תרגיל 1

סעיף א:

ניזכר במשפט מנגר: בכל גרף עבור $A,B\subseteq V(G)$ קבוצות לא ריקות, מתקיים: $\kappa_G(A,B)=\rho_G(A,B)$.

יהי G גרף 3-קשיר. בפרט, זה אומר ש- $\delta(G)\geq 3$. (כי אחרת יש קודקוד עם 2 שכנים בלבד, ואם נוריד אותם הגרף לא קשיר). וזה אומר שיש בו לפחות 4 קודקודים.

איך נראה K_4-subdivision? זה 4 קודקודים, שבין כל שני קודקודים יש מסלול שלא עובר דרך שאר קודקודים.

G הוא 3-קשיר כלומר לכל $x,y\in V(G)$ מתקיים $\kappa_G(x,y)\geq 3$. אז לפי משפט מנגר, $\rho_G(A,B)\geq 3$. בין כל שני קודקודים יש לפחות 3 מסלולים זרים בקודקודים.

ניקח 4 קודקודים שרירותיים מהגרף – נגיד (w,x,y,x). בין כל שניים יש לפחות 3 מסלולים זרים בקודקודים, כלומר בין כל שניים (בה"כ w,x) יש מסלול אחד לפחות שלא משתמש בשניים האחרים (y,z).

כנדרש.

סעיף ב:

G הוא תת-גרף של עצמו, אז אם הוא $\chi(G)$-color-critical, סיימנו. נוכל להניח ש-G לא $\chi(G)$-color-critical.

נוכל להניח ש-G הוא לא K_1, כי הוא *color-critical*.

אם אין ב-G אף תת-גרף שהוא $\chi(G)$-color-critical, זה אומר שלכל תת-גרף $G'\subseteq G$, קיים תת-גרף-ממש $G''\subset G'$ שמקיים $\chi(G'')=\chi(G')$.

כלומר, קיימת צלע או קודקוד שאפשר להוריד, ומספר הצביעה לא משתנה. אם באיזשהו שלב הגענו לתת-גרף שהוא $\chi(G)$-color-critical, זה תת-גרף של G. אז נוכל להניח שאף פעם לא מגיעים לגרף כזה. אבל בכל שלב מורידים צלע או קודקוד, אז מתישהו נגיע לגרף K_1, שהוא *color-critical*.

נפרמל את התהליך שעשינו:

1. אם G הוא *color-critical*, סיימנו.
2. אחרת, קיים $G'\subset G$ שמקיים $\chi(G')=\chi(G)$. נגדיר $G:=G'$.

סעיף ג:

יהי G גרף שהוא *k-color-critical*, ותהי קבוצה $S\subseteq V(G)$ שהיא מפריד בקודקודים. נב"ש ש- $G[S]\cong K_{|S|}$.

יהיו $C_1,\dots,C_\ell$ רכיבי הקשירות של $G-S$. מההנחה ש-S מפרידה, יש לפחות 2 רכיבי קשירות כאלה.

מההנחה ש-G הוא *color-critical*, מתקיים $\chi(G[V(C_i)\cup S])<\chi(G)$ לכל $C_i\in\{C_1,\dots,C_\ell\}$.

נצבע את S (כל קודקוד בצבע אחר), ונצבע כל רכיב קשירות לפי הצביעה כך ש-$G[V(C_i)\cup S]$ צבוע ב-$\chi(G[V(C_i)\cup S])$ צבעים.

מכיוון שכל קודקוד ב-S צבוע בצבע אחר, הצביעות של רכיבי הקשירות לא משפיעות אחת על השנייה. (נוכל לבצע החלפת צבעים).

כלומר מצאנו צביעה של כל הגרף בפחות מ-$\chi(G)$ צבעים, סתירה.

סעיף ד:

נוכיח את הטענה באינדוקציה על n, מספר הקודקודים בגרף.

כל גרף שמקיים $\chi(G)\geq 4$ חייב להיות עם לפחות 4 קודקודים. אם יש לו בדיוק 4 קודקודים, הוא בעצמו K_4.

