20: Solving 2-Satisfiability Using Markov Chains

ניזכר בבעיה מתחילת הקורס, השאלה האם נוסחת *2-CNF* היא ספיקה. ראינו אלגוריתם דטרמיניסטי.

נציע אלגוריתם אקראי, וננתח אותו ע"י **שרשראות מרקוב** – *Markov Chains*

תהליך סטוכסטי (*Stochastic Process*) הוא סדרה: $\boldsymbol{X} \coloneqq \{X_t : t \in T\}$, כאשר:

T היא קבוצה שממספרת את הזמן. יכולה להיות אינסופית.

לכל $t \in T$, X_t הוא משתנה מקרי.

אפשר לחשוב על הסדרה $\boldsymbol{X}$ כולה בתור משתנה מקרי X, כאשר לכל $t \in T$, X_t הוא המצב של X בזמן t.

אם T בת-מניה, אז נקרא ל-$\boldsymbol{X}$ תהליך דיסקרטי (*discrete time process*).

אם כל ה- X_t מקבלים ערכים מקבוצה סופית משותפת כלשהי, אז $\boldsymbol{X}$ נקרא **תהליך סופי.**

אנחנו נתמקד בסוג מסויים של תהליך סטוכסטי: **שרשראות מרקוב.**

דוגמה קלאסית לשרשראות מרקוב היא סדרה של מ"מ בת"ל: $(X_n : n \in \mathbb{N})$.

יש לה את התכונה הבאה: לכל זמן $n \in \mathbb{N}$ ולכל ערך אפשרי של t, מתקיים:

אפשר לחשב את $\mathbb{P}[X_n = t]$ בצורה בת"ל מההיסטוריה שהובילה אותנו לזמן n.

תמונה שאפשר לחשוב עליה היא חלקיק (*particle*), שנמצא במצב כלשהו וקופץ בין מצבים.

התהליך הסטוכסטי מנסה להבין את ההתנהגות של החלקיק, ובעיקר להבין את ההתנהגות באינסוף – לאן הוא מתכנס.

שרשרת מרקוב

סדרה של מ"מ $(X_n : n \in \mathbb{N})$ תיקרא שרשרת מרקוב אם לכל נקודת זמן $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

התהליך העתידי $(X_m : m > n)$ הוא בת"ל מהתהליכים בעבר $(X_m : m < n)$, והאי-תלות הזו מתקבלת בתנאי שאנחנו יודעים את X_n.

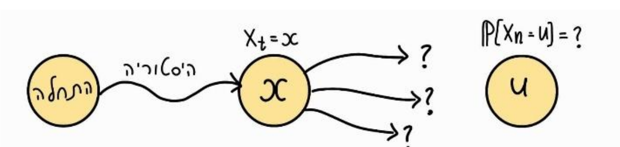
נשים לב: יכולה להיות תלות בין העתיד לעבר, בתנאי שכל התלויות האלה נתפסות דרך X_n.

לדוגמה, הילוך אקראי על גרף:

בכל קודקוד שנמצאים בו, בוחרים שכן באופן מקרי ואחיד ועוברים אליו.

אם נרצה לחשב את $\mathbb{P}[X_n = u]$ (קרי: ההסתברות שבזמן n נהיה בקודקוד u) נצטרך לקחת בחשבון את כל הילוכים האפשריים מקודקוד ההתחלה ל-u, שהם באורך לכל היותר n. בחישוב כזה, כל ההיסטוריה של הילוך היא קריטית.

לעומת זאת, אם נתנה את החישוב בכך שבזמן t נמצאים בקודקוד x (שניתן להגיע אליו מהקודקוד ההתחלתי), אז:



המאורע $\{X_n = u \mid X_t = x\}$ הוא בת"ל מהסדרה $X_0, X_1, \ldots, X_{t-1}$.

אפשר לחשב את $\mathbb{P}[X_n = u \mid X_t = x]$ בלי לדעת את ההיסטוריה עד $t - 1$.

