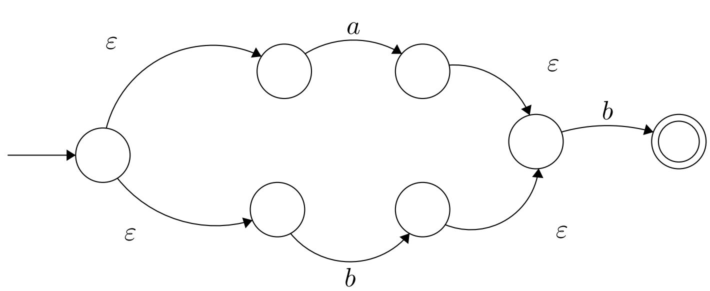
שלב I: a,b.



שלב II: $a\cup b$.



שלב III: $(a\cup b)\cdot b$



הגדרה

נאמר כי NFA הוא NFA מוכלל, או GNFA, אם על הצלעות מופיעים ביטויים רגולריים במקום אותיות.

נניח כי בה"כ, לכל GNFA מתקיים כי:

1. יש מצב התחלתי יחיד, שאין קשתות שנכנסות אליו.
2. יש מצב מקבל יחיד שאין קשתות שיוצאות ממנו.

למה

לכל DFA $\mathcal{A}$ קיים ביטוי רגולרי r כך ש-$L(\mathcal{A}) = L(r)$.

הוכחה

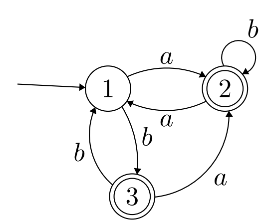
נדגים רק את רעיון ההוכחה[14].

הרעיון הוא להשתמש באלגוריתם שמקבל אלגוריתם סופי לא דטרמיניסטי ומחזיר ביטוי רגולרי.

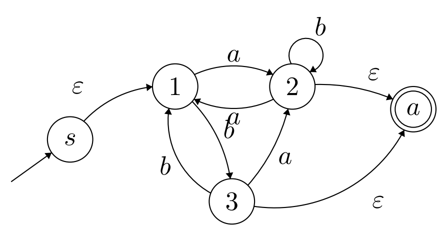
באלגוריתם, ניקח קשתות באוטומט ונחליף אותם למסלול ארוך יותר, שמוותר על כל המצבים באמצע.

נדגים את הביצוע באמצעות דוגמה:

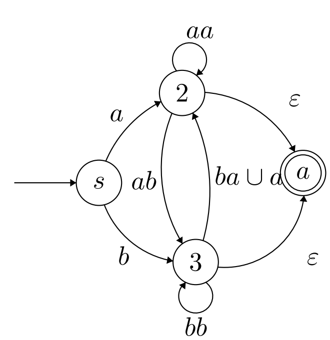
שלב 0: המצב ההתחלתי



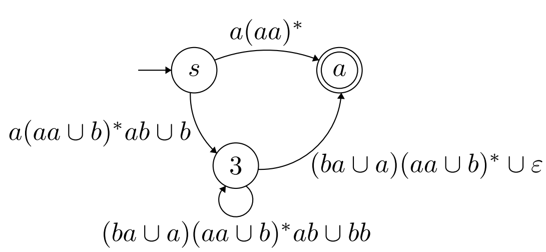
שלב 1: הוספת מצבי התחלה וסיום



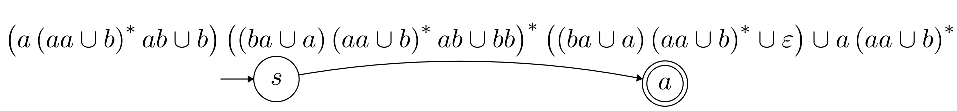
שלב 2: הוצאת קודקוד 1



שלב 3: הוצאת קודקוד 2



שלב 4: הוצאת קודקוד 3



[14] "לא נוכיח כי זה מאוד מאוד משעמם" (ב.א.ר)

1.5 למת הניפוח

ראינו כבר כמה פעמים שיש שפות לא רגולריות, והסברנו זאת גם בתרגול הראשון, בהתבסס על גודל השפות.
הזכרנו אז שלא מדובר בהוכחה קונסטרוקטובית.
בהרצאה ראינו דוגמה לשפה כזאת $L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ והוכחנו באמצעות למת הניפוח שהיא לא שפה רגולרית.

טענה (למת הניפוח)

תהי L שפת רגולרית, אזי ניתן לנפח את L, כלומר קיים $p > 0$ קבוע ניפוח, כך שלכל $w \in L$ שמתקיים עבורה כי $|w| > p$, קיימים $x, y, z \in \Sigma^*$ ו-$w = xyz$ וגם מתקיים:

1. $|y| > 0$.
2. $|xy| \leq p$.
3. לכל $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ יתקיים כי $xy^i z \in L$.

באמצעות למת הניפוח ניתן להוכיח ששפה היא לא רגולרית, אך לא להוכיח כי שפה היא רגולרית.

דוגמה 1

תהי $L_1 = \left\{1^{n^2} \mid n \geq 0\right\}$. L_1 איננה רגולרית, ונשתמש בלמת הניפוח על מנת להוכיח זאת.
נניח בשלילה כי L_1 היא רגולרית, ויהי p קבוע ניפוח עבורה. נתבונן במילה $w = 1^{p^2}$.
מלמת הניפוח, עולה כי ניתן לרשום את w בתור xyz, כך ש-$|xy| \leq p$.
נוכל לרשום את כל אחד מהמספרים הללו בתור $x = 1^j, y = 1^k, z = 1^l$, כך ש-$j+k \leq p, k > 0$ ו-$j+k+l = p^2$.
אם ננפח זאת עם $i = 2$, נקבל $xy^2z = 1^j 1^k 1^k 1^l = 1^{p^2+k}$.
מצד שני, מתקיים:

$$\underbrace{p^2 < p^2 + k}_{\text{הוספת חיובי}} \underbrace{\leq p^2 + p}_{\text{נתון}} \underbrace{< p^2 + 2p + 1}_{\text{הוספת מחובר}} = (p+1)^2$$

מכאן עולה כי $p^2 + k$ הוא לא ריבוע של מספר טבעי (כי הוא בין שני ריבועים של מספר טבעי...), ומכאן נובע כי xy^2z לא ב-L_1, בסתירה ללמת הניפוח.

אבחנה

אנחנו יכולים להשתמש בלמת הניפוח באמצעות הוכחה בשלילה על מנת להוכיח ששפה L היא לא רגולרית.
הכיוון ההפוך לא נכון: יש שפות לא רגולריות שמקיימות את למת הניפוח.

דוגמה 2

תהי $\Sigma = \{0, 1\}$ ונוכיח כי השפה $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_0(w) = \#_1(w)\}$ איננה רגולרית.
נניח בשלילה כי L_2 רגולרית ויהי p קבוע ניפוח. נתבונן במילה $w = 0^p 1^p \in L_2$. בבירור $|w| > p$, כך שנוכל לרשום את $w = xyz$, וכל התנאים לעיל מתקיימים.

ננפח את p עם $i>1$ ונקבל את המילה $xy^iz\in L_2$. כיוון ש-$|xy|\leq p$, נקבל כי xy מכילה רק אפסים, ולכן נוכל לרשום את כל אחד מהאיברים בתור $x=0^j,y=0^k,z=0^l1^p$, כאשר $j,l\geq 0,k>0$ וגם $j+k+l=p$.
לכן יתקיים כי $xy^iz=0^j0^{ik}0^l1^p=0^{p+(i-1)k}1^p$. כיוון ש-$i>0$ ו-$k>0$, יתקיים בפרט כי מספר האפסים גדול ממספר האחדים, בסתירה.

אבחנה

אנחנו אומרים שפונקציה g היא $\omega\left(n\right)$ אם לכל $c>0$ יש $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$g\left(n\right)>cn$.
בפרט, מתקיים כי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{g(n)}{n}=\infty$.

תרגול מס' 4:

יום שני

01.11.21

(בדר)

1.5.1 טענות נוספות ללמת הניפוח

טענה

תהי $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מונוטונית עולה, כך ש-$f\left(n\right)=\omega\left(n\right)$. אזי $L_f=\left\{a^{f(n)}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$ איננה רגולרית.

למה

תהי $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ פונקציה מונוטונית עולה כך ש-$f\left(n\right)=\omega\left(n\right)$, אזי לכל $N,k\in\mathbb{N}$ קיים $n>N$ כך ש-$f\left(n+1\right)-f\left(n\right)>k$.

הוכחה

נניח בשלילה שלא. אזי קיימים $N,k\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים כי $f\left(n+1\right)-f\left(n\right)\leq k$.
נבחין כי מכך עולה שסדרת ההפרשים **חסומה** (כיוון שיש מספר סופי של הפרשים עד N, ומנקודה זו והלאה חסומים על ידי N).
כלומר, לפי ההגדרה קיים $M\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי $f\left(n+1\right)-f\left(n\right)\leq M$. כלומר:

$$f\left(2\right)\leq f\left(1\right)+M,\ \ f\left(3\right)\leq f\left(2\right)+M\leq f\left(1\right)+2M,\ldots,f\left(n\right)\leq f\left(1\right)+\left(n-1\right)\cdot M$$

אם נחלק את שני הצדדים ב-$(n-1)$, נקבל כי $\frac{f(n)}{n-1}\leq M+\frac{f(1)}{n-1}$, בסתירה לכך ש-$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}=\infty$.

הוכחה לטענה

תהי $f\left(n\right)=\omega\left(n\right)$. נרצה להראות כי L_f איננה מקיימת את התנאים של למת הניפוח.
נניח בשלילה כי למת הניפוח מתקיימת ויהי $p>0$ קבוע הניפוח.
נפעיל את הלמה שהוכחנו זה עתה עם $N=k=p$ ונקבל כי קיים $n>p$ כך ש-$f\left(n+1\right)>f\left(n\right)+p$. מכיוון ש-$f$ היא מונוטונית עולה, מתקיים בהכרח כי $f\left(n\right)>n>p$.
כעת, תהי מילה $a^{f(n)}$, אזי מלמת הניפוח קיימים x,y,z כך ש-$a^{f(n)}=xyz$, וכך ש-$0<|y|<|xy|<p$ ולכל $i\in\mathbb{N}\cup\left\{0\right\}$ בהכרח $xy^iz\in L_f$.
תהי $m=|y|$ (אורך המעגל שניפחנו), אזי לכל $i=2$ נקבל כי $a^{f(n)+m}=xy^2z\in L_f$. מצד שני, $f\left(n\right)<f\left(n\right)+m\leq f\left(n\right)+p<f\left(n+1\right)$. כלומר, קיבלנו כי $\left(f\left(n\right)+m\right)$ לא בתמונה של f כי בין $f\left(n\right)$ ל-$f\left(n+1\right)$ קיימת $f\left(n+m\right)$, בסתירה.

1.6 משפט מייהל-נרוד

1.6.1 מחלקות מייהל-נרוד

נזכיר את ההגדרה שראינו בכיתה ליחס מייהל-נרוד:

הגדרה
יהי Σ א"ב ותהא $L \subseteq \Sigma^*$. יחס השקילות מייהל-נרוד של L מוגדר כך: לכל $x, y \in \Sigma^*$ נגדיר כי $x \sim_L y$ אם ורק אם לכל $z \in \Sigma^*$ מתקיים כי $x \cdot z \in L \Leftrightarrow y \cdot z \in L$.

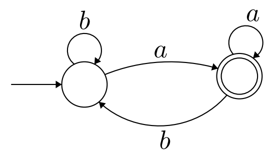
כלומר, לפי ההגדרה עולה כי x ו-y שקולים אם אין **זנב מפריד** ביניהם. לכל $x \in \Sigma^*$ אנחנו מגדירים את $[w] = \{x \mid w \sim_L x\}$ בתור מחלקות השקילות של w.
כמו כן, הוכחנו את המשפט הבא.

משפט
תהא $L \subseteq L^*$ שפה, אזי L רגולרית אם ורק אם יש ב-$\sim_L$ מספר סופי של מחלקות שקילות מייהל-נרוד.

בשונה מלמת הניפוח, משפט זה נותן לנו תיאור שלם של מחלקות רגולרית, אז נוכל להשתמש במשפט זה כדי להוכיח ששפה היא רגולרית או להוכיח שהיא לא רגולרית.

דוגמה
תהי השפה $L = \left\{a^k \mid k \text{ אינה חזקה של } 2\right\}$. נבדוק האם מדובר בשפה רגולרית, באמצעות מחלקות השקילות.
נגדיר סדרה של מילים $\{w_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ כך שלכל $m \neq n$ יתקיים כי $w_m \not\sim_L w_n$, כלומר כי קיים זנב מפריד ביניהם.
לכל $n \neq m \in \mathbb{N}$ נתבונן במילים $w_n = a^{2^n}$ ו- $w_m = a^{2^m}$. בה"כ, נניח כי $n < m$. נקבל כי הזנב המפריד הוא $z = a^{2^n}$. כי הרי $2^n + 2^n = 2^{n+1}$, אבל $2^m + 2^n = 2^n\left(2^{m-n}+1\right)$.
כלומר $a^{2^n} \cdot a^{2^n} = a^{2^{n+1}}$, ומאידך $a^{2^m} \cdot a^{2^n} = a^{2^n\left(2^{m-n}+1\right)}$. סך הכל קיבלנו כי $a^{2^m} \cdot 2^{2^n} \in L$, כי $2^n\left(2^{m-n}+1\right)$ לא חזקה של 2, ומאידך $a^{2^{n+1}} \notin L$ כי מדובר בחזקה של 2.
הראינו שיש אינסוף מחלקות שקילות, כי למעשה כל $n, m \in \mathbb{N}$ מגדירה מחלקת שקילות כיוון שמגדירה זנב מפריד, וכיוון שיש אינסוף מחלקות שקילות, לא מדובר בשפה רגולרית.

דוגמה נוספת (חיובית)
נתבונן בשפה $L = \left\{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ מסתיימת עם } a\right\}$. נראה שיש רק שתי מחלקות שקילות (L ו-L משלים) וממילא מדובר בשפה רגולרית.
ראשית, ברור כי $L \cup \overline{L} = \Sigma^*$. כעת, נראה ש-$L$ היא מחלקת שקילות. לכל $x, y \in L$ מתקיים כי x ו-y מסתיימות ב-a. תהי $z \in \Sigma^*$ וניקח $xz \in L$. ישנן שתי אפשרויות: z מסתיימת ב-a או ש-z היא המילה הריקה ולכן ניתן לראות בבירור כי גם $yz \in L$ (הכיוון השני דומה). אם כך, כל שתי מילים ב-L שקולות ולכן מדובר במחלקת שקילות.
מצד שני, ניקח $x, y \in \overline{L}$ ו-$z \in \Sigma^*$ - בהכרח כיוון ש-$x \notin L$, אם $xz \in L$ אז z חייבת להסתיים ב-a וממילא גם $yz \in L$.
לכל $x \in L$ וגם $y \in \overline{L}$ אזי הזנב $z = \varepsilon$ הוא זנב מפריד בין x ו-y.
האוטומט עבור השפה הוא מינימלי, שכן הוא עם שני מצבים:



1.6.2 שאלות חזרה לכיף

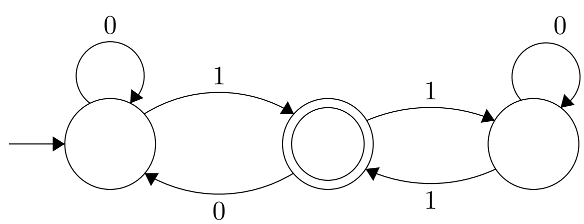
שאלה 1

יהי $A=\langle Q,\{0,1\},q_0,\delta,F\rangle$ עם $|Q|=r$ וגם $0^r1^r\in L(A)$.

אילו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

1. $L(0^*1^*)\subseteq L(\mathcal{A})$.
2. $L(\mathcal{A})\subsetneq L(0^*1^*)$.
3. 1 לא בהכרח נכון אבל לכל $i\geq 1$ מתקיים כי $0^{ir}1^{ir}\in L(A)$.
4. 1 לא בהכרח נכון אבל קיים $k\geq 1$ כך שלכל i מתקיים כי $0^{r+ik}1^{r+k}\in L(A)$.

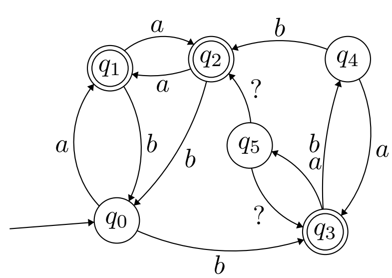
טענה 1 איננה נכונה, כי נוכל לקחת אוטומט של מספר זוגי של אפסים.
טענה 2 אינה נכונה, מאותה סיבה שטענה 1 לא נכונה.
טענה 3 לא בהכרח נכונה, כי אם ניקח $i=2$ ו-$r=3$, בדוגמה הבאה, הטענה לא תהיה נכונה:



הטענה הנכונה היא בהכרח 4.

שאלה 2

נתבונן באוטומט הדטרמיניסטי הבא.



נתון כי ל-$L(A)$ יש 4 מחלקות שקילות מייהל-נרוד. מהם הערכים החסרים?

1. $\delta(q_5,a)=q_2,\delta(q_5,b)=q_3$.
2. $\delta(q_5,a)=q_3,\delta(q_5,b)=q_2$.

3. תשובות א' וב' אפשריות.

4. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

תשובה 3 היא הנכונה. מדוע? באמצעות האלגוריתם שראינו בכיתה, נוכל למצוא את הערכים ששקולים $\equiv_i$ עד שנגיע לנקודת שבת.

אנחנו יודעים שאם נבצע את תהליך המינימיזציה, נשאר עם 4 מחלקות שקילות.

$\sim_A^0$: $\{\{q_1, q_2, q_3\}, \{q_0, q_4, q_5\}\}$.

$\sim_A^1$: נבחין כי q_1 ו-q_2 נשארים במצב מקבל עם a, ועוברים למצב לא מקבל עם b, אבל q_3 עובר למצב לא מקבל עם a (זנב מפריד).

$\{\{q_1, q_2\}, \{q_3\}, \{q_0, q_4, q_5\}\}$.

