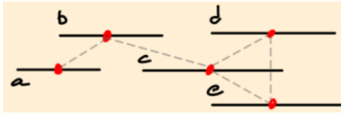
# Graph colorings

**תרגיל 1**

בהינתן קבוצת אינטרוולים ב- $\mathbb{R}^1$, נגדיר את הגרף $G(I)$ ע"י $V\big(G(I)\big) = I$, ונחבר שני קודקודים אם האינטרוולים שלהם חופפים.




גרף $G$ שיש לו ייצוג באינטרוולים ייקרא גרף אינטרוולים.

טענה: בכל גרף אינטרוולים, $\chi(G) = \omega(G)$. מספר הצביעה שווה גודל הקליקה הכי גדולה.

הוכחה: נסמן $\chi := \chi(G), \omega := \omega(G)$. ראשית, נשים לב ש- $\chi \geq \omega$ כי הקליקה דורשת $\omega$ צבעים. אז מספיק להוכיח $\chi \leq \omega$.

ניזכר באלגוריתם צביעה חמדן: נעבור על הקודקודים בסדר כלשהו, ולכל קודקוד ניתן את הצבע הכי נמוך שלא קיים באף שכן שלו.

נסדר את הקודקודים לפי נקודות ההתחלה שלהם. אם יש שניים או יותר שמתחילים באותה נקודה, נבחר שרירותית ביניהם.

נתבונן בקודקוד שייצבע בצבע הכי גדול – נגיד, $k$. זה אומר שכל הצבעים $[k-1]$ נמצאים בשכנים שלו. ושהוא חלק מקליקה בגודל $k$.

טריוויאלית, $\chi \leq k$. וגם טריוויאלית, $k \leq \omega$. אז $\chi \leq \omega$, כנדרש.

**תרגיל 2**

יהי $G$ גרף שבו, המעגלים האי-זוגיים שלו "חותכים בזוגות בקודקודים". כלומר, כל שני מעגלים חולקים לפחות קודקוד אחד.

טענה: $\chi(G) \leq 5$.

אינטואיציה: לכאורה, אם יש לי הרבה צלעות שחולקים קודקודים, זה יקשה על הצביעה. אבל הדרישה שכל שני מעגלים יחלקו קודקוד דווקא מגבילה את כמות המעגלים, שזה נוח לצביעה.

נסמן $\chi := \chi(G)$.

הוכחה א: נוכל להניח שיש ב-$G$ מעגלים אי-זוגיים, כי אחרת $\chi \leq 2$. יהי $C$ המעגל האי-זוגי הקצר ביותר ב-$G$.

נוכל להניח ש- $\chi(G - C) \leq 2$. כי אחרת, יש ב- $G - C$ מעגל אי-זוגי שלא נחתך עם $C$. אז $G - C$ הוא 2-צביע.

המינימליות של $C$ גוררת ש-$C$ הוא מעגל פשוט (ללא מיתרים). אז $C$ הוא 3-צביע.

נצבע את $G - C$ בשני צבעים, ואת $C$ בעוד 3 צבעים. כנדרש.

הוכחה ב: נב"ש ש- $\chi \geq 6$, תהי צביעה $\psi$ ב-$\chi$ צבעים ויהיו $C_1, \dots, C_6$ מחלקות הצביעה לפי $\psi$.

אם $G[C_1 \cup C_2 \cup C_3]$ לא מכיל מעגל אי-זוגי, אז אפשר לצבוע אותו בשני צבעים, סתירה למינימליות של $\psi$.

באופן דומה עבור $C_4 \cup C_5 \cup C_6$. כלומר, יש שני מעגלים אי זוגיים שלא חולקים קודקודים, סתירה.

**תרגיל 3**

טענה:

$$e(G) \geq \binom{\chi(G)}{2}$$

הוכחה: נסמן $e := e(G), \chi := \chi(G)$.

