TA Session 8: Linear Programming

תזכורת

בתכנות לינארי אנחנו מדברים על 6 בעיות:

$$(1)\ \max_{x\in\mathbb{R}^m}\{c^Tx : Ax\le b\},\qquad (2)\ \max_{x\in\mathbb{R}^m}\{c^Tx : x\ge 0, Ax\le b\},\qquad (3)\ \max_{x\in\mathbb{R}^m}\{c^Tx : x\ge 0, Ax= b\}$$

$$(4)\ \min_{x\in\mathbb{R}^m}\{c^Tx : Ax\ge b\},\qquad (5)\ \min_{x\in\mathbb{R}^m}\{c^Tx : x\ge 0, Ax\ge b\},\qquad (6)\ \min_{x\in\mathbb{R}^m}\{c^Tx : x\ge 0, Ax= b\}$$

בכולן, מנסים למצוא את ה-x שממזער או ממקסם את המכפלה הפנימית של c^Tx, תחת מגבלות של יחס כלשהו בין Ax ל-b, והגבלות על x.

מה שנידרש לעשות זה רק להגדיר האם זו בעיית מינימום או מקסימום, להגדיר את x, ולקבוע את ההגבלות.

שלבים למידול בעיה בתכנות לינארי

1. **הגדרת המשתנים – x**

   נגדיר את המשתנים של הבעיה. לדוגמה אם זו בעיה בגרפים, בד"כ נרצה משתנה לכל קודקוד או צלע. המשתנים האלה ביחד הם x.

2. **הגדרת מטרה – *min/max***

   נגדיר אם רוצים למקסם או למזער את סכום המשתנים, עם מקדמים אם צריך.

3. **הגדרת הגבלות**

   נגדיר את היחס בין Ax ל- b. היחסים המותרים הם: $\ge\ \ \le\ \ =$. אסור $>$ או $<$.

   בנוסף, נגדיר אם $x\ge 0$.

   בדרך כלל בבעיית מינימום נגביל $Ax\ge b$ ולא $Ax\le b$, כי אם זו בעיית מינימום ויש פתרון כך ש $Ax\le b$,
   בוודאי ניקח אותו ולא פתרון גדול יותר (ובפרט לא ניקח פתרון שבו $Ax\ge b$).
   ובאופן דומה והפוך עבור בעיית מקסימום.

הרבה פעמים לא נצליח למדל את הבעיה בתכנות לינארי, אלא רק בתכנות בשלמים (שהמשתנים יכולים לקבל רק ערכים שלמים). אין לזה אלגוריתם פולינומי, אבל ה-*relaxation* של הבעיה יכול להיות קירוב טוב.

דוגמה: שידוך מקסימלי

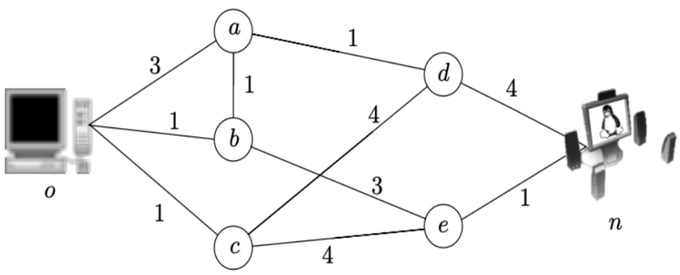
המשתנים יהיו הצלעות. כלומר $\forall 1\le i\le m: x_i\in\{0,1\}$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)$, כאשר כל x_i מתאים ל- $e_i\in E(G)$.

המטרה היא למקסם את מספר הצלעות בשידוך. כלומר נגדיר $c=(1,1,\dots,1)$, ואז נרצה למקסם את $\sum_{i=1}^m c_ix_i=\sum_{i=1}^m 1\cdot x_i=\sum_{i=1}^m x_i$.

הגבלות: כל קודקוד מחובר רק לצלע אחת בשידוך. כלומר אם קודקוד v מחובר לצלעות $e_1,\dots e_k$, אז $x[e_1]+\cdots+x[e_k]\le 1$.

$$\max_{x\in\{0,1\}^m}\left\{1^m\cdot x : \forall u\in V(G), \sum_{v\in N_G(u)} x[e_{uv}]\le 1\right\}$$

תרגיל: רשת זרימה



המטרה:

$$\max\sum_{v\in N_G(o)} e_{ov},\qquad \forall uv\in E(G): -c(uv)\le e_{uv}\le c(uv),\qquad e_{uv}=-e_{vu},\qquad \forall v\in V(G): \sum_{u\in N_G(v)} e_{uv}=0$$

TA Session 8: Linear Programming

ריגרסיה לינארית

נתון אוסף של נקודות במישור. המטרה היא למצוא ישר $y = ax + b$ כך שסכום המרחקים של הנקודות מהקו הוא מינימלי. כלומר:

$$\min_{a,b}\left\{\sum_{i=1}^{n}|a\cdot x_i + b - y_i|\right\}$$

ערך מוחלט זה לא לינארי. איך נבטא את זה בצורה לינארית?