$\sim_A^2$: נבחין כי בהכרח q_0 ו-q_4 לא שקולים, כי q_4 עם a עובר ל-q_3 ואילו q_0 עם a עובר ל-q_1.

על מנת שנסדר זאת בבירור, נראה כי $\delta(q_4, a) = q_3, \delta(q_4, b) = q_2$ וגם $\delta(q_0, a) = q_1, \delta(q_0, b) = q_3$.

לכן נמצא דרך ש-q_5 תהיה שקולה לאחד מהם. אם $\delta(q_5, a) = q_2, \delta(q_5, b) = q_3$, אזי q_5 שקול ל-q_0 (כי שניהם מגיעים למחלקת q_1 ו-q_3 בהתאמה).

מצד שני, אם $\delta(q_5, a) = q_3, \delta(q_5, b) = q_2$, אזי q_5 שקול ל-q_4, כי שניהם מגיעים בדיוק לאותם מצבים.

1.7 שפות חסרות הקשר

תרגול מס' 5:

יום שני

08.11.21

(בדר)

נזכיר כי בכיתה דיברנו על שפות חסרות הקשר ודקדוקים.

נתבונן בדוגמה ונרענן את ההגדרות.

דוגמה

ניקח את הדקדוק עם החוקים $S \to 0S1 \mid B \mid \varepsilon$ ו-$B \to \#$ ונוכל לקבל:

$$S \Rightarrow 0S1 \Rightarrow 00S11 \Rightarrow 00B11 \Rightarrow 00\#11$$

נרענן את ההגדרות:

תזכורת להגדרות

דקדוק חסר הקשר (להלן ח"ה) G מוגדר על ידי $G = \langle V, \Sigma, R, S \rangle$ כאשר:

- V משתנים.
- Σ א"ב.
- R הן חוקי גזירה מהצורה $V \to (V \cup \Sigma)^*$.
- $S \in V$ משתנה התחלתי.

אם $w, u, v \in (V \cup \Sigma)^*$ ו-$A \to w$ חוק בדקדוק, אזי נאמר ש-$uAv \Rightarrow uwv$ **מייצר** את w.

אם $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$ נאמר כי $u \overset{*}{\Rightarrow} v$ אם יש סדרה $u = u_1 \Rightarrow u_2 \Rightarrow u_3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow u_k = V$

כעת, לאחר התזכורת, נציג מספר דוגמאות.

דוגמאות

נציג דקדוקים חסר הקשר עבור השפות הבאות:

1. עבור $\{a^n b^{2n} : n \geq 0\}$ יתקיים כי $S \to aSbb \mid \varepsilon$.[15]
2. עבור $\{a^i b^j : j \geq i\}$ יתקיים כי $\begin{array}{c} S \to aSbT \mid bT \mid \varepsilon \\ T \to Tb \mid \varepsilon \end{array}$.
3. עבור $\{a^i b^j c^j d^i : i, j \geq 0\}$, יתקיים כי $\begin{array}{c} S \to aSd \mid T \mid \varepsilon \\ T \to bTc \mid \varepsilon \end{array}$.

אבחנה

מדוע אנו קוראים לדבר זה דקדוק חסר הקשר? הסיבה לכך היא שאנחנו מתבוננים בכל אות בפני עצמה, בלי להסתכל על האותיות האחרות ולכן למעשה אנחנו חסרי הקשר או קונטקסט. אכן, יש שפות שהן תלויות הקשר, למשל $A0B1 \to B11$ - שפות אלו בעלות מגוון עשיר יותר של שפות.

1.7.1 תכונות סגור

אחרי שראינו את מחלקת CFL, הדבר הטבעי הוא לחקור את תכונות הסגור שלה.

טענה

אם L_1, L_2 דקדוקים חסרי הקשר אזי $L_1 \cup L_2$ חסר הקשר.

הוכחה

יהיו $G_1 = \langle V_1, \Sigma, R_1, S_1 \rangle$ ו-$G_2 = \langle V_2, \Sigma, R_2, S_2 \rangle$ דקדוקים חסרי הקשר, כך ש-$L_1 = L(G_1)$ ו-$L_2 = L(G_2)$.
נניח בה"כ כי $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (אחרת, כפי שראינו בעבר, נוכל לשנות את שמות המשתנים ב-V_2).
נייצר דקדוק חסר הקשר G עבור $L_1 \cup L_2$ כלדלהן: יהי S משתנה חדש, כך ש-$S \notin V_1 \cup V_2$ ו-G מוגדר על ידי:

$$G = \langle V_1 \cup V_2, \Sigma, R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\}, S \rangle$$

מכאן עולה, לפי ההגדרה, כי קיבלנו את שני הדקדוקים, שכן $S \to S_1 \mid S_2$.

טענה

אם L_1, L_2 דקדוקים חסרי הקשר, אזי $L_1 \cdot L_2$ חסר הקשר.

הוכחה

יהיו $G_1 = \langle V_1, \Sigma, R_1, S_1 \rangle$ ו-$G_2 = \langle V_2, \Sigma, R_2, S_2 \rangle$ דקדוקים חסרי הקשר, כך ש-$L_1 = L(G_1)$ ו-$L_2 = L(G_2)$.
נניח בה"כ כי $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (אחרת, כפי שראינו בעבר, נוכל לשנות את שמות המשתנים ב-V_2).
נייצר דקדוק חסר הקשר G עבור $L_1 \cdot L_2$ כלדלהן. יהי S משתנה חדש, כך ש-$S \notin V_1 \cup V_2$ ו-G מוגדר על ידי:

$$G = \langle V_1 \cup V_2, \Sigma, R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 \cdot S_2\}, S \rangle .$$

[15] ניתן להוכיח זאת פורמלית באמצעות אינדוקציה על עומק העץ.

מכאן עולה, לפי ההגדרה, כי קיבלנו את שרשור הדקדוקים, שכן $S \to S_1 \cdot S_2$.

מה קורה לגבי משלים, חיתוך וכוכב? נראה בהמשך.

1.7.2 הצורה הנורמלית של חומסקי

לפעמים נוח לעבוד עם דקדוק חסר הקשר מצורה מסוימת. בחלק זה נראה 'צורה נורמלית' מסוג מסוים, ונראה שלכל דקדוק חסר הקשר יש הצגה שקולה בצורה הנורמלית. מעבר לכך, נראה גם דרך לעבור בין שתי התצוגות.

הגדרה

דקדוק חסר הקשר G ניתן להצגה **בצורה הנורמלית של חומסקי**, אם כל כללי הגזירה שלו הם מהצורה הבאה:

1. $S \to \varepsilon$ כאשר S הוא משתנה גזירה התחלתי.
2. $A \to BC$ כאשר $B, C \in V \setminus S$.
3. $A \to \alpha$ כאשר α הוא טרמינל.

טענה

לכל דקדוק חסר הקשר G יש תצוגה שקולה G' מהצורה הנורמלית של חומסקי.

הוכחה

נוכיח זאת בשלבים.

1. הגדרת משתנה התחלתי חדש - נתחיל באמצעות הוספת משתנה התחלתי חדש S_0 והוספת כלל הגזירה $S_0 \to S$. דבר זה מבטיח לנו כי המשתנה ההתחלתי לא נגזר והשפה לא משתנה.
2. הסרת כל כללי ה-ε. נוריד את כל הכללים מהצורה $A \to \varepsilon$ כאשר $A \neq S_0$ ו-$A \in V$ ונעבור על כל הכללים שמכילים את A. עבור כל כלל כזה, נוסיף אוסף של כללים שיהוו את הקומבניציות שבהן A מוחלפת על ידי ε.
3. הורדת כללים מהצורה $A \to B$. לכל כלל $A \to B$ עלינו להחליף את B עם הגזירות שאפשריות לפי B. נמחק את כל $A \to B$ ונוסיף כל דבר ש-B יכול לגזור ל-A.
4. הורדת כללים ארוכים. לכל כלל מהצורה $A \to V_1 V_2 \cdots V_k$ כך ש-$k \geq 3$ נייצר משתנים חדשים $U_2, U_3, \ldots, U_{k-1}$. נייצר את הכללים הבאים:

$$\begin{gathered} A \to V_1 U_2 \\ U_2 \to V_2 U_3 \\ \vdots \\ U_{k-1} \to V_{k-1} V_k \end{gathered}$$

5. הורדת אותיות. לכל אות $\sigma \in \Sigma$ נוסיף את x_σ ואת הכלל $x_\sigma \to \sigma$ ונחליף את המופעים של σ ב-x_σ.

דוגמא

נתבונן בדקדוק הבא
$$\begin{aligned} &S \to ASA \mid aB \\ &A \to B \mid S \\ &B \to b \mid \epsilon \end{aligned}$$
ונעבוד לפי הכללים:

1. נוסיף $S_0 \to S$.
2. נעבור על כל כללי ה-ε.:
   - כיוון ש-$B \to \varepsilon$, נוריד אותו, ונוסיף $A \to \varepsilon$.
   - נוריד את $A \to \varepsilon$, ונחליף את הכלל הראשון בכלל הבא $S \to ASA \mid AS \mid SA \mid aB|a$.
3. נוריד את הכללים הקצרים $S_0 \to S, A \to B, A \to S$ ונקבל את ארבעת הכללים הבאים:

$$\begin{aligned} &S_0 \to ASA \,|\, AS \,|\, SA \,|\, aB \,|a \\ &S \to ASA \,|\, AS \,|\, SA \,|\, aB|a \\ &A \to b \,|\, ASA|AS|SA|aB \mid a \\ &B \to b \end{aligned}$$

4. נוריד את הכללים הארוכים באמצעות יצירת כלל בודד שהינו $V \to SA$, ואז נקבל:

$$\begin{aligned} &S_0 \to AV|AS|SA|aB|a \\ &S \to AV|AS|SA|aB|a \\ &A \to b|AV|AS|SA|aB \mid a \\ &V \to SA \\ &B \to b \end{aligned}$$

5. לבסוף, נוריד את האותיות. נגדיר את $X_a \to a$ ואת $X_b \to b$:

$$\begin{aligned} &S_0 \to AV|AS|SA\,|X_aB|\,a \\ &S \to AV|AS|SA\,|X_aB|\,a \\ &A \to b|AV|AS|SA|X_aB \mid a \\ &V \to SA \\ &B \to b \\ &X_a \to a, \quad X_b \to b \end{aligned}$$

2 תורת החישוביות

2.1 מכונות טיורינג

הגדרה

שתי מכונות M_1 ו-M_2 הן שקולות אם הן מזהות את אותה השפה, כלומר $L(M_1) = L(M_2)$, מקבלות את אותן מילים, דוחות את אותן מילים, וגם עוצרות על אותן מילים.

הגדרה
שני מודלים $\mathcal{X}$ ו-$\mathcal{Y}$ הם שקולים אם לכל מכונה מסוג $\mathcal{X}$ קיימת מכונה שקולה מסוג $\mathcal{Y}$ ולכל מכונה מסוג $\mathcal{Y}$ קיימת מכונה שקולה מסוג $\mathcal{X}$.

2.1.1 מכונות טיורינג עם שני סרטים

מכונת טיורינג עם שני סרטים היא מכונת טיורינג רגילה, רק עם **שני סרטים**, כשלכל ראש יש את ראש הקריאה שלו. באתחול, הקלט מופיע בסרט הראשון, ואילו הסרט השני ריק.
פונקציית המעברים השתנתה, כך שהיא מאפשרת לנו לקרוא, לכתוב ולהזיז את הראשים בשני הסרטים בו זמנית.
פורמלית, מתקים כי $\delta : Q \times \Gamma^2 \to Q \times \Gamma^2 \times \{R, L\}^2$.
כלומר, אם ניקח למשל את הביטוי $\delta\left(q, \gamma_1, \gamma_2\right) = \left(q', \gamma_1', \gamma_2', L, R\right)$, הכוונה היא שאם המכונה במצב q, ראש 1 ב-γ_1 וראש 2 ב-γ_2 אזי המכונה עוברת ל-q', כותבת γ_1' בסרט 1, מזיזה ראש 1 שמאלה, כותבת γ_2' בסרט 2 ומזיזה ראש 2 ימינה.
נבחין כי היתרון המשמעותי הוא הוספת הראשים ולא הסרטים (שזו משימה די פשוטה).

טענה
לכל מכונת טיורינג, M יש מ"ט עם שני סרטים M' השקולה לה.

טענה
לכל מ"ט M עם שני סרטים $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}} \rangle$ יש מ"ט M' (עם סרט אחד) ששקולה לה.
הוכחה
נגדיר $M' = \left\langle Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', q_{acc}', q_{rej}' \right\rangle$ כך ש- $\Gamma' = (\Gamma \times \Gamma \times \{0,1\} \times \{0,1\}) \cup \Sigma \cup \sqcup$. נרצה שיתקיים כי האות $(a, b, 0, 1)$ במקום ה-i בסרט של M' (יש לה סרט יחיד) תתפרש כ"בסרט הראשון של M במקום ה-i, כתוב כעת a והראש הקורא לא נמצא שם, ובמקום ה-i בסרט השני של M כתוב כעת b והראש הקורא נמצא שם". איך נעשה זאת? באמצעות פעולתה של M.
בהינתן קלט $w = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n$, המכונה M תחליף כל σ_i:

1. בשלב האתחול: כאשר $i > 1$, נחליף ב-$(w_i, \sqcup, 0, 0)$ ועבור $i = 1$ נחליף ב-$(\sigma_1, \sqcup, 1, 1)$. כלומר, בשלב זה שני הראשים הקוראים של M **במקום הראשון ולא בשום מקום אחר**. בסרט הראשון במקום ה-i כתוב σ_i ובסרט השני במקום ה-i כתוב σ_i ובסרט השני לא כתוב כלום.

2. בשלב הסימולציה:

(א) M' תסרוק את הסרט שלה ותחפש את "מיקום הראש הקורא של M'". כלומר, אות מהצורה $(\gamma, *, 1, *)$ ותקרא את האות שכתובה כעת בסרט 1, שם. לאחר מכן, M' תעבור למצב שלמעשה מקודד את העובדה שמצאה את המיקום וקראה שם γ כלשהי.

(ב) M' תסרוק שוב את הסרט ותחפש אחר $(*, \beta, *, 1)$.

(ג) M' תסרוק את פונקציית המעברים δ של M ותחליט מה לכתוב במקום מה שהיה עכשיו.

(ד) M' תסרוק את הסרט שלה, תמצא את הראש הראשון, תעדכן את γ להיות γ' לפי δ, ותעביר את הראש הראשון ל-L או R לפי δ.

(ה) M' תסרוק את הסרט שלה, תמצא את הראש השני, תעדכן את β להיות β' לפי δ, ותעביר את הראש השני ל-L או R לפי δ.

(ו) M' תבדוק האם δ עוברת ל-q_{acc} או ל-q_{rej} לפי δ, ואם לא - תחזור לתחילת השלב.

מבחינת הדגמה, כך זה נראה לאחר השלב הראשון:

M

↓			
σ_1	σ_2	$\ldots$	σ_n
↓			

M'

↓			
$(\sigma_1, \sqcup, 1, 1)$	$(\sigma_2, \sqcup, 0, 0)$	$\ldots$	$(\sigma_n, \sqcup, 0, 0)$

לאחר סימולציה, אם נניח המכונה M בסרט הראשון כתבה γ ועברה ימינה, ובסרט השני עברה ימינה וכתבה שם β, אז יתקיים:

M

	↓		
γ	σ_2	$\ldots$	σ_n
	↓		
β			

M'

↓			
$(\gamma, \beta, 0, 1)$	$(\sigma_2, \sqcup, 1, 0)$	$\ldots$	$(\sigma_n, \sqcup, 0, 1)$

הסיבה שבגללה העברנו את הראש הקורא לא בהתאמה, כלומר התא השני עכשיו הוא $1,0$ ולא $1,1$, היא כיוון שיש קידוד בין הראשים, וקפיצה ימינה לא בהכרח 'קופצת' ימינה בסרט החדש, אלא **במיקום כלשהו אחר**.
M' מקבלת, לא עוצרת או דוחה, את w אם M מקבלת, לא עוצרת או דוחה את w, ולכן המכונות שקולות.

עלות התרגום

אם M רצה t צעדים על w, אזי M' עשתה בכל צעד לכל היותר $8t$ צעדים, ולכן זמן הריצה הוא $O\left(t^2\right)$.
אם היו לנו k סרטים, זמן הריצה היה $O\left(t^k\right)$, שכן במקרה של שני סרטים, הא"ב שלנו התרחב ל-$|\Gamma|^2 \cdot 2^2$, ואם היו k סרטים, היינו צריכים להרחיב זאת ל-$|\Gamma|^k \cdot 2^k$ - כלומר מדובר בסדר גידול אקספוננציאלי ביחס למספר הסרטים.

תרגול מס' 6:

יום חמישי

18.11.21

(מאיה)

תזכורת

ניזכר כי המחלקה RE היא מחלקת השפות שיש מכונת טיורינג שמזהה אותם, והמחלקה R זו מחלקת השפות שקיימת מכונת טיורינג שמכריעה לגביהן. כמו כן, ראינו את coRE - כלומר, כל השפות כך שהמשלים שלהם ב-RE. מעבר לזה, ראינו כי R $=$coRE$\cap$RE.
מחלקות אלו חשובות כיוון שראינו שיש שפות שלא ניתן להכריע לגביהן. דבר זה למעשה מעיד על העובדה שיש פעולות שמחשבים לא יודעים לעשות, כי הרי מחשבים שקולים למכונות טיורינג (למשל, לא ניתן לבדוק האם בקוד מסוים יש לולאה אינסופית).

2.1.2 תכונות סגור של RE

טענה

אם $L_1, L_2 \in \mathsf{RE}$ אזי גם $L_1 \cup L_2 \in \mathsf{RE}$ (כלומר, קיימת גם מכונת טיורינג שמזהה את האיחוד של השפות).

הוכחה

נשים לב כי אי אפשר, בהינתן w קודם, להריץ את M_1 ואז את M_2, כי M_1 **עלולה לא לעצור** על w, אפילו אם M_2 מקבלת.

