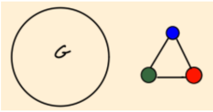
TA Session 1: Self Reductions for 3-col, 2-CNF-SAT in P

***3-COL* אלגוריתם לבעיית**

בהינתן אלגוריתם A לבעיית ההכרעה של *3-COL* (מחזיר 1 אם הצביעה אפשרית ו-0 אחרת), נגדיר אלגוריתם B לבעיית החיפוש:

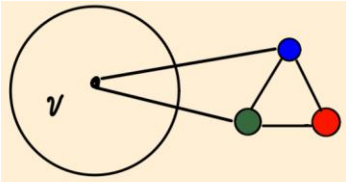
אם $A(G) = 0$, נחזיר *NULL*.

אחרת, נוסיף 3 קודקודים חדשים לגרף. נצבע אותם $R,\ G,\ B$. ונחבר אותם בצלעות:



לכל קודקוד $v \in V(G)$:

נחבר את v ל-B ו-G:

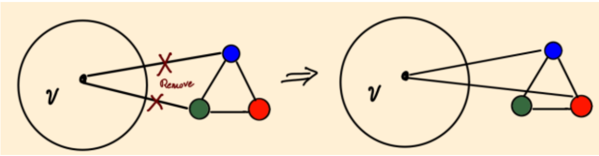


כדי שתהיה 3-צביעה חוקית, הקודקוד הזה חייב להיות אדום.

נריץ את A על הגרף החדש.

אם קיבלנו 1, נצבע את v באדום ונמשיך לקודקוד הבא.

אם קיבלנו 0: נמחק את שתי הצלעות החדשות ונעשה את אותו תהליך עם R ו-B.



נחזיר את הצביעה שקיבלנו בסוף.

זמן הריצה הוא פולינומי ב- $T(A)$. אז אם A אלגוריתם פולינומי, גם B פולינומי.

הסבר: אם A החזיר 1, אז בוודאות יש 3-צביעה תקינה אפשרית. נמצא אותה. נוסיף את 3 הקודקודים. הם לא משפיעים על הצביעה של הגרף.

אם הוא היה 3-צביע לפני, אז הוא עדיין 3-צביע.

נסתכל על קודקוד כלשהו ונחבר אותו לשניים מהקודקודים החדשים.

הסיבה היחידה שהגרף החדש לא יהיה 3-צביע, היא אם בכל 3-צביעה אפשרית, הקודקוד הזה צריך להיות באחד הצבעים שחיברנו אותו אליהם.

בגלל שיש 3-צביעה אפשרית, בוודאות הקודקוד הזה יכול להיות באחד הצבעים. צריך רק למצוא איזה צבע.

אחרי שמצאנו את הצבע לקודקוד הזה, נמשיך ונמצא את הצבע לקודקוד הבא. התהליך זהה.

יש פה סוג של אינדוקציה – בכל שלב, השינוי לא משפיע על האפשרות לצביעה תקינה של הגרף.

ובכל שלב אנחנו קובעים צבע תקין לקודקוד לפי הצביעה. אז בסוף נקבל את הצביעה.

P and NP

P היא קבוצת כל השפות (בעיות הכרעה) שקיים עבורן אלגוריתם פולינומי.

NP היא קבוצת כל השפות שקיים עבורן **מוודא** (עד) פולינומי. כלומר, בהינתן פתרון, נוכל לבדוק את הנכונות שלו בזמן פולינומי.

עבור שפת *k-clique* (כל הגרפים שיש בהם k-קליקה בתור תת-גרף), העד יהיה תת-הגרף הזה (קבוצת הקודקודים, ואז נוודא שיש את כל הצלעות ביניהן).

עבור *3-COL*, העד הוא 3-צביעה. נעבור על כל הצלעות ונבדוק אם יש שני קודקודים סמוכים באותו צבע.

עבור *CNF-SAT*, העד הוא השמה. נעבור על הפסוק לפי ההשמה ונוודא שבכל פסוקית יש T ו-F ושהפסוק מסופק.

TA Session 1: Self Reductions for 3-col, 2-CNF-SAT in P

נוכיח ש-$2\text{-}CNF\text{-}SAT$ נמצאת ב-P:

בהינתן פסוק φ, נגדיר גרף מכוון D כך:

לכל משתנה x, נגדיר קודקודים $x, \bar{x}$.

לכל פסוקית $(x \vee y)$ נגדיר צלעות בגרף: $\bar{x} \rightarrow y,\ \bar{y} \rightarrow x$.

טענה 1: השמה a לא מספקת את φ **אמ"מ** קיימת צלע בגרף מהצורה $T \rightarrow F$.

<u>כיוון ראשון</u>: נניח ש-a לא מספקת. כלומר לפי ההשמה, בפסוק יש פסוקית מהצורה: $(F \vee F)$. כלומר בגרף, תהיה צלע מהצורה $\bar{F} \rightarrow F$, שזה $T \rightarrow F$.

<u>כיוון שני</u>: נניח שקיימת צלע מהצורה $T \rightarrow F$. כלומר הייתה פסוקית $(F \vee F)$ תחת ההשמה. אז ההשמה לא מספקת.

טענה 2: אם בגרף קיימת הצלע $x \rightarrow y$, אז קיימת גם הצלע $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$.

הוכחה: הצלע $x \rightarrow y$ קיימת $\Leftarrow$ הפסוקית $(\bar{x} \vee y)$ קיימת $\Leftarrow$ הצלע $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ קיימת.

תזכורת: רכיב קשירות חזקה (SCC): קבוצת קודקודים שאפשר להגיע מכל קודקוד לכל קודקוד אחר, בכל כיוון.

טענה 3: אם x, y נמצאים באותו רכיב קשירות חזקה, אז גם $\bar{x}, \bar{y}$.

הוכחה: אם הם באותו רכיב קשירות חזקה, אז יש מסלולים $x \rightsquigarrow y,\ y \rightsquigarrow x$.

לפי טענה 2, כל אחת מהצלעות במסלול קיימת גם בכיוון ההפוך עם המשלימים, אז יש גם מסלולים $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{y},\ \bar{y} \rightsquigarrow \bar{x}$.

טענה 4: קיימת השמה מספקת **אמ"מ** אין משתנה x כך ש-$x, \bar{x}$ שניהם נמצאים באותו רכיב קשירות חזקה.

<u>כיוון ראשון</u>: תהי השמה מספקת a. נב"ש שקיים משתנה x כך ש-$x, \bar{x}$ שניהם נמצאים באותו רכיב קשירות חזקה.

כלומר קיימים המסלולים $x \rightsquigarrow \bar{x},\ \bar{x} \rightsquigarrow x$. כלומר המסלולים הם בעצם $T \rightsquigarrow F,\ F \rightsquigarrow T$.

אז איפשהו באמצע יש צלע $T \rightarrow F$. לפי טענה 1, זה אומר שההשמה לא מספקת. סתירה.

<u>כיוון שני</u>: נניח שאין משתנה x כך ש-$x, \bar{x}$ שניהם נמצאים באותו רכיב קשירות חזקה.

ניקח את גרף הרכיבים של D (כל רכיב קשירות חקה הוא קודקוד, בהכרח יש צלעות רק בכיוון אחד בין כל קודקוד אז הגרף חסר מעגלים).
נבצע מיון טופולוגי של הגרף.

לכל משתנה x, נגדיר $a(x) = T$ אם x מופיע אחרי $\bar{x}$. אחרת, $a(x) = F$. כלומר לכל משתנה, הערך F יופיע לפני הערך T.

לפי טענה 1, מספיק להוכיח שאין צלע $T \rightarrow F$.

נתבונן בצלע $x \rightarrow y$ כלשהי. לפי טענה 2, גם הצלע $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ קיימת.

<u>מקרה א</u>: נניח ש-x, y נמצאים באותו רכיב קשירות חזקה.

לפי טענה 3, $\bar{x}, \bar{y}$ נמצאים באותו רכיב קשירות חזקה. ולפי ההנחה, הצלע נמצאת ברכיב קשירות חזקה אחר.

אם $\bar{x}, \bar{y}$ נמצאים לפני x, y במיון הטופולוגי, אז $\bar{x} = F,\ \bar{y} = F$, אם $\bar{x}, \bar{y}$ נמצאים אחרי x, y במיון הטופולוגי, אז $\bar{x} = T,\ \bar{y} = T$.

כלומר הצלעות הן רק $T \rightarrow T$ או $F \rightarrow F$.

<u>מקרה ב</u>: אם x, y לא באותו רכיב קשירות חזקה, אז בגלל המיון הטופולוגי, x מופיע לפני y.

נב"ש שהצלע היא $T \rightarrow F$. כלומר, $\bar{x}$ מופיע לפני x, ו-$\bar{y}$ יהיה אחרי y. כלומר יש לנו משהו מהצורה:

$$\bar{x} \rightsquigarrow x \rightarrow y \rightsquigarrow \bar{y}$$

וכמו שאמרנו לפי טענה 2, גם הצלע $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ קיימת. סתירה לכך שהגרף חסר מעגלים ולמיון הטופולוגי.

אז בעזרת טענה 4, נתאר אלגוריתם עבור $2\text{-}CNF\text{-}SAT$:

נבנה את הגרף D כמו שתיארנו לעיל. (זמן ריצה $O(n+m)$)

לכל משתנה x: $O(n)$

בעזרת BFS, נחפש האם קיימים מסלולים $\bar{x} \rightsquigarrow x$ או $x \rightsquigarrow \bar{x}$. $O(n+m)$

אם שניהם קיימים (כלומר x, $\bar{x}$ נמצאים באותו רכיב קשירות חזקה), נחזיר 0 (בגלל טענה 4).

נחזיר 1.

סה"כ זמן ריצה $O(n^2+nm)$

TA Session 2: Classical Reductions, Gallai's Theorem

NPH ו-*NPC*

רדוקציה פולינומית: פונקציה שמעבירה אותנו מבעיה אחת לבעיה אחרת, בזמן פולינומי. הגדרה פורמלית:

פונקציה f היא רדוקציה פולינומית בין שפה L_1 לשפה L_2 אם לכל $x \in L_1$:

1. $f(x)$ ניתנת לחישוב בזמן פולינומי.
2. $f(x) \in L_2 \Leftrightarrow x \in L_1$.

שפה L תיקרא *NPH* אם לכל שפה ב-*NP* יש רדוקציה אליה. בפועל, לא צריך לעשות רדוקציה מכולן. רדוקציה היא טרנזיטיבית, אז אפשר לקחת שפה שאנחנו כבר מכירים שהיא ב-*NPH* ולהראות רדוקציה ממנה. השפה הראשונה שהתגלתה שהיא *NPH* היא *CNF-SAT*.

הגדרה: $NPC = NPH \cap NP$

איך מראים ששפה L היא *NPH*?

1. בוחרים שפה אחרת L' שאנחנו יודעים שהיא *NPH*.
2. בונים פונקציה $L' \to L$.
3. מראים שהפונקציה פולינומית.
4. מראים ש $f(x) \in L \Leftrightarrow x \in L'$.

NAE-K-CNF-SAT

ראינו ש- *2-CNF-SAT* היא *P*, ושעבור כל $k \geq 3$, *k-CNF-SAT* היא *NPC*.

ראינו את *NAE-SAT*, ואת *NAE-k-CNF-SAT*.

נרצה להראות ש *NAE-3-CNF-SAT* היא *NPH*. כדי לעשות את זה, נעשה קודם רדוקציה: $\text{3-CNF-SAT} \leq_p \text{NAE-4-CNF-SAT}$, ואז רדוקציה $\text{NAE-4-CNF-SAT} \leq_p \text{NAE-3-CNF-SAT}$.

$\text{3-CNF-SAT} \leq_p \text{NAE-4-CNF-SAT}$:

נגדיר משתנה חדש w. ונגדיר פונקציית עזר: $g\big((x \vee y \vee z)\big) = (x \vee y \vee z \vee w)$.

פונקציית הרדוקציה: $f(\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m) = g(\varphi_1) \wedge g(\varphi_2) \wedge \cdots \wedge g(\varphi_m) = \varphi'$

נוכיח את קיום 2 התנאים:

1. קל לראות שהפונקציה פולינומית.