תהי $\psi$ צביעה אופטימלית של $G$. נב"ש ש- $e < \binom{\chi}{2}$. אזי, קיימים שני צבעים $i, j \in [\chi]$ שאין אף צלע $xy$ כך ש- $\psi(x) = i,\ \psi(y) = j$.

ומן הסתם אין אף צלע ששני הקודקודים שלה צבועים באותו צבע.

אז, האיחוד של כל הקודקודים שצבועים ב-$i$ וכל הקודקודים שצבועים ב-$j$ מהווה קבוצה בת"ל.

וכולם יכלו להיות צבועים באותו צבע, סתירה לאופטימליות של $\psi$.

**תרגיל 4**

תזכורת: $L(G)$ הוא גרף הצלעות של $G$. כל צלע $e \in E(G)$ הופכת לקודקוד ב- $V(L(G))$, ונחבר כל שני $e \in V(L(G))$ אם הם חלקו קודקוד ב-$G$.

יהי $G$ גרף ללא קודקודים מבודדים. טענה: אם $L(G)$ הוא קשיר ו-$k$-רגולרי, אז אחד מהשניים מתקיים:

1. $G$ הוא $d$-רגולרי, או
2. $G$ הוא דו"צ, ולכל הקודקודים באותו צד יש דרגה זהה.

הוכחה: מכיוון שאין ב-$G$ קודקודים מבודדים, העובדה ש- $L(G)$ קשיר גוררת ש- $G$ קשיר.

לכל $e \coloneqq uv \in E(G)$, מתקיים:

$$\deg_{L(G)} e = \deg_G u + \deg_G v - 2$$

כי סופרים את כל הצלעות שהיו מחוברות ל-$u$ או $v$, ונוריד את $u$ ו-$v$ עצמם.

מכיוון ש- $L(G)$ הוא $d$-רגולרי, מתקיים:

$$\deg_G x + \deg_G y - 2 = \deg_{L(G)} xy = \deg_G u + \deg_G v - 2$$

לכל צלע $xy$. אז עבור צלע $vw$, נקבל:

$$\deg_G w + \deg_G v - 2 = \deg_G u + \deg_G v - 2 \Longrightarrow \deg_G w = \deg_G u$$

כלומר לכל שני קודקודים ב-$G$ שיש להם שכן משותף, יש אותה דרגה.

אם לכל הקודקודים יש אותה דרגה, $G$ הוא $d$-רגולרי וסיימנו. נניח ש-$G$ לא $d$-רגולרי.

אזי, יש ב-$G$ שני קודקודים $i, j$ שמקיימים: $\deg_G i \neq \deg_G j$.

לפי הטענה הקודמת, כל מסלול שמתחיל מ-$i$ חייב להתחלף בין קודקודים בדרגה $\deg_G i$ וקודקודים בדרגה $\deg_G j$.

כלומר, אין מסלול סגור באורך אי-זוגי. שזה שקול לגרף דו"צ.

אז המסלול שתיארנו עובר בין שני צידי הגרף, כלומר כל צד בדרגה אחרת.

**תרגיל 5**

טענה: בכל גרף,

$$e(L(G)) = \sum_{v \in V(G)} \binom{\deg_G v}{2}$$

הוכחה א: נתבונן בקודקוד $v \in V(G)$. כל שתי צלעות שמחוברות אליו מגדירות צלע ייחודית ב-$L(G)$.

הוכחה ב: מתקיים לכל $e \coloneqq uv \in E(G)$ (כמו שהראנו בתרגיל הקודם):

$$\deg_{L(G)} e = \deg_G u + \deg_G v - 2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2 \cdot e(L(G)) =^{\aleph} \sum_{e \in V(L(G))} \deg_{L(G)} e = \sum_{e \coloneqq uv \in V(L(G))} (\deg_G u + \deg_G v - 2) = \sum_{e \coloneqq uv \in V(L(G))} (\deg_G u + \deg_G v) - 2 \cdot e(G)$$

א – בכל גרף.

