אינפי מתקדם (1) - ד"ר שיא מאור

מסכם: יחיאל מרצבך

תוכן העניינים

הקדמה - הגדרת הגבול (אינפי 1)

תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ויהי $x_0,y_0\in\mathbb{R}$. נאמר כי $\lim\limits_{x\to x_0}f(x_0)=y_0$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $0<|x-x_0|<\delta$ אזי $|y-y_0|<\varepsilon$.

נשים לב כי הערך המוחלט מסמן למעשה את המרחק. ולכן למעשה היינו יכולים לכתוב:

אם המרחק בין x ל־x_0 הוא בין 0 ל־δ אזי המרחק בין y ל־y_0 קטן מ־ε.

דבר זה חשוב, כי למעשה על מנת שנוכל להגדיר גבול במרחבים אחרים, נצטרך להגדיר קודם כל מרחק במרחבים אלו.

מרחבים אלו נקראים **מרחבים מטריים**, וזהו למעשה הנושא הראשון של הקורס.

פרק 1 - מרחבים מטריים

הגדרה

מרחב מטרי הוא זוג (X,d) כאשר X הוא קבוצה לא ריקה, ו־$d:X\to X$ היא פונקציית המרחק, או למעשה "המטריקה". פונקצית $d:X\to X$ מקיימת את התכונות הבאות:

(1) סימטריות - $d(x,y)=d(y,x)\quad\forall x,y\in X$.

(2) חיוביות - $d(x,y)\geq 0$. וגם $d(x,y)=0$ שקול ל־$x=y=0$

(3) אי שוויון המשולש - $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)\quad\forall x,y,z\in X$

קבוצה שמקיימת את שלושת התכונות הללו, נקראת מרחב מטרי.

מסקנות מא"ש המשולש:

(1) לכל קבוצה סופית $x_1,\ldots,x_n\in X$ מתקיים כי $d(x_1,x_n)\leq\sum\limits_{i=1}^{n-1}d(x_i,x_{i+1})$.

(2) אי שוויון המשולש ההפוך - $d(x,y)\geq d(x,z)-d(y,z)$. אם נחליף את x ב־y נקבל כי $d(y,x)\geq d(y,z)-d(x,z)$ ולכן נקבל כי

$$d(x,y)\geq|d(x,z)-d(y,z)|$$

דוגמאות:

(1) $\mathbb{R},\mathbb{C}$ כאשר $d(x,y)=|x-y|$.

(2) מטריקה נוספת על $\mathbb{R}$. תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית עולה ממש (לדוגמא $F(x)=e^x$). נגדיר $d(x,y)=|F(x)-F(y)|$ (מקיים את אי שוויון המשולש למשל).

(3) $\mathbb{R}^n$ עם המרחק האוקלידי, דהיינו $d(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{i}^{n}(x_i-y_i)^2}$

כאשר $x=(x_1,\ldots,x_n)$ ו־$y=(y_1,\ldots,y_n)$.

(4) הדוגמא הטריוויאלית - המטריקה הדיסקרטית. דהיינו, לכל $X\neq\emptyset$ נגדיר את המטריקה הבדידה על ידי:

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$$

(5) יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר ולא מכוון, כאשר E הן הקשתות ו־V הן הקודקודים. נגדיר מסילה בין שני $u,v\in V$ על ידי $\gamma=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ וגם $x_i\in V$ כאשר $x_0=u$ ו־$x_n=v$. בנוסף $(x_i,x_{i+1})\in E$.

נגדיר את האורך של המסילה על ידי $l(\gamma)=n$, כאשר n הוא מספר הקשתות.

נוכל כעת להגדיר את המרחק ביניהם. יהיו $u,v\in V$.
תהא מסילה $\gamma=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ וגם $x_i\in V$ כאשר $x_0=u$ ו־$x_n=v$.
אזי נגדיר את המרחק על ידי $d(u,v)=\min|l(\gamma)|$.
כיוון שהגרף קשיר, אזי ברור כי $d(u,v)$ מוגדרת לכל $u,v\in V$.

(א) חיוביות ־ $d(u,v)\geq 0$, מההגדרה. כעת, אם $d(u,v)=0$, אזי קיימת מסילה באורך 0 בין u ו־v, כלומר למעשה $n=0$, ואז $u=x_0=x_n=v$.
(ב) סימטריות ־ מיידית כי אם $(x_0,\dots,x_n)$ מסילה בין u ו־v אזי $(x_n,\dots,x_0)$ היא מסילה בין v ל־u, כיוון שהגרף איננו מכוון.
(ג) אי שוויון המשולש ־ יהיו $u,v,w\in V$ ותהי γ_1 מסילה קצרה ביותר בין u ל־v וגם γ_2 מסילה קצרה ביותר בין v ל־w.
ולמעשה $l(\gamma_1)=d(u,v)$ וגם $l(\gamma_2)=d(v,w)$.
כעת, נגדיר את **השרשור** בין γ_1 ל־γ_2 להיות $\gamma_1*\gamma_2$.
דהיינו, אם $\gamma_1=(x_0,\dots,x_n)$ ו־$\gamma_2=(x_n=y_0,\dots y_n)$ אזי $\gamma_1*\gamma_2=(x_0,\dots,x_n,y_1,\dots y_n)$.
כעת ברור כי מתקיים: $l(\gamma_1*\gamma_2)=l(\gamma_1)+l(\gamma_2)=d(u,v)+d(v,w)$. מאידך גם מתקיים כי $d(u,w)\leq l(\gamma_1*\gamma_2)$.

תכונות והגדרות נוספות

טענה

יהי (X,d) מרחב מטרי. ותהי $\emptyset\neq Y\subset X$ אזי $(Y_i d|_{Y\times Y})$ היא מ"מ.

הוכחה

חיוביות ־ $d|_{Y\times Y}(y_1,y_2)=d(y_1,y_2)\geq$. בנוסף, $d|_{Y\times Y}(y_1,y_2)=0\Leftrightarrow y_1=y_2$.
באותה מידה גם לגבי התכונות הנוספות.

דוגמה

$X=\mathbb{R}^2$ עם המטריקה האוקלידית ונבחר $Y=S^1$ מעגל היחידה. דהיינו, $\left\{x\in\mathbb{R}^2\,|\,|x|=1\right\}$

הגדרות

יהי (X,d) מרחב מטרי. אזי:

(1) הספירה ברדיוס r שמרכזה $a\in X$ כך ש־$S_r(a)=\{x\in X\mid d(x,a)=r\}$
(2) כדור פתוח:
$B_r(a)=\{x\in X\mid d(x,a)<r\}$.
(3) כדור סגור:
$\widehat{B_r}(a)=\{x\in X\mid d(x,a)\leq r\}$

.

דוגמא

X עם המטריקה הדיסקרטית שהזכרנו לעיל, אזי במקרה זה: $B_r(a)=\begin{cases}\{a\} & r\leq 1\\ X & r>1\end{cases}$.

תכונות של כדורים

למה 1

לכל $X \ni x, y$ מתקיים כי $x \in B_r(y) \Leftrightarrow y \in B_r(x)$.

הוכחה

$x \in B_r(y) \Leftrightarrow d(x,y) < r \Leftrightarrow y \in B_r(x)$.

למה 2

אם $x \in X$ וגם $y \in B_r(x)$ לכל $r > 0$ אזי $y = x$.

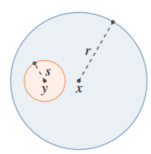
הוכחה

אנו יודעים כי $0 \le d(x,y) < r$ לכל r כיוון ש־$y \in B_r(x)$.

ואם כך מתקיים כי $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$.

למה 3

יהי $x \in X$ ויהי $r > 0$, כך ש־$y \in B_r(x)$ לכל $s > 0$ כך ש־$d(x,y) + s \le r$ מתקיים $B_s(y) \subset B_r(x)$

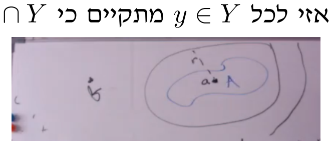


הוכחה

לכל $z \in B_s(y)$ מתקיים כי $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) < d|x+y| + s \le r$ ולכן $z \in B_r(x)$.

טענה

יהי (X, d_X) מ"מ ותהא $\emptyset \ne Y \subset X$ קבוצה. נסמן ב־d_Y את המטריקה המושרית על קבוצה זו, ונסמן ב־B_r^X וב־B_r^Y את הכדורים ביחס ל־d_X ול־d_Y אזי לכל $y \in Y$ מתקיים כי $B_r^Y(y) = B_r^X(y) \cap Y$.



הוכחה

נבחין כי

$$\begin{aligned} B_r^Y(y) &= \left\{ z \in Y \mid d^Y(y,z) < r \right\} = \\ &\left\{ z \in X \mid d^Y(y,z) < r, z \in Y \right\} = \\ &\underbrace{\left\{ z \in X \mid d^Y(y,z) < r, \right\}}_{B_r^X(y)} \cap \underbrace{\left\{ z \in X \mid z \in Y \right\}}_{Y} \end{aligned}$$

כנדרש.

הגדרה

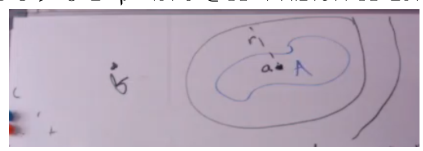
יהי (X,d) מ"מ, נאמר כי $A\subset X$ קבוצה חסומה, אם קיים $a\in X$ ו־$r>0$ כך ש־$A\subset B_r(a)$ (קבוצה חסומה אם מוכלת בכדור פתוח).

דוגמה

כל כדור סגור הוא חסום כי אם $\overline{B_r(A)}\subset B_{2r}(a)$.

טענה

אם A חסומה ו־$b\in X$ אזי קיים $s>0$ כך ש־$A\subset B_s(b)$.



הוכחה

נבחר $x\in A$ ונתבונן במרחק הבא: $d(x,b)\le d(x,a)+d(a,b)<r+d(a,b)\Rightarrow A\subset B_s(b)$.

מרחבים נורמיים

הגדרה

יהי X מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$. אזי נורמה על X היא פונקציה $\|\cdot\|$ שמקיימת:

(1) חיוביות: $\|x\|\ge 0$ ו־$\|x\|=0$ אם $x=0$.
(2) הומוגניות: $\|ax\|=|a|\,\|x\|$ $\forall x\in X, a\in\mathbb{R}$
(3) א"ש המשולש: $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ $\forall x,y\in X$.

טענה

יהא $(x,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי, אזי $d(x,y):=\|x-y\|$ היא מטריקה על X.

הוכחה

מיידית מההגדרות.

אמנם, ההפך איננו נכון!

דוגמאות

(1) $\mathbb{R},\mathbb{C}$ עם $\|x\|=|x|$.
(2) $\mathbb{R}$ עם $d(x,y)=|e^x-e^y|$ אינה מושרית משום נורמה על $\mathbb{R}$.
(3) $x=\mathbb{R}^n$ ונבחר $1\le p<\infty$. אזי הפונקציה המוגדרת על ידי $\|x\|_p:=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ היא נורמה על p.

כעת נסמן את הצמד $l_p^n:=\left(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_p\right)$.

(א) אי השוויון המשולש (במקרה הקל בו $p=1$):

$$\|x+y\|_1=\sum_{i=1}^n|x_i+y_i|\le\sum_{i=1}^n|x_i|+|y_i|=\|x\|_1+\|y\|_1$$

(4) עבור $\mathbb{R}^n$ נגדיר את $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ע"י $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$.

תרגיל:

ציירו את ספירת היחידה $S_1(0)$ עבור המרחבים $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ ו־$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

(5) נסמן את $X = C([a,b])$ מרחב הפונקציות הרציפות מ־$[a,b]$ ל־$\mathbb{R}$, כאשר $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ וגם $f,g \in X$ אזי נגדיר את הפונקציות $(\alpha f + \beta g)(x) := \alpha f(x) + \beta g(x)$.

כעת נגדיר את $\|\cdot\|_\infty : X \to \mathbb{R}$ ע"י $\|f\|_\infty = \max_{a\le x\le b} |f(x)|$ וכעת נקבל מטריקה $d(f,g) = \max_{a\le x\le b} |f(x) - g(x)|$.

התכנסות במרחב נורמי

הגדרה

סדרה x_n במ"מ (X,d) מתכנסת אם קיים $x \in X$ כך ש־$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$.

כלומר, $\forall\varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \ge N\; d(x_n,x) < \varepsilon$.

סימון: $x_n \to x$ או $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

טענה

אם x_n מתכנסת, הגבול יחיד.

הוכחה

נניח כי $x_n \to x$ וגם $x_n \to y$.

כלומר:

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \ge N\; d(x_n,x) < \varepsilon \cap d(x_n,y) < \varepsilon$$

כעת, נשתמש באי שוויון המשולש ונקבל:

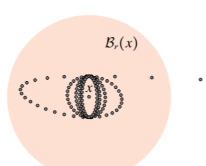
$$d(x,y) \le d(x,x_n) + d(y,x_n) < 2\varepsilon$$

דבר זה נכון לכל ε ולכן נקבל כי $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$.

כלומר, הגבול הוא יחיד, כנדרש.

הגדרה שקולה להתכנסות

נוכל לכתוב הגדרה שקולה להתכנסות ־ כאשר $x_n \in B_r(x)$, דהיינו אנחנו נמצאים בסביבה הכדורית של הנקודה.



דוגמאות

(1) בכל מ"מ, הסדרה הקבועה $x_n = x_0$ מתכנסת ל־x_0.
(2) $(x, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי, אזי $x_n \to x$ אם ורק אם $\|x_n - x\| = d(x_n, x) \to 0$.
(3) $C([a,b])$ מרחב הפונקציות הרציפות מ־$[a,b]$ ל־$\mathbb{R}$ עם נורמת $\|f\|_\infty = \max_{a\le x\le b}|f(x)|$. במצב כזה, $f_n \to f$ בנורמה הזו, אם"ם: $\max_{a\le x\le b}|f(x) - f_n(x)| = \|f_n - f\| \to 0$. כלומר, דבר זה קורה רק במקרה בו $f_n \to f$ מתכנסת במידה שווה[1]

טענה

המטריקה d היא רציפה[2] במובן הבא: אם $x_n \to x$ ו־$y_n \to y$, אזי $d(x_n, y_n) \to d(x,y)$.

הוכחה

$$(*)\, d(x_n, y_n) \le d(x_n, x) + d(x,y) + d(y, y_n)$$
$$(**)\, d(x_n, y_n) \ge d(x,y) - d(x_n, x) - d(y_n, y)$$

בצירוף של $(*)$ ו־$(**)$ נקבל כי:

$$d(x,y) - d(x_n, x) - d(y_n, y) \le d(x_n, y_n) \le d(x_n, x) + d(x,y) + d(y, y_n)$$

אך נבחין כי $d(x_n, x) \to 0$ וגם $d(y, y_n) \to 0$, ולכן סיימנו כיוון שקיבלנו כי $d(x_n, y_n)$ חסום בין שני ביטויים השואפים ל־$d(x,y)$.

מסקנה

במרחב נורמי $(X, \|\cdot\|)$ אם $x_n \to x$, אזי $\|x_n\| \to \|x\|$. (ההפך איננו נכון)

הוכחה

$$\|x_n\| = d(x_n, 0) \overset{\text{lemma}}{\to} d(x, 0) = \|x\|$$

טענה

אם $x_n \to x$ אז כל תת סדרה x_{n_k} כאשר $n_k \to \infty$ גם היא שואפת ל־x.[3]

הוכחה

צ"ל שאם $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ אזי גם $\lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x) = 0$.

נסמן: $a_n = d(x_n, x) \to 0$. ולכן גם דבר זה אומר (מאינפי 1) כי כל תת סדרה a_{n_k} גם היא שואפת ל־0. ולכן $d(x_{n_k}, x) \to 0$.

טענה

יהא $X = \mathbb{R}^k$ עם המטריקה האוקלידית, אז ההתכנסות $(x_n^1, \dots, x_n^k) = x_n \to x = (x^1, \dots x^k)$ שקולה להתכנסות איבר איבר $x_n^j \underset{n\to\infty}{\to} x^j$ לכל $1 \le j \le k$.

הוכחה

[1] באינפי 2 הגדרנו התכנסות במ"ש באמצעות סופרימום. במקרה שלנו מדובר על מקסימום, כיוון שהן שקולים, שהרי f_n ו־f הן רציפות, והקטע חסום וסגור, ולכן $f_n - f$ מקבלת מקסימום ומינימום בקטע $[a,b]$.

[2] בהמשך, נדבר בצורה נרחבת יותר על רציפות של מטריקה, ועל הקשר לרציפות של פונקציות.

[3] הכללה של הטענה באינפי 1 לכל מרחב מטרי.

נרצה להוכיח כי $x_n \to x$ אם ורק אם $x_n^j \to x^j$ לכל $1 \le j \le k$.

בכיוון הראשון $\Rightarrow$ נניח כי $x_n \to x$. כלומר:

$$\left|x_n^j - x^j\right| \le \left(\sum_{i=1}^{k} \left|x_n^i - x^i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x_n - x\| \to 0 \Rightarrow x_n^j \to x^j$$

בכיוון השני $\Leftarrow$ נניח כי $x_n^j \to x^j$ לכל $1 \le j \le k$. אזי מתקיים מההגדרה כי $\lim\limits_{n\to\infty} \left|x_n^j - x^j\right| = 0$. מאריתמטיקה של גבולות נקבל גם כי $\left(\sum_{i=1}^{k} \left|x_n^i - x^i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$, כלומר למעשה, מהגדרת הנורמה קיבלנו כי $\|x_n - x\| \to 0$, דהיינו $x_n \to x$, כנדרש.[4]

טענה

תהא x_n סדרה במ"מ (X,d). נניח שקיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל i מתקיים כי $d(x_i, x_{i+1}) \ge \varepsilon$ אזי x_n אינה מתכנסת.

הוכחה

נניח בשלילה ש־$x_n \to x$. אזי קיים N כך שלכל $n \ge N$ מתקיים כי $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. אבל אז נקבל כי $d(x_n, x_{n+1}) \le d(x_n, x) + d(x, x_{n+1}) < \varepsilon$ וזו סתירה.

מסקנה

יהא $X \ne \emptyset$ עם המטריקה הדיסקרטית $d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \ne y \end{cases}$ אזי הסדרה x_n מתכנסת אם ורק אם היא קבועה החל מ־N מסויים.

הוכחה

אם x_n אינה קבועה החל ממקום מסוים, אז קיימת תת סדרה x_{n_k} עבורה $x_{n_k} \ne x_{n_{k+1}}$ (כיוון שלא קבועה, ישנו איבר למשל x_4 השונה מ־x_1. וכן הלאה. נוכל לבחור תת סדרה שאינה קבועה) אבל אז נקבל כי לכל k מתקיים $d\left(x_n, x_{n_{k+1}}\right) = 1$. מהטענה הקודמת, נקבל כי x_n איננה מתכנסת.

אם $x_n \to x$ אזי $x_{n_k} \to x$ ולכן x_n אינה מתכנסת.

קבוצות פתוחות וסגורות

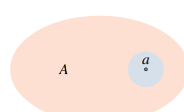
הגדרה

יהי (X,d) מ"מ ותהי $A \subset X$. נאמר כי:

(1) $x \in A$ היא נקודה פנימית של A אם קיים $r > 0$ כך ש־$B_r(x) \subset A$.

(2) A פתוחה אם כל $x \in A$ היא נקודה פנימית. דהיינו, $\forall x \in A\ \exists r_x > 0\ B_r(x) \subset A$

(3) $x \in A$ היא נקודה חיצונית ל־A אם היא נקודה פנימית של A^c, כלומר $\exists r > 0\ B_r(x) \cap A = \emptyset$.



הערות

(1) לפי ההגדרה, אפשר לקחת כדורים סגורים במקום פתוחים, כי $B_{\frac{r}{2}}(x) \subset \hat{B}_{\frac{r}{2}}(x) \subset B_r(x)$.

[4] ניתן להוכיח גם ישירות מההגדרה.

(2) מההגדרה, המרחב כולו $A = X$ הוא תמיד קבוצה פתוחה ב־(X,d).
(3) נאמר כי הקבוצה הריקה $\emptyset$ היא פתוחה.

דוגמאות

(1) יהי $X = \mathbb{R}$ עם המטריקה הרגילה. אזי כל קטע פתוח (a,b) הוא קבוצה פתוחה. $[a,b]$ לעומת זאת אינו קבוצה פתוחה, ונקודות הפנים של $[a,b]$ הן (a,b).
(2) אם (X,d) מרחב עם המטריקה הדיסקרטית, אז כל קבוצה $A \subset X$ היא פתוחה. כי אם $x \in A$ אזי $B_{\frac{1}{2}(x)} = \{x\} \subset A$ ולכן x היא נקודה פנימית.

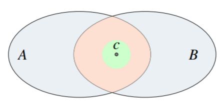
טענה

יהי (X,d) מ"מ, אזי:

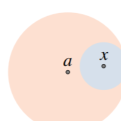
(1) חיתוך של מספר סופי של קבוצות פתוח הוא פתוח.[5]
(2) איחוד כלשהוא של קבוצות פתוח הוא פתוח.
(3) כל כדור פתוח $B_r(x)$ הוא קבוצה פתוחה.
(4) כל קבוצה פתוחה היא איחוד של כדורים פתוחים.

הוכחה

(1) נוכיח כי אם $A,B \subset X$ פתוחות, אזי $C = A \cap B$ פתוח, ומשם הטענה נובעת באינדוקציה.
(א) אם $C = \emptyset$ סיימנו.
(ב) אם $x \in C$ אזי $x \in A$ ולכן $\exists r_1 > 0\ B_{r_1}(x) \subset A$. אמנם $x \in B$ ולכן גם $\exists r_2 > 0\ B_{r_2}(x) \subset B$. ניקח $r = \min\{r_1, r_2\}$ ולכן $B_r(x) \subset A \cap B$. כלומר x נקודה פנימית של C.



(2) יהי $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ אוסף של קבוצות פתוחות ב־X. נסתכל על הקבוצה $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. אם $\alpha \in A$, מהגדרת איחוד קיים $\alpha \in I$ כך ש־$x \in A_\alpha$. אמנם A_α פתוחה ולכן קיים $r > 0$ כך ש־$B_r(x) \subset A_\alpha \subset A$ ולכן x נקודה פנימית של A ולכן A פתוחה.
(3) יהי $x \in X$ ויהי $r > 0$. יהא $y \in B_r(x)$. ראינו כי אם $s > 0$ מקיים כי $d(x,y) + s < r$ אזי $B_s(y) \subset B_r(x)$. מסיבה זו, y נקודה פנימית ולכן $B_r(x)$ היא קבוצה פתוחה.



(1) נניח כי A פתוחה. דהיינו, $\forall x \in A\ \exists r_x > 0\ B_r(x) \subset A$. אמנם, $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} B_{r_x}(x) \subset A$. מכאן שיש לנו שוויון בכל ההלכות.

הגדרה

יהי (X,d) מ"מ אזי $A \subset A$ היא סגורה אם המשלים שלה, A^c היא קבוצה פתוחה.

טענה

(1) איחוד סופי של קבוצות סגורות הוא סגור.
(2) חיתוך כלשהוא של קבוצות סגורות הוא סגור.

---

[5] הטענה אינה נכונה לחיתוך אינסופי של קבוצות פתוחות. למשל $X = \mathbb{R}$, $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ כך ש־A_n קבוצות פתוחות לכל $n \in \mathbb{N}$. נבחין כי $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$ אך אינו קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}$.

הוכחה

מיידית מהטענה הקודמת + כללי דה מורגן.

דוגמאות

(1) $X=\mathbb{R}$ עם המטריקה הסטנדרטית, אזי הקטע הסגור $[a,b]$ היא קבוצה סגורה כי $[a,b]^c=(-\infty,a)\cup$ (b,∞) קטעים פתוחים.[6]

(2) $X=\mathbb{R}^2$ ו־A מעגל היחידה היא קבוצה סגורה.

(3) כל יחידון $\underline{\{x\}\subset X}$הוא קבוצה סגורה כי אם $x\neq y$ אזי $\{y\}$ $B_{d(x,y)}\cap\{x\}=\emptyset$ ולכן y נקודה פנימית של $X\setminus\{x\}$.

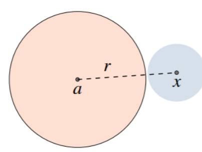
(4) כל כדור סגור $\hat{B}_r(x)$ היא קבוצה סגורה, כי אם $y\in\hat{B}_r(x)$ אזי $d(x,y)>r$ ולכן $B_{d(x,y)}(y)-r\subset$ $\left(\hat{B}_r(x)\right)^c$.

(5) $X=C[0,1]$ עם מטריקת הסופרימום, וניקח $h_1,h_2\in X$ כך ש־ $h_1<h_2$. נגדיר את הקבוצה $A=\{f\in C[0,1]\mid\forall x\in[0,1]\ h_1(x)<f(x)<h_2(x)\}$.

מדובר בקבוצה פתוחה כי אם ניקח את $f\in A$ ונסמן את $\varepsilon_i=\min\limits_{x\in[0,1]}\{|f(x)-h_1(x)|\}$ וגם $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$.

נקבל כי $B_\varepsilon(f)=\{g\in C[0,1]\mid\forall x\in A\ h_1(x)<f(x)-\varepsilon<g(x)<f(x)+\varepsilon<h_2(x)\}$.

ולכן $B_\varepsilon(f)\subset A$ - כלומר A הינה קבוצה פתוחה.



(6) דוגמאות טריוויאליות:

(א) המרחב כולו X והקבוצה הריקה $\emptyset$ הן גם פתוחות וגם סגורות.

(ב) במטריקה הדיסקרטית, כיוון שכל קבוצה היא פתוחה, גם כל קבוצה היא סגורה.

הגדרה

מרחב מטרי $\{X,d\}$ נקרא קשיר, אם הקבוצות היחידות בו שהן סגורות ופתוחות הן X ו־$\emptyset$.

טענה

קבוצה $C\subset X$ היא קבוצה סגורה אם ורק אם לכל (x_n) סדרה ב־C אם $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ אזי $x\in C$.

הוכחה

$\Leftarrow$ נניח כי C סגורה. ותהי $x_n\in C$ כך ש־$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. אם נניח בשלילה כי $x\notin C$ אזי $x\in C^c$ כיוון שמדובר בקבוצה פתוחה, ולכן קיים $r>0$ כך ש־$B_r(x)\in C^c$.

אמנם, כיוון ש־ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, אזי קיים N כך ש־$X_N\in B_r(x)$. מדובר בסתירה כיוון ש־$X_N\in C$. הנחת השלילה קרסה ולכן $x\in C$.

$\Rightarrow$ נניח כי לכל (x_n) סדרה ב־C אם $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ אזי $x\in C$. נניח בשלילה כי C אינה סגורה. דהיינו כי C^c אינה פתוחה. דהיינו, קיימת נקודה $x\in C^c$ שאינה נקודת פנימית. כלומר למעשה לכל $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$B_{\frac{1}{n}}(x)\nsubseteq C^c$.

כלומר, קיים $x_n\in B_{\frac{1}{n}}(x)\cap C$.

נבחין כי $\forall n\in\mathbb{N}\ d(x_n,x)<\frac{1}{n}$. כלומר למעשה $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. מההנחה נקבל כי $x\in C$ וזו סתירה כי הנחנו ש־$x\in C^c$.

[6] ישנן קבוצות שאינן פתוחות ואינן סגורות. לדוגמא $X=\mathbb{R}$, ו־$[a,b)$ אינו פתוח ואינו סגור.

דוגמאות

(1) יהי (X,d) מ"מ, ויהי סדרה $x_n \to x$. אזי הקבוצה $A=\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{x\}$ היא קבוצה סגורה.

(2) יהי $X=C[-1,1]$ וניקח את $A=\{f\in X \mid f \text{ גזירה}\}$. נבחין כי A אינה סגורה.

(3) עלינו למצוא סדרת פונקציות גזירות (כלומר ב-A) שמתכנסות במ"ש לפונקציה שאינה גזירה (כלומר לא ב-A). כיוון ש-$f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} \overset{\text{במ"ש}}{\to} f(x)=|x|$. מאידך, A איננה פתוחה כי אם ניקח את $g(x)=|x|$ כך ש-$g(x)\notin A$. אזי נקבל כי $\|g\|_\infty=1$.

כעת, לכל $\varepsilon>0$ נגדיר $A \not\ni h_\varepsilon = f+\frac{\varepsilon}{2}g$ ואז מתקיים כי $\|h_\varepsilon - f\|_\infty = \frac{\varepsilon}{2}\|g\|_\infty = \frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ וגם $h_\varepsilon\in B_\varepsilon(f)$.

(4) נגדיר את הקבוצה $A=\{f\in X \mid \text{פונקציה מונוטונית יורדת}\}$. נבחין כי A סגורה, שהרי $f_n\in A$ ולכן $f_n\to f$. על פי הנתון f יורדת חלש. כעת יהיו $x<y$ אזי $f_n(x)\le f_n(y)$. וההתכנסות נשמרת גם בסדרה.

פנים וסגור של קבוצות. הגדרה

יהי (X,d) מ"מ, כך ש-$A\subset X$. אזי:

(1) הפנים של A, A^o הוא האיחוד של כל הקבוצות הפתוחות שמוכלות ב-A. כלומר $A^o=\cup\{U\subset A \mid U \text{ פתוחה}\}$.

(2) הסגור של A, $\overline{A}$ הוא החיתוך של כל הקבוצות הסגורות שמכילות את A. דהיינו $\overline{A}=\cap\{U\subset A \mid U \text{ סגורה}\}$.

טענה

(1) הפנים של A הוא אוסף כל הנקודות הפנימיות.

(2) הסגור של A הוא אוסף כל הנקודות שאינן נקודות חיצוניות ל-A.

הוכחה

(1) על פי הנתון $x\in A^o$, דהיינו קיימת קבוצה פתוחה $U\subset A$ כך ש- $x\in U$. ממילא דבר זה קורה אם ורק אם $\exists r>0\; B_r(x)\subset A$. כלומר, x נקודה פנימית של A.

(2) נניח כי x אינה חיצונית ל-A. דהיינו, $\forall n\in\mathbb{N}\;\exists x_n\in A\cap B_{\frac{1}{n}}(x)$. במצב כזה, $x_n\to x$. כעת נניח כי $A\subset C$ היא קבוצה סגורה. כיוון ש-$x_n\in A$ אזי $x_n\in C$ וכיוון ש-C סגורה, $x\in C$. דהיינו, לכל $A\subset C$ סגורה, מתקיים כי $x\in C\Rightarrow x\in\overline{A}$.

מאידך, אם x חיצונית ל-A, אזי קיים $r>0$ כך ש-$A\cap B_r(x)=\emptyset$ ולכן $A\subset X\setminus B_r(X)$. אך $X\setminus B_r(X)$ קבוצה סגורה, ולכן $\overline{A}\subset X\setminus B_r(X)\Rightarrow x\notin\overline{A}$.

טענה

יהי (X,d) מ"מ כך ש-$A\subset X$. אזי:

(1) A^o הוא קבוצה פתוחה. $\overline{A}$ הוא קבוצה סגורה.

(2) $A^o\subset A\subset\overline{A}$.

(3) אם A פתוחה אזי $A^o=A$ ואם A סגורה אזי $A=\overline{A}$.

(4) A^o היא הקבוצה הפתוחה הגדולה ביותר שמוכלת ב-A. (אם $U\subset A$ פתוחה אזי $U\subset A^o$).

(5) $\overline{A}$ היא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמכילה את A.

מסקנה

(1) $U\subset A$ פתוחה אם ורק אם $U\subset A^o$ פתוחה.

(2) $A\subset C$ סגורה אם ורק אם $\overline{A}\subset C$ סגורה.

(3) בפרט $(A^o)^o$ וגם $\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$.

דוגמאות

נתבונן ב-$X=\mathbb{R}$.

(1) $A=[a,b)$. אזי $A^o=(a,b)$ ו-$\overline{A}=[a,b]$.

(2) $A=\mathbb{Q}$. אזי נקבל כי $\mathbb{Q}^o=\mathbb{Q}$, ומאידך כי $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$.

הגדרה

יהי (X,d) מ"מ. $A\subset X$ נקראת צפופה ב־X אם $\overline{A}=X$.

טענה

יהי (X,d) מ"מ. אם $A\subset X$. אזי $\overline{A}=\{x\in X\mid \exists x_n\in A\, x_n\to x\}$.

הוכחה

יהי $B\subset\overline{A}$. אם $x\in B$. כלומר קיימת סדרה $x_n\in A$ כך ש־$x_n\to x$. נבחר $A\subset C$ סגורה. אזי $x_n\to x\in C$ ולכן $x\in C$. כלומר x שייכת למעשה לכל קבוצה שסגורה שמכילה את A ולכן $x\in\overline{A}$.

בכיוון השני, נרצה להוכיח כי $\overline{A}\subset B$. ניקח $x\in\overline{A}$. נבחין כי x אינה נקודה חיצונית ל־A ולכן $\forall n\in\mathbb{N}\,\exists x_n\in A\cap B_{\frac{1}{n}}\left(x\right)\neq\emptyset$. כלומר, קיבלנו כי $x\in A$. ולכן $d\left(x_n,x\right)=\frac{1}{n}\to 0\Rightarrow x_n\to x\Rightarrow x\in B$.

דוגמא

$X=\mathbb{R}$ וניקח את $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$. כי כל מספר ממשי ניתן לקירוב ע"י רציונלים. באותה מידה $\overline{\mathbb{Q}^n}=\mathbb{R}^n$.

הגדרה

השפה של קבוצה $A\subset X$ היא$\partial A=\overline{A}\setminus A^o$.

טענה

∂A היא קבוצה סגורה.

$\partial A=\overline{A}\cap\left(A^o\right)^o$ (חיתוך של קבוצות סגורות).

פנים וסגור של מרחבים נורמיים.

טענה

במרחב נורמי $\left(X,\|\cdot\|\right)$ מתקיימים התנאים הבאים[7]:

(1) $\overline{B_r\left(x\right)}=\hat{B}_r\left(x\right)$.

(2) $\left(\hat{B}_r\left(x\right)\right)^o=B_r\left(x\right)$.

(3) $\vartheta\hat{B}_r\left(x\right)=\vartheta B_r\left(x\right)=S_r\left(x\right)$

הוכחה

(1) נרצה להוכיח כי הסגור $\overline{B_r\left(x\right)}=B_r\hat{\left(x\right)}$. הכיון הראשון - $\overline{B_r\left(x\right)}\subset\hat{B}_r\left(x\right)$ מיידי כי הכדור הסגור $\hat{B}_r\left(x\right)$היא קבוצה סגורה שמכילה את $B_r\left(x\right)$.
נבחין כי $B_r\left(x\right)\subset\overline{B_r\left(x\right)}$.
כעת יהא $a\in\hat{B}_r\left(x\right)\setminus B_r\left(x\right)$. דהיינו $d\left(x,a\right)=r$. נמצא סדרה $x_n\in B_r\left(x\right)\ x_n\to a\Rightarrow a\in B_r\left(x\right)$. כיצד נבנה את x_n? ניקח את $x_n=x+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(a-x\right)$.
נתבונן ב־$d\left(x_n,x\right)=\|x_n-x\|=\left(1-\frac{1}{n}\right)\underbrace{\|a-x\|}_{r}<r$. ולכן $x_n\in B_r\left(x\right)$. מאידך נקבל כי $d\left(x_n,a\right)=\frac{1}{n}r\underset{n\to\infty}{\to}0$ ולכן $x_n\in a$ כנדרש.

(2) נרצה להראות כי $\left(B_r\hat{\left(x\right)}\right)^o=B_r\left(x\right)$. הכיוון הראשון $\left(\hat{B}_r\left(x\right)\right)^o\subset B_r\left(x\right)$ מיידית מהגדרה.
$B_r\left(x\right)\subset\left(\hat{B}_r\left(x\right)\right)^o$. ניקח a נקודה פנימית ב־$B_r\hat{\left(x\right)}$ ונראה כי $a\in B_r\left(x\right)$. נבחין כי קיים $\varepsilon>0$ כך ש־$B_\varepsilon\left(a\right)\subset\hat{B}_r\left(x\right)$. נגדיר כעת $a'=a+\frac{a-x}{\|a-x\|}\frac{a}{2}$. כעת:

[7] הטענה אינה נכונה במ"מ כללי. לדוגמא אם (X,d) המטריקה הדיסקרטית, אזי $B_1\hat{\left(x\right)}=X$, $B_1\left(x\right)=\{x\}$. ושתי הקבוצה הללו הן גם פתוחות וגם סגורות.

$$\|a'-a\|=\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow a'\in B_{\varepsilon}\left(a\right)\subset\hat{B}_{r}\left(x\right)$$

מאידך נקבל:

$$d\left(a',x\right)=\|a-x\|\left(1+\frac{\varepsilon}{2\left\Vert a-x\right\Vert }\right)>\|a-x\|=d\left(x,a\right)$$
$$\Rightarrow d\left(x,a\right)<r\Rightarrow a\in B_{r}\left(x\right)$$

(3) נבחין כי 3 נובע מ־1 ו־2:

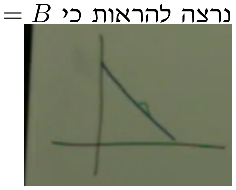
$$\vartheta\hat{B}_{r}\left(x\right)=\hat{B}_{r}\left(x\right)\setminus\hat{B}_{r}\left(x\right)\overset{2}{=}\left\{ a\in X\mid d\left(x,a\right)=r\right\} =S_{r}\left(x\right)$$

דוגמא

ניקח את הקבוצה $X=C\left[0,1\right]$. וכעת נגדיר את שתי הקבוצות הבאות:

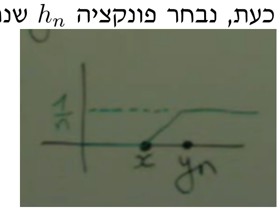
$$A=\left\{ f\in C\left[0,1\right]\mid f\text{ יורדת ממש }\right\}$$
$$B=\left\{ f\in C\left[0,1\right]\mid f\text{ יורדת חלש }\right\}$$

נרצה להראות כי $B=\overline{A}$ ו־$A^{o}=\emptyset$.



הוכחה

נראה כי לכל $f\in A$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ יש $g\notin A$ אבל $\|f-g\|_{\infty}\leq\frac{1}{n}$.
נבחר כעת $x\in\left(0,1\right)$. f רציפה ולכן $1>y_{n}>0$ כך ש־$f\left(x\right)>f\left(y_{n}\right)>f\left(x\right)-\frac{1}{n}$.
כעת, נבחר פונקציה h_{n} שנראית כך



נבחר כעת $g=f+h_{n}$, אבל אז יתקיים: $g\left(y_{n}\right)=f\left(y_{n}\right)+\frac{1}{n}>f\left(x\right)=g\left(x\right)$ ולכן נקבל כי $g\in A$. מאידך קיבלנו כי $\|g-h\|-\|h_{n}\|=\frac{1}{n}$. דהיינו, קיבלנו כי הפנים של A הינו ריק.