אז הבסיס $n=4$ מתקיים.

יהי גרף G על $n>4$ קודקודים, ונניח שלכל גרף G' על $i\in[n-1]$ קודקודים מתקיים שאם $\chi(G')\geq 4$, אז G' מכיל K_4-subdivision.

נניח ש- $\chi(G)\geq 4$. לפי סעיף א, אם הגרף 3-קשיר, אז הוא מכיל K_4-subdivision. אז נוכל להניח ש- $\kappa(G)\leq 2$.

לפי סעיף ב, G מכילה תת-גרף G' שהוא $\chi(G)$-color-critical. נתבונן בגרף הזה. בפרט, מתקיים $\chi(G')\geq 4$.

אם $G'\subset G$, אז לפי הנ"א, G' מכיל K_4-subdivision. אז נוכל להניח ש- $G'=G$.

כל גרף שהוא *color-critical* חייב להיות קשיר, כי אחרת, אחד הרכיבים שלו C מקיים $\chi(C) = \chi(G)$.

אם $\kappa(G) = 1$, יש קודקוד חתך, u. לפי סעיף ג, בגרף שהוא *color-critical*, קבוצה מפרידה בקודקודים לא יכולה להיות קליקה. סתירה.

אז נוכל להניח $\kappa(G) = 2$. כלומר קיימת קבוצה $S \coloneqq \{u, v\} \subset V(G)$ מפרידה. לפי סעיף ג, הצלע uv לא קיימת.

יהיו $C_1, \dots C_\ell$ רכיבי הקשירות של $G - S$. קיים רכיב אחד לפחות C_i שמקיים $\chi(H_i) \geq 4$, כאשר:

$$H_i \coloneqq (C_i \cup \{u, v\}, \qquad E_G(C_i) \cup E_G(C_i, \{u, v\}) \cup \{uv\})$$

כלומר, שאם ניקח את התת-גרף $G[V(C_i) \cup S]$ ונוסיף את הצלע uv, מספר הצביעה יהיה לפחות 4. למה? כי אחרת, זה קטן מ-4 לכל רכיב קשירות,

ואז לפי הטענה מסעיף ג נוכל למצוא צביעה על G בפחות מ-4 צבעים.

אז לפי הנ"א, מכיוון ש- $v(H_i) < n$, יש בו K_4-subdivision. אם ה-*subdivision* הזה לא מכיל את uv, הוא קיים גם ב-G.

אם הוא כן מכיל את uv, נוכל להשתמש במסלול $v \rightsquigarrow u$ דרך רכיב קשירות אחר שהוא לא C_i. (כל רכיב קשירות מחובר גם ל-u וגם ל-v, כי אחרת, היה אפשר להפריד אותו ע"י הורדת רק אחד מהקודקודים).

כנדרש.

תרגיל 2

סעיף א: אלגוריתם אקראי ל-*max-cut*:

נגדיר סדר שרירותי של הקודקודים. לכל קודקוד, נשים אותו ב-A או B באופן מקרי ואחיד.

סעיף ב: אלגוריתם אקראי ל- *max-k-cut*:

נגדיר סדר שרירותי של הקודקודים. לכל קודקוד ניתן צבע $i \in [k]$ באופן מקרי ואחיד. מחלקות הצביעה הן החלוקה.

נוכיח שתוחלת הקירוב היא $1 - 1/k$: לכל צלע uv, ההסתברות ששני הקודקודים בקבוצה שונה היא $1 - 1/k$.

נגדיר לכל צלע אינדיקטור X_e למאורע ששני הקודקודים שלה בקבוצה שונה. אז $\mathbb{P}[X_e = 1] = 1 - 1/k$.

נגדיר $X \coloneqq \sum_{e \in E(G)} X_e$ ונקבל:

$$\mathbb{E}[X] = \sum\nolimits_{e \in E(G)} \mathbb{E}[X_e] = e(G) \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

ואז, בגלל ש- $OPT \leq e(G)$, תוחלת הקירוב היא לפחות:

$$e(G) \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right) \geq OPT\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

כנדרש.

