Some review questions

תרגיל 1

יהי G גרף דו"צ. הוכיחו או הפריכו:

סעיף א: $\tau(G) \leq \nu(G)$ (גודל הכיסוי המינימום הוא לכל היותר גודל השידוך המקסימום).

נוכיח: לפי משפט קניג, מתקיים שוויון.

סעיף ב: $\alpha(G) + \tau(G) \geq \nu(G)$.

נוכיח: בפרט, מתקיים שוויון. קבוצה S היא בת"ל אמ"מ $V(G) \setminus S$ היא כיסוי בקודקודים.

S בת"ל $\Leftrightarrow$ אין אף צלע בין קודקודי S $\Leftrightarrow$ הקודקודים של $V(G) \setminus S$ מכסים את כל הצלעות $\Leftrightarrow$ $V(G) \setminus S$ היא כיסוי.

אז הקבוצה הבת"ל המקסימום משאירה הכי פחות קודקודים לכיסוי המינימום.

סעיף ג: $\varrho(G) + \nu(G) = v(G)$. גודל הכיסוי בצלעות המינימום ועוד גודל השידוך המקסימום, הוא בדיוק מספר הקודקודים.

נפריך: אם יש קודקודים מבודדים, אין כיסוי בצלעות.

סעיף ד: $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

נפריך: גרף שהוא מעגל זוגי הוא דו"צ, ומתקיים: $\chi'(G) = 2 < 3 = \Delta(G) + 1$. בפרט, $\chi'(G) = \Delta(G)$ לכל גרף דו"צ.

סעיף ה: $\Delta(G) > \chi(G)$.

נפריך: גרף שהוא מעגל זוגי הוא דו"צ, ומתקיים: $\chi(G) = 2 = \Delta(G)$.

סעיף ו: $\chi'(G) \leq \chi(G)$.

נפריך: גרף $K_{1,n}$, לכל $n \geq 3$. מתקיים: $\chi'(G) = n > 2 = \chi(G)$.

סעיף ז: $\Delta(G) \leq \kappa(G)$. הדרגה המקסימום היא לכל היותר מספר הקודקודים שצריך להוריד כדי שהגרף יהיה לא קשיר.

נפריך: גרף $K_{1,n}$, לכל $n \geq 2$. מתקיים: $\Delta(G) = n > 1 = \kappa(G)$.

סעיף ח: במהלך ה-*de-randomization* של האלגוריתם ההסתברותי המקרב של *max-cut*, ראינו את הביטוי:

$$\mathbb{E}[e_G(A,B) \mid v_1 \dots v_i \text{ are placed and } v_{i+1} \in A] = e_G(\tilde{A}, \tilde{B}) + \deg_G(v_{i+1}, \tilde{B}) + \frac{\ell}{2}$$

מה מייצג ה- $\ell/2$?

ℓ הוא מספר הצלעות שעוד לא קבענו ב-A או B. $\ell/2$ זה התוחלת של מספר הצלעות שעוד לא מיקמנו, שיחצו את החתך.

סעיף ט: ניזכר בהוכחה לכך שהאלגוריתם המקרב לבעיית *k-centers* הוא 2-מקרב. בהשוואה של האלגוריתם החמדן לאופטימלי היו שני מקרים. מהם?

המקרים הם שיש מרכז אחד מהאופטימלי בכל רדיוס של המרכזים של החמדן, או שלא. במקרה השני, יש רדיוס של החמדן עם שני מרכזים של האופטימלי.

תרגיל 2

בהינתן גרף $G \coloneqq (V,E)$ על n קודקודים, עם פונקציית משקלים שלמים חיוביים על הצלעות: $w\colon E \to \mathbb{Z}_{>0}$, נסמן:

$$w(S) \coloneqq \sum_{e \in E_G(S, V\setminus S)} w(e)$$

את המשקל של החתך המוגדר ע"י S, לכל $S \subseteq V$. ונגדיר:

$$wc(G) \coloneqq \max_{(S, V\setminus S)} w(S)$$

את המשקל המקסימום מבין כל החתכים.

אלגוריתם 1:

Some review questions

1. נאתחל $S=\emptyset$.
2. לולאה *while True*:
   a. אם קיים קודקוד $v\in V$, שאם נעביר אותו לצד השני של החתך נקבל משקל גבוה יותר, אז נעשה את זה ונעדכן את S.
   b. אחרת, נצא מהלולאה.
3. נחזיר את $(S, V\setminus S)$.

סעיף א: נוכיח שהאלגוריתם תמיד עוצר, נחשב את זמן הריצה שלו, ונוכיח האם הוא פולינומי.

האלגוריתם תמיד עוצר: בכל איטרציה אנחנו מגדילים (גדול ממש) את משקל החתך. מכיוון שלחתך המקסימום יש משקל סופי, נעצור מתישהו.

זמן ריצה: יכולות להיות עד $\sum_{e\in E} w(e)$ איטרציות, כאשר כל איטרציה לוקחת זמן $O(n^2)$. בפרט, לא מובטח שקודקוד יישאר בקבוצה אחרי שהעברנו אותו. זה לא פולינומי.

