שאלה 1

סעיף א (10 נקודות): יהי G גרף. הוכיחו כי $\chi(G) = \max_B \chi(G)$, כאשר המקסימיזציה היא מעל הבלוקים של G.

בין כל שני בלוקים מחבר לכל היותר קודקוד אחד, וגרף הבלוקים הוא חסר מעגלים. כלומר הצביעה של כל בלוק לא משפיעה על הבלוקים האחרים (למעט הקביעה שהקודקוד המחבר צריך להיות בצבע מסוים, שהיא חסרת משמעות כי אין משמעות לשמות של הצבעים).

סעיף ב (8 נקודות): יהי G גרף קשיר עם לפחות שני קודקודים, בעל התכונה שכל צלע שלו שוכנת בלכל היותר מעגל אחד. הוכיחו כי כל בלוק של G הינו צלע יחידה או מעגל ללא מיתרים.

באופן כללי, כל בלוק שהוא לא צלע יחידה, חייב להיות מעגל. כי במסלול או עץ פשוט, כל קודקוד הוא קודקוד חתך. נב"ש שיש בלוק שהוא מעגל עם מיתרים. אז כל מיתר שוכן על לפחות 2 מעגלים (שני החלקים של המעגל הגדול). סתירה.

סעיף ג (7 נקודות): יהי G גרף קשיר עם לפחות שני קודקודים, בעל התכונה שכל צלע שלו שוכנת בלכל היותר מעגל אחד. יהי G גרף קשיר עם לפחות שני קודקודים, בעל התכונה שכל צלע שלו שוכנת בלכל היותר מעגל אחד. הוכיחו כי $\chi(G) \leq 3$.

לפי סעיף ב, ב-G כל בלוק הוא צלע יחידה או מעגל פשוט. שניהם 3-צביעים. אז כל בלוק B מקיים $\chi(B) \leq 3$. אז לפי סעיף א, $\chi(G) \leq 3$.

שאלה 2

סעיף א (10 נקודות): בעיית *max weight matching*:

קלט: גרף (לא מכוון) G, עם משקלים על הצלעות: $w: E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

מטרה: למצוא שידוך $M \subseteq E(G)$ שממקסם את הסכום:

$$\sum_{e \in E(M)} w(e)$$

נתון אלגוריתם:

1. נאתחל $M \coloneqq \emptyset$.
2. כל עוד $E(G) \neq \emptyset$, נבצע:
   a. תהי uv הצלע במשקל מקסימום.
   b. נגדיר $M \coloneqq M \cup \{uv\}$.
   c. נגדיר $G \coloneqq G - \{xy \in E(G): \{x,y\} \cap \{u,v\} \neq \emptyset\}$. נוריד את הצלע uv וכל הצלעות שסמוכות אליה.
3. נחזיר את M.

הוכיחו שהאלגוריתם מהווה 2-קירוב לבעיית *max weight matching*.

הנחיה: התחילו עם $\sum_{e \in M \setminus OPT} w(e) \leq ?? \sum_{e \in OPT \setminus M} w(e)$, כאשר OPT הוא שידוך מקסימום ו-M הוא השידוך המתקבל מהאלגוריתם.

נראה ש- $\sum_{e \in OPT \setminus M} w(e) \leq 2 \sum_{e \in M \setminus OPT} w(e)$:

כל צלע שלא לקחנו ל-M, זה בגלל שלקחנו צלע סמוכה אליה שהייתה כבדה יותר.

וכל צלע ב- $OPT \setminus M$, לא סמוכה לאף צלע אחרת ב-OPT. אז כל צלע ב- $M \setminus OPT$, מחקה לכל היותר 2 צלעות ב- $OPT \setminus M$ ששתיהן קלות יותר ממנה. כי אחרת היינו לוקחים לפחות אחת מהן. אז:

$$2 \sum_{e \in M \setminus OPT} w(e) \geq \sum_{e \in OPT \setminus M} w(e)$$

כלומר:

$$w(M) = \sum_{e \in M \setminus OPT} w(e) + \sum_{e \in M \cap OPT} w(e) \geq \frac{1}{2} \sum_{e \in OPT \setminus M} w(e) + \sum_{e \in M \cap OPT} w(e) \geq \frac{\sum_{e \in OPT \setminus M} w(e) + \sum_{e \in M \cap OPT} w(e)}{2} = \frac{w(OPT)}{2}$$

כנדרש.