אפיון שרשראות מרקוב

משפט: יהי $\boldsymbol{X} \coloneqq (X_n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ תהליך דיסקרטי. ותהי S קבוצת המצבים האפשריים של X_n. אזי,

$\boldsymbol{X}$ הוא שרשרת מרקוב **אמ"מ** לכל נקודת זמן $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ולכל מצב $i_0, \ldots, i_{n+1} \in S$ מתקיים:

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n] = \mathbb{P}[X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n]$$

כלומר, במקום לשאול על כל ההיסטוריה, מספיק לשאול רק על השלב הקודם.

השוויון הזה נקרא **תכונת מרקוב** או **תכונת חוסר זיכרון** של השרשרת. (ייקרא גם תהליך מרקובי).

וההסתברות $\mathbb{P}[X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n]$ נקראת **הסתברות המעבר** (*transition probability*).

הסתברות משותפת בשרשראות מרקוב

תכונת מרקוב מאפשרת לנו לכתוב:

$$\mathbb{P}[\, X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n] \overset{\text{א}}{=} \mathbb{P}[X_0 = i_0] \cdot \mathbb{P}[\, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n \mid X_0 = i_0] \overset{\text{א}}{=}$$

$$= \mathbb{P}[X_0 = i_0] \cdot \mathbb{P}[\, X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0] \cdot \mathbb{P}[X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1] \overset{\text{א}}{=}$$

$$= \mathbb{P}[X_0 = i_0] \cdot \mathbb{P}[\, X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0] \cdot \underline{\mathbb{P}[X_2 = i_2 \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1]} \cdot \mathbb{P}[X_3 = i_3, \dots, X_n = i_n \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2] \overset{\text{ב}}{=}$$

$$= \mathbb{P}[X_0 = i_0] \cdot \mathbb{P}[\, X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0] \cdot \underline{\mathbb{P}[X_2 = i_2 \mid X_1 = i_1]} \cdot \mathbb{P}[X_3 = i_3, \dots, X_n = i_n \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2] = \cdots$$

א. הגדרת הסתברות משותפת.
ב. החלקים המסומנים שווים, בגלל תכונת מרקוב.

נוכל להמשיך את אותו התהליך, ובסוף נקבל:

$$\cdots = \mathbb{P}[X_0 = i_0] \cdot \mathbb{P}[\, X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0] \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}[X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}]$$

מטריצת מעברים של שרשרת מרקוב

שרשרת מרקוב תיקרא **הומוגנית בזמן** (*time homogeneous*) אם הסתברויות המעבר לא תלויות בזמן.

כלומר, לא אכפת לי **מתי** אני נמצא במצב כלשהו. כל פעם שאני נמצא במצב א, יש לי הסתברות מסויימת לעבור למצב ב.

שרשראות כאלה מוגדרות לחלוטין ע"י **מטריצת המעברים**, שמוגדרת:

$$P_{ij} \coloneqq \mathbb{P}[X_t = j \mid X_{t-1} = i]$$

כלומר המיקום ה-ij זה ההסתברות לעבור למצב j ממצב i.

מטריצה כזו תהיה סופית אם מרחב המצבים סופי. אחרת היא אינסופית.

נניח שמרחב המצבים הוא $[n]$. אזי, סכום כל שורה במטריצה יהיה 1:

$$\forall i \in [n], \qquad \Sigma_{j=1}^{n} P_{ij} = 1$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

כי סכום ההסתברויות של המעברים חייב להיות 1.

נשים לב שהאלכסון הראשי הוא "מעבר" ממצב אחד לאותו מצב. זה גם תקין.

P היא **מטריצה סטוכסטית** – מטריצה שמתארת תהליך סטוכסטי.

שימוש במטריצת המעברים

יהי $[n]$ מרחב המצבים של שרשרת הומוגנית. עבור זמן t ומצב $i \in [n]$, נגדיר: $P_i(t)$ את ההסתברות שבזמן t השרשרת במצב i.

