# 9: Graph Colorings

נזכיר: $\chi(G)$ הוא המספר הכרומטי של $G$ (מספר הצבעים המינימום שצריך כדי שתהיה $k$-צביעה תקינה), ו- $\Delta(G)$ הוא הדרגה המקסימום בגרף.

**אלגוריתם צביעה חמדן**

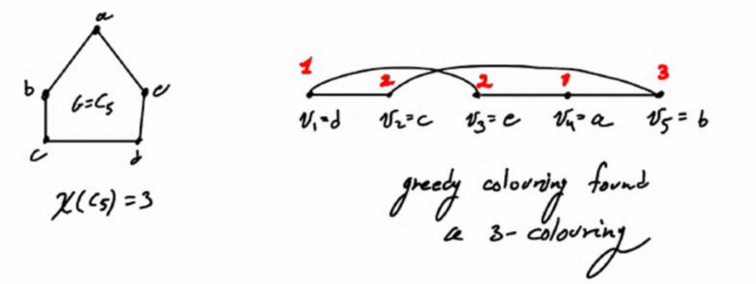
<u>קלט</u>: גרף $G$, וסידור כלשהו של קודקודי הגרף: $v_1, v_2, \dots, n_n$.    <u>פלט</u>: צביעה חוקית של קודקודי הגרף.

נעבור על כל הקודקודים לפי הסדר הנתון.

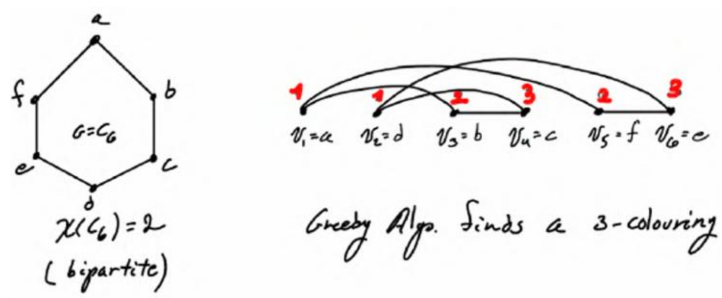
לכל $v_i$, ניתן לו את המספר הנמוך ביותר שאפשרי (כלומר נעבור על כל השכנים שלו, ונראה איזה צבעים כבר בשימוש).

קל לראות שהצביעה תקינה, כי לכל קודקוד נותנים צבע שונה מהשכנים שלו.

לדוגמה:




אבל עבור הגרף:




האלגוריתם הזה יעזור לנו להוכיח את הטענה הבאה:

$$\forall G, \qquad \chi(G) \le \Delta(G) + 1$$

רעיון ההוכחה: נסתכל על הקודקוד בעל דרגה $\Delta(G)$. השתמשנו בלכל היותר $\Delta(G)$ צבעים בשביל השכנים שלו, אז בשבילו נצטרך רק עוד צבע אחד.

יש גרפים שעבורם מתקיים $\chi(G) = \Delta(G) + 1$. לדוגמה מעגל אי-זוגי, $\chi = 3, \Delta = 2$. או גרף שלם: $\chi(K_r) = r,\ \ \Delta(K_r) = r - 1$.

**משפט ברוקס – *Brook's Theorem***

יהי $G$ גרף קשיר, שהוא לא גרף שלם או מעגל אי-זוגי. אזי, $\chi(G) \le \Delta(G)$.

נשים לב שזה רחוק מאוד מחסם אופטימלי: יהי $n = 2k$ עבור $k \in \mathbb{N}$ כלשהו. אזי, $\Delta(K_{n,n}) = k$ אבל $\chi(K_{n,n}) = 2$.

**הוכחה**

נוכל להניח ש $\Delta(G) \ge 3$. למה?

אם $\Delta(G) \le 2$, אז העובדה ש-$G$ קשיר ולא מעגל אי-זוגי מכריחה אותו להיות מעגל זוגי או מסלול פשוט. בשניהם מתקיים $\chi(G) \le \Delta(G)$.

נבחין בין 2 מקרים משלימים:

קיים קודקוד שיש לו דרגה קטנה ממש מהדרגה המקסימום: $\exists v \in V(G)\ s.t\ \deg_G(v) < \Delta(G)$.

