19: The Lovász local lemma

יהיו $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ אירועים "רעים" (באותו מרחב הסתברות). אנחנו רוצים להוכיח שההסתברות שכל האירועים לא קורים היא גדולה ממש מ-0:

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{n} \bar{\mathcal{E}}_i\right] > 0$$

נזכור שאם אירועים A, B הם בת"ל, אזי $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$. וגם, $\bar{A}, \bar{B}$ בת"ל:

$$\mathbb{P}[\bar{A} \cap \bar{B}] = 1 - \mathbb{P}[\bar{A} \cup \bar{B}] = 1 - (\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]) = 1 - \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[A \cap B]$$
$$= 1 - \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B] = (1 - \mathbb{P}[A])(1 - \mathbb{P}[B]) = \mathbb{P}[\bar{A}] \cdot \mathbb{P}[\bar{B}]$$

אם האירועים $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ היו בת"ל בזוגות, אז גם האירועים המשלימים $\overline{\mathcal{E}_1}, \dots, \overline{\mathcal{E}_n}$ הם בת"ל בזוגות.

אם בנוסף, $\mathbb{P}[\mathcal{E}_i] < 1$ לכל $i \in [n]$, אז, **אם השוויון הראשון מתקיים** היינו מקבלים:

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{n} \bar{\mathcal{E}}_i\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[\bar{\mathcal{E}}_i] = \prod_{i=1}^{n} \underbrace{(1 - \mathbb{P}[\mathcal{E}_i])}_{>0} > 0$$

אבל, בת"ל בזוגות לא בהכרח גורר את השוויון הראשון. בשביל זה, צריך משהו חזק יותר, **אי-תלות הדדית** (*mutual independence*).

אי-תלות הדדית של משתנים מקריים

מאורעות $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ ייקראו בלתי תלויים הדדית אם לכל $\emptyset \neq I \subseteq [n]$ מתקיים:

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i\right] = \prod_{i \in I} \mathbb{P}[\mathcal{E}_i]$$

ניסוח אחר:

נאמר שאירוע A הוא בת"ל הדדית מ- $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ אם לכל $\emptyset \neq I \subseteq [n]$ מתקיים:

$$\mathbb{P}\left[A \mid \bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i\right] = \mathbb{P}[A]$$

אז אם כל $\mathcal{E}_i$ הוא בת"ל הדדית מ- $\{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n\} \setminus \{\mathcal{E}_i\}$, נאמר ש- $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ בת"ל הדדית.

עוד ניסוח:

נאמר שאירוע A הוא בת"ל הדדית מ- $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ אם לכל $i \in [n]$, עבור $B_i \in \{\mathcal{E}_i, \bar{\mathcal{E}}_i\}$ מתקיים:

$$\mathbb{P}\left[A \mid \bigcap_{i=1}^{n} B_i\right] = \mathbb{P}[A]$$

כלומר, זה לא משנה האם האירוע $\mathcal{E}_i$ קרה או לא, זה לא משפיע על ההסתברות של A.

כמו עם אי-תלות בזוגות, אם $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ בת"ל הדדית אז גם המשלימים $\overline{\mathcal{E}_1}, \dots, \overline{\mathcal{E}_n}$ הם בת"ל הדדית.

עקרון אי-תלות הדדית – *The Mutual Independence Principle*

תהי סדרה של ניסויים בת"ל בזוגות: $\mathcal{X} := (X_1, \dots, X_m)$. ויהיו קבוצת מאורעות $\{A_1, \dots, A_n\}$. כאשר כל מאורע נקבע ע"י קבוצת ניסויים $F_i \subseteq \mathcal{X}$.

בהינתן $I \subseteq [n]$, $j \in [n] \setminus I$ (ניקח קבוצה של מאורעות, ועוד מאורע שלא בקבוצה), אם מתקיים:

$$F_j \cap (\cup_{i \in I} F_i) = \emptyset$$

אז A_j בת"ל הדדית מ- $(A_i)_{i \in I}$.

זאת דרך לבדוק אי-תלות דרך הניסויים עצמם, בלי צורך לדעת את ההסתברויות.

מה אם $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ כן תלויים אחד בשני באופן מסויים? **למת הלוקאליות של לובאס** נותנת לנו פתרון חלקי.

19: The Lovász local lemma

למת הלוקאליות של לובאס

יש כמה גרסאות. אנחנו נשתמש ב**גרסה הסימטרית.** נתמקד בשימוש של הלמה ולא בהוכחה.

בשביל הלמה, נשתמש ב**גרף תלויות – *Dependency Graph*:**

עבור מאורעות $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$, **גרף התלויות** שלהם $D \coloneqq D(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$ הוא **כל גרף** שהקודקודים שלו הם $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$, ושמקיים את התכונה:

לכל $i \in [n]$, המאורע $\mathcal{E}_i$ הוא בת"ל הדדית מכל המאורעות שאינם סמוכים לו בגרף: $\{\mathcal{E}_j : ij \notin E(D)\}$.

נשים לב: לא בנינו את הגרף במיוחד בצורה מסויימת עם צלעות לפי התלויות. <u>כל גרף</u> שמקיים את התכונה, הוא גרף תלויות.

בגרסאות א-סימטריות של הלמה, משתמשים גרסה מכוונת של הגרף.

הלמה עצמה:

יהיו מאורעות $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ כך שמתקיימים כל הדברים הבאים:

1. **סימטריות:** מתקיים $\mathbb{P}[\mathcal{E}_i] \leq p$ לכל $i \in [n]$. (בגרסה הא-סימטרית, זה p_i שיכול להיות שונה לכל מאורע).
2. **תלות מוגבלת:** בגרף תלויות של המאורעות, יש חסם על הדרגה המקסימלית: $\Delta\big(D(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)\big) \leq d$.
3. **חסם על $\boldsymbol{p, d}$:** מתקיים: $e \cdot p \cdot (d+1) \leq 1$. (כאן, e זה קבוע אוילר). לפעמים לוקחים חסם קשוח יותר: $4pd \leq 1$.

אזי,

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{n} \bar{\mathcal{E}}_i\right] > 0$$

הסבר אינטואיטיבי: אם יש לנו מאורעות "רעים", שאנחנו לא רוצים שיקרו, מה ההסתברות שבאמת כולם לא קרו?

הלמה של לובאס לא נותנת לנו את ההסתברות, אבל הוא יכולה להבטיח שזו הסתברות גדולה מאפס. כלומר יש סיכוי שמשהו טוב קרה.

הלמה בעצם תופסת גם למקרים שיש תלויות, אבל לא יותר מדי. זה התנאי השני.

התנאי הראשון מחייב שההסתברות לכל מאורע לא גדולה מדי.

התנאי השלישי משלב ביניהם.