6: Whitney's Theorem

אפיון מבנה של גרפים

הגדרה: נסמן $\boldsymbol{d_G(u,v)}$ את אורך המסלול הקצר ביותר (מספר הצלעות במסלול) שיש בין u ל-v בגרף.

בלוקים של גרפים

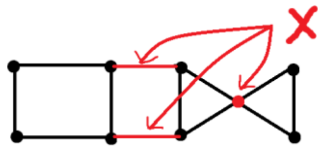
עבור גרף G, נסמן $\boldsymbol{C(G)}$ את מספר מרכיבי הקשירות של הגרף.

הגדרה: קבוצה $X \subseteq V(G) \cup E(G)$ שמקיימת:

$$C(G-X) > C(G)$$

נקראת ***disconnector*** (מנתק). X יכול להיות מורכב מקודקודים וצלעות.

למשל בגרף הבא יש מרכיב קשירות יחיד:

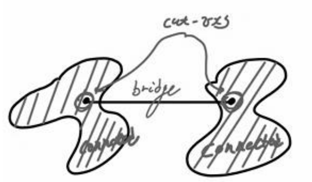


אם נוריד את הקודקוד והצלעות האדומים (הקבוצה X), יהיו 3 רכיבי קשירות. X היא *disconnector*.

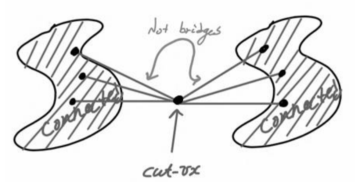
אם $X \subseteq V(G)$, היא נקראת *vertex-disconnector*. אם X בגודל 1 היא נקראת **קודקוד חתך** (*cut-vertex*).

אם $X \subseteq E(G)$, היא נקראת *edge-disconnector*. אם X בגודל 1 היא נקראת **גשר** (*bridge*).

הקצוות של גשרים הם קודקודי חתך:



מצד שני, הצלעות שמחוברות לקודקוד חתך הן לא בהכרח גשרים:



אבחנה: צלע בגרף מהווה גשר **אמ"מ** היא לא נמצאת על אף מעגל בגרף.

הוכחה: נוכיח את השלילה – צלע היא לא גשר אמ"מ היא כן על מעגל.

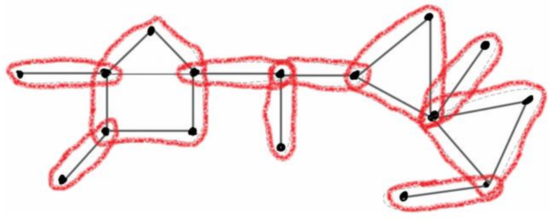
<u>כיוון ראשון</u>: תהי צלע uv על מעגל בגרף. מהגדרת מעגל יש גם מסלול $u \rightsquigarrow v$. אז אם נוריד את הצלע, עדיין אפשר לעבור בין v ל-u.

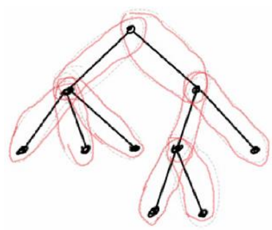
<u>כיוון שני</u>: תהי צלע uv שאינה גשר. כלומר שאפשר לנתק אותה ועדיין להגיע מ-u ל-v.

אם יש מסלול $v \rightsquigarrow u$, אז ביחד עם הצלע, יש מסלול $u \to v \rightsquigarrow u$, שזה מעגל.

תת-גרף מקסימלי של G (שאי אפשר להוסיף לו קודקודים או צלעות) שאין בו קודקודי חתך ייקרא **בלוק** של G.

דוגמאות. נשים לב שהצלעות של עץ הן בלוקים (כל אחת), כי עבור כל צלע, כל קודקוד שנוסיף יהפוך את זה לתת-גרף שיש בו קודקוד חתך.





6: Whitney's Theorem

משפט וויטני – *Whitney's Theorem*

יהי G גרף קשיר, עם $|V(G)| \geq 3$. ב-G אין קודקודי חתך **אמ"מ** כל שני קודקודים חולקים מעגל.