לא קיים, כלומר $G$ הוא $\Delta(G)$-רגולרי. תזכורת – גרף הוא $k$-רגולרי אם מתקיים $\deg(v) = k$ לכל $v \in V(G)$.

**במקרה הראשון:**

קיים בגרף עץ פורש $T$, שמושרש ב-$v$ (פשוט כי הגרף קשיר. זה לא אומר שהגרף כולו עץ. זה רק עץ פורש, תת-גרף).

נגדיר סידור של הקודקודים לפי *post-order*: כך שאחד העלים ראשון, ו-$v$ אחרון. בסידור הזה, לכל קודקוד (חוץ מ-$v$) יש את אחד משכניו אחריו בסידור.

אם נפעיל את האלגוריתם החמדן על הסידור הזה, נקבל $\Delta(G)$-צביעה. למה?

לכל הקודקודים (כולל $v$) יש לכל היותר $\Delta(G)-1$ שכנים לפניהם. כי לכל אחד יש לכל היותר $\Delta(G)$ שכנים, ואחד מהם מופיע אחריו.

ול-$v$ יש לכל היותר $\Delta(G)-1$ שכנים, וכולם לפניו.

**במקרה השני:**

אם אין קודקוד שיש לו פחות שכנים מ-$\Delta(G)$, הטיעון לא עובד עבור השורש (כל השאר כן מתקיים).

נבחן את הקשירות של הגרף:

אם $\kappa(G)=1$, זה אומר שיש קודקוד חתך:


וכזכור, הגרף הוא $\Delta(G)$-רגולרי. נפריד בין חלקי הגרף:


מתקיים: $\deg_{G_1}(v), \deg_{G_2}(v) < \Delta(G)$. (כי הוא היה בעל דרגה $\Delta(G)$, ועכשיו הוא מחובר רק לחלק).

כל שאר הקודקודים עדיין מחוברים לכל השכנים שלהם: $\forall x\in V(G_1): \deg_{G_1}(x)=\Delta(G),\ \ \forall y\in V(G_2): \deg_{G_2}(y)=\Delta(G)$.

עכשיו, בכל חלק, יש לנו קודקוד בעל דרגה קטנה ממש מ- $\Delta(G)$. אז אנחנו **במקרה הראשון** עבור כל חלק.

לכל צד נמצא עץ פורש ונבצע את הצביעה. נקבל שתי צביעות: $\psi_1,\psi_2$. שכל אחת מהן משתמשת ב- $\Delta(G)$ צבעים.

אם $\psi_1(v)=\psi_2(v)$, סיימנו. גם אם לא, נבין שאין משמעות ל"שמות" (או המספרים) של הצבעים – העיקר זה שיש חלוקה.

אז נוכל לבצע החלפות כך ש- $\psi_1(v)=\psi_2(v)$. נקבע את הצביעה לפי $\psi_1$. נגדיר:

$$A \coloneqq \{x\in V(G_2): \psi_2(x)=\psi_2(v)\}, \qquad B \coloneqq \{x\in V(G_2): \psi_2(x)=\psi_1(v)\}$$

כלומר, $A$ זאת מחלקת השקילות של $v$ ב-$G_2$, ו-$B$ הם הקודקודים שיש להם את הצבע שאנחנו רוצים בשביל $v$. נחליף בין הצבעים שלהם.

אז אם יש קודקוד חתך, מצאנו צביעה ב- $\Delta(G)$ צבעים. אז נוכל להניח שאין קודקוד חתך, כלומר $\kappa(G)\ge 2$.

**סיכום ביניים:** הגרף $G$ מקיים: $\kappa(G)\ge 2$, הוא $\Delta(G)$-רגולרי, $\Delta(G)\ge 3$, הוא לא מעגל אי-זוגי, והוא לא הגרף השלם.

אם היינו יכולים למצוא 3 קודקודים $x, y, z$ כך ש:

$$xy, xz\in E(G), \qquad yz\notin E(G), \qquad G-\{y,z\}\ is\ connected$$

אז נוכל להגדיר סידור של הקודקודים כך:

יהי $T$ העץ הפורש של $G-\{y,z\}$, מושרש ב-$x$. נסדר את הקודקודים לפי העץ כמו שעשינו קודם.

