תרגיל 1

סעיף א: אם $v_1 = C, w_1 = W, v_2 = \cdots = v_n = C-1, w_2 = \cdots = w_n = 1$, אז האלגוריתם בוחר את מוצר 1 ומקבל סכום ערכים C, למרות שהפיתרון האופטימלי הוא לקחת את כל השאר ולקבל סכום ערכים $(C-1)(n-1)$. קיבלנו ערך:

$$C = \frac{C(n-1)}{n-1} \approx \frac{(C-1)(n-1)}{n-1} = \frac{OPT}{n-1}$$

וככל ש-C גדל, יחס הקירוב שלנו נהיה גרוע יותר.

סעיף ב: אם יש רק שני מוצרים: $v_1 = 1+\varepsilon, w_1 = 1, v_2 = W, w_2 = W$. אז למוצר 1 יש *density* יותר גדול, אבל עדיף לקחת את מוצר 2.

נקבל ערך:

$$1+\varepsilon \approx \frac{W}{W} = \frac{OPT}{W}$$

סעיף ג: נניח שאלגוריתם B החזיר פיתרון במשקל W, ונב"ש שזה לא פיתרון אופטימלי. יהי P פיתרון אופטימלי. נסמן S את הפיתרון שקיבלנו מ-B.

נמיין את האיברים של P לפי ה-*density*, בסדר יורד. יהי i_k האינדקס של האיבר הראשון של P, ויהי i_j האינדקס של האיבר הראשון של S.

נוכל להניח ש-P ו-S שונים באינדקס הראשון. כי אחרת, נוכל לייצר מופע חדש של הבעיה בלי כל האיברים שיש עד האינדקס הראשון שבו הם שונים, להוריד את W במשקל של האיברים האלה, ובעצם נגיע למצב הנוכחי ולהוכיח עליו.

נוכל להניח גם ש- $d_{i_k} < d_{i_j}$, כי במיקום הראשון של S יהיה האיבר עם ה-d המקסימלי. מכיוון שמיינו את P לפי d בסדר יורד, נקבל שאחרי i_k, לכל האיברים ב-P יש $d \le d_{i_k}$.

נוכל גם להניח שבכל האיברים עם $d \le d_{i_k}$, P ו-S מסכימים. כי אחרת, נוכל לחלק את הבעיה לפי החלקים שבהם יש אי הסכמה, ועל כל אחד לקבל סתירה עם אותו הטיעון שיהיה כאן.

אז בעצם נקבל ש-P מכיל רק את האיברים של S שיש להם $d \le d_{i_k}$. המשקל של P קטן מהמשקל של S בדיוק בסכום המשקלים של האיברים שיש להם $d > d_{i_k}$. וכל האיברים האלה לא נמצאים ב-P. אז נוכל להוסיף אותם ל-P ולקבל פיתרון עם ערך גדול יותר, בסתירה להנחת האופטימליות של P.

סעיף ד: אלגוריתם A בוחר לפי הערך המקסימלי, אז $v(S_A) \ge \max_{i\in I} v_i \ge v_j$.

סעיף ה: ראשית, אם $v(S_B) \ge OPT$, אז הטענה טריוויאלית. נניח ש- $v(S_B) < OPT$.

נייצר את (*), מופע חדש של הבעיה: נוסיף איבר חדש j^*, שיש לו ערך $v_{j^*} = v_j$ ומשקל $w_{j^*} = W - \sum_{i\in S_B} w_i$.

ניזכר ש-v_j זה האיבר הראשון שלא לקחנו ל-S_B. כלומר $W > \sum_{i\in S_B} w_i$. אזי, ב-(*), נוכל להוסיף את האיבר j^* ולקבל משקל W.

לפי סעיף ג, אם אלגוריתם B החזיר פיתרון במשקל W, אז זה פיתרון אופטימלי. אז $S_B \cup \{j^*\}$ זה פיתרון אופטימלי עבור (*).