סעיף ב (15 נקודות): יהי $\mathcal{A}$ אלגוריתם 3-מקרב לבעיית *min weight perfect matching*, בגרף לא מכוון עם משקלים חיוביים על הצלעות. הבעיה הוזכרה בנושא אלגוריתם *Christofides* לבעיית *MTSP*. נתבונן באלגוריתם הבא:

1. יהי T, MST של G.
2. תהי O קבוצת הקודקודים של T בעלי דרגה אי זוגית.
3. יהי M שידוך מושלם במשקל מינימום ב- $G[O]$.
4. נוסיף את M ל-T, נקרא לזה $\mathcal{T}$.
5. נמצא הילוך אוילר $\mathcal{E}$ ב- $\mathcal{T}$.
6. נבנה הילוך TSP מ-$\mathcal{E}$, ע"י קיצורי דרך.

נניח שבשלב 3 של האלגוריתם נפעיל את אלגוריתם $\mathcal{A}$ כדי לקבל את M. קבעו והוכיחו את יחס הקירוב של האלגוריתם המתקבל.

ניזכר שבגרף קשיר, מספר הקודקודים בעלי דרגה אי זוגית הוא זוגי. יהי P מסלול TSP אופטימלי ב-G, ויהי T' סיור TSP אופטימלי על קודקודי O, שהתקבל ע"י קיצורי דרך ב-P. בגלל אי שוויון המשולש, מתקיים $cost(T') \leq cost(P)$.

ובגלל שכל מסלול TSP באורך זוגי הוא איחוד של שני שידוכים מושלמים זרים בצלעות, ומכיוון ש-M הוא 3-קירוב לשידוך במשקל מינימום, נקבל:

$$cost(M) \leq 3 \cdot \frac{cost(T')}{2} \leq \frac{3}{2} cost(P)$$

ובגלל שכל מסלול TSP אופטימלי הוא עץ פורש, נקבל:

$$cost(T) \leq cost(P)$$

נסמן L את המסלול המתקבל מהאלגוריתם. מתקיים:

$$cost(L) \leq^{א} cost(\mathcal{E}) =^{ב} cost(\mathcal{T}) \leq^{ג} cost(T) + cost(M) \leq cost(P) + \frac{3}{2} cost(P) \leq \frac{5}{2} cost(P)$$

א. כי בגלל אי-שוויון המשולש כל קיצור דרך לא מעלה את המשקל.
ב. כי ההילוך עובר על כל צלע פעם אחת.
ג. כי בנינו את $\mathcal{T}$ ע"י איחוד T ו-M.

האלגוריתם הוא 2.5-מקרב.

שאלה 3

בעיית *Uncapicitated Facility Location* מנוסחת:

- V היא קבוצת לקוחות,
- F היא קבוצת מיקומים אפשריים לשירותים (*facilities*),
- פונקציית מחיר $f: F \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, מסומנת $f_1, \dots, f_{|F|}$, מגדירה את המחיר של פתיחת שירות במיקום $i \in F$.
- פונקציית מחיר $c: V \times F \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, מסומנת ע"י c_{ij} עבור $i \in V, j \in F$, מגדירה את המחיר של חיבור לקוח i למיקום (פתוח) j.

הערה: המילה *Uncapicitated* משמעותה ללא קיבולת, כי לכל מקום שירות אין קיבולת מוגדרת.

הגדרה: מיפוי $f: X \to Y$ ייקרא *exhaustive* (ממוצה) אם כל איבר ב-X ממופה לאיזשהו Y.