כעת נראה כי $B=\overline{A}$. על פי הנתון B סגורה ולכן $\overline{A}\subset B$. נראה כי $B\subset\overline{A}$ ־ כלומר לכל $f\in B$ נמצא $f_{n}\in A$ כך ש־$f_{n}\overset{\text{במ"ש}}{\rightarrow}f$.

נשים לב כי אם f יורדת ו־h_n יורדת ממש, אזי $f_n = f + h_n$ יורדת ממש.
כעת, תהיא $f \in B$ ונגדיר $h_n = -\frac{x}{n}$ יורדת ממש, ולכן $f_n = f + h_n \in A$.
מאידך: $d(f, f_n) = \|h_n\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$ ולכן $f_n \to 0$ ב־$C[0,1]$ עם $\|\cdot\|_\infty$.

טענה

יהי (X,d) מ"מ ותהי $\emptyset \neq Y \subset X$. אם ניקח את מ"מ $(Y, d|_{Y\times Y})$. ראינו כי כל פתוח ב־Y הוא מהצורה $B_r^Y(y) = B_r^x(y) \cap Y$.
נטען כעת כי $A \subset Y$ פתוחה (או סגורה) ב־(Y, d^r) אם ורק אם קיימת $B \subset X$ פתוחה (או סגורה) ב־(X,d) כך ש־$A = B \cap Y$

הוכחה

נניח כי A פתוחה ב־Y. דהיינו, לכל $a \in A$ קיים $r_a > 0$ כך ש־$B_{r_a}^Y(a) \subset A$.
אמנם, כיוון שהינה קבוצה פתוחה, ניתן לרשום אותה גם כך -

$$A = \bigcup_{a\in A} B_{r_a}^Y(a) = \bigcup_{a\in A}\left(B_{r_a}^X(a) \cap Y\right) = \underbrace{\left(\bigcup_{a\in A} B_{r_a}^X(a)\right)}_{B \text{ פתוחה}} \cap Y$$

בכיוון השני, אם $B \subset X$ פתוחה, אזי לכל $a \in B \cap Y$ קיים $S(a) > 0$ כך ש־$B_{s(a)}^X \subset B$. כעת נוכל לכתוב זאת כך :

$$B \cap Y = \bigcup_{a\in B\cap Y}\{a\} \subset \bigcup_{a\in B\cap Y}\left\{B_{s(a)}^X \cap Y\right\} = \bigcup_{a\in B\cap Y}\left\{B_{s(a)}^X(a)\right\} \cap Y \subset B \cap Y$$

דהיינו, יש שיווין ולכן $B \cap Y = \bigcup_{a\in B\cap Y}\left\{B_{s(a)}^X \cap Y\right\}$. אם כך $B \cap Y$ היא איחוד כדורים פתוחים ב־$\left(Y, d^Y\right)$ ולכן היא קבוצה פתוחה ב־$\left(Y, d^Y\right)$.

לאחר שיצרנו שפה של מרחבים מטריים וקבוצות פתוחות וסגורות, נתחיל להעמיק בנושא.

שיעור מס' 5:

יום ראשון

01.11.20

רציפות של פונקציות

הגדרות.

הגדרה 1

יהיו שני מרחבים מטרים (X,d) ו־(Y,ρ). נאמר כי פונקציה $f: X \to Y$ היא רציפה בנקודה $a \in X$ אם:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \quad x \in B_\delta^X(a) \Rightarrow\ f(x) \in B_\varepsilon^Y(f(a))$$

במילים אחרות, נאמר ש־f רציפה בנקודה a אם לכל $\varepsilon > 0$, קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $x \in X$ מתקיים כי $d(a,x) < \delta \Rightarrow \rho(f(a), f(x)) < \varepsilon$.

הגדרה 2

יהיו שני מרחבים מטרים (X,d) ו־(Y,ρ). נאמר כי פונקציה $f: X \to Y$ היא רציפה בנקודה $a \in X$ אם:

$$\forall x_n \to a \in X \quad \Rightarrow f(x_n) \to f(a) \in Y$$

טענה

הגדרה 1 ו־2 שקולות.

הוכחה

$(1 \Rightarrow 2)$:

נניח כי $f : X \to Y$ רציפה בנקודה a לפי הגדרה 1.

דהיינו:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \quad x \in B_\delta^X(a) \Rightarrow\ f(x) \in B_\varepsilon^Y(f(a))$$

ניקח סדרה $x_n \to a$ ונמצאת ב־X. דבר זה גורר כי:

$$\forall \delta > 0\ \exists N \qquad \forall n > N \quad x_n \in B_\delta^X(a)$$

בשילוב שני הביטויים נקבל:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n > N\ f(x_n) \in B_\varepsilon f(a)$$

אמנם, ביטוי זה גורר כי $f(x_n) \to f(a)$ ב־Y.

אם כך, f רציפה בנקודה a לפי הגדרה 2.

$(2 \Rightarrow 1)$:

נניח כי $f : X \to Y$ רציפה בנקודה a לפי הגדרה 2.

נניח בשלילה כי היא לא רציפה ב־a לפי הגדרה 1.

דהיינו:

$$\exists \varepsilon > 0 \qquad \forall n \quad x_n \in B_{\frac{1}{n}}^X(a) \Rightarrow\ f(x_n) \notin B_\varepsilon^Y(f(a))$$

אם כך, הסדרה $x_n \to a$ אבל הסדרה $f(x_n)$ לא מתכנסת ל־$f(a)$.

זאת בסתירה לרציפות לפי 2.

לעיתים נקרא להגדרה השנייה ־ התכנסות סדרתית.

דוגמאות

(1) הפונקציה הקבועה רציפה:
$\forall x\ f(x) = y_0 \in Y$

(2) לכל (X,d) ו־$a \in X$ הפונקציה $f : X \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x) = d(x,a)$ רציפה, שכן מתקיים, עבור $z \in X$:

$$|f(x)-f(z)|=|d(x,a)-d(z,a)|\leq d(x,z)$$

ולכן לכל $\varepsilon>0$ נוכל לקחת $\delta=\varepsilon$, כנדרש.

(3) אם (X,d) המרחב הדיסקרטי, אזי כל פונקציה $f:X\to Y$ היא רציפה, כי לכל $\varepsilon>0$ ניקח $\delta=\frac{1}{2}$, ואז נקבל:

$$B_{\frac{1}{2}}^{X}(a)=\{a\}\subset B_{\varepsilon}^{r}(f(a))$$

(4) דוגמא לפונקציה שאינה רציפה. ניקח את $(X,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי. נסמן $B=B_1(0)$.

כעת נגדיר את $\chi_B(x)=\begin{cases}1 & x\in B\\ 0 & x\notin B\end{cases}$.

נוכל להבחין כי χ_B איננה רציפה. שהרי אם ניקח x כלשהוא וקטור יחידה ($\|x\|=1$). אזי $x\notin B$.
אבל אם ניקח $x_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)x$.
נקבל כי $\|x_n\|=1\Rightarrow x_n\in B$. כלומר קיבלנו כי $\chi_B(x_n)=1$ והיא איננה שואפת ל־$\chi_B(x)=0$.

(5) ניקח את $X=C([-1,1])$ עם נורמת המקסימום.
נקבע $x_0\in[a,b]$. ונגדיר $E:X\to\mathbb{R}$ על ידי $E(f)=f(x_0)$.
מדובר בפונקציה רציפה, שהרי:
$|E(f)-E(g)|=|f(x_0)-g(x_0)|\leq\max_{a\leq x\leq b}=\|f-g\|$:
ולכן נוכל לקחת $\delta=\varepsilon$.

(6) ניקח את $X=C([-1,1])$ עם נורמת המקסימום.
נגדיר את $A=\{f\in X \mid \text{הפונקציה גזירה}\}$. עם המטריקה המושרית ממנה.
נבחר את $D:A\to\mathbb{R}$ המוגדת על ידי $D(f)=D'(0)$.
נוכל לשים לב כי D איננה רציפה, שכן אם נבחר $f_n\in A$ המוגדרת על ידי $f_n=\frac{1}{n}\sin(nx)$. במצב כזה, $\|f_n\|\leq\frac{1}{n}\Rightarrow f_1\to0$. אמנם, מאידך, $D(f_n)=1$ והיא איננה מתכנסת ל־0 כפי שניתן לראות ב־$D(0)=0$.

(7) ניקח את $\mathbb{R}^n$ עם הנורמה האוקלידית. תהי $f:X\to\mathbb{R}^n$ המוגדרת על ידי $f(x)=(f_1(x),\dots,f_n(x))$ ו־$f_i:X\to\mathbb{R}$.
נוכל להבחין כי f רציפה אם ורק אם f_i רציפה לכל i. שהרי אם $x_i\to x$ אזי $f(x_k)\to f(x)$ ולמעשה $f(x_k)=(f_1(x_k),\dots,f_n(x_k))$ וגם $f(x)=(f_1(x),\dots,f_n(x))$.
לכן נקבל כי הדבר שקול לכך כי $f_i(x_k)\to f_1(x)$ לכל i.

תכונות של פונקציות רציפות.

טענה

יהיו (X,d) ו־(Y,ρ) מ"מ. אזי התנאים הבאים שקולים:

(1) f רציפה.
(2) לכל $U\subset Y$ פתוחה, $f^{-1}(u)\subset X$[8] פתוחה.
(3) לכל $C\subset Y$ סגורה, $f^{-1}(u)\subset X$ סגורה.

[8] $f^{-1}(U)=\{x\in X\mid f(x)\in U\}$

הוכחה

:($2 \Rightarrow 3$)

על פי הנתון, $C \subset Y$ סגורה. ולכן $C^c \subset Y$ הינה קבוצה פתוחה.

מתכונה 2 נקבל כי $f^{-1}\left(C^c\right) \in X$ היא גם פתוחה.

כעת, $\left(f^{-1}\left(C\right)\right)^c = f^{-1}\left(C^c\right)$ פתוחה. אם כך, נקבל גם כי $f^{-1}\left(C\right)$ הינה פתוחה, כנדרש.

:($3 \Rightarrow 2$)

בצורה דומה.

:($2 \Rightarrow 1$)

יהי $a \in X$ ויהי $\varepsilon > 0$.

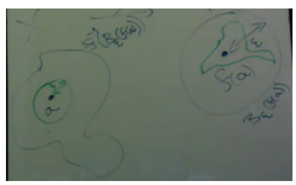
נבחין כי $B_\varepsilon^Y\left(f\left(a\right)\right)$ הינה פתוחה (הוכחנו שכדור פתוח הוא קבוצה פתוחה) . כעת, מטענה 2 נקבל כי $f^{-1}\left(B_\varepsilon\left(f\left(a\right)\right)\right)$ פתוחה ב־X.

$a \in f^{-1}\left(B_\varepsilon\left(f\left(a\right)\right)\right)$ ולכן קיבלנו כי a נקודה פנימית של C.

כלומר, מהגדרת נקודה פנימית ־ קיימת $\delta > 0$ כך ש־ $B_\delta^X\left(a\right) \subset f^{-1}\left(B_\varepsilon\left(f\left(a\right)\right)\right)$.

משמעות הביטוי הינה למעשה כי $f\left(B_\delta^X\left(a\right)\right) \subset B_\varepsilon\left(f\left(a\right)\right)$.

דבר זה נכון לכל $\varepsilon > 0$ ולכן f רציפה ב־a.



:($1 \Rightarrow 2$)

נבחר $U \subset Y$ פתוחה.

כעת, יהא $a \in f^{-1}\left(U\right)$ ונרצה להוכיח כי a נקודה פנימית.

$f\left(a\right) \in U$ ולכן בפרט קיים $\varepsilon > 0$ כך ש־$B_\varepsilon^Y\left(f\left(a\right)\right) \subset U$.

בנוסף, אנו יודעים כי f רציפה ולכן, בפרט:

$$\exists\delta > 0\ f\left(B_\delta^Y\left(a\right)\right) \subset B_\varepsilon^Y\left(f\left(a\right)\right) \quad B_\delta^Y\left(\left(a\right)\right) \subset f^{-1}\left(U\right)$$

אם כך, הוכחנו כי a נקודה פנימית ולכן $f^{-1}\left(U\right)$ פתוחה, כנדרש.

למעשה, קיבלנו אפיון חדש לרציפות, ללא התערבות של המושג 'מרחק'. דבר זה מאפשר לנו להרחיב את המושג של 'רציפות' גם למרחבים טופולוגיים.

הערה

f רציפה **איננה** גוררת כי $A \subset X$ פתוחה גורמת לכך שגם $f\left(A\right) \subset U$ הינה פתוחה.

דוגמא לכך: $f : X \to \mathbb{R}$.$f\left(x\right) = 0$.$f\left(x\right)$. נוכל להבחין כי f רציפה, ו־$f\left(x\right) = \{0\}$ וזו איננה קבוצה פתוחה.

אריתמטיקה של גבולות.

־ הרכבה של פונקציות

יהיו $(X_1,d_1),(X_2,d_2),(X_3,d_3)$ מ"מ.
ויהיו $g:X_2\to X_3, f:X_1\to X_2$ פונקציות.
ההרכבה $g\circ f:X_1\to X_3$ היא פונקציה $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

טענה

אם g,f רציפות, אזי גם $g\circ f$ רציפה.

הוכחה

נניח כי $A\subset X_3$ פתוחה. ונרצה להוכיח כי גם $(g\circ f)^{-1}(A)$ הינה גם פתוחה.
אנו יודעים כי A פתוחה ו־g רציפה, ולכן $g^{-1}(A)$ פתוחה ב־X_2.
מאידך, f רציפה ולכן $f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right)$ פתוחה.
אמנם, לפי ה נקבל כי $f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right)=(g\circ f)^{-1}(A)$, כנדרש.

מסקנה מדוגמא 7 והטענה הקודמת

אם $g,f:X\to\mathbb{R}$ רציפות, אזי $f\cdot g, f\pm g$ רציפות, וגם $\frac{f}{g}$ רציפה בכל נקודה בה $g(x)\neq 0$.

הוכחה

נגדיר את הפונקציה $S_+:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $S_+(x,y)=x+y$.
נבחין כי S רציפה (מטענה שהוכחנו באינפי 1), ובנוסף, נקבל כי $f+g=S_+\circ h$ ולכן הפונקציה רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות. (בצורה דומה ניתן לעשות עם מינוס ועם כפל.)

הוכחת חלוקת פונקציות: נגדיר את $r:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ על ידי $r(x)=\frac{1}{x}$. מדובר בפונקציה רציפה. בנוסף, נבחין כי $\frac{f}{g}=f\cdot(r\circ g)$.
נוכל להתבונן כעת רק ב־$A=\{x\in X\mid g(x)\neq 0\}$. דבר זה מאפשר לנו לקחת את $f:A\to\mathbb{R}$ וגם את $g:A\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
ההרכבה $r\circ g$ מוגדרת היטב ורציפה, ולכן $f\cdot(r\circ g):A\to\mathbb{R}$ רציפה.
נבחין כי התבוננו רק בתת מרחב של X (ואמרנו שהפונקציה רציפה לגביו),ולמעשה הסתמכנו על הטענה הבאה.

טענה

יהיו (X,d) ו־(Y,ρ) מ"מ. ותהי $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ רציפה.
ניקח $X'\subset X$, כך ש־ (X',d) המטריקה המושרית, אזי $f|_{X'}:X'\to Y$ גם היא רציפה.

הוכחה

נתונה לנו $A\subset Y$ פתוחה.
כעת נתבונן ב־$(f|_{X'})^{-1}(A)=\{x\in X'\mid f(x)\in A\}$.
ביטוי זה שווה למעשה ל־ $\{x\in X\mid f(x)\in A\}\cap X'$.
$f^{-1}(A)$ הינה פתוחה (כי f רציפה) ולכן חיתוך של קבוצות פתוחות הינו קבוצה פתוחה.

טענה

יהיו (X,d) ו־(Y,ρ) מ"מ.
יהיו $f_n:X\to Y$ פונקציות רציפות.
ותהי $f:X\to Y$ שהפונקציות הנ"ל מתכנסות אליה במ"ש.
כלומר, לפי ה:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X} d^Y\left(f_n\left(x\right),f\left(x\right)\right)=0$$

אזי f רציפה.

הוכחה

ניקח את $x_k \to x$ ונרצה להראות כי $f\left(x_k\right)\to f\left(x\right)$.

נתבונן ב־$d^Y\left(f\left(x_k\right),f\left(x\right)\right)$. מתקיים:

$$d^Y\left(f\left(x_k\right),f\left(x\right)\right)\overset{\triangle}{\leq} d^Y\left(f\left(x_1\right),f_n\left(x_k\right)\right)+d^Y\left(f_n\left(x_k\right),f\left(x\right)\right)+d^Y\left(f_n\left(x\right),f\left(x\right)\right)$$

נסמן את $\sup\limits_{x\in X} d^Y\left(f_n\left(x\right),f\left(x\right)\right)=a_n$. נוכל להבחין כי:

$$d^Y\left(f\left(x_1\right),f_n\left(x_k\right)\right)+d^Y\left(f_n\left(x\right),f\left(x\right)\right)\overset{\sup}{\leq} 2a_n+d^Y\left(f_n\left(x_k\right),f\left(x\right)\right)$$

כעת יהי $\varepsilon>0$. כיוון ש־$a_n\to 0$, אזי קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש־ $a_N<\frac{\varepsilon}{2}$. כלומר, נקבל כי:

$$d^Y\left(f_n\left(x_k\right),f\left(x\right)\right)<\varepsilon+d^Y\left(f_N\left(x_k\right),f_n\left(x\right)\right)$$

ניקח $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}$ בשני האגפים ונקבל:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} d^Y\left(f_n\left(x_k\right),f\left(x\right)\right)<\overline{\lim_{k\to\infty}\varepsilon+d^Y\left(f_N\left(x_k\right),f_n\left(x\right)\right)}$$

סך הכל נקבל כי $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} d^Y\left(f\left(x_k\right),f\left(x\right)\right)\leq\varepsilon$

בצורה דומה, ניקח $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}$ ונקבל כי:

$$0\leq\underline{\lim_{k\to\infty}} d^Y\left(f\left(x_k\right),f\left(x\right)\right)\leq\overline{\lim_{k\to\infty}} d^Y\left(f\left(x_k\right),f\left(x\right)\right)$$

אבל ε היה שרירותי ולכן:

$$\lim_{k\to\infty}\left(f\left(x_k\right),f\left(x\right)\right)=0$$

ולכן f רציפה.

קומפקטיות

שיעור מס' 6:
יום שני
02.11.20

הקדמה.

במהלך לימודינו באינפי 1 למדנו משפט האומר כי אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, אז היא מקבלת ערכי מינמום ומקסימום בקטע.

בהינתן (X,d) מ"מ, קבוצה $A\subset X$ סגורה וחסומה ו־$f:A\to\mathbb{R}$ רציפה, האם ניתן לומר בהכרח כי קיים $\overline{x}\in A$ כך ש־$f(\overline{x})=\max_{A} f$? התשובה היא לא. ונתבונן בדוגמה הבאה.

דוגמא

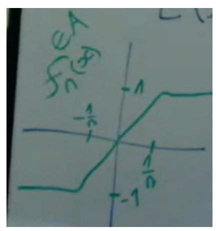
ניקח את $X=C([-1,1])$ ואת $A=\hat{B}_1(0)$ שהינה סגורה וחסומה.

כעת, נגדיר $E:A\to\mathbb{R}$ על ידי $E(f)=\int_0^1 f(x)\,dx-\int_{-1}^0 f(x)\,dx$. ניתן לראות כי E רציפה, שהרי אם הפונקציה מתכנסת, היא בפרט מתכנסת במ"ש ולכן (מטענה שלמדנו באינפי 2) ישנה גם התכנסות של סדרות הפונקציות של האינטגרלים.

כעת, ניזכר כי אם $f\in A\Leftrightarrow|f|\le 1$ ולכן בפרט נקבל:

$$E(f)\le\int_0^1 1dx-\int_1^0(-1)\,dx=2$$

נוכל להבחין כי $\sup_A\le 2$ ונשים לב כי יש כאן שוויון. מדוע? אם נתבונן בציור הבא, למשל:



נוכל להראות כי $E(f_n)\to 2$ ולכן בפרט $\sup_E=2$. מאידך, אנחנו יודעים כי $\overline{f}\in A$ כך ש־$E(\overline{f})=2$! מכיוון ש־$\overline{f}$ צריכה לקיים בהכרח כי $f|_{(0,1)}=1$ ו־$f|_{(-1,0)}=-1$.

אם כך, נצטרך כנראה תנאי חזק יותר בשביל למצוא ערכי מקסימום בקטע.

על מנת להבין מהו התנאי הנדרש בשבילנו, ננסה להבין כיצד הגענו לתנאי זה. נעשה זאת באמצעות היזכרות בהוכחת המשפט שהבאנו קודם לכן.

הוכחה מאינפי 1

נסמן $z=\sup_{[a,b]} f$. בהכרח קיימת $x_n\in[a,b]$ כך ש־z $\to$ $f(x_n)$. ממשפט בולצאנו ווירשטרס, נוכל להסיק בוודאות כי ל־x_n קיימת ת"ס מתכנסת, $x_{n_k}\to\overline{x}\in[a,b]$, ולכן מרציפות נוכל להסיק כי $z=f(\overline{x})$.

השתמשנו בסגירות ובחסימות בשביל להשתמש במשפט בולצאנו ווירשטרס.

דבר זה נותן לנו מוטיבציה להגדרה הבאה.

אפיון סדרתי של קומפקטיות.

הגדרה

יהי (X,d) מ"מ. ותהי $K\subset X$. קבוצה זו תיקרא קומפקטית סדרתית, אם לכל $x_n\in K$ קיימת תת סדרה $x_{n_k}\to x\in K$.

נאמר כי (X,d) מ"מ קומפקטי סדרתי, אם X הוא קבוצה קומפקטית.

טענה

אם $K\subset X$ קומפקטית, דבר זה שקול לכך כי $(K,d|_{k\times k})$ מ"מ קומפקטי.

הוכחה

תרגיל.

משפט

יהי (X,d) מ"מ. ותהי $K\subset X$ קומפקטית סדרתית. אם $f:K\to\mathbb{R}$ רציפה, אזי קיימים $\overline{x},\underline{x}$ כך ש־ $f(\overline{x})=\min\limits_{K}f, f(\overline{x})=\max\limits_{K}f$.

הוכחה

כמו באינפי 1.

משפט

יהי (X,d) מ"מ ותהי $K\subset X$ קומפקטית סדרתית. אם $f:K\to Y$ רציפה, אזי $f(K)=\{f(x)\mid x\in K\}$ הינה קומפקטית[9].

הוכחה

ניקח סדרה $y_n\in f(K)$.

מההגדרה, קיימים $x_n\in K$ כך ש־$f(x_n)=y_n$.

K קומפקטית, ולכן בהכרח קיימת x_{n_k} ת"ס של x_n שמתכנסת ל־$x\in K$.

כעת, מרציפות נקבל כי $f(x_{n_k})=y_{n_k}\to f(x)\in f(K)$.

ולכן בהכרח מצאנו ל־y_n תת סדרה מתכנסת, והיא קומפקטית.

דוגמאות

(1) כל יחידון הוא קומפקטי.

(2) $[a,b]\subset\mathbb{R}$ קומפקטית (משפט בולצאנו וווירשטרס).

(3) $(a,b)\subset\mathbb{R}$ איננה קומפקטית, $\mathbb{R}$ איננה קומפקטית.

(4) כדור היחידה $\hat{B}_1(0)\subset C([-1,1])$ איננו קומפקטי.

אם כך, ראינו כי לא כל קבוצה וחסומה הינה קומפקטית סדרתי (כמו בדוגמה 4 למשל). אמנם, ההפך בהכרח נכון.

טענה

יהי (X,d) מ"מ. ותהי $K\subset X$ קומפקטית סדרתית. אזי K הינה סגורה וחסומה.

הוכחה

סגירות:

נניח כי K קומפקטית. כעת, ניקח $x_n\in K$ כך שמתקיים $x_n\to x\in K$.

מקומפקטיות K קיימת תת סדרה $x_{n_k}\to y\in K$. מיחידות הגבול נקבל כי $y=x\in K$.

בפרט קיבלנו מההגדרה כי K הינה קבוצה סגורה.

חסימות:

נניח כי K איננה חסומה. בפרט אם ניקח $x_0\in K$, לכל n נוכל למצוא $x_n\in K$ כך ש־$d(x_0,x_n)>n$.

נבחין כעת כי מקומפקטיות ל־x_n ישנה בהכרח תת סדרה $x_{n_k}\to\widetilde{x}\in K$. דהיינו, קיבלנו כי:

$$n_k<d(x_0,x_{n_k})\overset{\triangle}{\leq}\underbrace{d(x_0,\widetilde{x})+\underbrace{d(\widetilde{x},x_n)}_{\to 0}}_{\text{סדרה חסומה}}$$

[9] ניזכר בכך כי פונקציות רציפות אינן מעבירות קבוצה פתוחה לפתוחה. אבל בקבוצות קומפקטיות זה אכן מתקיים.

קיבלנו סתירה, ולכן בהכרח K הינה חסומה.

משפט

כל קבוצה סגורה וחסומה ב־$\mathbb{R}^n$ הינה קומפקטית סדרתית.

הוכחה

בתרגול.

טענה

תהי (X,d) מ"מ. ותהי $K\subset X$ קומפקטית סדרתית.

תת קבוצה C סגורה של K היא קומפקטית סדרתית.

הוכחה

תהי $x_n\in C$, כלומר בפרט $x_n\in K$ ולכן קיימת תת סדרה $x_{n_k}\to x\in K$.

אמנם, $x_{n_k}\in C$ ו־C הינה סגורה, ולכן $x\in C$, כלומר C קומפקטית סדרתית.

משפט

כל קבוצה סגורה וחסומה ב־$\mathbb{R}$ הינה קומפקטית סדרתית.

הוכחה

ניקח $K\subset\mathbb{R}$ סגורה וחסומה. בהכרח $K\subset[-a,a]$ עבור a מספיק גדולים. K סגורה, ו־$[-a,a]$ הינה קומפקטית, ולכן מהמשפט הקודם נקבל כי גם K קומפקטית.

אפיון טופולוגי של קומפקטיות. הגדרה

מ"מ (X,d) ייקרא 'חסום כליל', אם לכל $\varepsilon>0$ קיימים $x_1,\dots,x_n\in X$ כך ש־$X=\bigcup_{i=1}^{n}B_\varepsilon(x_i)$.[10]

טענה

יהי (X,d) מ"מ קומפקטי סדרתי. אזי הוא חסום כליל.

הוכחה

יהי $\varepsilon>0$.

נבחר $x_1\in X$ כלשהוא.

כעת, אם $B_\varepsilon(x_1)=X$, סיימנו.

אחרת, יהא $x_2\in X\setminus B_\varepsilon(x_1)$.

אם $\bigcup_{i=1}^{2}B_\varepsilon(x_i)$, סיימנו.

אחרת, יהא $x_3\in X\setminus\bigcup_{i=1}^{2}B_\varepsilon(x_i)$.

אם לא עצרנו בשלב ה־n־י. כלומר אם $X\neq\bigcup_{i=1}^{n}B_\varepsilon(x_i)$, נבחר עוד איבר $x_{n+1}\in X\setminus\bigcup_{i=1}^{n}B_\varepsilon(x_i)$.

---

[10] נוכל לראות דוגמה לקבוצה שחסומה ואיננה חסומה כליל.

אם ניקח למשל את $X=\{x<x_n \mid \text{איקס סדרה חסומה}\}$ ואת $\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|<\|x\|_\infty$.

בנוסף, אם נסתכל על $e_i=\left(0,\dots0,\underbrace{1}_{i},\dots\right)$.

זהו כדור היחידה הסגור ב־X, אבל הוא לא חסום כליל, כי הרי אי אפשר לכסות אותו עם מספר סופי של כדורים ברדיוס $\frac{1}{2}$, שהרי $\|e_i-e_j\|=1 \qquad \forall i\neq j$.

נניח כי התהליך לא מסתיים לעולם, קיבלנו סדרה $x_n \in X$. אמנם על פי הנתון X קומפקטית, ולכן בפרט קיימת $x_{n_k} \to x$.

אמנם, מדובר בסתירה כי $x_{n+1} \notin B_\varepsilon\left(x_{n_k}\right)$, וראינו כי אם קיים $\varepsilon > 0$ כך ש־$d\left(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}\right) > 0$ אזי k איננה מתכנסת[11].

הגדרה

כיסוי של X הוא $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ כך ש־$A_\alpha \subset X$ לכל $\alpha \in I$ ו־$X = \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$.

כיסוי פתוח הוא כיסוי שמורכב מקבוצות פתוחות.

הגדרה

נאמר כי מ"מ (X,d) הינו קומפקטי, אם לכל כיסוי פתוח $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ של X, ישנו תת כיסוי סופי. כלומר, קיימים $\alpha_i, . a_n \in I$ כך ש־$X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_\alpha$.

משפט (הידוע בתור הלמה של היינה בורל)

התנאים הבאים שקולים:

(1) (X,d) קומפקטית סדרתית.

(2) (X,d) קומפקטית.

(3) אם $\{F_\alpha \mid \alpha \in I\}$ אוסף קבוצות סגורות ב־(X,d), כך שכל חיתוך של מספר סופי ביניהם אינו ריק, אזי $\bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha$ (החיתוך של כולן) אינו ריק.

דוגמא

ראינו כבר כי (a,b) אינו מקיים את (1).

הוא אינו מקיים גם את (2), שהרי נוכל למצוא כיסוי פתוח, שאין לו אף תת כיסוי סופי. למשל, אם ניקח את $A_n = \left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{n}\right)$ - מדובר בכיסוי של $(0,1)$, אבל אין לו אף תת כיסוי סופי, כיוון שהאינפימום של הקבוצה בהכרח יהיה חיובי, ולכן אין לו אף תת כיסוי סופי.

למת עזר על מספר לבג

אם X קומפקטית סדרתית, ו־$\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ כיסוי פתוח של X. אזי קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $x \in X$ קיים $\alpha \in I$ כך ש־$B_\varepsilon(x) \subset A_\alpha$.

הוכחה

נניח בשלילה שדבר זה אינו מתקיים.

בפרט, מהנחת השלילה מתקיים:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \exists x_n \in X \qquad \forall \alpha \in I \qquad B_\varepsilon(x_n) \not\subset A_\alpha$$

אמנם, X קומפקטית, ולכן בהכרח קיימת $x_{n_k} \to x \in X$.

בנוסף, $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ כיסוי פתוח, ולכן קיים α_0 כך ש־$x \in A_{\alpha_0}$ ו־$m \in \mathbb{N}$ כך ש־$B_{\frac{1}{m}}(x) \subset A_{\alpha_0}$.

כעת, קיים k_0 שהחל ממנו, $x_{n_{k_0}} \in B_{\frac{1}{2m}}(x)$.

נבחר $k \geq k_0$ כך ש־$n_k \geq 2m$. קיבלנו כי לכל $y \in B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k})$ מתקיים כי:

[11] ההיפך איננו נכון. הקטע הפתוח $(a,b) \subset \mathbb{R}$ הוא חסום כליל ואיננו קומפקטי.

$$d\left(y,x\right)\leq d\left(y,x_{n_k}\right)+d\left(x_{n_k},x\right)<\frac{1}{n_k}+\frac{1}{2m}\leq\frac{1}{m}$$

דהיינו, כי $y\in B_{\frac{1}{m}}\left(x\right)\subset A_{\alpha_0}$.
אך זה אומר כי $B_{\frac{1}{n_k}}\left(x_{n_k}\right)\subset A_{\alpha_0}$, בסתירה להנחת השלילה שאמרנו מקודם.

הוכחה (של המשפט)

$(1\Rightarrow2)$:
אנו יודעים כי (X,d) קומפקטית סדרתית, ונרצה להוכיח כי אם $\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}$ כיסוי פתוח של X אזי יש לו תת כיסוי סופי.
מהלמה שהוכחנו קודם לכן, קיים $\varepsilon>0$ כך ש־$\forall x\in X\qquad\exists\alpha\in I\qquad B_\varepsilon\left(x\right)\subset A_\alpha$.
מאידך, X קומפקטי ולכן בפרט חסום כליל, כלומר קיימים $x_1,\dots x_n$ כך ש־$X=\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_\varepsilon\left(x_i\right)$.
נסמן ב־α_i את האינדקס בו $B_\varepsilon\left(x_i\right)\subset A_{\alpha_i}$.
בהכרח נקבל כי:

$$X\overset{\text{טענה}}{=}\bigcup_{i=1}^{n}B_\varepsilon\left(x_i\right)\overset{\text{מהמהלך}}{\subset}\bigcup_{i=1}^{n}A_{\alpha_i}\subset X$$

ולכן בפרט קיבלנו מהשוויון בין כל האגפים כי $\{A_{\alpha_1},\dots,A_{\alpha_n}\}$ כיסוי סופי, כנדרש.

שיעור מס' 7:
יום ראשון
08.11.20

$(2\Rightarrow3)$:
נשים לב כי (3) שקול למעשה לתנאי הבא. כלומר, השלילה של (3) הינה כי אם החיתוך של $\bigcap\limits_{\alpha\in I}F\alpha_i$ הינו ריק, אזי בהכרח ישנה קבוצת אינדקסים $\alpha_1,..,\alpha_n$ כך ש־ $\bigcap\limits_{i=1}^{n}F_{\alpha_i}$ הינו ריק.
ונראה כעת אם כי תנאי (2) מתקיים אזי התנאי שהראינו קודם מתקיים.
תהינה $\{F\}_{\alpha\in I}$ קבוצות סגורות עם $\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha=\emptyset$.
בפרט נקבל כי $\left\{F_{\alpha_i}^c\right\}_{\alpha\in I}$ קבוצות פתוחות עם $X=\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha\right)^c=\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}F_\alpha^c\right)$ (מכללי תורת הקבוצות).
ולכן קיבלנו בסך הכל כי $\left\{F_{\alpha_i}^c\right\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של X.
מהתנאי הקודם נקבל כי קיימים $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ כך ש־ $X=\bigcup\limits_{i=1}^{n}F_{\alpha_i}^c$.
דבר זה גורר בהכרח כי $\bigcup\limits_{i=1}^{n}F_{\alpha_i}$ הינו ריק, כנדרש.

$(3\Rightarrow1)$:
תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב־X.
נניח בשלילה כי אין ל־x_n שום נקודת גבול (כלומר אין תת סדרה מתכנסת).
ממילא נקבל כי $\{x_n\mid n\geq1\}$ הינה סגורה (אפשר להוכיח זאת).
ומכאן ניתן להוכיח גם כי $A_m=\{x_n\mid n\geq m\}$ הינה קבוצה סגורה, שהרי היא מכילה את כל נקודות הגבול שלה.
נניח $y_i\in A_k$ כך ש־$y_i\to y$. אם ל־y_i ישנם אינסוף איברים שונים, למשל $y_{i_1},y_{i_2},\dots$ ־ זאת תת סדרה שמתכנסת ל־y. אבל מכאן נקבל כי ל־x_n ישנה תת סדרה המתכנסת ל־y ־ ולכן y_i מכילה בהכרח מספר סופי של איברים, וממילא היא סדרה קבועה החל ממקום מסוים ־ וממילא מדובר בקבוצה סגורה.

כעת, לכל $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_n$ מתקיים כי $\bigcap\limits_{i=1}^{N} A_{m_i} = A_{n_N} \neq \emptyset$ - אחרת קיים $x \in \mathbb{N}$ כך ש־$x_n = x$ לאינסוף n־ים - בסתירה לכך שאין ל־x_n ת"ס מתכנסת.

דבר זה בהכרח נכון, שהרי $(A_{M+1} \subset A_M)$.

כעת, נקבל מתכונה (3) כי קיים $x \in X$ כך ש־ $x \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m$.

דהיינו, קיימים אינסוף k־ים כך ש־$x = x_k$, וממילא נקבל כי x נקודת גבול של x_n בסתירה.

משפט

יהי (X,d) מ"מ. אזי $K \subset X$ קומפקטית סדרתית אם ורק אם לכל כיסוי פתוח של K קיים תת כיסוי סופי, כאשר כיסוי פתוח של K הוא $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, ו־$A_\alpha \subset X$ פתוחות ו־$K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$.

הוכחה

נובע מהמשפט הקודם ומאפיון של קבוצות פתוחות במטריקה מושרית (כי $V \subset A$ פתוח אם ורק אם $V_{d|_{A \times A}} = U \cup A$ עבור $U \subset X$ פתוח ב־X)

בעזרת האפיון הטופולוגי, נוכל לדבר על תכונות נוספות.

טענה

איחוד סופי של קבוצות קומפקטיות הוא קומפקטי.

הוכחה

יהיו $K_1, \ldots, K_N \subset X$ קומפקטיות.

כעת, יהי $K = \bigcup\limits_{i=1}^{N} K_i$ $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$כיסוי פתוח של K.

בפרט נקבל כי $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח של K_i לכל i.

כעת, קיימות קבוצות אינדקסים $I_1, \ldots, I_N \in I$ סופיות, כך ש־$\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כיסוי של K_i.

מיידית נקבל כי $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \bigcup\limits_{i=1}^{N} I}$ כיסוי סופי של K.

הגדרה[12]

יהי (X,d), אזי X ייקרא מרחב ספירבלי אם קיימת קבוצה בת מנייה הצפופה בו.

טענה

מרחב (X,d) קומפקטי הוא ספירבלי.

הוכחה

לכל $K \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $\left\{B_{\frac{1}{k}}(x)\right\}_{x \in X}$ הוא כיסוי פתוח של X.

X קומפקטי, ולכן בהכרח קיים תת כיסוי סופי.

כלומר, קיים $x_1^k, \ldots x_{N_k}^k$ כך ש־ $X = \bigcup\limits_{i=1}^{N} B_{\frac{1}{k}}\left(x_i^k\right)$.

כעת, נביט בקבוצה $\left\{x_1^k, \ldots, x_{N_k}^k\right\}$ $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}$.

זאת קבוצה בת מנייה (כרצוי).

נראה כי $\overline{A} = X$, כלומר שלכל $x \in X$ קיימת סדרה $y_n \in A$ כך ש־$x \to y_n$.

נבחין כי מהקומפקטיות, לכל $\varepsilon > 0$ קיים $k > \frac{1}{\varepsilon}$ ולכל $x \in X$ קיים $x_i^k \in A$ כך ש־$x \in B_{\frac{1}{k}}\left(x_i^k\right)$. ממילא נקבל כי $d\left(x, x_i^k\right) < \varepsilon$ ומדובר בתנאי שקול לצפיפות, שהרי נגדיר $y_n = x_i^k$ ומתקיים $y_n \to x$ - כלומר $\overline{A} = X$, כנדרש.

---

[12] לידע כללי ולמען הטענה הבאה

שקילות של מרחבים מטריים. בחלק זה של הקורס נרצה לשאול, מתי שני מ"מ (X,d) ו־(Y,ρ) הם "שקולים" או "אותו הדבר".

ראשית, נצטרך $f:X\to Y$ חח"ע ועל.

ישנן מספר אפשרויות לדרישה ממנה:

(1) $d\left(x_n,x\right)\to 0$ אם ורק אם $\rho\left(f\left(x_n\right),f\left(x\right)\right)\to 0$.