נסמן OPT^* את הערך של הפיתרון האופטימלי של (*). מתקיים $OPT^* \ge OPT$, כי כל הדרישות אותו דבר והוספנו איבר, שאפשר לקחת או לא לקחת.

קיבלנו ש- $v(S_B \cup \{j^*\}) = v(S_B) + v_{j^*} = OPT^* \ge OPT$. וניזכר ש- $v_{j^*} = v_j$, אז $v(S_B) + v_j \ge OPT$, כנדרש.

סעיף ו: אם אלגוריתם B החזיר פיתרון במשקל W, אז לפי סעיף ג הפיתרון הזה אופטימלי.

אחרת, נתבונן באיבר j. מתקיים $v(S_B) + v_j \ge OPT$. וגם, לפי סעיף ד, $v(S_A) \ge v_j$. כלומר: $v(S_B) + v(S_A) \ge OPT$, אז מתקיים:

$$\max\{v(S_B), v(S_A)\} \ge OPT/2$$

כנדרש.

תרגיל 2

סעיף א: בעיית *max independent set*: בהינתן גרף, נרצה למצוא את הקבוצה הגדולה ביותר של קודקודים שאין ביניהם אף צלע.

ניסוח *IP*: לכל קודקוד נגדיר $x_v \in \{0,1\}$. המטרה היא למקסם את $\sum_{v\in V(G)} x_v$, תחת ההגבלות: לכל צלע uv, מתקיים $x_u + x_v \leq 1$.

מעבר ל-*LP*: השינוי היחיד הוא $0 \leq x_v \leq 1$.

סעיף ב: ניזכר ש- $OPT \leq OPT_f$. הערך של הפיתרון *LP* הוא לפחות הערך של הפיתרון *IP*, כי ה-*LP* כולל פתרונות בשלמים.

וניזכר מה אנחנו מחפשים – מתקיים $OPT = \alpha(G)$.

אם $OPT_f \leq 2\sqrt{e(G)}$, זה אומר ש- $\alpha(G) \leq 2\sqrt{e(G)}$, אז קודקוד יחיד מהווה $\left(2\sqrt{e(G)}\right)^{-1}$-קירוב.

סעיף ג: ההסתברות של כל קודקוד להיות ב-S היא $\frac{x_v^*}{\sqrt{e(G)}}$, ועבור צלע uv, ההסתברות ששני הקודקודים נמצאים ב-S היא $\frac{x_u^*}{\sqrt{e(G)}} \cdot \frac{x_v^*}{\sqrt{e(G)}}$.

כי בהגדרה, כל הבחירות של הקודקודים ל-S הן בת"ל. לפי העובדה ש: $\forall\alpha,\beta \in [0,1]: \alpha\beta \leq \frac{\alpha^2+\beta^2}{2} \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$, נקבל ש:

$$\mathbb{P}[Z_e = 1] = \frac{x_u^*}{\sqrt{e(G)}} \cdot \frac{x_v^*}{\sqrt{e(G)}} = \frac{x_u^* \cdot x_v^*}{e(G)} \leq \frac{x_u^* + x_v^*}{2e(G)} \leq \frac{1}{2e(G)}$$

א. כי לפי ההגבלות של ה-*LP*, מתקיים $x_v^* + x_u^* \leq 1$ לכל צלע uv.

אז חסם איחוד על כל הצלעות נותן:

$$\sum_{e\in E(G)} 2\mathbb{E}[Z_e] = \sum_{e\in E(G)} 2\mathbb{P}[Z_e = 1] \leq \sum_{i=1}^{e(G)} \frac{2}{2e(G)} = \sum_{i=1}^{e(G)} \frac{1}{e(G)} = 1$$

סעיף ד: X_v זה אינדיקטור לכך ששמנו את v ב-S (בשלב 3 באלגוריתם).