כיוון ראשון: נניח שכל שני קודקודים חולקים מעגל. נב"ש שיש ב-G קודקוד חתך, v.

כלומר יש לפחות 2 קודקודים שאם ננתק את v, הם יהפכו להיות ברכיבי קשירות שונים. סתירה לכך שכל שני קודקודים חולקים מעגל.

כיוון שני: נניח שאין קודקודי חתך. נוכיח באינדוקציה על $d_G(u,v)$ שכל שני קודקודים חולקים מעגל.

בסיס: יהיו שני קודקודים u, v שמקיימים: $d_G(u,v)=1$. כלומר קיימת צלע $(u,v) \in E(G)$.

נוכל להניח שהיא לא גשר (כי אז הקודקודים שלה היו קודקודי חתך). כלומר היא על מעגל. כלומר המעגל מכיל את u ואת v.

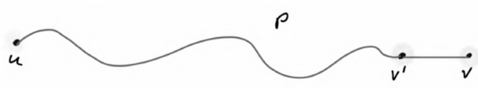
צעד: נניח שהטענה נכונה עבור כל זוגות הקודקודים x, y שמקיימים $d_G(x,y)<k$.

כלומר, כל שני קודקודים שהמרחק ביניהם קטן מ-k, חולקים מעגל.

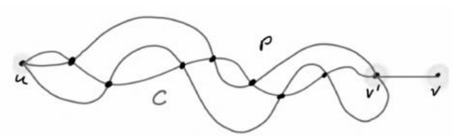
נשקול זוג קודקודים u, v שמקיים $d_G(u,v)=k$. נראה שהם חולקים מעגל.

יהי P המסלול הקצר ביותר בין u ל-v (הוא באורך k). ויהי v' הקודקוד הקודם ל-v במסלול. (מכיוון ש $k>1$, יש קודקוד כזה והוא לא v).

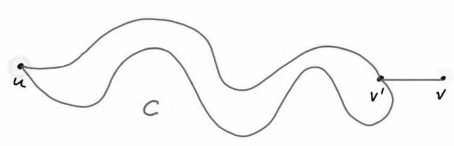
כלומר יש את המבנה: $v \to v' \rightsquigarrow u$. מתכונת תת-מסלול קצר, מתקיים $d_G(u,v')=k-1$.



אז מהנ"א, u, v' חולקים מעגל, נקרא לו C.



אם $v \in V(C)$, סיימנו. נניח ש- $v \notin V(C)$. כלומר המצב הוא:



נשים לב ש-u ו-v' מחלקים את המעגל לשתי קשתות: $uCv', v'Cu$. הראשון בכיוון כלשהו – בה"כ המסלול התחתון, והשני ממשיך באותו כיוון (העליון).

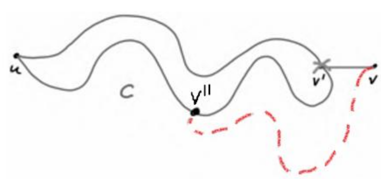
כך שאם נלך על uCv' ואז נמשיך עם $v'Cu$, לא נלך מיד על הצלע האחרונה שהיינו בה.

הנחנו שאין ב-G קודקודי חתך, אז בפרט v' הוא לא קודקוד חתך. כלומר, $G-v'$ הוא קשיר. אז ב- $G-v'$ יש אחד משני מסלולים:

אפשרות 1, המסלול: $(v, uCv'-v')$.

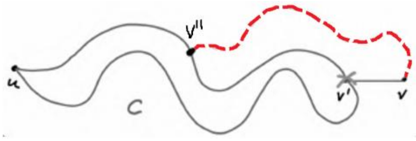
כלומר, נתחיל מ-v, ונלך עד שנפגוש את המסלול $uCv'-v'$ (מה שנשאר מהמסלול uCv' אחרי שהורדנו את v').

נקודת המפגש יכולה (אבל לא חייבת) להיות u. נסמן אותה v'':



בגרף G, המסלול הבא הוא מעגל: נלך מ-u על uCv' עד v'', נלך על P' עד v, נלך בצלע vv', ונלך על $v'Cu$.