נשים בהתחלה את $y, z$. אנחנו יודעים שיש להם צלע ל-$x$. (יכול להיות שיש צלעות בין $y$ או $z$ לקודקוד פנימי).

נפעיל את האלגוריתם החמדן על הסידור הזה. נקבל: $\psi(y)=\psi(z)=1$, כי אין ביניהם צלע.

לכל קודקוד אחר בעץ (חוץ מ-$x$), יש שכן אחריו בסידור. אז יש לכל היותר $\Delta(G)-1$ קודקודים לפני, אז נצטרך לכל היותר $\Delta(G)-1$ צבעים.

ל-$x$ יש $\Delta(G)$ קודקודים לפניו. אבל לשניים מהם $(y, z)$ יש את אותו הצבע. אז יש לנו צבע "פנוי" מתוך ה-$\Delta(G)$ צבעים.

נותר להראות שאכן יש 3 קודקודים כאלה.

**טענה:** יהיו $3\le k\in\mathbb{N}$, גרף $G$ $k$-רגולרי ו-2-קשיר, לא מלא. אזי קיימים 3 קודקודים $x, y, z$ כך ש:

$$xy, xz\in E(G), \qquad yz\notin E(G), \qquad G-\{y,z\}\ is\ connected$$

**הוכחה:** ראשית, יש 3 קודקודים כי הוא $k$-רגולרי עם $k \geq 3$.

עכשיו, נניח שקיים קודקוד $v$ כך ש $\kappa(G-v)=1$. כלומר הוא לא קודקוד חתך, אבל אם נוריד אותו, אז יהיו בגרף קודקודי חתך.

נתבונן בגרף הבלוקים של $G-v$ (אפשר לחשב עם $DFS$).

יהיו בו לפחות 2 בלוקים שהם עלים. כל קודקודי החתך שיש ב $G-v$, הם לא קודקודי חתך ב-$G$ (כי $\kappa(G) \geq 2$).

מה יכול לגרום לכך שב-$G$ אין קודקודי חתך? זה קורה רק אם $v$ היה שכן של קודקוד פנימי בכל אחד מהבלוקים שהם עלה.

ניזכר שיש לפחות 2 בלוקים שהם עלים. אז יש לפחות 2 קודקודים פנימיים כאלה. נקרא להם $y, z$. אין ביניהם צלע (כי הם בבלוקים נפרדים).
ו-$v$ יהיה ה-$x$ שלנו.

ובנוסף, $y, z$ הם קודקודים פנימיים בבלוקים. אז בוודאי $G-\{y,z\}$ קשיר. בסה"כ, קיבלנו 3 קודקודים $x, y, z$ כמו שרצינו.

נניח כעת ש $\kappa(G-v) \geq 2$ לכל $v \in V(G)$. מכיוון ש-$G$ לא שלם, קיימים 3 קודקודים $x, y, z$ כך ש:

$$xy, xz \in E(G), \qquad yz \notin E(G)$$

צריך להראות רק ש $\kappa(G-y-z) \geq 1$. ואנחנו יודעים ש $\kappa(G-y) \geq 2$ (מההנחה שאין קודקודי חתך), אז אכן מתקיים.

**סיכום ההוכחה:**

צ"ל: יהי $G$ גרף קשיר, שהוא לא גרף שלם או מעגל אי-זוגי. אזי, $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

זה מתקיים עבור $\Delta(G) \leq 2$, אז נניח ש $\Delta(G) \geq 3$.

במקרה ש $\exists v \in V(G)\ s.t \deg_G(v) < \Delta(G)$, תיארנו סידור של הקודקודים שמאפשר צביעה לפי האלגוריתם.

במקרה המשלים, ראינו שאם יש קודקוד חתך, אז אפשר למצוא את אותה צביעה (בשני חלקים ואז לאחד).

אז נניח שאין קודקודי חתך.

אמרנו שאם נמצא 3 קודקודים: $xy, xz \in E(G),\ \ yz \notin E(G),\ \ G-\{y,z\}\ is\ connected$, אז נוכל לתאר סידור בשביל הצביעה.

ראינו שאם יש קודקודים שאם נסיר אותם הגרף יהיה 1-קשיר, נוכל למצוא 3 קודקודים מתאימים (דרך גרף הבלוקים).

ואם לכל קודקוד שנסיר הגרף עדיין 2-קשיר, אז באופן מיידי יש 3 קודקודים מתאימים.