סעיף ב: נוכיח שעבור הקבוצה S המתקבלת מהאלגוריתם, $w(S)\geq wc(G)/2$. כלומר שהוא 0.5-מקרב.

לכל $v\in S$, מתקיים:

$$\sum_{e\in I_v\cap E_G(S,V\setminus S)} w(e)\geq \frac{\sum_{e\in I_v} w(e)}{2}$$

כאשר I_v היא קבוצת הצלעות שמחוברות ל-v. כלומר, החתך תופס לפחות חצי מהמשקל של הצלעות של כל קודקוד, כי אחרת היינו מעבירים את הקודקוד לצד השני. אז בסה"כ מתקיים:

$$4\cdot\sum_{e\in E_G(S,V\setminus S)} w(e)\geq \sum_{v\in S}\sum_{e\in I_v} w(e)+\sum_{v\in S}\sum_{e\in I_v} w(e)=2\cdot\sum_{e\in E} w(e)\geq 2\cdot wc(G)$$

כנדרש.

תרגיל 3

אין קשר בין הסעיפים.

סעיף א: תהי φ נוסחת *CNF* ויהי x משתנה של φ. הליטרל החיובי של x מסומן x, והליטרל השלילי מסומן $\bar{x}$. מופעים של הליטרל החיובי נקראים מופע חיובי, ומופעים של הליטרל השלילי נראים מופע שלילי.

נוסחת *CNF* φ תיקרא מאוזנת אם יש לה את התכונה שלכל משתנה x, מספר המופעים החיוביים והשליליים של x שווים. שימו לב – התכונה היא פנימית לכל משתנה. אם יש 2 מופעים של $x,\bar{x}$, ו-3 מופעים של $y,\bar{y}$, זו נוסחה מאוזנת. וגם, איזון היא תכונה של הנוסחה, ללא קשר לספיקות או השמה כלשהי.

נגדיר L את קבוצת כל הנוסחאות *3-CNF* שמאוזנות וספיקות. נוכיח ש- $L\leq_p$ 3-CNF-SAT.

בהינתן נוסחת *3-CNF*, לכל משתנה x נסמן p_x,n_x את מספר המופעים החיוביים והשליליים שלו. נגדיר גאדג'ט של משתנה:

$$g(x):=\begin{cases}\left(\underbrace{x\vee\ldots\vee x}_{n_x-p_x+1}\vee\bar{x}\right), & p_x<n_x\\ \left(\underbrace{\bar{x}\vee\ldots\vee\bar{x}}_{p_x-n_x+1}\vee x\right), & p_x>n_x\\ (x\vee\bar{x}), & p_x=n_x\end{cases}$$

$$f(\varphi):=\varphi\wedge\bigwedge_{x\in\varphi} g(x)$$

הגאדג'טים האלה תמיד T, אז הם לא משפיעים על הספיקות של הנוסחה. φ ספיקה אמ"מ $f(\varphi)$ ספיקה, כנדרש.

סעיף ב: נגדיר L' את קבוצת נוסחאות *CNF* שיש להן מספר זוגי של משתנים, שעבורן יש השמה מספקת שבה בדיוק חצי מהמשתנים מקבלים T.

נוכיח ש- $L'\leq_p$ CNF-SAT. נזכיר – אין קשר לסעיף א.

לכל משתנה x_i נגדיר משתנה חדש y_i, ונגדיר גאדג'ט: $g(x_i):=(y_i\vee\bar{y}_i)$. ונגדיר:

Some review questions

$$f(\varphi) \coloneqq \varphi \wedge \bigwedge_{x\in\varphi} g(x)$$

כל הגאדג'טים תמיד מסופקים, אז $f(\varphi)$ ספיקה אמ"מ φ ספיקה.

עבור השמה על המשתנים של φ, ניקח את אותה השמה ל-φ ונגדיר T או F למשתנים y_i כדי שיהיה מספר שווה של T ו-F בהשמה.

עבור השמה על המשתנים של φ', נתעלם מהמשתנים y_i וניקח את ההשמה של ה- x_i ל-φ.

תרגיל 4

סעיף א: נתאר את האלגוריתם ההונגרי למציאת שידוך מקסימום בגרף דו"צ. בגדול:

נתחיל עם $M = \emptyset$, וניתן כיוונים לצלעות: צלעות יהיו:

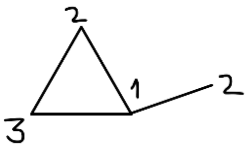
$$A \setminus V(M) \to B \setminus V(M), \qquad B \setminus V(M) \to A \cap V(M), \qquad A \cap V(M) \to B \setminus V(M)$$

ונריץ BFS כדי למצוא מסלולים מ- $A \setminus V(M)$ ל- $B \setminus V(M)$. כל מסלול כזה הוא מסלול מגדיל.