לכן, נצטרך למצוא רעיון אחר. נבנה מקום טיורינג M שפועלת כך:

1. שומרת את הקלט w במקום בטוח בתחילת הסרט. אחרי זה שומרת מונה צעדים, שמאותחל לאפס.
2. בכל שלב M תסמלץ את ריצת M על w, במשך כמות הצעדים שכתובה במונה הצעדים.
   (א) אם M_1 הגיעה למצב מקבל או דוחה, M תקבל או תדחה.
   (ב) אם לא, תמחק את תוכן הסרט הלא שמור, תסמלץ את ריצת M_2 באותה כמות צעדים, תקבל או תדחה ותגדיל את המונה ב-1 ותמשיך כך.

טענה

אם $L_1, L_2 \in \mathsf{RE}$ אזי גם $L_1 \cdot L_2 \in \mathsf{RE}$.

הוכחה

נשים לב כי אפשר לבנות מכונת טיורינג M_1 שמזהה את $L' = \{w_1\#w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$.

M' תסמלץ את M_1 על w_1 ואם M_1 מקבלת, היא תסמלץ את M_2 על w_2 ואם תקבל אז M' תקבל.

אמנם, יש בעיה באמירה זו, כי איננו יודעים מתי w_1 נגמרת ומתי w_2 מתחילה.

לכן, "נריץ במקביל" את M על כל החלוקות האפשריות של w כך; המכונה M תחזיק:

- תיאור של M' ושל w בסרט ראשון.
- בסרט השני תחזיק "מונה חלוקות" ומונה צעדים ששניהם יאותחלו לאפס.
- בסרט השלישי יהיה סרט סימולציה.

M בכל שלב תריץ את M' על החלוקה ה-i במשך j צעדים, ותגדיל את i אם M' לא קיבלה. אם $i = |w|$, אז M'תחזיר את i ל-0 ותגדיל את j ב-1 ותמשיך כך.

(M מאתחלת את סרט שלוש בכל איטרציה).

אם באיזה שלב M' מקבלת, M מקבלת.

אם $w \in L_1 \cdot L_2$, אזי קיימת חלוקה $w = w_1 \cdot w_2$ כך ש-$w_1 \in L_1$ ו-$w_2 \in L_2$ ואז M' מקבלת את $w_1\#w_2$ אחרי n צעדים, ולכן גם M תקבל את $w_1 \cdot w_2$ אחרי n צעדים בריצה על החלוקה הזאת.

אם $w \notin L_1 \cdot L_2$ אז אין חלוקה כפי שעשינו קודם, ולכן M תרוץ לנצח על w.

2.1.3 קידוד

נתבונן בקידוד של מ"ט טיורינג על $\Sigma = \{0, 1, \#\}$ ו-$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}} \rangle$.

ראשית, נקודד את המצבים על ידי מספרים בינארים בסדר עולה מופרדים על ידי #:

$$0\#1\#00\ldots\#\#$$

לאחר מכן נוסיף ### להפריד בין הביטויים.
כעת, נקודד את Σ, Γ, כאשר $\Sigma \subseteq \Gamma$. ניתן לקודד את Γ על ידי סטרינגים בינאריים באורך לכל היותר Γ, מופרדים על ידי #. ולאחר מכן ###.

דוגמה

$\Sigma = \{a, b\}$ ו-$\Gamma = \{0, 1, \sqcup\} \cup \Sigma$. מכאן עולה כי $|\Gamma| = 5$ ונקודד על ידי סטרינגים בינאריים באורך $\log(5) = 3$. ונקבל:

$$\underbrace{000}_{a}\#\underbrace{001}_{b}\#\underbrace{010}_{0}\#\underbrace{011}_{1}\#\underbrace{100}_{\sqcup}\#\#\#$$

כעת נקודד את δ.
את המעבר $\delta(q, \sigma) = (q', \sigma', L)$ נקודד כך:

$$\underbrace{\langle q \rangle}_{\text{הקידוד של } q} \;\#\; \underbrace{\langle \sigma \rangle}_{\text{הקידוד של } \sigma} \;\#\, \langle q' \rangle \,\#\, \langle \sigma' \rangle \,\#\, \langle L \rangle \,\#\#\#$$

כאשר $\langle L \rangle = 0$ ו-$\langle R \rangle = 1$. בין המעברים השונים של δ יש ## ולבסוף יש ###.
בסופו של דבר, נקודד את $q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}, q_0$ בצורה דומה:

$$\langle q_0 \rangle \,\#\#\#\, \langle q_{\text{acc}} \rangle \,\#\#\#\, \langle q_{\text{rej}} \rangle$$

2.1.4 מכונה אוניברסלית

נרצה כעת לבנות מ"ט U שמקבלת בקלט קידוד של מ"ט אחרת $\langle M \rangle$ ומילת קלט $\langle w \rangle$ ועונה כמוה.
כלומר U מקבלת או דוחה או עוצרת אם M מקבלת או דוחה או עוצרת על w.
ל-U יהיו שלושה סרטים:

1. התיאור של M.
2. סרט העבודה של M.
3. המצב הנוכחי של M + חישובים.

הפעולה של U תהיה כזאת:

1. תסרוק את סרט 1 ותמצא את תחילת w.
2. תעתיק את w לסרט 2 ותאתחל את ראשים $1, 2$.
3. תסרוק את סרט 1, תמצא את q_0 ותעתיק אותו לסרט 3.
4. בכל איטרציה:

(א) נשווה את המצב בסרט 3 ל-q_{rej} או q_{acc} ונדחה או נקבל בהתאם.

(ב) נסרוק את סרט 1 למצוא את תחילת δ.

(ג) נשווה את המצב בסרט 3 והאות מתחת לראש בסרט 2, לכל המעברים של δ לפי הסדר, עד שנמצא את המעבר הנכון.

(ד) נחליף את האות בסרט 2 באות הנכונה לפי δ.

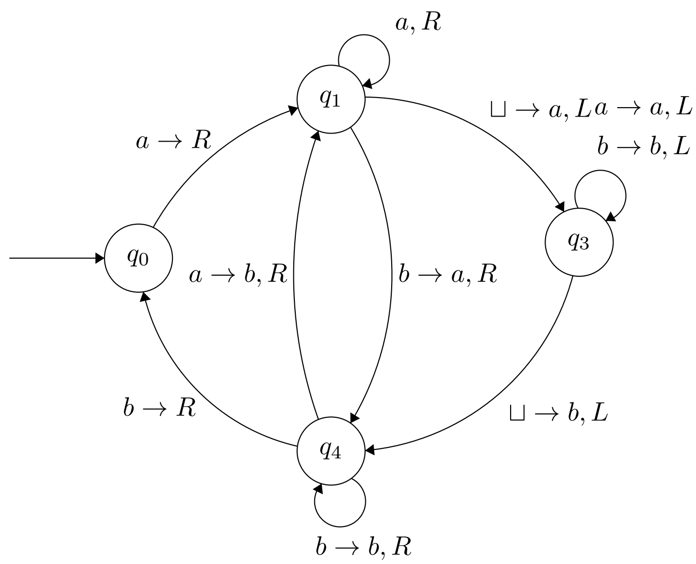
(ה) נזיז את הראש ימינה או שמאלה.

(ו) נעדכן את המצב בסרט 3 לפי δ.

2.1.5 כיף עם מכונות טיורינג

נרצה לבנות מכונת טיורינג שמזיזה את הקלט ימינה וכותבת \$ בהתחלה (אפשר להשתמש בה כתת תוכנה בתוכנה הגדולה).

נניח שאנחנו מעל $\{a,b\}$ ונבנה את המכונה הבאה:



מה קורה במכונה זו? אנחנו שמים \$ בהתחלה ומזיזים את הכל ימינה.

אפשר להשתמש במכונה זו כתת מכונה למכונות אחרות.

דוגמה

מ"ט שמחשבת את $f(n) = n + 1$ עבור n בינארי.

איך המכונה הזאת עובדת? המכונה תתחיל ב-q_0 ותסרוק את הסרט עד שתגיע ל-$\sqcup$ ואז תעבור ל-q_1, ותלך שמאלה.

ב-q_1, אם רואים 1 מחליפים ב-0 וממשיכים שמאלה. אם רואים 0, מחליפים ב-1, עוברים שמאלה ועוצרים.

אם מגיעים לתחילת הסרט (רואים \$) , מזיזים הכל ימינה ומוסיפים 1.

2.2 רדוקציות מיפוי

תרגול מס' 7:

יום שני

22.11.21

(בדר)

ניזכר בהגדרות שראינו בהרצאה:

הגדרה
עבור א"ב Σ, נאמר ש-$f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ **ניתנת לחישוב** (Computable) אם קיימת מ"ט M_f שבהינתן קלט $x\in\Sigma^*$, עוצרת עם $f(x)$ על הסרט.

הגדרה
עבור א"ב Σ, ושתי שפות $A,B\subseteq\Sigma^*$, נאמר ש-A **ניתנת לרדוקציית מיפוי** ל-B $A\le_m B$ ("A קלה יותר מ-B") אם קיימת פונקצייה ניתנת לחישוב $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ כך שלכל $x\in\Sigma^*$ יתקיים כי $x\in A\Leftrightarrow f(x)\in B$.

ראינו גם את משפט הרדוקציה:
אם $A\le_m B$ ו-$B\in\mathsf{R}$, אזי $A\in\mathsf{R}$.

כעת, נוכיח את הטענה הבאה:

טענה
יהי $L_1,L_2\in\Sigma^*$. אם $L_1\le_m L_2$ אזי:

1. אם $L_1\notin\mathsf{RE}$ אזי $L_2\notin\mathsf{RE}$.
2. אם $L_1\notin\mathsf{coRE}$ אזי $L_2\notin\mathsf{coRE}$.
3. אם $L_1\notin\mathsf{R}$ אזי $L_2\notin\mathsf{R}$.

הוכחה
נוכיח את הטענות לפי הסדר, מלבד האחרונה שאותה הוכחנו בכיתה.

1. נניח בשלילה כי $L_2\in\mathsf{RE}$ ותהי $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ רדוקצייה מ-L_1 ל-L_2. תהי מ"ט M שמזהה את L_2. נראה כעת כי $L_1\in\mathsf{RE}$. נגדיר מ"ט N (שתזהה את L_1) שפועלת באופן הבא: בהינתן קלט x של N:
   (א) N מחשבת את $y=f(x)$.
   (ב) N מסמלצת את ריצת M על y ועונה כמוה. (אם M תקבל אזי N תקבל, אם M דוחה אז N דוחה, אם M לא עוצרת, אזי N לא עוצרת).

   מתקיים כי N מקבלת אם ורק אם M מקבלת את $f(x)$, כלומר אם ורק אם $f(x)\in L_2$, אם ורק אם $x\in L_1$. ולכן N מזהה את L_1, כלומר $L_1\in\mathsf{RE}$, בסתירה.
2. נבחין כי רדוקציה מ-$L_1\le_m L_2$ היא אותה רדוקציה מ-$\overline{L_1}\le_m\overline{L_2}$, ולכן ניתן להפעיל את הטענה הקודמת על שפות אלו.

2.2.1 ניתוח שיוך $\mathsf{ALL_{TM}}$

ניקח את השפה $\mathsf{ALL_{TM}} = \{\langle M\rangle \mid L(M) = \Sigma^*\}$ - כל המכונות ששפתן היא Σ^*. מהו השיוך שלה?

תחילה, נעשה רדוקציה $A_{\mathsf{TM}} \le \mathsf{ALL_{TM}}$ ונראה כי $\mathsf{ALL_{TM}} \notin \mathsf{coRE}$.

<u>בנייה</u>

עלינו להוכיח כי יש רדוקציה כזו - כלומר עלינו להראות כי M מקבלת את w אם ורק אם $L(K) = \Sigma^*$.
בהינתן קלט $\langle M, w\rangle$ של הרדוקציה f, f פולטת $\langle K\rangle$, כאשר K פועלת באופן הבא.
בהינתן קלט x של K, K **מתעלמת** מ-x, מסמלצת את ריצת M על w ועונה כמוה (אם קיבלה את w, K תקבל את x וכן הלאה).

<u>נכונות</u>

- אם $\langle M, w\rangle \in A_{\mathsf{TM}}$, כלומר M מקבלת את w. במקרה זה, K תקבל כל קלט x ולכן $L(K) = \Sigma^*$ ולכן $\langle K\rangle \in \mathsf{ALL_{TM}}$.
- אם $\langle M, w\rangle \notin A_{\mathsf{TM}}$ אזי M אינה מקבלת את w. כלומר, M דוחה את w או אינה עוצרת על w. בשני המקרים, K אינה מקבלת כל קלט x ולכן $L(K) = \emptyset$, כלומר $\langle K\rangle \notin \mathsf{ALL_{TM}}$.

<u>חישוב</u>

ברור כי הרדוקציה חשיבה, כי אפשר לממש את K כמכונה אוניברסלית, המקודדת בתוכה את התיאור של M ו-w.

כעת, נראה כי $\overline{A_{\mathsf{TM}}} \le_m \mathsf{ALL_{TM}}$ ולכן נקבל כי $\mathsf{ALL_{TM}} \notin \mathsf{RE}$.
נרצה להראות כי M אינה מקבלת את w, אם ורק אם $L(K) = \Sigma^*$.
<u>בנייה</u>
בהינתן קלט $\langle M, w\rangle$ של הרדוקציה, הרדוקציה פולטת $\langle K\rangle$, כאשר K פועלת באופן הבא.
בהינתן קלט x של K, K מסמלצת את ריצת M על w למשך $|x|$ צעדים:

1. אם M קיבלה את w במשך ה-$|x|$ צעדים, אזי K תדחה.
2. אם M קיבלה את w במשך ה-$|x|$צעדים, K תקבל.

<u>נכונות</u>

- אם $\langle M, w\rangle \in \overline{A_{\mathsf{TM}}}$ אזי M אינה מקבלת את w, ולכל x, M לא מקבלת את w תוך $|x|$ צעדים, ולכן K מקבלת כל x, כלומר $\langle K\rangle \in \mathsf{ALL_{TM}}$.
- אם $\langle M, w\rangle \notin \overline{A_{\mathsf{TM}}}$, אזי M מקבלת את w, ויהי t מספר הצעדים שבו M מקבלת את w. נשים לב כי לכל x עם $t \le |x|$ מתקיים כי M מקבלת את w תוך $|x|$ צעדים, ולכן לכל x עם $t \le |x|$ יתקיים כי K דוחה את x. כלומר, $L(K) \neq \Sigma^*$ ולכן $\langle K\rangle \notin \mathsf{ALL_{TM}}$.

2.2.2 ניתוח אפיון $\mathsf{REPEAT_{TM}}$

ניקח את $\mathsf{REPEAT_{TM}} = \{\langle M, w\rangle \mid$ אינה עוצרת על w וריצת M וחוזרת לפחות פעמיים על אותה קונפ' $M\}$
נרצה להוכיח כי $\mathsf{REPEAT_{TM}} \in \mathsf{RE}$.
מכונה K המזהה את $\mathsf{REPEAT_{TM}}$ עובדת באופן הבא.
<u>בנייה</u>
בהניתן קלט x של K:

1. K בודקת אם $x = \langle M, w\rangle$. אם כן, K תמשיך ל-2. אחרת, K דוחה.
2. עבור $1 \leq i$, K מחשבת את הקונפ' ה-i-ית בריצת M על w, C_i:
   (א) אם C_i מקבלת או דוחה, K דוחה.
   (ב) אם C_i הופיעה באיטרציה קודמת, K מקבלת.

<u>נכונות</u>
אם K מקבלת קלט x, אזי יש $x = \langle M, w\rangle$, ויש איזושהי איטרציה $i = j$ ששם גילינו כי M חזרה על C_j לפחות פעמיים, כלומר בפרט $\langle M, w\rangle \in L$.
אם $\langle M, w\rangle \notin \mathsf{REPEAT_{TM}}$ אזי M מקבלת או דוחה את w, או שאין קונפיגורציה חוזרת. כלומר, K תיתקע ולכן $\langle M, w\rangle \notin L(K)$.

כעת, נראה כי $\mathsf{REPEAT_{TM}} \notin \mathsf{R}$, ונראה זאת אם נראה כי $\mathsf{REPEAT_{TM}} \notin \mathsf{coRE}$, באמצעות רדוקציה לשפה שלא ב-coRE.
נוכל לעשות זאת באמצעות רדוקציה ל-$\mathsf{HALT_{TM}}$, כלומר $\mathsf{HALT_{TM}} \leq_m \mathsf{REPEAT_{TM}}$.
ניקח $\langle M, w\rangle \to \langle N, w'\rangle$ ונרצה כי M עוצרת על w אם ורק אם N' עוצרת על קונפ' בריצתה על w.

<u>בנייה</u>
בהינתן קלט $\langle M, w\rangle$ של הרדוקציה, הרדוקציה פולטת $\langle N, x\rangle$ כאשר N פועלת באופן הבא:
בהינתן קלט w' של N, N מתעלמת מ-w', מסמלצת את M על w, תוך ניהול מונה הסופר את מספר צעדי הסמלוץ.
אם N עוצרת על w, N עוברת למצב $q_{\text{סתם}}$ ו-N נשארת תמיד ב-$q_{\text{סתם}}$ ומזיזה את הראש שלה שמאלה.

<u>נכונות</u>
אם $\langle M, w\rangle \in \mathsf{HALT_{TM}}$ אזי M עוצרת על w, ולכן כש-N רצה על w, היא מתישהו תגיע למצב $q_{\text{סתם}}$ ולכן בסופו של דבר N תגיע לקצה השמאלי שלה ותישאר תקועה באותה קונפ', כלומר $\langle N, w\rangle \in \mathsf{REPEAT_{TM}}$.
אם $\langle M, w\rangle \notin \mathsf{HALT_{TM}}$, כלומר M אינה עוצרת על w, נתבונן בריצת N על w'. מכיוון ש-M לא עוצרת על w, אזי גם N לא עוצרת. אך מכיוון ש-N מעלה את מונה הצעדים ב-1 אחרי סמלוץ של צעד של M, אזי N לא חוזרת על קונפ' בריצתה על w ולכן $\langle N, w\rangle \notin \mathsf{REPEAT_{TM}}$.