סעיף ה:

$$\mathbb{E}[|S|] = \mathbb{E}\left[\sum_{v\in V(G)} X_v - \sum_{e\in E(G)} 2Z_e\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{v\in V(G)} X_v\right] - \mathbb{E}\left[\sum_{e\in E(G)} 2Z_e\right]$$

נחשב כל אחד בנפרד:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{v\in V(G)} X_v\right] = \sum_{v\in V(G)} \mathbb{E}[X_v] = \sum_{v\in V(G)} \mathbb{P}[X_v = 1] = \sum_{v\in V(G)} \frac{x_v^*}{\sqrt{e(G)}} = \frac{1}{\sqrt{e(G)}} \sum_{v\in V(G)} x_v^* = \frac{1}{\sqrt{e(G)}} \cdot OPT_f \geq \frac{OPT}{\sqrt{e(G)}}$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{e\in E(G)} 2Z_e\right] = \sum_{e\in E(G)} \mathbb{E}[2Z_e] = \sum_{e\in E(G)} 2\mathbb{E}[Z_e] \leq^{\text{א}} 1$$

א. לפי סעיף ג.

בסה"כ,

$$\mathbb{E}[|S|] \geq \frac{OPT}{\sqrt{e(G)}} - 1 \geq \frac{OPT}{2\sqrt{e(G)}}$$

כנדרש.

תרגיל 3

סעיף א: רדוקציה עצמית היא אלגוריתם לפיתרון של בעיית החיפוש ע"י בעיית ההכרעה המתאימה.

סעיף ב: בעיית *partition* היא קבוצה $S \coloneqq \{s_1, \dots s_n\}$ של מספרים. יהי A אלגוריתם לבעיית ההכרעה. בהינתן S, הוא מחזיר 1 אם אפשר לחלק את S לשתי קבוצות כך שהסכום של האיברים שלהן שווה, ו-0 אחרת.

עבור קבוצה X, נסמן $\sum X$ את הסכום של כל האיברים שלה.

1. אם $A(S) = 0$, נאמר שאין פתרון ונסיים.
2. אחרת, נגדיר $\bar{T} \coloneqq \emptyset$, $T \coloneqq \{s_1\}$, ונגדיר $S' \coloneqq S \setminus \{s_1\}$.
3. לכל $i = 2$ עד $i = n$:
   - a. נגדיר $S' \coloneqq S' \setminus \{s_i\}$.
   - b. אם $A(S' \cup \{\sum T + s_i\} \cup \{\sum \bar{T}\}) = 1$, נגדיר $T \coloneqq T \cup \{s_i\}$.
   - c. אחרת, נגדיר $\bar{T} \coloneqq \bar{T} \cup \{s_i\}$
4. נחזיר את $(T, \bar{T})$.

הסבר: אנחנו נייצר את הקבוצות של ה-*partition*. ניקח את האיבר הראשון לקבוצה T.

נרצה לבדוק אם האיבר הבא צריך להיות ב-T או ב-$\bar{T}$.

אם s_2 צריך להיות ב-T, זה אומר שאם נוריד את s_2 מ-S ונוסיף איבר שהוא $s_1 + s_2$, אז עדיין תהיה חלוקה אפשרית.

אז אם יש חלוקה בקבוצה כזו, נוסיף את s_2 ל-T. אחרת, s_2 צריך להיות ב-$\bar{T}$.

נמשיך לעבור כך על שאר האיברים. נגיד ש- s_3 צריכה להיות ב-$\bar{T}$.

עבור s_4, לא מספיק להוסיף איבר שהוא הסכום של T ועוד s_4. כי הורדנו גם את האיברים של $\bar{T}$. לכן בבדיקה מוסיפים גם איבר שהוא הסכום של $\bar{T}$.

ועבור כל i: האיברים ששמנו כבר ב-T או ב-$\bar{T}$ הם "תפוסים" מבחינתנו. אנחנו מוסיפים רק 2 איברים, את הסכום של כל קבוצה.

אם נוסיף את s_i לסכום של T ונוריד את s_i מ-S, ועדיין יש חלוקה – זה אומר ש-s_i צריכה להיות ב-T.

סעיף ג1: אלגוריתם אימות: בהינתן חלוקה (כלומר S_1, S_2, S_3 כך ש- $S = S_1 \uplus S_2 \uplus S_3$) קל לבדוק שהסכומים של הקבוצות שווים.