אז וקטור השורה מייצג את ההתפלגות של המצבים בזמן t:

$$P(t) \coloneqq \big(P_1(t), \dots, P_n(t)\big)$$

לפי נוסחת ההסתברות השלמה, $P_i(t)$ הוא:

$$P_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}[X_{t-1} = j] \cdot \mathbb{P}[X_t = i \mid X_{t-1} = j] = \sum_{j=1}^{n} P_j(t-1) \cdot P_{ij}$$

כלומר זה הסכום של ההכפלות של המקומות של הוקטור שורה במקומות במטריצה. הכפלה של וקטור במטריצה. כלומר בעצם:

$$\underbrace{P(t)}_{row} = \underbrace{P(t-1)}_{row} \cdot \underbrace{P}_{matrix}$$

נשים לב: ההתפלגות של השרשרת בזמן t כן יכולה להיות פונקציה של הזמן. רק המעברים לא יכולים להיות.

מעברי m-צעדים

בהינתן $m \geq 1$, ההסתברות:

$$P_{ij}^{(m)} \coloneqq \mathbb{P}[X_{t+m} = j \mid X_t = i]$$

נקראת הסתברות מעבר m-צעדים (*m-step transition probability*). (ה-(m) זה לא חזקה, זה רק סימון).

אז מחוק ההסתברות השלמה ותכונת מרקוב נקבל:

$$P_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}[X_{t+1} = k \mid X_t = i] \cdot \mathbb{P}[X_{t+m} = j \mid X_{t+1} = k, X_t = i] =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}[X_{t+1} = k \mid X_t = i] \cdot \mathbb{P}[X_{t+m} = j \mid X_{t+1} = k] =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} P_{ik} \cdot P_{kj}^{(m-1)}$$

אז אם נגדיר:

$$P^{(m)} \coloneqq \left(P_{ij}^{(m)}\right)_{i,j \in [n]}$$

אפשר להוכיח באינדוקציה שמתקיים:

$$\forall m \geq 0, \qquad P^{(m)} = P^m$$

אז כמו שתיארנו את המעבר בצעד אחד בזמן: $P(t) = P(t-1) \cdot P$, נוכל להגדיר מעבר של m צעדים:

$$P(t+m) = P(t) \cdot P^m$$

ההתפלגות בזמן $t+m$ היא פשוט ההתפלגות בזמן t כפול המטריצה P^m.

באופן כללי: אם $\mu_0 \coloneqq \left(\mu_0(i)\right)_{i \in [n]}$ היא ההתפלגות ההתחלתית, ומתקיים:

$$\mu_n \coloneqq (\mu_n(i) \coloneqq \mathbb{P}[X_n = i \mid X_0 \sim \mu_0])_{i \in [n]}$$

אז:

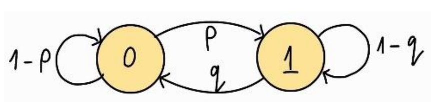
$$\mu_n = \mu_0 \cdot P^n$$

דוגמאות לשרשראות מרקוב הומוגניות

התגעגעתם לאוטומטים?

<u>דוגמה 1</u>

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$



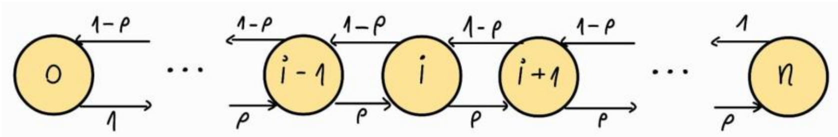
<u>דוגמה 2</u> – הילוך שיכור עם גבולות מחזירים $(reflecting\ boundaries)$

הילוך שיכור על מצבים $\{0, 1, \dots, n\}$. בכל זמן עוברים ימינה בהסתברות p, ושמאלה בהסתברות $1 - p$.

בגבולות $\{0, n\}$ תמיד עוברים למצב הסמוך בהסתברות 1. מטריצת המעברים P נתונה ע"י:

$$\forall 0 < i < n, \qquad P_{i,i+1} = p, \qquad P_{i,i-1} = 1 - p, \qquad P_{0,1} = 1, \qquad P_{n,n-1} = 1$$

בכל שאר המצבים, $P_{ij} = 0$.