2.2.3 ניתוח אפיון $\mathsf{USELESS_{TM}}$

$\mathsf{USELESS_{TM}} = \{\langle M\rangle \mid q$-קיים מצב $q \notin \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}$ כך שלכל קלט w הריצה של M אינה עוברת ב-$q\}$.
נרצה להוכיח כי $\mathsf{USELESS_{TM}} \notin \mathsf{coRE} \setminus \mathsf{R}$.
נבצע רדוקציה עם $\overline{A_{\mathsf{TM}}}$ כך ש-$\overline{A_{\mathsf{TM}}} \leq_m \mathsf{USELESS_{TM}}$ ונראה כי $\mathsf{USELESS_{TM}} \notin \mathsf{RE}$.

<u>בנייה</u>

בהינתן קלט $\langle M, w\rangle$, הרדוקציה פולטת $\langle K\rangle$ כאשר K פועלת באופן הבא:

בהינתן קלט x של K, K מסמלצת את ריצת M על w.

אם M מקבלת את w, K עוברת ל-$q_{\text{מיוחד}}$ ומשם היא מבקרת בכל המצבים הלא מקבלים והלא דוחים שלה, ואחרי זה היא עוצרת.

אם M אינה מקבלת את w, K דוחה (ולכן לא עברה ב-$q_{\text{מיוחד}}$).

<u>נכונות</u>

אם $\langle M, w\rangle \in \overline{A_{\mathsf{TM}}}$ אזי M אינה מקבלת את w. כלומר, K אינה עוברת ב-$q_{\text{מיוחד}}$ לכל קלט x.

כלומר, יש מצב שהוא לא ישים, ובפרט $\langle K\rangle \in \mathsf{USELESS_{TM}}$.

אם $\langle M, w\rangle \notin \overline{A_{\mathsf{TM}}}$ אזי M מקבלת את w, כלומר לכל קלט x של K, K עוברת ב-$q_{\text{מיוחד}}$ ולכן עוברת בכל המצבים שלה.

כלומר $\langle K\rangle \notin \mathsf{USELESS_{TM}}$.

הגדרה

תכונה היא אוסף של מ"ט.

תרגול מס' 8:

יום שני

29.11.21

(בדר)

הגדרה

תכונה P תיקרא סימנטית אם לכל מ"ט M_1, M_2, אם $L(M_1) = L(M_2)$ אזי $M_1 \in P$ אם"ם $M_2 \in P$.

דוגמאות

$P = \{M \mid L(M) \neq \emptyset\}$ היא תכונה סימנטית.

$P = \{M \mid$ יש ל-M 3 מצבים$\}$ איננה תכונה סימטרית.

הגדרה

תכונה P תיקרא "לא טריוויאלית" אם היא לא כל המכונות בעולם, וגם איננה הקבוצה הריקה.

אבחנה

P היא סימנטית לא טרוויאלית אם ורק אם $\overline{P}$ היא סימנטית לא טרוויאלית.

משפט רייס

תהי P תכונה סימנטית לא טרוויאלית, אזי $L_P = \{\langle M\rangle \mid M \in P\} \notin \mathsf{R}$.

דוגמה

$\mathsf{ALL_{TM}}$ היא תכונה סימטרית לא טרוויאלית ואכן היא איננה כריעה.

למה

תהי P תכונה סימטרית לא טרוויאלית ונניח כי $T_\emptyset \notin P$ (כאשר $L(T_\emptyset) = \emptyset$) אזי $A_{\mathsf{TM}} \leq_m L_P$.

הוכחת הלמה

בהינתן P תכונה סימטרית לא טרוויאלית, כך ש-$T_\emptyset \notin P$, נרצה להראות רדוקציה מ-A_{TM} ל-L_P.

נתבונן ב-$H \in P$ - אחת ממכונות הטיורינג המתאימות לתכונה.

<u>בנייה</u>

בהינתן קלט $\langle M, w\rangle$, הרדוקציה פולטת $\langle T\rangle$, כאשר T פועלת באופן הבא. בהינתן קלט x של של T, T מסמלצת את ריצת M על w.
אם M לא עצרה, T לא עצרה, אם M דוחה, אזי T דוחה. אם M מקבלת את w, אזי T מסמלצת את H על x ועונה כמו H.
כעת, עולה כי T מקבלת או דוחה או לא עוצרת על x, אם H מקבלת או דוחה או לא עוצרת על x, בהתאמה.

<u>נכונות</u>
אם $\langle M, w\rangle \in A_{\mathsf{TM}}$, כלומר M מקבלת את w, אזי לכל x, T מקבלת את x אם"ם H מקבלת את x. כלומר $L(T) = L(H)$.
מכיוון ש-P סימנטית ו-$H \in P$, נקבל כי $T \in P$ ולכן $\langle T\rangle \in L_p$.
אם $\langle M, w\rangle \notin A_{\mathsf{TM}}$, כלומר M אינה מקבלת את w, במקרה זה T אינה מקבלת כל קלט x. כלומר $L(T) = \emptyset$ ולכן $T \notin P$. כלומר $\langle T\rangle \notin L_P$.

הוכחת המשפט

תהי P תכונה סימנטית לא טרוויאלית. ישנן שתי אפשרויות:

1. $T_\emptyset \notin P$ ולכן לפי הלמה $A_{\mathsf{TM}} \leq_m L_P$, כלומר $L_p \notin \mathsf{coRE}$.
2. $T_\emptyset \in P$ ולכן $T_\emptyset \notin \overline{P}$. מהאבחנה שראינו מקודם עולה כי $\overline{P}$ היא גם תכונה סימנטית לא טרוויאלית ולכן יש רדוקציה $A_{\mathsf{TM}} \leq_m \overline{L_p}$, כלומר $\overline{A_{\mathsf{TM}}} \leq_m L_p$ ולכן $L_P \notin \mathsf{RE}$.

2.3 מכונות טיורינג אי דטרמיניסטיות

הגדרה

מכונת טיורינג אי דטרמיניסטית היא שביעייה:

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}\rangle$$

כאשר δ מוגדרת על ידי:

$$\delta : Q \setminus \{q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}\} \times \Gamma \to 2^{Q\times\Gamma\times\{L,R\}} \setminus \{\emptyset\}$$

דוגמא

$\delta(q, \sigma) = \{\langle q_1, \sigma, L\rangle, \langle q_2, \sigma_2, R\rangle\}$.
למשל אם $C = ur_1q\sigma v$ אזי ייתכן כי $uq_1\sigma_1 v$ או כי $u\sigma_1\sigma_2 q_2 v$.

הגדרה

בהינתן M ו-w, נאמר כי M מקבלת את w, אם קיימת ריצה מקבלת של M על w. M היא מכונה מכריעה אם לכל קלט w, כל הריצות של M על w עוצרות.
כלומר, $L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid$ קיימת ריצה מקבלת של M על $w\}$.

דוגמה

$L = \{\langle n \rangle \mid n$ אינו ראשוני$\}$.

מ"ט אי דטרמיניסטית M המכריעה את L עובדת באופן הבא:

בהינתן $\langle n \rangle$, M מנחשת מספר בינארי P, ביט אחרי ביט. לאחר מכן, בודקת אם P/n שלם, אם היא מקבלת, אם לא היא דוחה.

כיצד היא מנחשת?

נכתוב תאים ריקים באופן דטרמיניסטי, לכל תא ריק כזה ננחש שנכתוב 0 או 1 בכל תא. עץ הקונפיגורציות (שנגדיר אותו בקרוב) יכיל עבור כל מספר $1 \dots n$ את הריצה שלו, והאם מתקבלת או לא.

הגדרה

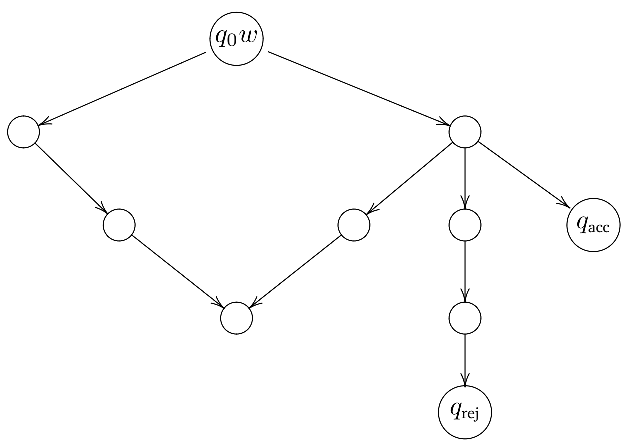
תהי M מכונה אי דטרמיניסטית, ויהי קלט w עבור M.

נגדיר את עץ הריצות של M ל- w על ידי $T_{M,w} = \langle V, E \rangle$.

נסמן ב-C את קבוצת הקונפיגורציות של M.

$V \subseteq C \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$ וגם $E \subseteq \bigcup_{i \geq 0} (C \times \{i\}) \times (C \times \{i+1\})$ כך ש-$(\langle C, i \rangle, \langle d, i+1 \rangle) \in E$ אם ורק אם d היא קונפיגורציה עוקבת של C (כל קשת בין רמות ויורדת).

נניח כי כל הקודקודים מ-V ישיגים מהשורש.



אבחנות

1. קיים קבוע k (שתלוי ב-$\langle M \rangle$ ולא תלוי ב-w) שחוסם את דרגת הפיצול המקסימלית של העץ.
2. M היא מכריעה אם ורק אם לכל w, $T_{M,w}$ סופי (כל אחת מהריצות סופית).

טענה

לכל מ"ט אי דטרמיניסטית N מכריעה יש מ"ט דטרמיניסטית D מכריעה עם $L(D) = L(N)$.

הוכחה

נוכל להתייחס לכל קודקוד בעץ שהינו קונפיגורציה, בתור כתובת.

כיצד D פועלת? בהינתן קלט x, לכל איטרציה i:

1. D רושמת את כל המילים $u \in \Sigma_k^*$ באורך i בסדר ליקסוגרפי.
2. D בודקת האם אחת מהמילים האלו היא כתובת של קונפיגורציה מקבלת ב-$T_{M,x}$. אם כן, D מקבלת.
3. אם כל הכתובות שחישבנו ברמה ה-i לא חוקיות, D דוחה.

נבחין כי זמן הריצה הוא לכל היותר $O\left(k^t\right)\cdot O\left(t^2\right)$ כאשר t הוא גובה העץ. אמנם, מתקיים כי:

$$O\left(t^2k^t\right)=2^{\log\left(t^2\right)+\log\left(k^t\right)}=2^{\log(t)+t\log(k)}=2^{O(t)}$$

אם יש קונפיגורציה לא בהכרח מכריעה, זה גם יעבוד.

3 סיבוכיות

3.1 סיבוכיות זמן ורדוקציות פולינומיאליות

תרגול מס' 9:

יום שני

06.12.21

(בדר)

3.1.1 הגדרות והקדמה

ראינו בהרצאה את ההגדרה של מחלקות NP ו-P.

הגדרה
המחלקה P היא מחלקת השפות שניתנות להכרעה בזמן פולינומיאלי עם מ"ט דטרמיניסטית, כלומר $\mathsf{P}=\bigcup_k \mathsf{TIME}\left(n^k\right)$.

הגדרה
המחלקה NP היא מחלקת השפות שניתנות להכרעה בזמן פולינומיאלי עם מ"ט א"ד, כלומר $\mathsf{NP}=\bigcup_k \mathsf{NTIME}\left(n^k\right)$.

כמו כן, ראינו בהרצאה את ההגדרה השקולה, שקיים מוודא פולינומיאלי V עבור שפה L:

הגדרה
נאמר כי קיים מוודא פולינומיאלי ל-L אם:

$$L=\left\{w\ \middle|\ \begin{array}{c}\text{קיים } c \text{ פולינומיאלי ב-} w\\ \text{כך ש-} V \text{ מקבלת בזמן פולינומיאלי את } \langle w,c\rangle\end{array}\right\}$$

הגדרה
יהיו $K,L\subseteq\Sigma^*$. רדוקציה פולינומית מ-K ל-L היא רדוקציית מיפוי מ-K ל-L הניתנת לחישוב על ידי מ"ט בזמן פולינומי. אם יש רדוקציה כזו מ-K ל-L, נסמן $K\leq_P L$.

ראינו בהרצאה כי עבור $K,L\subseteq\Sigma^*$, מתקיים כי $K\leq_P L$ אם:

1. $L\in\mathsf{P}\Rightarrow K\in\mathsf{P}$.

2. $L \in \mathsf{NP} \Rightarrow K \in \mathsf{NP}$.
3. $L \in \mathsf{coNP} \Rightarrow K \in \mathsf{coNP}$.

כמו כן, ראינו כי רדוקציות פולינומית הן **טרנזיטיביות**, כלומר לכל L_1, L_2, L_3 מתקיים כי $L_1 \leq_p L_2 \wedge L_2 \leq_p L_3$ גורר כי $L_1 \leq_p L_3$.

הגדרה
שפה L היא NP- קשה אם לכל $K \in \mathsf{NP}$ מתקיים כי $K \leq_p L$. (אם L היא NP- קשה ו-$J \leq_p L$ אזי J היא NP- קשה).

הגדרה
נאמר כי שפה L היא NP-שלימה אם היא NP-קשה וגם $L \in \mathsf{NP}$.

טענה
אם L היא NP- שלימה, וגם $L \in \mathsf{P}$, אזי $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$.
הוכחה
נראה כי $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{P}$. תהי $K \in \mathsf{NP}$. מכיוון ש-L היא NP-קשה, אזי $K \leq_P L$.
מכיוון ש-$L \in \mathsf{P}$, נקבל ממשפט הרדוקציה כי $K \in \mathsf{P}$.

3.1.2 רדוקציה פולינומיאלית לכיסוי בקודקודים

הגדרה
יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט לא מכוון. קליקה ב-G היא תת קבוצה $C \subseteq V$ כך שלכל $x \neq y \in C$, יתקיים כי $\{x, y\} \in E$.

הגדרה
כיסוי קודקודים ב-G הוא תת קבוצה $C \subseteq V$ כך שלכל קשת $\{x, y\} \in E$, מתקיים כי $x \in C$ או $y \in C$.

אינטואיטיבית, אפשר לומר כי "לפחות קצה אחד של כל קשת בגרף מחובר לקבוצת קודקודים זו".
נגדיר: CLIQUE$= \{\langle G, k\rangle \mid$ יש ב-G קליקה בגודל $k\}$, שנוכיח בהרצאה כי היא NP-שלימה.
כמו כן, נגדיר:
$\mathsf{VC} = \{\langle G, k\rangle \mid$ יש ב-G כיסוי קודקודים בגודל לכל היותר $k\}$
(נוכל להשתמש ב'לכל היותר' ולא ב'בדיוק', כי ביטוי אחד מוכל בשני).
נוכיח כעת כי $\mathsf{VC} \in \mathsf{NP}$. מוודא פולינומיאלי V עבור VC מקבל כקלט $S\$ \langle G, k\rangle$ ו-V בודק:

1. $k = |S|$.
2. S היא כיסוי קודקודים: נעבור על כל צלע $\{x, y\} \in E$, ולכל צלע כזו נעבור על כל S בשביל לבדוק האם $x \in S$ או $y \in S$.

אם אין בדיקה עוברת, V דוחה.

טענה

VC היא NP-קשה.

הוכחה

נראה כי CLIQUE$\leq_P$VC, כלומר נראה כי יש ב-G' כיסוי בגודל k' אם ורק אם יש ב-G קליקה בגודל k.

<u>בנייה</u>

בהינתן קלט $\langle G=(V,E),k\rangle$, הרדוקציה פולטת $\left\langle \overline{G}=\left(V,\overline{E}\right),n-k\right\rangle$ כאשר $n=|V|$.

<u>נכונות</u>

נניח שיש ב-G קליקה C בגודל k. נראה כי $\overline{C}$ היא כיסוי קודקודים ב-$\overline{G}$ בגודל $n-k$.

נניח בשלילה כי $\overline{C}$ אינה כיסוי ב-$\overline{G}$. כלומר, יש קשת $\{x,y\}\in\overline{E}$ כך ש-$x,y\notin\overline{C}$. אם כך, $x,y\in C$. כיוון ש-C קליקה, עולה כי $\{x,y\}\in E$ וזאת סתירה.

נניח ש-S היא כיסוי ב-$\overline{G}$ בגודל $n-k$, ונראה כי $\overline{S}$ היא קליקה ב-G בגודל k.

ראשית, ברור כי $\left|\overline{S}\right|=|V\setminus S|=n-(n-k)=k$.

יהיו $x,y\in\overline{S}$. נניח בשלילה כי $\overline{S}$ אינה קליקה ב-G. כלומר, יש $x,y\in\overline{S}$ כך ש-$\{x,y\}\notin E$, ובפרט $\{x,y\}\in\overline{E}$.

מכיוון ש-S היא כיסוי ב-$\overline{G}$, נקבל בפרט כי $x\in S$ או $y\in S$, בסתירה לכך ש-$x,y\in\overline{S}$, כלומר כי $x,y\notin S$.

<u>חישוב בזמן פולינומי</u>

נבחין כי המעבר הראשון (ההעתקה למשלים) אורך $O\left(|G|\right)$, והסריקה של המכונה (מעבר על כל זוגות הקודקודים ועל כל הקשתות) לוקחת $O\left(|V|^2\cdot|E|\right)$ - לכן הראינו כי כל הבנייה של המכונה אורכת בזמן פולינומיאלי.

3.1.3 רדוקציה פולינומיאלית לקבוצה שולטת

הגדרה

נאמר כי קבוצה היא קבוצה שולטת בגרף C, אם כל הקודקודים שאינם בקבוצה נמצאים במרחק לכל היותר 1, מקודקודים בקבוצה זו.

נגדיר כעת את הקבוצה הבאה: $\text{DS}=\{\langle G,k\rangle\mid k$ יש קבוצה שולטת בגודל לכל היותר$\}$.

נוכיח כי $\text{DS}\in\text{NP}$.

מוודא עבור השפה מעל $\langle G,k\rangle\$S$ בודק אם:

1. $|S|=k$.
2. S היא קבוצה שולטת בגודל k: נעבור על כל קודקוד v ונבדוק אם $v\in S$ (על ידי מעבר על S), ואם לא, נבדוק אם יש $u\in S$ וקשת $e\in E$ כך ש-$e=\{v,u\}$.

