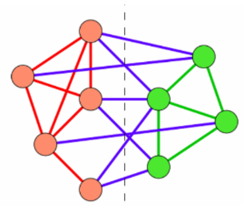
עץ פורש מינימלי

בהינתן גרף ממושקל לא מכוון, נרצה למצוא **עץ פורש** – תת גרף שמכיל את כל הקודקודים ו- n-1 צלעות. **עץ פורש מינימלי** הוא עץ פורש שיש לו משקל צלעות מינימלי.

השיטה הכללית: נניח שיש לנו קבוצה $A \subseteq E$ כך ש $G \supseteq (V, A)$ זה יער, ו- $A \subseteq T$ עבור עפ"מ T כלשהו. אם נוסיף צלע שמשמרת את התכונות האלה, באינדוקציה אחרי n-1 צעדים נקבל עץ פורש. כדי לדעת איה צלע להוסיף כל פעם, נגדיר מושג:



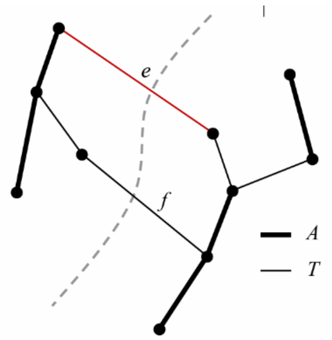
חתך $\chi = (X, Y)$ הוא חלוקה של V לקבוצות: $Y = V/X$, X.

צלע (u, v) **חוצה את החתך** אם (בה"כ) $u \in X, \quad v \in Y$.

חתך נקרא **מכבד את A** אם אין צלע בA שחוצה את החתך.

טענה: תהי $A \subseteq T$ תת קבוצה של MST כלשהו, ויהי $\chi = (X, Y)$ חתך שמכבד את A, ותהי e צלע מינימלית שחוצה את χ. (מבין הצלעות שחוצות את החתך, הצלע עם המשקל הכי קטן).

אזי, $A \cup \{e\}$ היא גם תת קבוצה של MST כלשהו.



הוכחה: יהיו A, T, e כמתואר. אם $e \notin T$, היא סוגרת מעגל בT (כי יש בT n-1 צלעות. אז כל צלע שנוסיף לה, תסגור מעגל). אז יש צלע אחרת, f, כבדה יותר מ e, שחוצה את החתך ונמצאת בT. (אם אין עוד צלע, e היא היחידה שחוצה את החתך, היא חייבת להיות בT). אז נוכל להחליף את e ו-f ולקבל עץ קל יותר. סתירה.

מסקנה: e חייבת להיות בT. נקרא לה צלע **בטוחה**.

אז אם יהיה לנו אלגוריתם שמתחיל עם קבוצה $A \subseteq T$ ומוסיפים לה בכל פעם צלע בטוחה, נקבל עפ"מ.

נתאר שני אלגוריתמים כאלה:

האלגוריתם של קרוזקל – Kruskal's algorithm:

משתמש ביוניון-פיינד כדי לשמור שתי קבוצות של הקודקודים – זה מתאר חתך. בכל שלב ניקח את הצלע הקלה שמחברת בין שתי קבוצות. ע"פ הטענה הקודמת שהוכחנו, זה מייצר MST:

```
Kruskal
  sort E by weight
  for(e = (u,v) ∈ E , by order)
    if(find(u) ≠ find(v))
      A ← e
      union(u,v)
```

סיבוכיות: ראשית נשים לב ש: $m \le \binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} \in O(n^2)$

וגם, מכיוון ש $\log n^2 = 2\log n \in O(\log n)$, $O(\log m) \in O(\log n)$.

באלגוריתם עושים 2m פעמים find, ו- n-1 פעמים union. בניתוח לשיעורין:

$O\big((m+n)\alpha(n)\big) \in O(m \cdot \alpha(n))$.

מיון של הצלעות זה $O(m\log n)$.

האלגוריתם של פרים – Prim's algorithm:

נשתמש בתור עדיפויות כדי לשמור את הקודקודים שעוד לא בעץ, ועץ parent-pointer בשביל הMST עצמו. (כל קודקוד מצביע על אבא שלו).