(2) f משמרת את המטריקה. דהיינו, לכל $x_1,x_2\in X$ מתקיים כי $d\left(x_1,x_2\right)=\rho\left(f\left(x_1\right),f\left(x_2\right)\right)$.

הגדרה

נאמר כי X ו־Y הם הומאומורפיים אם קיימת $f:X\to Y$ חח"ע ועל רציפה וגם f^{-1} רציפה.

הגדרה

נאמר כי X ו־Y הם איזומטריים אם קיימת $f:X\to Y$ חח"ע ועל, כך שלכל $x_1,x_2\in X$ מתקיים כי $d\left(x_1,x_2\right)=\rho\left(f\left(x_1\right),f\left(x_2\right)\right)$.

נבחין כי איזומטרייה והומאומורפיזם הם יחסי שקילות על מ"מ.

שהרי אם $f:X\to Y$ איזומטריה וגם $g:Y\to Z$ איזומטריה, אזי $g\circ f:X\to Z$ איזומטרייה.

דוגמאות

(1) (a,b) ו־(c,d) והומאומורפיים. שהרי אם ניקח את הפונקציה $f:(a,b)\to(c,d)$ המוגדרת על ידי $f\left(x\right)=c+\frac{d-c}{b-a}\left(x-a\right)$ נקבל כי (a,b) ו־(c,d) הומאורופיים.

אמנם, (c,d) ו־(a,b) איזומטריים אם ורק אם $d-c=b-a$.

(2) (a,b) הומאו' ל־$\mathbb{R}$, שהרי אם ניקח את $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f\left(x\right)=\tan X$ נקבל כי $\mathbb{R}$ ל־$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ שהינו גם הומאו' ל־(a,b) והרי מדובר ביחס שקילות.

(3) יהי (X,d) מ"מ, ונגדיר את הפונקציה $\rho:X\times X\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $\rho\left(x,y\right)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. ראינו כי ρ הינה מטריקה על X וגם כי $d\left(x_n,x\right)\to 0$ אם ורק אם $\rho\left(x_n,x\right)\to 0$.

ולכן עבור $f\left(X,d\right)\to\left(X,\rho\right)$ המוגדרת על ידי $f\left(x\right)=x$ נקבל הומאו'.[13]

(4) ראינו בתרגיל כי כל שתי נורמות $\|\cdot\|,\|\cdot\|'$ על $\mathbb{R}^n$ הן שקולות.

וממילא קיימים $0<C_1\leq C_2$ כך ש־ $C_1\|x\|\leq\|x\|'\leq C_2\|x\|$, וממילא $f:\left(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|\right)\to\left(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|'\right)$ המוגדרת על ידי פונקצית הזהות, יוצרת הומאו' בין המרחבים הללו.

באופן כללי נוכל לומר כי אם (X,d) ו־(Y,ρ) מ"מ, ו־$f:X\to Y$ חח"ע ועל, כך ש־ $C_1d\left(x,y\right)\leq\rho\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)\leq C_2d\left(x,y\right)$, אזי f הוא הומאומורפיזם.

טענה

יהי (X,d) מ"מ קומפקטי. ותהי $f:X\to Y$ חח"ע ועל ורציפה, אזי f^{-1} הינה גם היא רציפה.

טענת עזר

אם X קומפקטי ו־$f:X\to Y$ רציפה, אזי $f\left(C\right)\subset Y$ סגורה אם ורק אם לכל $C\subset X$ סגורה.

הוכחת טענת העזר

תהי C סגורה.

אנו יודעים כי X קומפקטית, ולכן C קומפקטית (טענה מהפרק הקודם).

[13] (X,d) ו־(X,ρ) אינם איזומטריים.

כמו כן, ראינו כי פונקציה רציפה מעבירה קבוצה קומפקטית וקומפקטית, ולכן בהכרח $f\left(C\right)$ קומפקטית ובפרט סגורה.

הוכחת הטענה

תהי $g=f^{-1}:Y\to X$.

ניקח כעת $C\subset X$ סגורה. ונקבל כי $f\left(C\right)=g^{-1}\left(C\right)$ ולכן $g^{-1}\left(C\right)$ סגורה.

מכאן נובע באופן ישירה כי g רציפה (אחד האפיונים שראינו לפונקציות רציפות).

כיצד ניתן להוכיח כי שני מרחבים אינם הומואומורפיים? נשים לב כי אם $f:X\to Y$ הומאו', אזי $U\subset X$ פתוחה אם ורק אם $f\left(U\right)\subset X$, וכך גם לגבי סגורה וקומפקטית.

בפרט נוכל להבין את הדוגמאות הבאות.

דוגמאות

(1) $X=\left(0,1\right)$ אינו הומאו' ל-$Y=\left[0,1\right]$, כי הרי X קומפקטית ו-Y איננה קומפקטית.

(2) $X=\left(0,1\right)$ אינו הומאו' ל-$\left(Y,\rho\right)$ כאשר ρ הינה המטריקה הדיסקרטית, כי הרי $X\subset\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$ הוא קומפקטי,
אבל אם היה הומאו' $f:X\to Y$ אזי $f\left(\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]\right)$ היה קומפקטי, וזאת סתירה כי במטריקה הדיסקרטית הקבוצות הקומפקטית היחידות הן קבוצות סגורות.

(3) אם $m\neq n$ אזי $\mathbb{R}^m$ אינו הומאו' ל-$\mathbb{R}^n$ (לא נוכיח).

טענה

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי $n<\infty$ ותהי $\|\cdot\|$ נורמה על V, אזי קיימת $\|\cdot\|'$ כך ש- $\left(V,\|\cdot\|\right)$ ו-$\left(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|\right)$ איזומטריים.

הוכחה

נבחר בסיס $\left(v_1,\ldots.v_n\right)\subset V$.

כעת נגדיר $T:V\to\mathbb{R}^n$ על ידי $T\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_iv_i\right)=\left(a_1,\ldots,a_n\right)$.

זהו איזומורפיזם של מרחבים וקטורים.

כעת, נגדיר $\left\|T^{-1}\left(a\right)\right\|=\|a\|'$. ניתן לראות כי $\|\cdot\|'$ אכן נורמה, ולכן T היא איזומטריה בין $\left(V,\|\cdot\|\right)$ ל-$\left(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|'\right)$.

בתרגול ראינו כי $A\subset\left(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_2\right)$ היא קומפקטית אם ורק אם היא סגורה וחסומה. קודם לכן ראינו כי אם $\|\cdot\|$ נורמה על $\mathbb{R}^n$ אזי $\left(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|\right)$הומאו' ל-$\left(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_2\right)$.

מכאן נובע כי $A\subset\left(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|\right)$ קומפקטית אם ורק אם היא סגורה. מכאן נובע כי משפט היינה בורל תקף על $\mathbb{R}^n$ עם כל נורמה.

טענה

יהי $\left(V,\|\cdot\|\right)$ מ"נ ממימד סופי n . הוא איזומטרי ל-$\mathbb{R}^n$ עם נורמה סופית, ולכן משפט היינה בורל תקף לכל מרחב נורמי ממימד סופי.

תרגיל

הראו כי כל כל שתי נורמות $\|\cdot\|$ ו-$\|\cdot\|'$ על מרחב וקטורי V ממימד סופי הן שקולות.

רציפות במידה שווה ומרחבים קומפקטיים ב־$C\left(K\right)$

רציפות במידה שווה

הגדרה

יהיו $\left(X,d\right)$ ו־$\left(Y,\rho\right)$ מ"מ.
$f:X\to Y$ תיקרא **רציפה במידה שווה** אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in X$ אם $d\left(x,y\right)<\delta$ כך ש־$\rho\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)<\varepsilon$.[14]

טענה

יהיו $\left(X,d\right)$ ו־$\left(Y,\rho\right)$ מ"מ ו־$\left(X,d\right)$ גם קומפקטי.
אם $f:X\to Y$ רציפה, אזי f רציפה במ"ש.

הוכחה

נניח ש־f אינה רציפה במ"ש.
נבחר $\delta_{n}=\frac{1}{n}$.
כלומר, קיים $\varepsilon_{0}>0$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיימים $x_{n},y_{n}\in X$ כך ש־$d\left(x_{n},y_{n}\right)<\frac{1}{n}$ אבל $\rho\left(f\left(x_{n}\right),f\left(y_{n}\right)\right)\geq\varepsilon$.
X קומפקטית סדרתית ולכן קיימת ל־x_{n} ת"ס מתכנסת. כלומר, קיימת $x_{n_{k}}\to x\subset X$.
בצורה דומה, ל־$y_{n_{k}}$ ישנה תת סדרה מתכנסת - $y_{n_{k_{l}}}\to y$. כמו כן גם $x_{n_{k}}\to x$ בתור תת סדרה של סדרה מתכנסת.
ולכן נקבל כי

$$d\left(x,y\right)\leq\underbrace{d\left(x,x_{n_{k_{l}}}\right)}_{\to0}+\underbrace{d\left(x_{n_{k_{l}}},y_{n_{k_{l}}}\right)}_{<\frac{1}{n_{k_{l}}}\to0}+\underbrace{d\left(y_{n_{k_{l}}},y\right)}_{\to0}$$

ולכן בפרט כל הביטוי שואף ל־0. אם כך $x=y$.
על פי הנתון f רציפה ולכן $f\left(x_{n_{k_{l}}}\right)\to f\left(x\right)$ וגם כך לגבי $f\left(y_{n_{k_{l}}}\right)$ (במרחב $\left(Y,\rho\right)$) אבל מדובר על סתירה, שהרי $\rho\left(f\left(x_{n_{k_{l}}}\right),f\left(y_{n_{k_{l}}}\right)\right)\to0$ מרציפות המטריקה.
אולם, זו סתירה לכך ש־$\rho\left(f\left(x_{n_{k_{l}}}\right),f\left(y_{n_{k_{l}}}\right)\right)\geq\varepsilon_{0}>0$.

ראינו כי באופן כללי אם $\left(X,d\right)$ מ"מ ו־$A\subset X$, אזי אם A קומפקטית, היא בפרט סגורה וחסומה, אך ההיפך לא נכון (כדור היחידה הסגור ב־$C\left(\left[a,b\right]\right)$).
אם כך, מהן הקבוצות הקומפקטיות במרחב $C\left(\left[a,b\right]\right)$?
נענה על כך בצורה רחבה יותר.

הגדרה

יהי $\left(K,d\right)$ מ"מ קומפקטי.
נגדיר:

$$C\left(K\right)=\left\{ f:K\to\mathbb{R}\mid f\text{ רציפות}\right\}$$

נורמה על $C\left(K\right)$ נגדיר באמצעות:

---

[14] בדיוק כמו אינפי 1

$$\|f\|_{\infty}=\max_{x\in K}|f(x)|$$

התכנסות ב־$\left(C(K),\|f\|_{\infty}\right)$ שקולה להתכנסות במ"ש.
כלומר, $\|f_n-f\|_{\infty}\to 0$ אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $n\geq N$ ולכל $x\in K$ נקבל $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$.

התכנסות במידה שווה.

טענה (1) **- קריטריון קושי להתכנסות במ"ש**
יהי (X,d) מ"מ ותהי $f_n:X\to\mathbb{R}$. אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך לכל $n,m\geq N$ ולכל $x\in X$ נקבל $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ אזי f_n מתכנסת במ"ש לאיזשהיא פונקציה $f:X\to\mathbb{R}$.

טענה (2)
יהי $(X,)$ מ"מ. ותהי $f_n:X\to\mathbb{R}$ רציפות (במ"ש). אם $f_n\to f$ במ"ש אזי גם f רציפה (במ"ש).

מסקנה
אם K קומפקטית ו־$f_n\in C(K)$ כך שלכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n,m\geq N$ נקבל $\|f_n-f_m\|_{\infty}<\varepsilon$ אזי קיים $f\in C(K)$ כך ש־$f_n\to f$ ב־$C(K)$.

הוכחת טענה (1)
ההנחה היא כי לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך לכל $n,m\geq N$ ולכל $x\in X$ נקבל $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$.
מכך נקבל מידית כי לכל $x\in X$ הסדרה $f_n(x)$ היא סדרת קושי ב־$\mathbb{R}$ ולכן היא מתכנסת. נסמן את גבולה ב־$f(x)$.
כעת נראה שההתכנסות היא במידה שווה.
יהי $\varepsilon>0$. מהתנאי שפיתחנו קודם לכן, קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שאם $n,m\geq N$ לכל $x\in X$ מתקיים $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$.
כעת, לכל $x\in X$:

$$|f_n(x)-f(x)|\leq\underbrace{|f_n(x)-f_m(x)|}_{<\varepsilon}+\underbrace{|f_m(x)-f(x)|}_{\underset{m\to\infty}{\to}0}$$

מכאן קיבלנו כי $|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$.
כלומר, בסך הכל קיבלנו כי לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $x\in X$ נקבל $|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$. בפרט $f_n\to f$ במ"ש.

הוכחת טענה (2)
יהי $\varepsilon>0$.
נתון כי יש לנו התכנסות במ"ש. בפרט יהא $n\in\mathbb{N}$ כך שלכל $x\in X$ נקבל $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.
כעת ניקח $x_n\to x$. מתקיים:

$$\begin{aligned}&|f(x_m)-f(x)|\\&\le \underbrace{|f(x_m)-f_n(x_m)|}_{<\varepsilon}+|f_n(x_m)-f_n(x)|+\underbrace{|f_n(x)-f(x)|}_{<\varepsilon}\\&<2\varepsilon+\underbrace{|f_n(x_m)-f_n(x)|}_{\underset{m\to\infty}{\to 0}}\end{aligned}$$

קיבלנו בסך הכל כי $\limsup\limits_{m\to\infty}|f(x_m)-f(x)|\le 2\varepsilon$.

דבר זה נכון לכל $\varepsilon>0$ ולכל $f(x_m)\to f(x)$. כלומר בפרט f רציפה.

טענה

אם $f_n\to f$ במ"ש ($X\to\mathbb{R}$) ו־f_n רציפות אזי לכל סדרה $x_n\to x$ מתקיים $f_n(x_n)\to f(x)$.

הערה

אם $f_n\to f$ נקודתית ולא במ"ש, הטענה אינה נכונה, כי למשל אם ניקח את $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f_n=x^n$. ו־ $f_n\to f(x)=\begin{cases}0 & x<1\\1 & x=1\end{cases}$.

אזי אם ניקח את $x_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)$ יתקיים כי $f_n(x_n)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. ומתקיים כי $\frac{1}{\varepsilon}\neq 1=f(1)$.

הוכחה

ניקח את הביטוי הבא ונפצל אותו:

$$\begin{aligned}&|f_n(x_n)-f(x)|\le|f_n(x_n)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(x)|\\&\le\underbrace{\sup_{y\in X}|f_n(y)-f(y)|}_{\underset{f_n\to f\text{ במ"ש}}{\to 0}}+\underbrace{|f(x_n)-f(x)|}_{\underset{f\text{ מרציפות}}{\to 0}}\end{aligned}$$

הגדרה

יהי K מרחב מטרי קומפקטי. תהי $A\subset C(K)$.

נאמר כי A רציפה במידה אחידה אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in K$ ולכל $f\in A$ אם $d(x,y)<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

כלומר, התלות של $\delta(\varepsilon)$ היא אותו הדבר לכל $f\in A$.

דוגמאות

(1) ניקח את $\{f\}=A\subset C(K)$ ו־$f:K\to\mathbb{R}$ רציפה. אזי K קומפקטית $\Leftarrow$ f רציפה במ"ש $\Leftarrow$ A רציפה במידה אחידה.

(2) איחוד סופי של קבוצות רציפות במידה אחידה הוא רציף במידה אחידה ומכאן נוכל להסיק כי $A\subset C(K)$ היא רציפה במידה אחידה.

(3) נתבונן בקבוצה $A_R=\{f\in C(K)\mid |f(x)-f(y)\le Rd(x,y)|\}$. פונקציות ליפשיץ עם קבוע ליפשיץ R. אזי A_R רציף במידה אחידה, כי הרי נוכל לבחור $\delta=\frac{\varepsilon}{R}$.

משפט ארצלה - אסכולי

תהי קבוצה $A\subset C(K)$ סגורה וחסומה.

אזי היא קומפקטית אם ורק אם היא רציפה במידה אחידה.

הוכחה

$\Rightarrow$ תהי $A \subset C\left(K\right)$ חסומה, סגורה ורציפה במידה אחידה (להלן במ"א).

תהי $\left\{f_n\right\} \subset A$ סדרה ב־A ונראה כי יש לה תת סדרה מתכנסת.

A חסומה, ולכן בפרט $A \subset B_M\left(0\right) \quad \exists M > 0$.

כלומר נקבל כי לכל $f \in A$ ולכל $x \in K$ מתקיים כי $f\left(x\right) \in \left[-M, M\right]$.

K קומפקטית ולכן ספירבלית, ולכן קיימת קבוצה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty} \subset K$ בת מנייה שהיא צפופה ב־K.

נביט בסדרה $f_n\left(x_1\right)$ ־ זאת סדרה ב־$\left[-M, M\right]$ ולכן יש לה תת סדרה $f_n^{(1)}\left(x_1\right)$ מתכנסת.

נביט גם ב־$f_n\left(x_2\right)$ ־ זאת סדרה ב־$\left[-M, M\right]$ ולכן יש לה תת סדרה $f_n^{(2)}\left(x_2\right)$ מתכנסת.

בסך הכל, נקבל את הסדרות הבאות:

$$\begin{array}{llll} f_1^{(1)} & , f_2^{(1)} \quad \ldots & , f_n^{(1)} & \text{מתכנסת ב־ } x_1 \\ f_1^{(2)} & , f_2^{(2)} \quad \ldots & , f_n^{(2)} & \text{מתכנסת ב־ } x_1, x_2 \\ & & & \\ f_1^{(k)} & , f_2^{(k)} \quad \ldots & , f_n^{(k)} & \text{מתכנסת ב־ } x_1, \ldots, x_2 \end{array}$$

נביט ב"סדרת האלכסון" $f_n^{(n)}$. מתקיים כי $\left(f_n^{(n)}\right)_{n \geq k}$ הינה ת"ס של $f_n^{(k)}$. ולכן $f_n^{(n)}\left(x_i\right)$ מתכנסת לכל $i = 1, \ldots, k$.

אם כך $f_n^{(n)}\left(x_i\right)$ מתכנסת לכל $i \in \mathbb{N}$.

יהי $\varepsilon > 0$. קיים $\delta > 0$ כך ש־$d\left(x, y\right) < \delta$ אזי מתקיים כי לכל $n \in \mathbb{N}$ בהכרח $\left|f_n^{(n)}\left(x\right) - f_n^{(n)}\left(y\right)\right| < \varepsilon$ שהרי נתון כי A רציפה במידה אחידה.

כעת נתבונן ב־x_i ־ זאת סדרה צפופה ב־K ולכל $\left\{B_\delta\left(x_i\right)\right\}_{i \in \mathbb{N}}$ היא כיסוי פתוח של K.

אמנם, K קומפקטית, ולכן קיים תת כיסוי סופי. דהיינו, נוכל לבחור $\left\{B_\delta\left(x_{i_1}\right), \ldots, B_\delta\left(x_{i_p}\right)\right\}$ כך שיתקיים $K = \bigcup_{j=1}^{p} B_\delta\left(x_{i_j}\right)$.

לכל j מתקיים כי $f_n^{(n)}\left(x_{i_k}\right)$ מתכנסת (הוכחנו קודם לכן) ולכן קיים $N > 0$ כך שאם $n, m \geq N$ מתקיים כי $\left|f_n^{(m)}\left(x_{i_j}\right) - f_m^{(m)}\left(x_{i_j}\right)\right| < \varepsilon$ לכל $j = 1, \ldots, p$.

כעת, יהי $x \in K$. בהכרח קיים $1 \leq j \leq p$ כך ש־$d\left(x_{i_j}, x\right) < \delta$.

ממילא, לכל $n, m \geq N$ יתקיים:

$$\begin{aligned} & \left|f_n^{(n)}\left(x\right) - f_m^{(m)}\left(x\right)\right| \leq \\ & \left|f_n^{(n)}\left(x_{i_j}\right) - f_n^{(n)}\left(x\right)\right| + \left|f_n^{(n)}\left(x_{i_j}\right) - f_m^{(m)}\left(x_{i_j}\right)\right| + \left|f_m^{(m)}\left(x_{i_j}\right) - f_m^{(m)}\left(x\right)\right| \\ & \overset{\text{רציפות במידה אחידה}}{\leq} 2\varepsilon + \left|f_n^{(n)}\left(x_{i_j}\right) - f_m^{(m)}\left(x_{i_j}\right)\right| \leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

קיבלנו בסך הכל כי לכל $\varepsilon > 0$ יש $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n, m \geq N$ מתקיים כי $\left\|f_n^{(n)} - f_m^{()}\right\| \leq 3\varepsilon$.

מהמסקנה בתחילת השיעור נקבל כי $f_n^{(n)}$ מתכנסת ב־$C\left(K\right)$ לאיזשהוא $f \in C\left(K\right)$.

A סגורה ולכן $f \in A$. בפרט קיבלנו כי A קומפקטית.

$\Leftarrow$ נרצה להראות כי אם A קומפקטית, אזי A רציפה במידה אחידה.

תהא $A \subset C\left(K\right)$ קומפקטית.

יהא $\varepsilon > 0$.

נתבונן בכיסוי הפתוח הבא ־ $A\subset\bigcup_{f\in A}B_{\varepsilon}\left(f\right)$.

נקבל כי $\left\{ B_{\varepsilon}\left(f\right)\right\} _{f\in A}$ הינו כיסוי פתוח, ולכן קיימים $f_{1},\ldots,f_{k}$ כך ש־ $A\subset\bigcup_{i=1}^{k}B_{\varepsilon}\left(f_{i}\right)$.
הקבוצה $\left\{ f_{1},\ldots,f_{k}\right\}$ סופית, ולכן היא בפרט רציפה במידה אחידה (ממה שראינו קודם לכן).
בפרט קיים $\delta>0$ כך שאם $d\left(x,y\right)<\delta$ אזי לכל $i=1,\ldots,k$ נקבל כי $\left|f_{i}\left(x\right)-f_{i}\left(y\right)\right|<\varepsilon$.
לכל $f\in A$ קיים i כך ש־ $\left\Vert f_{i}-f\right\Vert <\varepsilon$. בפרט נקבל כי אם לכל x,y יתקיים $d\left(x,y\right)<\delta$ אזי:

$$\begin{aligned} & \left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|\\ & \leq\left|f\left(x\right)-f_{i}\left(x\right)\right|+\left|f_{i}\left(x\right)-f_{i}\left(y\right)\right|+\left|f_{i}\left(y\right)-f\left(y\right)\right|\\ & \leq2\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon \end{aligned}$$

כנדרש.

כשדיברנו על קבוצות סגורות, הסתכלנו על המרחב $X=\left(a,b\right)$, וטענו כי הקבוצה $\left(a,b\right)$ סגורה במרחב הזה, כי היא כל המרחב.

שיעור מס' 9:
יום ראשון
15.11.20

אבל אז נשאלנו כיצד ייתכן שכל הסדרות מתכנסות לאיבר שנמצא בסדרה? למשל, הסדרה $x_{n}=\left(a+\frac{1}{n}\right)$.
התשובה הפורמלית היא שהסדרה הזאת לא מתכנסת במרחב X. למרות זאת חסר לנו כאן משהו. נוכל להבחין כי הסדרה x_{n} היא סדרת קושי, שאיננה מתכנסת.
דבר זה מוביל אותנו להגדרה הבאה שלנו היום ־ שלימות של מרחב.

שלימות של מרחבים. **הגדרה** (1)

יהי $\left(X,d\right)$ מ"מ. סדרה $\left(x_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ ב־X תיקרא **סדרת קושי** אם לכל $\varepsilon>0$ יש $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n,m\geq N$ מתקיים כי $d\left(x_{n},x_{m}\right)<\varepsilon$.

הגדרה (2)

מ"מ $\left(X,d\right)$ ייקרא שלם, אם כל סדרת קושי בו מתכנסת.

הערות

(1) סדרה מתכנסת $x_{n}\to x$ היא תמיד סדרת קושי.
(2) סדרת קושי שיש לה תת סדרה מתכנסת, מתכנסת כולה.

דוגמאות

(1) הישר הממשי ־ $\mathbb{R}$ הוא מרחב שלם. כך גם $\left(\mathbb{R}^{n},\left\Vert \cdot\right\Vert _{2}\right)$.
(2) $\left(a,b\right)$ איננו שלם, כי למשל $a+\frac{1}{n}$ הינה סדרת קושי שלא מתכנסת. גם $\left(\mathbb{Q},\left|\cdot\right|\right)$ איננו שלם מסיבה דומה.
(3) אם K מרחב קומפקטי, אז המרחב $C\left(K\right)$ עם נורמת המקסימום, הוא מרחב שלם.
(4) כל מרחב קומפקטי הוא שלם ־ אם $\left(X,d\right)$ קומפקטי ו־$\left(x_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ב־X. מקומפקטיות, יש ל־x_{n} ת"ס מתכנסת, ומההערה שכתבנו מקודם עולה כי כל הסדרה מתכנסת, ולכן X שלם.

טענה

אם $\left(X,d\right)$ מ"מ שלם, ו־$Y\subset X$ (עם מטריקה מושרית), אזי Y שלם אם ורק אם Y סגור ב־X.

הוכחה

נניח כי Y סגור. נבחר $y_n \in Y$ שהינה סדרת קושי (להלן ס"ק). מכאן עולה כי כי y_n ס"ק ב־X ולכן $y_n \to x \in X$,
אבל Y סגור ולכן $x \in Y$ ־ כלומר Y שלם.
כעת נניח כי Y שלם.
נניח בשלילה כי Y לא סגור. בפרט קיימת סדרה $y_n \in Y$ כך ־ $y_n \to x \in X \setminus Y$. אבל y_n מתכנסת ב־X ולכן y_n ס"ק ב־X־ כלומר y_n ס"ק ב־Y.
אבל y_n לא מתכנסת ב־Y מהנחת השלילה, ולכן Y איננו שלם.

טענה

יהי (X,d) מ"מ. ותהי $A \subset X$ צפופה. אם לכל סדרת קושי $a_n \in A$ יש גבול ב־X, אזי (X,d) שלם.

הוכחה

תהי x_n ס"ק ב־X. על פי הנתון, A צפוף ב־X, ולכן מההגדרה לכל n קיים $a_n \in A$ כך ־ $d(x_n,a_n) < \varepsilon$.
אבל a_n סדרת קושי שהרי מתקיים:

$$d(a,a_m) \leq d(a_n,x_n) + d(x_n,x_m) + d(x_m,a_m) < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + d(x_n,x_m) \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$$

בפרט נקבל כי קיים $x \in X$ כך ש־$a_n \to x$ אך אז נקבל

$$d(x_n,x) \leq d(x_n,a_n) + d(a_n,x) < \frac{1}{n} + d(a_n,x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

כלומר קיבלנו כי $x_n \in X$, מההנחה x_n ס"ק וכיוון שיש לה גבול נקבל כי X שלם, כנדרש.

הערה

שלימות אינה נשמרת תחת הומאומורפיזם (שלמות אינה שמורה טופולוגית).
אכן, $\mathbb{R}$ הומאו' ל־(a,b) אבל (a,b) לא שלם.

טענה

אם $f: X \to Y$ חח"ע ועל, וקיימים $0 < C_1 < C_2$ כך ש־

$$C_1 \cdot d(x,y) \overset{(**)}{\leq} \rho(f(x), f(y)) \overset{(*)}{\leq} C_2 \cdot d(x,y)$$

אזי X שלם אם ורק אם Y שלם.

הוכחה

נניח כי Y שלם. נניח כעת $x_n \in X$ ס"ק.
מ־$(*)$ נקבל כי $f(x_n)$ ס"ק ב־Y. מכך עולה כי $f(x_n) \to y \in Y$.
אמנם, f על ולכן קיים $x \in X$ כך ש־$y = f(x)$.
מ־$(**)$ נקבל כי $d(x_n,x) \leq \frac{1}{C_1}\rho(f(x_n),y) \to 0$ ומכאן נקבל כי X שלם.

מסקנה

$\mathbb{R}^n$ עם כל נורמה של (כי הוא שלם עם $\|\cdot\|_2$ וכל שתי נורמות הן שקולות.)

הוכחנו כי $(0,1)$ לא שלם, אבל $[0,1]$ שלם, שמכיל את $(0,1)$, והוא מקיים כי:

(1) כל הגבולות של סדרות קושי ב־$(0,1)$ שווים למעשה ל־$[0,1]$.
(2) $[0,1]$ הוא המרחב השלם הכי קטן שמכיל את $(0,1)$.
(3) $(0,1)$ צפוף ב־$[0,1]$

משפט ההשלמה

יהי (X,d) מ"מ.
קיים $\left(\widehat{X},D\right)$ מ"מ שלם והעתקה $\iota:X\to\widehat{X}$ כך ש־

(1) ι משמרת מרחקים ־ $D\left(\iota\left(x\right),\iota\left(y\right)\right)=d\left(x.y\right)$.
(2) $\iota\left(X\right)$ היא צפופה ב־$\widehat{X}$.

$\left(\widehat{X},D\right)$ ייקרא ההשלמה של X והוא יחיד עד כי איזומטריה (אם קיים (Y,ρ) והעתקה $j:X\to Y$ שמקיימת את (1) ו־(2), אזי (Y,ρ) ו־$\left(\widehat{X},D\right)$ איזומטריים).

הוכחה

באופן כללי, זהו מבנה ההוכחה.
שלב א' ־ בנייה של $\left(\widehat{X},D\right)$
שלב ב'־ בניית $\iota:X\to\widehat{X}$ ותכונות (1) ו־(2)
שלב ג' ־$\left(\widehat{X},D\right)$ שלם.
שלב ד' ־ יחידות של $\left(\widehat{X},D\right)$.

<u>שלב א' ־ בניית $\left(\widehat{X},D\right)$</u>

נגדיר את המרחב $\widetilde{X}=\left\{ x_{n}\mid x_{n}\text{ס"ק ב־}X\right\}$.
כמו כן נגדיר:
$D\left(\left(x_{n}\right),\left(y_{n}\right)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}d\left(x_{n},y_{n}\right)$.
נבחין כי D מוגדרת היטב:, כשנתבונן באי שווין הבא:

$$\begin{aligned}\left|d\left(x_{n},y_{n}\right)-d\left(x_{m},y_{m}\right)\right| & \le\left|d\left(x_{m},y_{n}\right)-d\left(x_{n},y_{n}\right)\right|+\left|d\left(x_{n},y_{m}\right)-d\left(x_{m},y_{m}\right)\right|\\
 & <d\left(y_{n},y_{m}\right)+d\left(x_{n},x_{m}\right)\underset{n,m\to\infty}{\rightarrow}0
\end{aligned}$$

מכאן $d\left(x_{n},y_{n}\right)$ ס"ק ב־$\mathbb{R}$ ולכן מתכנסת.
D סימטרית ־ מידי .
נוכיח כעת א"ש משולש. יהיו $\left(x_{n}\right),\left(y_{n}\right),\left(z_{n}\right)$ ס"ק.

$$D\left(x_{n},y_{n}\right)=\lim_{n\to\infty}d\left(x_{n},y_{n}\right)\le\lim_{n\to\infty}\left(d\left(x_{n},z_{n}\right)+d\left(z_{n},y_{n}\right)\right)=D\left(x_{n},z_{n}\right)+D\left(z_{n},y_{n}\right)$$

נוכיח כעת חיוביות ־
ברור כי $0\le D\left(\left(x_{n}\right),y_{n}\right)$, אבל אם נניח כי $x_{n}\to a$ ו־$y_{n}\to a$ אזי נקבל כי:

$$D\left(x_{n},y_{n}\right)=\lim_{n\to\infty}d\left(x_{n},y_{n}\right)\le\lim_{n\to\infty}d\left(x_{n},a\right)+\lim_{n\to\infty}d\left(y_{n}a\right)\Rightarrow D\left(\left(x_{n}\right),\left(y_{n}\right)\right)=0$$

אם כך, מדובר **בפסאודו מטריקה!**

כעת נגדיר יחס שקילות על $\widetilde{X}$:

$(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow D\left((x_n),(y_n)\right)=0$.

כמו כן, נגדיר את $\widehat{X}=\{[x_n] \mid x_n\text{-ב ס"ק } X\}$ כאשר $[x_n]$ הוא מחלקת שקילות של x_n.

ממה שראינו בתרגיל 1 עולה כי D היא מטריקה על $\widehat{X}$:

$$D\left([(x_n)],[(y_n)]\right)=D\left((x_n),(y_n)\right)$$

<u>שלב ב'- בניית $\iota : X \to \widehat{X}$ ותכונות (1) ו-(2)</u>

לכל $x \in X$ נסמן ב-x את הסדרה הקבועה $(x,x,\dots)$. נגדיר את $\iota\left(x\right)=[x]$ (מחלקת השקילות של x).

נראה ש-ι מקיימת את התכונות שרצינו:

1. ι משמר מרחק:

$$D\left(\iota\left(x\right),\iota\left(y\right)\right)=\lim_{n\to\infty}d\left(x,y\right)=d\left(x,y\right)$$

2. $\iota\left(x\right)$ קבוצה צפופה ב-$\widehat{X}$.

יהא $[(x_n)] \in \widetilde{X}$. נביט, לכל k (קבוע) ב-$\iota\left(x_k\right)$:

$$D\left(\iota\left(x_k\right),(x_n)\right)=\lim_{n\to\infty}d\left(x_k,x_n\right)$$

אבל (x_n) ס"ק ולכן בפרט:

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}d\left(x_k,x_n\right)=0 \Rightarrow D\left(\iota\left(x\right),\iota\left(y\right)\right)\underset{k\to\infty}{\to}0$$

ולכן $\iota\left(x\right)$ צפוף.

<u>שלב ג' - $\left(\widehat{X},D\right)$ שלם.</u>

קודם לכן ראינו כי מספיק להראות שס"ק בקבוצה צפופה מתכנסת.

אנחנו יודעים כי $\iota\left(x\right)$ צפופה ב-$\widehat{X}$.

לכן ניקח $\iota\left(x_k\right)$ ס"ק ב-$\widehat{X}$ ונראה כי יש לה גבול ב-$\widehat{X}$.

x_k ס"ק ב-X, שהרי:

$$D\left(\iota\left(x_n\right),\iota\left(x_m\right)\right)\overset{(1)}{=}d\left(x_k,x_m\right)$$

ולכן נראה כי $[(x_n)]$ היא הגבול של $\iota\left(x_k\right)$:

$$D\left(\iota\left(x_k\right),[(x_n)]\right)=\lim_{n\to\infty}d\left(x_k,x_n\right)\underset{k\to\infty}{\to}0$$

שהרי x_n ס"ק.

<u>שלב ד' - יחידות של $\left(\widehat{X},D\right)$ עד כדי איזומטריה</u>

יהא (Y,ρ) מ"מ. ותהא $j:X\to Y$ משמרת מרחקים, ו־$j(x)$ צפופה ב־Y.

נביט ב־$A:\iota(x)\to j(x)$ המוגדרת על ידי $A=j\circ i^{-1}$.

הן ι והן j משמרות מרחק ולכן A משמרת מרחק.

מכאן עולה כי A חח"ע ועל. כלומר A איזומטריה בין $\iota(x)$ ל־$j(x)$.

נרחיב את A לאיזומטריה $\overline{A}:\widehat{X}\to Y$.

אם $\alpha\in\widehat{X}$, אזי קיימים $\alpha_n\in(\iota(x))$, כך ש־$\alpha_n\to\alpha$.

אבל α_n ס"ק ולכן, כיוון ש־A משמר מרחקים, מתקיים כי $A(\alpha_n)$ ס"ק ב־Y.

Y שלם ומכאן נובע כי $A(\alpha_n)\to\beta\in Y$.

נגדיר את $\overline{A}$ להיות:

$$\overline{A}(\alpha)=\underbrace{\lim_{n\to\infty}A(\alpha_n)}_{\beta}$$

נבחין $\overline{A}$ על, שהרי קיימים $\beta_n\in j(x)$ כך ש־$\beta_n\to\beta$ ולכן נגדיר $\alpha_n=A^{-1}(\beta_n)$ ומכאן נקבל כי β_a ס"ק ב־Y.

אבל α_n ס"ק ב־$\widehat{X}$ כי A משמר מרחקים, ולכן $\alpha_n\to\alpha$ ו־$\overline{A}(\alpha)=\beta$.

נוכל להראות כי A משמר מרחק, כי אם $\alpha,\alpha'\in\widehat{X}$ כך ש־$\alpha_n,\alpha_n'\in\iota(x)$ ו־$\alpha_n\to\alpha$ וגם $\alpha_n'\to\alpha'$.אזי נקבל מההגדרה ומהרציפות של ρ:

$$\rho\left(\overline{A}(\alpha),\overline{A}(\alpha')\right)=\lim_{n\to\infty}\rho\left(A(\alpha_n),A(\alpha_n')\right)$$

מכאן ש־A משמרת מרחק נקבל בסופו של דבר:

$$\lim_{n\to\infty}\rho\left(A(\alpha_n),A(\alpha_n')\right)=\lim_{n\to\infty}D(\alpha_n,\alpha_n')=D(\alpha,\alpha')$$

נשים לב כי אפיינו את מרחב ההשלמה בצורה מאוד אבסטרקטית, אבל במקרה ספציפי ניתן להתייחס לכך בצורה פשוטה יותר.

טענה

אם (X,d) מ"מ שלם, ו־$Y\subset X$ מטריקה מושרית. אזי ההשלמה של Y היא $\overline{Y}$ (הסגור של Y).

דוגמא

ההשלמה של $(0,1)$ היא $[0,1]$.

הגדרה

יהי (X,d) מ"מ. $f:X\to X$ תיקרא מכווצת אם קיים $\lambda\in(0,1)$ כך ש־$d(f(x),f(y))\le\lambda d(x,y)$.

שיעור מס' 10:

יום שני

16.11.20

הערה

העתקה f מכווצת אם היא מהמרחב לעצמו וגם היא ליפשצית עם קבוע ליפשיץ קטן מ־1.

בפרט f מכווצת הינה רציפה.

משפט ההעתקה המכווצת

יהי (X,d) מ"מ שלם.

תהי $f:X\to X$ העתקה מכווצת.

אזי יש ל־f נקודת שבת יחידה. כלומר קיימת ויחידה $x\in X$ כך ש־$f(x)=x$.

הוכחה

יהי $x_0\in X$.

אם $f(x_0)=x_0$ ־ סיימנו (מצאנו נקודת שבת).

אחרת, נגדיר $x_{n+1}=f(x_n)$.

<u>נראה כי x_n ס"ק:</u>

$$d(x_{n+1},x_n)=d(f(x_n),f(x_{n-1}))\leq\lambda d(x_n,x_{n-1})\overset{\text{אינדוקציה}}{\leq}\ldots\leq\lambda^n d(x_n,x_0)$$

כעת, יהי $N\in\mathbb{N}$ ויהיו $n,m\geq N$, אזי מתקיים:

$$d(x_n,x_m)\leq\sum_{k=m}^{n-1}d(x_{k+1},x_k)\leq\sum_{k=m}^{n-1}\lambda^n d(x_n,x_0)\leq\sum_{k=N}^{\infty}\lambda^n d(x_n,x_0)=\frac{\lambda^N}{1-\lambda}d(x_n,x_0)$$

נבחר N כך ש־$d(x_n,x_0)<\varepsilon$. ואז נקבל כי $d(x_n,x_m)<\varepsilon$.