בסה"כ, עברנו על כל המקרים ותמיד הצלחנו להראות סידור שמאפשר צביעה לפי האלגוריתם.

### *Vizing's Theorem*

**צביעת צלעות** ב-$k$ צבעים היא פונקציה $\varphi: E(G) \to [k]$. צביעה בצלעות תיקרא *proper* (תקינה) אם צלעות שחולקות קודקוד צבועות בצבעים שונים.

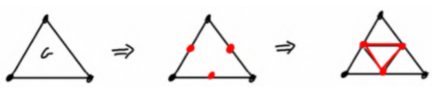
גרף $G$ ייקרא ***k-edge-colorable*** אם יש לו צביעה תקינה ב-$k$ צבעים.

**האינדקס הכרומטי –** ***chromatic index*** של $G$ מסומן $\chi'(G)$, הוא ה- $k \in \mathbb{N}$ הקטן ביותר שעבורו $G$ הוא *k-edge-colorable*.

לא להתבלבל עם $\chi(G)$, **המספר הכרומטי –** ***chromatic number*** של $G$. ה-$k$ הקטן ביותר עבור צביעת **קודקודים.**

**גרף הצלעות –** ***line graph*** של $G$ מסומן $L(G)$, הוא גרף שקודקודיו הם $E(G)$. יש צלע בין שני קודקודים ב-$L(G)$ אם הם היו צלעות סמוכות ב-$G$.

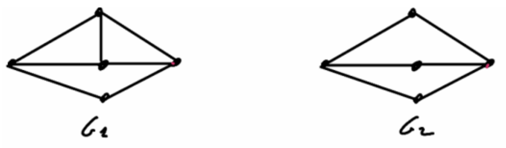
אפשר לדמיין את זה ככה: נשים קודקוד על כל צלע, ואם הצלעות סמוכות – נחבר אותן:



יוצא ש $L(K_3) = K_3$. עוד דוגמה:

נשים לב ש: $L(K_{1,r}) = K_r$. הגרף $K_{1,3}$ נקרא *claw graph*.

נביט בגרפים $G_1, G_2$:



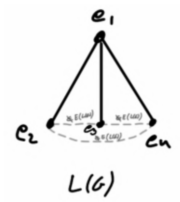

הם מכילים הרבה עותקים של $K_{1,3}$ בתור תתי-גרפים. אבל, רק ב-$G_2$ העותק מופיע בתור **תת-גרף-מושרה** (*induced subgraph*).

תת-גרף-מושרה הוא תת-גרף שמתקבל ע"י לקיחת תת-קבוצה של קודקודי $G$, ואת **כל** הצלעות שיש בקודקודים האלו ב-$G$.

**נשים לב:** לכל $G$, $L(G)$ לא מכיל *claw* מושרה. למה?

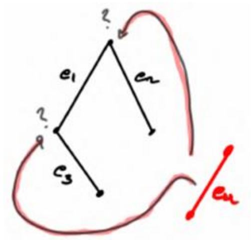
נב"ש שקיים $L(G)$ שיש בו $K_{1,3}$ מושרה.

כלומר, יש קודקודים: $e_1, e_2, e_3, e_4$. יש צלעות: $e_1e_2,\ e_1e_3,\ e_1e_4$. **ואין** את הצלעות $e_2e_3,\ e_2e_4,\ e_3e_4$:




איך $G$ נראה? הצלעות $e_1, e_2$ סמוכות, נחבר אותן בקודקוד $v_1$. גם $e_3$ סמוכה ל-$e_1$, אבל לא ל-$e_2$. נחבר אותה ל-$e_1$ עם קודקוד $v_2$.

כרגע, $e_1$ סמוכה ל-$e_2$ מצד אחד ול- $e_3$ מהצד השני. גם $e_4$ סמוכה ל-$e_1$, אבל לא ל- $e_2$ או $e_3$. אין איפה לחבר אותה:




סתירה.

אבחנות:

**המספר הכרומטי** $\chi(L(G))$ של גרף הצלעות, שווה לאינדקס הכרומטי $\chi'(G)$ של הגרף המקורי: $\boldsymbol{\chi(L(G)) = \chi'(G)}$.

כי פשוט המרנו את המילה "קודקוד" במילה "צלע".