אפשרות 2, המסלול $(v, v'Cu-v')$:

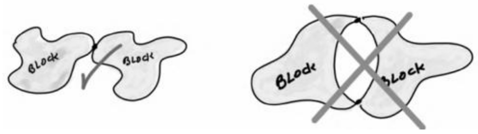


בגרף G, המסלול הבא הוא מעגל: נלך מ-u על $v'Cu$ עד v'', נלך על P' עד v, נלך בצלע vv', ונלך על uCv' (הפעם "בכיוון ההפוך").

בשני המקרים, מצאנו מעגל שמכיל את u ואת v, כנדרש.

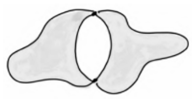
השלכות של משפט וויטני

טענה: יהי G גרף. כל שני בלוקים בגרף נפגשים בלכל היותר קודקוד אחד:

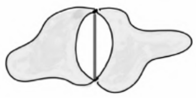


הוכחה:

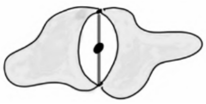
נניח (בשלילה) שיש שני קודקודי מפגש:



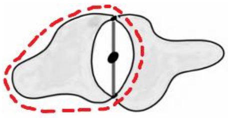
אם אין ביניהם צלע – נוסיף אותה:



נוסיף קודקוד באמצע הצלע:



נוכיח שבכל אחד מהצדדים אין קודקוד חתך. נתמקד בה"כ בצד שמאל:



בתוך כל בלוק מקורי אין קודקוד חתך (מהגדרת בלוק). זה כולל את שני קודקודי החיבור.

וגם הקודקוד החדש באמצע, אם נוריד אותו עדיין אפשר להגיע לשני הקודקודים שהוא מחובר אליהם.

עכשיו נפעיל את משפט וויטני על כל אחד מהצדדים. בה"כ, על צד שמאל.

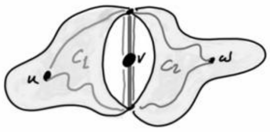
יש בו לפחות 3 קודקודים (השניים של המפגש והנוסף באמצע) והוכחנו שאין בו קודקודי חתך. אז לפי משפט וויטני, כל שני קודקודים בו חולקים בו מעגל.

ובפרט, שני קודקודי המפגש, או כל קודקוד בתוך הבלוק. וכמובן שבתוך הבלוק יש לפחות קודקוד אחד חוץ מקודקודי המפגש (כי אחרת אין בלוק).

אז נקרא לקודקוד הזה u, ויש מעגל שהוא חולק עם כל אחד מקודקודי המפגש.

כלומר יש מסלול מ-u לקודקוד מפגש, מהקודקוד מפגש לקודקוד מפגש השני, וחזרה ל-u.

אותו דבר מתקיים גם לצד ימין, ובסה"כ נקבל:



עכשיו אפשר להתעלם מהצלע והקודקוד שהוספנו, ועדיין יש מעגל $C_1 \cup C_2$: מ-u לקודקוד מפגש, ל-w, לקודקוד מפגש השני, ובחזרה ל-u.

כלומר כל זוג קודקודים בגרף יושבים על מעגל משותף, אז שוב לפי משפט וויטני אין בגרף קודקודי חתך. אז הוא בעצם בלוק אחד, סתירה.

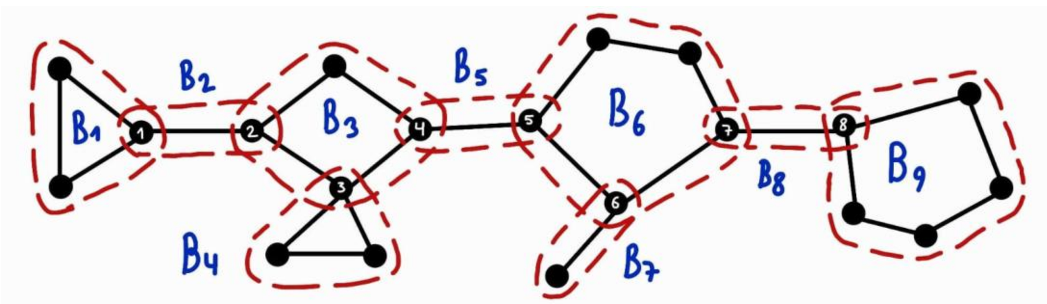
מתוך זה שהבלוקים נפגשים בלכל היותר קודקוד אחד, נובע שבלוקים לא נפגשים בצלעות בכלל.