ולכן x_n קושי ובפרט $x_n\to x$ מתכנסת (כי אנחנו במרחב שלם)

<u>נראה כי x נקודת שבת</u>

אנחנו יודעים כי $x_n\to x$ אבל f רציפה ולכן $f(x_n)\to f(x)$.

בפרט נקבל כי:

$$d(x,f(x))=\lim_{n\to\infty}d(x_n,f(x_n))=\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_{n+1})\overset{\text{קושי}}{=}0$$

כלומר $d(x,f(x))=0$ ולמעשה $x=f(x)$.

<u>נראה כי x נקודת שבת יחידה</u>

נניח כי גם y נקודת שבת, ונתבונן במרחק שלהם:

$$d(x,y)=d(f(x),f(y))\leq\lambda d(x,y)$$

אבל $\lambda>1$ ולכן $d(x,y)=0\Rightarrow x=y$.

דוגמא

ניקח $p>1$ ונחפש את $x_* = \sqrt{p+\sqrt{p}+\sqrt{p}+\ldots}$. נבחין כי אם x_* = $\sqrt{p+x_*}=x_*$. למעשה קיבלנו כי x_* נקודת שבת של $\phi\left(x\right)=\sqrt{p+x}$.

נראה כי מדובר בהעתקה מכווצת. אם $x\in\left[0,2p\right]$ אזי $\phi\left(x\right)\in\left[0,\sqrt{3p}\right]\subset\left[0,2p\right]$.

דבר זה עונה לנו על התנאי כי $\phi:\left[0,2p\right]\to\left[0.2p\right]$.

מדובר בהעתקה מכווצת שכן:

$$\phi\left(x\right)-\phi\left(y\right)\overset{\text{טיילור}}{=}\phi\left(\xi\right)\left(x-y\right)$$

כאשר $x<\xi<y$.

אמנם, נקבל כי $\phi'\left(\xi\right)=\frac{1}{2\sqrt{p+\xi}}\leq\frac{1}{2}$ ולכן נקבל כי $\left|\phi\left(x\right)-\phi\left(y\right)\right|\leq\frac{1}{2}\left|x-y\right|$. ולכן בקטע $\left[0,2p\right]$ ישנה נקודת שבת יחידה x_*.

לכאורה, ניתן אפשר לחשב זאת, שהרי מתקיים:

$$\sqrt{p+x_*}=x_*\Rightarrow x_*^2-x_*-p=0\Rightarrow x_*=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4p}$$

אמנם, אם נחליף את השורש בשורש שביעי למשל, יהיה לנו קשה יותר לדבר על כך.

משוואה דיפרנציאלית רגילה היא משוואה מהצורה - $y'\left(x\right)=y\left(x\right)$.

בדרך כלל נרצה לתת תנאי עצירה, למשל $y\left(0\right)=7$, אז נקבל כי $y\left(x\right)=7e^{x}$.

אך האם זהו הפיתרון היחיד? האם יש פיתרון ל־$y'\left(x\right)=\arctan\left(y\left(x\right)\right)$ עם תנאי עצירה $y\left(0\right)=1$?

בדרך כלל, נביט במשוואות מהצורה $y'\left(x\right)=F\left(x,y\left(x\right)\right)$ כאשר $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. תנאי ההתחלה יהיה $y\left(x_0\right)=y_0$.

משפט (פיקארד)

נניח ש־F פונקציה רציפה וליפשצית במשתנה השני כלומר, קיים $L>0$ כך שלכל $x,y_1,y_2\in\mathbb{R}$ נקבל כי:

$$\left|F\left(x,y_1\right)-F\left(x,y_2\right)\right|\leq L\left|y_1-y_2\right|$$

אזי קיים $\delta>0$ ופונקציה יחידה $y\in C\left(\left[x_0-\delta,x_0+\delta\right]\right)$ כך ש־y מקיימת - $y'\left(x\right)=F\left(x,y\left(x\right)\right)$ ו־$y\left(x_0\right)=y_0$.

הוכחה

יהי x_0,y_0 ויהיו $\delta>0$

תהי העתקה $\varPhi:C\left(\left[x_0-\delta,x_0+\delta\right]\right)\to C\left(\left[x_0-\delta,x_0+\delta\right]\right)$ ע"י:

$$\varPhi\left(y\right)\left(x\right)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}F\left(t,y\left(t\right)\right)dt$$

(1) נבחין כי נקודת שבת של ϕ היא פיתרון של המשוואה הדיפרנציאלית שתיארנו קודם לכן.

נניח כי y נקודת שבת, כלומר:

$$y\left(x\right)=\left(\Phi\left(y\right)\right)\left(x\right)=y_{0}+\int\limits_{x_{0}}^{x}F\left(t,y\left(t\right)\right)dt$$

אבל $F\left(t,y\left(t\right)\right)$ רציפה, ולכן $y_{0}+\int\limits_{x_{0}}^{x}F\left(t,y\left(t\right)\right)dt$ גזיר. נגזור את שני האגפים:

$$y'\left(x\right)=0+F\left(x,y\left(x\right)\right)dt$$

בנוסף נקבל כי $y\left(x_{0}\right)=y_{0}+0=y_{0}$.

(2) אם $\delta<\frac{1}{L}$ אזי Φ העתקה מכווצת.
נבחר $y,z\in C\left(\left[x_{0}-\delta,x_{0}+\delta\right]\right)$.
אנחנו צריכים להוכיח כי קיים $\lambda<1$ כך ש־:

$$\left\Vert \Phi\left(y\right)-\Phi\left(x\right)\right\Vert _{\infty}\leq\lambda\left\Vert y-z\right\Vert _{\infty}$$

נבחין כי מתקיים:

$$\begin{aligned}\left|\Phi\left(y\right)\left(x\right)-\Phi\left(z\right)\left(x\right)\right| & =\left|\int\limits_{x_{0}}^{x}F\left(t,y\left(t\right)\right)-\int\limits_{x_{0}}^{x}F\left(t,z\left(t\right)\right)dt\right|\leq\\
 & \int\limits_{x_{0}}^{x}\left|F\left(t,y\left(t\right)\right)-\int\limits_{x_{0}}^{x}F\left(t,z\left(t\right)\right)dt\right|\overset{x\geq x_{0}\text{וליפשיץ}}{\leq}\\
 & \int\limits_{x_{0}}^{x}\left|L\left|y\left(t\right)-z\left(t\right)\right|dt\right|\leq\\
 & \left\Vert y-z\right\Vert _{\infty}\int\limits_{x_{0}}^{x}Ldt=L\underbrace{\left|x-x_{0}\right|}_{\leq\delta}\left\Vert y-z\right\Vert _{\infty}\leq\\
 & \leq\underbrace{L\delta}_{<1}\left\Vert y-z\right\Vert _{\infty}
\end{aligned}$$

אם כך, הוכחנו את הדרוש.

הערות

(1) δ קבוע ב־L. אפשר להראות שבמקרה זה ניתן להרחיב את הפתרון לכל $\mathbb{R}$.
(2) המשפט איננו תופס את בעיית ההתחלה $y'=y^{2}$ ואת $y\left(0\right)=1$, כי $F\left(x,y\right)=y^{2}$ איננה ליפשצית ב־y. נשים לב כי $F|_{m}$ ליפשצית ב־y לכל $m\subset\mathbb{R}^{2}$ קבוצה קומפקטית. למשוואה הזאת כן קיים פיתרון יחיד בסביבת 0 לפי המשפט הבא שנראה.

משפט

יהי $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ ויהיו $0 < \alpha, \beta$. תהיי $F : [x_0-\alpha, x_0+\alpha] \times [y_0-\beta, y_0+\beta]$ פונקציה רציפה וליפשצית במשתנה השני, אזי קיים $\delta > 0$ כך שלבעיה $y'(x) = F(x, y(x))$ ותנאי עצירה $y(x_0) = y_0$ יש פיתרון יחיד בקטע $[x_0-\delta, x_0+\delta]$.

פרק 2 - משוואות דיפרנציאליות בכמה משתנים

שיעור מס' 11:
יום ראשון
22.11.20

עד כה, דיברנו רק על תכונות של רציפות וכן הלאה, אך לא דיברנו על נגזרות ועוד. נתחיל קודם כל מכמה מושגים מקדימים.

המרחב $\hom(V, W)$

יהיו $(V, \|\cdot\|_V)$ ו-$(W, \|\cdot\|_W)$ שני מרחבים נורמיים.

הגדרה

המרחב $\hom(V, W)$ הוא מרחב ההעתקות הליניאריות מ-V ל-W.
המרחב $B(V, W)$ הוא מרחב ההעתקות הרציפות מ-V ל-W.

טענה

נגדיר $\|\cdot\|_{\mathrm{Op}(V,W)} : \hom(V, W) \to [0, \infty]$
המוגדרת על ידי:

$$\|T\|_{\mathrm{op}(V,W)} = \sup\left\{\|Tv\|_W \mid v \in V, \|v\|_V = 1\right\} = \sup\left\{\frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} \mid v \in V \setminus \{0\}\right\}$$

אזי:
(1) $T \in B(V, W)$ אם ורק אם $\|T\|_{\mathrm{op}} < \infty$.
(2) $\|T\|_{\mathrm{op}(V,W)}$ היא נורמה על $B(V, W)$ והיא תיקרא הנורמה האופרטורית.

הוכחה

הוכחנו בתרגיל.

מהטענה הזו עולה כי העתקה ליניארית היא חסומה ($\|T\|_{\mathrm{op}} < \infty$) אם ורק אם היא רציפה ($T \in B(V, W)$).
מיידית מתקיים מההגדרה כי לכל $v \in V$ בהכרח $\|Tv\|_W \leq \|T\|_{\mathrm{op}(V,W)} \|v\|_V$.
מהליניאריות של T, ניתן לכתוב, לכל $v_1, v_2 \in V$ כי בהכרח $\|Tv_1 - Tv_2\|_W \leq \|T\|_{\mathrm{op}} \|v_1 - v_2\|_V$.
בפרט נקבל כי T היא לפשיץ עם קבוע ליפשיץ $\|T\|_{\mathrm{op}}$, שהוא הקבוע ליפשיץ הטוב ביותר של ההעתקה הליניארית.
נשים לב כי הנורמה האופרטורית תלויה גם בנורמות עצמן. באופן כללי, ניתן להגיד שגם המרחב $B(V, W)$ יהיה תלוי בנורמות.

דוגמא

ניקח את $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix}$.
אנחנו יודעים כי $2 = \left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \left\|T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|$, ולכן אנחנו יודעים כי $\|T\|_{\mathrm{op}} \geq 2$.

ונקבל גם כי $\frac{\left\|T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\|} < 2$ אם $y \neq 0$ ולכן בהכרח $\|T\|_{\mathrm{op}} = 2$.

טענה

יהיו $(U, \|\cdot\|_U)\,, (V, \|\cdot\|_V)$ ו־$(W, \|\cdot\|_W)$שלושה מרחבים נורמיים.
תהיינה $S \in B(V, W)$ ו־$T \in B(U, v)$ אז $S \circ T \in B(U, W)$, ומתקיים:

$$\|S \circ T\|_{\mathrm{op}(U,W)} \leq \|S\|_{\mathrm{op}(V,W)} \cdot \|T\|_{(U,\,V)\mathrm{op}}$$

הוכחה

ניקח $0 \neq u \in U$ ונקבל:

$$\|(S \circ T)(u)\|_W = \|S(T(u))\|_W \leq \|S\|_{\mathrm{op}(V,W)} \|T(u)\|_V \leq$$
$$\|S\|_{\mathrm{op}(V,W)} \|T\|_{\mathrm{op}(U,V)} \|u\|_V$$

כעת, נחלק ב־$\|u\|_V$ ונקבל:

$$\frac{\|(S \circ T)(u)\|_W}{\|u\|_V} \leq \|S\|_{\mathrm{op}(V,W)} \|T\|_{\mathrm{op}(U,V)}$$

ניקח $\sup$ על כל $u \neq 0$ ונקבל את הדרוש.
באופן כללי, $B(V, W) < \hom(V, W)$.

טענה

אם $\dim V < \infty$ אזי $B(V, W) = \hom(V, W)$.[15]

הוכחה

אנחנו צריכים להוכיח כי אם $T \in \hom(V, W)$ אזי T רציפה.
מליניאריות של T ראינו כי מספיק להוכיח כי T רציפה ב־0 (כלומר אם $v_n \to 0$ לפי הנורמה ב־V, אזי $Tv_n \to 0$ לפי הנורמה ב־W).
נבחר $u_1, \dots u_k$ בסיס של V.
לכל $v \in V$ נרשום כי $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i = v$. ראינו כי העתקה $v \to (\alpha_1, \dots \alpha_k)$ היא איזומטריה של $(V, \|\cdot\|_V)$ ל־$\left(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|\right)$ עם הנורמה המתאימה.
אנחנו יודעים כי התכנסות ב־$\left(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|\right)$ שקולה להתכנסות איבר איבר (כי זה נכון עבור $\left(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_2\right)$ ו־$\|\cdot\|$ ו־$\|\cdot\|_2$ שקולות).

---

[15] בכיוון ההפוך גם נכון, אבל מחוץ לגבולות הקורס.
דוגמא: נתבונן ב־$V = C[0,1]$ ו־$\|f\|_V = \int_0^1 |f(x)|\,dx$.
ההעתקה $Tf = f(0)$ היא העתקה ליניארית לא רציפה.
כי $\|f_n\|_V \to 0$ אבל $Tf_n = 1 \neq T(0)$ לכל n.

מכך נגיע למסקנה כי $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_{i_n}u_i=v_n\to 0$ אם ורק אם $x^1_{n_i}\to 0$ לכל $i=1\dots k$.
נוכל לראות שמתקיים:

$$\|Tv_n\|_W=\left\|\sum_{i=1}^{k}\alpha_{i_n}T\left(u_i\right)\right\|_W\leq\sum_{i=1}^{k}\|\alpha_{i_n}T\left(u_i\right)\|_W\leq$$
$$\sum_{i=1}^{k}|\alpha_{i_n}|\,\|T\left(u_i\right)\|_W\leq\max_{1\leq i\leq k}\left(\|T\left(u_i\right)\|_W\right)\sum_{i=1}^{k}|\alpha_{i_n}|$$

אבל $\sum\limits_{i=1}^{k}|\alpha_{i_n}|\to 0$ ולכן $\max\limits_{1\leq i\leq k}\left(\|T\left(u_i\right)\|_W\right)\sum\limits_{i=1}^{k}|\alpha_{i_n}|\to 0$.
כנדרש.

הערה

בעצם ראינו שאם V מרחב נורמי ממימד סופי ו־$(u_1,\dots u_k)$ בסיס של V, אזי התכנסות $v_n\to v$ ב־$(V,\|\cdot\|_V)$ שקולה להתכנסות של הרכיבים $\alpha_n^i\to\alpha^i$ בבסיס $\{u_i\}$ כאשר $v=\sum\alpha^iu_i$ ו־$v_n=\sum\alpha_n^iu_i$.

המרחב $\hom\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right)$. תהיינה $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$ ו־$\|\cdot\|_{\mathbb{R}^k}$ הנורמות האוקלידית.
ותהיינה $\|\cdot\|_{\mathrm{op}(k,m)}$ הנורמה האופרטורית.
מליניארית, אנחנו יודעים כי אם $T\in\hom\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n\right)$, אזי המטריצה $k\times m$ (m שורות, k עמודות), ניקח את $T_{\alpha_i}=\langle T_{e_i},e_\alpha\rangle$ כאשר $1\leq i\leq k$ ו־$1\leq\alpha\leq m$, ומדובר במכפלה הסטנדרטיית על $\mathbb{R}^m$, (ו־e_i וגם e_α הם וקטורי הבסיס של $\mathbb{R}^k$ ו־$\mathbb{R}^n$).
נשים לב כי המרחב $\hom\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right)$ הוא מרחב וקטורי ממימד km. יש לו גם בסיס סטנדרטי θ_{α_i} כאשר $1\leq i\leq k$ וגם $1\leq\alpha\leq m$, והוא מוגדר על ידי:

$$\theta_{\alpha i}\left(e_j\right)=\begin{cases}e_\alpha & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

קיבלנו כי בבסיס הזה ניתן לכתוב את $T=\sum\limits_{\alpha=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{k}T_{\alpha_i}\theta_{\alpha_i}$.

מסקנה

אם $T_n=\sum\limits_{\alpha=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{k}T^{(n)}_{\alpha_i}\theta_{\alpha_i}$ ו־$T=\sum\limits_{\alpha=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{k}T_{\alpha_i}\theta_{\alpha_i}$, אזי $T_n\to T$, כלומר $\|T_n-T\|_{\mathrm{op}(k,m)}\to 0$ אם ורק אם $T^{(n)}_{\alpha_i}\to T_{\alpha_i}$ לכל $1\leq i\leq k$ וגם $1\leq\alpha\leq m$.

ההעתקה $T\to T_{\alpha_i}$ כאשר $1\leq i\leq k$ וגם $1\leq\alpha\leq m$ היא למעשה איזומורפיזם ליניארי בין $\hom\left(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^m\right)$ ל־$\mathbb{R}^{km}$.
חשוב לשים לב כי $\|\cdot\|$ על $\hom\left(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^m\right)$ היא בדרך כלל שונה מהנורמה האוקלידית על $\mathbb{R}^{km}$.

פונקציות מ־$\mathbb{R}^k$ ל־$\mathbb{R}^m$

נביט בפונקציה $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$. נשים לב כי נוכל להסתכל על הפונקציה בתור רשימה של פונקציות: $f(a)=\begin{pmatrix} f_1(a_1,\ldots,a_k)\\ \cdots \\ f_m(a_1,\ldots,a_k)\end{pmatrix}$.

כיוון שהתכנסות ב־$\mathbb{R}^m$ שקולה להתכנסות רכיב רכיב, נקבל כי f רציפה בנקודה $a\in\mathbb{R}^k$ אם ורק אם f_α רציפות ב־a לכל α.

נראה שני מקרים חשובים של פונקציות כאלו.

המקרה הראשון $k=1$ ־ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$

פונקציות כאלו מתארות מסילות ב־$\mathbb{R}^m$.

דוגמא א'

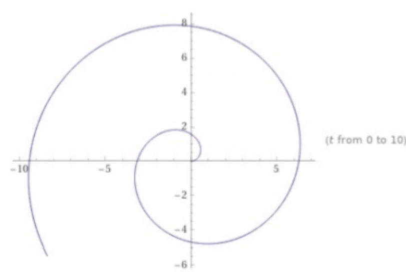
אם $a,v\in\mathbb{R}^m$, הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ המוגדרת על ידי $f(t)=a+vt$ היא הישר שמתחיל ב־a ומתקדם בכיוון v.

דוגמא ב'

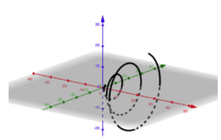
יהיו $a,b\in\mathbb{R}^m$, הפונקציה $f:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ המוגדרת על ידי $f(t)=(1-t)a+tb$ זהו הקטע בין a ל־b.

דוגמא ג'

תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי $f(t)=\begin{pmatrix} t\cos t\\ t\sin t\end{pmatrix}$, שהיא ספירלה ־$\mathbb{R}^2$, המתחילה בראשית הצירים ומסתובבת סביבו:



זו התמונה של f, אך לעומת זאת, הגרף של f, כלומר הקבוצה המוגדרת על ידי $\{(t,t\cos t,t\sin t):t\in[0,\infty)\}\subset\mathbb{R}^3$, תהיה:



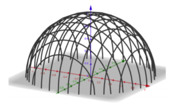
המקרה השני $m=1$ ־ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$.

דוגמא א'

נתבונן ב־$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x)=x^2$. במקרה הזה, הגרף הוא עקום במישור.

דוגמה ב'

יהי כדור היחידה $B_1(0)$ ב־$\mathbb{R}^2$. כעת, תהי $f : B_1(0) \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
למעשה, נשים לב כי $f(x,y)^2 + x^2 + y^2 = 1$, ולכן הגרף של הפונקציה הינו:



למעשה, מדובר על ספירת היחידה ב־$\mathbb{R}^3$.
מעבר לכך, חשוב להבחין כי הגרף של פונקציה $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ הוא משטח ב־$\mathbb{R}^3$.
באופן כללי $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ הוא משטח k־מימדי ב$\mathbb{R}^{k+1}$.

נרצה לקחת פונקצית מ־$f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ ולהכליל אותם. ובאופן כללי, נרצה להכליל גם לתתי קבוצות, כלומר עבור $A_{\subset \mathbb{R}^k}$, כך ש־$f : A \to \mathbb{R}^k$. נדרוש כי A פתוחה (או לכל הפחות $A^o \neq \emptyset$). מעבר לכך, גם נרצה לומר כי A קשירה מסילתית.

שיעור מס' 12:
יום שני
23.11.20

הגדרות

(1) יהי (X,d) מ"מ. מסילה ב־X היא פונקציה רציפה $\gamma : [a,b] \to X$.
(2) נאמר כי $A \subset X$ קשירה מסילתית, אם לכל $x, y \in A$ קיימת מסילה ב־A המוגדרת על ידי $\gamma : [0,1] \to A$: כך ש־$\gamma(a) = x$ וגם $\gamma(b) = y$.

משפט ערך הביניים

תהי $A \subset X$ קשירה מסילתית. ותהי $f : A \to \mathbb{R}$ רציפה, אזי לכל $x, y \in A$ ולכל $L \in [f(x), f(y)]$ קיים $z \in A$ כך ש־$f(x) = L$.

הוכחה

A קשירה מסילתית, ולכן נבחר $\gamma : [a,b] \to A$ כך ש־$\gamma(a) = x$ ו־$\gamma(b) = y$. נביט כעת בפונקציה $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $g = f \circ \gamma$.
מתקיים כי $g(a) = f(x)$ וגם $g(b) = f(y)$, ולכן ממשפט ערך הביניים על הישר הממשי, קיים $c \in [a,b]$ כך ש־$g(c) = L$.
נבחר $z = \gamma(c)$ וסיימנו.

נסמן $a, b, \ldots$ נקודות ב־$\mathbb{R}^k$. כמו כן, נסמן $x, y, \ldots$ בתור וקטורים שמחברים נקודות ב־$\mathbb{R}^k$.

דוגמא

אם $A \subset \mathbb{R}^k$ פתוחה, ו־$a \in A$, אזי לכל $x \in \mathbb{R}^k$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $t \in (-\delta, \delta)$ מתקיים כי $a + \frac{1}{t}x \in A$.

נסמן $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$ ואת הבסיס הסטנדרטי ב־$\mathbb{R}^k$ נסמן:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

תמיד נחשוב על $\mathbb{R}^k$ עם הנורמה האוקלידית, שנסמן אותה - $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^k}$.
כעת, $f:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ היא אוסף של m פונקציות $f_i:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, כך ש־$1 \le i \le m$ ולכן מתקיים:

$$f(a) = \begin{pmatrix} f_1\left(a_1, \dots, a_k\right) \\ \cdots \\ f_m\left(a_1, \dots, a_k\right) \end{pmatrix}, \quad f_i\left(a\right) = \left\langle f\left(a\right), e_i \right\rangle$$

כאשר מדובר על המכפלה הפנימית הרגילה ב־$\mathbb{R}^k$.
ניזכר כי התכנסות ב־$\mathbb{R}^m$ שקולה להתכנסות בכל רכיב. ולכן f רציפה אם"ם f_i רציפות לכל i.

דוגמא
נגדיר $A = \left\{ a \in \mathbb{R}^2 \middle| a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, a_2 > 0 \right\}$ וניקח את הפונקציה $f:A \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי $f\left(a\right) = \begin{pmatrix} a_1^2 \sin a_2 \\ \frac{a_1}{a_2} \\ a_2 \end{pmatrix}$. נשים לב כי f_1, f_2, f_3 רציפות מ־A ל־$\mathbb{R}$ ולכן f רציפה.

מהי נגזרת של $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$? עד כה הגדרנו זאת בתור $f'\left(a\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(a+x)-f(a)}{x}$. אבל ההגדרה הזאת 'בעיתית' מבחינתנו, כי איננו יכולים להכליל זאת לכמה מימדים.
לכן, נרשום את ההגדרה בצורה שונה.

הגדרה
T היא הנגזרת של f ב־a אם:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f\left(x + a\right) - f\left(a\right) - Tx}{x} = 0$$

Tx היא הפונקציה הליניארית שמקרבת הכי טוב את $f\left(a + x\right) - f\left(a\right)$ ב־$x = 0$.
נשים לב כי אנחנו יכולים להחליף את x במכנה בתור $|x|$ ולכן דבר זה יכול להחליף את הנורמה של הוקטור. אם כך, T היא העתקה ליניארית מ־$\mathbb{R}$ ל־ $\mathbb{R}$.

הגדרה
תהי $A \subset \mathbb{R}^k$ ותהי $a \in A^o$. נאמר כי הפונקציה $f:A \to \mathbb{R}^m$ היא דיפרנציאבלית ב־a אם קיים $T \in \hom\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\right)$ כך ש:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f\left(a + x\right) - f\left(a\right) - Tx}{\|x\|_{\mathbb{R}^k}} = 0$$

במצב כזה נאמר כי T הוא הדיפרנציאל של f ב־a. נסמנו בתור $T=\left(Df\right)_{a}$.

טענה

תהי $f:A\to\mathbb{R}^{m}$ דיפרנציאבלית ב־a. אזי הדיפרנציאל של f ב־a יחיד. ($\left(Df\right)_{a}$ מוגדר היטב)

הוכחה

נניח שקיימות $T,S\in\hom\left(\mathbb{R}^{m},\mathbb{R}^{k}\right)$ אזי מתקיים כי:

$$\lim_{x\to0}\frac{f\left(a+x\right)-f\left(a\right)-Sx}{\left\Vert x\right\Vert _{\mathbb{R}^{k}}}=0$$
$$\lim_{x\to0}\frac{f\left(a+x\right)-f\left(a\right)-Tx}{\left\Vert x\right\Vert _{\mathbb{R}^{k}}}=0$$

נחסר את שתי הפונקציות ונקבל:

$$\lim_{x\to0}\frac{Tx-Sx}{\left\Vert x\right\Vert _{\mathbb{R}^{k}}}=\lim_{x\to0}\left(T-S\right)\left(\frac{x}{\left\Vert x\right\Vert _{\mathbb{R}^{k}}}\right)$$

כעת נבחר $v\in\mathbb{R}^{k}$ ו־$\left|v\right|=1$, כאשר $x=tv$.
ואז נקבל כי:

$$0=\lim_{x\to0}\left(T-S\right)\left(\frac{tv}{t\left\Vert v\right\Vert }\right)=\left(T-S\right)\left(v\right)$$

ובפרט דבר זה נכון לכל וקטור יחידה, כלומר $\left(T-S\right)=0$ כנדרש.

דוגמא

תהי $f:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}$ כך ש־$f\left(\begin{array}{c} x\\ y \end{array}\right)=x^{2}+y$. ניתן לקבע את y, ולהביט על f כפונקציה של משתנה אחד ־ x.
דהיינו, נוכל להגדיר $g\left(x\right)=f\left(\begin{array}{c} x\\ y \end{array}\right)$.
כעת, ניתן לדבר על הנגזרת של g ולקבל כי $g'\left(x\right)=2x$.
באותה מידה, ניתן לקבל את y ולהגדיר $h\left(y\right)=f\left(\begin{array}{c} x\\ y \end{array}\right)$ ואז נקבל כי $h'\left(y\right)=1$.
ל'נגזרות' אלו, נקרא הנגזרות החלקיות לפי x ו־y בהתאמה.

הגדרה

תהי $f:A\to\mathbb{R}^{m}$ כך ש־$A\subset\mathbb{R}^{k}$. ותהי $a\in A^{o}$.
הנגזרת החלקית של f לפי j בנקודה a היא:

$$\frac{\partial f}{\partial x_{j}}\left(a\right)=\partial_{j}f\left(a\right)=\lim_{t\to0}\frac{f\left(a+te_{j}\right)-f\left(a\right)}{t}$$

באותה צורה, אם נגדיר את f לפי רכיבים, דהיינו $f=\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots\\ f_m \end{pmatrix}$ אזי נגדיר כי:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)=\partial_j f_i(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f_i(a+te_j)-f_i(a)}{t}$$

נשים לב כי הביטוי שווה ל־$g'(0)$ כאשר $g(t)=f(a+te_j)$.
למעשה גם נקבל כי:

$$\partial_j f(a)=\begin{pmatrix} \partial_j f_1(a)\\ \vdots\\ \partial_j f_1(a) \end{pmatrix}$$

טענה

נניח כי f דיפרנציאבלית ב־a עם דיפרנציאל $\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ $(Df)_a$ אזי לכל $x\in\mathbb{R}^k$ מתקיים כי:

$$(Df)_a x=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tx)-f(a)}{t}$$

דהיינו, ניתן לחשב על כך בתור השינוי של f כשזזים בכיוון x והנקודה a.
לגבול נקרא בתור **הנגזרת הכיוונית** של f בכיוון x.
כלומר, אם f דיפרנציאבלית, אזי הנגזרת הכיוונית קיימת בכל כיוון.

מסקנה

אם f דיפרנציאבלית ב־a, אזי קיימות לה כל הנגזרות החלקיות ב־a ומתקיים כי:

$$D_j f(a)=(Df)_a(e_j)$$

הוכחה

נקבע $x\in\mathbb{R}^k$. נשים לב כי $tx\to 0$ כאשר $x\to 0$.
מהגדרת הדיפרנציאל, מתקיים:

$$\begin{aligned}
0=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tx)-f(a)-(Df)_a(tx)}{\|tx\|_{\mathbb{R}^k}} &\overset{(*)}{=}\\
\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tx)-f(a)-t(Df)_a(x)}{|t|\,\|x\|_{\mathbb{R}^k}} &\overset{(**)}{=}\\
\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tx)-f(a)-t(Df)_a(x)}{|t|}=0 &\overset{(***)}{\Rightarrow}\\
\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tx)-f(a)-t(Df)_a(x)}{t}=0 &\Rightarrow\\
\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tx)-f(a)}{t}-(Df)_a(x)=0 &\Rightarrow\\
(Df)_a(x)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tx)-f(a)}{t}
\end{aligned}$$

$(*)$ ליניאריות והומוגניות של העתקה הליניארית.

$(**)$ אם $t \to 0$ אין חשיבות לנורמה.

$(***)$ ניתן להוציא מהערך המוחלט שהרי אם מדובר בכפילה ב־$\frac{|t|}{t}$, אבל זהו ביטוי חסום כפול ביטוי השואף ל־0, ולכן הביטוי כולו שואף לאפס.

ראינו כי f דיפרנציאבלית גורר כי ל־f יש נגזרות כיוונית ב־a, בכל כיוון x ב־a, אבל הכיוון ההפוך לא נכון.

ננסה להבין כעת כיצד נראה הדיפרנציאל. אם $T \in \hom\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\right)$, אזי ניתן לייצגה באמצעות מטריצה $m \times k$. נוכל להבחין כי איברי הבסיס ניתנת לייצוג על ידי המכפלה הפנימית $\langle Te_j, e_i \rangle$.

טענה

אם f דיפרנציאבלית ב־a, אזי הייצוג המטריציוני של $(Df)_a$ הוא:

$$(Df)_a = (\partial_1 f(a) \quad | \dots \quad | \quad \partial_k f(a)) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \dots & \partial_k f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \dots & \partial_k f_m(a) \end{pmatrix}$$

במילים אחרות, אם $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$, אזי:

$$(Df)_a x = (\partial_1 f(a) | \dots | \partial_k f(a)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{k} x_j \partial_j f(a)$$

הוכחה

מההגדרה עולה כי:

$$(Df)_a (e_j) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}$$

נשים לב כי שני הצדדים הם וקטורים ב־$\mathbb{R}^m$, ולכן לפי ה'טענה' הקודמת, נקבל כי:

$$(Df)_a e_i = \partial_i f(a) \Rightarrow$$

$$\langle e_i, (Df)_a (e_j) \rangle = \langle \partial_i f(a), e_i \rangle = \partial_i f_j(a)$$

באופן כללי, נובע מכך כי $(Df)_a x = \sum_{j=1}^{k} x_j \partial_j f(a)$.

דוגמא

תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי $f(a)=\begin{pmatrix} a_1^2+a_2 \\ a_1+a_2^2 \end{pmatrix}$.
נקבל כי:

$$\partial_1 f(a)=\begin{pmatrix} 2a_1 \\ 1 \end{pmatrix},\partial_2 f(a)=\begin{pmatrix} 1 \\ 2a_2 \end{pmatrix}$$

ולכן, אם f דיפרנציאבלית ב־a, אזי:

$$(Df)_a=\begin{pmatrix} 2a_1 & 1 \\ 1 & 2a_2 \end{pmatrix}$$

נראה כי f דיפרנציאבלית ב־a, על מנת לאושש את הטענה. עלינו להוכיח כי:

$$0=\lim_{x\to0}\frac{f(a+x)-f(a)-\begin{pmatrix} 2a_1 & 1 \\ 1 & 2a_2 \end{pmatrix}(tx)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}=$$
$$\lim_{x\to0}\frac{f(a+x)-f(a)-\begin{pmatrix} 2a_1 & 1 \\ 1 & 2a_2 \end{pmatrix}(tx)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$$

לסיכום, נקבל:

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\left(\begin{pmatrix} (a_1+x_1)^2+(a_2+x_2) \\ (a_1+x_1)+(a_2+x_2)^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_1^2+a_2 \\ a_1+a_2^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2a_1 & 1 \\ 1 & 2a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)=$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\overset{(*)}{=}0$$

$(*)$ נשים לב כי $0\le\lim_{x\to0}\frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\le\lim_{x\to0}\frac{x_1^2+x_2^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}=\lim_{x\to0}\sqrt{x_1^2+x_2^2}=0$ (ואותו הדבר עם המשתנה השני).

מהדוגמא עולה כי לכל a יש לנו דיפרנציאל כך ש־$(Df)_a\in\hom\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2\right)$ ולכן בעצם הגדרנו פונקציה $Df:$ $\mathbb{R}^2\to\hom\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2\right)$, ולכן נוכל להגדיר את ההגדרה הבאה.

הגדרה

אם $f:A\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבלית בכל $a\in A$, אזי פונקציית הנגזרת שלה היא $Df:A\to\hom\left(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^m\right)$.

שיעור מס' 13:
יום ראשון
29.11.20

ראינו קודם לכן, כי אם f דיפרנציאבילית בנקודה A, אזי קיימות ל־f כל הנגזרות החלקיות. נראה כעת כי ההפך איננו נכון.

דוגמא

תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$f(a)=\begin{cases}\frac{a_1^3}{a_1^2+a_2^2} & a\neq 0\\ 0 & a=0\end{cases}$$

ראשית, נראה ש־f רציפה. ברור ש־f רציפה בכל נקודה חוץ מ־0. לכל נוכיח רציפות ב־0:

$$0\leq\left|\frac{a_1^3}{a_1^2+a_2^2}\right|\leq\frac{|a_1|\left(a_1^2-a_2^2\right)}{a_1^2+a_2^2}=|a_1|\to 0$$

אם כך, כאשר $(a_1,a_2)\to(0,0)$ אזי מתקיים כי $f(a_1,a_2)\to 0$, כפי שרצינו.

נראה גם כי הנגזרות החלקיות קיימות ב־0:

$$\begin{array}{l}\partial_1 f(0)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(0+te_1)-f(0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{t^3}{t^2}-0}{t}=1\\ \partial_2 f(0)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(0+te_2)-f(0)}{t}=\frac{0-0}{t}=0\end{array}$$

ולכן אם f דיפרנציאבלית ב־0, אזי $Df(0)=\left[\begin{array}{cc}1&0\end{array}\right]$ אבל נראה שדבר זה אינו נכון. כלומר ש־f אינה דיפרנציאבלית ב־0:

$$\frac{f(0+x)-f(0)-\left[\begin{array}{cc}1&0\end{array}\right]x}{\|x\|}=\frac{\frac{x_1^3}{x_1^2+x_2^2}-x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-x_1x_2^2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

אבל הביטוי הזה לא שואף ל־0 כאשר $x\to 0$. אם ניקח $x_1=x_2=t\to 0$ נקבל:

$$\frac{-t^3}{\left(2t^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-t^3}{2^{\frac{3}{2}}\left|t^3\right|}\not\to 0$$

ניתן לראות זאת גם על דרך השלילה, אם f הייתה דיפרנציאבלית ב־0. אזי הייתה נגזרת כיוונית ב־0 בכיוון $\left(\begin{array}{c}1\\1\end{array}\right)$ והיא הייתה $(Df)\left(\begin{array}{c}1\\0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}1&0\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}1\\1\end{array}\right)=1$ אבל הנגזרת הכיוונית ב־0 בכיוון $\left(\begin{array}{c}1\\1\end{array}\right)$ היא:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\left(\begin{array}{c}0\\0\end{array}\right)+t\left(\begin{array}{c}1\\1\end{array}\right)\right)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2}{t^2+t^2}-0}{t}=\frac{1}{2}\neq 1$$

אם כך, f איננה דיפרנציאבלית, כנדרש.

לכן נרצה תנאי חזק יותר.

משפט

תהי $A \subset \mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה ותהי $f : A \to \mathbb{R}^m$. אם $m \times k$ הנגזרת החלקיות של f קיימות בסביבת a והן **רציפות** ב־a אזי f **דיפרנציאבלית** ב־a.

למה

אם $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ אזי f דיפרנציאבלית ב־a אם ורק אם f_i דיפרנציאבלית ב־a לכל $1 \leq i \leq m$.

הוכחת הלמה

אם f דיפרנציאבלית ב־a, אזי קיימת $T \in \hom\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\right)$, כך ש־:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(a+x) - f(a) - T(x)}{\|x\|_{\mathbb{R}^k}} = 0$$

אך מדובר בגבול ב־$\mathbb{R}^m$, ולכן בהכרח דבר זה נכון רק אם כל רכיב מתכנס ל־f. אבל הרכיבים כאן הם ה־f_i. כלומר:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f_i(a+x) - f_i(a) - (T(x))_i}{\|x\|_{\mathrm{R}^k}} = 0$$

נגדיר $S_i \in \hom\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}\right)$ המוגדרת על ידי:

$$S_i\left(x\right) := \left(T\left(x\right)\right)_i$$

אם כך, נקבל למעשה כי f_i דיפרנציאבלית ב־a ו־$\left(Df_i\right)_a = S_i$.

מאידך, אם $\left(Df\right)_i = S_i$ (כלומר כל f_i דיפרנציאבליות), נגדיר:

$$Tx = \begin{pmatrix} S_1 x \\ \vdots \\ S_m x \end{pmatrix} =$$

ונקבל כי $T \in \hom\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\right)$, כך ש:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(a+x) - f(a) - T(x)}{\|x\|_{\mathbb{R}^k}} = 0$$

כנדרש.