אפשר להכליל את ההגדרה:

לכל $1 \le i \le n$ נבחר שלושה מספרים a_i, b_i, c_i כך ש: $a_i + b_i + c_i = 1$.

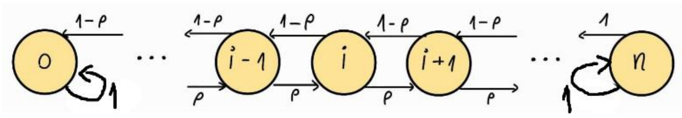
זה ההסתברויות ללכת ימינה, להישאר במקום, וללכת שמאלה.

מטריצת המעברים המתארת הילוך "חוזר" תוגדר:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>דוגמה 3</u> – הילוך שיכור עם גבולות סופגים $(absorbing\ boundaries)$

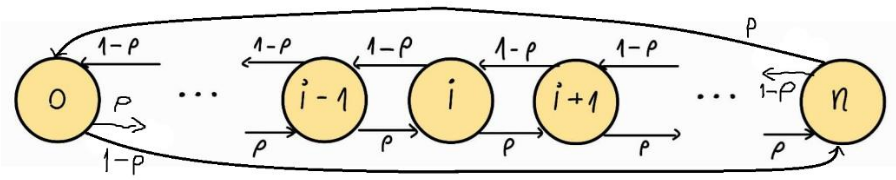
ההבדל היחיד הוא הגבולות. אם הגענו לגבול, נישאר בו:



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

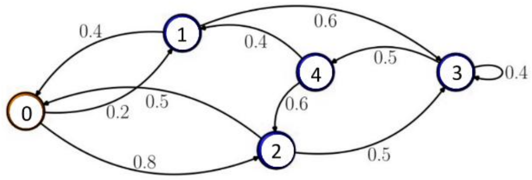
<u>דוגמה 4</u> – הילוך שיכור מעגלי $(cyclic)$

כל קצה מחובר גם לקצה השני:



$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

<u>דוגמה 5</u> – סתם עוד דוגמה



$$P=\begin{bmatrix}0 & 0.2 & 0.8 & 0 & 0\\ 0.4 & 0 & 0 & 0.6 & 0\\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6\\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

אלגוריתם אקראי ל- ***2-CNF-SAT***

הבעיה נמצאת ב-*P*. ראינו אלגוריתם דטרמיניסטי. נרצה עכשיו לתאר אלגוריתם אקראי פולינומי:

<u>קלט</u>: נוסחת *2-CNF* φ עם n משתנים, ופרמטר m. בה"כ, בכל פסוקית יש 2 משתנים שונים.

1. תהי a השמה אקראית למשתנים של φ. נאתחל $i \coloneqq 1$.
2. כל עוד $i \le 2mn^2$, נבצע:
   a. נבחר פסוקית אקראית C, שלא מסופקת תחת a.
   b. נבחר באופן מקרי ואחיד משתנה של C ונחליף את הערך שהוא מקבל.
   c. אם ההשמה המתקבלת מספקת, **נחזיר** ש-φ ספיקה עם ההשמה הנוכחית. ונסיים.
   d. $i \coloneqq i+1$.
3. נחזיר ש-φ לא ספיקה.

התוצאה העיקרית שלנו, נקרא לה **למה א:**

תהי φ נוסחת *2-CNF*, ויהי $m \in \mathbb{N}$. נריץ את האלגוריתם לעיל עם φ, m. אזי:

1) אם φ לא ספיקה, אז בהסתברות 1 האלגוריתם מחזיר תשובה נכונה.
2) אם φ כן ספיקה, אז בהסתברות לפחות $1-2^{-m}$ האלגוריתם מוצא השמה מספקת.

הוכחה: (1) טריוויאלי – אף השמה לא תהיה מספקת, אז נחזיר שלא אחרי $2mn^2$ איטרציות.

כדי להוכיח את (2), ניעזר ב**למה ב:**

תהי φ נוסחת *2-CNF* ספיקה עם n משתנים.

