<u>מסלולים קצרים ממקור יחיד</u>

בהינתן גרף מכוון עם משקלים על הצלעות, נרצה למצוא את המסלולים הכי קצרים מקודקוד ספציפי לכל שאר הקודקודים.

תכונות של מסלול קצר:

- תת-מבנה אופטימלי: מסלול קצר $(s, v_1 \cdots v_n)$ הוא גם המסלול הכי קצר לכל ה- v_i בדרך.
  הוכחה: נב"ש שלא, כלומר יש דרך קצרה יותר לאחד הקודקודים. אז ניקח את הדרך הזאת ומשם נמשיך, וזה מסלול קצר יותר.
- אי-שוויון המשולש: נגדיר $\delta(s,v)$ האורך של המסלול הקצר $s \mapsto v$. מתקיים: $\delta(s,v) \le \delta(s,u) + \delta(u,v)$.

אם יש בגרף **מעגל שלילי** – מעגל שסכום משקלי הצלעות שלילי – אז לא תמיד יהיה מסלול קצר (כי יכול להיות שככל שנמשיך במעגל, הסכום יורד. אז המסלול לא נגמר).

```
relax(e = (u,v))
  if(d(v) > d(u) + w(u,v))
    d(v) ← d(u) + w(u,v)
    π(v) ← u
```

עץ מסלולים קצרים: לכל קודקוד יש $\pi(v)$, הקודקוד הקודם במסלול הקצר $s \mapsto v$.
$\pi(s) = null$

פעולת **relax:** לכל קודקוד יש שדה $d(v)$, שהוא המרחק של המסלול שמצאנו <u>בינתיים</u>, והוא חסם עליון ל $\delta(s,v)$.
פורמלית: אם נתחיל מ: $d(s) = 0,\ d(v) = \infty \text{ for all } v \in V$
ונעשה פעולות relax על הקודקודים, תמיד יתקיים $d(v) \ge \delta(s,v)$.
הוכחה באינדוקציה על אינווריאנטה של לולאה: בהתחלה, מתקיים. נניח שמתקיים בשלב מסוים. נעשה relax. $d(v)$ יקטן אמ"מ מצאנו מסלול קצר יותר, והוא יהיה לפחות $\delta(s,v)$.

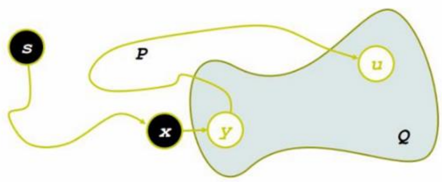
אם בשלב מסוים $d(v) = \delta(s,v)$, נאמר ש v **התכנס.**

טענה: **נניח ש $u \coloneqq \pi(v)$ התכנס. אז כשנעשה relax(u,v), גם v יתכנס.**
הוכחה: נב"ש שלא, כלומר $d(v) > \delta(s,v)$. בפעולת relax קבענו את $d(v) \leftarrow d(u) + w(u,v)$. וניזכר ש u כבר התכנס, אז באותו רגע $d(u) = \delta(s,u)$. אז $d(v) \leftarrow \delta(s,u) + w(u,v)$ כלומר $\delta(s,v) < \delta(s,u) + w(u,v)$, סתירה לכך ש $u = \pi(v)$.

<u>אלגוריתם דיקסטרה – Dijkstra's algorithm</u>:

```
dijkstra(G, s)
  for all v ∈ V:
    d(v) ← ∞
    π(v) ← null
  d(s) ← 0, Q ← s
  while(Q ≠ ∅)
    u ← Q.extractMin
    for(v ∈ N(u))
      relax(u, v)
```

```
relax(u, v)
  if(d(v) > d(u) + w(u,v))
    Q.decreaseKey(v, d(u) + w(u,v)
    π(v) ← u
```



שיטה: נשמור תור עדיפויות של הקודקודים.
נוציא אחד ונעשה relax על השכנים שלו.