סעיף ג1:

בנקודת הזמן שבה בוחרים קבוצה לקודקוד $v_j \in V(G)$, כאשר כבר מיקמנו את $v_1, \dots v_{j-1}$, בקבוצות $V_1, \dots, V_{j-1}$ בהתאמה (נשים לב שיכול להיות ש-$V_k = V_\ell$), במקום לבחור $i \in [k]$ שרירותי, נבחר את ה-i שממקסם את $\mathbb{E}[X | v_j \in V_i]$. כי מתקיים:

$$\mathbb{E}[X | v_1, \dots v_{j-1}\ placed] = \sum_{i \in [k]} \mathbb{E}[X | v_1, \dots v_{j-1}\ placed\ and\ v_j \in V_i] \cdot \mathbb{P}[v_j \in V_i | v_1, \dots v_{j-1}\ placed]$$
$$= \sum_{i \in [k]} \mathbb{E}[X | v_1, \dots v_{j-1}\ placed\ and\ v_j \in V_i] \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \sum_{i \in [k]} \mathbb{E}[X | v_1, \dots v_{j-1}\ placed\ and\ v_j \in V_i]$$

אז אחד מה- $\mathbb{E}[X | v_1, \dots v_{j-1}\ placed\ and\ v_j \in V_i]$ חייב להיות לפחות $\mathbb{E}[X | v_1, \dots v_{j-1}\ placed]$. כלומר יש בחירה שמגדילה את התוחלת.

סעיף ג2: נגדיר סדר שרירותי של הקודקודים. לכל קודקוד $v \in V(G)$ ניתן צבע $i \in [k]$, לפי המחלקה שיש לה כמה שפחות שכנים של v.

סעיף ד: אלגוריתם אקראי ל- *max-hyper-cut*:

בדומה לאלגוריתם ל- *max-k-cut*, נעבור על הקודקודים וכל אחד נשים בקבוצה אקראית מתוך $[k]$.

מכיוון שבכל צלע יש k קודקודים, $\tilde{e}_H(V_1, \dots, V_k)$ זה מספר הצלעות שיש להם קודקוד אחד בכל קבוצה.

אנחנו בעצם דורשים שעבור צלע, כל קודקוד יהיה בקבוצה אחרת. מספר הדרכים לבחור קבוצה מתוך $[k]$ עבור k קודקודים היא k^k.

מספר הדרכים לבחור קבוצה שונה לכל קודקוד היא $k!$. (k קבוצות אפשריות לראשון, $k-1$ לשני, וכו).

אז עבור צלע כלשהי, ההסתברות שכל הקודקודים בקבוצות שונות היא $\frac{k!}{k^k}$. נגדיר לכל צלע אינדיקטור למאורע שזה קורה, כלומר $\mathbb{P}[X_e = 1] = \frac{k!}{k^k}$.

אז התוחלת של $X \coloneqq \sum_{e \in E(H)} X_e$, מספר הצלעות שחוצות את $V_1, \dots, V_k$:

$$\mathbb{E}[X] = \sum\nolimits_{e \in E(H)} \frac{k!}{k^k} = e(H)\frac{k!}{k^k}$$

ומתקיים $OPT \leq e(H)$, אז:

$$e(H)\frac{k!}{k^k} \geq OPT\frac{k!}{k^k}$$

כנדרש.

תרגיל 3

סעיף א: רדוקציה פולינומית היא פונקציה שמקיימת:

1. מבנה: הפונקציה מקבלת מופע של בעיה מסוג L_1 (כלומר, שאלה האם $x \in L_1$) ומחזירה מופע של בעיה מסוג L_2.
2. זמן: הפונקציה ניתנת לחישוב בזמן פולינומי.
3. נכונות: מתקיים $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$.

סעיף ב: נב"ש שלא. יש 2 אפשרויות:

נגדיר $F = x = y$. אז t, u, v כולם חייבים לקבל T. ואז הפסוקית האחרונה לא *NAE*.