סעיף ג2: נעשה רדוקציה מ-*partition*.

נרצה שאם אפשר לחלק את S לשתי קבוצות בסכום שווה, אז יהיה אפשר לחלק את $f(S)$ לשלוש קבוצות בסכום שווה.

נשים לב שאם $S \in PARTITION$, אז $\sum S$ זוגי.

$$f(S) \coloneqq S \cup \left\{\frac{\sum S}{2}\right\}$$

מבנה: הפונקציה מקבלת בעיה במבנה של *PARTITION* ומחזירה בעיה במבנה של *3-PARTITION*.

זמן: הפונקציה פולינומית (ואפילו לינארית) – צריך רק לסכום את האיברים ולהוסיף איבר, $O(|S|)$.

נכונות: אם אפשר לחלק את S לשתי קבוצות $T, \bar{T}$ כך ש- $\sum T = \sum \bar{T}$, אז כמובן ש- $\sum T = \sum \bar{T} = \frac{\sum S}{2}$. אז אם נוסיף איבר $\frac{\sum S}{2}$, עכשיו אפשר לחלק את $f(S)$ ל-3 קבוצות: $T, \bar{T}, \left\{\frac{\sum S}{2}\right\}$ שהן בסכום שווה.

ואם אפשר לחלק את $f(S)$ לשלוש קבוצות בסכום שווה, ואחת הקבוצות מכילה את $\frac{\sum S}{2}$, שזה חצי הגודל של שאר האיברים, אז הקבוצה הזו תכיל רק את האיבר הזה. כלומר שאר האיברים מתחלקים בין 2 הקבוצות האחרות, וזו החלוקה.

כנדרש.

סעיף ד: נעשה רדוקציה מ-*CNF-SAT*. בהינתן φ, נוסחת *CNF* נגדיר גאדג'ט לכל משתנה x:

$$g(x) \coloneqq (z_x \vee \overline{z_x})$$

ונגדיר:

$$f(\varphi) \coloneqq \varphi \wedge \bigwedge\nolimits_{x\in\varphi} g(x)$$

מבנה: הפונקציה מקבלת נוסחת CNF ומחזירה נוסחת CNF.

זמן: הפונקציה פולינומית, צריך רק להוסיף גאדג'ט (זמן קבוע) עבור כל משתנה.

נכונות: אם φ ספיקה, אז ניקח את אותה השמה מספקת, ולכל z_x ניתן השמה כך ש- $z_x \coloneqq \bar{x}$. ככה יש מספר שווה של T ו-F.

ובגלל שכל הגאדג'טים הם ליטרל והמשלים שלו, הם תמיד מסופקים.

אם יש השמה מספקת עבור $f(\varphi)$, אז אותה השמה (רק על המשתנים המקוריים) תספק גם את φ.

כנדרש.

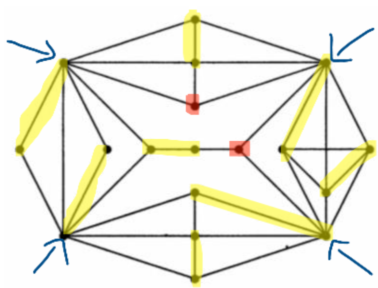
תרגיל 4

סעיף א: משפט *Tutte*: לגרף G יש שידוך מושלם אמ"מ לכל $S \subseteq V(G)$, $C_O(G-S) \le |S|$.

כלומר, שלכל קבוצת קודקודים, אם נוריד אותה מהגרף, בגרף יישארו פחות רכיבי קשירות בגודל אי"ז מאשר הגודל של הקבוצה.

אינטואיטיבית (לא הוכחה!), זה בגלל שכל רכיב קשירות בגודל אי"ז, צריך קודקוד מ-S כדי להשלים לו שידוך.