טענה

DS היא NP-קשה.

הוכחה

נראה כי $\text{DS}\leq_P\text{VC}$, כלומר, נראה כי יש ב-G' קבוצה שולטת בגודל k' אם ורק אם יש כיסוי קודקודים בגודל k.

<u>בנייה</u>

בהינתן קלט $\langle G=(V,E),k\rangle$, הרדוקציה פולטת $\langle G'=(V',E'),k'\rangle$, כאשר:

- $k'=k+f$, כש-f הוא מספר הקודקודים המבודדים ב-E.
- $V=V\cup\{v_e\}_{e\in E}$ ו-$E'=E\cup\{\{v_e,u\},\{v_e,v\}\mid e=(u,v)\in E\}$.

כלומר, לכל קשת $e\in E$ אנו מוסיפים קודקוד v_e וקשת מכל קודקוד בקצוות של הקשת המקורית לקודקוד זה.

<u>נכונות</u>

נניח כי יש ב-G כיסוי C בגודל k. נסמן ב-F את קבוצת הקודקודים המבודדים ב-G ונראה כי הקבוצה $S=C\cup F$ היא קבוצה שולטת ב-G' בגודל לכל היותר k'. תחילה, נראה שגודלה הוא לכל היותר k':

$$|S|=|C\cup F|\leq|C|+|F|=k+f=k'$$

נראה כי $S=C\cup F$ היא קבוצה שולטת ב-G'. יהיה $x\in V$, ונחלק למקרים:

- אם $x=v_e\in V'\setminus V$ (שייך לקודקודים החדשים שהוספנו). במקרה זה, קיימת $e=\{u,v\}\in E$ ו-$\{u,v_e\},\{v,v_e\}\in E'$. מכיוון ש-$C$ כיסוי קודקודים ב-G, אזי $u\in C$ או ש-$v\in C$, ומכיוון ש-v_e מחובר ל-u ו-v ב-G', אזי הוא במרחק לכל היותר 1 מ-$C\cup F$.
- x הוא מבודד ב-G', ולכן x מבודד ב-G. כלומר $x\in F$ ולכן $x\in S$. כלומר, הוא במרחק לכל היותר 1 מ-S.
- $x\in V\setminus F$, ולכן יש בהכרח שכן y של x ב-G. מכיוון ש-C כיסוי ב-G, אזי $x\in C$ או $y\in C$. בשני המקרים, x במרחק לכל היותר 1 מ-S.

נניח שב-G' יש קבוצה שולטת T בגודל k' ונניח בה"כ כי T אינה מכילה קודקודים חדשים. נתבונן בקבוצה $D=T\backslash F$ ואז יתקיים:

$$|D|=|T\backslash F|=k+f-f=k$$

כעת, נראה כי D היא כיסוי ב-G. תהי $e\in E=\{x,y\}$. נתבונן בקודקוד החדש ב-G' שהגדרנו בתור v_e. נבחין כי v_e במרחק לכל היותר 1 מ-T ומכיוון שהוא לא מבודד, אזי הוא במרחק לכל היותר 1 מ-D. מכיוון שלפי ההגדרה $v_e\notin D$, נקבל כי v_e היא במרחק בדיוק 1 מ-D. כלומר, השכנים היחידים של v_e הם x ו-y ולכן $x\in D$ או $y\in D$ ולכן D היא כיסוי קודקודים ב-G.

<u>חישוב בזמן פולינומי</u>

ספירת הקודקודים המבודדים לוקחת $O\left(|V|^2\right)$, הוספת קודקודים לוקחת $O\left(|E|\right)=O\left(|V|^2\right)$ והוספת צלעות לוקחת $O\left(|V|^2\right)$ ולכן מדובר בזמן פולינומיאלי בגודל הגרף.

3.1.4 הוכחות על מסלולים המילטונים בגרף

תרגול מס' 10:

יום שני

13.12.21

(בדר)

הגדרה

מסלול המילטוני בגרף הוא מסלול שעובר בכל הקודקודים, בדיוק פעם אחת.

ראינו כי D-ST-HAMPATH $=\{\langle G,s,t\rangle \mid$ בגרף המכוון G קיים מסלול המילטוני בין s ובין t $\} \in$ NP.

נגדיר כעת גם את:

- HAMPATH-D $= \{\langle G\rangle \mid$ יש בגרף המכוון G מסלול המילטוני $\}$.
- HAMCYCLE-D $= \{\langle G\rangle \mid$ יש בגרף המכוון G מעגל המילטוני $\}$.
- HAMPATH-U $= \{\langle G\rangle \mid$ יש בגרף G מסלול המילטוני $\}$.
- HAMCYCLE-U $= \{\langle G\rangle \mid$ יש בגרף G מעגל המילטוני $\}$.

הוכחת NP-קשיות של D-ST-HAMPATH

נראה כעת כי D-ST-HAMPATH היא NP-קשה. נעשה זאת באמצעות רדוקציה מ-3SAT: כלומר, נראה כי 3SAT$\leq_P$D-ST-HAMPATH, על ידי כך שנראה כי נוסחה φ ספיקה אם ורק אם יש בגרף המכוון G מסלול המילטוני מ-s ל-t.

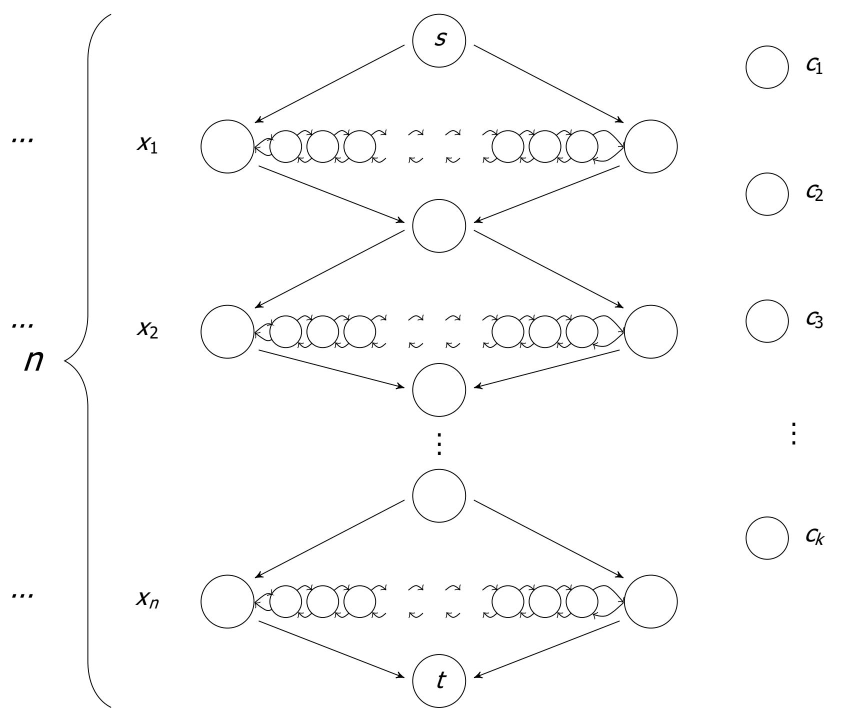
טרימנלוגיה

תחילה, נגדיר מספר סימונים:

- נסמן ב-n את מספר המשתנים ב-φ, כך ש-$x_1,\ldots,x_n$ הם המשתנים.
- נסמן ב-k את מספר הפסוקיות ב-φ, כך ש-$c_1,c_2\ldots,c_k$ הן הפסוקיות.

<u>בנייה</u>

עבור קלט G, ניצור מבנה יהלום, לכל קודקוד x[16]:



[16] התמונות בחלק זה בסיכום מתוך הסיכום של מאור מזרחי, סמסטר ב' 2021.

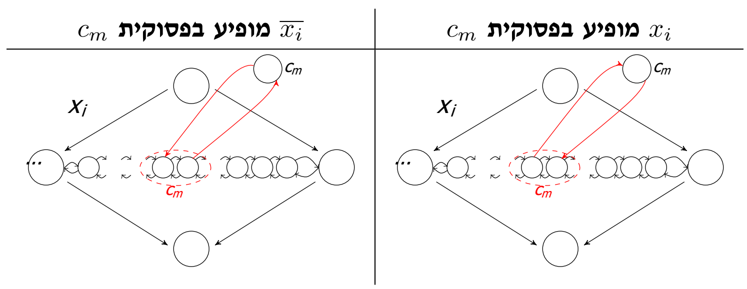
נשים לב לכמה נקודות חשובות בגרף בצורה זו שיצרנו אותו:

- הקודקודונים בשורות הארוכות, מתאימים לכל אחת מהפסוקיות, כך שלכל פסוקית נשים שני **קודקודנים - למשתנה ושלילתו.** מעבר לזה, נוסיף קודקודנים שהמטרה שלהם להפריד בין כל אחת מהפסוקיות.
- מתאפשר מעבר דו כיווני לקודקודוני x_i. כלומר, ניתן להגיע ל'צעד הבא', הן באמצעות צד ימין והן באמצעות צד שמאל.
- **הקודקודים המבודדים** מתאימים לכל אחת מהפסוקיות.
- טיול בצורת **zigzag** הוא הליכה דרך צד שמאל, ואז צד ימין, ואז צד שמאל וכו'.
- טיול בצורת **zagzig** הוא הליכה דרך צד ימין, ואז צד שמאל, ואז צד ימין וכו'.

כעת, נבחין כי אם x_i מופיע בפסוקית ה-c_m, נחבר את **צד שמאל** של הקודקודונים המתאימים לפסוקית, ל-c_m, 'ונחזור' לצד ימין שלהם.

אם x_i מופיע בפסוקית ה-c_m, נחבר את **צד ימין** של הקודקודונים המתאימים לפסוקית, ל-c_m, 'ונחזור' לצד שמאל שלהם.

אם גם x_i לא מופיע בפסוקית ה-c_m וגם $\overline{x_i}$ לא מופיע בפסוקית ה-c_m, נמשיך כרגיל עד הפסוקית הבאה.



<u>אבחנה 1</u>

עבור משתנה x ועבור פסוקית c המכילה את x, אם ההשמה $x = \mathbb{T}$ מספקת את c, אז אם נטייל בצורת **zigzag** ביהלום של x או אם ההשמה $x = \mathbb{F}$ מספקת את c, ואם נטייל בצורת **zagzig** ביהלום של x, נוכל לצאת מהיהלום לבקר בקודקוד הפסוקית c ולעבור לקודקוד הבא בשרשרת, ולהמשיך את הטיול בצורה דומה.

למה? נחשוב רגע אינטואיטיבית. אם ההשמה של x היא $\mathbb{T}$, אז נרצה כי אם x מופיע בפסוקית c, נוכל להגיע ל-c ולהתקדם הלאה. זאת נוכל לעשות כיוון שהכיוון הוא 'כלפי ימינה'.

<u>אבחנה 2</u>

אם יש מסלול המטייל ביהלום המתאים למשתנה x בצורת zigzag ומסלול זה קופץ מהיהלום, נוגע בקודקוד c וחוזר לקודקוד הבא בשרשרת, אזי $x = \mathbb{T}$ מספקת את c.

<u>אבחנה נוספת (של המסכם)</u>

אנחנו לא בהכרח חייבים שכל המשתנים יקבלו ערך $\mathbb{T}$. כלומר, ברור שייתכן לפעמים כי חלק מהמשתנים או צירופם עם שלילתם יקבלו ערך $\mathbb{F}$, הרי מספיק לנו שבכל פסוקית יהיה ערך $\mathbb{T}$ אחד.

נניח כי $S : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{\mathbb{F}, \mathbb{T}\}$ היא השמה מספקת של φ ונתאר מסלול המילטוני מ-s ל-t:

- נתחיל ב-s.
- עבור $1 \leq i$:

- אם $S(x_i)=\mathbb{T}$ נטייל ביהלום ה-i בצורת zigzag ואחרת, נטייל בצורת zagzig.
- עבור כל פסוקית c, אם לא ביקרנו ב-c, וגם $S(x_i)$ מספקת את c, נעבור (בזכות אבחנה 1) לבקר ב-c ונחזור להמשיך את הטיול שלנו ביהלום באותה צורה.

בצורה כזאת, יצרנו למעשה **מסלול המילטוני** כי עברנו בין כל הקודקודים ולכן ביקרנו ב-C_m פעם אחת, ובכל הקודקודים פעם אחת, וסיימנו[17].

בכיוון השני, נניח כי יש מסלול המילטוני מ-s ל-t, P.

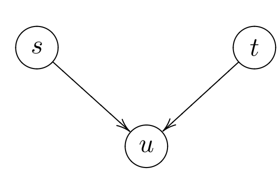
הגדרה
נאמר כי P הוא **נחמד** אם הוא עובר על היהלומים לפי הסדר ועובר בכל יהלום בצורת zigzag או zagzig, ואם הוא יוצא מיהלום ומבקר בקודקוד c אזי הוא חוזר מיד לקודקוד הבא בשרשרת.

<u>אבחנה</u>
אם מישהו לא נחמד, מתישהו הוא עושה את האקט הלא נחמד הראשון שלו.

עלינו להראות כי P נחמד.
נניח בשלילה כי P לא נחמד ונתבונן בפעם הראשונה שהוא עושה את האקט הלא נחמד הראשון שלו. כלומר, עובר ליהלום אחר, ולא הקודקוד הבא בשרשרת.
נניח כי יש לנו רצף של $a-b-d$ בתוך מעגל היהלומים הפנימים. במקרה זה, אנחנו מבקרים ב-a ואחרי זה ב-c (קודקוד מחוץ לשרשרת). בגלל ש-P הוא המילטוני, מתישהו נבקר ב-b. מכיוון שביקרנו ב-c ו-a הדרך היחידה שבה נוכל לבקר ב-b היא דרך השכן d, אבל במקרה זה נתקענו ב-b, בפרט לא נוכל להגיע ל-t.
כעת, מאבחנה 2 עולה כי קיימת השמה מספקת, כי הדרך היחידה שבה נוכל לבצע מסלול המילטוני הוא שלאחר יציאה לקודקוד c נחזור לקודקוד הבא בשרשרת.

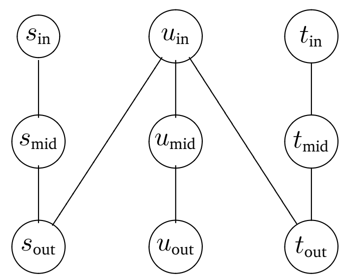
הוכחת NP-קשיות של U-ST-HAMPATH
נתבונן כעת ב-U-S–T-HAMPATH$=\{\langle G,s,t\rangle \mid$ בגרף G יש מסלול המילטון -מs -ל$t\}$.
נבצע רדוקציה U-ST-HAMPATH$\leq_P$D-ST-HAMPATH.
כלומר, עלינו להראות כי יש בגרף המכוון מסלול המילטוני מ-s ל-t אם"ם יש בגרף הלא מכוון מסלול המילטון מ-s' ל-t'.
הורדת הכיוונים לא תעזור, כיוון שאנו מוסיפים כיוונים שלא היו בגרף המקורי.
<u>בנייה</u>
בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$ וקודקודי s,t, הרדוקציה פולטת את הגרף הלא מכוון $G'=\left(V',E'\right)$ ו-$s_{\text{in}},t_{\text{out}}$ כאשר $V'=\{v_{\text{in}},v_{\text{mid}},v_{out}\mid v\in V\}$ ו-$E'=\{\{v_{\text{in}},v_{\text{mid}}\},\{v_{\text{mid}},v_{\text{out}}\}\mid \in V\text{v}\}\cup\{\{u_{\text{out}},v_{\text{in}}\}\mid (u,v)\in E\}$.

דוגמה



[17] האופציה לעבור לא מחייבת אותנו לעבור במסלול זה.

יעבור ל:



<u>נכונות</u>

נניח כי $P = s, u^1, u^2, \ldots, u^k, t$ הוא מסלול המילטוני ב-G.
נתבונן במסלול הבא: $s_{\text{ in}}, s_{\text{mid}}, s_{\text{out}}, u^1_{\text{in}}, u^2_{\text{mid}}, u^3_{\text{out}}, u^2_{\text{in}} \ldots u^k_{\text{in}} \ldots t_{\text{mid}}, t_{\text{out}}$ - מדובר במסלול המילטוני ב-G', כפי שרצינו.

בכיוון השני, נניח כי יש מסלול המילטוני P מ-s_{in} ל-t_{out}. נראה כי P לא יכול להשתמש במעברי $\text{in} \to \text{out}$. נניח בשלילה כי הוא לא עושה זאת, ונתבונן בפעם הראשונה שהוא עושה זאת $(v_{\text{in}}, h_{\text{out}})$. כעת, עבור v_{mid} ישנם שתי אופציות:

- אם v_{mid} מופיע ב-P לפני v_{in} אזי ביקרנו ב-v_{mid} דרך v_{out}, ומכיוון ש-P מתחיל מ-in של קודקוד כלשהו, נקבל כי הגענו ל-v_{out} דרך קודקוד אחר, ששונה מ-v_{mid}, כלומר הגענו מ-in של קודקוד כלשהו, בסתירה למינימליות.
- אם v_{mid} מופיע ב-P אחרי v_{out}, אזי במקרה זה הגענו ל-v_{mid} דרך v_{out} וכבר ביקרנו ב-v_{in} ולכן אנו תקועים ב-v_{mid}, כי ביקרנו בכל שכניו. בפרט, P לא מגיע ל-t_{out}.

אם כך, P לא כולל מעברי $\text{in} \to \text{out}$ ולכן בפרט המסלול הוא מהצורה
$s_{\text{ in}}, s_{\text{mid}}, s_{\text{out}}, u^1_{\text{in}}, u^2_{\text{mid}}, u^3_{\text{out}}, u^2_{\text{in}} \ldots u^k_{\text{in}} \ldots t_{\text{mid}}, t_{\text{out}}$ ולכן בפרט המסלול ההמילטוני הוא $s, u^1, u^2, \ldots, u^k, t$, כי אנו עוברים בכל הקודקודים ועוברים פעם בדיוק פעם אחת.

