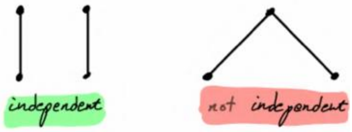
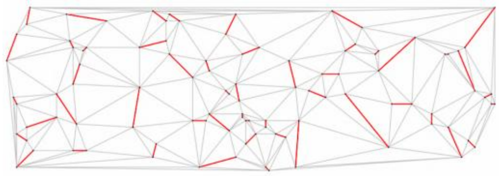
3: König's Theorem

König's Theorem

Independent Edges – נאמר ש-2 צלעות הן בת"ל אם אין להן קודקוד משותף:



Matching – קבוצה $M \subseteq E(G)$ תיקרא **שידוך** אם כל הצלעות בה בת"ל:



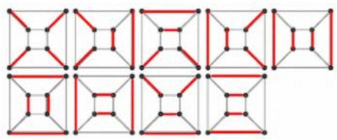
נסמן $V(M)$ את הקודקודים **המרווים** ע"י M (הקודקודים ש-M "תופס").

לפעמים נתייחס ל-M בתור תת גרף של G, המיוצג ע"י $(V(M), M)$.

שידוך M המקיים $V(M) = V(G)$ ייקרא **תת-גרף פורש** של G (תת-גרף שמכיל את כל הקודקודים). לדוגמה - $(V(G), \phi)$.

1-factor – שידוך מושלם

עבור גרף G, קבוצה $M \subseteq E(G)$ הפורשת את G תיקרא שידוך מושלם:

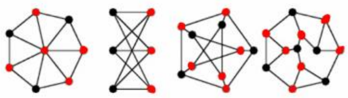


בעיית ***Max Matchings*:** בהינתן גרף, נמצא שידוך בגודל מקסימום. הבעיה הזו נמצאת ב-*P*. כל שידוך מושלם הוא בפרט גם שידוך מקסימום.

בגרף כללי אפשר לפתור ע"י אלגוריתם *Edmonds* או *Hopcroft-Karp*. בגרף דו"צ אפשר ע"י *Max-flow* או השיטה ההונגרית (בהמשך).

Vertex Covers – כיסוי קודקודים

עבור גרף G, תת-קבוצה $V \subseteq V(G)$ תיקרא כיסוי בקודקודים של G אם לכל צלע $(u, v) \in E(G)$ מתקיים: $u \in V$ או $v \in V$.



באופן טריוויאלי, הקבוצה $V(G)$ היא כיסוי בקודקודים של G.

בעיית ***Min. Vertex-Cover***: בהינתן גרף, נרצה למצוא כיסוי של G במינימום קודקודים.

עבור גרף כללי ללא הגבלות, הבעיה היא *NPC*.

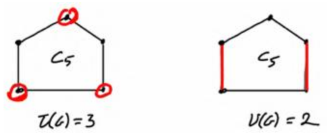
הקשר בין כיסוי קודקודים מינימום ושידוך מקסימום

גודל השידוך המקסימום בגרף מסומן $\nu(G)$ (נו, *nu*). גודל הכיסוי המינימום מסומן $\tau(G)$ (טאו, *tau*).

באופן טריוויאלי, מתקיים ש $\tau(G) \geq \nu(G)$.

כי בהינתן שידוך מקסימום, כל כיסוי (ובפרט המינימום) יצטרך להשקיע לפחות קודקוד אחד בכל צלע בשידוך כדי לכסות אותן.

ייתכנו גרפים שבהם $\tau(G) > \nu(G)$, לדוגמה:



לכל משפחת גרפים $\mathcal{G}$ שעבורה נוכיח ש:

$$\forall G \in \mathcal{G}, \qquad \tau(G) = \nu(G)$$

יהיה לנו אלגוריתם פולינומי ל-*Min. Vertex-Cover*.

כלומר התנאי הזה מביא את הבעיה מ-NPC ל-P.

האם קיימת משפחה (מעניינת מספיק, שימושית מספיק) שמקיימת את התנאי?

König, Hall, & Frobenius

König's Theorem:

יהי G גרף דו"צ. אזי, $\tau(G) = \nu(G)$.