מחיר פתרון פיזבילי (*feasible*): בהינתן: $S \subseteq F$ קבוצת מקומות אפשריים לפתיחת *facilities*,

ומיפוי $\sigma_S: V \to S$ שהוא *exhaustive*, כלומר שהוא מגדיר לכל לקוח $v \in V$ שהוא יקבל שירות ב- $\sigma_S(v) \in S \subseteq F$,

העלות של S עם σ_S מוגדרת:

$$cost(S, \sigma_S) \coloneqq \sum_{j \in S} f_j + \sum_{j \in S} c_{i\ \sigma_S(i)}$$

הסכום השמאלי נקרא מחיר הפתיחה של S, והסכום הימני נקרא מחיר החיבור של S ו-σ_S.

גרסת ההכרעה של UFL:

$$UFL \coloneqq \{(V, F, f, c, \ell) : \exists S \subseteq F \text{ and an exhaustive } \sigma_S: V \to S \text{ s.t. } cost(S, \sigma_S) \leq \ell \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

כלומר, השאלה היא האם קיימת קבוצת מיקומים לשירותים כך שעלות הפתיחה והחיבור תהיה לכל היותר ℓ.

סעיף א (10 נקודות): הוכיחו ש- $SC \leq_p UFL$, כאשר SC היא בעיית ההכרעה של *min set cover* בהיפר-גרף.

הנחיה: בהינתן בעיית SC (H,k), נחליט מבין $V(H), E(H)$ מי יהיה הלקוחות ומי יהיה מיקומי השירותים. בנוסף, נגדיר $\ell \coloneqq k + |V(H)|$.

$V(H)$ יהיו מיקומי הלקוחות, $E(H)$ יהיו מיקומי השירותים. המחיר של פתיחת מיקום שירות יהיה 1.

המחיר של חיבור לקוח עם מיקום שירות יהיה 1 אם הקודקוד היה חלק מהצלע, ו-2 אחרת.

ככה, העלות ℓ תהיה בדיוק מספר מקומות השירות, ועוד אחד לכל קודקוד (אם הפיתרון תקין ולכל קודקוד בחרנו צלע שמכסה אותו).

המיפוי σ_S יקבע לאיזה מהצלעות שמכסות את $v \in V(H)$, נשלח את v.

הרדוקציה מקבלת בעיה מסוג SC ומחזירה בעיה מסוג UFL, לפי הבנייה.

זמן הריצה הוא פולינומי, כי מבצעים מספר קבוע של פעולות לכל צלע או קודקוד.

נוכיח את נכונות הרדוקציה, $(H,k) \in SC \iff (V,F,f,c,\ell) \in UFL$:

אם $(H,k) \in SC$, זה אומר שיש קבוצה של (לכל היותר) k צלעות ב-H שמכסה את כל $V(H)$.

המקומות שירות (צלעות) האלה יהיו אלה שנפתח. על כל אחד נשלם 1. המיפוי ישלח כל לקוח (קודקוד) למיקום שירות פתוח שמכיל אותו. בגלל שיש צלע שמכסה כל קודקוד, יש לכל לקוח מיקום שירות שעלות החיבור אליו היא 1. ובסה"כ נקבל שעלות הפיתרון היא (לכל היותר) $k + |V(H)|$.

אם $(V,F,f,c,\ell) \in UFL$ עבור $\ell \coloneqq k + |V(H)|$, זה אומר שיש פיתרון שהמחיר שלו הוא לכל היותר ℓ.

וזה אומר שפתחנו k מקומות שירות, וכל לקוח התחבר במחיר סה"כ $|V(H)|$. מאיך שהגדרנו את עלויות החיבור, זה אומר שכל לקוח התחבר בעלות 1 לשירות שייצג צלע שמכילה את הקודקוד. וזה מהווה כיסוי.

כנדרש.

סעיף ב (15 נקודות): יהי G גרף.