נגדיר $T = x = y$. אז t, u, v כולם חייבים לקבל F. ואז הפסוקית האחרונה לא מסופקת.

סעיף ג:

נוכיח NAE-3-CNF-SAT $\leq_p$ POS-NAE-3-CNF-SAT ע"י רדוקציה:

לכל משתנה x_i נייצר 2 משתנים חדשים: y_i, z_i. הרעיון הוא ש-y_i מייצג מופעים חיוביים ו-z_i מייצג מופעים שליליים.

הבעיה היא שאנחנו צריכים דרך להבטיח ש- $y_i = \bar{z}_i$.

לפי סעיף ב, אם יש לנו פסוק מהצורה:

$$(y_i \vee z_i \vee t_i) \wedge (y_i \vee z_i \vee u_i) \wedge (y_i \vee z_i \vee v_i) \wedge (t_i \vee u_i \vee v_i)$$

אז בכל השמה *NAE* מספקת, יתקיים $y_i \neq z_i$.

אז לכל פסוקית C ב-φ נייצר גאדג'ט: כל ליטרל x_i נחליף ב-y_i, כל ליטרל $\bar{x}_i$ נחליף ב-z_i. ולכל משתנה x_i נוסיף פסוקיות כמו לעיל.

נוכיח שהפונקציה היא רדוקציה פולינומית:

מבנה: הפונקציה מקבלת פסוק *3-CNF* ומחזירה פסוק *3-CNF*.

זמן: הפונקציה מבצעת מספר קבוע של פעולות לכל משתנה ולכל פסוקית.

נכונות: אם יש השמה NAE מספקת ל-φ, אז ההשמה המקבילה $(y_i = x_i, z_i = \bar{x}_i)$ תהיה NAE מספקת עבור $f(\varphi)$. כי כל פסוקית שמקבילה לפסוקית מקורית תהיה מסופקת, והרביעיות החדשות תמיד מסופקות (פשוט נגדיר $t_i = u_i = v_i = T$).

אם יש השמה NAE מספקת ל-$f(\varphi)$, זה אומר שכל $y_i \neq z_i$ (בגלל הרביעיות). וזה אומר שכל הפסוקיות שמקבילות לפסוקית מקורית, מסופקות לפי ההשמה המקבילה $y_i = x_i, z_i = \bar{x}_i$.

כנדרש.

סעיף ד:

נוכיח $\text{HAM} \leq_p \text{K-LINK}$ ע"י רדוקציה:

נבחר קודקוד שרירותי $v \in V(G)$, ונייצר 3 קודקודים חדשים x, y, z לא מופיעים ב-$V(G)$. נגדיר:

$$f(G) \coloneqq (G', v(G) + 2)$$

כאשר:

$$G' \coloneqq (V(G) \cup \{x, y, z\}, \qquad E(G) \cup \{xv\} \cup \{yz\} \cup \{yw: w \in N_G(v)\})$$

כלומר, נחבר את v ל-x, נחבר את y ל-z, ונחבר את y לכל השכנים של v.

נוכיח שהפונקציה היא רדוקציה פולינומית:

מבנה: הפונקציה מקבלת גרף ומחזירה זוג של גרף ומספר שלם.

זמן: הפונקציה מבצעת מספר קבוע של פעולות לכל קודקוד.

נכונות: אם הגרף המילטוני, אז ב-G' יש מסלול באורך $v(G) - 1$ מ-v לאחד השכנים של v (נקרא לו u). אז ב-G', יש מסלול באורך $v(G) + 2$:

$$x \to v \rightsquigarrow u \to y \to z$$

אם קיים ב-G' מסלול באורך $v(G) + 2$, המסלול חייב להיות $x \rightsquigarrow z$ (כי אין ב-G מסלול באורך כזה). וכל מסלול $x \rightsquigarrow z$ באורך $v(G) + 2$ מכיל בתוכו מסלול $u \rightsquigarrow v$ באורך $v(G) - 1$ (עבור $u \in N_G(v)$ כלשהו). ובגלל ש- $u \in N_G(v)$, יש מעגל המילטוני בגרף.