הוכחת נכונות:
טענה: כל קודקוד שיצא מQ, כבר התכנס.
הוכחה: הקודקוד הראשון שיוצא זה s, והוא כבר התכנס.
נב"ש שקיימים קודקודים שיצאו בלי שהתכנסו.
יהיו: u הקודקוד שיצא ראשון מביניהם,
p המסלול הקצר $s \mapsto u$,
יהי y הקודקוד הכי מוקדם במסלול p, שעוד נמצא בQ בזמן שבו u יצא, (יכול להיות ש y=u), ויהי $x \coloneqq \pi(y)$.
מכיוון ש u הראשון שלא התכנס, ו- y הראשון שלא יצא, בהכרח x יצא והתכנס. כש x יצא, עשינו relax(x,y) אז y מתכנס.
אז $(y \ne u)$. כלומר: $d(y) =_a \delta(s,y) \le_b \delta(s,u) <_c d(u)$.
a- כי y התכנס.　　　b- כי y קודם ל-u במסלול.[1]　　　c- כי u לא התכנס.
אבל הוצאנו את הקודקודים לפי d. אז היינו צריכים להוציא את y לפני u. סתירה.

זמן הריצה תלוי ביעילות של התור עדיפויות:

	times	Binary heap	Fibonacci heap
init	1	$O(n)$	$O(n)$
extractMin	n	$O(\log n)$	$O(\log n)$
decreaseKey	m	$O(\log n)$	$O(1)$
total		$O(m\log n) = O(n^2 \log n)$	$O(m + n\log n)$

אם הגרף הוא קליקה, יש n^2 צלעות, הסיבוכיות תהיה $O(n^2)$.

[1] זו הסיבה שהאלגוריתם לא עובד עם משקלים שליליים – הטענה לא מתקיימת אם המשקל של המסלול לא מונוטוני עולה

<u>גרפים עם משקלים שליליים:</u>

אלגוריתם **בלמן-פורד – Bellman-Ford,** O(nm)
עובד עם משקלים שליליים ומגלה מעגלים שליליים.
נרוץ n-1 פעמים. נעשה relax על כל צלע. אם בפעם ה-n עדיין יש צלע שיכולה להתכנס, זה אומר שיש מעגל שלילי.
הוכחת נכונות: בכל פעם שנעשה relax לכל הצלעות, לפחות עוד צלע אחת בכל מסלול מתכנסת. (כי אם קודקוד התכנס, הrelax הבא יכנס את הקודקוד שאחריו במסלול). אם אין מעגלים שליליים בגרף, כל מסלול הוא לכל היותר n-1 צלעות. אם יש צלע שמתכנסת אחרי n-1 פעמים, זה אומר שהמסלול ארוך יותר מ n-1, כלומר יש מעגל שלילי.
בכל פעם של הלולאה הראשית עושים relax פעם אחת לכל צלע. הזמן של relax יחיד הוא קבוע. סה"כ O(m). וזה קורה n פעמים. אז כל האלגוריתם הוא O(nm).
אם הגרף הוא קליקה, יש n^2 צלעות, הסיבוכיות תהיה $O(n^3)$.

```
BF(G, s)
   for all v ∈ V: d(v) ← ∞, π(v) ← null
   d(s) ← 0
   for(n − 1 times)   O(n)
      for(e ∈ E)   O(m)
         relax(e)
   for((u, v) ∈ E)
      if(d(v) > d(u) + w(u, v))
         return error
```

נתון: גרף לא מכוון, קבוצת קודקודים $W \subseteq V$, שני קודקודים s, t. מציאת המסלול $s \mapsto t$ שעובר דרך כמה שפחות קודקודים ב-W: ניתן משקלים לצלעות: +1 לכל קודקוד מ-W שמחובר לצלע. ונמצא מסלול קצר $s \mapsto t$. המסלול הקצר ממזער את הסכום של משקלי הצלעות שעוברים בהם, והסכום הזה הוא בדיוק פעמיים מספר הקודקודים מ-W שנעבור בהם.