- קבוצה $D \subseteq V(G)$ תיקרא שלטת ב-G אם לכל קודקוד שלא בקבוצה, יש שכן בקבוצה.
- קבוצה $X \subseteq V(G)$ תיקרא קשירה אם $G[X]$ קשיר (תת הגרף של G המושרה מקודקודי X).
- נסמן $\gamma(G)$ את גודל הקבוצה הקשירה השלטת הקטנה ביותר.
- נגדיר $L \coloneqq \{(G,k): \gamma(G) \leq k\}$ את שפת הגרפים שיש בהם קבוצה קשירה שלטת בגודל לכל היותר k.
- נגדיר $VC \coloneqq \{(G,k): \tau(G) \leq k\}$ את שפת הגרפים שיש בהם כיסוי בקודקודים בגודל לכל היותר k (קבוצת קודקודים שנוגעת בכל צלע).

הוכיחו $VC \leq_p L$, ללא שפות ביניים.

הנחיה: בהינתן גרף לבעיית VC, התחילו בלהגדיר קודקודים חדשים מהצורה v_{xy}, לכל צלע $xy \in E(G)$. איך ולמי נחבר אותם?

בהינתן (G,k) עבור בעיית VC, נגדיר (G',k') עבור בעיית L.

לכל $xy \in E(G)$ נגדיר v_{xy}. אנחנו רוצים שאם צלע הייתה מכוסה ב-G, הקודקוד שלה יהיה נשלט ב-G'.

כל קודקוד חדש נחבר לקודקודים המקוריים שלו. כלומר נגדיר צלעות xv_{xy}, yv_{xy} לכל xy.

נגדיר: $V(G') \coloneqq V(G) \cup \{v_{xy}: xy \in E(G)\}$. כל הקודקודים של G, ועוד הקודקודים של הצלעות.

נגדיר $E(G') \coloneqq E(G) \cup \{xv_{xy}, yv_{xy}: xy \in E(G)\}$. כל הצלעות של G, והצלעות החדשות.

נשים לב שכל "קודקוד של צלע" מחובר רק לשני קודקודים מקוריים. אף v_{xy} לא מחובר ל- v_{wz} אחר.

אז קבוצת קודקודים קשירה תהיה חייבת להיות מהקודקודים המקוריים, והיא תהיה שלטת אם היא הייתה כיסוי.

נגדיר: $f\big((G,k)\big) \coloneqq (G',k)$.

הרדוקציה מקבלת בעיה מסוג VC ומחזירה בעיה מסוג L, לפי הבנייה (שתי הבעיות מקבלות גרף).

זמן הריצה הוא פולינומי, כי מבצעים מספר קבוע של פעולות לכל צלע או קודקוד.

נוכיח את נכונות הרדוקציה, $(G,k) \in VC \Leftrightarrow (G',k) \in L$:

אם יש קבוצה בגודל k ב-G שמכסה את כל הצלעות, אז אותה קבוצה ב-G' תהיה סמוכה לכל הקודקודים של הצלעות, וגם לכל הקודקודים שהם שכנים מקוריים של הקבוצה. והיא תהיה באותו גודל.

אם יש קבוצה בגודל k ב-G' שקשירה ושלטת על כל הגרף, אז היא חייבת להיות מקודקודים מקוריים. כי הקודקודים של הצלעות מחוברים רק לקודקודים המקוריים שלהם. אז כדי לחבר קודקודים של צלעות צריך קודקודים מקוריים, וכל קודקוד מקורי מכסה את הקודקודים של הצלעות שלו, אז מיותר לקחת את הקודקודים של הצלעות. והיא שלטת, כלומר כל קודקוד מקורי הוא שכן שלה. אז היא כיסוי ב-G.

כנדרש.

שאלה 4

בגרסת האופטימיזציה של UFL, צריך למצוא $S \subseteq F$ ומיפוי ממוצה $\sigma_S: V \to S$ שממזער את $cost(S, \sigma_S)$.