הוכחת המשפט

מהלמה, מספיק לנו להתיחס למקרה בו $m = 1$. עלינו להראות כי קיים $T \in \hom\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}\right)$ כך ש־:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(a+x) - f(a) - T(x)}{\|x\|_{\mathbb{R}^k}} = 0$$

למעשה, אנחנו צריכים להראות דבר זה נכון עבור $T = (\partial_1 f((a)), \ldots, \partial_k f(a))$, ולמעשה אנחנו צריכים להוכיח כי:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\|x\|_{\mathbb{R}^k}} \left(f(a+x) - f(a) - \sum_{j=1}^{k} \partial_j f(a) x_j \right) = 0$$

נרשום את הביטוי - $f(a+x) - f(a)$ בתור טור טלסקופי:

$$\begin{aligned} f(a+x) - f(a) &= f(a + x_1 e_1) - f(a) \\ &+ f(a + x_1 e_1 + x_2 e_2) - f(a + x_1 e_1) \\ &+ \ldots \\ &+ f(a+x) - f(a + x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_{k-1} e_{k-1}) = \\ &\sum_{j=1}^{k} \left(f\left(a + \sum_{i=1}^{j} x_i e_i \right) \right) - f\left(a + \sum_{i=1}^{j-1} x_i e_i \right) \end{aligned}$$

כעת נגדיר:

$$g_j(t) = f\left(a + \sum_{i=1}^{j-1} x_i e_i + t e_j \right) \qquad t \in [0, x_j] \Rightarrow$$

$$f(a+x) - f(a) = \sum_{j=1}^{k} \left(g_j(x_j) - g_j(0) \right)$$

כמו כן, נשים לב כי:

$$g_j'(t) = \partial_j f\left(a + \sum_{i=1}^{j-1} x_i e_i + t e_j \right)$$

אך אנחנו יודעים כי הנגזרות החלקיות קיימות בסביבת a, אם כל ה־x_j קטנים מספיק, אזי מתקיים כי g_j גזירה, ולכן ממשפט ערך הממוצע נקבל כי קיים $\theta_j \in (0,1)$ כך ש:

$$g_j(x_j) - g_j(0) = g_j'(\theta_j x_j) x_j$$

ובסך הכל, נקבל:

$$f(a+x) - f(a) = \sum_{j=1}^{k} g_j(x_j) - g_j(0) = \sum_{j=1}^{k} \partial_j f\left(a + \sum_{i=1}^{j-1} x_i e_i + \theta_j x_j e_j \right) x_j$$

ולכן, נקבל בסך הכל:

$$\frac{1}{\|x\|_{\mathbb{R}^k}}\left(f(a+x)-f(a)-\sum_{j=1}^{k}\partial_j f(a)x_j\right)=$$
$$\sum_{j=1}^{k}\left(\left[\underbrace{\partial_j f\left(a+\sum_{i=1}^{j-1}x_ie_i+\theta_jx_je_j\right)-\partial_j f(a)}_{(**)}\right]\underbrace{\frac{x_j}{\||x\|_{\mathbb{R}^k}}}_{(*)}\right)=$$

כאשר $x\to 0$:
$(*)$ חסום
$(**)$ שואף ל־0 כי $\partial_j f$ רציפה ב־a.
ולכן נקבל בסך הכל כי כל הביטוי כולו שואף ל־0, כנדרש.

ראינו כי אם $A\subset\mathbb{R}^k$ פתוחה ו־$f:A\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבלית. אזי פונקצית הנגזרת הינה $Df:A\to\hom\left(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^m\right)$.
נשים לב כי $\hom\left(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^m\right)$ הוא מרחב נורמי, עם הנורמה האופרטורית, המסומנת על ידי:

$$\|T\|_{\text{op}_{k,m}}=\sup_{|x\|_{\mathbb{R}}^k=1}\|Tx\|_{\mathbb{R}^m}\overset{(*)}{=}\sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x\|_{\mathbb{R}^k}}$$

כאשר $(*)$ נובע מהומוגניות.
כלומר, אנחנו מקבלים, לכל $x\in\mathbb{R}^k$:

$$\|Tx\|_{\mathbb{R}^m}\leq\|T\|_{\text{op}_{k,m}}\|x\|_{\mathbb{R}^k}$$

טענה

$T\underset{n\to\infty}{\rightarrow}T_n$ בנורמת $T\|_{\text{op}_{k,m}}$ אם ורק אם כל רכיבי המטריצות המייצגות את T_n מתכנסים לרכיבי המטריצה המייצגת את T.

הגדרה

תהא $f:A\to\mathbb{R}^k$ גזירה. נאמר כי f גזירה־ברציפות ב־a אם $Df:A\to\hom\left(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^m\right)$ רציף ב־a (ביחס לנורמת op)

נשים לב כי אם f גזירה ברציפות ב־a, אזי גם כל רכיבי המטריצה Df רציפים ב־a. כלומר בפרט כל הנגזרות החלקיות $\partial_i f_j$ רציפות ב־a.

מסקנה

תהי $A\subset\mathbb{R}^k$ פתוחה ותהי $f:A\to\mathbb{R}^m$. אזי f גזירה ברציפות אם ורק אם $m\times x$ הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות ב־a.

דוגמא

בדוגמא שראינו ראינו כי $f\left(a\right)=\left(\begin{array}{c} a_1^2+a_2 \\ a_2^1+a_1 \end{array}\right)'$, כל הנגזרות החלקיות רציפות ולכל Df קימת בכל נקודה.

הוכחה

ראינו כי f גזירה גורר כי קיימות הנגזרות החלקיות. ראינו גם כי Df רציפה ב־a גורר כי הנגזרות החלקיות רציפות ב־a.

בכיוון ההפוך, אם נגזרות חלקיות קיימות ורציפות, אזי ראינו מהמשפט כי $\left(Df\right)_a$ קיים בכל $a\in A$. נשים לב כי הרכיבים של Df הם הנגזרות החלקיות, והן רציפות, ולכן Df רציף.

כעת נתמודד בדוגמה ספציפית, ונניח כי $A\subset\mathbb{R}^k$ פתוח ־ ואילו $m=1$. כלומר מדובר ב־$f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$, ונניח כי f דיפרנציאבלית.

הגדרה

הגרדיאנט של f ב־$a\in A$ הוא הוקטור ב־$\mathbb{R}^k$ שנסמנו ב־$\nabla f\left(A\right)$ שמקיים:

$$\left\langle \nabla f\left(a\right),x\right\rangle =\left(Df\right)_a x$$

לכל $x\in\mathbb{R}^k$. במילים אחרות:

$$\nabla f\left(a\right)=\left(Df\right)_a^T=\left(\begin{array}{c} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_k f(a) \end{array}\right)$$

נרצה לשאול כעת, באיזה כיוון (וקטור יחידה $x^k\in\mathbb{R}^k$) קצב השינוי של f מקסימלי?
אנו מחפשים $\widehat{x}$ כך ש־$\left(Df\right)_a\left(\widehat{x}\right)$ מקסימלי. אבל אז מתקיים כי:

$$\left\langle \nabla f\left(a\right),\widehat{x}\right\rangle =\left(Df\right)_a\widehat{x}$$

באופן כללי, אנחנו יודעים מליניארית כי אם $v\neq0$ נמצא ב־$\mathbb{R}^K$ אז $\left\langle v,\widehat{x}\right\rangle$ מקסימלי כאשר $\widehat{x}$ בכיוון v. כלומר $\widehat{x}=\frac{v}{\|v\|_{\mathbb{R}^k}}$.

אם $\nabla f\left(a\right)\neq0$ הכיוון בו קצב השינוי של f הוא הכי גבוה, הוא $\widehat{x}=\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$. קצב השינוי הזה (הנגזרת הכיוונית) הוא:

$$\left\langle \nabla f\left(a\right),\widehat{x}\right\rangle =\left\langle \nabla f(a),\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|_{\mathrm{R}^k}}\right\rangle =\|\nabla f(a)\|_{\mathrm{R}^k}$$

במילים אחרות, הגרדיאנט נותן לנו גם את קצב השינוי וגם את הגודל.

דוגמא

תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f\left(a\right)=a_1^2+a_2^2$.

אזי הגרדיאנט הוא:

$$\nabla f\left(a\right)=\left(\begin{array}{c}2a_{1}\\2a_{2}\end{array}\right)$$

אם נתבונן בקווי גובה, נוכל להבחין כי הקווים הולכים ונהיים צפופים יותר. דהיינו, השיפוע הולך ונהיה גבוה יותר. אנחנו רואים גם תופעה מעניינת יותר ־ הגרדיאנט תמיד ניצב לקו הגובה. דבר זה מתבטא בכך שאם נתקדם בציר האיקס, גודל הגרדיאנט גדול יותר.
ניתן לנסח טענה זו גם בצורה הבאה.
אם נסמן בתור $M_{f(a)}^{\perp}=\left\{x\in\mathbb{R}^{k}\mid\left(Df\right)_{a}\left(x\right)=0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}^{k}\mid x\perp\nabla f\left(a\right)\right\}$
כלומר, הגרדיאנט תמיד מאונך ל־$M_{f(a)}^{\perp}$.

עלינו לציין כי אם $f:A\to\mathbb{R}$ הגרדיאנט הוא:

$$\nabla f:A\to\mathbb{R}^{k}$$

כנדרש.

שיעור מס' 14:
יום שני
30.11.20

ראינו כי הדיפרנציאל קיים אם הגבול הנ"ל קיים. בנוסף, ראינו שהדיפרנציאל הוא ליניארי, כלומר:

$$(D(\alpha f+\beta g))_{a}=\alpha(Df)_{a}+\beta(Dg)_{a}$$

כעת, נוכיח את כלל השרשרת.

טענה (כלל השרשרת לפונקציות בכמה משתנים)
תהי $A\subset\mathbb{R}^{k}$ ו־$B\subset\mathbb{R}^{m}$ קבוצות פתוחות. ותהיינה $f:A\to B$ ו־$g:B\to\mathbb{R}^{m}$. נניח כי f דיפרנציאבלית ב־$a\in A$ ו־g דיפרנציאבלית ב־$f\left(a\right)\in B$. אזי ההרכבה $g\circ f:A\to\mathbb{R}^{n}$ דיפרנציאבלית ב־a והדיפרנציאל נתון לפי כלל השרשרת:

$$\underbrace{(D(g\circ f))_{a}}_{\mathbb{R}^{k}\to\mathbb{R}^{n}}=\underbrace{(Dg)_{f(a)}}_{\mathbb{R}^{m}\to\mathbb{R}^{n}}\circ\underbrace{(Df)_{a}}_{\mathbb{R}^{k}\to\mathbb{R}^{m}}$$

הוכחה
עבור $x\in\mathbb{R}^{n}$ ו־$y\in\mathbb{R}^{m}$ מספיק קטנים (שהנורמה שלהם מספיק קטנה), נגדיר את $r:\mathbb{R}^{k}\to\mathbb{R}^{m}$ ואת $s:\mathbb{R}^{m}\to\mathbb{R}^{n}$ על ידי:

$$r(x) = f(a+x) - f(a) - (Df)_a(x)$$
$$s(y) = g(f(a)+y) - g(f(a)) - (Dg)_{f(a)}(y)$$

f דיפרנציאבלית ב־a ו־g דיפרנציאבלית ב־$f\left(a\right)$ ולכן נקבל מההגדרה:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\|r(x)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x\|_{\mathrm{R}^k}} = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{y\to 0}\frac{\|s(y)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|y\|_{\mathrm{R}^m}} = 0$$

כעת נתבונן ב־$g\left(f\left(x\right)+a\right)-g\left(f\left(a\right)\right)$. נוכל לכתוב זאת באמצעות s:

$$\begin{aligned}
&g\left(f\left(x\right)+a\right)-g\left(f\left(a\right)\right) = \\
&s\left(f\left(a+x\right)-f\left(a\right)\right)+\left(Dg\right)_{f(a)}\left(f\left(a+x\right)-f\left(a\right)\right) = \\
&s\left(r\left(x\right)+\left(Df\right)_a x\right)+\left(Dg\right)_{f(a)}\left(r\left(x\right)\right)+\left(Dg\right)_{f(a)}\left(\left(Df\right)_a\left(x\right)\right)
\end{aligned}$$

נסדר את הביטויים ונרצה שהביטוי הזה ישאף לאפס:

$$\begin{aligned}
&\frac{g\left(f\left(x\right)+a\right)-g\left(f\left(a\right)\right)-\left(Dg\right)_{f(a)}\circ\left(Df\right)_a x}{||x||_{\mathbb{R}^k}} = \\
&\frac{s\left(r\left(X\right)+\left(Df\right)_a x\right)}{||x||_{\mathbb{R}^k}}+\frac{\left(Dg\right)_{f(a)}\left(r\left(x\right)\right)}{||x||_{\mathbb{R}^k}}
\end{aligned}$$

נשים לב כי הביטוי הימני שואף לאפס:

$$\frac{\left\|\left(Dg\right)_{f(a)}\left(r\left(x\right)\right)\right\|_{\mathbb{R}^n}}{||x||_{\mathbb{R}^k}} \leq \underbrace{\left\|\left(Dg\right)_{f(a)}\right\|_{\text{op}}}_{(*)}\underbrace{\frac{\|r(x)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x\|_{\mathrm{R}^k}}}_{(**)}$$

$(*)$ בלתי תלוי ב־x ולכן חסום.
$(**)$ ראינו ששואף ל־0.

נשים לב כי גם הביטוי השמאלי שואף לאפס. נסמן:

$$\frac{\left\|s\left(r\left(X\right)+\left(Df\right)_a x\right)\right\|}{||x||_{\mathbb{R}^k}} = \psi\left(x\right) \qquad \forall x\neq 0$$

ולכן מתקיים:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\|s((Df)_a(x)+r(x))\|_{\mathbb{R}^n}}{\|(Df)_a(x)+r(x)\|_{\mathbb{R}^m}}\frac{\|(Df)_a(x)+r(x)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x\|_{\mathbb{R}^k}} & (Df)_a(x)+r(x)\neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר בסך הכל חילקנו והכפלנו.

נשים לב שבעקבות אי שוויון המשולש מתקיים, בצד ימין:

$$\frac{\|(Df)_a(x)+r(x)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x\|_{\mathbb{R}^k}} \leq \underbrace{\frac{\|r(x)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x\|_{\mathbb{R}^k}}}_{(*)} + \underbrace{\frac{\|(Df)_a(x)+r(x)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x\|_{\mathbb{R}^k}}}_{(**)}$$

$(*)$ שואף ל־0 ו־$(**)$ חסום על ידי הנורמה האופרטורית, ולכן בפרט מתכנס ל־0.
נתבונן בביטוי השמאל ונסמן:

$$y\left(x\right)=r\left(x\right)+\left(Df\right)_a\left(x\right)\Rightarrow\frac{\|s\left(y\right)\|}{\|y\|}\to 0\Rightarrow\frac{\|s\left((Df)_a(x)+r(x)\right)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|(Df)_a(x)+r(x)\|_{\mathbb{R}^m}}\to 0$$

לכן, בסך הכל:

$$\lim_{x\to 0}\psi(x)=0$$

אם כך $g\circ f$ היא דיפרנציאבלית וזהו הדיפרנצאל, כנדרש.

דוגמא
תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי:

$$f(a)=\begin{pmatrix}\cos a_1\cos a_2\\ \cos a_1\sin a_2\\ \sin a_1\end{pmatrix}$$

וניקח $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$g(b)=b_1^2+2b_2^2+3b_3^2$$

לכן ההרכבה הינה:

$$(g\circ f)(a)=\cos^2 a_1\cos^2 a_2+2\cos a_1^2\sin a_2^2+3\sin^2 a_1$$

ולכן הנגזרת של f ב־a הינה:

$$(Df)_a=\begin{pmatrix}-\sin a_1\cos a_2 & -\cos a_1\sin a_2\\ -\sin a_1\sin a_2 & \cos a_1\cos a_2\\ \cos a_1 & 0\end{pmatrix}$$

אם נתבונן בנגזרת של g ב־b נקבל:

$$(Dg)_b = (2b_1, 4b_2, 6b_3)$$

ובסך הכל:

$$(Dg)_{f(a)} \circ (Df)_a = (2\cos a_1 \cos a_2, 4\cos a_1 \sin a_2, 6\sin a_1) \begin{pmatrix} -\sin a_1 \cos a_2 & -\cos a_1 \sin a_2 \\ -\sin a_1 \sin a_2 & \cos a_1 \cos a_2 \\ \cos a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

נוכל גם לגזור את $g \circ f$ בצורה שונה, ולקבל עוד פעם:

$$(D(g\circ f))_a = \left(\sin 2a_1 \left(-\cos^2 a_2 - 2\sin a_2^2 + 3\right), -\cos^2 a_1 \sin 2a_2 + 2\cos a_1^2 \sin 2a_2\right)$$

טענה

אם U, V, W מרחבים נורמיים, ו־$T \in \hom(U,V)$ ו־$S \in \hom(V,W)$. אם ניקח $S \circ T \in \hom(U, wW)$, אזי:

$$\|S\circ T\|_{\mathrm{op}(U,W)} \le \|S\|_{\mathrm{op}(V,W)} \|T\|_{\mathrm{op}(U,V)}$$

הוכחה

$$\begin{aligned} \|S\circ T\|_{\mathrm{op}(U,W)} &\overset{\text{הגדרה}}{=} \sup_{|x\|_U=1} \|S\circ T(x)\|_W \\ &\overset{(*)}{\le} \sup_{|x|_U=1} \|S\|_{\mathrm{op}(V,W)} \|T(x)\|_V \\ &= \|S\|_{\mathrm{op}(V,W)} \left(\sup_{|x|U=1} \|T(x)\|_V\right) \\ &= \|S\|_{\mathrm{op}(V,W)} \|T\|_{\mathrm{op}(U,V)} \end{aligned}$$

כאשר $(*)$ נובע מהעובדה כי $\|S(y)\|_W \le \|S\|_{\mathrm{op}(V,W)} \|y\|_V$.

מסקנה

אם f ו־g מקיימות את תנאי משפט כלל השרשרת, נקבל כי:

$$\|(D(g\circ f))_a\|_{(k,\,n)\mathrm{op}} \le \left\|(Dg)_{f(a)}\right\|_{(m,\,n)\mathrm{op}} \|(Df)_a\|_{\mathrm{op}(k,m)}.$$

משפט הערך הממוצע.

באינפי 1 השתמשנו במשפט הערך הממוצע.

אמרנו כי בהינתן $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה וגזירה ב־(a,b) אזי:

$$f\left(b\right)-f\left(a\right)=f'\left(a+\theta\left(b-a\right)\right)\left(b-a\right)$$

כאשר $\theta\in(0,1)$.
בנוסף, דבר זה גורר כי אם $|f'|\leq M$ בכל מקום, אזי:

$$\left|f\left(b\right)-f\left(a\right)\right|\leq M\left|b-a\right|$$

כעת, נרצה להכליל טענות מסוג אלו לפונקציות בכמה משתנים.

אם יש לנו מסילה $\gamma:(0,1)\to\mathbb{R}^{m}$ פונקציה גזירה, אנחנו יכולים לרשום אותה בתור - $\gamma(t)=\left(\gamma_{1}(t),\dots,\gamma_{m}(t)\right)^{T}$,
ואם נרצה למצוא את הנגזרת שלה, ראינו בתרגול כי:

$$(D\gamma)_{t}=\left(\begin{array}{c}\gamma_{1}'(t)\\ \vdots\\ \gamma_{m}'(t)\end{array}\right)$$

כעת, נוכל להתבונן בנורמה האופרטורית של מסילה זו, ונקבל (הוכחה בתרגול) כי:

$$\left\Vert (D\gamma)_{t}\right\Vert _{\text{op}_{1,m}}=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left(\gamma_{j}'(t)\right)^{2}}=\left\Vert \gamma'(t)\right\Vert _{\mathbb{R}^{m}}$$

כשיש לנו את המרכיבים האלו, נוכל להתחיל במשפטים.

משפט
תהי $A\subset\mathbb{R}^{k}$ פתוחה. ויהיו $a,b\in A$. נניח כי כל הקטע הבא מוכל ב- A:

$$[a,b]:=\{a+t(b-a):t\in[0,1]\}\subset A$$

תהי $f:A\to\mathbb{R}$ גזירה. אזי קיים $\theta\in(0,1)$ כך ש:

$$f(b)-f(a)=(Df)_{a+\theta(b-a)}(b-a)$$

הוכחה
נשתמש בהוכחה במשפט הערך הממוצע המוכר ובכלל השרשרת.
נגדיר את $\gamma:[0,1]\to A$ על ידי:

$$\gamma(t)=a+t(b-a)$$

ונגדיר את $g : I \to \mathbb{R}$ על ידי:

$$g\left(t\right) = f\left(\gamma\left(t\right)\right)$$

מכלל השרשרת, g גזירה ומתקיים כי:

$$g'(t) = (Df)_{\gamma(t)} \circ (D\gamma)_t = (Df)_{\gamma(t)}(b-a)$$

אבל נשים לב כי $\gamma' = b-a$, ולכן ממשפט הערך הממוצע ב־$\mathbb{R}$ אנו יודעים כי קיים $\theta \in (0,1)$ כך ש־ $g\left(1\right) - g\left(0\right) = g'\left(\theta\right)$.
אבל $g\left(1\right) - g\left(0\right) = f(b) - f(a)$ ומאידך $g'\left(\theta\right) = (Df)_{a+\theta(b-a)}(b-a)$, ולכן דבר זה מוכיח את המשפט.

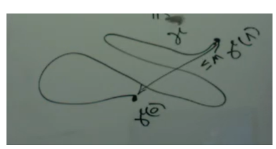
הערה
אם $f : A \to \mathbb{R}^m$ ו־$m > 1$ הטענה איננה נכונה.

מה אנחנו כן יכולים לומר כי $m > 1$?
למה
תהיי $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ גזירה. ונניח כי:

$$\sup_{0 \le t \le 1} \|(D\gamma)_t\|_{\mathrm{op}_{1,m}} = M$$

אזי:

$$\|\gamma(1) - \gamma(0)\|_{\mathbb{R}^m} \le M$$



הוכחה
נגדיר את $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ על ידי:

$$f(t) = \|\gamma(t) - \gamma(0)\|_{\mathbb{R}^m} = \left(\sum_{j=1}^{m} \left(\gamma_j(t) - \gamma_j(0)\right)^2\right)^{1/2}$$

ניתן לראות כי f רציפה וגזירה לכל t בו $f\left(t\right) \neq 0$.
נביט כעת ב־$f^2\left(t\right)$:

$$\begin{aligned}
&\left(f^2\left(t\right)\right)' = 2\sum_{i=1}^{m}\gamma'\left(t\right)\left(\gamma_j(t)-\gamma_j(0)\right) = \\
&2\left(\gamma_1(t)\ldots\gamma_m(t)-\gamma_m(0)\right)\begin{pmatrix}\gamma_1(t)-\gamma_1(0)\\ \vdots \\ \gamma_m'(t)-\gamma_m(0)\end{pmatrix} = \\
&2\left(D\gamma\right)_t\left(\gamma\left(t\right)-\gamma\left(0\right)\right) \leq \\
&2\left\|D\gamma\right\|_{\text{op}}\underbrace{\left\|\gamma\left(t\right)-\gamma\left(0\right)\right\|_{\mathbb{R}^m}}_{f'(t)} \leq \\
&2M\cdot f'\left(t\right)
\end{aligned}$$

קיבלנו בסך הכל כי כאשר $f>0$ רציפה וגזירה כאשר $f\neq 0$, כאשר $f\neq 0$ אזי נקבל כי:

$$\left(f^2\left(t\right)\right)' \leq 2M\cdot f'\left(t\right) \Rightarrow f'\left(t\right) \leq M$$

מכאן נקבל (תרגיל אינפי 1), כי $f\left(1\right)-f\left(0\right)\leq M$, אבל הביטוי בצד ימין משמעותה הינה בדיוק $\|\gamma(1)-\gamma(0)\|_{\mathbb{R}^m}$, כפי שרצינו להוכיח.

משפט

תהי $A\subset\mathbb{R}^k$ פתוחה. ותהי $f:A\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית. תהיינה $a,b\in A$ כך ש:

$$I=\{tb+(1-t)a : 0\leq t\leq 1\}\subset A$$

נניח בנוסף כי:

$$\sup_{c\in I}\left\|(Df)_t\right\|_{\text{op}_{k,m}} = M$$

אזי מתקיים כי:

$$\left\|f\left(b\right)-f\left(a\right)\right\|_{\mathbb{R}^m} \leq M\left\|b-a\right\|_{\mathbb{R}^k}$$

הוכחה

נגדיר מסילה $\gamma:[0,1]\to A$ על ידי:

$$\gamma(t)=f(g(t)), \quad \text{where} \quad g(t)=tb+(1-t)a$$

f גזירה ו־g גזירה, ולכן מכלל השרשרת, נקבל כי:

$$(D\gamma)_t = (Df)_{g(t)} \circ (Dg)_t$$

אבל $g'(t) = b - a$, ולכן נקבל מהטענה שהוכחנו קודם (הרכבת נורמות אופרטוריות):
נ

$$\|(D\gamma)_t\|_{\text{op}(1,m)} \leq \|(Df)_t\|_{\text{op}(k,m)} \cdot \underbrace{\|(Dg)_t\|_{\text{op}(1,k)}}_{\|g'(t)\|_{\mathbb{R}^k}} =$$
$$\|(Df)_t\|_{\text{op}(k,m)} \cdot \|b-a\|_{\mathbb{R}^k} \overset{\text{הנחה}}{\leq} M\|b-a\|_{\mathbb{R}^k}$$

כעת, מהלמה נקבל כי:

$$\|f(b) - f(a)\|_{\mathbb{R}^m} = \|\gamma(1) - \gamma(0)\|_{\mathbb{R}^m} \leq M\|b-a\|_{\mathbb{R}^k}$$

שיעור מס' 15:
יום ראשון
05.12.20

נגזרות מסדר גבוה

ניזכר כי בהינתן $f : A \to \mathbb{R}^m$ הגדרו כי f דיפרנציאבלית בנקודה $a \in A$, אם קיימת העתקה $T \in \hom\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\right)$ כך ש־:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(a+x) - f(a) - Tx}{\|x\|_{\mathbb{R}^k}} = 0$$

כשהגבול הוא ב־$\mathbb{R}^m$.
ראינו גם דיפרנציאביליות ב־a גוררת קיום נגזרות חלקיות, אך ההפך לא נכון. כמו כן ראינו כי דיפרנציאבליות גוררת רציפות ב־a אך ההפך לא נכון.
לעומת זאת, ראינו כי אם $f : A \to \mathbb{R}^m$ אזי קיים $Df : A \to \hom\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\right)$. גם ראינו כי f גזירה ברציפות אם Df קיימת ורציפה. מכאן קיבלנו גם כי אם f גזירה ברציפות, אזי ל־f יש נגזרות חלקיות רציפות.
לפעמים נסמן גזירות ברציפות באמצעות $C^1\left(A, \mathbb{R}^m\right)$.

על מנת שנוכל לדבר על נגזרות בסדר גבוה, נצטרך להתבונן באבחנה הבאה.
ראינו כאמור כי $g : A \to \mathbb{R}^m$ אם קיימת $T \in \hom\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\right)$ כך ש־:

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(a+x) - g(a) - Tx}{\|x\|_{\mathbb{R}^m}} = 0$$

מדובר בגבול ב־$\mathbb{R}^m$. נשים לב כי אם נרשום במקום $\mathbb{R}^m$, מרחב נורמי כלשהוא V, אזי נוכל גם כאן לדבר על התכנסות .

דבר זה עוזר לנו, כי כאמור, בהינתן דיפרנציאבליות, קיימת $Df : A \to \hom\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\right)$, אך $\hom\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\right)$ הוא מרחב נורמי עם $\left(\|\cdot\|_{\text{op}}\right)$, וכעת נוכל אם כן לשאול אם Df גזירה ב־a.
נוכל לעשות זאת כאשר ניקח $g = Df$, $V = \hom\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\right)$.
וכעת נקבל את ההגדרה לנגזרות מסדר שני.

הגדרה
תהא $A \subset \mathbb{R}^k$ פתוחה, ו־$f : A \to \mathbb{R}^m$, נאמר כי ל־f יש נגזרת מסדר 2 ב־a, אם Df דיפרנציאבלית ב־a. כלומר, אם $\left(D^2 f\right) \in \hom\left(\mathbb{R}^k, \hom\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\right)\right)$,כך שהגבול של:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(Df)_{a+x} - (Df)_a - \left(D^2 f\right)_a x}{\|x\|_{\mathbb{R}^k}} = 0$$

כאשר מדובר בגבול ב־$\hom\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\right)$ (עם $\|\cdot\|_{\text{op}}$).

נשים לב כי $\left(D^2 f\right)_a \in \hom\left(\mathbb{R}^k, \hom\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\right)\right)$ ולכן, מתקיים כי $\left(D^2 f\right)_a (x) \in \hom\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\right)$ ובפרט מתקיים כי $\underbrace{\left(D^2 f\right)_a (x)(y)}_{\left(D^2 f\right)_a (x,y)} \in \mathbb{R}^m$
באופן מידי נקבל כי $\left(D^2 f\right)_a$ היא העתקה בילינארית, כלומר:

$$\left(D^2 f\right)_a (\alpha x_1 + \beta x_2)(y) = \alpha \left(D^2 f\right)_a (x_1)(y) + \beta \left(D^2 f\right)_a (x_2)(y)$$

וגם:

$$\left(D^2 f\right)_a (x)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \left(D^2 f\right)_a (x)(y_1) + \beta \left(D^2 f\right)_a (x)(y_2)$$

הוכחה
מיידי מכך ש־$x \to \left(D^2 f\right)_a x$ היא העתקה ליניארית, ומכך ש־$y \to \left(D^2 f\right)_a (x)(y)$ היא ליניארית.

על מנת להבין זאת טוב יותר, נתבונן בנגזרות כיווניות:

$$\left(D^2 f\right)_a x = \lim_{t \to 0} \frac{\left(D^2 f\right)_{a+tx} - \left(D^2 f\right)_a}{t}$$

וזהו גבול ב־$\hom\left(\mathbb{R}^k . \mathbb{R}^m\right)$ (גבול בסדרת מטריצות).
פעולת מטריצה על וקטור היא רציפה, ולכן אם יש לי סדרת מטריצות, אזי לכל $y \in \mathbb{R}^k$ הפעולה המקיימת $T \to T_y$ שזו פעולה מ־$\hom\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\right) \to \mathbb{R}^m$ זו פעולה רציפה, שהרי התכנסות של מטריצה היא התכנסות של כל רכיבי המטריצה, ומדובר רק בחיבור וכפל של איברי המטריצה עם רכיבי y.
מכך, עולה כי אם נתבונן ב:$\left(D^2 f\right)_a (x,y)$ נקבל:

$$\left(D^2f\right)_a(x,y)=\left(\lim_{t\to0}\frac{\left(D^2f\right)_{a+tx}-\left(D^2f\right)_a}{t}\right)(y)\overset{\text{רציפות}}{=}$$
$$\lim_{t\to0}\left(\frac{\left(D^2f\right)_{a+tx}-\left(D^2f\right)_a}{t}(y)\right)\overset{\text{ה"ל}}{=}$$
$$\lim_{t\to0}\left(\frac{\left(D^2f\right)_{a+tx}(y)-\left(D^2f\right)_a(y)}{t}\right)$$

כעת, עבור $x=e_1$ ו־$y=e_j$ נקבל:

$$\left(D^2f\right)_a(e_i,e_j)=\lim_{t\to0}\left(\frac{\left(D^2f\right)_{a+te_i}(e_j)-\left(D^2f\right)_a(e_j)}{t}\right)\overset{\text{נגזרת חלקית}}{=}$$
$$\lim_{t\to0}\left(\frac{\partial_jf(a+te_i)-\partial_jf(a)}{t}\right)=\partial_i\partial_jf(a)$$

כלומר, קיבלנו כי אם f גזירה פעמיים ב־a, אזי כל הנגזרות החלקיות שלה מסדר שני קיימות ב־a (∂_jf גזירה בכיוון e_1 לכל i,j בנקודה a). מביליניאריות של $\left(D^2f\right)$, אם נרשום $x=\sum\limits_{i=1}^{k}x_ie_i$ וגם $x=\sum\limits_{j=1}^{k}y_ie_j$ נקבל כי:

$$\left(D^2f\right)_a(x,y)=\sum_{i,j=1}^{k}x_iy_i\left(D^2f\right)_a(e_i,e_k)=\sum_{i,j=1}^{k}x_iy_i\partial_i\partial_jf(a)$$

מדובר למעשה בוקטור ב־$\mathbb{R}^m$.
בפרט נקבל כי ל־$\left(D^2f\right)_a$ ישנם $k\times k\times m$ רכיבים והרכיבים הם $\partial_i\partial_jf^\ell(a)$.

דוגמא
תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ כך ש־$f(a)=a_1\sin a_2$, ולכן נקבל $(Df)_a=\begin{pmatrix}\sin a_2 & a_1\cos a_2)\end{pmatrix}$, ומצד שני מתקיים:

$$\left(D^2f\right)_a=\begin{pmatrix}\partial_1\partial_1f & \partial_1\partial_2f\\ \partial_2\partial_1f & \partial_2\partial_2f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \cos a_2\\ \cos a_2 & -a_1\sin a_2\end{pmatrix}$$

והפעולה שלו הינה:

$$\left(D^2f\right)_a(x,y)=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}0 & \cos a_2\\ \cos a_2 & -a_1\sin a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

בדומה לנגזרת הראשונה, אם ל־∂jf יש נגזרות חלקיות רציפות ב־a (לכל $1\le j\le k$ אזי $\left(D^2f\right)_a$ קיימת.

טענה
תהי $f:A\to\mathbb{R}^m$ גזירה פעמיים ב־a_0. נקבע $y\in\mathbb{R}^k$ ונגדיר $g:A\to\mathbb{R}^m$ ע"י $g(a)=(Df)_a(y)$.
אזי g דיפרנציאבלית ב־a_0 ומתקיים:

$$(Dg)_{a_0}(x) = \left(D^2 f\right)_{a_0}(x,y)$$

הוכחה

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{g(a+x)-g(a)-\left(D^2f\right)_{a_0}(x,y)}{\|x\|_{\mathbb{R}^k}} = \\
&\lim_{x\to 0}\frac{(Df)_{a+x}(y)-(Df)_a(y)-\left(D^2f\right)_{a_0}(x,y)}{\|x\|_{\mathbb{R}^k}} \underset{\text{ליניאריות}}{=} \\
&\lim_{x\to 0}\frac{(Df)_{a+x}-(Df)_a-\left(D^2f\right)_{a_0}(x)}{\|x\|_{\mathbb{R}^k}}(y) =
\end{aligned}$$

נרצה להראות שהביטוי כולו מתכנס ל־0ת ולכן ניקח את הנורמה:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left\|\frac{(Df)_{a+x}-(Df)_a-\left(D^2f\right)_{a_0}(x)}{\|x\|_{\mathbb{R}^k}}(y)\right\|_{\mathbb{R}^k} \le \\
&\underbrace{\lim_{x\to 0}\left\|\frac{(Df)_{a+x}-(Df)_a-\left(D^2f\right)_{a_0}(x)}{\|x\|_{\mathbb{R}^k}}\right\|_{\text{op}}}_{=0}\|y\|_{\mathbb{R}^k}
\end{aligned}$$

ולכן בפרט $\lim_{x\to 0}\frac{g(a+x)-g(a)-\left(D^2f\right)_{a_0}(x,y)}{\|x\|_{\mathbb{R}^k}} = 0$, כנדרש.

אם $f: A\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבלית מסדר שני בכל A, נקבל כי $D^2f: A\to \hom\left(\mathbb{R}^k, \hom\left(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^m\right)\right)$.
נקבל כי אם D^2f דיפרנציאבלית בנקודה a, אזי f דיפרנציאבלית מסדר שלישי וכן הלאה.
הנגזרת מסדר ℓ בנקודה a היא ההעתקה:

$$\left(D^\ell f\right)_a \in \hom\left(\mathbb{R}^k, \hom\left(\mathbb{R}^k, \hom\left(\mathbb{R}^k, \dots, \hom\left(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^m\right)\right)\right)\right)$$

כאשר k מופיע ℓ פעמים.
ההעתקה $\left(D^\ell f\right)_a$ היא העתקה ℓ־ליניארית עם ערכים ב־$\mathbb{R}^m$ כלומר - $\left(D^\ell f\right)_a(x_1,\dots,x_\ell)\in\mathbb{R}^m$ ובסך הכל:

$$\left(D^\ell f\right)_a(e_{i_1},\dots,e_{i\ell}) = \partial_{i_1},\partial_{i_2}\dots\partial_{i_\ell}f(a)$$

שיעור מס' 16:
יום שני
05.12.20

אם נתבונן בדוגמה שראינו בשיעור הקודם, נוכל להבחין כי ב־ $\left(D^2f\right)_a = \begin{pmatrix} 0 & \cos a_2 \\ \cos a_2 & -a_1\sin a_2\end{pmatrix}$ היה שוויון ב־$\cos a_2$. כלומר, נראה כי $\partial_1\partial_2 f(a) = \partial_2\partial_1 f(a)$. זה לא מקרי, ובאופן כללי ישנה התחלפות של נגזרות שניות מעורבות, אם הנגזרות רציפות.

משפט קלרו

תהי $A\subset\mathbb{R}^{k}$ פתוחה ותהי $f:A\to\mathbb{R}^{m}$ גזירה פעמיים, והנגזרת השנייה שלה רציפה בנ־$a\in A$.
נניח כי $m=1$ (אם $m>1$, נפעיל את הטענה על כל אחד מהרכיבים של f).
אזי $\left(D^{2}f\right)(x,y)=\left(D^{2}f\right)(y,x)$. כלומר $\left(D^{2}f\right)_{a}$ היא תבנית בילינארית **סימטרית.**
במילים אחרות, הרכיבים של $\left(D^{2}f\right)_{a}$ מהווים מטריצה סימטרית־ $1,\ldots k$ $\forall i,j$ מתקים כי $\partial_{i}\partial_{j}=\partial_{j}\partial_{i}f(a)$.