נגדיר לכל נקודה משתנה e_i שמבטא את ה-$error$ שלה. ואז נרצה למזער את $\min_{a,b}\{\sum_{i=1}^{n} e_i\}$. ונגדיר אילוצים:

$$e_i \geq a\cdot x_i + b - y_i, \qquad e_i \geq -(a\cdot x_i + b - y_i)$$

הפרדת נקודות

נתונות שתי קבוצות של נקודות במישור:

$$A \coloneqq \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \qquad B \coloneqq \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

ונרצה למצוא קו שמפריד בין הקבוצות. כלומר, ישר $y = ax + b$ כך ש:

$$y(p_i) > ax(p_i) + b, \qquad \forall p_i \in A$$

$$y(p_i) < ax(p_i) + b, \qquad \forall p_i \in B$$

אבל אסור $>$, $<$. אז נוסיף משתנה δ שמייצג את המרווח בין הקו לנקודות. ונוסיף דרישה למקסם גם אותו. אם $\delta = 0$ אז אין פתרון.

$$y(p_i) \geq ax(p_i) + b + \delta, \qquad \forall p_i \in A$$

$$y(p_i) \leq ax(p_i) + b - \delta, \qquad \forall p_i \in B$$

הכללה לפולינום

נחפש $y = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, ומשתנה δ, כך ש:

$$y(p_i) \geq a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 + \delta, \qquad \forall p_i \in A$$

$$y(p_i) \leq a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 - \delta, \qquad \forall p_i \in B$$

קבוצה בת"ל מקסימום

לכל קודקוד $v \in V(G)$ נגדיר $x_i \in \{0,1\}$. אנחנו רוצים למקסם את Σx_v תחת ההגבלות:

$$\forall uv \in E(G): x_v + x_u \leq 1$$

נעשה *relaxation*:

אם נאפשר ממשיים, אז יש פתרון אופטימלי עם $x_v = 0.5$ לכל קודקוד. זה נותן סכום $v(G)/2$.

אבל הפתרון האמיתי (בשלמים) יכול להיות הרבה פחות מזה. לדוגמה בגרף המלא, הפתרון הוא 1.

שידוך במשקל מקסימלי

נתון גרף דו"צ מאוזן (שתי הקבוצות באותו גודל) עם משקולות w_e על הצלעות. נרצה למצוא שידוך מושלם במשקל מקסימלי.

$$\max_{e\in E(G)} w_e \cdot x_e\,, \qquad \forall e \in E(G): x_e \in \{0,1\}$$

$$\sum_{e|v\in e} x_e = 1, \qquad \forall v \in V(G)$$

טענה: הפתרון האופטימלי בממשיים = הפתרון האופטימלי בשלמים

<u>הוכחה</u>: יהי x^* פתרון אופטימלי בממשיים, ויהי $w(x^*)$ המשקל שלו. נמצא את הפתרון האופטימלי בשלמים.

נסמן $k(x^*)$ את מספר המשתנים שקיבלו ערך לא שלם ב-x^*.

אם $k(x^*) = 0$, סיימנו.

אחרת: ניקח צלע (a_1, b_1) עם משקל לא שלם.

יש עוד צלע (b_1, a_2) עם משקל לא שלם, כי כל קודקוד מסתכם ל-1.

באותו אופן יש עוד צלע (a_2, b_2)... עד שנסגור מעגל עם (b_j, a_1).

נסמן את המעגל $C \coloneqq (e_1, e_2, \dots, e_t)$. הגרף דו"צ, אז t זוגי.

עבור צלעות זוגיות $(e_2, e_4, \dots e_t)$ נוסיף ε. ועבור צלעות אי-זוגיות $(e_1, e_3, \dots, e_{t-1})$ נחסיר ε.

נסתכל על המשקל של הפתרון אחרי כל שינוי:

$$\begin{aligned} w\left(x^{*\prime}\right) &= \sum_{e \notin C} x_e^* \cdot w_e + \sum_{e \in C_{even}} (x_e^* + \varepsilon) \cdot w_e + \sum_{e \in C_{odd}} (x_e^* - \varepsilon) \cdot w_e \\ &= \sum_{e \notin C} x_e^* \cdot w_e + \sum_{e \in C_{even}} x_e^* \cdot w_e + \sum_{e \in C_{odd}} x_e^* \cdot w_e + \sum_{e \in C_{even}} \varepsilon \cdot w_e - \sum_{e \in C_{odd}} \varepsilon \cdot w_e \\ &= \sum_{e} x_e^* \cdot w_e + \sum_{e \in C_{even}} \varepsilon \cdot w_e - \sum_{e \in C_{odd}} \varepsilon \cdot w_e \end{aligned}$$

נוכל לבחור ε חיובי או שלילי כך שהפתרון לא יקטן. והוא אף פעם לא יגדל, כי לקחנו פתרון אופטימלי (מקסימום).

ונשים לב שעבור כל קודקוד, סכום הצלעות שלו עדיין 1.

אז אם ניקח את ה-ε עם ערך מוחלט הכי גדול שעדיין שומר על המשקלים בין 0 ל-1, נקבל פתרון באותו משקל שיש בו רכיב אחד פחות שלא שלם.

ונוכל לחזור על התהליך עד שאין רכיבים לא שלמים.