האינדקס הכרומטי גדול מהדרגה המקסימום: $\boldsymbol{\chi'(G) \geq \Delta(G)}$.

כי אם לקודקוד יש $\Delta$ שכנים, יש לו (מן הסתם) $\Delta$ צלעות, אז זה $\Delta$ צלעות שחולקות קודקוד וכל אחת צריכה צבע אחר.

הדרגה המקסימום של גרף הצלעות חסומה ב: $\boldsymbol{\Delta(L(G)) \leq 2 \cdot (\Delta(G) - 1) = 2\Delta - 2}$.

למה? נתבונן בצלע כלשהי $uv \in E(G)$. הדרגה שלה ב-$L(G)$ היא: $\deg_{L(G)}(uv) = \deg_G(u) + \deg_G(v) - 2$.

כי כל צלע שמחוברת ל-$u$ או $v$ תהיה מחוברת ל-$uv$ בגרף הצלעות. ומורידים 2 כי ספרנו את הצלע $uv$ עצמה פעמיים, פעם אחת מ-$u$ ופעם אחת מ-$v$.

אז הדרגה המקסימום של קודקוד ב-$L(G)$ היא $2(\Delta(G) - 1) = 2\Delta(G) - 2$.

לכן, אם $L(G)$ לא שלם או מעגל אי-זוגי, אז לפי ברוקס נקבל $\chi(L(G)) \leq \Delta(L(G)) \leq 2(\Delta(G) - 1)$. ובסה"כ:

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq 2(\Delta(G) - 1)$$

### *A Theorem of König*

אם $G$ גרף דו-צדדי, אז $\chi'(G) = \Delta(G)$.

**הוכחה:** ניזכר, שבגרף שהוא $k$-רגולרי (לכל קודקוד יש דרגה $k$) יש שידוך מושלם (הוכחה בתרגול).

אם נסיר את הצלעות של שידוך מושלם מגרף דו-צדדי $k$-רגולרי, נקבל גרף דו"צ $(k-1)$-רגולרי.

למה? כי השידוך הוא בדיוק צלע אחת לכל קודקוד. אז הגרף שנשאר הוא $(k-1)$-רגולרי.

הגרף היה דו"צ כלומר אין לו מעגל אי זוגי. והסרת צלעות לא תייצר מעגל חדש, ובפרט לא מעגל אי זוגי. אז הגרף המתקבל הוא גם דו"צ.

אז גם בגרף החדש יש שידוך מושלם. אז נוכל בעצם להוריד שידוכים אחד אחרי השני, ולכל שידוך נגדיר צבע.

נבצע את זה $\Delta(G)$ פעמים, וכל פעם נצטרך צבע חדש כי כל צלע חולקת קודקוד עם צלע אחרת מכל שאר השידוכים.

זה מוכיח את הטענה עבור גרף דו-צדדי $k$-רגולרי.

כדי להוכיח עבור גרף דו"צ שאינו $k$-רגולרי, מספיק להוכיח שכל גרף דו"צ $G$ הוא תת-גרף של גרף $G^S$ שהוא דו"צ $\Delta(G)$-רגולרי.

ואז, נקבל $\Delta(G)$-צביעה של $G^S$ כמו שתיארנו, וזה נותן לנו $\Delta(G)$-צביעה על $G$.

נתון ש- $G=(A\cup B,E)$ הוא דו"צ. אם $|A|\neq|B|$, נוסיף קודקודים לקטן יותר עד שהם שווים בגודלם. נקרא לגרף הזה $G'$. עכשיו, נבצע:

כל עוד $G'$ הוא **לא** $\Delta(G)$-רגולרי, אז לשני הצדדים יש קודקוד $v$ שמקיים $\deg_{G'}(v)<\Delta(G)$. למה? ראשית, בוודאות קיים בגרף.

אם יש רק בצד אחד, אז אם נספור את הצלעות מכל צד נקבל מספרים שונים. ולא הגיוני שיוצאות יותר צלעות מצד אחד מאשר מה שמגיע לצד השני.

אז נבחר $x, y$ כאלה ונוסיף את הצלע $xy$ ל- $G'$.

ככה, בכל שלב הגרף נשאר דו"צ, והוא בסוף יהיה $\Delta(G)$-רגולרי.