2. נוכיח את שני הכיוונים:

כיוון ראשון: נניח ש $\varphi \in \text{3-CNF-SAT}$. כלומר יש השמה מספקת. אז בכל פסוקית יש ליטרל שמקבל T תחת ההשמה. אז אם נוסיף ליטרל שמקבל F, נקבל נוסחה מסופקת עם 4 ליטרלים שבה יש לפחות אחד T ואחד F.

כיוון שני: נניח ש $f(\varphi) \in \text{NAE-4-CNF-SAT}$. כלומר יש לו השמה מספקת. אם $w = F$ תחת ההשמה, אז בכל פסוקית יש משתנה מקורי T. אם $w = T$ תחת ההשמה, בוודאות יש ליטרל אחר שמקבל F. אז ניקח את ההשמה הנגדית (ועכשיו $w = F$, ועדיין יש ליטרל שמקבל T).

$\text{NAE-4-CNF-SAT} \leq_p \text{NAE-3-CNF-SAT}$:

לכל פסוקית נגדיר משתנה חדש, w_i. ניקח את הפסוקית בגודל 4 ונפצל אותה ל-2 פסוקיות בגודל 3:

$$g\big(\varphi_i = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)\big) = (x_1 \vee x_2 \vee w_i) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee \overline{w}_i)$$

פונקציית הרדוקציה: $f(\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m) = g(\varphi_1) \wedge g(\varphi_2) \wedge \cdots \wedge g(\varphi_m) = \varphi'$

נוכיח את התנאים:

1. ברור שהפונקציה פולינומית.

2. נוכיח את שני הכיוונים:

כיוון ראשון: נניח ש $\varphi \in \text{NAE-4-CNF-SAT}$.

אם תחת ההשמה המספקת, $x_1 = x_2$, אז נגדיר את $w_i = \overline{x_1}$. אחרת, נגדיר $w_i = \overline{x_3}$.

אם תחת ההשמה המספקת, $x_1 \neq x_2$, אז הפסוקית הראשונה היא $NAE\text{-}SAT$. כנ"ל עבור $x_3 \neq x_4$ בפסוקית השנייה.

אם $x_1 = x_2 = T$, אז נגדיר את $w_i = F$. ומהגדרת ה-$NAE\text{-}4\text{-}CNF\text{-}SAT$, אנחנו יודעים שלא יכול להיות ש $x_3 = x_4 = T$. אז $\overline{w}_i = T$, ושתי הפסוקיות מקיימות $NAE\text{-}SAT$.

אם $x_1 = x_2 = F$, אז נגדיר את $w_i = T$. ומהגדרת ה-$NAE\text{-}4\text{-}CNF\text{-}SAT$, אנחנו יודעים שלא יכול להיות ש $x_3 = x_4 = F$. אז $\overline{w}_i = F$, ושתי הפסוקיות מקיימות $NAE\text{-}SAT$.

כיוון שני: נניח ש $f(\varphi) \in$ NAE-3-CNF-SAT

אם $x_1 \neq x_2$ או $x_3 \neq x_4$, סיימנו.

אם $x_1 = x_2 = T$, אז הגדרנו את $w_i = F$. וזה אומר ש $\overline{w}_i = T$, ובגלל התנאי $NAE\text{-}3\text{-}CNF\text{-}SAT$ אנחנו יודעים שלפחות אחד מתוך x_3, x_4 היה F.

אם $x_1 = x_2 = F$, אז הגדרנו את $w_i = T$. ובצורה דומה אנחנו יודעים שלא יכול להיות ש $x_3 = x_4 = F$.

ובה"כ עבור המקרה שבו $x_3 = x_4$.

בכל המקרים, נקבל ש-$\varphi \in$ NAE-4-CNF-SAT

$\boldsymbol{Clique \in NPH}$

שפת כל הזוגות: (G, k) כך שבתוך הגרף G יש תת-גרף שהוא קליקה K_k. (תת-קבוצה של קודקודים בגודל k שיש ביניהם את כל הצלעות).

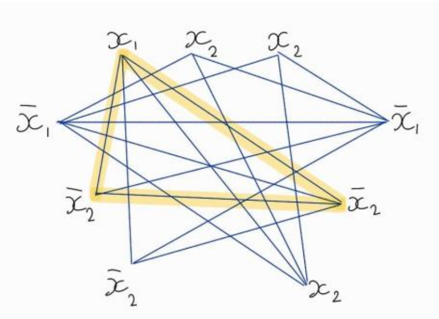
נראה רדוקציה: $3\text{-}CNF\text{-}SAT \leq_p clique$.

בהינתן פסוק $3\text{-}CNF\text{-}SAT$, נייצר גרף G:

מכל פסוקית $\varphi_i = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ נייצר 3 קודקודים מתאימים: x_1^i, x_2^i, x_3^i.

נחבר כל 2 קודקודים שהם לא הפכים אחד של השני ולא מאותה פסוקית. לדוגמה:

$$\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_2)$$



ככה, אם בכל פסוקית יש ליטרל שיכול להיות אמת, אז כולם יהיו מחוברים בגרף.

הפונקציה תחזיר את G ו-m (מספר הפסוקיות בביטוי).

נוכיח את נכונות הרדוקציה. בניית הגרף היא בסיבוכיות פולינומית. נוכיח ש $\varphi \in 3\text{-}CNF\text{-}SAT \Leftrightarrow (G, m) \in Clique$:

כיוון ראשון:

נניח ש $\varphi \in 3\text{-}CNF\text{-}SAT$:

כלומר קיימת השמה מספקת. מכל פסוקית, ניקח ליטרל אחד שמקבל אמת תחת ההשמה (בוודאות קיים) ונשים את הקודקוד המתאים בקבוצה S.

בקבוצה S, אין שני קודקודים מאותה פסוקית (כי לקחנו רק אחד מכל פסוקית).

כל הקודקודים האלה הם בוודאות לא הפכים (כלומר $x, \bar{x}$) כי כולם T.

כלומר, יהיו צלעות בין כולם (לפי הבנייה).

מצאנו קליקה בגודל m, אז $(G, m) \in Clique$.

כיוון שני:

נניח ש $(G,m) \in Clique$:

ניקח את S, קבוצת הקודקודים שמגדירים את הקליקה. לפי הבנייה, כולם הגיעו מפסוקיות שונות ואף אחד לא משלים של השני.

אז ההשמה המספקת – כל ליטרל ב-S יקבל T (ואין סתירות). כל ליטרל שלא ב-S יכול לקבל כל ערך.

זאת השמה מספקת כי יש ליטרל אחד מסופק (לפחות) בכל פסוקית. אז $\varphi \in 3\text{-}CNF\text{-}SAT$.

תזכורות והגדרות:

IS (Independent Set) – קבוצה בלתי תלויה. קבוצת קודקודים שאין ביניהם אף צלע. השפה:

$$IS = \{(G,k) : \exists C \subseteq V(G) : |C| = k, and\ C\ is\ an\ IS\}$$

VC (Vertex Cover) – כיסוי קודקודים. קבוצת קודקודים שנוגעת בכל הצלעות.

$$VC = \{(G,k) : \exists C \subseteq V(G) : |C| = k, and\ C\ is\ a\ VC\}$$

Matching – שידוך. קבוצת צלעות שאין ביניהם אף קודקוד משותף.

Edge Cover – כיסוי צלעות. קבוצת צלעות שנוגעת בכל הקודקודים.

$\alpha(G)$ – גודל הקבוצה בת"ל המקסימום.

$\tau(G)$ – (טאו, *tau*) גודל כיסוי בקודקודים מינימום.

$\nu(G)$ – (נו, *nu*) גודל שידוך מקסימום.

$\varrho(G)$ – (רו, *rho*) גודל כיסוי בצלעות מינימום.

$\upsilon(G)$ – מספר הקודקודים בגרף, $|V(G)|$.

משפט: קבוצת קודקודים S היא בת"ל **אמ"מ** $V(G) \setminus S$ היא כיסוי בקודקודים.

הוכחה: גרירה דו כיוונית.

<u>כיוון ראשון</u>: S קבוצה בת"ל <= לכל צלע בגרף, מקסימום קצה אחד נמצא ב-S <= לכל צלע יש לפחות קודקוד אחד שלא ב-S <= $V(G) \setminus S$ נוגעת בכל הצלעות <= $V(G) \setminus S$ היא כיסוי בקודקודים.

<u>כיוון שני</u>: תהי $V(G) \setminus S$ כיסוי בקודקודים <= לכל צלע, לפחות אחת הצלעות נוגעת ב-$V(G) \setminus S$ <= אין ב-S שני קודקודים על אותה צלע <= S היא קבוצה בת"ל.

מסקנה מהמשפט: $\alpha(G) + \tau(G) = |V(G)|$.

$IS \leq_p VC$

נרצה פונקציה שמקבלת $(G,k) \in IS$, ומחזירה $(G, |V(G)| - k) \in VC$.

משפט *Gallai*: לכל גרף G בלי קודקודים מבודדים, מתקיים: $\rho(G) + \nu(G) = |V(G)|$.

בלי קודקודים מבודדים – הגרף יכול להיות לא קשיר, אבל אין קודקוד שאין לו שכנים בכלל.

נוכיח בשני שלבים: חסם עליון וחסם תחתון.

הוכחת חסם תחתון: $\boldsymbol{\rho(G) + \nu(G) \geq |V(G)|}$

ניקח את L להיות הכיסוי המינימלי בצלעות.

נתבונן בגרף המושרה $G[L]$: אין בו מעגלים. (אם יש מעגל, אז אפשר לוותר על צלע אחת ולקבל כיסוי מינימלי יותר).

ואין בו P_3 – מסלולים באורך 3. (כי אפשר לוותר על הצלע האמצעית).

כלומר, הכיסוי הוא אוסף של "כוכבים" מופרדים. כוכב יכול להיות גם צלע בודדת.

יהי s מספר הכוכבים. אם ניקח צלע אחת מכל כוכב, נקבל שידוך. אז $\nu(G) \geq s$.

נשים לב ש $\rho(G) + s = |V(G)|$.

כי s הוא גם מספר הקודקודים הפנימיים בכוכבים. ו-ρ הוא מספר הצלעות בכוכבים – שזה שווה למספר הקודקודים החיצוניים בקודקודים.

אז $\rho(G) + \nu(G) \geq |V(G)|$.

חסם עליון: $\boldsymbol{\rho(G) + \nu(G) \leq |V(G)|}$

יהי M שידוך מקסימלי. נגדיר $U = V(G) \setminus V(M)$.

אז $|U| = |V(G)| - 2\nu(G)$. (כי כל צלע בשידוך תורמת 2 קודקודים).

U היא IS (כי אם הייתה צלע, היא לא מחוברת לאף קודקוד בשידוך, אז היינו יכולים להוסיף אותה לשידוך, סתירה למקסימליות).

ניזכר בהנחה שאין קודקודים מבודדים בגרף. כלומר, כל קודקוד ב-U מחובר ללפחות קודקוד אחד ב-$V(M)$ (כי כל קודקוד ב-U לא מחובר לאף קודקוד אחר ב-U, אבל הוא חייב להיות מחובר לקודקוד כלשהו. אז זה חייב להיות קודקוד מ-$V(M)$).

עבור כל קודקוד $u \in U$, נבחר צלע אחת שמתחברת ל-$V(M)$. נשים אותם בקבוצה S.

אזי, $S \cup M$ היא כיסוי בצלעות. כי M מכסה את הקודקודים שלה, והוספו צלע שמחוברת לכל קודקוד שלא ב-M.