סעיף א (3 נקודות): השלימו את סימני השאלה ב-IP כך שהיא תהווה IP עבור בעיית UFL שהוגדרה בשאלה 3. הגדירו את המשמעות של הכניסות בווקטור y, והמטריצה x. הסבירו כל אילוץ ב-IP. בנוסף, הגדירו רילקסציה ל-LP.

$$\begin{aligned}
&\min\left(\sum_{?} ? \cdot y_j + \sum_{?} x_{ij} \cdot ? \right) \\
&\text{subject to} \\
&\qquad x_{ij} \le ? \quad \forall ? \in ?, \forall ? \in ? \\
&\qquad \sum_{?} x_{ij} \ge ? \quad \forall ? \in ? \\
&\qquad x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall ? \in ?, \forall ? \in ? \\
&\qquad y_j \in \{0,1\} \quad \forall ? \in ?
\end{aligned}$$

הווקטור y מייצג את הבחירה איזה מקומות לפתוח. $y_j := 1$ אם נפתח את $j \in F$, ואחרת 0.

המטריצה x מייצגת את החיבור של כל לקוח למיקום. $x_{ij} := 1$ אם לקוח $i \in V$ יחובר למיקום-$j \in F$, ו-0 אחרת.

$$\min\left(\sum_{j \in F} f_j \cdot y_j + \sum_{i \in V, j \in F} x_{ij} \cdot c_{ij} \right)$$

נסכום כל f_j אם פתחנו את המיקום. וכל חיבור "פעיל" ב-x, נכפול בעלות החיבור.

תחת האילוצים:

$$(\text{א}), \qquad x_{ij} \le y_j, \qquad \forall i \in V, \forall j \in F$$

$$(\text{ב}), \qquad \sum_j x_{ij} \ge 1, \qquad \forall i \in V$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall i \in V, \forall j \in F$$

$$y_j \in \{0,1\}, \qquad \forall j \in F$$

א. כי אי אפשר לחבר לקוח למיקום שלא ייפתח.
ב. כי כל לקוח צריך לפחות מיקום אחד שהוא מחובר אליו.

הרילקסציה: $0 \le x_{ij} \le 1, 0 \le y_j \le 1$.

אלגוריתם מקרב לבעיית האופטימיזציה של UFL:

1. נפתור את ה-LP בצורה אופטימלית ויהיו y^*, x^* הפתרונות האופטימליים בשברים.
2. נעבור על כל מיקומי השירותים. נפתח מיקום $j \in F$ בהסתברות y_i^*, באופן בת"ל מהשאר.
   נסמן $O \subseteq F$ את קבוצת המיקומים שפתחנו בשלב הזה.
3. לכל לקוח $i \in V$, אם מחיר החיבור שלו (מסומן c) לאיבר כלשהו של O הוא לכל היותר r_i אז נחבר את i לאיבר של O שהכי קרוב אליו.

אחרת, לא נחבר את i לאף מיקום והאלגוריתם נכשל. r_i מוגדר:

$$r_i \coloneqq 2\sum_{j\in F} x_{ij}^* c_{ij}$$

סעיף ב: עבור לקוח $i \in V$, נסמן $\mathcal{E}_i$ את המאורע שלקוח i מקושר למיקום כלשהו ע"י האלגוריתם. המטרה של סעיף זה היא להוכיח שמתקיים:

$$\mathbb{P}\{\mathcal{E}_i\} \geq 1 - 1/\sqrt{e}$$

בהינתן $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ולקוח $i \in V$, נגדיר $\mathcal{B}_i(r) \coloneqq \{j \in F: c_{ij} \leq r\}$ להיות "הכדור בעל רדיוס r סביב i", ביחס לפונקציה c.

סעיף ב1 (3 נקודות): הוכיחו כי

$$\mathbb{P}\{\mathcal{E}_i\} \geq 1 - \exp\left(-\sum_{j\in\mathcal{B}_i(r_i)} x_{ij}^*\right)$$

$$\mathbb{P}\{i\ is\ assigned\} = 1 - \mathbb{P}\{i\ is\ not\ assigned\} = 1 - \prod_{j\in\mathcal{B}_i(r_i)} \left(1 - y_j^*\right) \geq 1 - \prod_{j\in\mathcal{B}_i(r_i)} \exp\left(-y_j^*\right)$$
$$= 1 - \exp\left(\sum_{j\in\mathcal{B}_i(r_i)} y_j^*\right) \geq^{\text{א}} 1 - \exp\left(\sum_{j\in\mathcal{B}_i(r_i)} x_{ij}^*\right)$$

א. $x_{ij} \leq y_j,\ \forall i \in V, \forall j \in F$, לפי הגדרת ה-$LP$.