<u>חישוב</u>

מדובר בזמן פולינומיאלי, כי רק מכפילים את הקודקודים בתלות ב-V ומוסיפים קשתות כתלות ב-E ו-V.

3.1.5 קשרים בין מחלקות

הגדרה
נגדיר את coNP להיות $\text{coNP} = \left\{L \mid \overline{L} \in \text{NP}\right\}$.

הגדרה
L היא coNP-קשה אם לכל $K \in \text{coNP}$ מתקיים כי $K \leq_P L$ ואם בנוסף L ב-coNP אזי נאמר ש-L היא coNP-שלימה.

טענה

L היא NP-קשה אם ורק אם $\overline{L}$ היא coNP קשה.

הוכחה

נניח כי L היא NP-קשה ותהי $K \in \mathsf{coNP}$, אזי $\overline{K} \in \mathsf{NP}$. בעקבות כך, עולה כי $\overline{K} \leq_p L$ ולכן $K \leq_p \overline{L}$.
הכיוון השני דומה.

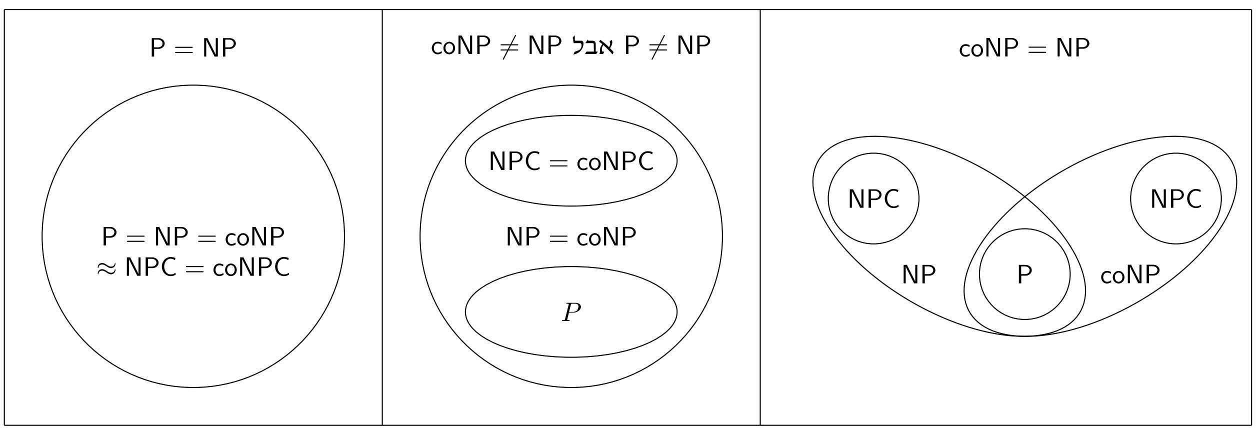
תרגול מס' 11:
יום שני
20.12.21
(בדר)

דוגמה

נתבונן בשפה $\overline{\mathsf{SAT}} = \{\langle\varphi\rangle \mid$ אין השמה מספקת של $\varphi\}$.
מדובר בשפה coNP שלימה, כי הרי SAT היא NP-שלימה.
בנוסף, נבחין כי $\mathsf{CONTRATICTION} = \{\langle\varphi\rangle \mid$ אין ל-φ השמה מספקת$\}$ שקולה ל-$\overline{\mathsf{SAT}}$ כי כל נוסחה אפשר להמיר ל-CNF.
ניתן להתבונן גם בשפה $\mathsf{VAL} = \{\langle\varphi\rangle \mid$ כל ההשמות מספקות$\}$ שהיא גם ב-coNP.

תרחישים אפשריים:

1. מתקיים כי P=NP. במקרה זה, NP=coNP וגם 'כמעט' שוות ל-NPC ולכן NPC=coNPC.
2. מתקיים כי P≠NP. במקרה זה, ייתכנו שתי אפשרויות:
   (א) מתקיים כי NP=coNP ולכן NPC=coNPC.
   (ב) מתקיים כי NP≠coNP ולכן NPC≠coNPC. והן אפילו זרות לחלוטין.



3.1.6 רדוקציות מ-SAT

תהי $A = \{\langle\varphi\rangle \mid$ φ היא נוסחת CNF כך שקיימת השמה מספקת ל-φ עם בדיוק 10 משתנים שהם $\mathbb{T}$ והשאר $\mathbb{F}\}$.
נרצה להוכיח כי שפה זו ב-P.
אלגוריתם פולינומיאלי עבור L עובד באופן הבא:

1. בהינתן נוסחה בוליאנית φ מעל המשתנים $x_1, x_2 \dots, x_n$, נבדוק אם φ היא מצורת CNF. אם לא, נדחה, אחרת נמשיך.

2. נעבור על כל תתי הקבוצות $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ בגודל 10, ועבור קבוצה S כנ"ל, נתבונן בהשמה:

$$\sigma_s\left(x_i\right) = \begin{cases} \mathbb{T} & i \in S \\ \mathbb{F} & i \notin S \end{cases}$$

3. נבדוק (בזמן פולינומיאלי) ש-σ_S מספקת את φ , ואם כן נקבל. אחרת, אם כל ההשמות עבור כל הקודקודים S אינן מספקות, נדחה.

<u>נכונות</u>

האלגוריתם מקבל אם ורק אם יש תת קבוצה S שההשמה σ_S מספקת את φ, אם ורק אם יש השמה מספקת שנותנת ערך $\mathbb{T}$ בדיוק ל-10 משתנים.

<u>חישוב</u>

עלינו לשים לב כי אנו עוברים מספר פולינומיאלי של השמות, כלומר:

$$\binom{10}{n} = \frac{n\left(n-1\right)\dots\left(n-9\right)}{10!} \leq n^{10}$$

נוסחה מאוזנת

הגדרה

נאמר שנוסחה בוליאנית φ מצורת CNF מאוזנת אם יש השמה σ כך ש:

- σ מספקת את φ.
- σ נותנת ללפחות $\frac{1}{3}$ משתנים ערך $\mathbb{T}$.
- σ נותנת ללפחות $\frac{1}{3}$ משתנים ערך $\mathbb{F}$.

נגדיר את השפה $L = \{\varphi \mid \text{מאוזנת CNF היא נוסחה מצורת } \varphi\}$.

נרצה להוכיח כי בעיה זו היא NP-שלימה.

תחילה, עלינו להוכיח שבעיה זו היא ב-NP וניתן לעשות זאת באמצעות מוודא פשוט, שמקבלת השמה של המשתנים, בודק אם הם היא מאוזנת, ולאחר מכן בודק אם היא מספקת.

נוכיח כעת כי מדובר בבעייה NP-שלימה באמצעות רדוקציה $\text{SAT} \leq_P L$.

<u>בנייה</u>

בהינתן קלט φ עם n משתנים, הרדוקציה מייצרת φ' כאשר φ' מוגדרת על ידי:

$$\varphi' = \varphi \wedge \underbrace{\left(\bigwedge_{i\in[n]} x_i \vee x_i \vee x_i\right)}_{\varphi_{\mathbb{T}}} \wedge \underbrace{\left(\bigwedge_{i\in[n]} \overline{y_i} \vee \overline{y_i} \vee \overline{y_i}\right)}_{\varphi_{\mathbb{F}}}$$

כאשר $x_1,\ldots,x_n$ ו-$y_1,\ldots,y_n$ הם משתנים חדשים.

נכונות

נניח כי $\varphi \in \mathsf{SAT}$, כלומר יש השמה מספקת ל-φ, אזי נוכל להרחיב אותה להשמה σ המספקת את φ' ע"י זה שניתן לשים ערך $\mathbb{T}$ לכל x_i וערך $\mathbb{F}$ לכל y_i. נשים לב כי σ מספקת את φ', כי ההשמה המקורית מספקת את φ וגם ההשמה $x_i = \mathbb{T}$ מספקת את $\varphi_{\mathbb{T}}$ וההשמה $y_i = \mathbb{F}$ מספקת את $\varphi_{\mathbb{F}}$. נבחין כי φ מאוזנת כי σ נותנת $\mathbb{T}$ ללפחות n משתנים ו-$\mathbb{F}$ ללפחות n משתנים. בעקבות כך $\varphi' \in L$.

נניח כי $\varphi' \in L$, כלומר יש השמה σ שמספקת את φ' ונותנת ערך $\mathbb{T}$ ללפחות $\frac{1}{3}$ משתנים וערך $\mathbb{F}$ ללפחות $\frac{1}{3}$ משתנים, אזי מכיוון שהיא מסופקת היא מספקת את הביטוי שיש ב-φ ומכיוון שב-φ לא מופיעים משתנים חדשים, נקבל כי הצמדים של σ על המשתנים המקוריים מספקים את φ.

3.2 סיבוכיות זיכרון

תרגול מס' 12:

יום שני

27.12.21

(בדר)

3.2.1 הוכחת PSPACE-שלימות של TQBF

נתבונן בשפה TQBF= $\{\langle\varphi\rangle \mid$ הנוסחה φ היא נוסחה בולאינת מכומתת לחלוטין נכונה$\}$.

הגדרה

נוסחא מכומתת לחלוטין היא מצב בו הנוסחה מתחילה עם כמתים, עבור המשתנים המופיעים בה.

דוגמאות

1. $\exists x \exists y \;\; (x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$.
2. $\forall x \exists y \;\; (x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$.

הגדרה חלופית

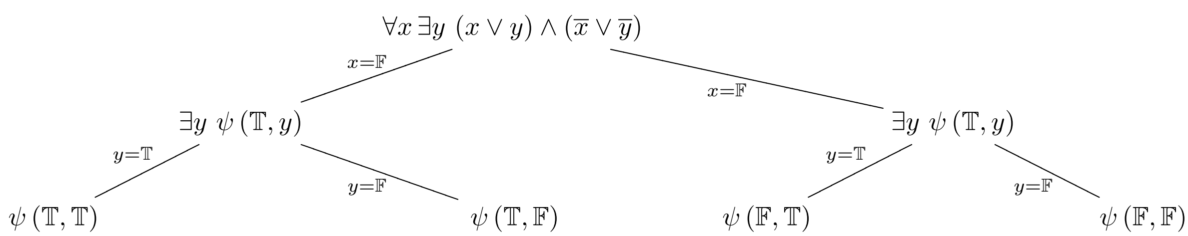
בהינתן נוסחה מכומתת לחלוטין φ, ערך האמת מוגדר בצורה רקורסיבית:

- אם φ חסרת כמתים, אזי היא הצבה ספציפית של המשתנים בביטוי $\psi\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ ובמקרה זה הערך של φ הוא הערך של הביטוי הבוליאני שנקבל אחרי ההצבה.
- אם $\varphi=\exists x_1\square x_2\ldots\square x_m\psi\left(x_1,\ldots,x_m\right)$ הערך של φ הוא $\mathbb{T}$ אם הערך של לפחות אחת מהנוסחאות הבאות הוא $\mathbb{T}$:
  1. $\square x_2\ldots\square x_m\psi\left(\mathbb{T},\ldots,x_m\right)$.
  2. $\square x_2\ldots\square x_m\psi\left(\mathbb{F},\ldots,x_m\right)$.
- אם $\varphi=\forall x_1\square x_2\ldots\square x_m\psi\left(x_1,\ldots,x_m\right)$ הערך של φ הוא $\mathbb{T}$ אם הערך של שתי הנוסחאות הבאות הוא $\mathbb{T}$:
  1. $\square x_2\ldots\square x_m\psi\left(\mathbb{T},\ldots,x_m\right)$.
  2. $\square x_2\ldots\square x_m\psi\left(\mathbb{F},\ldots,x_m\right)$.

נראה כי שפה זו ב-PSPACE.

נוכל להתייחס לנוסחה הרקורסיבית בתור עץ. למשל, נתבונן לרגע בנוסחה $\forall x\ \ \exists y\ \ \left(x\vee y\right)\wedge\left(\overline{x}\vee\overline{y}\right)$.

העץ המתאים הינו:



למעשה, על מנת להוכיח כי השפה היא ב-PSPACE מספיק שנראה כי נתן לעבור על השפה במקום פולינומיאלי.

על מנת לעבור על העץ במקום פולינומיאלי, נריץ פרוצדורה דמויית DFS. כיצד?

האלגוריתם הבא מכריע את נוסחה זו בשטח פולינומי.

<u>קלט:</u> φ.

<u>פלט:</u>

- אם φ חסרת כמתים, אזי היא ביטוי בוליאני עם הצבה, נחשב את φ ונחזיר את הערך של הביטוי.
- אם $\varphi=\exists x\varphi'$ אזי נציב $x=\mathbb{F}$ ונחשב רקורסיבית את $\varphi\left(x=\mathbb{F}\right)$, אחרי זה נחשב את $\varphi\left(x=\mathbb{T}\right)$, אם לפחות אחת משתי הקריאות הרקורסיביות החזירה $\mathbb{T}$ נחזיר $\mathbb{T}$. (אם יש $\forall$, נצטרך ששני הביטויים יחזירו $\mathbb{T}$)

בכל פעם אנחנו זוכרים מסלול אחד, כלומר לכל קודקוד אנחנו בודקים האם יש להמשיך לבדוק אותו או לא. כיוון שההצבה עצמה (אורך המסלול) היא בסך הכל n, וכיוון שמספר הפסוקיות הוא m, אזי סך הכל כמות המקום הנדרשת היא $O\left(m\cdot n\right)=O\left(n^2\right)$ (מדובר בסדרה חשבונית).

נזכיר את ההגדרה של PSPACE-שלימה:

הגדרה
נאמר כי L היא PSPACE-שלימה אם:

1. $L \in$ PSPACE.
2. L היא PSPACE-קשה (לכל $L' \in$ PSAPCE $L' \leq_P L$).

טענה
לכל $L \in$PSPACE מתקיים כי $L \leq_P$TQBF.

הוכחה
תהי $L \in$PSPACE ותהי M מ"ט המכריעה את L בשטח $S\left(n\right)$ כאשר S הוא פולינום כלשהו.
ראינו בהרצאה כי זמן הריצה של M הוא לכל היותר $t = 2^{\alpha \cdot S(n)}$ כאשר $\alpha > 0$.
בהינתן x, נרצה כי הרדוקציה תפלוט נוסחה מכומתת לחלוטין φ שתהיה נכונה רק אם M מקיים את x.

תחילה, נעבוד על טרמינולוגית קידוד של מכונת טיורינג.

3.2.2 קידוד של קונפיגורציות של מ"ט

תהי M מ"ט שמשתמשת בלכל היותר S תאי סרט.
נגדיר משתנים:

- תוכן של הסרט:
  לכל $i \in [s]$, לכל אות $a \in \Gamma$, נגדיר X_i, a שיקבל $\mathbb{T}$ אם"ם $F\left[i\right] = a$.
- הראש המצביע: לכל $i \in [s]$, נגדיר $y_i = \mathbb{T}$ אם"ם הראש המצביע נמצא ב-$F\left[i\right]$.
- המצב הנוכחי: לכל $q \in Q$ נגדיר $Z_q = \mathbb{T}$ אם"ם מצב נוכחי של המכונה הוא q.

נוסחה מקודדת: $\varphi_{\text{valid}}\left(c\right) = \mathbb{T}$ רק אם השמה מספקת מגדירה קונפ' חוקית - יש לה מצב אחד, בכל תא בסרט רשומה אות אחת, והראש הקורא נמצא במקום בודד:

$$\varphi_{\text{valid}}\left(c\right) = \bigwedge_{i\in[s]} \bigvee_{a\in\Gamma} \left(\underbrace{x_{i,a} \wedge \bigwedge_{b\in\Gamma\setminus\{a\}} \overline{x_{i,b}}}_{\text{בכל תא רשומה אות אחת}}\right) \wedge \bigvee_{i\in[s]} \left(\underbrace{y_i \wedge \bigwedge_{j\in[s]\setminus\{i\}} \overline{y_j}}_{\text{הראש הקורא במקום אחד}}\right) \wedge \bigvee_{q\in Q} \left(\underbrace{z_q \wedge \bigwedge_{r\in Q\setminus\{q\}} \overline{z_r}}_{\text{כל קונפ' ב-}q\text{ בודד}}\right)\Bigg)$$

אם כך, אורך הנוסחא הוא $O\left(S^2\right)$ (Q ו-Γ הם קבועים).

הרעיון: נרצה כי $\varphi\left(c_1, c_2\right)$ הוא $\mathbb{T}$ רק אם c_1 עוקבת ל-c_2.
נתבונן ב-$i \in [s]$ וב-$a \in \Gamma$ ו-$q \in Q$. נניח בלי הגבלת הכלליות כי $\delta\left(q, a\right) = \left(r, b, \mathsf{R}\right)$ ואז נגדיר:

$$\psi_{i,a,q}\left(c_1, c_2\right) = \left(x^1_{i,a} \wedge y^1_i \wedge z^1_q\right) \to \left(x^2_{i,b} \wedge y^2_{i+1} \wedge z^2_r \wedge \bigwedge_{j\in[d]\setminus\{i\}} \bigwedge_{d\in\Gamma} \left(x^1_{j,d} \leftrightarrow x^2_{j,d}\right)\right)$$

כלומר, הזננו את x_i להכיל כעת את b במקום את a, הראש הקורא מופיע כעת בתא y_{i+1}, המצב הופך ל-r, וכל שאר המצבים נשארים כמו שהם.
(ובמקרה של L נבצע פעולה הפוכה).
ולכן נגדיר לבסוף:

$$\varphi\left(c_1,c_2\right)=\varphi_{\text{valid}}\left(c_1\right)\wedge\varphi_{\text{valid}}\left(c_2\right)\wedge\bigwedge_{i\in[s]}\bigwedge_{a\in\Gamma}\bigwedge_{q\in Q}\psi_{i,a,q}\left(c_1,c_2\right)$$

כלומר, כל אחד מהקונפ' חוקיות, וגם כל המעברים חוקיים. אם כך, גם אורך נוסחא זו הוא $O\left(S^2\right)$ (כל אחד מהביטויים הוא $O\left(S^2\right)$).

<u>הנחות</u>

- נניח שיש ל-M קונפ' אחת מקבלת.
- נסמן את הקונפ' ההתחלית של M על x ב-c_0.