היא לא בהכרח מינימלית, אבל מתקיים:

$$\rho(G) \leq |M \cup S| = \nu(G) + |U| = \nu(G) + |V(G)| - 2\nu(G) = |V(G)| - \nu(G)$$

$$\rho(G) + \nu(G) \leq |V(G)|$$

TA Session 3: Polynomial Reductions

תזכורת: רדוקציה פולינומית היא פונקציה שמעבירה מבעיה בשפה אחת לשפה אחרת, בזמן פולינומי וכך שהבדיקה עבור השפה השנייה פותרת את הבעיה הראשונה:

1. f ניתנת לחישוב בזמן פולינומי,
2. מתקיים $f(x) \in L_2 \Leftrightarrow x \in L_1$.

$$clique \coloneqq \{(G,k): K_k \; is \; a \; subgraph \; of \; G\}$$

$$IS \coloneqq \{(G,k): \exists C \subseteq V(G): |C| = k \; and \; no \; edges \; on \; C\}$$

$$VC \coloneqq \{(G,k): \exists C \subseteq V(G): |C| = k \; and \; all \; edges \; touch \; C\}$$

$\boldsymbol{clique \le_p IS}$

הרדוקציה תהיה:

$$f\big((G,k)\big) = (\bar{G},k)$$

נוכיח נכונות: הפונקציה פולינומית, ומתקיים: $(G,k) \in clique \Leftrightarrow (\bar{G},k) \in IS$.

$$(G,k) \in clique \Leftrightarrow G \; has \; K_k \; as \; subgraph \Leftrightarrow \bar{G} \; has \; IS \; of \; size \; k \Leftrightarrow (\bar{G},k) \in IS$$

$\boldsymbol{clique \le_p VC}$

הראנו את הרדוקציה $clique \le_p IS$. ובתרגול הקודם ראינו את הרדוקציה $IS \le_p VC$. נעשה הרכבה של הפונקציות האלה:

הרדוקציה $clique \le_p IS$ מקבלת $(G,k) \in clique$ ומחזירה $(\bar{G},k) \in IS$, נקרא לה f.

הרדוקציה $IS \le_p VC$ מקבלת $(G,k) \in IS$ ומחזירה $(G, v(G) - k)$, נקרא לה g.

ההרכבה $g \cdot f$ מקבלת $(G,k) \in clique$ ומחזירה $(\bar{G}, v(G) - k)$.

הזמן פולינומי. נוכיח נכונות: לפי הגדרה,

$$x \in clique \Leftrightarrow f(x) \in IS \Leftrightarrow g\big(f(x)\big) \in VC$$

$\boldsymbol{Subset\text{-}sum \le_p Partition}$

עבור קבוצת מספרים A, נסמן $\bar{A} = \sum_{a \in A} a$. נגדיר: $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

$$subset\text{-}sum \coloneqq \left\{(A,t) : \forall i \; a_i \in \mathbb{N}, \qquad t \in \mathbb{N}, \qquad \exists C \subseteq A \; s.t. \; \sum_{c \in C} c = t\right\}$$

מערך של מספרים שיש בו תת קבוצה שסכומה T.

$$partition \coloneqq \left\{A : \forall i \; a_i \in \mathbb{N}, \qquad \exists C \subseteq A \; s.t. \; \sum_{c \in C} c = \frac{\bar{A}}{2}\right\}$$

מערך של מספרים שיש תת קבוצה שסכומה הוא חצי סכום כל האיברים.

הרדוקציה $subset\text{-}sum \le_p partition$ היא פשוטה:

$$f(A) = \left(A, \frac{\bar{A}}{2}\right)$$

כי *partition* זה מקרה פרטי של *subset-sum*.

בכיוון השני, נחלק למקרים. הקלט הוא (A,t), כאשר יש תת-קבוצה של A שסכומה t:

אם $t = \bar{A}/2$, אז $f(A,t) = A$. כי *partition* ימצא בדיוק את הקבוצה בסכום הזה.

אם $t < \bar{A}/2$:

TA Session 3: Polynomial Reductions

זה אומר שקיימת קבוצה $C \subseteq A$ שהסכום שלה הוא t. אנחנו רוצים לייצר מצב שיש קבוצה בסכום $\bar{A}/2$. כמה צריך להוסיף לקבוצה המקורית?

אנחנו רוצים לייצר מצב שיש 2 קבוצות בסכום שווה:

$$S_1 = C \cup \{x\}, \qquad \overline{S_1} = t + x$$

כאשר x הוא האיבר שנוסיף.

$$S_2 = A \setminus C, \qquad \overline{S_2} = \bar{A} - t$$

נמצא את הערך של x:

$$t + x = \bar{A} - t \Longrightarrow x = \bar{A} - 2t$$

אז $f(A, t) = (a_1, a_2, \dots, a_n, \bar{A} - 2t)$

אם $t > \bar{A}/2$:

באופן דומה, יהיו 2 קבוצות שנרצה שהסכום שלהן יהיה שווה:

$$S_1 = C, \qquad \overline{S_1} = t$$

הפעם בגלל ש $t > \bar{A}/2$, אנחנו רוצים להוסיף משהו ל-S_2:

$$S_2 = (A \setminus C) \cup \{x\}, \qquad \overline{S_2} = \bar{A} - t + x$$

נחשב:

$$\bar{A} - t + x = t \Longrightarrow x = 2t - \bar{A}$$

אז $f(A, t) = (a_1, a_2, \dots, a_n, 2t - \bar{A})$

נוכיח את נכונות הרדוקציה:

ראינו כבר את הכיוון $x \in subset\text{-}sum \Longrightarrow f(x) \in partition$ (זה תהליך הבנייה).

נוכיח את הכיוון השני: נתון לנו $f\big((a_1, a_2, \dots, a_n), t\big) \in partition$. וצ"ל: $\big((a_1, a_2, \dots, a_n), t\big) \in subset\text{-}sum$.

יהיו 3 אפשרויות:

אם $f\big((a_1, a_2, \dots, a_n), t\big) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, אז בעצם נתון לנו ש $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in partition$.

וצ"ל $\big((a_1, a_2, \dots, a_n), \bar{A}/2\big) \in subset\text{-}sum$.

כלומר קיימת תת-קבוצה: $C \subseteq (a_1, a_2, \dots, a_n)$ כך ש $2\bar{C} = \bar{A}$. מש"ל.

אם נתון לנו $f\big((a_1, a_2, \dots, a_n), t\big) = (a_1, a_2, \dots, a_n, \bar{A} - 2t) \in partition$, צ"ל $\big((a_1, a_2, \dots, a_n), t\big) \in subset\text{-}sum$.

לפי הנתון, יש לנו 2 קבוצות שוות בסכום:

$$\overline{S_1} = \overline{S_2} = \bar{A} - t$$

נניח בה"כ ש $\bar{A} - 2t \in S_1$. אז נגדיר $C = S_1 \setminus \{\bar{A} - 2t\}$. נחשב:

$$\bar{C} = \bar{A} - t - (\bar{A} - 2t) = t$$

אם נתון לנו $f\big((a_1, a_2, \dots, a_n), t\big) = (a_1, a_2, \dots, a_n, 2t - \bar{A}) \in partition$, צ"ל $\big((a_1, a_2, \dots, a_n), t\big) \in subset\text{-}sum$.

לפי הנתון, יש לנו 2 קבוצות שוות בסכום:

$$\overline{S_1} = \overline{S_2} = t$$

נניח בה"כ $2t - \bar{A} \in S_1$, אז ניקח $C = S_2$. מש"ל.

$\boldsymbol{Subset\text{-}sum \leq_p Knapsack}$

תזכורת:

$$knapsack \coloneqq \{(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n, W, P) : \exists C \subseteq [n] \ s.t. \ \Sigma_{i \in C} v_i \geq P, \qquad \Sigma_{i \in C} w_i \leq W \}$$

נבנה רדוקציה:

$$f\big((a_1, \dots, a_n), t\big) = (a_1, \dots, a_n, a_1, \dots, a_n, t, t)$$

נוכיח נכונות:

כיוון ראשון: נניח $\big((a_1, \dots, a_n), t\big) \in subset\text{-}sum$. כלומר קיימת תת קבוצה עם סכום t, וזה יקיים את התנאים של $knapsack$.

כיוון שני: נניח $(a_1, \dots, a_n, a_1, \dots, a_n, t, t) \in knapsack$. כלומר, קיימת C כך ש:

$$\sum_{i \in C} a_i \leq t\,, \qquad and, \qquad \sum_{i \in C} a_i \geq t$$

כלומר הסכום שווה t.

TA Session 4: Matchings in Graphs, part 1

תזכורות:

גודל שידוך מקסימום $\nu(G)$, כיסוי קודקודים מינימום $\tau(G)$, קבוצה בת"ל מקסימום $\alpha(G)$, כיסוי צלעות מינימום $\varrho(G)$.

לא להתבלבל בין מספר הקודקודים $v(G)$, לגודל שידוך מקסימום $\nu(G)$.

מסלול M-משפר זה מסלול שמתחלף בין צלעות של M לצלעות שלא, שקודקודי הקצה שלו לא ב-$V(M)$.

משפט ברג': M שידוך מקסימום אמ"מ אין מסלול M-משפר.

משפט קניג: בגרף דו"צ, $\tau(G) = \nu(G)$.

משפט הול: אם $G = (A \cup B, E)$ הוא גרף דו"צ, אז יש ב-G שידוך מ-A ל-B אמ"מ $\forall S \subseteq A: |S| \le |N_G(S)|$.

משפט פרובניוס: בגרף דו"צ G יש שידוך מושלם אמ"מ הצדדים שווים בגודלם ואחד מהם מקיים את תנאי הול.

למה: יש בגרף דו"צ שידוך מושלם אמ"מ גודל הכיסוי קודקודים המקסימום הוא לפחות חצי מספר הקודקודים

יהי G גרף דו"צ. יש ב-G שידוך מושלם אמ"מ $\tau(G) \ge v(G)/2$.

<u>כיוון ראשון</u>: נניח שיש ב-G שידוך מושלם. צ"ל ש- $\tau(G) \ge v(G)/2$.

בשידוך מושלם יש בדיוק $v(G)/2$ צלעות (כי על כל שני קודקודים יש צלע).

כל קודקוד בכיסוי מכסה בדיוק צלע אחת מהשידוך. כי אם הו מכסה יותר, יש לפחות 2 צלעות בשידוך שחולקות קודקוד, בסתירה לשידוך.

אז הכיסוי צריך לפחות $v(G)/2$ קודקודים כדי לכסות את השידוך. ■

<u>כיוון שני</u>: נניח ש- $\tau(G) \ge v(G)/2$. צ"ל שיש ב-G שידוך מושלם.

מכיוון ש-G דו"צ, לפי משפט קניג מתקיים $\tau(G) = \nu(G)$.

כלומר $\tau(G) = \nu(G) \ge v(G)/2$. גודל השידוך המקסימום הוא לפחות חצי מספר הקודקודים.

גודל שידוך המקסימום חסום בחצי מספר הקודקודים (כי צריך 2 קודקודים לצלע). כלומר $\nu(G) \le v(G)/2$.

בסה"כ, $\nu(G) = v(G)/2$. שזה שידוך מושלם. ■

מסקנה: בגרף דו"צ d-רגולרי, יש שידוך מושלם

<u>הוכחה</u>: מספיק להוכיח ש $\tau(G) \ge v(G)/2$, ואז לפי הלמה הקודמת יש שידוך מושלם.

ניזכר בלמת לחיצת הידיים: בכל גרף, $2 \cdot e(G) = \sum_{v \in V(G)} \deg_G(v)$.

אז ב-G, $\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = d \cdot v(G)$. כלומר יש בדיוק $v(G) \cdot d/2$ צלעות. $e(G) = v(G) \cdot d/2$.

נב"ש שאין שידוך מושלם, כלומר $\nu(G) < v(G)/2$. בגלל שהגרף דו"צ, זה אומר שגם $\tau(G) < v(G)/2$.

יהי C הכיסוי המינימום, בגודל c.

ובגלל שזה כיסוי, חייב להתקיים $e(G) \le c \cdot d$. בסה"כ: $e(G) \le c \cdot d = \tau(G) \cdot d < v(G) \cdot d/2$, כלומר $e(G) < v(G) \cdot d/2$.

סתירה למה שהוכחנו, ש $e(G) = v(G) \cdot d/2$. ■

<u>עוד הוכחה</u>: יהי $G = (A \cup B, E)$ גרף דו"צ d-רגולרי.

בגלל שהוא d-רגולרי, מתקיים: $|B| \cdot d = e(G) = d \cdot |A|$. כלומר $|A| = |B|$.

לפי משפט פרובניוס, אם נראה שאחד הצדדים מקיים את תנאי הול, זה יוכיח שיש שידוך מושלם.

תהי $S \subseteq A$. צ"ל ש $|S| \le |N_G(S)|$.

נשים לב שבגלל ש $S \subseteq A$, מתקיים $e(S, N_G(S)) \le e(A, N_G(S))$.