אזי, מספר האיטרציות שנצטרך עד שנמצא השמה מספקת (בתוחלת) הוא לכל היותר n^2.

(נתייחס כאילו מריצים את האלגוריתם עם $m=\infty$, כך שהוא לא יעצור עד שנמצא השמה מספקת).

נניח בנתיים שלמה ב' נכונה, ונוכיח את למה א'. ואז בסוף נוכיח את למה ב' ונסיים.

נחלק את האיטרציות לקבוצות (*batches*) של $2n^2$ איטרציות כל אחת.

לפי למה ב, לא משנה מה הייתה ההשמה הראשונית, נמצא השמה מספקת תוך n^2 איטרציות (בתוחלת).

נסמן עבור קבוצה נתונה את מספר האיטרציות הנדרש כדי למצוא השמה מספקת – X. אזי, לפי אי"ש מרקוב נקבל:

$$\mathbb{P}[X>2n^2] \le \frac{\mathbb{E}[X]}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

אז ההסתברות ש-m קבוצות נכשלות הוא לכל היותר 2^{-m}, כנדרש.

הוכחת למה ב'

תהי S השמה מספקת כלשהי עבור φ. נמצא חסם עליון על מספר האיטרציות שצריך כדי למצוא דווקא את S.

עבור איטרציה i, נסמן:

A_i – ההשמה בסוף האיטרציה. X_i – מספר המשתנים שבהם S ו-A_i **מסכימים**.

האלגוריתם בוודאי עוצר כאשר $X_i = n$, כי זה אומר ש S ו-A_i מסכימים על כל המשתנים, כלומר $A_i = S$.

הוא יכול לעצור לפני אם במקרה נגיע להשמה מספקת (יכולה להיות יותר מאחת).

נרצה להעריך את הזמן המצופה עד ש $X_i = n$.

בניית תהליך סטוכסטי (לא מרקוב)

אם $X_i = 0$ ב-i כלשהו, אזי $X_{i+1} = 1$.

כי אם בשלב i לא מסכימים באף משתנה (ולפי האלגוריתם מחליפים את ההשמה של משתנה אחד אקראי), אז בשלב $i+1$ תהיה הסכמה במשתנה הזה.

$$\mathbb{P}[X_{i+1} = 1 \mid X_i = 0] = 1$$

נסמן C את הפסוקית הלא-מסופקת שהאלגוריתם בוחר באיטרציה ה-i.

מכיוון ש-S מספקת ו-C לא מסופקת תחת A_i, מתקיים ש- S ו-A_i לא מסכימות בלפחות משתנה אחד של C.

אם S ו-A_i לא מסכימות בשני משתנים של C, אז כל שינוי יגרום ליותר הסכמה. בסה"כ, לכל $1 \leq j \leq n-1$:

$$\mathbb{P}[X_{i+1} = j+1 \mid X_i = j] \geq 0.5, \qquad \mathbb{P}[X_{i+1} = j-1 \mid X_i = j] \leq 0.5$$

הבעיה שלנו היא שהתהליך המתואר לא מרקובי. ההסתברות ש-X_i יגדל תלויה במספר המשתנים ב-C, וכל משתנה יכול להופיע ביותר מפסוקית אחת.

בניית תהליך מרקובי

אז נייצר גרסה יותר "פסימית" של התהליך, שכן תהיה מרקובית:

$$Y_0 \coloneqq X_0, \qquad \mathbb{P}[Y_{i+1} = 1 \mid Y_i = 0] = 1, \qquad \mathbb{P}[Y_{i+1} = j+1 \mid Y_i = j] = 0.5, \qquad \mathbb{P}[Y_{i+1} = j-1 \mid Y_i = j] = 0.5$$

תוחלת הזמן שייקח ל-X להגיע ל-n, היא לכל היותר הזמן שייקח ל-Y.

עבור $j \in \{0, \dots, n\}$ נגדיר את H_j להיות מספר הצעדים הנדרש ל- $Y_0, Y_1, \dots$ להגיע ל-n אם מתחילים מ-j.