ניתן לעשות זאת בדרך נאיבית באמצעות:

$$\varphi=\exists c_1,c_2,\ldots,c_t\quad\left(\left(c_1=c_0\right)\wedge\left(c_t=c_{\text{acc}}\right)\wedge\bigwedge_{i=1}^{t-1}\varphi\left(c_i,c_{i+1}\right)\right)$$

הבעיה בדרך זו היא כי t יכול להיות אקספוננציאלי ב-S ואנו צריכים לעשות רדוקציה **פולינומיאלית.**
ננסה לפתור זאת באמצעות רקורסיה.
בהינתן c_1,c_2 נרצה להגדיר $\varphi\left(c_1,c_2\right)$ שתהיה נכונה רק אם c_2 ישיגה מ-c_1 עם לכל היותר k צעדים.
אפשר להגדיר את φ_k בצורה רקורסיבית:
בסיס

$$\varphi\left(c_1,c_2\right)=\left(c_1=c_2\right)\vee\varphi\left(c_1,c_2\right)$$

צעד'

$$\varphi_k\left(c_1,c_2\right)=\exists c_m\left(\varphi_{k/2}\left(c_1,c_m\right)\wedge\varphi_{k/2}\left(c_m,c_2\right)\right)$$

הרעיון כאן הוא שאפשר להגיע לקונפ' אמצעית כלשהי ב-$k/2$ צעדים, וממנה לקונפיגורציה מקבלת.
הבעיה, שגם כאן מדובר בזמן ריצה אקספוננציאלי ולא פולינומיאלי, למה? אמנם בעת בניית הרקורסיה אנחנו בונים עץ עם גובה פולינומיאלי, אבל למעשה אנחנו בונים עץ עם מספר אקספוננציאלי של קודקודים, ולכן זמן הריצה הוא אקספוננציאלי.
לכן, נעשה טריק קטן: במקום לשאול אם יש c_m שעובד עם c_1 ו-c_2, נאחד את שתי הנוסחאות הללו לאחת:

$$\varphi_k\left(c_1,c_2\right)=\exists c_m\forall c_3,c_4\left(\left(\left(c_3=c_1\right)\wedge\left(c_4=c_m\right)\right)\vee\left(\left(c_3=c_m\right)\wedge\left(c_4=c_2\right)\right)\right)\rightarrow\varphi_{k/2}\left(c_3,c_4\right)$$

כלומר, הבעיה הייתה שהיה לנו חישוב כפול ומיותר (כמו שהיה לנו למשל בעת רקורסיה שנפתרה עם תכנון דינמי), כיוון שדרגת הפיצול הייתה 2. כעת יש קריאה רקורסיבית אחת.
באמצעות כמת ה-$\forall$ אנחנו למעשה יכולים לחסוך את החישוב הזה - ברגע שאחד מה-c_3,c_4 לא נכון, אזי אין לנו טעם להמשיך לבאים.
נבחין כי כל המרכיבים הם פולונימאלים ב-$S\left(n\right)$ וגם כל החישוב של הרדוקציה לוקח $S\left(n\right)$.

3.2.3 משפט ההיררכיה בזמן

תרגול מס' 13:

יום שני

03.01.22

(בדר)

הגדרה

נאמר כי t היא חשיבה בזמן אם יש מ"ט שמקבלת בתור קלט את 1^n - היצוג האונארי ומחשבת $t\left(n\right)$ בבינארי בזמן שהוא $O\left(t\left(n\right)\right)$.

אינטואיציה

למעשה, אנחנו מנסים להמיר n בייצוג אונארי לייצוג בינארי, כך ש'ההעברה' לייצוג בינארי לא תהיה 'כבדה' יותר מהפעלת הפונקציה עצמה. למשל, אם יש פונקציה t שקטנה אסימפטוטית מ-$n\log n$, אזי היא לא חשיבה בזמן, כיוון שההמרה עצמה לוקחת $O\left(n\log n\right)$ ולכן החישוב אינו $O\left(t\left(n\right)\right)$.

משפט

תהי $t:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך ש-t חשיבה בזמן, אזי יש שפה L שניתנת להכרעה בזמן $O\left(t\left(n\right)\right)$, אבל לא ניתנת להכרעה בזמן $o\left(\frac{t(n)}{\log(t(n))}\right)$.

מסקנה 1

לכל $2\geq c_2 > c_1$, מתקיים כי $\mathsf{TIME}(n^{c_2})\subsetneq\mathsf{TIME}(n^{c_1})$.

אם נתבונן ב-$t=n^{c_1}$ יש שפה $L\in\mathsf{TIME}(n^{c_1})$, אבל לא ניתנת להכרעה בזמן $o\left(\frac{n^{c_1}}{\log(n^{c_1})}\right)$, בפרט $L\notin\mathsf{TIME}(n^{c_2})$.

מסקנה 2

מתקיים כי $\mathsf{P}\subsetneq\mathsf{EXPTIME}$.

הוכחה

נתבונן ב-$t=2^{n^2}$. קיימת בהכרח שפה $L\in\mathsf{TIME}\left(2^{n^2}\right)$ אבל לא ניתן להכריע את L בזמן $o\left(\frac{2^{n^2}}{n^2}\right)$, ולכן L אינה ניתנת להכרעה בזמן $O\left(2^n\right)$. לכל k, אנו יודעים כי $n^k=O\left(2^n\right)$, ולכן בפרט $L\notin\mathsf{TIME}\left(2^k\right)$, כלומר $L\notin\mathsf{PTIME}$.

למה

יש מ"ט S כך שבהינתן קלט $\langle M,w,t\rangle$ ו-S יכולה לחשב את הקונפ' ה-t-ית של ריצת M על w, בזמן $O\left(t\log\left(t\right)\cdot p\left(\langle M\rangle\right)\right)$ עבור p מסוים.

הוכחת המשפט

תהי:

$$L=\left\{\left\langle M\#0^k\right\rangle \mid \begin{array}{c} M \text{ אינה מקבלת } \langle M\rangle\#0^k \text{ בזמן } t'=\frac{t(n)}{p(m)\cdot\log(t(n))} \\ \text{כאשר } n=\left|\langle M\rangle\#0^k\right|,\ m=\left|\langle M\rangle\right|,\ p \text{ פולינום} \end{array}\right\}$$

תחילה, נראה כי $L\in\mathsf{TIME}(t\left(n\right))$.

בהינתן קלט $\langle M\rangle \#0^k$, נחשב את $t(n)$ בבינארי בזמן $O(t(n))$ (אפשרי כי t חשיבה בזמן, לפי הנתון בשאלה).
לאחר מכן, נחשב את $\log(t(n))$, ונחשב את $p(m)$.
כעת, נחשב את t', ונריץ את M על $\langle M\rangle \#0^k$ במשך t' צעדים ונקבל אם M לא קיבלה, אחרת נדחה. ההרצה האחרונה אפשרית, ומהלמה הקודמת נקבל:

$$t'\log(t')\cdot p(\langle M\rangle) < t'\log(t(n))\cdot p(|m|) = O(t(n))$$

כלומר, זמן הריצה הכולל הוא $O(t(n))$.

כעת, נניח בשלילה שיש מ"ט M שמכריעה את L בזמן $r(n) = o\left(\frac{t(n)}{\log(t(n))}\right)$.
נתבונן ב-n מספיק גדול, כך ש-$n \geq m+1$ וגם $r(n) < \frac{t(n)}{p(m)\cdot\log(t(n))}$ (אפשר לבחור כזה כי $\frac{1}{p(m)}$ הוא קבוע).
כמו כן, ניקח k כך ש-$n = \left|\langle M\rangle \#0^k\right|$.
אם M מקבלת את $\langle M\rangle \#0^k$ תוך $r(n)$ אזי נקבל כי:

$$\frac{t}{p(m)\log(t)}\cdot\log(t)\cdot p(m) = t = t(n)$$

עולה כי $\langle M\rangle \#0^k \notin L$, בסתירה לכך ש-$\langle M\rangle$ מכריעה את L בזמן $r(n)$.
אם M אינה מקבלת את $\langle M\rangle \#0^k$, בזמן $r(n)$, אזי בפרט $\langle M\rangle \#0^k \in L$, בסתירה.
שימו לב שמדובר בהוכחה בלכסון, כמו זאת שעשינו בעבר כבר עבור A_{TM}.

קיים גם משפט דומה עבור SPACE.

3.2.4 משפט ההיררכייה במקום

הגדרה
נאמר כי t היא חשיבה במקום אם יש מ"ט שמקבלת בתור קלט את 1^t ומחשבת $t(n)$ בבינארי במקום שהוא $O(t(n))$.

משפט
תהי $t = \Omega(\log(n))$ וגם חשיבה במקום, אזי יש שפה L שניתנת להכרעה במקום $O(t(n))$, אבל לא במקום $o(t(n))$.

3.3 סיבוכיות מקום תת ליניארית

תחילה, נזכיר את ההגדרות שלמדנו בהרצאה:

הגדרה
המחלקה LOGSPACE היא אוסף כל השפות שיש מ"ט דטרמיניסטית שמכריעה את L עם סרט עבודה שמשתמש ב-$O(\log n)$ תאים על מילה באורך n.

הגדרה
המחלקה NLOGSPACE היא אוסף כל השפות שיש מ"ט אי דטרמיניסטית שמכריעה את L עם סרט עבודה שמשתמש ב-$O\left(\log n\right)$ תאים על מילה באורך n.

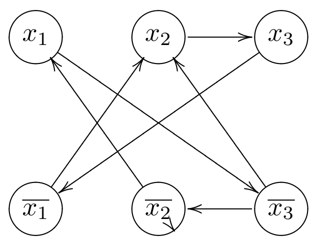
3.3.1 השפות 2SAT ו-MAX2SAT

נגדיר את השפה $\{\langle\varphi\rangle \mid$ ספיקה CNF2 היא נוסחת $\varphi\}$ = 2SAT ונראה כי היא ב-P.

דוגמה
ניקח את הנוסחה:

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_3 \vee x_2)$$

נוכל להסתכל על זה בתור גרף:



כלומר, הקודקודים הם המשתנים ושלילתם, ולכל פסוקית מהצורה $a \vee b$ נוסיף צלעות מהצורה $(\overline{a}, b)$ ו-$\left(\overline{b}, a\right)$.
פורמלית, בהינתן משתנים $x_1, \ldots, x_n$ ונוסחה φ , נייצר את הגרף $G_\varphi = (V_\varphi, E_\varphi)$ כאשר הם מוגדרים על ידי:

- $V_\varphi = \{x_1, \ldots, x_n, \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}\}$.
- $E_\varphi = \left\{(a, b) \mid (\overline{a} \vee b) \in \varphi \vee \in \varphi\left(a \vee \overline{b}\right)\right\}$.

אם יש מסלול מ-α ל-β בגרף, נסמן $\alpha \mapsto \beta$.

אינטואיציה

שימו לב שלקחנו למשל פסוקית $(x_1 \vee x_2)$ ושמנו בגרף $(\overline{x_1}, x_2)$ ו-$(\overline{x_2}, x_1)$. בשביל שהפסוקית הזאת תהיה ספיקה, צריך שיהיה לפחות ערך $\mathbb{T}$ ערך. אם נניח ש-$x_1 = \mathbb{F}$ אזי בהכרח $x_2 = \mathbb{T}$, אחרת הנוסחה לא ספיקה. מבחינת הגרף, אם $x_1 = \mathbb{F} \rightarrow \overline{x_1} = \mathbb{T}$ ולכן x_2 חייב להיות $\mathbb{T}$. לכן בהכרח בשביל שהפסוקית תהיה ספיקה, הצלעות מבצעות יחס של גרירה.

אבחנות:

- אם ניתן ל-α את הערך $\mathbb{T}$ וגם מתקיים כי β ישיגה מ-α, על מנת לספק את φ, עלינו לתת ערך $\mathbb{T}$ גם ל-β.
- אם $\beta \mapsto \alpha$ אזי $\overline{\alpha} \mapsto \overline{\beta}$.

- אם קיים משתנה x כך ש-$\overline{x} \mapsto x$ וגם $x \mapsto \overline{x}$, אזי φ אינה ספיקה.

טענה

אם לכל x מתקיים כי $\overline{x} \not\mapsto x$ או $x \not\mapsto \overline{x}$, אזי φ ספיקה.

הוכחה

אלגוריתם שמוצא השמה מספקת:

אלגוריתם 11 אלגוריתם למציאת השמה מספקת

---

1. כל עוד יש משתנה x שלא קיבל ערך:
   (א) אם $\overline{x} \not\mapsto x$ אזי $\alpha = x$, אחרת $\alpha = \overline{x}$ (בהכרח $\overline{\alpha} \not\mapsto \alpha$)
   (ב) $\alpha = \mathbb{T}$ ו-$\overline{\alpha} = \mathbb{F}$.
   (ג) לכל ליטרל β שמקיים כי $\alpha \mapsto \beta$, יתקיים כי $\beta = \mathbb{T}$ ו-$\overline{\beta} = \mathbb{F}$.
2. תחזיר את ההשמה.

נוכיח שלא ייתכן כי האלגוריתם מספק השמה לא אפשרית לליטרל (למשל $x_i = \mathbb{T}$ ו-$\overline{x_i} = \mathbb{T}$) נבחין באופציות שיכולות להתקיים:

1. באיטרציה כלשהי, מתקיים כי גם $\alpha \mapsto \beta$ וגם $\alpha \mapsto \overline{\beta}$. אזי בהכרח $\beta = \mathbb{T}$ וגם $\beta = \mathbb{F}$. אך מאיך שבנינו את הגרף, בהכרח $\beta \mapsto \overline{\alpha}$. ואז מטרנזיטיביות, יתקיים כי $\alpha \mapsto \beta \mapsto \overline{\alpha}$, כלומר כי $\alpha \to \overline{\alpha}$, בסתירה לבחירה שעשינו בהתחלה.
2. באיטרציה כלשהי $\alpha \mapsto \beta$ ולאחר מכן באיטרציה אחרת $\alpha' \to \overline{\beta}$. כלומר, באיטרציה אחת יתקיים כי $\beta = \mathbb{T}$ ובאחרת $\overline{\beta} = \mathbb{T}$. אך בהכרח מכך עולה כי קיים מסלול $\beta \to \overline{\alpha'}$. כלומר בהכרח $\alpha \mapsto \alpha'$ - כלומר כבר באיטרציה של α α' היה אמור לקבל ערך.
3. α קיבל ערך $\mathbb{T}$ ובאיטרציה אחרת $\overline{\alpha} \mapsto \alpha'$, אבל אז $\alpha \mapsto \overline{\alpha'}$ - כלומר α' היה אמור לקבל ערך כבר באיטרציה של α.

אם כך, בהכרח קיבלנו השמה אפשרית לליטרל, ומצאנו האם קיימת השמה מספקת.
נראה כי ההשמה מספקת, בהינתן פסוקית $a \vee b$:

1. אם $a = \mathbb{T}$, סיימנו.
2. אם $a = \mathbb{F}$ אזי $\overline{a} \mapsto b$ ולכן $b = \mathbb{T}$.

ניתן להראות כי השפה גם ב-NL, באמצעות הוכחה כי $\overline{\text{2SAT}} \in \text{NL}$ וממילא כי $\text{2SAT} \in \text{coNL}$, וממשפט שנראה בהרצאה כי NL=coNL.
מתי $L \in \overline{\text{2SAT}}$? אם קיים i כך ש- $x_i \to \overline{x_i}$ וגם $\overline{x_i} \to x_i$, ולכן עלינו למצוא אלגוריתם שמוצא זאת.
האלגוריתם יפעל כך:

1. מנחש משתנה x_i.
2. בודק אם יש מסלולים $x_i \to \overline{x_i}$ וגם $\overline{x_i} \to x_i$. אם שניהם קיימים, מקבל, אחרת דוחה.

האלגוריתם הוא א"ד ומשתמש במקום לוגריתמי וממילא מתקיים כי $\overline{\text{2SAT}} \in \text{NL}$, כנדרש.

השפה MAX2SAT

נתבונן בשפה:

תרגול מס' 14:

יום שני

10.01.22

(מאיה)

$$\text{MAX2SAT} = \left\{ \langle \varphi, k \rangle \mid \begin{array}{c} \text{יש השמה שמספקת לפחות } k \text{ פסוקיות} \\ \text{ו-} \varphi \text{ היא נוסחת 2CNF} \end{array} \right\}$$

טענה

MAX2SAT היא NP-שלימה.

הוכחה

ברור כי $\text{MAX2SAT} \in \text{NP}$. המוודא מקבל $\langle \varphi, k, \alpha \rangle$ כאשר α היא השמה, ובודק ש-α מספקת לפחות k פסוקיות ב-φ. ניתן לעשות זאת בקלות בזמן פולינומיאלי.

כעת, נראה כי MAX2SAT היא NP-קשה, באמצעות רדוקציה $\text{3SAT} \leq_P \text{MAX2SAT}$.

<u>בנייה</u>

לכל פסוקית C_i ב-φ תיצור 10 פסוקיות חדשות שנסמנן ב-D_i כך שלכל $C_i = (a \vee b \vee c)$, נגדיר:

$$D_i = (a \vee a) \wedge (b \vee b) \wedge (c \vee c) \wedge (w_i \vee w_i) \wedge (a \vee \overline{w_i}) \wedge (b \vee \overline{w_i}) \wedge (c \vee \overline{w_i}) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge (\overline{b} \vee \overline{c}) \wedge (\overline{a} \vee \overline{c})$$

בהנחה שיש ב-φ k פסוקיות, $\langle \psi, 7k \rangle$ כאשר $\psi = \bigvee_{i=1}^{k} D_i$.

<u>נכונות</u>

לכל $1 \leq i \leq k$, נביט באפשרויות:

מספר הפס' המסופ' ב-D_i אם $w_i = \mathbb{T}$	מספר הפס' המסופ' ב-D_i אם $w_i = \mathbb{F}$	מספר הספיקים ב-$a \vee b \vee c$
4	6	0
6	7	1
7	7	2
7	7	3

נשים לב כי אם יש ל-φ השמה מספקת, אזי לכל C_i יש לפחות ליטרל אחד שמקבל $\mathbb{T}$ ולכן ניתן למצוא השמה ל-w_i-ים, כך שאם כל D_i מכיל לפחות 7 מתוך 10, הפסוקית מסתפקת.