הוכחה

תהי $a\in A$. נקבע $x,y\in\mathbb{R}^{k}$.
כעת, נתבונן באובייקט הבא:

$$
\begin{aligned}
I &= \left(f(a+tx+sy)-f(a+tx)\right)-\left(f(a+sy)-f(a)\right)\\
&= \left(f(a+tx+sy)-f(a+sy)\right)-\left(f(a+tx)-f(a)\right)
\end{aligned}
$$

(מדוע נתבונן בביטוי הזה, תכף נראה, אך לב העניין הוא ערך הביניים).
נשים לב כי a היא נקודה פנימית, ולכן בהכרח קיים $B_{2r}(a)\subset A$ כך ש־$|t|<\frac{r}{\|x\|}$ ו־$|s|<\frac{r}{\|y\|}$ עבור $|s|$ ו־$|t|$ מספיק קטנים, על מנת שהביטוי יהיה מוגדר היטב.
כעת, נגדיר $g_{s}:B_{r}(a)\to\mathbb{R}$ על ידי $g_{s}(b)=f(b+sy)-f(b)$.
בצורה דומה, נגדיר $h_{t}:B_{r}(a)\to\mathbb{R}$ על ידי $h_{t}(b)=f(b+tx)-f(b)$.
דבר זה יאפשר לנו לרשום את הביטוי I בצורה נוחה יותר:

$$
\begin{aligned}
&f(a+tx+sy)-f(a+tx)-\left(f(a+sy)-f(a)\right)=\\
&g_{2}(a+tx)-g_{s}(a)
\end{aligned}
$$

וגם:

$$
\begin{aligned}
&\left(f(a+tx+sy)-f(a+sy)\right)-\left(f(a+tx)-f(a)\right)=\\
&h_{t}(a+sy)-h_{t}(a)
\end{aligned}
$$

מאידך, מתקיים כי:

$$
\left(Dg_{s}\right)_{b}(z)=\left(Df\right)_{b+sy}(z)-\left(Df\right)_{b}(z)
$$

ובצורה דומה:

$$
\left(Dh_{t}\right)_{b}(z)=\left(Df\right)_{b+tx}(z)-\left(Df\right)_{b}(z)
$$

h_{t} ו־t_{s} שתיהן גזירות, ולכן ממשפט הערך הממוצע, נקבל כי קיימים $\tau_{t},\theta_{s}\in(0,1)$ כך ש:

$$g_2\left(a+tx\right)-g_s\left(a\right)=\left(Dg\right)_{a+\theta_s tx}\left(tx\right)=\left(Dh\right)_{a+\tau_t sy}\left(sy\right)=h_t\left(a+sy\right)-h_t\left(a\right)$$

כעת, באמצעות שימוש במה שפיתחנו קודם לכן כי:

$$\left(Dg\right)_{a+\theta_s tx}\left(tx\right)=\left(Df\right)_{a+\theta_s+sy}\left(tx\right)-\left(Df\right)_{a+\theta_s tx}\left(tx\right)=t\left((Df)_{a+\theta_s tx+sy}(x)-(Df)_{a+\theta_s tx}(x)\right)$$

וגם, בצורה אנלוגית לגמרי:

$$\left(Dh_t\right)_{a+\tau_t sy}\left(sy\right)=s\left((Df)_{a+\tau_t sy+tx}(y)-(Df)_{a+\tau_{tsy}}(y)\right)$$

נגדיר כעת $q,p:B_r\left(0\right)\to\mathbb{R}$ על ידי $p\left(z\right)=\left(Df\right)_{a+\theta_s tx+z.\cdot.}\left(x\right)$ וגם $q\left(z\right)=\left(Df\right)_{a+\tau_t sy+z}\left(y\right)$.
ובסך הכל נקבל כי:

$$I=t\left(p\left(sy\right)-p\left(0\right)\right)=s\left(q\left(tx\right)-q\left(0\right)\right)$$

p,q דיפרנציאבליים, כיוון שבשיעור הקודם ראינו כי $\left(Dp\right)_z\left(w\right)=\left(D^2f\right)_{a+\theta_s tx+z}\left(w,x\right)$ וגם $\left(Dq\right)_z\left(w\right)=\left(D^2f\right)_{a+\tau_s sy+z}\left(w,y\right)$.
ולכן, לפי הערך הממוצע נקבל כי קיימים $\zeta_{s,t},\xi_{s,t}$ כך ש:

$$t\left(p\left(sy\right)-p\left(0\right)\right)=t\left(Dp\right)_{\xi_{s,t}sy}\left(sy\right)=s\left(Dq\right)_{\zeta_{s,t}tx}\left(tx\right)$$

ולכן נקבל:

$$I=ts\left(D^2f\right)_{a+\theta,tx+\xi_\mu sy}\left(y,x\right)=st\left(D^2f\right)_{a+\tau_s sy+\zeta_{j,t}tx}\left(x,y\right)$$

אם נחלק ב־t,s נקבל כי:

$$\left(D^2f\right)_{a+\theta,tx+\xi_\mu sy}\left(y,x\right)=\left(D^2f\right)_{a+\tau_s sy+\zeta_{j,t}tx}\left(x,y\right)$$

ניקח $s,t\to 0$, ומרציפות הנגזרת השנייה נקבל כי:

$$\left(D^2f\right)_a\left(y,x\right)=\left(D^2f\right)_a\left(x,y\right)$$

משפט טיילור רב מימדי.

למה

תהי $A\subset\mathbb{R}^k$ פתוחה, ותהי $f:A\to\mathbb{R}$ גזירה p-פעמים.

יהיו $a\in A$ ו-$x\in\mathbb{R}^k$ כך שהקטע $[a,a+x]\subset A$. נגדיר כעת $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ על ידי $g\left(t\right)=f\left(a+tx\right)$.

אזי g גזירה p פעמים ומתקיים כי:

$$\begin{aligned} g'(t) &= (Df)_{a+tx}(x) \\ g''(t) &= \left(D^2f\right)_{a+tx}(x,x) \\ g'''(t) &= \left(D^3f\right)_{a+tx}(x,x,x) \\ \vdots &= \vdots \\ g^{(p)}(t) &= \left(D^pf\right)_{a+tx}(x,x,\dots,x) \end{aligned}$$

הוכחה

נגדיר $\varphi\left(t\right)=a+tx$ ולכן $g\left(t\right)=f\circ\varphi\left(t\right)$ ומכלל השרשרת נקבל:

$$g'\left(t\right)=\left(Df\right)_{\varphi(t)}\circ\underbrace{\left(\varphi'\left(t\right)\right)}_{x}=\left(Df\right)_{a+tx}\left(x\right)$$

מאידך, מתקיים כי:

$$\begin{aligned} g''\left(t\right) &= \lim_{h\to0}\frac{(Df)_{a+x+xh}(x)-(Df)_{a+xt}(x)}{h}= \\ &\lim_{h\to0}\frac{(Df)_{a+x+xh}-(Df)_{a+xt}}{h}\left(x\right)\overset{\text{נגזרת כיוונית}}{=} \\ &\left(\left(D^2f\right)_{a+tx}\left(x\right)\right)\left(x\right)=\left(D^2f\right)_{a+tx}\left(x,x\right) \end{aligned}$$

וכן הלאה.

משפט טיילור

נניח כי $A\subset\mathbb{R}^k$ פתוחה. ותהי $f:A\to\mathbb{R}$ גזירה $p+1$ פעמים, אזי לכל $a\in A$ ו-$x\in\mathbb{R}^k$ כך ש-$[a,a+x]\subset A$

אז קיים $\theta\in(0,1)$ כך שמתקיים:

$$f\left(a+x\right)=f\left(a\right)+\left(Df\right)_a\left(x\right)+\frac{1}{2!}\left(D^2f\right)_a\left(x,x\right)+\ldots+\frac{1}{p!}\left(D^{(p)}f\right)\left(x,\ldots x\right)+R_p\left(x\right)$$

כך ש-$R_p\left(x\right)=\frac{1}{(p+1)!}\left(D^{(p+1)}f\right)_{a+\theta x}\left(x,\ldots x\right)$.

מדובר למעשה בפולינום טיילור מסדר p.

הוכחה

נגדיר $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ על ידי $g\left(t\right)=f\left(a+tx\right)$.

ראינו כי g גזירה $p+1$ פעמים ומתקיים כי:

$$g^{(k)}(t)=\left(D^{(k)}f\right)_{a+tx}(x,\dots x)\quad 1\le k\le p+1$$

ממשפט טיילור החד־מימד, אנחנו יודעים כי:

$$g(1)=g(0)+g'(0)+\frac{1}{2!}g''(0)+\ldots+\frac{1}{p!}g^{(p)}(0)+\frac{1}{(p+1)!}g^{(p+1)}(\theta)\quad \theta\in(0,1)$$

אם נציב את הדברים לפי מה שהגדרנו, נסיים את ההוכחה.

דוגמה

תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(a)=e^{a_1+2a_2}$. נשים לב כי:

$$(Df)_a=\begin{pmatrix} e^{a_1+2a_2} & 2e^{a_1+2a_2}\end{pmatrix}=$$

$$\left(D^2f\right)_a=\begin{pmatrix} e^{a_1+2a_2} & 2e^{a_1+2a_2}\\ 2e^{a_1+2a_2} & 4e^{a_1+2a_2}\end{pmatrix}$$

בפרט נקבל כי:

$$(Df)_0(x)=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=x_1+2x_2$$

$$\left(D^2f\right)_0(x,x)=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2$$

באמצעות פולינום טיילור יתקיים:

$$f(x)=1+x_2+2x_2+\frac{1}{2}\left(x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2\right)+\underbrace{R_2(x)}_{\frac{\left(D^3f\right)_{\theta(x)}(x,x,x)}{3!}}$$

לדבר זה נוכל גם לקרוא $P_2f(x)$.

הערה

שיעור מס' 17:

יום שני

13.12.20

אם נתונה לנו $f:A\to\mathbb{R}^m$ ו־$[a,a+x]\subset A$, כך ש־$f=\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}$, ו־$f$ גזירה $p+1$ פעמים, אזי ניתן להפעיל את משפט טיילור על כל אחד מה־f_i ולקבל כי קיימים $\theta_1,\ldots,\theta_m\in(0,1)$, כך ש:

$$f\left(a+x\right)=f\left(a\right)+\left(Df\right)_a\left(x\right)+\ldots+\frac{1}{p!}\left(D^{(p)}f\right)_a\left(x,\ldots x\right)+R_p\left(x\right)$$

ולמעשה־$R_p\left(x\right)=\frac{1}{(p+1)!}\begin{pmatrix}\left(D^{(n)}f_1\right)_{a+\theta_1 x}\left(x\right)\\ \vdots\\ \left(D^{(n)}f_m\right)_{a+\theta_m x}\left(x\right)\end{pmatrix}$.

משפט הפונקציה ההופכית והסתומה

מינימום ומקסימום. לאורך כל ההרצאה נגדיר כי $f:A\to\mathbb{R}$ ו־$A\subset\mathbb{R}^k$ פתוחה.

הגדרה

נקודה $a\in A$ היא **מקסימום מקומי** ב־f אם קיימת קבוצה פתוחה $a\in U\subset A$ כך ש־$f\left(a\right)=\sup\limits_{b\in U}f\left(b\right)$.

(בצורה דומה לגבי מינימום מקומי)

הערה

במקום U אפשר לשים בהגדרה $B_r\left(a\right)$.

הגדרה

נקודה בה $\left(Df\right)_a=0$ נקראת **נקודה קריטית** של f.

טענה

אם f דיפרנציאבלית בנקודה a ו־a היא מינימום או מקסימום מקומי, אזי $\left(Df\right)_a=0$ (העתקת האפס).

במילים אחרות, $\partial_i f\left(a\right)=0$ עבור $1\leq i\leq k$.

הוכחה

יהא a מקסימום מקומי.

עתה יהא $r>0$ כך ש־ $B_r\left(a\right)\subset A$ ו־$f\left(a\right)=\sup\limits_{b\in B_r(a)}f\left(b\right)$.

נרצה להראות כי הדיפרנציאל שווה ל־0.

נראה כי לכל וקטור יחידה $\widehat{x}\in\mathbb{R}^k$ (כלומר שמקיים כי $\left\|\widehat{x}\right\|_{\mathbb{R}^k}=1$), מתקיים כי $\left(Df\right)_a\left(\widehat{x}\right)=0$ ולכן בפרט $\left(Df\right)_a=0$.

נגדיר $g:\left(-r,r\right)\to\mathbb{R}$ על ידי $g\left(t\right)=f\left(a+t\widehat{x}\right)$.

נתון כי f דיפרנציאבלית ב־a ולכן מכלל השרשרת, g גזירה ב־0 ומתקיים כי $g'\left(0\right)=\left(Df\right)_a\left(\widehat{x}\right)$.

אך למעשה a מקסימום של f ולכן 0 מקסימום של g ומכך נקבל כי $g'\left(0\right)=0$.

אם כך, ראינו כי עבור $f:A\to\mathbb{R}$ גזירה, $\left(Df\right)_a=0$ הוא תנאי הכרחי לכך ש־a הוא נקודת מינימום או מקסימום מקומית.

אך אם קיבלנו נקודה קריטית, כיצד נוכל לאפיין האם מדובר בנקודת מינימום או מקסימום מקומית? באינפי 1 הגדרנו מבחן שיקבע זאת, על בחינת הנגזרות השניות. דהיינו, ראינו כי אם $g''(a) > 0$ אזי a מינימום מקומי, ולהיפך, נקבל כי אם a מינימום מקומי, בפרט $g''(a) \geq 0$.
כעת ננסה לעשות זאת גם לפונקציות בכמה משתנים.

נבחין כי הנגזרת השנייה $\left(D^{(2)}f\right)_a$ היא תבנית בילינארית. כלומר, ראינו כי למעשה $\left(D^{(2)}f\right)_a \in \hom\left(\mathbb{R}^k, \hom\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}\right)\right)$.
ככזו, יש לה את הנורמה האופרטורית של המרחב הזה.
אם $T \in \hom\left(\mathbb{R}^k, \hom\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}\right)\right)$, אזי מההגדרה:

$$\|T\|_{\text{op}} = \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^k}=1} \|T(x)\|_{\text{op}(k,1)} = \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^k}=1} \sup_{\|y\|_{\mathbb{R}^k}=1} |T(x,y)|$$

מהליניאירות של T אנחנו מקבלים כי לכל $x, y \in \mathbb{R}^k$ מתקיים כי:

$$|T(x,y)| \leq \|T\|_{\text{op}} \|x\|_{\mathbb{R}^k} \|y\|_{\mathbb{R}^k}$$

המסקנה המיידית מביטוי זה הינה כי T **רציפה** ב־(x,y), כי אם $x_n \to x$ ו־$y_n \to y$ אזי:

$$\begin{aligned}
&|T(x_n, y_n) - T(x,y)| = |T(x_n - x, y_n) + T(x, y_n - y)| \leq \\
&|T(x_n - x, y_n)| + |T(x, y_n - y)| \leq \\
&\|T\|_{\text{op}} \left(\Big\| \underbrace{x_n - x}_{\to 0} \Big\|_{\mathbb{R}^k} \underbrace{\|y_n\|}_{\text{חסום}} + \underbrace{\|x\|}_{\text{קבוע}} \Big\| \underbrace{y_n - y}_{\to 0} \Big\|_{\mathbb{R}^k} \right) \to 0
\end{aligned}$$

הגדרה

תבנית בילינארית סימטרית $T \in \hom\left(\mathbb{R}^k, \hom\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}\right)\right)$ תיקרא **חיובית למחצה** אם $T(x,x) \geq 0$ לכל $x \in \mathbb{R}^k$.
ותיקרא חיובית בהחלט, אם $T(x,x) > 0$ לכל $x \neq 0$.
(בצורה הפוכה לגבי שלילית).

הערה

אם A היא מטריצה מייצגת של T, אזי T חיובית בהחלט או למחצה, אם ורק אם A חיובית בהחלט למחצה, וזה קורה אם"ם הע"ע של A הם חיוביים או אי שליליים.

למה

T חיובית בהחלט, אם ורק אם $T(\widehat{x}, \widehat{x}) > 0$ לכל וקטור יחידה $\widehat{x}$.

הוכחה

הכיוון $\Leftarrow$ נובע מההגדרה.
הכיוון השני $\Rightarrow$ נובע מליניאריות. כי אם $x \neq 0$ אזי:

$$T(x,x) = \underbrace{T\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right)}_{0} \underbrace{\|x\|^2}_{>0} > 0$$

למה נוספת

אם T חיובית בהחלט, אז קיים קבוע $\alpha>0$ כך ש־$T\left(\widehat{x},\widehat{x}\right)\geq\alpha$ לכל וקטור יחידה $\widehat{x}$.
(וכן הפוך לגבי שלילית ו־$-\alpha$).

הוכחה

ראינו כי T רציפה במשתנים שלה, ולכן הפונקציה $x\to T\left(x,x\right)$ רציפה. קבוצת וקטור היחידה $S_{1}\left(0\right)=\left\{ x\in\mathbb{R}^{k}\mid\left\Vert x\right\Vert _{\mathbb{R}^{k}}=1\right\}$ סגורה וחסומה ולכן קומפקטית (כי אנחנו ב־$\mathbb{R}^{k}$).
נגדיר כעת את הפונקציה מקודם על ידי $g\left(x\right)=T\left(x,x\right)$. כפי שראינו, g רציפה, ולכן $g|_{S_{1}\left(x\right)}$ משיגה את חסמיה ב־$S_{1}\left(0\right)$. כלומר קיים $\widehat{x}_{0}\in S_{1}\left(0\right)$ כך שלכל $\widehat{x}\in S_{1}\left(0\right)$ מתקיים כי $T\left(\widehat{x},\widehat{x}\right)\geq T\left(\widehat{x}_{0},\widehat{x}_{0}\right)$. נגדיר את $T\left(\widehat{x}_{0},\widehat{x}_{0}\right)=\alpha>0$ כי T חיובית בהחלט, וסיימנו.

למה אחרונה

תהי $A\subset\mathbb{R}^{k}$ ותהי $f:A\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.
תהי $D^{2}f$ רציפה ב־a. אם $\left(D^{2}f\right)_{a}$ חיובית בהחלט, אזי קיים $r>0$ כך ש־$\left(D^{2}f\right)_{b}$ חיובית בהחלט, לכל $b\in B_{r}\left(a\right)$.

הוכחה

מהלמה הקודמת, קיים $\alpha>0$ כל שלכל $\widehat{x}\in S_{1}\left(0\right)$ מתקיים כי $\left(D^{2}f\right)_{a}\left(\widehat{x},\widehat{x}\right)\geq\alpha$.
מרציפות $D^{2}f$,קיים $r>0$ כך שלכל $b\in B_{r}\left(\alpha\right)$ מתקיים כי $\left\Vert \left(D^{2}f\right)_{b}-\left(D^{2}f\right)_{a}\right\Vert _{\text{op}}\leq\frac{\alpha}{2}$.
אנו יודעים כי:

$$\begin{aligned}
&\left(D^{2}f\right)_{b}\left(\widehat{x},\widehat{x}\right)=\left(D^{2}f\right)_{a}\left(\widehat{x},\widehat{x}\right)+\left(\left(D^{2}f\right)_{b}-\left(D^{2}f\right)_{a}\right)\left(\widehat{x},\widehat{x}\right)\\
&\geq\alpha+\left(\left(D^{2}f\right)_{b}-\left(D^{2}f\right)_{a}\right)\left(\widehat{x},\widehat{x}\right)\\
&\geq\alpha-\left\Vert \left(D^{2}f\right)_{b}-\left(D^{2}f\right)_{a}\right\Vert _{\text{op}}\underbrace{\left\Vert \widehat{x}\right\Vert ^{2}}_{1}\\
&\geq\alpha-\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}>0
\end{aligned}$$

כלומר, קיבלנו חיוביות בהחלט לכל וקטור יחידה, ולכן בהכרח ההעתקה הליניארית חיובית בהחלט.

משפט

תהי $f:A\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים. תהי $a\in A$ נקודה קריטית, ו־$D^{2}f$ רציפה ב־a.
(1) אם $\left(D^{2}f\right)_{a}$ מוגדרת חיובית בהחלט, אזי a נקודת מינימום מקומית.
(2) אם a נקודת מינימום, אזי $\left(D^{2}f\right)_{a}$ חיובית למחצה.
וכן גם לגבי מקסימום, בצורה הפוכה.

הוכחה

(1) נניח כי $\left(Df\right)_{a}=0$ וכי $\left(D^{2}f\right)_{a}\left(x,x\right)>0$ לכל $x\neq0$. אזי, ממשפט טיילור עם שארית מסדר 2, קיים $r>0$ כך שלכל $x\in B_{r}\left(a\right)$ קיים $\theta\in\left(0,1\right)$ כך ש:

$$f\left(a+x\right)=f\left(a\right)+\left(Df\right)_{a}\left(x\right)+\left(D^{2}f\right)_{a+\theta x}\left(x,x\right)$$

כיוון ש־D^2f רציפה ב־a נקבל כי עבור $r>0$ מספיק קטן, $\left(D^2f\right)_{a+\theta x}$ חיובי בהחלט (מהלמה הקודמת). אזי בפרט:

$$f\left(a+x\right)=f\left(a\right)+\left(D^2f\right)_{a+\theta x}\left(x,x\right)\geq f\left(a\right)$$

במילים אחרות, קיבלנו כי לכל $b\in B_r\left(a\right)$ אזי $f\left(b\right)\geq f\left(a\right)$ ולכן a מינימום מקומי.

(2) נניח כי a היא מינימום מקומי. כלומר, קיים $r>0$ כך ש־$f\left(a\right)\leq f\left(b\right)$ לכל $b\in B_R\left(a\right)$.
לכל $x\in\mathbb{R}^k$ נביט בפונקציה $g:\left(\frac{-r}{\|x\|},\frac{r}{\|x\|}\right)\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $g\left(t\right)=f\left(a+tx\right)$.
בפרט g מקבלת מינימום ב־$t=0$.
מכלל השרשרת, אנחנו יודעים כי g גזירה פעמיים, ומתקיים כי $g'\left(t\right)=\left(Df\right)_{a+tx}\left(x\right)$ וגם $g''\left(t\right)=\left(D^2f\right)_{a+tx}\left(x,x\right)$.
נבחין כי 0 מינימום מקומי של g ולכן:

$$0\leq g''\left(0\right)=\left(D^2f\right)_a\left(x,x\right)$$

דבר זה נכון לכל $x\in\mathbb{R}^k$ ולכל $\left(D^2f\right)_a$ חיובית למחצה.

שיעור מס' 19:
יום ראשון
20.12.20

דוגמא

מצאו את המינימום והמקסימום הגלובלי של $f\left(x,y\right)=x^2+2y^2-x$ בקבוצה $\overline{B}_1\left(0\right)=\left\{\left(x,y\right)\mid x+y\leq1\right\}$.
נשים לב כי f רציפה ו־$\overline{B}_1\left(0\right)$ ולכן הנקודות האלו מתקבלות. הן יכולות להתקבל בפנים $B_1\left(0\right)$ או בשפה $S_1\left(0\right)$.
אם הן מתקבלות בפנים, אז הן גם מינימום מקומי אז חייב להתקבל בנקודה קריטית.
לכן נבדוק את הנקודות הקריטיות כעת.
נקבל:

$$\left(Df\right)_{\left(x,y\right)}=\begin{pmatrix}2x-1 & 0\end{pmatrix}=0\Rightarrow\left(x,y\right)=\left(\frac{1}{2},0\right)$$

אך מהו המקרה אם הנקודות נמצאות בשפה? על השפה אנחנו צריכים למזער\למקסם את $f\left(x,y\right)=x^2+2y^2-x$ על הקבוצה $A=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2\mid\underbrace{x^2+y^2-1}_{g\left(x,y\right)}=0\right\}$.
אם נתבונן למשל ב־$\left(Df\right)_{\left(0,1\right)}$ נקבל כי מדובר בנקודה $\left(-1,4\right)$.כלומר, הגרדיאט של f הינו...
הסיכוי היחיד לקבל מינימום ומקסימום הוא אם הגרדיאט של f יהיה מאונך לקו הירוק. כלומר אם הגרדיאנט של f מקביל לגרדיאט של g.

משפט כופלי לגרנז'

תהי $B\in\mathbb{R}^k$ פתוחה ותהיינה $f,g:B\to\mathbb{R}$ גזירות ברציפות.
נגדיר כעת $A=\left\{a\in B\mid g\left(a\right)=0\right\}$. נניח כי $\left(Dg\right)_a\neq0$. כעת לכל $a\in A$, אז אם a מקסימום או מינימום מקומיי של $f|_A$ מתקיים כי $\left(Df\right)_a=\lambda\left(Dg\right)_a$ עבור $\lambda\in\mathbb{R}$ כלשהוא.

במקרה של הדוגמא לעיל, קיבלנו כי $f(x,y)=x^2+2y^2-x$ ו־$g(x,y)=x^2+y^2-1$. ראינו כי $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}2x-1\\4y\end{pmatrix}$ ו־$\nabla g(x,y)=\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}$ וגם $x^2+y^2-1=0$.
מהמשוואה הראשונה נקבל כי $2(1-\lambda)x=1$. ולכן אם $\lambda\neq 1\Rightarrow x=\frac{1}{2(1-\lambda)}$
מהמשוואה השנייה נקבל כי $2(2-\lambda)y=0$ ולכן $\lambda=2$ או $y=0$.
מהמשוואה השלישית נקבל כי $x^2+y^2=1$.
אם $y=0$ אזי $x=\pm1$. אם $\lambda=2$ אזי נקבל כי $x=-\frac{1}{2}$ ולכן $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.
כלל הנקודות שקיבלנו הינן:

$$\left(\frac{1}{2},0\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{2},0\right)=-\frac{1}{4},$$
$$(1,0)\Rightarrow f(1,0)=0$$
$$(-1,0)\Rightarrow f(-1,0)=2$$
$$,\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2}\right)\Rightarrow f\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2}\right)=2\frac{1}{4}$$

ולכן המינימום הינו ב־$\left(\frac{1}{2},0\right)$ ואילו שתי נקודות המקסימום. $\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2}\right)$.

משפט הפונקציה ההופכית

במקרה החד מימדי.
תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות. נניח כי $x_9\in\mathbb{R}$ כך ש־$f'(x_0)>0$. מרציפות f' אזי יש $I=(x_0-\delta,x_0+\delta)$ כך ש־$f'(x)>0$ לכל $x\in I$.
נבחין כי $f:I\to\mathbb{R}$ עולה ממש ולכן $f:I\to f(I)$ הפיכה וההופכית של $f^{-1}(f(I))=I$ גזירה ומתקיים:

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

ולכן בפרט f' גזירה ברציפות.
כלומר, קיבלנו כי f הפיכה **מקומית** סביב כל נקודה בה $f'(x_0)=0$.

נרצה להרחיב זאת לכמה משתנים.
תהי $T\in\hom\left(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^m\right)$ וניקח $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ כך ש־$f(x)=Tx$. נדע כי f הפיכה אם $k=m$ ו־T היא הפיכה.
אבל $T=(Df)_a$ לכל $a\in\mathbb{R}^k$. אם כך, נרצה $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ גזירה ברציפות כך ש־$(Df)_a$ הפיכה (המקביל לכך שהנגזרת לא מתאפסת במשתנה אחד).

הגדרה

תהי $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ גזירה. **היעקוביאן** של f הוא $Jf(a)=\det(Df)_a$.

מסקנות

(1) $(Df)_a$ הפיכה אם ורק אם $Jf(a)\neq 0$.
(2) $\det\hom\left(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}\right)$ היא פונקציה רציפה ולכן אם f גזירה ברציפות, אזי $Jf:A\to\mathbb{R}$ רציפה.
(3) אם $f:A\to\mathbb{R}^k$ גזירה ברציפות ו־$Jf(a)\neq 0$, אזי יש סביבה פתוחה של a $U\subset A$ כך שלכל $b\in U$ מתקיים כי $Jf(b)\neq 0$, ולכן נקבל כי אם $(Df)_a$ הפיכה, אזי $(Df)_b$ הפיכה לכל $b\in U$ (מספיק קרוב ל־a).

משפט הפונקציה ההופכית

תהי $A\subset\mathbb{R}^k$ פתוחה. ותהי $f:A\to\mathbb{R}^k$ גזירה ברציפות. תהי $a\in A$, כך שמתקיים $Jf(a)\neq 0$. אזי קיימת $a\in U\subset A$ פתוחה כך ש־$V=f(U)$ פתוחה ו־$f:U\to V$ חח"ע ועל וההופכית שלה $f^{-1}:V\to U$ גזירה ברציפות.

הערה

נקבל כי $f^{-1}\circ f=\mathrm{Id}$ ולכן מכלל השרשרת נקבל כי $\left(Df^{-1}\right)_{f(a)}\circ(Df)_a=\mathrm{Id}$ ובפרט נקבל כי $\left(Df^{-1}\right)_b=(Df)^{-1}_{f^{-1}(b)}$.

דוגמא

נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ על ידי $f(a)=\begin{pmatrix}a_1^3+a_2^3\\a_1^2+a_2^2\end{pmatrix}$. ניקח $\begin{pmatrix}9\\5\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ונקבל $(Df)_{(1,2)}=\begin{pmatrix}3&12\\2&4\end{pmatrix}$. כלומר $Jf(1,2)=-12\neq 0$. ולכן מהמשפט קיימת קבוצה $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\in U\subset\mathbb{R}^2$ ו־$\begin{pmatrix}9\\5\end{pmatrix}\in V\subset\mathbb{R}^2$ כך שלכל $b\in V$ קיים $a\in U$ יחיד כך ש־$f(a)=b$.

למה

תהי $A\subset\mathbb{R}^k$ פתוחה ותהי $f:A\to\mathbb{R}^m$ גזירה. יהיו $a,b,c\in A$ כך ש־$[b,c]\subset A$ אזי:

$$\|f(c)-f(b)-(Df)_a(c-b)\|_{\mathbb{R}^m}\leq$$
$$\|c-b\|_{\mathbb{R}^k}\sup_{w\in[b,c]}\|(Df)_a-(Df)_w\|$$

הוכחה

נגדיר $g:A\to\mathbb{R}^m$ על ידי $g(w)=f(w)-(Df)_a w$.

אם כך, $f(c)-f(b)-(Df)_a(c-b)=g(b)-g(c)$.

אנו יודעים כי g גזירה ובנוסף $(Dg)_w=(Df)_w-(Df)_a$ (נגזרת של העתקה ליניארית זה ההעתקה עצמה) וכעת אנו יודעים ממשפט שראינו (בפרק על משפט הערך הממוצע):

$$\|g(c)-g(b)\|\leq\sup_{w\in[b,c]}\|(Dg)_w\|_{\mathrm{op}}\cdot\|b-c\|_{\mathbb{R}^k}$$

הוכחת המשפט

שיעור מס' 20:
יום שני
21.12.20

<u>הבנייה הבסיסית</u>

על פי הנתון, $Jf(a)\neq 0$ ולכן $(Df)_a$ הפיכה. כיוון ש־(Df) רציפה, קיים $r>0$ כך שלכל $b\in\widehat{B}_r(a)$ מתקיים כי:

$$\left\|(Df)_b-(Df)_a\right\|\leq\frac{1}{2\left\|(Df)_a^{-1}\right\|_{\mathrm{op}}}$$

נסמן $M=2\left\|(Df)_a^{-1}\right\|_{\mathrm{op}}$.

שלב ראשון - $f|_{\widehat{B}_r(a)}$ חח"ע

מהלמה שראינו קודם לכן, נקבל כי לכל $b,c\in\widehat{B}_r(a)$ מתקיים כי:

$$\begin{aligned}&\left\|f(c)-f(b)-(Df)_a(c-b)\right\|_{\mathbb{R}^m}\leq\\&\left\|c-b\right\|_{\mathbb{R}^k}\sup_{w\in[b,c]}\left\|(Df)_a-(Df)_w\right\|\leq\end{aligned}$$

אבל $w\in[b,c]$ ולכן בפרט $\sup_{w\in[b,c]}\left\|(Df)_a-(Df)_w\right\|=\frac{1}{M}$.

כעת, נשתמש ב**אי שוויון המשולש ההפוך:**

$$\begin{aligned}&\left\|f(c)-f(b)\right\|\geq\\&\left\|(Df)_a(c-b)\right\|-\left\|f(c)-f(b)-(Df)_a(c-b)\right\|\overset{\sup}{\geq}\\&\left\|(Df)_a(c-b)\right\|_{\mathbb{R}^k}-\frac{1}{M}\left\|c-b\right\|_{\mathbb{R}^k}=\\&\frac{1}{\left\|(Df)_a^{-1}\right\|_{\mathrm{op}}}\cdot\underbrace{\left\|(Df)_a^{-1}\right\|_{\mathrm{op}}\left\|(Df)_a(c-b)\right\|}_{\geq\left\|(Df)_a^{-1}(Df)_a(c-b)\right\|_{\mathrm{op}}}-\frac{1}{M}\left\|c-b\right\|_{\mathbb{R}^k}\end{aligned}$$

ולכן נקבל בסך הכל כי הביטוי לעיל גדול מ:

$$\frac{2}{M}\left\|c-b\right\|_{\mathbb{R}^k}-\frac{1}{M}\left\|c-b\right\|=\frac{1}{M}\left\|c-b\right\|_{\mathbb{R}^k}$$

אם כך, $\left\|f(c)-f(b)\right\|\geq\frac{1}{M}\left\|b-c\right\|$. נסמן ביטוי זה ב-$(*)$.

סך הכל, קיבלנו כי אם $b\neq c$ אזי $f(c)\neq f(b)$ ובפרט f הינה חח"ע כשהיא מצומצמת לכדור.

שלב שני - לכל $b\in\widehat{B}_r(a)$ נקבל כי $(Df)_b$ הפיכה

אנחנו צריכים להוכיח כי לכל $y\in\mathbb{R}^k$ מתקיים כי $(Df)_a(y)\neq 0$ (העתקה ליניארית הפיכה אם"ם הגרעין שלה שונה מ-0).

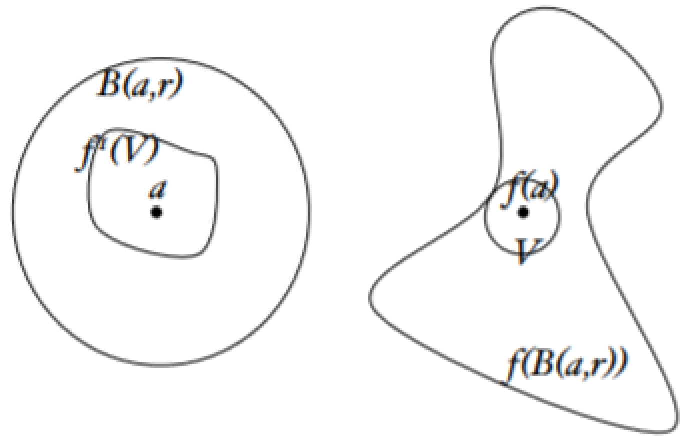
כעת נבחין כי:

$$\begin{aligned}&\left\|(Df)_b(y)\right\|=\left\|\lim_{t\to0}\frac{f(b+ty)-f(b)}{t}\right\|=\\&\lim_{t\to0}\frac{1}{\|t\|}\left\|f(b+ty)-f(b)\right\|\overset{(*)}{\geq}\\&\lim_{t\to0}\frac{1}{|t|}\frac{1}{M}\left\|ty\right\|=\frac{\|y\|}{M}>0\end{aligned}$$

כנדרש.

<u>שלב שלישי - בניית U ו־V</u>

אינטואטיבית, נרצה להוכיח דבר זה:



נבחר $b\in\partial B_r\left(a\right)$. אנו יודעים כי $f|_{\widehat{B}_r(a)}$ חח"ע ולכן $f\left(b\right)\neq f\left(a\right)$. בפרט מתקיים כי $f\left(a\right)\notin f\left(\underbrace{\partial B_r\left(a\right)}_{\text{קומפקטית}}\right)$.

אבל f רציפה ולכן גם $f\left(\partial B_r\left(a\right)\right)$ קומפקטית.

מטענה שראינו, נקבל כי $f\left(\partial B_r\left(a\right)\right)$ ל־$\left\{f\left(a\right)\right\}$ הוא $\varepsilon>0$ (כלומר לכל $b\in\partial B_r\left(a\right)$ אזי $\left\|f\left(a\right)-f\left(b\right)\right\|\geq\varepsilon$).

נביט כעת ב־$B_{\frac{\varepsilon}{2}}\left(f\left(a\right)\right)$ ונראה כי $f\left(B_r\left(a\right)\right)$.

אם כך, לכל $w\in B_{\frac{\varepsilon}{2}}\left(f\left(A\right)\right)$ נמצא $b\in B_r\left(a\right)$ כך ש־$f\left(b\right)=w$.

נקבע w ועבורו נגדיר פונקציה $h:\widehat{B}_r\left(a\right)\to\mathbb{R}$ על ידי $h\left(b\right)=\left\|f\left(b\right)-w\right\|_{\mathbb{R}^k}^2$. נשים לב כי h רציפה ובכל $b\in B_r\left(a\right)$ מתקיים כי היא גזירה וגם (תרגיל):

$$\left(Dh\right)_b\left(x\right)=2\left\langle\left(Df\right)_b\left(x\right),f\left(b\right)-w\right\rangle=2\left\langle x,\left(Df\right)_b^T\left(f\left(b\right)-w\right)\right\rangle$$

נרצה להראות כעת כי המינימום של h הוא 0, על מנת להוכיח את הטענה.

אם כן, h רציפה על קבוצה קומפקטית, ולכן קיים b_0 שהוא נקודת מינימום של h.

אנו יודעים כי $b_0\notin\partial B_r\left(a\right)$, כי $\left\|f\left(b\right)-w\right\|\geq\left\|f\left(b\right)-f\left(a\right)\right\|-\left\|f\left(a\right)-w\right\|\geq\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}>0$.

מאידך, גם $\left\|f\left(w\right)-a\right\|<\frac{\varepsilon}{2}$.

אם כך, $b_0\in B_r\left(a\right)$ ולכן b_0 נקודה קריטית של h (כי הוא מינימום מקומי).

ולמעשה מתקיים:

$$\begin{aligned}&0=\left(Dh\right)_{b_0}\left(x\right)=2\left\langle x,\left(Df\right)_{b_0}^T\left(f\left(b_0\right)-w\right)\right\rangle\\&\Rightarrow\underbrace{\left(Df\right)_{b_0}^T}_{\text{הפיך ושונה מ־0}}\left(f\left(b_0\right)-w\right)=0\Rightarrow\\&\left(f\left(b_0\right)-w\right)=0\Rightarrow f\left(b_0\right)=w\end{aligned}$$

לסיכום, מצאנו $B_r(a)$ כך ש־$B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(a)) \subset f(B_r(a))$. נסמן את $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(a))$ בתור V.
ניקח את $f^{-1} \cap B_r(a)$, פתוחה שנגדיר בתור U.
ואם כך קיבלנו כי $f : U \to V$ חח"ע ועל.
<u>שלב רביעי - $f^{-1} : V \to U$ ליפשיצית</u>
נבחר $v, w \in V$. נקבל כי:

$$\begin{aligned}
&\|v-w\| = \left\|f\left(f^{-1}(v)\right) - f\left(f^{-1}(w)\right)\right\| \geq \\
&\frac{1}{M}\left\|f^{-1}(v) - f^{-1}(w)\right\| \Rightarrow \\
&\left\|f^{-1}(v) - f^{-1}(w)\right\| \leq M\|v-w\|
\end{aligned}$$

כלומר, f^{-1} היא M ליפשיצית.
<u>שלב חמישי - f^{-1} גזירה ברציפות</u>
תהא $v \in V$. אנו יודעים כי V פתוחה ולכן קיים $\delta > 0$ כך ש־$B_\delta(v) \in V$.
כלומר לכל $y \in B_\delta(0)$ מתקיים כי $v + y \in V$.
ניקח כעת $b = f^{-1}(v)$ ומצד שני $x = f^{-1}(v+y) - f^{-1}(v)$. מתקיים כי $v = f(b)$ וגם $y = f(b+x) - f(b)$.
f^{-1} היא M ליפשיצית, ולכן נקבל כי $\|x\| \leq M\|y\|$.
נקבל, לפי ההגדרה:

$$\begin{aligned}
&f^{-1}(v+y) - f^{-1}(v) - (Df)_b^{-1}(y) = x - (Df)_b^{-1}(y) = \\
&(Df)_b^{-1}\left((Df)_b(x) - y\right) = \\
&-(Df)_b^{-1}\left(f(b+x) - f(b) - (Df)_b(x)\right)
\end{aligned}$$

נתבונן ב:

$$\begin{aligned}
&\frac{\left\|f^{-1}(v+y) - f^{-1}(v) - (Df)^{-1}(y)\right\|}{\|v\|} \overset{\text{תחילת החלק}}{\leq} \\
&\frac{M\left\|f^{-1}(v+y) - f^{-1}(v) - (Df)^{-1}(y)\right\|}{\|x\|} = \\
&\frac{M\left\|(Df)_b^{-1}\left(f(b+x) - f(b) - (Df)_b(x)\right)\right\|}{\|x\|} \leq \\
&\frac{M\left\|(Df)_b^{-1}\right\|_{\text{op}}\left\|\left(f(b+x) - f(b) - (Df)_b(x)\right)\right\|}{\|x\|}
\end{aligned}$$

כעת אם $y \to 0$ אזי גם $x \to 0$ (זה נובע מכך ש־$x = f^{-1}(v+y) - f^{-1}(v)$).
ולמעשה דבר זה גורר כי $0 \to \frac{\left\|\left(f(b+x)-f(b)-(Df)_b(x)\right)\right\|}{\|x\|}$, מהגדרת הדיפרנציאל.
אם כך, כל הביטוי $0 \to \frac{\left\|f^{-1}(v+y)-f^{-1}(v)-(Df)^{-1}(y)\right\|}{\|v\|}$ ולכן f^{-1}דיפרנציאבלית ב־v ו־$\left(Df^{-1}\right)_v = \left((Df)_{f^{-1}(v)}\right)^{-1}$.
ניתן לומר כי f^{-1} גם גזירה ברציפות (עלינו להראות כי $v \to \left((Df)_{f^{-1}(v)}\right)^{-1}$ רציפה).