בתור, $k(v)$ זה המשקל של הצלע הכי קלה שמחברת את v לעץ. (אם אין צלע, המשקל ∞). הצלע הראשונה בתור היא צלע בעלת משקל מינימלי שחוצה את החתך – צלע בטוחה. בכל פעם שמוסיפים קודקוד, נעדכן את הk של השכנים שלו.

```
Prim
  Q ← V
    for all v ∈ V: π(v) ← null, k(v) ← ∞
    choose one v ∈ V: k(v) ← 0
    while(Q ≠ ∅)
      u ← Q.extractMin
      for(v ∈ N(u))
        if(v ∈ Q and w(u,v) < k(v))
          π(v) ← u, k(v) ← w(u,v)
```

זמן ריצה של תור קדימויות:

	times	Binary heap	Fibonacci heap
init	1	$O(n)$	$O(n)$
extractMin	n	$O(\log n)$	$O(\log n)$
decreaseKey	m	$O(\log n)$	$O(1)$
total		$O(m\log n) = O(n^2\log n)$	$O(m + n\log n)$

טענה: **e_0, הצלע הקלה בגרף, תהייה בוודאות חלק מה-MST.**

הוכחה: תהי $e_0 = (u, v)$ הצלע הקלה, ונב"ש שהיא לא בMST. כלומר יש מסלול עוקף $v \mapsto u$. כלומר e_0 סוגרת מעגל בגרף. יהי χ חתך שe_0 חוצה. אז יש צלע f שגם חוצה את אותו חתך. ניקח את e_0 במקום f ונקבל MST קל יותר.

בהינתן גרף לא מכוון, עם משקלים על הקודקודים. נרצה למצוא עץ פורש שממזער את: $\sum_v d_T(v)\cdot w(v)$.
(המשקל של הקודקוד כפול הדרגה שלו בעץ).
נגדיר משקלים על הצלעות: $f\big(e=(u,v)\big) \coloneqq w(u)+w(v)$, ונמצא עפ"מ. מתקיים:

$$\sum_{(u,v)\in E_T} f(u,v) = \sum_{(u,v)\in E_T} w(u)+w(v) = \sum_{v\in V} w(v)\cdot d_T(v)$$

נתבונן בv כלשהו. כמה פעמים ספרנו את w(v)? בשני המקרים, פעם אחת לכל צלע של T שמתחברת לv

בהינתן גרף קשיר, לא מכוון, עם משקלים אי-שליליים על הצלעות. אלגוריתם שמוצא לפחות צלע אחת מכל מעגל, עם משקל מינימלי: ניקח את העץ פורש **המקסימלי** T, ונחזיר את $E' = E/E_T$. הוכחת נכונות: בגלל שT הוא עץ, לכל מעגל יש לפחות צלע אחת שלא בT. מינימליות – נב"ש שE' לא מינימלית, וקיים E^* קל יותר. $E\backslash E^*$ הוא יער שאפשר להרחיב לעץ פורש T'. נשים לב ש $w(T') \geq w(E\backslash E^*)$. אז $w(T')+w(E^*) \geq w(E\backslash E^*)+w(E^*) = w(E)$, וגם $w(E') = w(E\backslash E_T)$. אז $w(E) = w(E')+w(T)$. אז $w(T')+w(E^*) \geq w(T)+w(E')$. וגם, $w(T) \geq w(T')$ אז $w(E^*) > w(E')$. סתירה.

לגרף קשיר, לא מכוון, עם משקלים אי-שליליים כך שאין 2 צלעות באותו משקל, יש MST יחיד. הוכחה: נב"ש שיש 2 MST, T_1, T_2. שונים אז יש צלעות בT_1 שלא נמצאות בT_2. (בה"כ). ניקח את e, הקלה מהן. מכיוון שT_2 הוא עץ, אם נוסיף לו את e זה סוגר מעגל, ויש צלע f במעגל שלא נמצאת בT_1. מתקיים $w(e) < w(f)$ כי אחרת היינו לוקחים את f ל-T_1. אז ניקח את e במקום f ונקבל עץ מינימלי יותר. סתירה.