נשים לב שמתקיים:

$$\sum_{uv \in E(G)} \deg_G u + \deg_G v = \sum_{x \in V(G)} (\deg_G x)^2$$

למה? נתבונן בקודקוד $x \in V(G)$ כלשהו, בזמן שסוכמים את דרגות הצלעות שלו:

כל קודקוד יופיע פעם אחת בסכום של כל צלע שהוא מופיע בה – שזה $\deg_G x$. ובכל פעם כזאת הוא תורם $\deg_G x$.

אז נוכל לרשום:

$$2\cdot e\big(L(G)\big)=\sum_{e:=uv\in V(L(G))}(\deg_G u+\deg_G v)-2\cdot e(G)\Rightarrow$$

$$e\big(L(G)\big)=\frac{1}{2}\sum_{e:=uv\in V(L(G))}(\deg_G u+\deg_G v)-e(G)=\frac{1}{2}\sum_{x\in V(G)}(deg_G\,x)^2-\frac{1}{2}\sum_{x\in V(G)}deg_G\,x=\sum_{x\in V(G)}\frac{(deg_G\,x)^2-deg_G\,x}{2}$$
$$=\sum_{x\in V(G)}\frac{deg_G\,x\cdot(deg_G\,x-1)}{2}=\sum_{x\in V(G)}\binom{deg_G\,x}{2}$$

כנדרש.

**תרגיל 6**

טענה: אם $\Delta(G)=3$, אז $\chi'(G)\le 4$.

נוכיח ע"י משפט ברוקס: נראה ש- $\chi\big(L(G)\big)\le 4$. ואז באופן ישיר $\chi'(G)\le 4$, כי $\chi\big(L(G)\big)=\chi'(G)$.

מההנחה ש- $\Delta(G)\le 3$, נקבל ש- $\Delta\big(L(G)\big)\le 4$ (כי כל קודקוד מחובר ל-3 צלעות לכל היותר, אז כל צלע מחוברת ל-4 צלעות לכל היותר).

אז לפי משפט ברוקס, $\chi\big(L(G)\big)\le 4$ אלא אם כן $L(G)$ הוא קליקה או מעגל אי-זוגי.

אם הוא מעגל אי-זוגי, אז $\chi\big(L(G)\big)\le 2$, וסיימנו.

אם הוא קליקה:

אם $L(G)\cong K_5$, אז הוא קשיר ו-$k$-רגולרי אז לפי 4ב, $G$ הוא בעצמו רגולרי (ואז בגלל ש- $\Delta(G)=3$, הוא 3-רגולרי), או שהוא דו"צ.

אם $G$ דו"צ וגם $\Delta(G)=3$, אז יש בו צד אחד עם לפחות 3 קודקודים $(a,b,c)$, ובצד השני יש קודקוד $v$ שמחובר לשלושתם. בנתיים זה נותן לנו 3 צלעות. כדי ש- $L(G)\cong K_5$, צריך 5 צלעות בדיוק. ואי אפשר להוסיף אותן ל-$v$, כי אז $\Delta(G)>3$. אז חייבים להוסיף עוד קודקוד $u$ בצד של $v$, עם צלע ממנו ל-$a$ (בה"כ). ואז יש לנו צלעות $au,vb$ שלא חולקות קודקוד.

אז $L(G)$ לא קליקה. כי כדי ש- $L(G)$ תהיה קליקה, צריך שכל שתי צלעות ב-$G$ יחלקו קודקוד.

אז $G$ הוא 3-רגולרי. הגרף הכי קטן שהוא 3-רגולרי הוא $K_4$ (אפשר לבדוק את כל הגרפים עם עד 4 קודקודים) שיש לו 6 צלעות. אז $L(G)$ חייב להיות עם 6 קודקודים, סתירה לכך שהוא $K_5$.

בסה"כ, לפי משפט ברוקס, או ש- $L(G)$ הוא מעגל אי"ז ואז $\chi\big(L(G)\big)\le 2$, או ש- $\chi\big(L(G)\big)\le 4$. כנדרש.

Graph colorings