נוכל להבחין כי $v \to f(v)$ רציפה, וגם $b \to (Df)_b$ רציפה. בנוסף, $A \to A^{-1}$ רציפה ב־$G_{Lk}(\mathbb{R})$ (נובע מכלל קרמר).
ולכן הביטוי הנדרש רציף כהרכבה של רציפות.

שיעור מס' 20:
יום ראשון
27.12.20

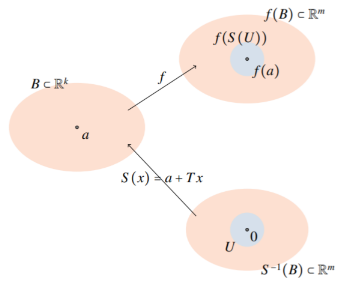
ניזכר כי בליניארית הוכחנו שבהינתן מטריצה $A \in \hom\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\right)$ נוכל לרשום אותה בתור שורות ועמודות.
ואז במצב כזה נקבל כי דרגת העמודות תהיה: $\dim \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_k) \leq k$ ואילו דרגת השורות תהיה למעשה $\leq m$ $\dim \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_k)$. הוכחנו בליניארית כי דרגת השורות שווה לדרגת העמודות, ולכן מתקיים כי $\operatorname{rank}(A) \leq \min\{k, m\}$.
נאמר כי A **מדרגה מלאה** אם הדרגה שלה היא המקסימום האפשרי, כלומר $\operatorname{rank}(A) = \min\{k, m\}$.

היום נתבונן במקרה שבו $k \geq m$. במקרה זה A היא על אם"ם $\operatorname{span}(v_1, \ldots v_k) = \mathbb{R}^m$ אך דבר זה מתרחש אם"ם $\operatorname{rank}(A) = m$.
כלומר, A הינה על אם"ם A **מדרגה מלאה**.

למה
יהי $k \geq m$ ותהי $A \in \hom\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\right)$ מדרגה מלאה.
אזי קיים $T \in \hom\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k\right)$ כך ש־$A \circ T \in \hom\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m\right)$ הפיכה.
הוכחה
על פי הנתון, עולה כי $\operatorname{rank}(A) = m$. כעת, ממשפט המימד עולה כי $\dim(\ker A) = k - m$.
כעת, אם נתבונן במרחב הניצב לגרעין, כלומר $(\ker A)^{\perp} \subset \mathbb{R}^k$, ובפרט $\dim(\ker A)^{\perp} = m$.
כלומר, נוכל למצוא $w_1, \ldots, w_n$ בת"ל שפורשים את המרחב הניצב.
נגדיר $T = (w_1, \ldots w_n)$, ומכך למעשה מתקיים כי לכל $x \neq 0$ נקבל כי $Tx \neq 0$. כלומר, $Tx \notin \ker A$ ולכן $ATx \neq 0$.
במילים אחרות, קיבלנו כי הגרעין של AT טרוויאלי, ולכן AT הפיכה.

משפט ההעתקה הפתוחה
יהי $k \geq m$ ותהי $A \subset \mathbb{R}^k$. תהי $f : A \to \mathbb{R}^m$ גזירה ברציפות.
נניח כי $(Df)_a$ **מדרגה מלאה** לכל $a \in A$.
אזי f **העתקה פתוחה**, כלומר לכל $B \subset A$ פתוחה מתקיים כי $f(B) \subset \mathbb{R}^m$ פתוחה.
הוכחה
יהי $a \in B$. אנחנו צריכים להוכיח כי $f(a)$ נקודה פנימית של $f(B)$. דבר זה ינבע מהטענה הבאה.

טענה
יהי $k \geq m$ ותהי $B \subset \mathbb{R}^k$ פתוחה וגם $f : B \to \mathbb{R}^m$ גזירה ברציפות. אם עבור $a \in B$ מתקיים כי $(Df)_a$ מדרגה מלאה, אזי $f(a)$ נקודה פנימית של $f(B)$.
רעיון ההוכחה



הוכחה

מהלמה שהוכחנו קודם עולה כי קיימת העתקה $T:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ כך ש־$(Df)_a \circ T \in \hom(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ הפיכה.

נגדיר $S:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ על ידי $S = a + Tx$. נשים לב כי $S(0) = a$ וגם $(DS)_a = T$.

נגדיר $g : S^{-1}(B) \to \mathbb{R}^m$ על ידי $g(x) = f(S(x))$. נשים לב כי $g(0) = f(a)$ וגם $(Dg)_0 = (Df)_a \circ T$ - כלומר הפיך.

ממשפט הפונקציה ההופכית יש קבוצה פתוחה $0 \in U \subset f^{-1}(B)$ כך ש־$g(U) \subset \mathbb{R}^m$ פתוחה.

כעת מתקיים כי $f(a) = g(0) \in g(U)$.

כמו כן, נשים לב כי לכל $b \in g(U)$ קיים $c \in U$ כך ש־$g(c) = b$. אבל $g(c) = f(S(c))$ כאשר $(S(c)) \in B$.

לכן נקבל כי $g(U) \subset f(B)$. אם כך, $g(U)$ תת קבוצה פתוחה של $f(B)$ שמכילה את $f(a)$ ולכן $f(a)$ פנימית ב־$f(B)$.

דוגמא

אם $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירה ברציפות ואם $(Df)_a$ **מדרגה מלאה** לכל a (כלומר $\operatorname{rank}(Df)_a = 1$ ולכן $f'(a) \neq 0$ לכל a.

מכאן עולה כי $f' > 0$ תמיד או $f' < 0$ תמיד. כלומר, f עולה ממש או f יורדת ממש.

דהיינו $f((a,b)) = (f(a), f(b))$ או $f((a,b)) = (f(b), f(a))$.

אם לעומת זאת $f'(a) = 0$ עבור a כלשהוא. למשל $f(x) = x^2$. אזי f אינה העתקה פתוחה. כי $f((-1,1)) = [0,1)$ לא קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}$.

כופלי לאגרנז' (מינימום\מקסימום תחת אילוצים)

תהא $B \subset \mathbb{R}^k$ פתוחה. ותהי $f : B \to \mathbb{R}^k$ גזירה ברציפות.

תהיינה $g_1, \ldots g_n : B \to \mathbb{R}$. נגדיר את $A = \{a \in B \mid g_1(a) = g_2(a) = \ldots = g_n(a) = 0\}$.

נאמר כי $a \in A$ היא מינימום או מקסימום מקומי של $f|_a$ אם קיימת $a \in U \subset B$ פתוחה כך ש־$f(a) = \sup_{b \in U \cap A} f(b)$ (בצורה מקבילה עבור מינימום).

אם נניח האילוץ הוא $\{x,y,z \in \mathbb{R}^2 \mid x^2y^2 - z = 1\}$, מדובר למעשה על משטח - דו מימדי. אם נוסיף $x+y=7$, אזי מדובר למעשה על אובייקט חד מימדי.

משפט

בתנאים הנ"ל, אם $F:B\to\mathbb{R}^{n+1}$ כך ש־ $F(a)=\begin{pmatrix} g_1(a) \\ \dots \\ g_n(a) \\ f(a) \end{pmatrix}$, אם a_0 מינימום או מקסימום מקומי של $f|_A$,
אזי $(Df)_{a_0}$ מדרגה לא מלאה. (במילים אחרות, כיוון ש־ $\begin{pmatrix} (Dg_1)_{a_0} \\ \dots \\ (Dg_n)_{a_0} \\ (Df)_{a_0} \end{pmatrix} = (Df)_{a_0}$ לא מדרגה מלאה, אזי
הקבוצה $\left\{(Dg_1)_{a_0}, (Dg_n)_{a_0}, \dots, (Dg_n)_{a_0}, (Df)_{a_0}\right\}$ תלויה ליניארית.)

הוכחה

נשים לב כי כיוון ש־$a\in A$ מתקיים כי $F(a_0)=\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ f(a_0) \end{pmatrix}$. כיוון ש־$k\geq n+1$, אם בשלילה $(Df)_{a_0}$ מדרגה מלאה, אזי $F(a_0)$ היא נקודת פנים של $F(U)$ כאשר $U\subset B$ בה $f(b)$ $f(a_0)=\sup\limits_{b\in U\cap A}$. בפרט קיים $\varepsilon>0$ כך ש־$F(U)\ni \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ f(a_0)\pm\varepsilon \end{pmatrix}$.

כלומר קיימת $a\pm\in U$ כך ש־$F(a_0)=f(a_0)\pm\varepsilon$.

מההגדרה, מתקיים כי $g_i(\pm a)$ לכל $1\leq i\leq n$.

בפרט מתקיים כי $a\pm\in A$, וקיבלנו כי $\pm a\in A\cap U$, כך ש:

$$f(a+)=f(a)+\varepsilon>f(a_0)>f(a_0)-\varepsilon=f(a-)$$

בסתירה לכך ש־$f(b)$ $f(a_0)=\sup\limits_{b\in U\cap A}$, ובסתירה לכך ש־$(Df)_{a_0}$ מדרגה מלאה.

מסקנה

בתנאי המשפט, אם גם $(Dg_1)_{a_0},\dots,(Dg_n)_{a_0}$ ב"ת ליניארית, אזי קיימים $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, הנקראים כופלי לגראנז', כך ש־$(Df)_{a_0}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(Dg_i)_{a_0}$.

במילים אחרות, כדי למצוא מינימום או מקסימום של f ב־A, עלינו לפתור

$$\begin{aligned} g_1(a)&=0 \\ &\vdots \\ g_n(a)&=0 \\ (Df)_{a_0}&=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(Dg_i)_{a_0} \end{aligned}.$$

נשים לב כי אנחנו יכולים לכתוב את הביטוי למטה גם כך ־

$$\begin{aligned} \partial_1 f(a)&=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\partial_1 g_i(a) \\ &\vdots \\ \partial_k f(a)&=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\partial_k g_i(a) \end{aligned}.$$

כלומר, קיבלנו $k+n$ משוואות ב־$k+n$ נעלמים.

דוגמא

מהי הנקודה הקרובה ביותר לראשית, במקום שנתון על ידי החיתוך של המשטחים $z^2 = x^2 + y^2$ ו־$x - 2z = 3$.
נשים לב כי $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ וגם $g_2 = x - 2z - 3$.
נמזער את $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
כלומר, נרצה כי יתקיים:

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 m \qquad \begin{array}{l} g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{array}$$

ונקבל את סט המשוואות הבא:

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{gathered} (I)\, 2(1-\lambda)\, x = \mu \\ (II)\, 2(1-\lambda)\, y = 0 \\ (III)\, 2(1+\lambda)\, z = -2\mu \\ (IV)\, x^2 + y^2 = z^2 \\ (V)\, x - 2z = 3 \end{gathered}$$

נפתור את חמשת המשוואות בזריזות.מ־(II) עולה כי $\lambda = 1$ או $y = 0$.
<u>נניח כי $\lambda = 1$</u>
מ־(I) נקבל כי $\mu = 0$ ומ־(III) נקבל כי $z = 0$. מ־ (V) כי $x = 3$. מ־(IV) קיבלנו כי $y^2 = -9$ וזו סתירה.

<u>לכן בהכרח $y = 0$</u>
מ־(IV) עולה כי $x = \pm z$.
אם $x = z$ אזי מ־(V) $z = -3$ ולכן קיבלנו $(-3, 0, -3)$.
אם $x = -z$ נקבל מ־(V) כי $z = -1$ ולכן$(1, 0, -1)$.
לכן, אם קיים ממזער ל־$f|_A$ אזי הוא בנקודות $(1, 0, -1)$ או . $(-3, 0, -3)$.
מקומפקטיות, אפשר להראות שהממזער חייב להתקיים (ובנקודה $(1, 0, -1)$ בפרט).

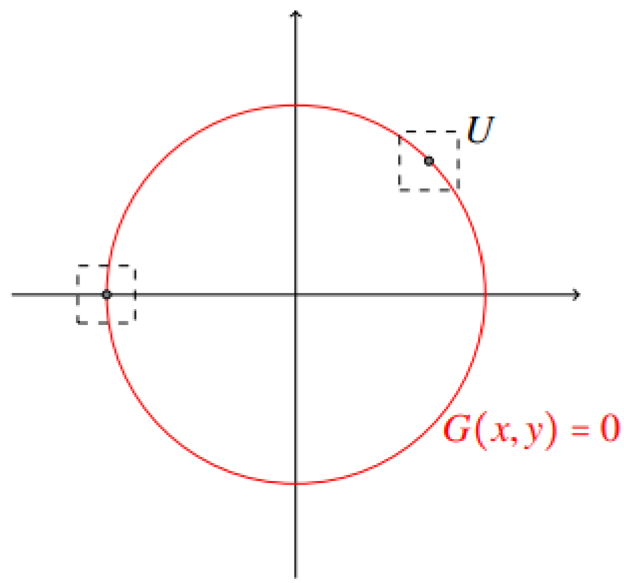
משפט הפונקציה הסתומה

שיעור מס' 21:
יום שני
27.12.20

נניח כי יש לנו $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ונרצה כי$g(x, y) = 0$. נניח כי קיימים $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}$ כך ש־$g(\overline{x}, \overline{y}) = 0$.
נניח כי בסביבה כלשהיא $(\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon) \times (\overline{y} - \delta, \overline{y} + \delta)$ מתקיים כי לכל $x \in (\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon)$ קיים ויחיד $y \in (\overline{y} - \delta, \overline{y} + \delta)$ כך ש־$g(x, y) = 0$.
נוכל לסמן $y = f(x)$, כך ש־$f(\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon) \to \mathbb{R}$. כלומר נאמר כי $g(x, y) = 0$ מגדירה פונקציה סתומה.
נרצה להבין מתי דבר זה נכון.
נתבונן בדוגמה שאנו יודעים עליה הכל, ונראה מה אנחנו מחפשים.

דוגמא

ניקח את $g\left(x,y\right)=x^{2}+y^{2}-1$ ואז $g\left(x,y\right)=0$ הינו מעגל היחידה.
נביט בנקודה $\left(\overline{x},\overline{y}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ובסביבתה, עבור החלון $U=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4},\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4},\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\right)$
מתקיים כי לכל $x\in\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4},\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\right)$ ישנו $y\in\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4},\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\right)$ כך ש־$y=\sqrt{1-x^{2}}=f(x)$ ו־$g\left(x,f\left(x\right)\right)=0$.
התמונה נראית כך:



נשים לב כי זה לא תמיד המצב. אם ניקח $(\bar{x},\bar{y})=(-1,0)$, בכל חלון סביבו, הקשר $g\left(x,y\right)=0$ אינו מגדיר פונקציה!
אם כך, לפעמים הקשר מגדיר לנו פונקציה ולפעמים לא.
ה"בעיה" במקרה השני היא כי $\frac{\partial g}{\partial y}\left(-1,0\right)=0$.

משפט

תהי $A\subset\mathbb{R}^{k}$ ו־$B\subset\mathbb{R}^{m}$ קבוצות פתוחות. ותהיינה $G:A\times B\to\mathbb{R}^{m}$ כך ש־$G\left(x,y\right)$ גזירה ברציפות
נניח כי עבור $\left(\overline{x},\overline{y}\right)\in A\times B$ מתקיים כי $g\left(\overline{x},\overline{y}\right)=0$. נניח כי $i,j=1,\ldots,m\quad,\left(\frac{\partial G_{i}}{\partial y_{j}}(\bar{x},\bar{y})\right)$ היא הפיכה.
אזי קיימת סביבה $\left(\overline{x},\overline{y}\right)\in U\subset A\times B$ ו־$\overline{x}\in V\subset A$ פתוחה ו־$f:V\to B$ גזירה ברציפות כך שלכל $(x,y)\in U$ מתקיים כי $G\left(x,y\right)=0$ אם"ם $f\left(x\right)=y$

הוכחה

נגדיר $F:A\times B\to\mathbb{R}^{k+m}$ על ידי $F\left(x,y\right)=\left(x,G\left(x,y\right)\right)$.
אזי:

$$(DF)_{(\bar{x},\bar{y})}=\left.\begin{pmatrix}1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & 1 & 0 & \dots & 0\\ \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial x_k} & \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial y_m}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial G_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial G_m}{\partial x_k} & \frac{\partial G_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial G_m}{\partial y_m}\end{pmatrix}\right|_{(\bar{x},\bar{y})}$$

על פי ההנחה, הבלוק $= \det\left(\left(\frac{\partial G_i}{\partial y_j}(\bar{x},\bar{y})\right)_{i,j}\right)$ שונה מאפס, ולכן הדטרמיננטה של כל $(DF)_{(\bar{x},\bar{y})}$ שונה מאפס ולכן $(DF)_{(\bar{x},\bar{y})}$ הפיכה.

לכן, כהרכבה של פונקציות גזירות ברציפות, גם $F\left(x,y\right)$ גזירה ברציפות.

כעת, ממשפט הפונקציה ההופכית ישנה $U\subset A\times B$ ו-$W\subset\mathbb{R}^{k+m}$ פתוחות כך ש-$F|_U$ חח"ע על W ו-: F^{-1} $W\to U$ גזירה ברציפות.

כעת נתבונן בביטוי הבא:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_k\\ y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=F\left(F^{-1}(x,y)\right)=\begin{pmatrix}\left(F^{-1}(x,y)\right)_1\\ \vdots\\ \left(F^{-1}(x,y)\right)_k\\ G_1\left(F^{-1}(x,y)\right)\\ \vdots\\ G_m\left(F^{-1}(x,y)\right)\end{pmatrix}$$

ולכן נקבל כי $F^{-1}\left(x,y\right)=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_k\\ g_1\left(x,y\right)\\ \vdots\\ g_m\left(x,y\right)\end{pmatrix}$ כאשר $g:W\to B$ והיא גזירה ברציפות.

לפי האילוץ שמוגדר לנו, מתקיים כי כאשר $G\left(x,y\right)=0$ אזי $F\left(x,y\right)=\left(x,0\right)$.

לכן, נגדיר כעת $V=\left\{x\in\mathbb{R}^k:\left(x,0\right)\in W\right\}\subset A$ שהינה קבוצה פתוחה.

נגדיר $f:V\to B$ על ידי $f\left(x\right)=g\left(x,0\right)$.

g גזירה ברציפות ולכן גם f. אם כך, אם $(x,y)\in U$ אזי מתקיים:

$$\begin{aligned}G\left(x,y\right)=0 &\Leftrightarrow (x,y)\in U\ \ F\left(x,y\right)=\left(x,0\right)\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in W\quad (x,y)=F^{-1}\left(x,0\right)\\ &\Leftrightarrow (x,0)\in W\quad y=g\left(x,0\right)\\ &\Leftrightarrow x\in V\quad y=f\left(x\right)\end{aligned}$$

דוגמאות

ניקח $m=k=1$ ו־$G(x,y)=x^2y+xy^3$, כך ש־$G(1,1)=2$. האם קיימת פונקציה $F:I\to\mathbb{R}$ גזירה כך ש־$f(1)=1$ ו־$G(x,f(x))=2$ כאשר $I\ni 1$ קטע פתוח אם כן, מה השיפוע שלה?
ממשפט הפונקציה הסתומה , צריך לבדוק כי $\frac{\partial G}{\partial y}\neq 0$, ואכן מתקיים כי $\frac{\partial G}{\partial y}_{(1,1)}=x^2+3xy^2=4\neq 0$.
אם כך, קיימת סביבה I ופוקנציה f כנ"ל.
נקבל כי $G\left(\underbrace{x,f(x)}_{h(x)}\right)=2$ ולכן $(Dg)_{(1,1)}\circ(Dh)_1=0$. כלומר, קיבלנו כי $(3,4)\begin{pmatrix}1\\ f'(1)\end{pmatrix}=0$ ולכן $f'(1)=-\frac{3}{4}$.

שאלה (ממבחן 2017)

תהא $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ כך ש־$f(u,v,w)=(ve^{uw},\sin(u-v)+w)$. תהא $a_0\in[0,1]$ ונסמן $b_0=f(a_0)$.
הראו כי למשוואה $b_0=f(a)$ יש אינסוף פתרונות והראו כי לכל $0<h<1$ למשוואה $f(u,v,h)$ יש מספר סופי של פתרונות $(u,v)\in[0,1]^2$.
אם נמצא קבוצה U כך שלכל $x\in U$ מתקיים כי $G(x,y)=0 \Leftrightarrow f(x)=y$, אזי מצאנו למעשה אינסוף פתרונות, לכן נצטרך להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה.
על מנת להשתמש במשפט זה, עלינו לחשב את הדיפרנציאל. נקבל:

$$(Df)_{(u,v,w)}=\begin{pmatrix} wve^{uw} & e^{uw} & uve^{uw}\\ \cos(u-v) & -\cos(u-v) & 1\end{pmatrix}$$

נבחר $y=(u,v)$ ו־$x=w$. עשינו זאת, כי אם נתבונן ב־$T(u,v)$ נוכל להבחין כי $\det(T)=-\cos(u-v)(vw+1)e^{u2}m\neq 0$ עבור $(u,v,w)\in[0,1]^3$.
מכאן נקבל כי ממשפט הפונקציה הסתומה, קיימת סביבה V של w_0 ופונקציה $g:V\to\mathbb{R}^2$ כך ש־$f(g(w),w)=b_0$.
בפרט קיבלנו כי הקבוצה $\{g(w),w\mid w\in V\}$ היא קבוצה אינסופית של פתרונות.

נקבע את h על ידי $0<h<1$, ונרצה לומר כי לכל h יש מספר סופי של פתרונות $(u,v)\in[0,1]^2$ למשוואה $b_0=f(u,v,h)$. קיבענו את h ולכן מדובר בפוקציה $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ כך ש־$F(u,v)=f(u,v,h)$.
אנחנו יודעים כי $(Df)_{(u,v)}=T(u,v,h)\neq 0$ לכל $(u,v,h)\in[0,1]^2$.
נסמן את $A=\{y=(u,v)\mid y\in[0,1],F(y)=b_0\}$.
נחלק למקרים.
נבחר $y_0\in[0,1]^2\setminus A$.
כלומר $F(y_0)\neq b_0$. נבחין כי F רציפה ולכן קיימת סביבה V_{y_0} בה $F(y)\neq b_0$ לכל $y\in V_{y_0}$.
נניח כי $y_0\in A$, ולכן נקבל ממשפט הפונקציה ההופכית, כי קיימת סביבה U_{y_0} של y_0 כך ש־$F|_U$ היא חח"ע.
למעשה, קיבלנו כי לכל $y\in U_{y_0}$ מתקיים כי $F(y)=b_0\Leftrightarrow y=y_0$.
נוכל להבחין כי $[0,1]^2\subset\bigcup\limits_{y\in A}U_y\cup\bigcup\limits_{y\in[0,1]\setminus A}V_y$.
אם כך, מצאנו כיסוי פתוח ל־$[0,1]^2$ ולכן מקומפקטיות של $[0,1]^2$, קיים כיסוי סופי $\{U_{y_1},\dots,U_{y_N},V_{\tilde{y}_1},\dots V_m\}$
בפרט, נקבל כי $A\subset[0,1]^2\subset\bigcup\limits_{i=1}^{N}U_y\cup\bigcup\limits_{j=1}^{m}V_y$ אבל לביטוי $\bigcup\limits_{j=1}^{m}V_y$ אין פתרונות, ולביטוי $\bigcup\limits_{i=1}^{N}U_y$ יש מספר סופי, לכן יש בפרט מספר סופי של נקודות.

שיעור מס' 22:

יום ראשון

03.01.21

פרק 3 - טורי פורייה

הגדרות בסיסיות

הגדרה

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ כאשר $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ תיקרא **מכפלה פנימית** אם מתקיימות התכונות הבאות:

(I) סימטריות - $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(II) ליניאריות - $\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle$

(III) חיוביות - $\langle x, x \rangle \geq 0$ ויש שוויון אם"ם $x = 0$

דוגמאות

(1) $\mathbb{R}^m$ עם המ"פ $\langle x, y \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

(2) מרחב המטריצות הממשיות $n \times n$ עם $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}\left(A^T, B\right) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij} B_{ig}$.

(3) $\ell^2 = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{R} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$ עם המכפלה הפנימית $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$

מ"פ על מ"ו V מגדירה לנו נורמה עליו, כאשר $\|x\| = \sqrt{x, x}$.

טענה

אכן מדובר בנורמה.

הוכחה

חיוביות והומוגניות מידיות.

על מנת לבדוק את א"ש משולש, נצטרך להשתמש בא"ש קושי שוורץ.

כלומר, מתקיים כי $\left|\overline{\langle x, y \rangle}\right| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

כעת, מתקיים:

$$\begin{aligned}
&\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \\
&\|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2 = \\
&\|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 = \\
&(\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

וכאשר נוציא שורש נקבל את הנדרש.

טענה

המכפלה הפנימית $V \times V \to \mathbb{R}$ רציפה ביחס למטריקה $\|\cdot\|$ שהיא משרה.

הוכחה

ניקח $x_n \to x$ ו־$y_n \to y$ ונקבל כי :

$$\begin{aligned}&|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| = \\ &|\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle| \leq \\ &|\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \overset{\text{קושי-שוורץ}}{\leq} \\ &\|x_n - x\| \, \|y_n\| + \|x\| \, \|y_n - y\|\end{aligned}$$

נבחין כי $\|y_n - y\| \to 0$, וכך גם $\|x_n - x\|$. מאידך, מרציפות הנורמה עולה כי $\|y_n\| \to \|y\|$ ו־$\|x\|$ קבוע. לכן קיבלנו כי כל הביטוי שואף לאפס, וממילא המכפלה הפנימית רציפה.

כעת, בהינתן מכפלה פנימית נרצה לדבר על ניצבות ומערכות אורתונורמליות.

מערכות אורתונורמליות

הגדרה

יהי $(V, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ מרחב מ"פ.
נאמר כי שני וקטורים $x, y \in V$ הם ניצבים, כאשר $x \perp y$ עם $\langle x, y\rangle = 0$.
$\{x_i \mid i \in I\}$ תיקרא מערכת **אורתונוגונלית**, אם $x_i \perp x_j$ לכל $i \neq j$.
מערכת זו תיקרא מערכת **אורתונורמלית** (או מע' א"נ), אם בנוסף $\|x_i\| = 1$ לכל $i \in I$.

משפט פיתגורס

אם $\{x_1, \ldots, x_n\}$ מערכת אורתוגונלית סופית, אזי:

$$\|x_1 \ldots, x_n\| = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2$$

הוכחה

עבור $n = 2$ נקבל כי:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \underbrace{\langle x, y\rangle}_{\text{ארותוגונלי}} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

עבור $n < 2$, באינדוקציה.

מסקנה

אם $\{x_1, \ldots, x_n\}$ מערכת **אורתונורמלית** סופית אזי:

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2\right)^{1/2}$$

הוכחה

מיידי ממש ממשפט פיתגורס, כי $\{a_1 x_1, \ldots, a_n x_n\}$ מערכת אורתוגונלית, ואז $\|a_i x_i\| = |a_i|$.

טענה

מערכת אורתונורמלית $\{x_i \mid i\in I\}$ היא בת"ל.

כלומר לכל $J\subset I$ סופית, הקבוצה $\{x_j \mid i\in J\}$ היא בת"ל.

הוכחה

נניח כי $\sum\limits_{i\in J} a_i x_i=0$.

נקבל גם, לכל $j\in J$:

$$0=\left\langle \sum_{i\in J} a_i x_i, x_j\right\rangle \overset{\text{לינאריות}}{=} \sum_{i\in J} a_i\left\langle x_i, x_j\right\rangle$$

כעת, מתקיים בהכרח כי לכל $j\in J$ $a_j=0$ ולכן $\{x_i \mid i\in J\}$ בת"ל.

משפט על הטלות אורתוגונליות

יהי V מרחב מ"פ ותהי $\{x_1\ldots,x_n\}$ מערכת א"נ סופית.

ותהי $W\subset V$ המוגדרת על ידי $W=\ \operatorname{span}\{x_1\ldots,x_n\}$.

נגדיר $\pi_W: V\to V$ על ידי $\pi_W(y)=\sum\limits_{i=1}^{d}\langle y,x_i\rangle x_i$.

אזי מתקיימים התנאים הבאים:

(א) π_W העתקה לינארית רציפה.

(ב) $\operatorname{Im}(\pi_W)=W$.

(ג) לכל $y\in V$ מתקיים כי $y-\pi_W(y)\perp W$.

(ד) לכל $y\in V$ מתקיים כי $\pi_W(y)$ הוא האיבר הקרוב ביותר ב־w ל־y. כלומר:

$$\forall z\in W\quad \|y-z\|\geq\|y-\pi_W(y)\|$$

ויש שוויון אם"ם $z=\pi_W(y)$.

(ה) לכל $z\in W$ מתקיים כי $\pi_W(z)=z$. ובפרט $\pi_W\circ\pi_W=\pi_W$.

(ו) לכל $y\in V$ נקבל כי $\|\pi_W(y)\|\leq\|y\|$ ויש שוויון אם"ם $y\in W$.

אם נתבונן בד', נוכל להגיע למסקנה כי π_W איננו תלוי בבחירת הבסיס האורתונורמלי.

ולכן π_W נקראת ההטלה הניצבת על W.

הוכחה

(א) לינאריות ורציפות π_W נובעים מידיות מלינאריות ורציפות המכפלה הפנימית.

(ב) נרצה להראות כי התמונה של π_W שווה ל־W. לכן נראה הכלה דו כיוונית:

$$\forall y\quad \pi_W(y)=\sum_{i=1}^{d}\langle y,x_i\rangle x_i\in\operatorname{span}\{x_1,\ldots x_n\}$$

ולכן בפרט $\operatorname{Im}(\pi_W)\subset W$.

בסעיף ה' נראה כי לכל $z \in W$ מתקיים כי $\pi_W(z) = z$ ולכן $z \in \mathrm{Im}(\pi_W)$. כלומר $W \subset \mathrm{Im}(\pi_W)$.

(ג) נרצה להוכיח כי $y - \pi_W(y) \perp W$.
נשים לב כי מתקיים, לכל $1 \le i \le d$:

$$\langle y - \pi_W(y), x_i \rangle =$$
$$\langle y, x_i \rangle + \sum_{j=1}^{d} \langle y, x_j \rangle \langle x_j, x_i \rangle =$$
$$\langle y, x_i \rangle + \langle y, x_i \rangle = 0$$

כלומר $y - \pi_W(y)$ ניצב לבסיס של W ולכן ניצב ל־W.

(ד) נרצה להוכיח כי $\|y - \pi_W(y)\| \le \|y - z\| \quad \forall z \in W$.
כעת, יהי $z \in W$ ו־$y \in W$. נבחין כי $\underbrace{(z - \pi_W(y))}_{\in W} \perp y - \pi_W(y)$ ולכן מתקיים ממשפט פיתגורס:

$$\|y - z\|^2 = \|y - \pi_W(y)\|^2 + \|\pi_W(y) - z\|^2 \ge \|y - \pi_W(y)\|^2$$

ויש שוויון אס"ם הביטוי $\|\pi_W(y) - z\|^2 = 0$.

(ה) נשים לב כי אם $z \in W$ מתקיים מסעיף ד' כי $\pi_W(z)$ הוא האיבר הכי קרוב ל־z ב־W.
כלומר, הוא z. ולכן נקבל:

$$\forall y \in V \;\; \pi_W(\pi_W(y)) = \pi_W(y)$$

(ו) נרצה להוכיח כי $\|\pi_W(y)\| \le \|y\|$. נשתמש בפיתגורס:

$$\|y\|^2 = \|(y - \pi_W(y)) + \pi_W(y)\|^2 =$$
$$\|(y - \pi_W(y))\|^2 + \|\pi_W(y)\|^2 \ge \|\pi_W(y)\|^2$$

ויש שוויון אס"ם $\|(y - \pi_W(y))\|^2$ מתאפס.

טענה (אי שוויון בסל)
יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ מרחב מ"פ.
תהי $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ מערכת א"נ בת מנייה.
אזי לכל $y \in V$ מתקיים כי:

$$\|y\|^2 \ge \sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, x_n \rangle|^2$$

מסקנה - לכל $y \in V$ מתקיים כי $\langle y, x_n \rangle \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

הוכחה

נגדיר $V_N = \text{span}\{x_1, \dots x_N\}$ ונגדיר את $\pi_{V_N} : V \to V$ להיות ההטלה הניצבת.

כעת, מתקיים:

$$\|y\|^2 \geq \|\pi_W(y)\|^2 =$$
$$\left\|\sum_{i=1}^{N} \langle y, x_i \rangle x_i \right\|^2 \overset{\text{פיתגורס}}{=}$$
$$\sum_{i=1}^{N} \|\langle y, x_i \rangle x_i\|^2 =$$
$$\sum_{i=1}^{N} |\langle y, x_i \rangle|^2$$

כעת, ניקח את $N \to \infty$ ונקבל את התוצאה.

מערכות אורתונורמליות שלימות

הגדרה

מערכת א"נ בת מנייה $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ תיקרא שלימה אם:

$$\text{span}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sum_{j \in J} a_j x_j : a_j \in \mathbb{R}, |J| < \infty \right\}$$

צפוף ב-V .

משפט

תהי $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ מערכת א"נ בת מנייה בממ"פ V.

אזי, התנאים הבאים שקולים:

(I) $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ מערכת אורתנורמלית שלימה.

(II) לכל $y \in V$ מתקיים כי $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, x_n \rangle x_n$ כאשר בשוויון זה הכוונה היא

$$\left\| y - \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, x_n \rangle x_n \right\| \to 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \langle y, x_n \rangle x_n$ נקרא **הפיתוח** של y במערכת $\{x_n\}$.

(III) שוויון פרסבל - לכל $y \in V$ מתקיים כי $\|y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, x_n \rangle|^2$

הוכחה

$(I \Rightarrow II)$ **שלימות המערכת גורר קיום פיתוח.**

נסמן $v_N = \text{span}\{x_1 \dots, x_N\}$ וב-$\pi_n : V \to V$ את ההטלה הניצבת על V_N.

כלומר, מתקיים כי $\pi_N(y) = \sum_{i=1}^{N} \langle y, x_i \rangle x_i$.

נבחין כי העובדה שהקבוצה $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ שלימה, אומרת למעשה את התנאי הבא.
לכל $\varepsilon > 0$ קיים N ו־$y_N \in V_N$ כך ש־$\|y - y_N\| < \varepsilon$.
אנו יודעים מהמשפט על הטלות ניצבות, כי:

$$\|\pi_N - y\| \leq \|y - y_N\| < \varepsilon$$

מכך ש־$V_N \subset V_{N'}$ לכל $N' \leq N$, מתקיים כי $\pi_N(y) \in V_{N'}$.
ולכן נקבל כי $\pi_{N'}(y)$ קרוב ל־y לפחות כמו $\pi_N(y)$.
כלומר, קיבלנו כי גם $\varepsilon > \|\pi_{N'} - y\|$.
במילים אחרות, לכל $\varepsilon > 0$ יש $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N' \geq N$ מתקיים כי $\|\pi_{N'} - y\| < \varepsilon$.
אבל $\pi_{N'} = \sum_{i=1}^{N'} \langle y, x_i \rangle x_i$, ולכן בפרט $y = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \langle y, x_i \rangle x_i$.
כלומר, ניתן לפתח את y בתור טור ־ דהיינו ־ $\sum_{n=1}^{\infty} \langle y, x_n \rangle x_n$.

$(II \Rightarrow III)$ **קיום פיתוח גורר את שוויון פרסבל.**
אנו יודעים כי $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, x_n \rangle x_n$ (מההנחה).
ולכן, מרציפות הנורמה, נקבל כי:

$$\|y\|^2 = \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} \langle y, x_n \rangle x_n \right\|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |\langle y, x_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, x_n \rangle|^2$$

$(III \Rightarrow II)$ **שוויון פרסבל גורר את שלימות המערכת האורתונורמלית.**
נסמן ב־V_N ו־π_N כמו קודם.
מהמשפט על **הטלות ניצבות**, מתקיים כי לכל $y \in V$ בהכרח $y - \pi_N(y) \perp V_N$.
כעת, ממשפט פיתגורס עולה:

$$\begin{aligned}\|y\|^2 = \left\| y - \pi_N(y) + \underbrace{\pi_N(y)}_{\in V_N} \right\|^2 &= \\ \|y - \pi_N(y)\|^2 + \|\pi_N(y)\|^2 &= \\ \|y - \pi_N(y)\|^2 + \sum_{n=1}^{N} |\langle y, x_n \rangle|^2 &\overset{\text{פרסבל}}{\to} \\ \|y - \pi_N(y)\|^2 + \|y\|^2 &\end{aligned}$$

אם נעביר אגפים, נקבל כי $\|y - \pi_N(y)\|^2 \to 0$.
אמנם, $\pi_N \in V_N \subset \operatorname{span}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
כלומר, מצאנו סדרה ששואפת ל־y ולכן בפרט הוא צפוף ב־V כנדרש.
בפרט קיבלנו כי $\operatorname{span}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ צפוף ב־V, ולכן המערכת שלימה.

מסקנה

אם $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ מערכת אורתונורמלית שלימה ־ $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, אזי $a_n = \langle y, x_n \rangle$.
כלומר, הפיתוח של y במערכת $\{x_n\}$הוא **יחיד**.