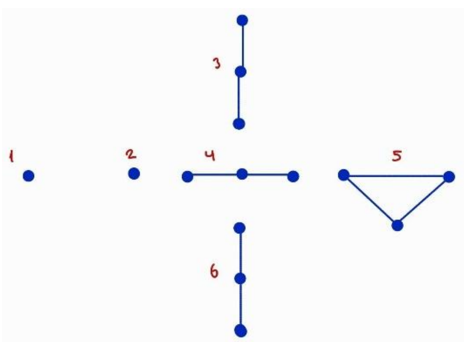
סעיף ב: אם היה בגרף שידוך מושלם, לא היינו צריכים להוכיח שהוא מקסימום. כנראה שאין בגרף שידוך מושלם. וגם כתוב למצוא שידוך <u>מקסימום</u>, מודגש. ומשפט *Tutte* יכול להוכיח שאין בגרף שידוך מושלם. יש בגרף 18 קודקודים. אז בכל שידוך יהיו לפחות 2 שלא משודכים. בקלות (כמעט באקראי) נוכל למצוא את השידוך הבא:



ונשים לב שיש רק שני קודקודים שלא משודכים. אם נוכיח שאין שידוך מושלם, זה יוכיח שזה שידוך בגודל מקסימום.

כדי להוכיח ע"י משפט *Tutte* שאין שידוך מושלם, נצטרך למצוא קבוצת קודקודים שאם נוריד אותה, מספר רכיבי הקשירות שיישארו יהיה יותר מגודל הקבוצה. כיוון טוב זה למקסם את מספר רכיבי הקשירות שנקבל אם נוריד את S. הקודקודים בפינות מחוברים להכי הרבה קודקודים, ננסה אותם.

אם נוריד את 4 הקודקודים המסומנים בחץ, נקבל:



קבוצה בגודל 4, 6 רכיבי קשירות שכולם בגודל אי-זוגי. אז לפי משפט *Tutte*, אין בגרף שידוך מושלם. אז שידוך בגודל 16 זה המקסימום.

סעיף ג: בשאלה, G הוא גרף 3-רגולרי עם לכל היותר 2 גשרים, ו-S היא קבוצת קודקודים לא ריקה. צריך להוכיח שאם נוריד את S מ-G, אז מתוך רכיבי הקשירות האי-זוגיים שיישארו, לכל היותר שניים מהם היו מחוברים ל-S ע"י צלע אחת בדיוק. כל שאר רכיבי הקשירות האי-זוגיים (אם יש) היו מחוברים ל-S ע"י לפחות 3 צלעות.

נתון לנו שבגרף יש לכל היותר 2 גשרים. אם יש רכיב קשירות ב- $(G-S)$ שמחובר ל-S ע"י צלע אחת בלבד, הצלע הזו הייתה גשר ב-G. כי הרכיב הזה לא מחובר לאף קודקוד אחר ב-S, ולא מחובר לאף רכיב קשירות אחר ב-$(G-S)$ כי אחרת הם היו אותו רכיב.

על כל שאר רכיבי הקשירות האי זוגיים, צריך להוכיח שהם היו מחוברים ל-S ע"י לפחות 3 צלעות. נב"ש שיש רכיב קשירות C אי"ז ב-$(G-S)$ שמקיים:

$$e_G(S,C)=2$$

באופן כללי מתקיים:

$$\sum_{v\in V(C)} \deg_{G[C]} v = 3v(C) - e_G(S,C)$$

כי הגרף 3-רגולרי. סכום הדרגות ב-$G[C]$ הוא 3 מכל קודקוד, פחות הצלעות שהיו ל-S (כי אין צלעות לאף רכיב קשירות אחר). אז לפי ההנחה בשלילה:

$$\sum_{v\in V(C)} \deg_{G[C]} v = 3v(C) - 2$$

ולפי ההנחה, C בגודל אי-זוגי. אז $3v(C)$ אי-זוגי. בסה"כ, סכום הדרגות ב-$G[C]$ הוא אי-זוגי. סתירה לעובדה שבאופן כללי, סכום הדרגות בכל גרף (או תת-גרף) הוא זוגי. (למת לחיצת הידיים).