אנחנו רוצים להראות ש: $\mathbb{E}[H_0] \leq n^2$. מספיק להוכיח ש:

$$(*) \quad \forall j \geq 0, \qquad \mathbb{E}[H_j] = \mathbb{E}[H_{j+1}] + 2j + 1$$

למה? כי אם נעשה את זה, אז:

$$\mathbb{E}[H_0] = \mathbb{E}[H_1] + 1 = (\mathbb{E}[H_2] + 2 \cdot 1 + 1) + 1 = \cdots = \sum_{i=0}^{n-1} (2i+1) = n^2$$

כדי להוכיח את $(*)$, נוכיח את מערכת המשוואות $(**)$:

$$(**) \quad \mathbb{E}[H_n] = 0, \qquad \mathbb{E}[H_j] = \frac{\mathbb{E}[H_{j-1}]}{2} + \frac{\mathbb{E}[H_{j+1}]}{2} + 1 \;\; j \notin \{0, n\}, \qquad \mathbb{E}[H_0] = \mathbb{E}[H_1] + 1$$

ואז באינדוקציה נוכיח את $(*)$.

הוכחת $(**)$

טריוויאלי ש $\mathbb{E}[H_n] = 0$. ולפי הגדרה, $\mathbb{E}[H_0] = \mathbb{E}[H_{0+1}] + 2 \cdot 0 + 1 = \mathbb{E}[H_1] + 1$.

נקבע $0 < j < n$ כלשהו. לפי חוק התוחלת השלמה:

$$\mathbb{E}[H_j] = \underbrace{\mathbb{P}[H_j = H_{j-1} + 1]}_{0.5} \cdot \mathbb{E}[H_j \mid H_j = H_{j-1} + 1] + \underbrace{\mathbb{P}[H_j = H_{j+1} + 1]}_{0.5} \cdot \mathbb{E}[H_j \mid H_j = H_{j+1} + 1]$$
$$= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}(H_{j-1} + 1) + \frac{1}{2}(H_{j+1} + 1)\right] = \frac{\mathbb{E}[H_{j-1}]}{2} + \frac{\mathbb{E}[H_{j+1}]}{2}$$

נוכיח ש $(**) \Longleftarrow (*)$

<u>בסיס</u>: עבור $j=0$, כבר הראינו ש $\mathbb{E}[H_0]=\mathbb{E}[H_1]+1$.

<u>צעד</u>: לפי $(**)$, נעביר אגפים ומתקיים:

$$\mathbb{E}[H_{j+1}]=2\mathbb{E}[H_j]-\mathbb{E}[H_{j-1}]-2$$

לפי הנ"א:

$$\mathbb{E}[H_{j-1}]=\mathbb{E}[H_j]+2(j-1)+1$$

כלומר נוכל לכתוב:

$$\mathbb{E}[H_{j+1}]=2\mathbb{E}[H_j]-\left(\mathbb{E}[H_j]+2(j-1)+1\right)-2=2\mathbb{E}[H_j]-\mathbb{E}[H_j]-2(j-1)-1-2=\mathbb{E}[H_j]-2j-1$$

כלומר:

$$\mathbb{E}[H_j]=\mathbb{E}[H_{j+1}]+2j+1$$

כנדרש.

סיכום

האלגוריתם רץ עד $2mn^2$ פעמים. בכל פעם בוחר פסוקית לא מסופקת ומחליף את ההשמה של אחד המשתנים שלה.

תיארנו את מספר הצעדים הנדרש כדי להגיע להשמה מספקת ספציפית S, כתלות במספר הצעדים שהיה נדרש בשלב הקודם. והראנו ש $\mathbb{E}[H_0]=n^2$.

חילקנו את התהליך לקבוצות של $2n^2$ איטרציות. לפי אי"ש מרקוב, ההסתברות שבקבוצה אחת לא נמצא השמה מספקת היא לכל היותר חצי.

אז עבור m קבוצות כאלה, ההסתברות שלא נמצא השמה מספקת היא לכל היותר 2^{-m}.