למעשה, אמנם $\{x_n\}$ איננו בסיס (אם V לא ממימד סופי למשל), אבל כן כל $y \in X_n$ הוא טור באיבר x_n והמקדמים נקבעים **ביחידות**.

הוכחה

מרציפות המכפלה הפנימית, נקבל כי:

$$\langle y, x_k \rangle = \lim_{N\to\infty} \left\langle \sum_{n=1}^{N} a_n x_n, x_k \right\rangle =$$
$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n \langle x_n, x_k \rangle =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overbrace{\langle x_n, x_k \rangle}^{\delta_{ik}} =$$
$$a_k$$

שוויון פרסבל המוכלל

במערכת אורתונורמלית שלימה, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתקיים כי $\langle y, z \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, x_n \rangle \langle x_n, z \rangle$.

שיעור מס' 23:

יום שני

04.01.21

המרחבים $C_{\text{per}}(a,b)$ ו־$C_{\text{piece}}(a,b)$

נגדיר כעת שני מרחבים חדשים:

$$C_{\text{per}}(a,b) := \{f \in C([a,b]) : f(a) = f(b)\}$$

מדובר בפונקציות **מחזוריות**, שכן $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ אם ניקח פונקציה כזו.

על מרחב זה ישנה **מכפלה פנימית**:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

אמנם, נרצה גם לדבר על פונקציות שאינן רציפות, אלא **רציפות למקוטעין**:

$$C_{\text{piece}}(a,b) := \left\{ f : [a,b) \to \mathbb{R} : \begin{array}{l} f \text{ and bounded, is } \exists k \in \mathbb{N}, \exists a_0 = a < a_1 < \ldots < a_k = b, \\ \forall i = 1, \ldots, k,\ f|_{[a_{i-1}, a_i)} \text{ continuous. is} \end{array} \right\}$$

נוכל לומר כי גם פונקציות אלו הן מחזוריות.

על פונקציה זו קיימת אותה מכפלה פנימית.

הערה

מדוע רצינו שהפונקציות יהיו רציפות משמאל ולא מימין? היינו יכולים לבחור גם הפוך אך אי אפשר לבחור גם וגם, כי מדובר במרחב וקטורי, ואז הפרש הפונקציות יהיה נקודה אחת ספציפית, ואז לא ניתן להגדיר מכפלה פנימית. כלומר, למשל:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1]\\ 0 & x\in(1,2]\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1)\\ 0 & x\in[1,2]\end{cases}$$

ואז נקבל:

$$f-g(x)=\begin{cases}1 & x=1\\ 0 & x\neq 1\end{cases}$$

תרגיל

(א) הראו כי המרחב $C_{\text{ piece}}(a,b)$ עם הפונקציה $\langle f,g\rangle=\int\limits_a^b f(t)g(t)dt$ הוא מרחב מ"פ.

(ב) הראו כי המרחב $C_{\text{ piece}}(a,b)$ ביחס לנורמה המושרית, איננו שלם.

טענה

המרחב $C_{\text{per}}(a,b)$ **צפוף** ב־$C_{\text{ piece}}(a,b)$ ביחס לנורמת $\|\cdot\|_2$.

הוכחה

נבחר $f\in C_{\text{ piece}}(a,b)$ עם $a_0=a<a_1<\ldots<a_k=b$ כך ש־$\forall i=1,\ldots,k,\ f|_{[a_{i-1},a_i)}$ רציפה.
כעת, נבחר N כך ש־$\frac{1}{N}<a_i-a_{i-1}$ לכל $1\leq i\leq k$ (כדי שנוכל לזוז "אחורה" במרחק $\frac{1}{N}$).
כעת, לכל $n\geq N$ נגדיר:

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x) & x\in\left[a_{i-1},a_i-\frac{1}{n}\right),i=1,\ldots k\\ f\left(a_i\right)-\frac{x-a_i}{1/n}\left(f\left(a_i-\frac{1}{n}\right)-f\left(a_i\right)\right) & x\in\left[a_i-\frac{1}{n},a_i\right),i=1,\ldots k\\ f(a) & x=b\end{cases}$$

נשים לב כי $\sup\limits_{t\in[a,b]}|f_n(t)|\leq\sup\limits_{t\in[a,b]}|f(t)|$. ואז מתקיים כי:

$$\begin{aligned}\|f-f_n\|_2^2&=\int\limits_a^b|f(x)-f_n(x)|^2dx\overset{(*)}{=}\sum_{i=1}^k\int\limits_{a_i-\frac{1}{n}}^{a_i}|f(x)-f_n(x)|^2dx\\&\overset{\sup}{\leq}\sum_{i=1}^k\int\limits_{a_i-\frac{1}{n}}^{a_i}\left(\|f_n\|_\infty+\|f\|_\infty\right)^2dx\\&\overset{(**)}{\leq}\sum_{i=1}^k\int\limits_{a_i-\frac{1}{n}}^{a_i}4\|f\|_\infty^2dx\overset{(***)}{=}4\|f\|_\infty^2k\frac{1}{n}\end{aligned}$$

$(*)$ הנקודות היחידות ששונות ומעניינות אותנו. $(**)$ ממה שראינו רגע לפני כן. $(***)$ סכימת האינטגרל.
כאשר $n\to\infty$ הביטוי עצמו שואף ל־0. במילים אחרות, מצאנו סדרת פונקציות ב־$C_{\text{per}}(a,b)$ שמקרבות את f.

הערה

השתכנעו כי $C_{\text{per}}(a,b)$ אינו צפוף ב־$C_{\text{piece}}(a,b$ ביחס לנורמת $\|f\|_\infty$.

מערכת פורייה

כעת, נתבונן ב־$C_{\text{piece}}(-\pi,\pi)$.

הגדרה

המערכת הטריגונומטריות ב־$C_{\text{piece}}(-\pi,\pi)$ היא משפחה של פונקציות $\mathscr{T}=\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}\cup\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, כאשר:

$$\begin{aligned}\psi_0(x)&=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\\ \psi_n(x)&=\tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\quad n=1,2,\dots\\ \varphi_n(x)&=\tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad n=1,2,\dots\end{aligned}$$

נשים לב גם כי $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty},\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}\in C_{\text{per}}(-\pi,\pi)$.

טענה

$\mathscr{T}$ היא מערכת אורתונורמלית.

הוכחה

חישוב לדוגמא עבור $n,m\geq 1$:

$$\langle\psi_m,\varphi_n\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}\pi(\cos(n-m)x+\cos(n+m)x)dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ 1 & n=m\end{cases}$$

הגדרה

נגדיר כעת את המרחבים V_n להיות:

$$V_n:=\text{span}\{\psi_0,\dots,\psi_n,\varphi_1,\dots,\varphi_n\}\subset C_{\text{per}}(-\pi,\pi)\subset C_{\text{piece}}(-\pi,\pi)$$

והינו מרחב הפולינומים הטריגונומטריים מסדר $\geq n$.

ונגדיר את S_n להיות ההטלה הניצבת על V_n:

$$S_nf(x)=\sum_{k=0}^{n}\langle f,\psi_k\rangle\psi_k+\sum_{k=1}^{n}\langle f,\varphi_k\rangle\varphi_k=\sum_{k=0}^{n}a_k^f\cos kx+\sum_{k=1}^{n}b_k^f\sin kx$$

כאשר מתקיים:

$$a_0^f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f, \psi_0 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n^f = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, \psi_n \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n^f = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, \varphi_n \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

אלה נקראים **מקדמי פורייה** של f.
בסוף הפרק נראה את המשפט הבא.

משפט פייר
לכל פונקציה f שהינה ב־$C_{\text{per}}(-\pi,\pi)$ קיימת פונקציות $p_n \in V_n$ כך ש־$p_n \to f$ במ"ש ($\|f-p_n\|_\infty \to 0$).
הוכחה
בסוף הקורס.

המסקנה ממשפט פייר היא כי המערכת $\mathscr{T}$ היא מערכת **אורתונורמלית שלימה** במרחב $C_{\text{ piece}}(-\pi,\pi)$.
הוכחה
אנחנו צריכים להראות כי $\text{span}\mathscr{T}$ צפוף ב־$C_{\text{ piece}}(-\pi,\pi)$.
ראינו כי $C_{\text{ piece}}(-\pi,\pi) \subset C_{\text{per}}(-\pi,\pi)$ צפוף, ולכן מספיק להראות כי $\text{span}\mathscr{T}$ צפוף ב־$C_{\text{per}}(-\pi,\pi)$.
ברור כי $V_n \subset \text{span}\mathscr{T}$ לכל n ולכן אם ניקח סדרה $p_n \in V_n$ ששואפת במ"ש ל־$f \in C_{\text{per}}(-\pi,\pi)$ היא סדרה ב־$\mathscr{T}$.
נבחין כי מתקיים:

$$\|f-p_n\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f-p_n|^2 \, dx \le$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)-p_n(x)| \right)^2 dx \le$$

$$2\pi \left(\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)-p_n(x)| \right)^2 \to 0$$

כאשר המעבר האחרון נובע ממשפט פייר.
אם כך, הראינו כי לכל $f \in C_{\text{per}}(-\pi,\pi)$ מתקרב אליו בנורמת 2, ולכן היא צפופה בו.

מסקנות
(א) לכל $f \in C_{\text{ piece}}(-\pi,\pi)$ מתקיים כי:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \psi_n \rangle \psi_n + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^f \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^f \sin nx$$

ביטוי זה נקרא **טור פורייה** של f.

זהו אינו שוויון נקודתי, אלא הכוונה פה היא כי $S_nf \underset{n\to\infty}{\to} f$ ביחס לנורמה $\|\cdot\|_2$.

(ב) שוויון פרסבל:

$$\langle f,g\rangle = 2\pi a_0^f a_0^g + \pi\sum_{n=1}^{\infty} a_n^f a_n^g + \pi\sum_{n=1}^{\infty} b_n^f b_n^g$$

ובפרט נקבל:

$$\|f\|^2 = 2\pi\left|a_0^f\right|^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n^f\right|^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left|b_n^f\right|^2$$

כמו כן, נקבל כי b_n^f ו־$a_n^f f$ שואפים ל־0 כאשר $n\to\infty$.

כלומר, נקבל כי:

$$a_n^f = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

הערה

(1) אם f היא זוגית בקטע $(-\pi,\pi)$ אזי $b_n^f = 0$.

(2) אם f היא זוגית ב־$(-\pi,\pi)$ אזי $a_n^f = 0$.

הוכחה (1)

נקבל:

$$b_n^f = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dx = 0$$

כי מדובר על אינטגרל על קטע סימטרי של פונקציה אי זוגית.

דוגמא

נבחר $f(x) = x$ ו־$f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$. מדובר בפונקציה אי זוגית ולכן $a_n^f = 0$ לכל $n\geq 0$.

אמנם, נחשב את b_n^f:

$$b_n^f = \int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nt)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-x\cos(nx)}{n}\right)_{-\pi}^{\pi} + \underbrace{\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx}_{0}$$

$$= \frac{-2}{\pi n}(-1)^n$$

ולכן נקבל:

$$f\left(x\right)=\frac{-2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n}\sin\left(nx\right)$$

נשים לב כי מדובר בשווין ב־$\|\cdot\|_2$ אך לא נקודתי. כי הרי $f\left(-\pi\right)=-\pi$ ומאידך נקבל כי:

$$\frac{-2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n}\sin\left(-n\pi\right)=0$$

אמנם, נבחין מה שוויון פרסבל נותן לנו במקרה זה.
נקבל:

$$\|f\|_{2}^{2}=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_{n}^{f}\right)^{2}=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^{2}}$$

מאידך, נוכל לחשב זאת:

$$\int_{-\pi}^{\pi}x^{2}dx=\left(\frac{x^{3}}{3}\right)_{-\pi}^{\pi}=\frac{2\pi^{3}}{3}$$

קיבלנו אם כן כי:

$$\frac{2\pi^{3}}{3}=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^{2}}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}=\frac{\pi^{2}}{6}$$

שיעור מס' 24:
יום ראשון
10.01.21

ראינו כי עבור $f\in C_{\text{piece}}(-\pi,\pi)$ הגדרנו $S_nf=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k^f\cos\left(kx\right)+\sum\limits_{k=0}^{n}b_k^f\sin\left(kx\right)$ כאשר:

$$a_{0}^{f}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\langle f,\psi_{0}\right\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_{k}^{f}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\langle f,\psi_{n}\right\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx$$

$$b_{k}^{f}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\langle f,\varphi_{n}\right\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx$$

ראינו כי $S_nf\to f$ בנורמת $||\cdot||_2$ ורשמנו זאת בצורה פורמלית בתור $f=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^f\cos\left(nx\right)+\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n^f\sin\left(nx\right)$.

כעת, נרצה לדבר מתי ההתכנסות הזאת מתרחשת בצורה נקודתית, ואולי במידה שווה.

התכנסות במ"ש של טורי פורייה

טענה (תנאי הכרחי להתכנסות במ"ש)

אם $S_n f \to f$ במ"ש, אזי $f \in C_{\text{per}}(-\pi,\pi)$.

הוכחה

$S_n f$ פונקציות רציפות ולכן אם $S_n f \to f$ במ"ש, אזי גם f רציפה (הוכחנו בתחילת הקורס).

בנוסף, מתקיים כי $S_n f\left(-\pi\right) = S_n f\left(\pi\right)$ לכל n וגם בגבול במ"ש מתקיים כי $f\left(-\pi\right) = f\left(\pi\right)$, כלומר $f \in C_{\text{per}}(-\pi,\pi)$.

דוגמה

טור פורייה של $f\left(x\right) = x$ אינו מתכנס ל־$f\left(x\right)$ במ"ש, כי $f\left(-\pi\right) \neq f\left(\pi\right)$.

(היא לא מתרחבת לפונקציה רציפה על הישר הממשי.)

טענה

תהי $f \in C_{\text{ piece}}(-\pi,\pi)$ גזירה ברציפות ב־$[-\pi,\pi]$ עם נגזרת חסומה ו־$f\left(-\pi\right) = f\left(\pi\right)$ אזי $f' \in C_{\text{ piece}}(-\pi,\pi)$ ומתקיים:

$$f' = -\sum_{k=0}^{\infty} k a_k^f \sin kx + \sum_{k=1}^{\infty} k b_k^f \cos kx$$

כאשר:

$$a_n^{f'} = n b_n^f \quad \text{and} \quad b_n^{f'} = -n a_n^f$$

הוכחה

מההנחה f' רציפה על $[-\pi,\pi]$ וחסומה ולכן מתקיים כי $f' \in C_{\text{ piece}}(-\pi,\pi)$. כלומר בפרט מתקיים כי:

$$f' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^f \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^f \sin kx$$

כאשר מתקיים:

$$\begin{aligned} a_k^f &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi k} f(x)\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx dx \\ &= -\frac{1}{k} b_k^{f'} \end{aligned}$$

ובאופן דומה ניתן להגיע עבור שאר המקרים.

נקבל כי $b_k^f = \frac{1}{k} a_k^{f'}$.

דבר זה מאפשר לנו להוכיח התכנסות במ"ש כעת.

משפט

אם $f\in C_{\text{piece}}(-\pi,\pi)$ גזירה ברציפות ב־$[-\pi,\pi]$ עם נגזרת חסומה ו־$f(-\pi)=f(\pi)$ אזי $S_nf\to f$ במ"ש ובהחלט ולמעשה מתקיים $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left|a_k^f\right|<\infty$ וגם מתקיים כי $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left|b_k^f\right|<\infty$.

הוכחה

נתבונן בסכום:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k^f\right|\overset{\text{טענה קודמת}}{=}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left|a_k^{f'}\right|}{k}\overset{(*)}{\leq}$$
$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|b_k^{f'}\right|^2\right)\overset{\text{פרסבל וביטוי מהשיעור הקודם}}{\leq}$$
$$\frac{\pi}{\sqrt{6}}\frac{1}{\pi}\left|\left|f'\right|\right|_2<\infty$$

$(*)$ א"ש קושי שוורץ עבור $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_ib_i$ ב־$\ell^2(\mathbb{R})$ כלומר כי $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_ib_i\leq\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

באופן דומה אפשר למצוא עבור b_n^f.

כעת, מתוך זה נסיים את ההוכחה ונסיק כי יש התכנסות במ"ש ובהחלט.

מתקיים כעת כי:

$$\sum_{k=0}^{n}a_k^f\cos(kx)+\sum_{k=0}^{n}b_k^f\sin(kx)\leq\sum_{k=0}^{n}\left|a_k^f\right|+\sum_{k=0}^{n}\left|b_k^f\right|$$

הטורים בצד ימין מתכנסים, ולכן ממבחן M של ויירשטרס להתכנסות טורים, מתקיים כי S_nf מתכנסת במ"ש ובהחלט. נסמן את **גבולה** ב־g.

העובדה כי S_n^f רציפה גוררת כי g רציפה, ובנוסף נקבל כי $S_nf(\pi)=S_nf(-\pi)$ ולכן גם $g(-\pi)=g(\pi)$.

כלומר $g\in C_{\text{per}}(-\pi,\pi)\subset C_{\text{piece}}(-\pi,\pi)$.

מכך מתקיים:

$$\left|\left|S_n(f)-g\right|\right|_{\infty}\to 0\Rightarrow\left|\left|S_n(f)-g\right|\right|_2\to 0$$

כאשר מדובר באותו חישוב שעשינו קודם לכן.

מאידך, נתון כי $\left|\left|S_n(f)-f\right|\right|_2\to 0$ (ראינו זאת בשיעור הקודם), ולכן בפרט $f=g$ מיחידות הגבול, כלומר $S_nf\to g$ במ"ש ובהחלט.

אפשר לחזק זאת ולקבל משפט.

משפט

הטענה הנ"ל נכונה גם עבור $\in C_{\text{piece}}(-\pi,\pi)$ רציפה גזירה ברציפות מלבד מספר סופי של נקודות, ועם נגזרת חסומה, ו־$f(-\pi)=f(\pi)$.

הוכחה

באופן דומה.

דוגמא

אם ניקח את $f\left(x\right)=\left|x\right|$ נקבל כי $S_{n}f\to f$ במ"ש ובהחלט ובפרט בכל נקודה ולכן ניתן לרשום אותו כסכום אינסופי של סינוסים וקוניסוים.

טענה

לכל $f\in C_{\text{piece}}\left(-\pi,\pi\right)$ עבור $\left(a,b\right)\subset\left(-\pi,\pi\right)$ ולכל $\theta\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{a}^{b}f\left(t\right)\cos\left(\left(n+\theta\right)t\right)dt=0$$

וגם:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{a}^{b}f\left(t\right)\sin\left(\left(n+\theta\right)t\right)dt=0$$

הוכחה

בשלב הראשון, נניח כי $\left(a,b\right)=\left(-\pi,\pi\right)$ אזי יתקיים:

$$\int\limits_{a}^{b}f(t)\cos((n+\theta)x)dx=$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos\left(\theta t\right)\cos\left(nt\right)-f\left(t\right)\sin\left(\theta t\right)\sin\left(nt\right)$$

נגדיר את $f_{1}=f(t)\cos\left(\theta t\right)$ ואת $f_{2}=f\left(t\right)\sin\left(\theta t\right)$.
נקבל כי הביטוי לעיל שווה ל - $\pi a_{n}^{f_{1}}-\pi b_{n}^{f_{2}}$.
אבל $f_{1},f_{2}\in C_{\text{piece}}\left(-\pi,\pi\right)$ ולכן הביטוי כולו שואף ל-0.

בשלב השני, עבור $\left(a,b\right)\subset\left(-\pi,\pi\right)$, נגדיר:

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & x\in[a,b)\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

נשים לב כי $g\in C_{\text{piece}}\left(-\pi,\pi\right)$ ולכן בשלב אחד נקבל כי:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}g\left(t\right)\cos\left(\left(n+\theta\right)t\right)dt\underset{n\to\infty}{\to}0$$

אבל מדובר למעשה על $\int\limits_{a}^{b}f\left(t\right)\cos\left(\left(n+\theta\right)t\right)dt$, ודבר זה מסיים את ההוכחה עבור $\left(a,b\right)$ כללי.

למעשה, אפשר לראות זאת לכל קטע.

שיעור מס' 25:
יום שני
$11.01.21$

למה

ניקח $f\in C_{\text{piece}}\left(-\pi,\pi\right)$ אזי מתקיים:

$$S_{n}f\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f\left(t\right)D_{n}\left(x-t\right)dt$$

כאשר:

$$D_{n}\left(t\right)=\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)6\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}$$

ונקראת "גרעין דיריכלה"

הוכחה

מתקיים:

$$\begin{aligned}S_{n}f(x)= & a_{0}^{f}+\sum_{k=1}^{n}a_{k}^{f}\cos kx+\sum_{k=1}^{n}b_{k}^{f}\sin kx\\
= & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}f(t)\cos kt\cos kx\right)dt\\
 & +\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}f(t)\sin kt\sin kx\right)dt\\
= & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right)dt
\end{aligned}$$

כל שנותר לנו להוכיח הוא $1+2\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx=D_{n}(x)$:

<u>דרך א'</u>

באינדוקציה על n.

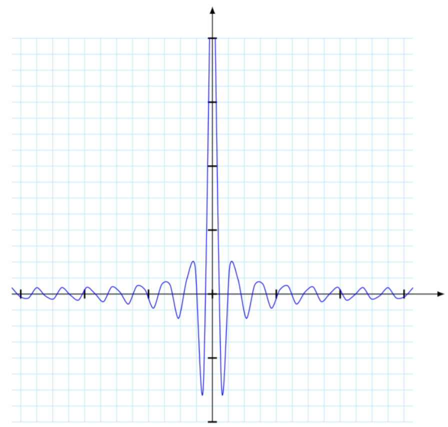
<u>דרך ב'</u>

להשתמש במשפטים מרוכבים ובעובדה כי $\cos\left(X\right)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$. ואז מתקיים:

$$1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}$$

תכונות של גרעין דיריכלה

ראשית, גרעין דיריכלה נראה כך:



למה

1. $D_n\left(-x\right)=D_n\left(x\right)$
2. $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}D_n\left(x\right)=1$
3. $f\in C_{(a,b)\text{ peice}}$ ו־$x\in\mathbb{R}$ נקודה כך ש־$[a,b]\notin x+2\pi x$ עבור שום k, אזי $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f(t)D_n(x-t)dt=0$.
4. לכל $\delta>0$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}D_n(t)dt=0$$

הוכחה

1. מיידי.
2. מתקיים:

$$a_0^f=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=1$$

ולכן נקבל כי:

$$S_nf\left(x\right)=1=\int\limits_{-\pi}^{\pi}D_n\left(x-t\right)dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}D_n\left(t\right)dt$$

3. כמו כן, נקבל כי:

$$\int_a^b f(t)D_n(x-t)dt=\int\limits_a^b\frac{f\left(t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\left(x+t\right)\right)}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(x-t\right)\right)dt$$

מכך ש־$[a,b]\notin x+2k$ נקבל כי:

$$\sin\left(\frac{1}{2}(x-t)\right)>\delta_0$$

לכל $t\in(0,b)$ ולכן נקבל כי $F(t)=\frac{f(t)}{\sin\left(\frac{1}{2}(x+t)\right)}\in C_{\text{peice}}(a,b)$.
מאידך, נוכל לכתוב בתור:

$$\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right)=\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)=$$
$$\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)+\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)$$

בסופו של דבר קיבלנו כי:

$$\int_a^b f(t)D_n(x-t)dt=$$
$$\int_a^b F(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)+\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)dt$$

בשיעור הקודם ראינו למה כי $\int\limits_a^b g(t)\cos(n+\theta)$ (וכן לגבי sin) שואף לאפס, לכל $g\in C_{\text{piece}}$ ולכל $\theta\in\mathbb{R}$.
מכך נקבל כי שני האינטגרלים הנ"ל שואפים ל־0 כאשר $n\to\infty$.

4. מסעיף 3 אנו יודעים כי $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(t)D_n(x-t)dt=0$ אם $x+2\pi k\notin[a,b]$. ולכן נובע ישירות כי עבור $[a,b]=[\delta,\pi]$ ו־$x=0$ ו־$f(t)=1$.

משפט (עיקרון הלוקליזציה)

תהיינה $f,g\in C_{piece}(-\pi,\pi)$ ונניח כי $f(x)=g(x)$ באיזושהיא סביבה של $x_0\in(-\pi,\pi)$ אזי:

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_nf(x_0)-S_ng(x_0)\right)=0$$

בפרט אם $S_nf(x_0)\to f(x_0)$, גם עבור g.

מסקנה

אם $f\in C_{piece}(-\pi,\pi)$ ו־f גזירה ברציפות בסביבת $x_0\in(-\pi,\pi)$ אזי $S_nf(x_0)\to f(x_0)$.

דוגמא

עבור $f(x)=x$, ראינו כי $f=\frac{-2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nx)$, נקבל כי הטור הזה אכן מתכנס ל־x לכל $x\in(-\pi,\pi)$.
זה לא נכון עבור $-\pi,\pi$.

הוכחה (של עיקרון הלוקליזציה)

נניח כי $f(x)=g(x)$ לכל $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$, אזי:

$$S_n f(x_0) - S_n g(x_0) =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(t)-g(t))\,D_n(x_0-t)\,dt =$$
$$\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{x_0+\delta}^{\pi}(f(t)-g(t))\,D_n(x_0-t)\,dt +}_{\in C_{\text{peice}}}$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{x_0-\delta}(f(t)-g(t))\,D_n(x_0-t)\,dt$$

ולכן כעת מתכונה 3 של גרעין דיריכלה, נקבל כי הביטוי כולו שואף ל־0.

הערה

כאשר דיברנו על התכנסות טורי פוריה, דיברנו על התכנסות בנורמת $||\cdot||_2$ ־ כלומר כי $||S_n f - f||_2 \to 0$ ב"ת בסדר הסכימה (כי בחרנו מערכת אורתוגונלית).

גם כאשר דיברנו על תנאים להתכנסות במ"ש ובהחלט, וראינו כי בתנאים מסוימים (למשל אם f גיזרה ברציפות), $||S_n f - f||_\infty \to 0$ בלתי תלויה בסדר הסכימה, בגלל התכנסות בהחלט.

לעומת זאת, כאשר נדבר על **התכנסות נקודתית**, כלומר כי $S_n f(x_0) \to f(x_0)$, דבר זה מסתמך על סדר הסכימה של S_n.

כעת, נוכל להשתמש שוב בגרעין דיריכלה, על מנת לחזק את מה שראינו לגבי התכנסות נקודתית.

משפט דיני

אם $f \in C_{\text{peice}}(-\pi,\pi)$ ו־$x_0 \in [-\pi,\pi]$. אם קיים $A \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\sup\left|\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A}{t}\right| < \infty$$

אזי $S_n f \to A$.

הערה

התנאי מתקיים אם ורק אם $\sup\limits_{t\in(0,\delta)}(*) < \infty$ עבור איזשהוא $0 < \delta$.

דוגמאות

(1) נניח כי f גזירה ב־x_0. נסמן $A = f(x_0)$. נקבל:

$$\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A}{t} = \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} + \frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{t} \to 0$$

ולכן נקבל כי $\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A}{t}$ בסביבת $t=0$ ולכן $(*)$ מתקיים. קיבלנו כי f גזירה ב־x_0 אזי $S_n f(x_0) \to f(x_0)$.

באופן כללי יותר, אם:

$$\lim_{x\to x_0^+} f\left(x_0\right)=a \qquad \lim_{x\to x_0^-} f\left(x_0\right)=b$$

ומתקיים כי:

$$\sup\left|\frac{f\left(x_0+t\right)-a}{t}\right|, \sup\left|\frac{f\left(x_0-t\right)-b}{t}\right|<\infty$$

(אם לדוגמא ל־f יש נגזרות חד צדדיות ב־x_0). נקבל כי תנאי דיני מתקיים עבור $A=\frac{a+b}{2}$.

הוכחה (של משפט דיני)

נבחין כי מתקיים:

$$S_n f\left(x_0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(s\right)D_n\left(x_0-s\right)ds \overset{t=x_0-s}{=}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f\left(x_0-t\right)D_n\left(t\right)dt$$

$$\overset{\text{מחזוריות}}{=}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x_0-t\right)D_n\left(t\right)dt$$

ראינו כי $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n\left(t\right)dt=1$ ולכן:

$$(i)\; S_n f\left(x_0\right)-A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f\left(x_0-t\right)-A\right)D_n\left(t\right)dt$$

כמו כן, ראינו כי $D_n\left(-t\right)=D_n\left(t\right)$ ואם כך:

$$(ii)\; S_n f\left(x_0\right)-A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f\left(x_0-t\right)-A\right)D_n\left(-t\right)dt$$

נחליף משתנה ל־$-t$ ונקבל:

$$S_n f\left(x_0\right)-A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f\left(x_0+t\right)-A\right)D_n\left(t\right)dt$$

נבצע ממוצע ל־(i) ו־(ii) ונקבל כי:

$$S_n f\left(x_0\right) - A = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f\left(x_0+t\right)-2A\right)D_n\left(t\right)d =$$

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\frac{\left(f\left(x_0+t\right)-2A\right)}{t}}_{\text{חסומה}}\cdot\underbrace{\frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}}_{\text{חסומה}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)dt$$

נסמן את $\frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot \frac{\left(f\left(x_0+t\right)-2A\right)}{t}$ בתור $\varphi\left(t\right)$ ונקבל:

$$S_n f\left(x_0\right) - A = d = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi\left(t\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)dt$$

$\varphi\left(t\right)$ חסומה, רציפה למקוטעין ולכן עד כדי שינוי מספר סופי של נקודות, ולכן מהלמה הטכנית נקבל כי $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi\left(t\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)dt \to 0$ - כלומר $S_n f\left(x_0\right) \to A$.

שיעור מס' 26:

יום ראשון

18.01.21

סכומי פייר

ניזכר כי דיברנו על טורי פורייה, ואמרנו כי $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^f \cos\left(kx\right) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_f^f \sin\left(kx\right)$, ואמרנו שדבר זה נכון במובן ש-$||S_n f - f||_2 \to 0$.

אבל האם זה דבר נכון באופן נקודתי? פייר הציע, במקום להתבונן בסדרת הסכומים החלקיים, להתבונן בסדרת הממוצעים.

כלומר, להתבונן ב-$\sigma_n^f = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} S_k^f$ (נזכור כי אם $a_n \to a$ אזי הסכומי צ'זארו הם $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ גם הם שואפים ל-a, אבל ההפך הינו נכון. כי $\left(-1\right)^n$ לא מתכנס, וסדרת הממוצעים כן).

אם כך, אם $S_n f\left(x\right) \to f\left(x\right)$ אזי גם $\sigma f\left(x\right) \to f\left(x\right)$.

כעת, ננסה להבין באופן מפורש יותר מהם סכומי פייר.

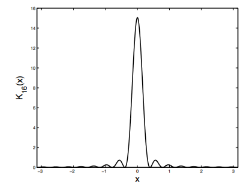
הגדרה

נגדיר:

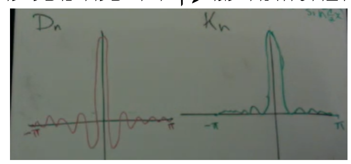
$$\begin{aligned}\sigma_n f(x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_k(x-t)dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x-t)\right)dt\\ &\equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)K_n(x-t)dt\end{aligned}$$

כאשר $K_n(x) = \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\frac{1}{2}(n+1)x}{\sin^2\frac{1}{2}x}$ נקרא גרעין פייר.

ננסה לראות סקיצה של הגרפים:



ובהשוואה לגרעין דיריכלה נוכל לראות:



מסתבר שההבדל הזה הוא מאוד משמעותי.

תכונות של גרעין פייר

(א) פונקציה סימטרית - $K_n(-x)=K_n(x)$.

(ב) $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\,dt=1$

(ג) לכל $\varepsilon>0$ מתקיים כי $\int\limits_{\varepsilon<|X|\leq\pi}K_n(t)\,dt\underset{n\to\infty}{\to}0$.

(ד) $K_n(X)\geq 0$.

הוכחה

א' וד' מיידיים.

ב' - נציב $f=1$ ונקבל:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\,dt=\sigma_n f(0)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k(0)$$

אבל ראינו כי $S_kf\leq 1$ לכל k ולכן $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k(0)=1$.

לגבי ג', נבחין כי מתקיים:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\varepsilon\leq|x|\leq\pi}K_n(x)dx&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\int\limits_{\varepsilon\leq|x|\leq\pi}\frac{\sin^2\frac{1}{2}(n+1)x}{\sin^2\frac{1}{2}x}dx\\&\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\int_{\varepsilon\leq|x|\leq\pi}\frac{dx}{\sin^2\frac{1}{2}\varepsilon}\\&\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\frac{2\pi}{\sin^2\frac{1}{2}\varepsilon}=0\end{aligned}$$

משפט פייר

לכל $f\in C_{\text{per}}(-\pi,\pi)$ מתקיים כי $||\sigma_nf-f||_\infty\to 0$ (כלומר $\sigma_nf\to f$ במ"ש ב-$[-\pi,\pi]$).

מסקנה

$\sigma_n f$ הוא פולינום טריגונומטרי ממעלה $\leq n$ ולכן משפט פייר מראה שהפולינומים הטריגונומטריים צפופים בנורמות $||\cdot||_\infty$ ב־ $C_{\text{per}}\left(-\pi,\pi\right)$ וכמו שראינו, זה מראה שהם צפופים ב־$||\cdot||_2$ ב־$C_{\text{piece}}\left(-\pi,\pi\right)$.

הוכחה

f רציפה על $[-\pi,\pi]$ ולכן רציפה במ"ש. כלומר:

$$(*)\quad \forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0:\forall|x-y|<\delta\quad |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

כיוון ש־$f\left(-\pi\right)=f\left(\pi\right)$ אזי הביטוי לעיל נכון לכל הישר הממשי, אחרי שנרחיב את f מחזורית לכל $\mathbb{R}$.
יהי $x\in\left(-\pi,\pi\right)$ ונתבונן בביטוי הבא:

$$\begin{aligned}
\left|\sigma_n f\left(x\right)-f\left(x\right)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f\left(t\right)-f\left(x\right)\right)K_n\left(x-t\right)dt\right| \\
&\overset{\text{שינוי משתנהואי זוגיות}}{=} \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f\left(s+x\right)-f\left(x\right)\right)K_n\left(s\right)ds\right| \\
&\overset{f,k\text{מחזוריות}}{=} \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}f\left(s+x\right)f\left(x\right)K_n\left(s\right)dx\right| \leq \\
&\leq \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta<|s|<\pi}(f(s+x)-f(x))K_n(-s)ds\right| + \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|s|<\delta}(f(s+x)-f(x))K_n(-s)dt\right|
\end{aligned}$$

כעת, נסיים את ההוכחה.

$$\begin{aligned}
&\leq 2\|f\|_\infty\tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{\delta<|s|<\pi}K_n(s)ds+\tfrac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}K_n(s)ds \\
&\leq 2\|f\|_\infty\tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{\delta<|s|<\pi}K_n(s)ds+\varepsilon
\end{aligned}$$

ניתן לחסום את האיבר השני עם מקסימום ההפרש של הערך המוחלט.
עבור n מספיק גדול, שאינו תלוי ב־x, הוא יהיה קטן מ־ε ובמילים אחרות, מצאנו כי קיים n ב"ת ב־x, כך שלכל $x\in\left(-\pi,\pi\right)$, מתקיים כי:

$$\left|\sigma_n f\left(x\right)-f\left(x\right)\right|\leq\varepsilon+\varepsilon$$

זה נכון לכל $\varepsilon>0$ ולכן $\sup\limits_{x\in[-\pi,\pi]}\left|f\left(x\right)-\sigma f\left(x\right)\right|\to 0$ והרי מדובר ב־$||f-\sigma_n f||_\infty$.

אבחנה

הדבר היחיד שהשתמשנו בו בהוכחה הן התכונות שרשומות למעלה.
כלומר, לא השתמשנו בכל החלק של sin וכו'.
אם כך, כל סדרת פונקציות שמקיימת את התכונה הזאת, אזי יש לה התכנסות כזאת במ"ש.
סדרת פונקציות שמקיימת תכונות אלו נקראת **יחידה מקורבת**.

אם כך, מה נכשל עבור D_n? נבחין כי $D_n \ngeq 0$ ולכן, למרות ש־$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n\left(t\right)dt = 1$, מתקיים כי $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|D_n\left(t\right)\right|dt$ שואף לאינסוף.

הערות

נוכל לשאול מדוע אנחנו משתמשים בסכומי פורייה ולא בסכומי פייר?

$\sigma_n f$ אינם סכומים חלקיים של טור, (להבדיל מ־$S_n f$, שהמקדמים שלו בלתי תלויים ב־n אלא רק ב־k).

לעומת זאת:

$$\sigma_n f(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)a_k^f\cos kx + \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)b_k^f\sin kx$$

משתנה עם n, ולכן לא מדובר בטור.

בנוסף, למרות שלסכומי פייר יש יתרונות מבחינת התכנסות במ"ש ונקודתית, נזכור כי $\sigma_n f$ הוא פולינום טריגומנטרי מדרגה $n \geq$ ואילו $S_n f$ הוא ההטלה על מרחב זה. מתכונות ההטלה, נקבל כי:

$$||S_n f - f||_2 \leq ||\sigma_n f - f||_2$$

כלומר, אם נרצה רק התכנסות בממוצע, כמו מה שנותנת ההתכנסות מהמכפלה הפנימית, כדאי להשתמש בסכומי פורייה.

מסקנה ממשפט פייר

תהי $f \in C\left[0,1\right]$ ולכן ניתן להרחיב אותה לפונקציה $f \in C_{\text{per}}\left(-\pi,\pi\right)$.

ממשפט פייר, אנחנו יודעים כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים פולינום טריגונומטרי:

$$g\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k\cos\left(kx\right) + \sum_{k=1}^{n}\beta_k\sin\left(kx\right)$$

כך ש־$\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

ניזכר כי גם $\sin$ וגם $\cos$ נוכל לפתח בתור טור טיילור, ולכן מהתכנסות הטור טיילור, אנו יודעים כי קיימים פולינום $P_{k,n}\left(x\right)$ ו־$q_{k,n}\left(x\right)$ כך ש־

$$\sup_{x\in[0,1]}|p_{k,n}(x)-\cos kx|\,,\ \sup_{x\in[0,1]}|q_{k,n}(x)-\sin kx| < \frac{\varepsilon}{2(2n+1)C}$$

ולכן נקבל מא"ש משולש:

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k p_{k,n}(x) + \sum_{k=1}^{n}\beta_k q_{k,n}(x)\right) - f(x)\right| < \varepsilon$$

אם כך, מצאנו פולינום רגיל, $P\left(x\right)$ כך ש־$||f-P||_\infty < \varepsilon$. דבר זה נכון לכל $\varepsilon > 0$

מכך עולה (משפט ווירשטרס) כי הפולינום צפופים ב־$C\left[0,1\right]$ בנורמת $||\cdot||_\infty$(כלומר לכל f קיימים פולינומים $P_n\left(x\right)$ כך ש־$P_n \to f$ במ"ש ב־$[0,1]$).

מסקנה נוספת

$\left(C\left[0,1\right],\left|\left|\cdot\right|\right|_{\infty}\right)$ הוא מרחב ספירבלי.

הוכחה

ניקח את כל הפולינומים עם מקדמים רציונליים.