סעיף ד: נוכיח בשני שלבים. ראשית, $e_G(S,V(G)\setminus S)\le 3|S|$. מתקיים כי הגרף 3-רגולרי. מספר הצלעות שיוצאות מ-S הוא לכל היותר 3 פעמים הגודל של S.

בשלב השני, נוכיח $e_G(S,V(G)\setminus S)\ge 3\cdot C_O(G-S)-4$.

לפי סעיף ג, לכל רכיבי הקשירות חוץ מ-2 (לכל היותר), יש לפחות 3 צלעות בין S וכל רכיב קשירות אי-זוגי ב- $(G-S)$. אז כל רכיבי הקשירות האי-זוגיים (חוץ מ-2 לכל היותר) תורמים 3 צלעות לפחות ל-$e_G(S,V(G)\setminus S)$, ואז נוריד לכל היותר 4 עבור שני הרכיבי קשירות האי-זוגיים שמחוברים בצלע אחת.

סעיף ה: ראשית, נוכיח ש- $v(G)$ זוגי. הגרף 3 רגולרי, אז עם למת לחיצת הידיים נקבל:

$$2e(G)=\sum_{v\in V(G)}\deg_G v=\sum_{v\in V(G)} 3 = 3v(G)$$

כלומר $v(G)$ חייב להיות זוגי. ובכל גרף ולכל S מתקיים:

$$v(G)=|S|+\sum_{C\in C_E(G-S)}|C|+\sum_{C\in C_O(G-S)}|C|$$

מספר הקודקודים בגרף הוא הגודל של S, ועוד סכום הגדלים של רכיבי הקשירות האי-זוגיים של $(G-S)$, ועוד סכום הגדלים של רכיבי הקשירות הזוגיים של $(G-S)$.

שני האיברים $v(G),\sum_{C\in C_E(G-S)}|C|$ זוגיים. אז $|S|+\sum_{C\in C_O(G-S)}|C|$ חייב להיות זוגי.

אז אם $|S|$ זוגי גם $\sum_{C\in C_O(G-S)}|C|$, ובגלל שזה סכום של גדלים אי-זוגיים, חייב להתקיים ש- $C_O(G-S)$ זוגי.

ואם $|S|$ אי-זוגי גם $\sum_{C\in C_O(G-S)}|C|$, ובגלל שזה סכום של גדלים אי-זוגיים, חייב להתקיים ש- $C_O(G-S)$ אי-זוגי.

כנדרש.

סעיף ו: נוכיח שבגרף שלנו – גרף 3-רגולרי עם לכל היותר 2 גשרים – יש שידוך מושלם.

נב"ש שאין שידוך מושלם. לפי משפט *Tutte*, זה אומר שקיימת קבוצה S כך ש- $|S|<C_O(G-S)$. נסמן $c\coloneqq C_O(G-S)$, ומסעיף ד נקבל:

$$3|S|\ge 3c-4 \Longrightarrow |S|\ge c-\frac{4}{3}$$

בגלל שמדובר בשלמים, צריך לעגל את זה ל- $|S| \geq c-1$. אז נוכל לרשום:

$$|S| > c-2$$

סתירה להנחה ש- $|S| < C_O(G-S)$.

כנדרש.

עוד דרך – הפיתרון באתר: נב"ש שאין שידוך מושלם. לפי משפט *Tutte*, זה אומר שקיימת קבוצה S כך ש- $|S| < C_O(G-S)$. נסמן $c \coloneqq C_O(G-S)$.

מסעיף ה, יש להם אותה זוגיות אז $|S| \leq c-2 \Rightarrow |S|+2 \leq c$. ומסעיף ד נקבל: $3|S| \geq 3c-4 \Rightarrow |S| \geq c-\frac{4}{3}$. בסה"כ,

$$c-2 \geq |S| \geq c-\frac{4}{3} \Rightarrow -2 \geq |S|-c \geq -\frac{4}{3} \Rightarrow 2 \leq c-|S| \leq \frac{4}{3} \Rightarrow 2 \leq \frac{4}{3}$$

סתירה.

.