אם φ לא ספיקה לכל השמה, לפחות עבור i אחד הפסוקית C_i לא מכילה אף ליטרל T ולכן ב-D_i אין השמה שמספקת יותר מ-6 פסוקיות, ולכן ב-φ יש פחות מ-$7k$ פסוקיות ספיקות.

<u>חישוביות</u>

ברור כי הבעייה פולינומיאלית כי מכפילים פי 10 את מספ' הפסוקיות ומוסיפים מספר ליניארי של משתנים.

3.3.2 קשירות חזקה

הגדרה

נאמר כי גרף G הוא "קשיר חזק" אם לכל $x, y \in V(G)$, יש מסלולים ב-G מ-x ל-y וגם מ-y ל-x.

נתחיל להתבונן בשפה SC: Strongly Connected Component, שמוגדרת כך:

$$\mathsf{SC} = \{\langle G\rangle \mid \text{גרף מכוון קשיר חזק } G\}$$

נרצה להראות כי SC היא NL-שלימה.
קודם כל, עלינו להראות כי $\mathsf{SC} \in \mathsf{NL}$[18].
<u>הרעיון</u>
נשתמש בעובדה ש-$\mathsf{PATH} \in \mathsf{NL}$ וכמו כן בעובדה ש-NL=coNL (ממשפט אימרמן).
ממשפט אימרמן עולה כי $\overline{\mathsf{PATH}} \in \mathsf{NL}$ ולכן קיימת מכונה א"ד M שמכריעה את $\overline{\mathsf{PATH}}$ במקום לוגריתימי, ולכן נוכל לבנות מכונה א"ד שמכריעה את $\overline{\mathsf{SC}}$ במקום לוגריתמי. משימוש נוסף (!) במשפט אימרמן, נקבל כי $\mathsf{SC} \in \mathsf{NL}$.
המכונה שלנו תפעל כך:

1. תבדוק שהקלט מהצורה הנכונה, אם לא תדחה.
2. תעשה "ניחוש" א"ד של שני קודקודים x, y ותסמלץ את המכונה של $\overline{\mathsf{PATH}}$ על G, x, y. אם היא מקבלת, תקבל, אחרת, תדחה.

מכיוון שהמכונה שמכריעה את $\overline{\mathsf{PATH}}$ פועלת במקום א"ד לוגירתמי ומעבר לכך, נזכור בכל ריצה שני קודקודים, נדע שגם המכונה שלנו תפעל במקום לוגריתמי.

כעת נראה כי SC היא NL-קשה ונסיים. נעשה זאת באמצעות רדוקציה $\mathsf{PATH} \leq_L \mathsf{SC}$.
<u>בנייה</u>
בהינתן $\langle G, s, t\rangle$, מכונת הרדוקציה תחזיר גרף חדש G' כך ש-G' זהה ל-G, פרט לכך שלכל קודקוד $v \in V(G)$ נוסיף שתי צלעות ל-G': (v, s) ו-(t, v).

<u>סיבוכיות מקום</u>
הרדוקציה נעשית במקום לוגריתמי, שכן ההעתקה של G לפלט נעשית "גורם אחר גורם" - בכל פעם לא נשמור יותר מתיאור של רכיב אחד בסרט העבודה, לאחר מכן נעבור שוב על הקדקודים לפי סדר, נכתוב בכל פעם שתי צלעות על סרט העבודה, נעתיק לסרט הפלט, נמחק את סרט העבודה ונמשיך הלאה.

<u>נכונות</u>
אם $\langle G, s, t\rangle \in \mathsf{PATH}$ אזי יש מסלול מ-s ל-t ב-G ולכן גם ב-G'. כעת, יהיו $x, y \in G'$: מסלול מ-x ל-y נראה כך. קיימת צלע מ-x ל-s ומ-s ל-t, וגם צלע מ-t ל-y ולכן x מוביל ל-y. כלומר $\langle G'\rangle \in \mathsf{SC}$.
אם $\langle G, s, t\rangle \notin \mathsf{PATH}$ אזי אין מסלול מ-s ל-t ב-G ונראה כי אין מסלול מ-s ל-t ב-G'. אכן, לא הוספנו צלעות יוצאות מ-s ולא הוספנו צלעות נכנסות ל-t ולכן לא ייתכן כי יצרנו מסלול מ-s ל-t, אם לא היה כזה ב-G המקורי. כלומר $\langle G'\rangle \notin \mathsf{SC}$.

הוכחת NL-שלימות של 2SC
נראה כעת שפה אחרת: $\mathsf{2SC} = \{\langle G\rangle \mid \text{יש בדיוק שני רכיבי קשירות חזקה } G\text{-ל}\}$.

[18] עד כה הוכחת השייכות הייתה החלק הקל. בשלב זה, דווקא הוכחת השייכות יכולה להיות קשה יותר.

נראה כי 2SC היא NL-שלימה.
תחילה, נראה כי 2SC היא ב-NL. נעשה על ידי שנראה כי $\overline{\text{2SC}} \in \text{NL}$ ובשימוש במשפט אימרמן.
נבחין כי מילה w ב-$\overline{\text{2SC}}$ אם ורק אם אחד משלושת התנאים הבאים מתקיימים:

1. w אינה קידוד חוקי של גרף.
2. w מייצגת קידוד של גרף G, בעל רכיב קשירות אחד.
3. w מייצגת קידוד של גרף G בעל לפחות שלושה רכיבי קשירות.

נבחין כי את תנאים 1 ו-2 ניתן לבדוק במקום לוגריתמי, שכן 1 דורש מעבר על הקלט ובדיקת תקינות ואילו את 2 ניתן לפתור באמצעות המכונה שמכריעה את SC.
אם כך, נותר רק להראות כיצד אפשר לבדוק את תנאי 3.
נבחין כי אם יש שלושה רכיבי קשירות חזקה, אזי קיימים לפחות 3 קודקודים בגרף, כך שבין כל שניים מתוכם, לא קיים מסלול, לפחות בכיוון אחד. לכן, על המכונה לנחש באופן א"ד שלושה קודקודים ב-G, x, y, z, ולכל זוג $t, v \in \{x, y, z\}$, המכונה תסמלץ את המכונה של $\overline{\text{PATH}}$. אם לפחות בכיוון אחד לכל זוג, המכונה של $\overline{\text{PATH}}$ קיבלה, המכונה תקבל.
המכונה עובדת במקום לוגריתימי, שכן המכונה צריכה לזכור 6 מהזוגות $+\ 3$ קודקודים, ולהריץ את המכונה של $\overline{\text{PATH}}$ - דבר שדורש מקום א"ד לוגריתמי.

כעת, נראה כי 2SC היא NP-קשה, באמצעות $\text{SC} \leq_P \text{2SC}$.
<u>בנייה</u>
f תפעל כך: בהינתן $\langle G \rangle$, תחזיר גרף חדש G' שמתקבל על ידי העתקת G והוספת קודקוד מבודד יחיד.

<u>נכונות</u>
אם G קשיר חזק, אז ב-G' יש בדיוק שני רכיבי קשירות חזקים - G המקורי $+$ קודקוד יחיד שמהווה רכיב קשירות חזקה.
אם G לא קשיר חזק, אזי G מכיל לפחות שני רכיבי קשירות חזקה, ולכן ב-G' יש לפחות 3 רכיבי קשירות חזקה, ובפרט $G' \notin \text{2SC}$.

<u>סיבוכיות מקום</u>
מעתיקים את G - מקום לוגריתימי, ומוסיפים קודקוד יחיד.

חלק III

נספחים

1 שפות מוכרות ואפיונן

1.1 חישוביות

[19]

1.1.1 שפות ב-RE \ R

שם השפה	הגדרת השפה	אַפיון	היכן הוכחנו
A_{TM}	$\{\langle M,w\rangle \mid$ M מקבלת את $w\}$	RE \ R	הרצאה
$\mathsf{HALT}_{\mathsf{TM}}$	$\{\langle M,w\rangle \mid$ M עוצרת על $w\}$	RE \ R	הרצאה
$\mathsf{REPEAT}_{\mathsf{TM}}$	$\{\langle M,w\rangle \mid$ M אינה עוצרת על w וריצת M חוזרת לפחות פעמיים על אותה קונפ' $\}$	RE \ R	תרגול 7
PCP	$\{\langle e_1,\ldots,e_n\rangle \mid$ קיים match ב $e_1,\ldots,e_n\}$	RE \ R	הרצאה 15
ללא שם	$\{\langle M,w\rangle \mid$ קיימת $w\in\Sigma^*$ כך ש-M מקבלת את w אחרי $\lvert w\rvert$ צעדים $\}$	RE \ R	תרגיל 7
$L_{\geq n}$	$\{\langle M\rangle \mid \lvert L(M)\rvert \geq n,\ n\in\mathbb{N}\}$	RE \ R	תרגיל 7

1.1.2 שפות ב-coRE \ R

שם השפה	הגדרת השפה	אַפיון	היכן הוכחנו
$\mathsf{USELESS}_{\mathsf{TM}}$	$\{\langle M\rangle \mid$ קיים מצב $q\notin\{q_{\text{acc}},q_{\text{rej}}\}$ כך שלכל קלט w הריצה של M אינה עוברת ב-q $\}$	coRE \ R	תרגול 7
TILE	$\{\langle T,V,H,t_{\text{init}}\rangle \mid 1\leq n$ לכל $n\times n$ יש ריצוף חוקי$\}$	coRE \ R	הרצאה 15
ללא שם	$\{\langle M\rangle \mid$ אין $w\in\Sigma^*$ כך ש-M דוחה את w $\}$	coRE \ R	תרגיל 7
E_{TM}	$\{\langle M\rangle \mid L(M)=\emptyset\}$	coRE \ R	תרגיל 7
$L_{\leq n}$	$\{\langle M\rangle \mid \lvert L(M)\rvert \leq n,\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$	coRE \ R	?

1.1.3 שפות ב-$\overline{\text{RE}\cup\text{coRE}}$

[19] תודה לאביה חדאד על ארגון השפות.

שם השפה	הגדרת השפה	אפיון	היכן הוכחנו
$\mathsf{REG_{TM}}$	$\{\langle M\rangle \mid$ $L(M)$ רגולרית$\}$	$\overline{\mathsf{RE}\cup\mathsf{coRE}}$	הרצאה 13
$\mathsf{INF_{TM}}$	$\{\{\langle M\rangle \mid$ $L\langle M\rangle$ אינסופית$\}\}$	$\overline{\mathsf{RE}\cup\mathsf{coRE}}$	הרצאה 14
REACH	$\{\langle M\rangle \mid$ אין $w\in\Sigma^*$ כך ש-M דוחה את $w$$\}$	$\overline{\mathsf{RE}\cup\mathsf{coRE}}$	תרגיל 7
$L_{A_{\mathsf{TM}}}$	$\{\langle M\rangle \mid L(M)=\emptyset\}$	$\overline{\mathsf{RE}\cup\mathsf{coRE}}$	תרגיל 7
ללא שם	$\{\langle M\rangle \mid \lvert L(M)\rvert \leq n,\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$	$\overline{\mathsf{RE}\cup\mathsf{coRE}}$	?
$\mathsf{NONTRIVIAL_{TM}}$	$\{\langle M\rangle \mid L(M)\neq\emptyset \text{ and } L(M)\neq\Sigma^*\}$	$\overline{\mathsf{RE}\cup\mathsf{coRE}}$	תרגיל 8
$\mathsf{SUB_{TM}}$	$\{\langle M_1,M_2\rangle \mid L(M_1)\subseteq L(M_2)\}$	$\overline{\mathsf{RE}\cup\mathsf{coRE}}$	תרגיל 8
ללא שם	$\{\langle M_1,M_2,w\rangle \mid$ M_1ו-M_2 מסכימות על $w$$\}$	$\overline{\mathsf{RE}\cup\mathsf{coRE}}$	תרגיל 8
$\mathsf{ALL_{TM}}$	$\{\langle M\rangle \mid L(M)=\Sigma^*\}$	$\overline{\mathsf{RE}\cup\mathsf{coRE}}$	תרגיל 8
$\mathsf{FINITE_{TM}}$	$\{\langle M\rangle \mid$ $L(\langle M\rangle)$ היא סופית$\}$	$\overline{\mathsf{RE}\cup\mathsf{coRE}}$	תרגיל 8
$L_{=n}$	$\{\langle M\rangle \mid \lvert L(M)\rvert = n,\ n\in\mathbb{N}\}$	$\overline{\mathsf{RE}\cup\mathsf{coRE}}$	?

1.2 סיבוכיות

1.2.1 סיבוכיות זיכרון

שפות NP-שלימות:

שם השפה	הגדרת השפה	היכן הוכחנו
D-ST-HAMPATH	$\{\langle G,s,t\rangle \mid$ קיים מסלול המילטון בגרף G בין $s-t$$\}$	הרצאה 17
SAT	$\{\langle\theta\rangle \mid$ θ היא נוסחת CNF ספיקה$\}$	הרצאה 18
3SAT	$\{\langle\theta\rangle \mid$ θ היא נוסחת 3CNF ספיקה$\}$	הרצאה 18
CLIQUE	$\{\langle G,k\rangle \mid$ יש ב-G קליקה בגודל $k$$\}$	
VC	$\{\langle G,k\rangle \mid$ יש ב-G כיסוי קודקודים בגודל לכל היותר $k$$\}$	תרגול 9
DS	$\{\langle G,k\rangle \mid$ יש קבוצה שולטת בגודל לכל היותר $k$$\}$	תרגול 9
U\D-S–T-HAMPATH	$\{\langle G,s,t\rangle \mid$ בגרף G יש מסלול המילטון מ-s ל-$t$$\}$	תרגול 10
3COLOR	$\{\langle G\rangle \mid$ G מתאים ל-3 צבעים$\}$	תרגיל 10
MAX2SAT	$\{\langle\varphi,k\rangle \mid$ יש השמה שמספקת לפחות k פסוקיות ו-φ היא נוסחת 2CNF$\}$	תרגול 14
SBBR	$\{\langle G,s,t,b\rangle \mid$ G גרף מכוון ממושקל עם משקולות ב-$\mathbb{N}^+$ $s,t\in V, b\geq 0$ יש מסלול פשוט מ-s ל-t במשקל $\geq b$$\}$	הרצאה 26

שפות שהן coNP-שלימות:

שם השפה	הגדרת השפה	היכן הוכחנו
CONTRATICTION	$\{\langle\varphi\rangle \mid$ אין ל-φ השמה מספקת$\}$	תרגול 11
VAL	$\{\langle\varphi\rangle \mid$ כל ההשמות מספקות$\}$	תרגול 11

1.2.2 סיבוכיות מקום

שפות PSPACE-שלימות

שם השפה	הגדרת השפה	היכן הוכחנו
$\mathsf{ALL}_{\mathsf{NFA}}$	$\{\langle A\rangle \mid$ A הוא NFA ו-$L(A)=\Sigma^*\}$	הרצאה 22
TQBF	$\{\langle\varphi\rangle \mid$ הנוסחה φ היא נוסחה בולאינית מכומתת לחלוטין נכונה$\}$	תרגול 12
$\mathsf{MIN}_{\mathsf{NFA}}$	$\{\langle A,k\rangle \mid$ יש ל-A DFA שקול עם k מצבים$\}$	תרגיל 12
$\mathsf{CONT}_{\mathsf{NFA}}$	$\{\langle A_1,A_2\rangle \mid$ A_1,A_2 הם NFA ו-$L(A_1)\subseteq L(A_2)\}$	הרצאה 24

1.2.3 שפות NL-שלימות

שם השפה	הגדרת השפה	היכן הוכחנו
PATH	$\{\langle G,s,t\rangle \mid$ G גרף מכוון ויש מסלול מ-s ל-$t\}$	הרצאה 25
2SAT	$\{\langle\varphi\rangle \mid$ φ היא נוסחת 2CNF ספיקה$\}$	תרגול 13
BAR	$\{\langle G,s,t,b\rangle \mid$ G גרף מכוון ממושקל עם משקולות ב-$\mathbb{N}^+$ $s,t\in V, b\geq 0$ יש מסלול מ-s ל-t במשקל $\leq b$ כל המשקולות וגם b נתונים באונרית $\}$	הרצאה 26
BBR	$\{\langle G,s,t,b\rangle \mid$ G גרף מכוון ממושקל עם משקולות ב-$\mathbb{N}^+$ $s,t\in V, b\geq 0$ יש מסלול מ-s ל-t במשקל $\geq b$ כל המשקולות וגם b נתונים באונרית $\}$	הרצאה 26

2 היררכיית מחלקות הסיבוכיות

מה אנחנו יודעים?

1. $\mathsf{L}\subseteq\mathsf{NL}\subseteq\mathsf{PTIME}\subseteq\mathsf{NP}\subseteq\mathsf{PSPACE}=\mathsf{NPSPACE}\subseteq\mathsf{EXPTIME}$.
2. $\mathsf{L}\subseteq\mathsf{NL}\subseteq\mathsf{PTIME}\subseteq\mathsf{coNP}\subseteq\mathsf{PSPACE}=\mathsf{NPSPACE}\subseteq\mathsf{EXPTIME}$.
3. $$\begin{array}{ccc}\mathsf{NPSPACE} & \overset{\text{savich}}{=} & \mathsf{PSPACE}\\ \| & & \| \\ \overline{\mathsf{NPSPACE}} & \underset{\text{savich}}{=} & \overline{\mathsf{PSPACE}}\end{array}.$$
4. $\mathsf{PTIME}\neq\mathsf{EXPTIME}$.
5. $\mathsf{NL}=\mathsf{coNL}$.

אנחנו לא יודעים:

1. כי $\mathsf{P}\overset{?}{=}\mathsf{NP}$.
2. כי $\mathsf{P}\overset{?}{=}\mathsf{coNP}$.
3. כי $\mathsf{NL}\overset{?}{=}\mathsf{NP}$.
4. כי $\mathsf{L}\overset{?}{=}\mathsf{NL}$.
5. כי $\mathsf{NL}\overset{?}{=}\mathsf{PTIME}$.