לדוגמה, עבור $K_{3,3}$:

Hall's Theorem:

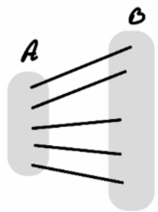
יהי $G = (A \cup B, E)$ גרף דו"צ.

אזי, ניתן לשדך את A ל-B **אמ"מ** לכל S תת-קבוצה של A, מספר השכנים של S הוא לפחות כמו מספר הקודקודים של S. נסמן:

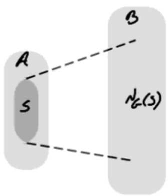
$$A \circlearrowleft B \iff \forall S \subseteq A: |N_G(S)| \geq |S|$$

צד ימין נקרא תנאי הול (*Hall condition*).

$A \circlearrowleft B$ הכוונה ש-A משתדך לתוך B: כל הצלעות שיש בין A ל-B מהוות שידוך:



תנאי הול: $\forall S \subseteq A: |N_G(S)| \geq |S|$:



Forbenius' Theorem:

יהי $G = (A \cup B, E)$ גרף דו"צ.

אזי, קיים ב-G שידוך מושלם **אמ"מ** B,A שווים בגודלם וגם אחד מהם מקיים את תנאי הול.

טענה: 3 המשפטים שקולים.

הטענה *Forbenius* → *Hall* היא טריוויאלית, כי *Forbenius* הוא מקרה פרטי של *Hall*. (זה בעצם משפט החתונה של הול).

נוכיח ש *König* → *Forbenius*. נניח שמשפט *Forbenius* נכון ונוכיח שמשפט *König* נכון.

יהי גרף דו-צדדי $G = (A \cup B, E)$. ע"פ ההנחה, קיים ב-G שידוך מושלם **אמ"מ** B,A שווים בגודלם וגם אחד מהם מקיים את תנאי הול.

נרצה להוכיח ש $\tau(G) = \nu(G)$.

באופן טריוויאלי מתקיים $\tau(G) \geq \nu(G)$, אז מספיק להוכיח $\tau(G) \leq \nu(G)$.

נותר להוכיח ש *König* ⇔ *Hall*.

כיוון ראשון: נניח *Hall* ונוכיח את *König*.

יהי גרף דו-צדדי $G = (A \cup B, E)$. לפי משפט הול, $A \circlearrowleft B \iff \forall S \subseteq A: |N_G(S)| \geq |S|$.

נרצה להוכיח ש $\tau(G) = \nu(G)$. באופן טריוויאלי מתקיים $\tau(G) \geq \nu(G)$, אז מספיק להוכיח $\tau(G) \leq \nu(G)$.

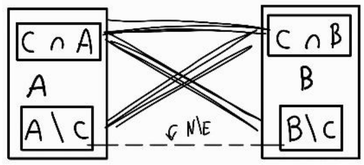
אם נראה שידוך ב-G בגודל לפחות $\tau(G)$, אז מכיוון ש $\nu(G)$ זה השידוך המקסימום, זה יגרור $\tau(G) \leq \nu(G)$.

יהי $C \subseteq V(G)$ כיסוי מינימום בקודקודים של G. כלומר $|C| = \tau(G)$.

3: König's Theorem

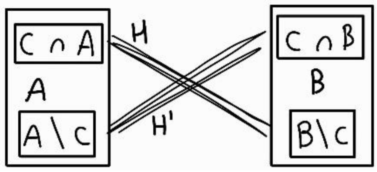
ניתן לחלק את A ל: $A \cap C,\ A \setminus C$. ואת B ל: $B \cap C,\ B \setminus C$.

נשים לב שאין צלע בין $A \setminus C$ ל-$B \setminus C$, כי C לא מכסה אותה:



נגדיר 2 תתי-גרפים של G:

$$H \coloneqq G[A \cap C, B \setminus C], \qquad H' \coloneqq G[B \cap C, A \setminus C]$$



נשים לב שמתקיים:

$$\tau(G) = |C| = |A \cap C| + |B \cap C|$$

כי כל קודקוד ב-C שייך גם ל-A או ל-B.