בגלל שהגרף הוא d-רגולרי, מתקיים: $d \cdot |S| = e(S, N_G(S)) \le e(A, N_G(S)) = d \cdot |N_G(S)|$

כלומר $|S| \le |N_G(S)|$, כנדרש ■

TA Session 4: Matchings in Graphs, part 1

תזכורת: $\alpha(G)+\tau(G)=v(G)$ (גודל הכיסוי המינימלי פלוס גודל הקבוצה בת"ל המקסימלית שווה מספר הקודקודים).

בפרט, קבוצת קודקודים S היא בת"ל **אמ"מ** $V(G)\setminus S$ היא כיסוי בקודקודים.

משפט גלאי: לכל גרף קודקודים מבודדים, $\nu(G)+\varrho(G)=v(G)$.

בגרף דו"צ בלי קודקודים מבודדים, $\varrho(G)=\alpha(G)$

מתקיים:

$$\alpha(G)\overset{א}{=}v(G)-\tau(G)\overset{ב}{=}v(G)-\nu(G)\overset{ג}{=}\varrho(G)$$

א. ראינו כבר $\alpha(G)+\tau(G)=v(G)$.
ב. בגלל שהגרף דו"צ, ממשפט קניג, $\tau(G)=\nu(G)$.
ג. ובגלל שאין קודקודים מבודדים, ממשפט גלאי, $\nu(G)+\varrho(G)=v(G)$.

מש"ל. ■

בגרף עם $2n$ קודקודים ודרגה מינימום לפחות n, יש שידוך מושלם

<u>הוכחה</u>: יהי גרף G עם $2n$ קודקודים ו- $\delta(G)\geq n$.

נב"ש שאין ב-G שידוך מושלם, ויהי M השידוך המקסימום.

נסמן את הקודקודים שלא חלק מהשידוך: $S=V(G)\setminus V(M)$. וגם, $|V(G)|,|V(M)|$ זוגיים. אז $|S|$ זוגי.

S גם לא ריקה (כי אחרת השידוך מושלם) כלומר יש ב-S לפחות 2 קודקודים.

S היא קבוצה בת"ל, כי אחרת, M הוא לא מקסימלי. אם יש 2 קודקודים שלא בשידוך ויש ביניהן צלע, אפשר להוסיף את הצלע הזו לשידוך.

יהיו $u,\ v$ שני קודקודים ב-S. לכל צלע $xy\in V(M)$, יש לכל היותר 2 צלעות בין הקבוצות: $\{x,y\}$ $\{u,v\}$. כי אם יש יותר, אז יש מסלול M-משפר.

למה? נב"ש שיש 3 צלעות.

יש 2 צלעות מ-x או y (בה"כ x) ל-u ו-v: ux,vx. אז יש גם צלע מ-y ל-v או u (בה"כ u) אז יש מסלול M-משפר $v\to x\to y\to u$.

סתירה לכך ש-M מקסימלי.

כלומר, לא יכול להיות שגם u וגם v מתחברות גם ל-x וגם ל-y.

בגלל ש-S בת"ל, כל הצלעות שיוצאות מ- $\{u,v\}$ הן ל- $V(M)$.

מתקיים: $\deg_G v+\deg_G u\leq |V(M)|$ (כי כל צלע מ-u או מ-v הולכת לקודקוד ב-M).

וגם, $|V(M)|=2|M|$. ומההנחה ש-M לא שידוך מושלם, מתקיים גם $2|M|\leq 2n-2$.

בסה"כ: $\deg_G v+\deg_G u<2n-2$. כלומר לפחות אחד מהם קטן ממש מ- n.

סתירה. ■

בגרף דו"צ $G=(A\cup B,E)$, $R\subseteq V(G)$. קיים שידוך שמספק את R אמ"מ קיים שידוך שמספק את $R\cap A$ וגם שידוך שמספק את $R\cap B$

("שידוך שמספק את R" הכוונה שידוך שמשדך את כל הקודקודים ב-R).

<u>כיוון ראשון</u>: יהי גרף דו"צ $G=(A\cup B,E)$, ותהי $R\subseteq V(G)$. נניח שיש שידוך שמספק את R. אז בפרט הוא מספק את $R\cap A,R\cap B$.

<u>כיוון שני</u>: הי גרף דו"צ $G=(A\cup B,E)$, ותהי $R\subseteq V(G)$. יהי שידוך N שמספק את $R\cap B$ ושידוך M (אולי אחר) שמספק את $R\cap A$.

נוכיח שקיים שידוך המספק את R.

נתבונן בגרף $G'=[M\cup N]$, ועל רכיבי הקשירות שלו.

<u>מקרה ראשון</u>: בכל רכיב קשירות C, אחד (לפחות) מתוך M או N נוגע בכל הקודקודים של R.

נסמן $H(C)$ את השידוך שנוגע בכל $R\cap C$ ב-C.

ניקח את $L\coloneqq\bigcup_C H(C)$ את השידוך המורכב מכל ה- $H(C)$ של כל רכיבי הקשירות.

זה שידוך שמספק את R.

<u>מקרה שני</u>: נב"ש שיש רכיב קשירות C שבו גם M וגם N לא מכסים את כל R. כלומר לכל אחד יש קודקוד ב-R שהוא מפספס.

נשים לב שהם לא יכולים לפספס את אותו קודקוד, כי M מספק את $A \cap R$ אז הוא יכול לפספס רק $b \in B$, ובאותו אופן N יכול לפספס רק $a \in A$.

בגלל ש-C רכיב קשירות, יש מסלול $a \rightsquigarrow b$. ובגלל שהם בצדדים שונים, המסלול באורך אי-זוגי.

בנוסף, אין 2 צלעות מאותו שידוך שמחוברות לאותו קודקוד, אז המסלול מתחלף בין M ו-N.

כלומר 2 הצלעות בקצוות הן באותו שידוך, שהוא יהיה $H(C)$.

אז $H(C)$ נוגע גם ב-a וגם ב-b, סתירה. ∎

מסקנה 1: בגרף דו"צ $G = (A \cup B, E)$, $R \subseteq V(G)$. קיים שידוך שמספק את R אמ"מ $A \cap R$ וגם $B \cap R$ מקיימים את תנאי הול.

<u>כיוון ראשון</u>: יהי גרף דו"צ $G = (A \cup B, E)$, ותהי $R \subseteq V(G)$. נניח שיש שידוך שמספק את R.

בפרט, יש שידוך שמספק את $A \cap R$. כלומר $A \cap R$ משתדכת לתוך B. אז לפי משפט הול, $A \cap R$ מקיימת את תנאי הול.

ובאופן דומה גם $R \cap B$.

<u>כיוון שני</u>: יהי גרף דו"צ $G = (A \cup B, E)$, ותהי $R \subseteq V(G)$. נניח ש $B \cap R$, $A \cap R$ מספקים את תנאי הול.

כלומר, $A \cap R$ משתדכת לתוך B וגם $B \cap R$ משתדכת לתוך A. איחוד השידוכים האלה הוא שידוך שמספק את R. ∎

מסקנה 2: בגרף דו"צ $G = (A \cup B, E)$. לכל M,N שידוכי מקסימום, קיים שידוך מקסימום שמספק את $(V(M) \cap A) \cup (V(N) \cap B)$.

<u>הוכחה</u>: M מספק את כל $V(M)$, ובפרט את $V(M) \cap A$. באופן דומה N מספק את $V(N) \cap B$.

ניקח $R = (V(M) \cap A) \cup (V(N) \cap B)$, ולפי הטענה הקודמת נקבל שיש שידוך שמספק את R. נקרא לו L.

נוכיח ש-L מקסימום.

הוא מספק את $V(M) \cap A$ אז $|L| \geq |V(M) \cap A|$, (כי כל הקודקודים ב-$(V(M) \cap A)$ נמצאים באותו צד).

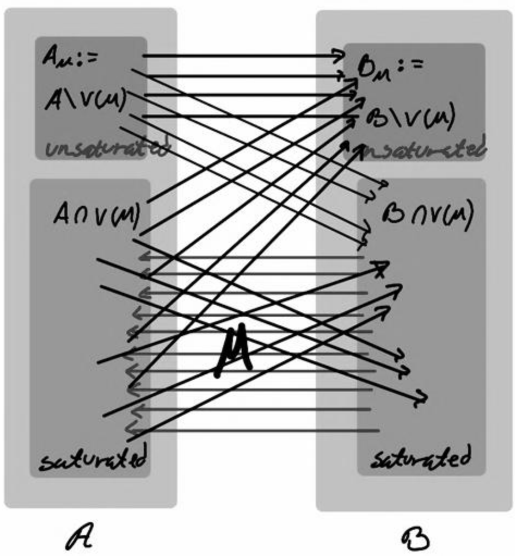
וגם M מספק את $V(M) \cap A$, אז $|M| = |V(M) \cap A|$.

ונתון ש-M מקסימום, כלומר $|M| = \nu(G)$. בסה"כ מתקיים: $|L| \geq |V(M) \cap A| = |M| = \nu(G)$, כנדרש. ∎

תזכורת: השיטה ההונגרית למציאת שידוך מקסימום בגרף דו"צ.

האלגוריתם מתאר איטרציה אחת. בפועל, נחזור על האלגוריתם עד שאין מסלול משפר.

1. נתחיל עם שידוך אקראי M. כל צלע בשידוך תהיה בכיוון $a \leftarrow b$, כל צלע לא בשידוך תהיה בכיוון $a \rightarrow b$.
2. נתמקד בקבוצות: $A_M \coloneqq A \setminus V(M),\ B_M \coloneqq B \setminus V(M)$.
3. אם יש מסלול $A_M \to B_M$, הוא M-משפר. נשפר את השידוך לפי המסלול. ונחזיר את M', המשופר.
4. אם אין מסלול, M הוא שידוך מקסימום.



מציאת כיסוי קודקודים מינימום בגרף דו"צ (בעזרת השיטה ההונגרית)

1. נקבל שידוך מקסימום M. כל צלע בשידוך תהיה בכיוון $a \leftarrow b$, כל צלע לא בשידוך תהיה בכיוון $a \rightarrow b$.
2. נתמקד בקבוצות: $A_M \coloneqq A \setminus V(M),\ B_M \coloneqq B \setminus V(M)$. נסמן D_M את הגרף המכוון.
3. נגדיר R_M את כל הקודקודים ב-D_M שאפשר להגיע אליהם מ-A_M. (זה כולל את A_M עצמה)
4. נחזיר את $(A \setminus R_M) \cup (B \cap R_M)$.

נוכיח שזה אכן כיסוי. נבדוק את כל סוגי הצלעות. תהי צלע $u \rightarrow v$:

אין צלעות $A_M \rightarrow B_M$, כי אחרת זה היה מסלול משפר.

אין צלעות $A_M \rightarrow B_M$ או $B_M \rightarrow A \setminus A_M$ או $B \setminus B_M \rightarrow A_M$, כי זה היה אומר שיש צלע כזו בשידוך, סתירה להגדרת A_M, B_M.

אם היא צלע $A_M \rightarrow B \setminus B_M$. מכיוון שאפשר להגיע מ-$A_M$ ל-v, הקודקוד v יהיה בכיסוי.

אם היא צלע $A \setminus A_M \rightarrow B_M$. אין מסלול $A_M \rightarrow u$, כי אחרת היה מסלול $A_M \rightarrow B_M$. אז u נמצא בכיסוי.

אם היא צלע $A \setminus A_M \rightarrow B \setminus B_M$. אז אם אפשר להגיע ל-$u$ מ-A_M אז אפשר להגיע ל-v. ואז v תהיה בכיסוי.

ואם אי אפשר להגיע ל-u מ-A_M זה אומר ש-u תהיה בכיסוי.

אם היא צלע $B \setminus B_M \rightarrow A \setminus A_M$, אז אין עוד צלע $B \rightarrow v$. אז אם אפשר להגיע מ-A_M ל-v אז v נבחר.

ואם אי אפשר אז אי אפשר להגיע גם ל-u אז u נמצא בכיסוי.

נוכיח שהכיסוי מינימלי:

נסמן C את הכיסוי המתקבל. $V(M)$ מכילה את כל הקודקודים חוץ מ- A_M, B_M.