זה מוכיח שכל גרף דו"צ שאינו $k$-רגולרי, הוא תת-גרף של גרף $G^S$ שהוא דו"צ $\Delta(G)$-רגולרי. כנדרש.

**משפט ויזינג**

לכל $G$ מתקיים $\chi'(G)\le\Delta(G)+1$.

נובע מכך (יחד עם החסם התחתון הטריוויאלי $\Delta(G)\le\chi'(G)$ שראינו), ש- $\Delta(G)\le\chi'(G)\le\Delta(G)+1$ לכל גרף $G$.

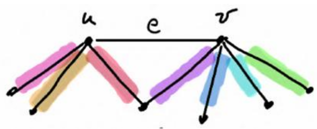
בהינתן גרף לא דו"צ, בעיית ההכרעה האם $\chi'(G)$ שווה $\Delta(G)$ או $\Delta(G)+1$, היא $NPC$.

**רעיון ההוכחה:**

הוכחה באינדוקציה על מספר הצלעות, $e(G)$. אפשר להניח $e(G)>0$. נבחר $e:=uv\in E(G)$, ונגדיר $G':=G-e$.

מהנ"א, $\chi'(G')\le\Delta(G')+1$. כלומר קיימת בו $(\Delta(G)+1)$-צביעה לצלעות, נקרא לה $\varphi$. וגם, $\Delta(G')\le\Delta(G)$ באופן טריוויאלי.

עכשיו, נחזיר את $uv$ ונצבע אותה. הבעיה שלנו היא שאם הצלעות שיוצאות מ-$u$ ו-$v$ משתמשות ב-$\Delta(G)+1$ צבעים, אז נצטרך להוסיף עוד צבע.




אבל אנחנו יודעים שיש $\Delta(G)+1$ צבעים, והדרגה המקסימום היא $\Delta(G)$.

כלומר, כל קודקוד $x\in V(G')=V(G)$ **רואה** $\deg_{G'}(x)\le\Delta(G')\le\Delta(G)$ צבעים ב-$\varphi$ (קודקוד רואה את הצלעות שמחוברות אליו).

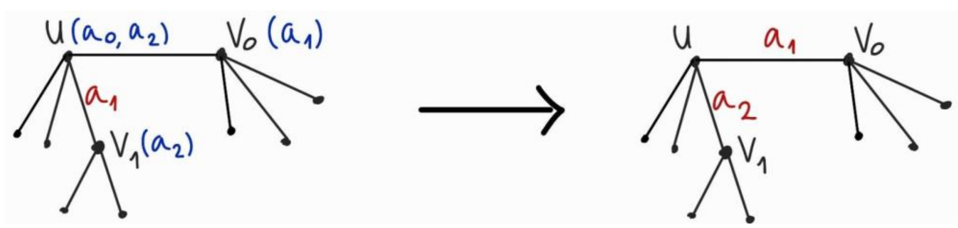
אזי, לכל $x\in V(G)$, קיים $k\in[\Delta(G)+1]$ כך ש-$x$ לא רואה את הצבע $k$ תחת $\varphi$. אז במקרה הבעייתי, ל-$u$ יש צבע שהוא לא רואה. וכנ"ל $v$.

אם זה היה אותו צבע לשניהם, סיימנו.

אם זה צבעים שונים, נסמן $a_0$ את הצבע ש-$u$ לא רואה, ונסמן $a_1$ את הצבע ש- $v_0:=v$ לא רואה.

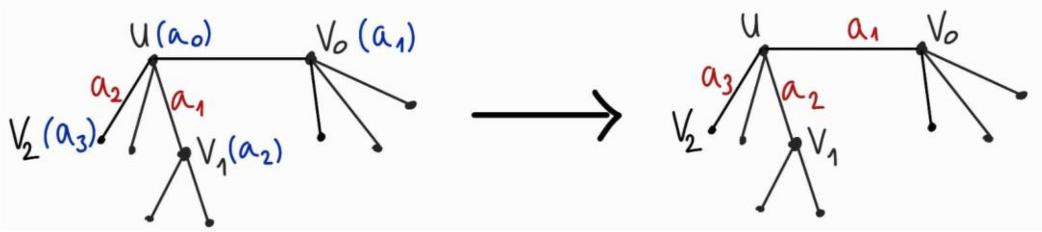
כלומר, קיים $v_1\in N_G(u)$ כך שהצלע $uv_1$ צבועה ב-$a_1$. וגם ל-$v_1$ יש צבע שהוא לא רואה, נקרא לו $a_2$.