כלומר כדי להראות שקיים שידוך בגודל לפחות $\tau(G)$, נרצה להראות שיש שידוך מושלם בשני הגרפים H, H'.

מספיק להראות ש:

$$\nu(H') \geq |B \cap C|, \qquad \nu(H) \geq |A \cap C|$$

נתמקד ב- $A \cap C$ ו-H. (בה"כ. אותו טיעון יעבוד גם על $B \cap C$ ו- H').

אנחנו בעצם רוצים להראות שאפשר לשדך את כל $A \cap C$ לתוך $B \setminus C$.

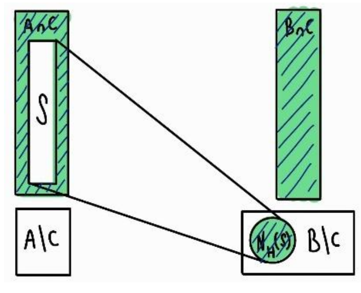
לפי משפט הול, מספיק להראות שבגרף H, הקבוצה $A \cap C$ מקיימת את תנאי הול.

נב"ש ש-$A \cap C$ לא מקיימת את הול, ולכן קיימת $S \subseteq A \cap C$ כך ש- $|N_G(S)| < |S|$.

נגדיר את הכיסוי בקודקודים הבאים:

$$X \coloneqq \big(N_H(S) \cup (B \cap C)\big) \cup \big((A \cap C) \setminus S\big)$$

כך (השטח המקושקש בציור):



נשים לב ש-X מתקבלת מ-C ע"י הורדת S והוספת $N_H(S)$ שהיא קבוצה קטנה יותר.

היא עדיין כיסוי בקודקודים, כי השינוי משפיע רק על צלעות שיוצאות מ-S, וכל הצלעות האלה מחוברות רק ל-$N_H(S)$.

לכן נקבל:

$$|X| < |C| = \tau(G)$$

וזו סתירה למינימליות של C.

כיוון שני: נניח $König$ ונוכיח את $Hall$.

יהי גרף דו-צדדי $G = (A \cup B, E)$. נרצה להוכיח ש: $A \circlearrowleft B \iff \forall S \subseteq A: |N_G(S)| \geq |S|$

הכיוון ← טריוויאלי כי אם A משתדך לתוך B, אז בהכרח $\forall S \subseteq A: |N_G(S)| \geq |S|$.

(כי אם יש קבוצה שיש לה פחות שכנים מאשר קודקודים, אז A לא משתדכת לתוך B).

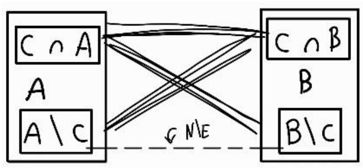
בכיוון →: נניח ש-A מקיים את תנאי הול. נוכיח ש-A משתדך לתוך B.

מספיק להוכיח ש $|A| \geq \tau(G)$. למה? כי לפי קניג, אם הגרף דו"צ אז $\tau(G) = \nu(G)$. ומכאן ינבע ש $\nu(G) \geq |A|$.

3: König's Theorem

זה יראה שקיים בגרף שידוך בגודל לפחות $|A|$, וזה מוכיח ש-A משתדכת לתוך B (כי כל צלע מ-A עוברת רק ל-B).

יהי $C \subseteq V(G)$ כיסוי מינימום בקודקודים של G.



נרצה להוכיח ש $|A| \geq |C|$.

נתבונן ב- $N_G(A \setminus C)$. היא מוכלת ב- $B \cap C$ כי אין צלעות מ- $A \setminus C$ לשום מקום אחר. אז $|N_G(A \setminus C)| \geq |B \cap C|$.

נזכור כי לפי ההנחה, A מקיימת את תנאי הול ולכן $|A \setminus C| \geq |N_G(A \setminus C)|$.

אז נקבל ש $|A \setminus C| \geq |N_G(A \setminus C)| \geq |B \cap C|$. ובסה"כ,

$$\tau(G) = |C| = |A \cap C| + |B \cap C| \geq |A \cap C| + |A \setminus C| = |A|$$

כנדרש.