לא לקחנו ל-C אף קודקוד מ-A_M, ובגלל שאין צלע מ-A_M ל-B_M, גם לא לקחנו קודקודים מ-B_M.

אז $C \subseteq V(M)$.

אם צלע נמצאת בשידוך $(B \setminus B_M \rightarrow A \setminus A_M)$, אז או ששני הקודקודים נגישים מ-A_M או ששניהם לא. אז לכל צלע בשידוך לקחנו בדיוק קודקוד אחד.

אז $|C| = |M| = \nu(G)$. ובגלל שהגרף דו"צ, לפי משפט קניג, $\tau(G) = \nu(G)$.

אז $|C| = \tau(G)$, זה גודל הכיסוי המינימום. ■

TA Session 5: Matching in Graphs, part 2

תזכורות:

גודל שידוך מקסימום $\nu(G)$, כיסוי קודקודים מינימום $\tau(G)$, קבוצה בת"ל מקסימום $\alpha(G)$, כיסוי צלעות מינימום $\varrho(G)$.

לא להתבלבל בין מספר הקודקודים $\nu(G)$, לגודל שידוך מקסימום $\nu(G)$.

מסלול M-משפר זה מסלול שמתחלף בין צלעות של M לצלעות שלא, שקודקודי הקצה שלו לא ב-$V(M)$.

משפט ברג': M שידוך מקסימלי אמ"מ אין מסלול M-משפר.

משפט קניג: בגרף דו"צ, $\tau(G) = \nu(G)$.

משפט הול: אם $G = (A \cup B, E)$ הוא גרף דו"צ, אז יש ב-G שידוך מ-A ל-B אמ"מ $\forall S \subseteq A: |S| \leq |N_G(S)|$.

משפט פרובניוס: בגרף דו"צ G יש שידוך מושלם אמ"מ הצדדים שווים בגודלם ואחד מהם מקיים את תנאי הול.

משפט אורי

יהי גרף דו"צ $G = (A \cup B, E)$ ו-d קבוע. אם לכל $S \subseteq A$ מתקיים $|S| - d \leq |N_G(S)|$, אז יש שידוך שמספק את כל A מלבד לכל היותר d קודקודים.

<u>הוכחה</u>: יהי גרף דו"צ $G = (A \cup B, E)$ ו-d קבוע. כך שלכל $S \subseteq A$ מתקיים $|S| - d \leq |N_G(S)|$.

נוסיף ל-B d קודקודים חדשים, שכל אחד מהם מחובר לכל A. נקרא לגרף הזה G'. הוספנו לכל קודקוד ב-A d שכנים חדשים.

אז לכל $S \subseteq A$, מתקיים $|S| - d \leq |N_G(S)| = |N_{G'}(S)| - d$. או פשוט $|S| \leq |N_{G'}(S)|$.

A מקיימת את תנאי הול ב-G'. כלומר ב-G', יש שידוך שמספק את A. נקרא לו M.

ב-M, לכל היותר d צלעות מחוברות לקודקודים החדשים (כי יש רק d קודקודים חדשים).

אז ניקח את M בלי הצלעות האלה, וקיבלנו שידוך שמספק את A פחות לכל היותר d קודקודים. כנדרש. ■

מסקנה: אם נבחר $d \coloneqq \max\left(0, \max_{S \subseteq A}(|S| - |N_G(S)|)\right)$, נקבל $\nu(G) = |A| - d$.

<u>הסבר</u>: ניקח את d להיות ההפרש הכי גדול בין קבוצה S לשכנים שלה. אם לכל S יש יותר שכנים מאשר קודקודים, המספר יהיה שלילי אז ניקח 0.

במקרה הזה A מקיימת את תנאי הול אז גודל השידוך המקסימלי יהיה $|A|$.

אם יש קבוצה שבה ההפרש הזה חיובי, אז בשידוך המקסימלי אפשר לכסות לכל היותר $|A| - d$ קודקודים.

וזה אכן השידוך המקסימום, כי לכל $S \subseteq A$ יש שידוך שמספק אותה. ■

הגדרה: הי גרף דו"צ $G = (A \cup B, E)$.

נאמר ש-A הוא $\boldsymbol{K_{1,r}}$**-ספיק** אם קיימים קבוצת כוכבים (בת"ל בקודקודים) כך שכל קודקוד ב-A הוא מרכז של כוכב בעל r צלעות.

כלומר, לכל קודקוד ב-A יש r שכנים שייחודיים לו. כל כוכב כזה הוא גרף $K_{1,r}$.

טענה: גרף דו"צ $G = (A \cup B, E)$ הוא $K_{1,r}$-ספיק **אמ"מ** $\forall S \subseteq A,\ r \cdot |S| \leq |N_G(S)|$.

<u>כיוון ראשון</u>: אם G הוא $K_{1,r}$-ספיק, לפי הגדרה לכל קודקוד ב-A יש r שכנים ייחודיים לו, אז בוודאי שלכל $S \subseteq A$ יש לפחות $r \cdot |S|$ שכנים.

<u>כיוון שני</u>: נשכפל כל קודקוד ב-A r פעמים, ונחבר את השכפולים האלה לכל השכנים של הקודקוד המקורי. נסמן את הגרף החדש G'.

בכל $S' \subseteq A'$ ב-G', מספר הקודקודים המשוכפלים מכל קודקוד מקורי הוא לכל היותר r.

סמן S^* את הקבוצה של הקודקודים המקוריים של קודקודים ב-S'. מספר הקודקודים המקוריים של קודקודים ב-S' הוא לפחות $\frac{|S'|}{r}$, כלומר $|S^*| \leq \frac{|S'|}{r}$.

כל קבוצה כזו היא $S^* \subseteq A$, אז היא מקיימת את התנאי, כלומר יש לה לפחות $r \cdot |S^*|$ שכנים.

כלומר ל-S' יש לפחות $|S'| = |S^*| \cdot r$ שכנים. A' מקיימת את תנאי הול ב-G'. כלומר יש ב-G' שידוך שמספק את A'.

ניזכר שעל כל קודקוד מקורי ב-A' יש r קודקודים חדשים שמחוברים רק לשכנים המקוריים. כלומר לכל קודקוד מקורי יש r שכנים ייחודיים, כנדרש. ■

TA Session 5: Matching in Graphs, part 2

תזכורת: משפט *tutte*:

נסמן $C_o(G)$ את מספר רכיבי הקשירות מדרג אי-זוגי ב-G. בגרף G יש שידוך מושלם **אמ"מ** לכל $S \subseteq V(G)$ מתקיים $C_o(G-S) \le |S|$.

טענה: יהי גרף עם $2n$ קודקודים ו- $\delta(G) \ge n$. אזי יש ב-G שידוך מושלם.

ראינו הוכחה עם הנחה בשלילה וקבוצה S, לפחות 2 קודקודים וכו'. נראה הוכחה בעזרת משפט *tutte*.

יהי גרף G כמתואר, ונב"ש שאין בו שידוך מושלם. אז לפי משפט *tutte*, קיימת $S \subseteq V(G)$ כך ש $C_o(G-S) > |S|$.

נסמן $C_1, C_2, \dots, C_m$ את רכיבי הקשירות של $G-S$. כאשר $C_1, \dots C_k$ בגודל אי-זוגי, ו- $C_{k+1}, \dots C_m$ בגודל זוגי.

נניח ש- C_1 הוא בגודל הכי קטן. נשים לב ש $k = C_o(G-S) > |S|$.

כל קודקוד $u \in C_1$ יכול להיות שכן של כל הקודקודים ב-C_1, ושל כל הקודקודים ב-S.

הוא לא יכול להיות שכן של קודקוד מאף רכיב קשירות אחר ב- $G-S$, כי אז הם היו אותו רכיב.

ניזכר שהדרגה המינימלית ב-G היא n, אז לכל $u \in C_1$ מתקיים:

$$n \le \deg(u) \le |C_1| + |S| - 1$$

כלומר, נחלק ב-$v(G) = 2n$ ונקבל:

$$\frac{1}{2} \le \frac{|C_1|+|S|-1}{2n} =^{\text{א}} \frac{|C_1|+|S|-1}{|S|+\sum_{i=1}^{m}|C_i|} \le^{\text{ב}} \frac{|C_1|+|S|-1}{|S|+\sum_{i=1}^{k}|C_i|} \le^{\text{ג}} \frac{|C_1|+|S|-1}{|S|+\sum_{i=1}^{k}|C_1|} =^{\text{ד}} \frac{|C_1|+|S|-1}{|S|+k\cdot|C_1|}$$

א. מספר הקודקודים בגרף הוא הקודקודים ב-S ועוד כל הקודקודים של רכיבי הקשירות בלי S.
ב. $\sum_{i=1}^{m}|C_i| \ge \sum_{i=1}^{k}|C_i|$, אז המנה גדלה.
ג. $\sum_{i=1}^{k}|C_i| \ge \sum_{i=1}^{k}|C_1|$, כי C_1 הכי קטן, אז המנה גדלה.
ד. הסכום לא תלוי ב-i.

כלומר,

$$\frac{1}{2} \le \frac{|C_1|+|S|-1}{|S|+k\cdot|C_1|} \implies |S|+k\cdot|C_1| \le 2(|C_1|+|S|-1) \implies |S|+k\cdot|C_1| \le 2|C_1|+2|S|-2 \implies$$

$$k\cdot|C_1| \le 2|C_1|+|S|-2 \implies k\cdot|C_1|-2|C_1|+2 \le |S| \implies (k-2)|C_1|+2 \le |S|$$

מכיוון ש $|C_1| \ge 1$, נקבל ש

$$|S| \ge (k-2)|C_1|+2 \ge (k-2)+2 = k$$

סתירה לכך ש $|S| < k$.

טענה: משפט *tutte* גורר את משפט הול. (אם משפט *tutte* נכון, גם משפט הול נכון).

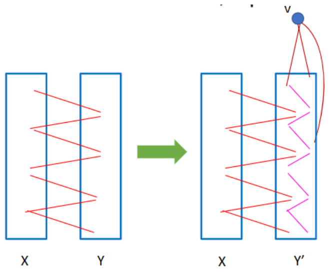
נתון גרף דו"צ $G = (X \cup Y, E)$ שבו X מקיימת את תנאי הול. נניח שמשפט *tutte* נכון ונוכיח שיש ב-G שידוך המספק את X.

נגדיר גרף חדש:

$$H = \left(X \cup Y', E(G) \cup \binom{V(Y')}{2}\right), \qquad Y' := \begin{cases} Y, & v(G)\ is\ even \\ Y \cup \{v\}, & v(G)\ is\ odd \end{cases}$$

כלומר: אם $v(G)$ אי-זוגי, נוסיף קודקוד חדש v ונחבר אותו לכל קודקוד ב-Y. אז $v(H)$ זוגי.

ונוסיף ל- $E(G)$ את כל הצלעות בתוך Y' (נהפוך את $G[Y']$ לקליקה). דוגמה למקרה שבו $v(G)$ אי-זוגי:



כדי להוכיח את הטענה, נוכיח 2 למות:

<u>למה 1</u>: יש ב-H שידוך מושלם אמ"מ יש ב-G שידוך שמספק את X.

<u>כיוון ראשון</u>: נניח שיש ב-H שידוך מושלם, M.

נשים לב שאין צלעות $v \to X$. כל הצלעות שיוצאות מ-X מגיעות ל-Y המקורית.

אם ניקח מ-M את הצלעות שמשדכות קודקודים של X, זה שידוך שמספק את X ב-G.

<u>כיוון שני</u>: נניח שיש שידוך שמספק את X. כיוון ש-Y' הוא גרף מלא, מספיק להוכיח ש $|Y'| - |X|$ זוגי.

כי אנחנו יודעים ש- $|Y'|$ זוגי, אז זה יראה שגם $|X|$ זוגי,

ואז השידוך עם X ייקח מספר זוגי של קודקודים מ-Y', וזה משאיר מספר זוגי של קודקודים ב-Y' שישתדכו ביניהם). מתקיים:

$$\underbrace{v(H)}_{even} = |X| + |Y'| = \underbrace{2|X|}_{even} + (|Y'| - |X|)$$

אז $|Y'| - |X|$ זוגי.