אם $u$ לא רואה את $a_2$, נצבע את $uv_1$ ב- $a_2$, ואת $uv_0$ ב- $a_1$, וזה נותן לנו צבע ל-$uv$:




אם $u$ כן רואה את $a_2$, אז זה אומר שיש קודקוד $v_2$ כך ש $uv_2$ צבועה ב-$a_2$. כלומר יש צבע $a_3$ ש-$v_2$ לא רואה.

אם $u$ לא רואה את $a_3$, אז נצבע את $uv_2$ ב-$a_3$, נעביר את $a_2$ ל- $uv_1$, ונעביר את $a_1$ ל-$uv_0$:




אם $u$ כן רואה את $a_3$, נמשיך את התהליך עם כל השכנים של-$u$ (יש צלע שצבועה $a_3$, אז הקודקוד לא רואה את $a_4$...).

אם התהליך נגמר בלי שהצבע $a_i$ חזר על עצמו, אז ההעברות הצליחו לתת צביעה של $G$. כי יש לכל היותר $\Delta(G)$ שכנים, אז כל השכנים משתמשים ב- $\Delta(G)$ צבעים, ונשאר אחד לצלע החדשה.

אז נניח שיש חזרות באמצע. יהי $\ell$ האינדקס הראשון כך ש-$v_\ell$ לא רואה את $a_{\ell+1}$ אבל $a_{\ell+1} \in \{a_1, \dots, a_\ell\}$. כלומר קיים $k \in [\ell]$ כך ש $a_{\ell+1} = a_k$:

1. אם $v_\ell$ לא רואה את $a_0$, נצבע את $uv_\ell$ ב-$a_0$ ונבצע את ההעברות החל מ-$v_\ell$ ומטה, ונקבל צביעה תקינה.

2. אם $v_\ell$ כן רואה את $a_0$: יהי $P$ מסלול שמתחיל ב-$v_\ell$, שהצלעות שלו צבועות $a_0$ עד $a_k = a_{\ell+1}$. יש מסלול יחיד כזה ב-$G$.
   a. אם $v_{k-1} \in P$, אז $P$ עוצר ב- $v_{k-1}$ כי $v_{k-1}$ לא רואה את $a_k$. אז $P$ מתחיל ומסתיים בצבע $a_0$, ונוכל למצוא צביעה כך:
      i. נבצע את ההעברות מ- $v_{k-1}$ והלאה.
      ii. נצבע את $uv_{k-1}$ ב- $a_0$.
      iii. נחליף את הצבעים לאורך $P$ (צלע צבועה ב- $a_0$ תיצבע $a_{\ell+1}$, והפוך).

   אז נניח ש $v_{(k-1)} \notin P$:

   b. אם $v_k \in P$, אז $P$ מסתיים ב-$u$ וכולל את הצלע $uv_k$ שצבועה ב- $a_k$.
   ונקבל את הצביעה של $G$ כך:
      i. נבצע את ההעברות מ-$v_k$ והלאה.
      ii. נחליף צבעים לאורך $P$, זה כולל צביעת $uv_k$ ב- $a_0$.

   אז נניח ש $v_k, v_{k-1} \notin P$:

   c. אם $u \in P$, אז $P$ מגיע ל-$u$ דרך צלע שצבועה ב- $a_k$.
   מכיוון ש- $uv_k$ צבועה ב- $a_k$, ו- $v_k \notin P$, זה לא אפשרי כי זה מכריח שתי צלעות שצבועות $a_k$ להיות סמוכות ל-$u$.

   d. נוכל להניח ש- $P$ לא מבקר בקבוצה $\{u, v_k, v_{k-1}\}$, ומסתיים בקודקוד שלא בקבוצה $\{u, v_\ell, v_k, v_{k-1}\}$.
   אז נקבל צביעה של $G$ כך:
      i. נבצע את ההעברות מ- $v_\ell$ והלאה.
      ii. נצבע את $uv_\ell$ ב- $a_0$.
      iii. נחליף צבעים לאורך $P$.