האלגוריתם המפורט, עם הוכחה, נמצא בקובץ 4: משפט ברג' והשיטה ההונגרית.

סעיף ב: נצייר גרף קשיר לא דו"צ שמקיים $\Delta(G) = \chi(G)$.

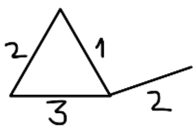
משולש פלוס צלע:



מתקיים $\Delta(G) = 3$.

יש משולש אז $\chi(G) \geq 3$, והצביעה שלנו עם 3 צבעים. אז מתקיים $\Delta(G) = \chi(G)$. הגרף קשיר, ויש בו מעגל אי"ז אז הוא לא דו"צ.

סעיף ג: נצייר גרף לא ריק, קשיר, לא דו"צ, לא מלא, שמקיים $\chi'(G) = \Delta(G)$.



יש משולש אז $\chi'(G) \geq 3$. הצביעה שלנו עם 3 צבעים.

סעיף ד: נצייר גרף קשיר, לא מלא, שמקיים $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

מעגל אי זוגי. $\chi'(G) = 3 = 2 + 1 = \Delta(G) + 1$.

סעיף ה: נצייר גרף לא מלא שמקיים $\tau(G) > \nu(G)$.

נשים לב שאין דרישה שהגרף יהיה קשיר. אז כל גרף שנוסיף לו מספיק קודקודים מבודדים, יקיים את התנאי. או, מעגל אי-זוגי.

סעיף ו: נתאר את האלגוריתם שלמדנו שבהינתן גרף G, מוצא כיסוי בצלעות מינימום (אם קיים).

האלגוריתם מוצא שידוך, ומרחיב אותו לכיסוי לכל קודקוד שלא בכיסוי, מבחר צלע שרירותית שסמוכה אליו ונוסיף אותה. הוכחת הנכונות והמינימליות מבוססת על משפט גלאי: $\rho(G) + \nu(G) = v(G)$ בגרף קשיר.

אנחנו מוסיפים $v(G) - 2\nu(G)$ צלעות. אז גודל הכיסוי המתקבל הוא $|L| = \nu(G) + \big(v(G) - 2\nu(G)\big) = v(G) - \nu(G)$. עם משפט גלאי, נקבל:

$$|L| = v(G) - \nu(G) = v(G) - \big(v(G) - \rho(G)\big) = \rho(G)$$

כנדרש.

Some review questions

סעיף ז: השלימו את המשפט: "יהי G גרף. אזי $BC(G)$ (גרף הבלוקים) הוא עץ אמ"מ ______".

...אמ"מ G הוא קשיר. כי כל גרף בלוקים יהיה חסר מעגלים, כי אם יש מעגל בבלוקים הם היו אותו בלוק. גרף קשיר חסר מעגלים = עץ.

סעיף ח: הגדירו את המושג רדוקציה פולינומית בין שתי שפות.

עבור 2 שפות L_1, L_2, פונקציה תיקרא רדוקציה $L_1 \leq_p L_2$ אם היא מקיימת 3 תנאים:

1. מבנה: הפונקציה מקבלת כל אובייקט x במבנה של L_1 (ללא קשר לשייכות לשפה), ומחזירה אובייקט $f(x)$ במבנה של L_2.
2. זמן: הפונקציה רצה בזמן פולינומי בגודל הקלט.
3. נכונות: מתקיים $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$.

סעיף ט: כתבו את האלגוריתם שלמדנו בקורס, שבהינתן נוסחת *2-CNF* קובעת האם היא ספיקה או לא.

הפונקציה מופיעה בתרגול 1. בהינתן נוסחה φ, נבנה את הגרף D:

לכל משתנה x נגדיר קודקודים $x, \bar{x}$. לכל פסוקית $(x \vee y)$ נגדיר צלעות $\bar{x} \to y, \bar{y} \to x$.

נריץ *DFS* מכל קודקוד v. אם קיים מסלול $\bar{x} \rightsquigarrow x$, וגם $x \rightsquigarrow \bar{x}$, נחזיר 0 (כי $x, \bar{x}$ באותו רכיב קשירות). אם לא קיים אף קודקוד כזה, נחזיר 1.

סעיף י: הגדירו את המונח *equatorial form* ב-*LP*:

בעיית *LP* שההגבלה שלה היא מהצורה $Ax = b$.

תרגיל 5: כתבו והוכיחו את משפט מנגר:

בגדול, מספר הקודקודים שצריך כדי להפריד בין 2 קבוצות שווה לגודל השידוך המקסימום בין הקבוצות. *Min cut max flow*.

ההוכחה בקובץ 7, משפט מנגר. 2.5 עמודים. תהנו.

תרגיל 6: כתבו בעיית *IP* ל- *min edge cover*.

$$\min \sum_{e \in E(G)} x_e\,, \qquad \forall v \in V(G): C_v \coloneqq \{e \in E(G): v \in e\}, \sum_{e \in C_v} x_e \geq 1, \qquad \forall e \in E(G): x_e \in \{0,1\}$$