<u>למה 2</u>: אם X מקיימת את תנאי הול ב-G, אז H מקיים את תנאי $tutte$.

נניח ש-X מקיימת את תנאי הול, ונב"ש ש-H לא מקיימת את תנאי $tutte$. כלומר, קיימת $S \subseteq V(H)$ כך ש $|S| < C_o(H - S)$.

איך $H - S$ נראה?

יש רכיב קשירות של מה שנשאר מ-Y' וכל הקודקודים ב-X שמחוברים אליו. נקרא לו C.

ויש עוד קודקודים מבודדים מ-X שהיו מחוברים רק לקודקודים ב-S. נסמן אותם $x_1, x_2, \dots, x_k$. הם בעצם רכיבי קשירות בגודל אי-זוגי.

<u>מקרה ראשון</u>: אם C בגודל זוגי, אז $C_o(H - S) = C_o(G - S) = k$. ומההנחה שתנאי $tutte$ לא מתקיים, נקבל $|S| < k$.

אבל X מקיימת את תנאי הול ב-G, ובפרט עבור $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. כלומר:

$$C_o(G - S) = \underbrace{|\{x_1, x_2, \dots, x_k\}|}_{k} \le |N_G(\{x_1, x_2, \dots, x_k\})| = |S|$$

כלומר $|S| \le k$, סתירה למה שראינו ש $|S| > k$.

<u>מקרה שני</u>: אם C בגודל אי-זוגי, אז $C_o(G - S) = k + 1$.

נשים לב ש $v(H) = |S| + |C| + k$. מספר הקודקודים ב-C, ועוד הקודקודים שלא ב-C, ועוד הקודקודים שהורדנו.

ונשים לב ש $v(H)$ זוגי ו-$|C|$ אי-זוגי, אז $|S| + k$ אי זוגי. מההנחה שתנאי $tutte$ לא מתקיים, נקבל ש- $|S| < k + 1$.

אז נוכל לרשום $|S| \le k$.

אם $|S| = k$, אז $|S| + k$ זוגי, סתירה.

אז $|S| < k$. כמו במקרה הראשון, בגלל ש-X מקיימת את תנאי הול ב-G נקבל $|S| \ge k$, סתירה.

נחזור להוכחת הטענה:

נתון גרף דו"צ $G = (X \cup Y, E)$ שבו X מקיימת את תנאי הול. נניח שמשפט $tutte$ נכון.

אזי מלמה 2, H מקיים את תנאי $tutte$. אז ב-H יש שידוך מושלם.

לפי למה 1, ב-G יש שידוך שמספק את X. ■

הגדרה: בגרף קשיר G, צלע נקראת **גשר** אם $G \setminus \{e\}$ לא קשיר.

משפט פיטרסון: בגרף קשיר, 3-רגולרי, חסר גשרים, יש שידוך מושלם.

<u>טענת עזר</u>: יהי G גרף כמתואר. לכל $S \subseteq V(G)$ ולכל רכיב קשירות אי-זוגי C ב- $G - S$, מתקיים $e_G(S, C) \ge 3$.

<u>הוכחה</u>: יהי G גרף כמתואר. ויהיו $S \subseteq V(G)$ ורכיב קשירות אי-זוגי C ב- $G - S$. מתקיים:

$$\sum_{v \in V(C)} \deg_{G[C]}(v) = 3 \cdot v(C) - e_G(S, C)$$

מספר הצלעות בתוך C (ב- $G-S$) הוא 3 כפול מספר הקודקודים ב-C, פחות הצלעות שבין C ל-S בגרף המקורי.

סכום הדרגות ב-C הוא פעמיים מספר הצלעות, אז הוא זוגי.

מכיוון ש $v(C)$ אי-זוגי גם $3 \cdot v(C)$ אי-זוגי, אז $e_G(S,C)$ אי-זוגי.

$e_G(S,C) \neq 1$, כי זה גשר. אז $e_G(S,C) \geq 3$.

<u>ניגש להוכחת המשפט</u>: יהי גרף G קשיר, 3-רגולרי, חסר גשרים.

תהי $S \subseteq V(G)$. מספר הצלעות שיוצאות מהקודקודים של S הוא לכל היותר $3|S|$. כלומר $e_G(S,V) \leq 3|S|$.

בפרט, מספר הצלעות שיוצאות מ-S חסום ב- $3|S|$. כלומר $e_G(S,V) \leq 3|S|$.

מצד שני (לפי טענת העזר), כל רכיב קשירות אי-זוגי C ב- $G-S$ מחובר ל-S בלפחות 3 צלעות.

נסמן $k \coloneqq C_o(G-S)$ את מספר רכיבי הקשירות האי-זוגיים ב- $G-S$. כלומר יש לפחות $3k$ צלעות מ-S לשאר הגרף: $3k \leq e_G(S,V)$.

בסה"כ $3k \leq e_G(S,V) \leq 3|S|$, אז $C_o(G-S) = k \leq |S|$.

כלומר G מקיים את תנאי *tutte*, אז יש בו שידוך מושלם. ■

TA Session 6: Connectivity and Hamiltonicity

מפריד בצלעות: קבוצת צלעות שאם נסיר אותן, יהיו יותר רכיבי קשירות ממה שהיה קודם. $C(G-F) > C(G)$.

אם נוסיף עוד צלעות למפריד-בצלעות, זה עדיין מפריד.

חתך בצלעות: קבוצת צלעות בין שתי קבוצות זרות של קודקודים.

אבחנה: כל חתך בצלעות הוא גם מפריד, אבל לא כל מפריד הוא חתך.

לדוגמה ניקח חתך ונוסיף (לחתך) צלע בין שני קודקודים מאותה קבוצה. אז עכשיו קבוצת הצלעות הזו לא מפרידה בין 2 קבוצות זרות.

טענה: יהי G גרף קשיר. כל מפריד בצלעות מינימלי הוא גם חתך.

<u>הוכחה</u>: יהי F מפריד-בצלעות מינימלי.

אם $|C(G-F)| = 2$, אז כל הצלעות חייבות להיות בין שני הרכיבים. אז זה חתך.

נב"ש ש- $|C(G-F)| \geq 3$, ויהי C רכיב קשירות ב- $(G-F)$.

אזי, $E_G(C,\ V(G) \setminus C) \subset F$. הצלעות שבין C לשאר הקודקודים שלא ב-C, הן תת-קבוצה ממש של המפריד.

למה? ראשית, היא תת-קבוצה כי כל צלע שבין C לשאר הקודקודים חייבת להיות במפריד (אחרת הוא לא מפריד).

וחייבת להיות לפחות עוד צלע במפריד שלא בין C לשאר הקודקודים, כי צריך להפריד בין 2 רכיבי קשירות אחרים (כי יש לפחות 3).

אבל הקבוצה הזו היא גם מפרידה בצלעות. סתירה למינימליות של F. ■

תזכורת: $\kappa(G)$ – גודל חתך בקודקודים מינימום. $\kappa'(G)$ – גודל חתך בצלעות מינימום.

משפט של וויטני: $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$.

אינטואיטיבית, אם יש חתך בצלעות, אז אם מורידים קודקוד אחד מכל צלע בחתך זה בעצם מוריד את הצלעות וזה חתך.

אבל יש את המצב שבו נוריד את **כל** הקודקודים באחד הצדדים, ואז הגרף שנשאר הוא קשיר. נצטרך הוכחה פורמלית:

יהי $(S,\bar{S})$ חתך-צלעות מינימום, בגודל κ'.

<u>מקרה ראשון</u>: אם $e_G(S,\bar{S}) = |S| \cdot |\bar{S}|$ (כלומר כל הצלעות בין S ל- $\bar{S}$ קיימות). אז:

$$\kappa'(G) = e_G(S,\bar{S}) = |S| \cdot |\bar{S}| = |S| \cdot (v(G) - |S|) \geq^{א} v(G) - 1$$

א. כי ככל ש-$|S|$ גדלה, הביטוי גדל, עד $n/2$.

בנוסף, לכל גרף מתקיים $\kappa(G) \leq v(G) - 1$. אם נוריד את כל הקודקודים חוץ מאחד, הגרף לא קשיר.

בסה"כ, $\kappa'(G) \geq v(G) - 1 \geq \kappa(G)$.

<u>מקרה שני</u>: קיימים $x \in S,\ y \in \bar{S}$ כך שאין צלע xy.

נגדיר: $J := \{v \in S \setminus \{x\} : N_G(v) \cap \bar{S} \neq \emptyset\}$. כלומר, כל הקודקודים ב-$S$ (חוץ מ-x) שיש להם שכן ב-$\bar{S}$.

וניקח את הקבוצה: $T := J \cup (N_G(x) \cap \bar{S})$. כלומר, נוסיף ל-$J$ את כל הקודקודים ב-$\bar{S}$ שהם שכנים של x.

T היא חתך בקודקודים. כי אם נוריד אותה, אין דרך להגיע מ-x ל-y. אז $|T| \geq \kappa(G)$.

נייצר קבוצה T': לכל קודקוד ב-T נבחר צלע: לשכנים של x ניקח את הצלע שיש בינם לבין x. לקודקודים מ-J ניקח צלע כלשהי מהם לצד השני.

נצטרך להוריד לפחות את כל הצלעות האלה כדי להפריד בין S ל-$\bar{S}$. כלומר $|T'| \leq e_G(S,\bar{S})$.

קיבלנו קבוצה T' כך ש $|T'| = |T|$, אז $\kappa(G) \leq |T'|$.

בסה"כ: $\kappa(G) \leq |T'| \leq \kappa'(G)$, כנדרש. ■

TA Session 6: Connectivity and Hamiltonicity

תזכורת: גרף G הוא k-קשיר אם צריך להוריד k קודקודים כדי שהגרף יהיה לא קשיר.

טענה: אם לכל שני קודקודים שאין ביניהם צלע יש לפחות k שכנים משותפים, הגרף הוא k-קשיר.

<u>הוכחה</u>: ראשית, אם אין שני קודקודים בלי צלע ביניהם אז הטענה מתקיימת באופן ריק (וגם זה קליקה אז ברור שהוא k-קשיר).

נב"ש שיש חתך-קודקודים בגרף בגודל פחות מ-k.

נתבונן בשני הרכיבים שהוא יוצר. ניקח קודקוד מכל אחד מהם.

אין ביניהם צלע (כי הם בצדדים שונים של החתך-קודקודים) אז יש להם k שכנים משותפים ב-G.

הורדנו לכל היותר $k-1$ קודקודים, אז יש להם עדיין שכן משותף. סתירה לכך שזה חתך. ■

טענה: אם $\delta(G) \geq v(G)-2$, אז $\kappa(G)=\delta(G)$.

<u>הוכחה</u>: יהי גרף G כך ש $v(G)=n$.

אם $\delta(G)=n-1$, G הוא קליקה אז צריך להוריד $\delta(G)=n-1$ קודקודים כדי שהגרף יהיה לא קשיר.

אחרת, $\delta(G)=n-2$ אז אם יש שני קודקודים שאין ביניהם צלע משותפת, כל אחד מהם מחובר לכל שאר הקודקודים.

אז יש להם $\delta(G)$ שכנים משותפים. לפי הטענה הקודמת, הגרף הוא $\delta(G)$-קשיר. כלומר $\kappa(G)=\delta(G)$, כנדרש. ■

טענה: יהי G גרף עם n קודקודים. אם $\delta(G) \geq \frac{n+k-2}{2}$, הגרף הוא k-קשיר.

<u>הוכחה</u>: נוכיח שלכל שני קודקודים בלי צלע ביניהם יש לפחות k שכנים משותפים. יהיו x, y שאין צלע ביניהם.

באופן כללי מתקיים: $|N_G(x) \cup N_G(y)| = |N_G(x)| + |N_G(y)| - |N_G(x) \cap N_G(y)|$, אז מתקיים:

$$|N_G(x) \cap N_G(y)| = |N_G(x)| + |N_G(y)| - |N_G(x) \cup N_G(y)| \geq \frac{n+k-2}{2} + \frac{n+k-2}{2} - (n-2) = n+k-2-n+2 = k$$

כי $|N_G(x)|,\ |N_G(y)| \geq \frac{n+k-2}{2}$ (מספר השכנים הוא לפחות הדרגה המינימלית),

וגם $|N_G(x) \cup N_G(y)| \leq n-2$ (כי אין ביניהם צלע, אז גם ביחד יש להם לכל היותר $n-2$ שכנים).