נתון: גרף לא מכוון, עם משקלים אי-שליליים. נרצה למצוא את המסלול **באורך זוגי** הקצר $s \mapsto t$: נייצר גרף חדש: לכל קודקוד $v \in V$ נייצר $v_{even}, v_{odd} \in V'$. לכל צלע $(u, v) \in V$ נייצר $(u_e, v_o), (u_o, v_e) \in E'$ עם אותו משקל. נריץ דיקסטרה $s_e \mapsto t_e$.
הוכחת נכונות: G' הוא דו"צ, אין צלע בתוך V_e או V_o. אז כל מסלול בתוך קבוצה יהיה זוגי. ובנינו את G' כך שאם יש בו מסלול $s_e \mapsto t_e$, אז אותו מסלול קיים גם בG ובאותו משקל.

בגרף לא מכוון, ממושקל, וקודקוד s, צלע (u, v) תיקרא **טובה** אם היא הצלע האחרונה במסלול קצר $s \mapsto v$ כלשהו. טענה: מסלול קצר אמ"מ הוא מורכב כולו מצלעות טובות. הוכחה: כיוון ראשון: נניח שמסלול הוא קצר, אז לפי תכונת תת-מסלול קצר, זה גם המסלול הקצר לכל קודקוד בדרך. כיוון שני: נניח שיש מסלול שמורכב כולו מצלעות טובות. באינדוקציה על אורך המסלול: אם n=1, זה מסלול קצר. נניח עבור n-1, נוכיח עבור n: יהי מסלול מורכב מצלעות טובות $P = (v_1 \cdots v_{n-1}, v_n)$, כלומר קיים מסלול קצר P^* שמסתיים ב (v_{n-1}, v_n). ע"פ הנ"א, המסלול $P' = (v_1 \cdots v_{n-1})$ הוא קצר ושווה במשקל לP_{n-1}, שהוא המסלול הקצר ל- v_{n-1}. אז מתקיים: $w(P) = w(P') + w(v_{n-1}, v_n) = w(P^*)$.

אלגוריתם שמוצא את כל הצלעות הטובות בגרף: נריץ אלגוריתם SSSP, ונבדוק לכל צלע האם $\delta(s, v) = \delta(s, u) + w(u, v)$.

נתון לנו $\delta(s, v)$ לכל v. אלגוריתם שבודק האם צלע מסוימת היא על **כל** מסלול קצר $s \mapsto t$: נייצר גרף G' שהוא רק הצלעות הטובות. אם הצלע לא שם – סיימנו. אם כן, נוריד את הצלע ונבדוק אם עדיין אפשר להגיע לt. O(n+m)

נתון גרף עם צלעות שליליות בלי מעגלים שליליים. אלגוריתם שמוצא מעגל באורך 0 (אם קיים): נוסיף קודקוד s עם צלע במשקל 0 לכל קודקוד. נריץ BF ונייצר גרף G' שהוא רק הצלעות שמקיימות $\delta(s, v) = \delta(s, u) + w(u, v)$. נבדוק אם קיים מעגל בG'. הוכחת נכונות: אם קיים מעגל ב G' הוא במשקל 0. (ניקח מעגל, נסכם את המשוואות של כל הקודקודים, כל הδ יצטמצמו ונקבל שסכום הצלעות הוא 0. בכיוון השני: נב"ש שיש מעגל באורך 0 בG אבל לא בG'. נסכם את המשוואות כמו מקודם, אבל הפעם עם $\leq$ לפי אי"ש המשולש, ובאחד מהם לפחות זה $<$.ונקבל שיש משקל שלילי). O(nm)

בהינתן DAG, אפשר לייעל את דיקסטרה: נעשה מיון טופולוגי ואז נעבור על הקודקודים לפי הסדר, לכל אחד נעשה relax על הצלעות. הוכחת נכונות: כי עושים relax לפי הסדר של המיון, שזה הסדר של כל מסלול. הוכחה באינדוקציה על אורך המסלול: בסיס מתקיים, נניח עבור n-1 ונוכיח עבור n: יהי P המסלול המתקבל מהאלגוריתם. 'P זה אותו מסלול בלי הקודקוד האחרון, מהנ"א הוא קצר. כלומר הקודקוד האחרון התכנס. אז כשנעשה relax על הקודקוד הבא, הוא גם יתכנס.