כלומר, הם מהווים **חלוקה** של $E(G)$, ומגדירים יחס שקילות על הצלעות. כלומר, שתי צלעות יקיימו $e \sim f$ אם הן באותו בלוק.

Block Trees

בהינתן גרף G, נוכל להגדיר גרף עזר. נסמן:

$$B(G) \coloneqq \{B : B \subseteq G \text{ is a block of } G\}, \qquad C(G) \coloneqq \{v \in V(G) : \ v \text{ is a cut-vx of } G\}$$



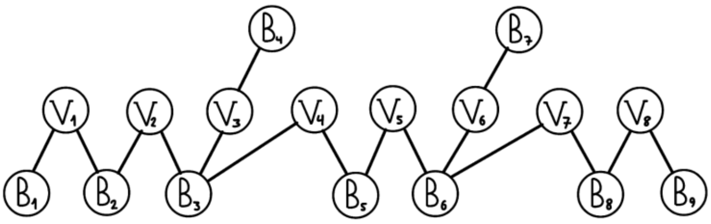
הקודקודים הממוספרים הם קודקודי חתך.

ונגדיר את $BC(G)$ להיות הגרף שקודקודיו הם $B(G) \cup C(G)$, והצלעות הן:

$$\{\{B,v\} : B \in B(G), v \in C(G), v \in B\}$$

כלומר, נחבר צלעות רק בין בלוקים וקודקודי חתך שמחוברים אליהם (אז הגרף דו"צ, קבוצה אחת זה הבלוקים והשנייה היא קודקודי החתך).

נבנה את $BC(G)$:



משפט: אם G קשיר, אז $BC(G)$ הוא עץ.

הוכחה: ראשית, נוכיח שבגרף בלוקים אין מעגלים:

כל מעגל ב-G מוכל בבלוק יחיד. כי בתת-גרף שהוא המעגל, אין קודקודי חתך.

יהי גרף G, ויהי $BC(G)$ גרף הבלוקים שלו. נב"ש שקיים מעגל ב- $BC(G)$.

מהגדרת הבנייה, $BC(G)$ הוא דו"צ. אז כל מעגל שקיים יהיה באורך לפחות 4, והמבנה: $(B_1, v_1, B_2, v_2, \dots, B_i, v_i, B_1)$.

כאשר B_i, v_i יכולים להיות v_2 (במקרה הזה לא נכתוב את ה-"$\dots v_i$").

אז ב-G, יש מסלול מ-v_1 ל-v_2 (דרך B_2) ומסלול מ-v_2 עד v_i (דרך כל הקודקודים והבלוקים שמחוברים בדרך), ומסלול מ-v_i ל-v_1.

כלומר ב-G, v_1, v_i היו על מעגל משותף. אז הם צריכים להיות על אותו בלוק. סתירה.

אז $BC(G)$ הוא גרף חסר מעגלים. נוכיח שאם G קשיר, אז $BC(G)$ קשיר:

אם G קשיר, זה אומר שאפשר להגיע מכל קודקוד לכל קודקוד אחר. כלומר מכל בלוק לכל בלוק אחר.

בין שני בלוקים מחבר בהכרח קודקוד חתך יחיד.

אז אם אפשר להגיע מבלוק אחד לבלוק אחר, יש ביניהם קודקוד חתך (או רצף של בלוקים וקודקודי חתך).

אז יהיה מסלול ביניהם ב-$BC(G)$.

וכל קודקוד חתך חייב להיות מחובר לבלוק, אז אם הבלוקים קשירים גם קודקודי החתך קשירים.

אז $BC(G)$ הוא גרף קשיר חסר מעגלים, שזה עץ.