סעיף ב2 (2 נקודות): הוכיחו כי $\sum_{j\notin\mathcal{B}_i(r_i)} x_{ij}^* \leq \frac{1}{2}$.

נשים לב:

$$\sum_{j\notin\mathcal{B}_i(r_i)} x_{ij}^* = \frac{r_i}{r_i}\sum_{j\notin\mathcal{B}_i(r_i)} x_{ij}^* \leq^{\text{א}} \frac{1}{r_i}\sum_{j\notin\mathcal{B}_i(r_i)} x_{ij}^* c_{ij} \leq^{\text{ב}} \frac{1}{r_i}\sum_{j\in F} x_{ij}^* c_{ij} = \frac{\frac{1}{2}r_i}{r_i} = \frac{1}{2}$$

א. בהגדרה, $c_{ij} \geq r_i$ לכל $j \notin \mathcal{B}_i(r_i)$.
ב. כי $c_{ij}, x_{ij} \geq 0$ לכל i, j. אז: $\sum_{j\in\mathcal{B}_i(r_i)} x_{ij}^* c_{ij} \geq 0$

סעיף ב3 (2 נקודות): הוכיחו כי $\mathbb{P}\{\mathcal{E}_i\} \geq 1 - 1/\sqrt{e}$.

מכיוון שמהגדרת ה-LP, מתקיים: $\sum_{j\in F} x_{ij}^* \geq \frac{1}{2}$, נקבל ש- $\sum_{j\in\mathcal{B}_i(r_i)} x_{ij}^* \geq \frac{1}{2}$. ביחד עם מה שהראינו למעלה, נקבל:

$$\mathbb{P}\{i\ is\ assigned\} \geq 1 - \exp(-1/2)$$

כנדרש.

סעיף ג (4 נקודות): יהיו (S, σ_S) הפלט של האלגוריתם. אלה מהווים תת-קבוצה אקראית של F ומיפוי אקראי $S \to V$. נשים לב שהמיפוי לא חייב להיות ממצה, כי לא בהכרח כל הלקוחות קיבלו שיוך. הוכיחו כי:

$$\mathbb{E}\{cost(S, \sigma_S) \mid \sigma_S\ is\ exhaustive\} \leq 2OPT_f \leq 2OPT$$

כאשר OPT_f זה עלות הפיתרון האופטימלי של ה-LP ו-OPT זה העלות של הפיתרון האופטימלי ה-IP.

הנחיה: מחיר הפיתרון מורכב משני חלקים: מחיר הפתיחה ומחיר החיבור. נתייחס לכל סכום בנפרד. בשביל מחיר החיבור, נשתמש ב-r_i.

מתקיים:

$$\mathbb{E}\{cost(S, \sigma_S) \mid \sigma_S\ is\ exhaustive\} = \mathbb{E}\{cost\ of\ opening | \sigma_S\ is\ exhaustive\} + \mathbb{E}\{cost\ of\ connecting | \sigma_S\ is\ exhaustive\} =$$

נשים לב שמחיר הפתיחות לא תלוי בשאלה האם σ_S ממצה.

$$= \mathbb{E}\{cost\ of\ opening\} + \mathbb{E}\{cost\ of\ connecting | \sigma_S\ is\ exhaustive\}$$

ונשים לב ש:

$$\mathbb{E}\{cost\ of\ opening\} = \sum_{j\in F} f_j \cdot y_j$$

$$\mathbb{E}\{cost\ of\ connecting | \sigma_S\ is\ exhaustive\} \le \sum_{i\in V} \mathbb{P}\{assigning\ i\} \cdot r_i \le \sum_{i\in V} r_i = \sum_{i\in V} 2 \sum_{j\in F} x_{ij}^* c_{ij}$$

בסה"כ,

$$\mathbb{E}\{cost(S, \sigma_S)\ |\ \sigma_S\ is\ exhaustive\} \le 2OPT_f$$

.