מש"ל. ■

תזכורת: מסלול המילטוני בגרף הוא מסלול שעובר בכל הקודקודים, כל אחד פעם אחת בדיוק.

מעגל המילטוני הוא מעגל שעובר בכל קודקוד פעם אחת בדיוק (וחוזר להתחלה). גרף ייקרא המילטוני אם יש בו מעגל המילטוני.

עבור גרף G, הגרף $\bar{G}$ הוא הגרף ההופכי על אותם קודקודים (איפה שיש צלע ב-G אין צלע ב-$\bar{G}$, והפוך).

הגדרה: גרף G נקרא קשיר-המילטונית אם לכל זוג קודקודים x, y יש מסלול המילטוני $x \rightsquigarrow y$.

גרף קשיר-המילטונית הוא בפרט גם המילטוני.

משפט: יהי G גרף עם $n \geq 3$ קודקודים. אזי,

אם $e(G) \geq \binom{n-1}{2}+2$, אז G המילטוני.

אם $e(G) \geq \binom{n-1}{2}+3$, אז G קשיר-המילטונית.

<u>נוכיח באינדוקציה על n</u>:

<u>בסיס</u>:

- עבור $n=3$, אם $e(G)\geq\binom{2}{2}+2=3$ זה הגרף המלא, הוא קשיר המילטונית.
- עבור $n=4$:
  - אם $e(G)\geq\binom{3}{2}+2=5$ אז ב-G חסרה רק צלע אחת, זה גרף המילטוני.
  - אם $e(G)\geq\binom{3}{2}+3=6$ אז זה הגרף המלא.

<u>צעד</u>:

ננסח את הטענות בצורה אחרת:

$$e(G)\geq\binom{n-1}{2}+2\equiv e(\bar{G})\leq\binom{n}{2}-\binom{n-1}{2}-2=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}-2=\frac{1}{2}[n(n-1)-(n-1)(n-2)]-2$$
$$=\frac{1}{2}\left[(n-1)\big(n-(n-2)\big)\right]-2=\frac{1}{2}[(n-1)2]-2=n-1-2=n-3$$

ובאופן דומה,

$$e(G)\geq\binom{n-1}{2}+3\equiv e(\bar{G})\leq n-4$$

<u>נוכיח את טענה 2</u>:

נניח שטענה 2 מתקיימת עבור כל גרף עם עד $n-1$ קודקודים.

יהי גרף G עם $n>4$ קודקודים כך ש $e(\bar{G})\leq n-4$. צ"ל ש-G קשיר-המילטונית.

יהיו x,y שני קודקודים ב-G.

<u>מקרה ראשון</u>: אם x מבודד ב-$\bar{G}$, זה אומר שאם נוריד אותו מ-G, לא השפענו על מספר הצלעות בגרף המשלים. אז מתקיים:

$$e(\overline{G-x})=e(\bar{G})\leq n-4=(n-1)-3$$

אז לפי הנ"א, $G-x$ הוא המילטוני. כלומר יש מעגל המילטוני.

בגלל ש-x מבודד ב-$\bar{G}$, הוא מחובר לכל הקודקודים ב-G. אז יש ב-G מסלול המילטוני $x \rightsquigarrow y$:

יהי $y,v_2,v_3,\ldots,v_n,y$ המעגל ההמילטוני. אז המסלול: $x\to v_2\rightsquigarrow v_n\to y$ הוא מסלול המילטוני.

<u>מקרה שני</u>: אם x לא מבודד ב-$\bar{G}$, אז:

$$e(\overline{G-x})\leq e(\bar{G})-1\leq n-5=(n-1)-4$$

לפי הנ"א, $G-x$ הוא קשיר-המילטונית. כלומר יש מסלול המילטוני בין כל שני קודקודים.

בפרט קיים מסלול המילטוני בין y לשכן כלשהו של x.

נלך מ-x לקודקוד כלשהו, ומהקודקוד הזה יש מסלול המילטוני ל-y, כנדרש.

<u>נוכיח את טענה 1</u>:

נניח שטענה 1 מתקיימת עבור כל גרף עם עד $n-1$ קודקודים.

יהי גרף עם $n>4$ קודקודים כך ש $e(\bar{G})\leq n-3$. צ"ל ש-G המילטוני.

אם $e(\bar{G})\leq n-4$, אז לפי מה שכבר הוכחנו, G קשיר-המילטונית וסיימנו.

נניח ש $e(\bar{G})=n-3$.

נשים לב: הדרגה המינימלית ב-G היא לפחות 2.

כי אם יש קודקוד עם דרגה 0 או 1, אין מספיק צלעות בשביל $\binom{n-1}{2}+2$.

בנוסף, קיים ב-$\bar{G}$ קודקוד x עם דרגה לפחות 2. למה? כי אם לכל קודקוד יש דרגה פחות מ-2, אז יש ב-$\bar{G}$ לכל היותר $n/2$ צלעות.

עבור $n \in \{5,6\}$ אפשר לטפל ידנית. לכל $n > 6$, אם יש לכל היותר $n/2$ צלעות אז לא יכולות להיות $n-3$ צלעות כמו שיש בהנחה.

אז $e(\overline{G-x}) \le e(\bar{G}) - 2 = n - 5 = (n-1) - 4$. לפי הנ"א יש מסלול המיטוני בין כל שני שכנים של x.

אז זה נותן מעגל המילטוני ב-G.

הוכחנו את טענות 1,2, כנדרש. ■

הגדרה: טורניר הוא גרף מכוון שבו לכל זוג קודקודים יש בדיוק צלע אחת ביניהם.

נסמן: $\deg_H(v)$ את מספר הצלעות שיש בין קודקוד v לתת-גרף H.

למה: יהי D גרף מכוון ויהי $P = v_1 \to v_2 \to \cdots v_{\ell+1}$ המסלול הארוך ביותר בגרף, באורך $\ell + 1$.

אזי, לכל קודקוד $v \notin V(P)$ מתקיים $\deg_P(v) \le \ell$.

<u>הוכחה</u>:

נגדיר קבוצות:

$X := \{v_i \in V(P) : (v, v_i) \in E(D)\}$ – קודקודים שיש צלע מ-v אליהם.

$Y := \{v_i \in V(P) : (v_{i-1}, v) \in E(D)\}$ – קודקודים שיש צלע מהקודקוד לפניהם ל-v.

נשים לב שלא קיימות הצלעות $(v, v_1), (v_{\ell+1}, v)$, כי אחרת המסלול P לא הכי ארוך.

וגם, $X \cup Y \subseteq \{v_2, \dots, v_{\ell+1}\}$.

וגם, $X \cap Y = \emptyset$. כי אם יש קודקוד בשניהם, יש צלע (v_{i-1}, v) וגם (v, v_i). אז P לא הכי ארוך.

אז מתקיים: $\deg_P(v) = |X| + |Y| = |X \cup Y| + \underbrace{|X \cap Y|}_{=0} \le \ell$, כנדרש. ■

<u>עוד דרך</u> (אותו רעיון, יותר אינטואיטיבי):

נב"ש שיש $\ell + 1$ צלעות בין v ל-P. כלומר יש צלע בין v וכל קודקוד במסלול.

אם הצלע $v_{\ell+1}, v$ היא בכיוון $v_{\ell+1} \to v$, אז המסלול $P' = v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{\ell+1} \to v$ ארוך יותר מ-P.

אז היא בכיוון $v \to v_{\ell+1}$.

אם הצלע v, v_1 היא בכיוון $v \to v_1$, אז המסלול $P' = v \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{\ell+1}$ ארוך יותר מ-P.

אז היא בכיוון $v_1 \to v$.

כלומר איפשהו במסלול יש i כך שיש צלע $v_i \to v$, וצלע $v \to v_{i+1}$.

אז המסלול $P' = v_1 \to \cdots v_i \to v \to v_{i+1} \to \cdots \to v_{\ell+1}$ ארוך יותר מ-P. ■

טענה: בטורניר יש מסלול המילטון מכוון.

<u>הוכחה</u>: יהי P המסלול הארוך ביותר בטורניר, באורך $\ell + 1$. נב"ש שהוא לא מסלול המילטון.

אזי קיים קודקוד $v \notin V(P)$. אז לפי הלמה, $\deg_P(v) \le \ell$. כלומר יש קודקוד במסלול שהוא לא מחובר אליו.

אבל זה טורניר אז v חייב להיות מחובר לכולם, סתירה. ■

TA Session 7: Graph Coloring

תזכורות

- מספר הצביעה של גרף: $\chi(G)$.
- גודל הקליקה המקסימלי בגרף: $\omega(G)$.
- גרף דו"צ אמ"מ הוא 2-צביע.
- אפשר לצבוע גרף דו"צ בשני צבעים בזמן פולינומי.
- ניתן לצבוע כל גרף ב- $\Delta(G)+1$ צבעים, בשיטה חמדנית.
- משפט ברוקס: בגרף קשיר, שהוא לא גרף שלם או מעגל אי-זוגי, מתקיים $\chi(G) \le \Delta(G)$.
- אלגוריתם צביעה חמדן:
  - נעבור על כל הקודקודים באיזשהו סדר.
    לכל קודקוד, ניתן לו את הצבע (המספר) הנמוך ביותר שאפשר (שאין לו שכן בצבע הזה).

טענה: יהי גרף עם n קודקודים שהוא 3-צביע. אזי ניתן למצוא צביעה ב- $O(\sqrt{n})$ צבעים בזמן פולינומי.

<u>הוכחה ע"י אלגוריתם:</u>

1. כל עוד קיים קודקוד v בגרף עם דרגה לפחות $\sqrt{n}$:
   a. נצבע את v בצבע חדש.
   b. נצבע את השכנים של v בשני צבעים חדשים.
   c. נסיר מהגרף את v ואת השכנים שלו.
2. נצבע את שאר הקודקודים בשיטה חמדנית.

בכמה צבעים השתמשנו?

בכל איטרציה של הלולאה, מסירים לפחות $\sqrt{n}$ קודקודים, אז יש לכל היותר $\sqrt{n}$ איטרציות. ומשתמשים בלכל היותר 3 צבעים בכל איטרציה. בנתיים $3\sqrt{n}$.

אחרי הלולאה, צובעים באופן חמדן גרף שמקיים $\Delta(G) < \sqrt{n}$. אז אפשר לצבוע אותו ב- $\sqrt{n}$ צבעים. סה"כ $4\sqrt{n}$ צבעים.

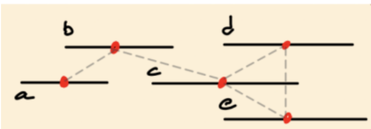
אפשר אולי עם $3\sqrt{n}+1$? פשוט נצבע את v בכל שלב בצבע a, קבוע. השכנים שלו נצבעים במבעים אחרים, וכל קודקוד אחר שיהיה ה-v בטוח לא יכול להיות שכן של v אחר, כי אחרת הוא היה נמחק. פורמלית:

נב"ש שקיים v_i (הקודקוד הנבחר באיטרציה ה-i) שהוא שכן של v_j (הקודקוד שנבחר באיטרציה ה-j) עבור $j < i$ כלשהו.
אזי, היינו מוחקים את v_j באיטרציה ה-i. סתירה לכך שהוא נבחר באיטרציה ה-j.

אז צבע אחד בשביל כל הקודקודים שהם v באיזשהו שלב, ועוד 2 צבעים בכל איטרציה, ועוד $\sqrt{n}$ צבעים בצביעה החמדנית. סה"כ $1+3\sqrt{n}$.

הגדרה: בהינתן קבוצה של אינטרוולים, נגדיר **גרף אינטרוולים**:

- כל אינטרוול יהיה קודקוד.
- שני קודקודים מחוברים אם האינטרוולים שלהם חופפים.



טענה: בגרף אינטרוולים, $\omega(G)=\chi(G)$. גודל הקליקה המקסימלי שווה המספר הכרומטי.

<u>כיוון ראשון:</u> טריוויאלי ש- $\omega(G) \le \chi(G)$. אם יש לי קליקה בגודל k, חייבים לפחות k צבעים.