כנדרש.

תרגיל 4:

סעיף א:

בעיית *min-cost-sc*: בהינתן היפרגרף עם משקלים $w(e)$ על הצלעות, נרצה למצוא קבוצת צלעות שמכסה את כל הקודקודים, במינימום משקל.

ניסוח *IP*: נרצה למזער את:

$$\sum_{e \in E(H)} w(e) \cdot x_e$$

תחת ההגבלות:

$$\forall v \in V(H): \sum_{e: v \in e} x_e \geq 1, \qquad \forall e \in E(H): \ x_e \in \{0,1\}$$

מעבר ל-*LP*: $\forall e \in E(H): \ x_e \in [0,1]$.

סעיף ב:

$c(T_1)$ זה סכום משקלים של הצלעות שבחרנו בשלב 2. נשים לב ש:

$$\sum_{e\in E(H)} p_e \cdot c(e) = \sum_{e\in E(H)} \mathbb{P}[e\in T_1]\cdot c(e) = \mathbb{E}\left[\sum_{e\in T_1} c(e)\right] = \mathbb{E}[c(T_1)]$$

אז:

$$\mathbb{E}[c(T_1)] = \sum_{e\in E(H)} \min\{1,\ln(v(H))\}\cdot x_e^*\cdot c(e) \le \sum_{e\in E(H)} \min\{1,\ln(v(H))\}\cdot x_e^*\cdot c(e) \le \sum_{e\in E(H)} \ln(v(H))\cdot x_e^*\cdot c(e)$$
$$= \ln(v(H))\sum_{e\in E(H)} x_e^*\cdot c(e) = \ln(v(H))\,OPT_f$$

סעיף ג:

$c(T_2)$ זה סכום המשקלים של הצלעות שהוספנו בשלב 3. לכל קודקוד שלא מכוסה, הוספנו את הצלע הכי קלה שמכילה את הקודקוד.

$$\mathbb{E}[c(T_2)] = \sum_{v\in V(H)} \mathbb{P}\left[v\notin\cup_{e\in T_1} e\right]\cdot c(e_v)$$

נחשב את $\mathbb{P}\left[v\notin\cup_{e\in T_1} e\right]$:

$$\mathbb{P}\left[v\notin\cup_{e\in T_1} e\right] = \prod_{e:v\in e}(1-p_e) \le \prod_{e:v\in e}\exp(-p_e) = \exp\left(-\sum_{e:v\in e} p_e\right) \le \exp\left(-\sum_{e:v\in e}\ln(v(H))\cdot x_e^*\right)$$
$$= \exp\left(-\ln(v(H))\underbrace{\sum_{e:v\in e} x_e^*}_{\ge 1}\right) \le \exp(-\ln(v(H))) = \frac{1}{v(H)}$$

אז:

$$\mathbb{E}[c(T_2)] \le \frac{1}{v(H)}\sum_{v\in V(H)} c(e_v)$$

כנדרש.

סעיף ד: עבור קודקוד $v\in V(H)$, מתקיים:

$$OPT_f \ge \sum_{e:v\in e} c(e)x_e^* \ge \sum_{e:v\in e} c(e_v)x_e^* = c(e_v)\underbrace{\sum_{e:v\in e} x_e^*}_{\ge 1} \ge c(e_v)$$

סעיף ה: מתקיים:

$$\mathbb{E}[c(T_1)+c(T_2)] \le \ln(v(H))\,OPT_f + \frac{1}{v(H)}\sum_{v\in V(H)} c(e_v) \le \ln(v(H))\,OPT_f + \frac{1}{v(H)}\sum_{v\in V(H)} OPT_f$$
$$= \ln(v(H))\,OPT_f + \frac{OPT_f}{v(H)}\sum_{v\in V(H)} 1 = \ln(v(H))\,OPT_f + \frac{OPT_f}{v(H)}v(H) = \ln(v(H))\,OPT_f + OPT_f$$
$$= OPT_f(\ln(v(H))+1)$$

כנדרש.