<u>כיוון שני:</u> עבור גרף כלשהו, נמצא צביעה ב- $\omega(G)$ צבעים.

נסדר את הקודקודים לפי נקודות ההתחלה של האינטרוולים שלהם, ונפעיל את הצביעה החמדנית לפי הסדר הזה.

אם קודקוד v קיבל צבע k, זה אומר שיש לו שכנים שנצבעו בכל הצבעים $1,\dots,k-1$.

כלומר יש לו לפחות $k-1$ שכנים. זה לפחות $k-1$ אינטרוולים שנקודת ההתחלה של v מוכלת בתוכם.

סה"כ זה לפחות k אינטרוולים שחופפים, אז בגרף יש קליקה בגודל k.

יהי k^* הצבע המקסימלי שקיבלנו. אזי,

$$\chi(G) \le k^* \le \omega(G)$$

כנדרש. ■

תזכורת: גרף הוא דו"צ אמ"מ אין בו מעגלים אי-זוגיים.

טענה: יהי G גרף שבו לכל שני מעגלים אי-זוגיים יש קודקוד משותף. אזי, $\chi(G) \leq 5$.

<u>הוכחה</u>:

אם בגרף אין מעגלים אי-זוגיים, אז הוא דו"צ והוא 2-צביע.

אחרת, יש בו לפחות מעגל אי-זוגי אחד. יהי C המעגל האי-זוגי הקצר ביותר.

בגרף $G - C$ אין מעגלים אי-זוגיים, כי הורדנו קודקוד מכל מעגל אי-זוגי. אז $G - C$ הוא 2-צביע.

אבחנה: מיתר במעגל אי-זוגי מייצר מעגל אי-זוגי.

כי החלוקה של המעגל לשני חלקים נותן חלק אחד באורך זוגי, ואם מוסיפים לו את המיתר זה מעגל באורך אי-זוגי.

אז ב-C אין מיתרים. אז C הוא 3-צביע. נצבע אותו ב-3 צבעים חדשים.

סה"כ 5 צבעים, כנדרש. ■

הגדרה: גרף צלעות של גרף G מסומן $L(G)$, ומוגדר:

כל צלע uv הופכת לקודקוד $\overline{uv}$. בין שני קודקודים $\overline{uv}, \overline{xy}$ ב-$L(G)$ תהיה צלע $uvxy$ אם ל- uv, xy היה קודקוד משותף ב-G.

תזכורת: $\chi'(G)$ הוא המספר הכרומטי של <u>צביעת צלעות</u>.

מתקיים $\chi'(G) = \chi\big(L(G)\big)$.

וגם, $\Delta\big(L(G)\big) \leq 2\Delta(G) - 2$. כי הדרגה של קודקוד ב-$L(G)$ היא סכום הדרגות של הקודקודים המקוריים, פחות 2.

משפט ויזינג: $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

משפט ברוקס: בגרף קשיר, שהוא לא גרף שלם או מעגל אי-זוגי, מתקיים $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

נוכיח מקרה ספציפי של משפט ויזינג: $\Delta(G) = 3$. צ"ל ש- $\chi'(G) \leq 4$.

נוכיח ש- $\chi\big(L(G)\big) \leq 4$.

מכיוון ש- $\Delta(G) = 3$, נקבל ש- $\Delta\big(L(G)\big) \leq 4$.

אם $L(G)$ הוא לא מעגל אי-זוגי ולא קליקה, סיימנו לפי ברוקס.

אם הוא מעגל אי-זוגי, הוא 3-צביע וסיימנו.

אם הוא קליקה: עד K_4, בוודאי 4-צביע.

והוא לא יכול להיות K_5, כי זה אומר שהיו 5 צלעות שמחוברות בקודקוד. אז הקודקוד הזה בדרגה 5, סתירה לכך ש- $\Delta(\mathrm{G}) = 3$.

ההוכחה הפורמלית של המקרה הכללי הייתה בהרצאה.

תזכורת

בתכנות לינארי אנחנו מדברים על 6 בעיות:

$$(1)\ \max_{x\in\mathbb{R}^m}\{c^Tx : Ax \le b\},\qquad (2)\ \max_{x\in\mathbb{R}^m}\{c^Tx : x\ge 0, Ax \le b\},\qquad (3)\ \max_{x\in\mathbb{R}^m}\{c^Tx : x\ge 0, Ax = b\}$$

$$(4)\ \min_{x\in\mathbb{R}^m}\{c^Tx : Ax \ge b\},\qquad (5)\ \min_{x\in\mathbb{R}^m}\{c^Tx : x\ge 0, Ax \ge b\},\qquad (6)\ \min_{x\in\mathbb{R}^m}\{c^Tx : x\ge 0, Ax = b\}$$

בכולן, מנסים למצוא את ה-x שממזער או ממקסם את המכפלה הפנימית של c^Tx, תחת מגבלות של יחס כלשהו בין Ax ל-b, והגבלות על x.

מה שנידרש לעשות זה רק להגדיר האם זו בעיית מינימום או מקסימום, להגדיר את x, ולקבוע את ההגבלות.

שלבים למידול בעיה בתכנות לינארי

1. **הגדרת המשתנים – x**

נגדיר את המשתנים של הבעיה. לדוגמה אם זו בעיה בגרפים, בד"כ נרצה משתנה לכל קודקוד או צלע. המשתנים האלה ביחד הם x.

2. **הגדרת מטרה – *min/max***

נגדיר אם רוצים למקסם או למזער את סכום המשתנים, עם מקדמים אם צריך.

3. **הגדרת הגבלות**

נגדיר את היחס בין Ax ל- b. היחסים המותרים הם: $\ge\ \ \le\ \ =$. אסור $<$ או $>$.

בנוסף, נגדיר אם $x \ge 0$.

בדרך כלל בבעיית מינימום נגביל $Ax \ge b$ ולא $Ax \le b$, כי אם זו בעיית מינימום ויש פתרון כך ש $Ax \le b$,
בוודאי ניקח אותו ולא פתרון גדול יותר (ובפרט לא ניקח פתרון שבו $Ax \ge b$).
ובאופן דומה והפוך עבור בעיית מקסימום.

הרבה פעמים לא נצליח למדל את הבעיה בתכנות לינארי, אלא רק בתכנות בשלמים (שהמשתנים יכולים לקבל רק ערכים שלמים). אין לזה אלגוריתם פולינומי, אבל ה-*relaxation* של הבעיה יכול להיות קירוב טוב.

דוגמה: שידוך מקסימלי

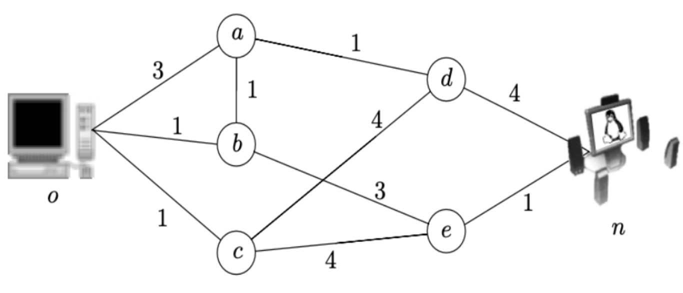
המשתנים יהיו הצלעות. כלומר $\forall 1 \le i \le m: x_i \in \{0,1\}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, כאשר כל x_i מתאים ל- $e_i \in E(G)$.

המטרה היא למקסם את מספר הצלעות בשידוך. כלומר נגדיר $c = (1, 1, \dots, 1)$, ואז נרצה למקסם את $\sum_{i=1}^m c_i x_i = \sum_{i=1}^m 1\cdot x_i = \sum_{i=1}^m x_i$.

הגבלות: כל קודקוד מחובר רק לצלע אחת בשידוך. כלומר אם קודקוד v מחובר לצלעות $e_1, \dots e_k$, אז $x[e_1] + \dots + x[e_k] \le 1$.

$$\max_{x\in\{0,1\}^m}\left\{1^m \cdot x : \forall u \in V(G), \sum\nolimits_{v\in N_G(u)} x[e_{uv}] \le 1\right\}$$

תרגיל: רשת זרימה



המטרה:

$$\max \sum_{v\in N_G(o)} e_{ov}\,,\qquad \forall uv \in E(G): -c(uv) \le e_{uv} \le c(uv),\qquad e_{uv} = -e_{vu},\qquad \forall v \in V(G): \sum_{u\in N_G(v)} e_{uv} = 0$$

TA Session 8: Linear Programming

ריגרסיה לינארית

נתון אוסף של נקודות במישור. המטרה היא למצוא ישר $y = ax + b$ כך שסכום המרחקים של הנקודות מהקו הוא מינימלי. כלומר:

$$\min_{a,b}\left\{\sum_{i=1}^{n}|a\cdot x_i + b - y_i|\right\}$$

ערך מוחלט זה לא לינארי. איך נבטא את זה בצורה לינארית?

נגדיר לכל נקודה משתנה e_i שמבטא את ה-*error* שלה. ואז נרצה למזער את $\min_{a,b}\{\sum_{i=1}^{n} e_i\}$. ונגדיר אילוצים:

$$e_i \geq a\cdot x_i + b - y_i, \qquad e_i \geq -(a\cdot x_i + b - y_i)$$

הפרדת נקודות

נתונות שתי קבוצות של נקודות במישור:

$$A \coloneqq \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \qquad B \coloneqq \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

ונרצה למצוא קו שמפריד בין הקבוצות. כלומר, ישר $y = ax + b$ כך ש:

$$y(p_i) > ax(p_i) + b, \qquad \forall p_i \in A$$

$$y(p_i) < ax(p_i) + b, \qquad \forall p_i \in B$$

אבל אסור $>$, $<$. אז נוסיף משתנה δ שמייצג את המרווח בין הקו לנקודות. ונוסיף דרישה למקסם גם אותו. אם $\delta = 0$ אז אין פתרון.

$$y(p_i) \geq ax(p_i) + b + \delta, \qquad \forall p_i \in A$$

$$y(p_i) \leq ax(p_i) + b - \delta, \qquad \forall p_i \in B$$

הכללה לפולינום

נחפש $y = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, ומשתנה δ, כך ש:

$$y(p_i) \geq a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 + \delta, \qquad \forall p_i \in A$$

$$y(p_i) \leq a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 - \delta, \qquad \forall p_i \in B$$

קבוצה בת"ל מקסימום

לכל קודקוד $v \in V(G)$ נגדיר $x_i \in \{0,1\}$. אנחנו רוצים למקסם את Σx_v תחת ההגבלות:

$$\forall uv \in E(G): x_v + x_u \leq 1$$

נעשה *relaxation*:

אם נאפשר ממשיים, אז יש פתרון אופטימלי עם $x_v = 0.5$ לכל קודקוד. זה נותן סכום $v(G)/2$.

אבל הפתרון האמיתי (בשלמים) יכול להיות הרבה פחות מזה. לדוגמה בגרף המלא, הפתרון הוא 1.

שידוך במשקל מקסימלי

נתון גרף דו"צ מאוזן (שתי הקבוצות באותו גודל) עם משקולות w_e על הצלעות. נרצה למצוא שידוך מושלם במשקל מקסימלי.

$$\max_{e\in E(G)} w_e \cdot x_e\,, \qquad \forall e \in E(G): x_e \in \{0,1\}$$

$$\sum_{e|v\in e} x_e = 1, \qquad \forall v \in V(G)$$

טענה: הפתרון האופטימלי בממשיים = הפתרון האופטימלי בשלמים

<u>הוכחה</u>: יהי x^* פתרון אופטימלי בממשיים, ויהי $w(x^*)$ המשקל שלו. נמצא את הפתרון האופטימלי בשלמים.

נסמן $k(x^*)$ את מספר המשתנים שקיבלו ערך לא שלם ב-x^*.

אם $k(x^*) = 0$, סיימנו.

אחרת: ניקח צלע (a_1, b_1) עם משקל לא שלם.

יש עוד צלע (b_1, a_2) עם משקל לא שלם, כי כל קודקוד מסתכם ל-1.

באותו אופן יש עוד צלע (a_2, b_2)... עד שנסגור מעגל עם (b_j, a_1).

נסמן את המעגל $C \coloneqq (e_1, e_2, \dots, e_t)$. הגרף דו"צ, אז t זוגי.

עבור צלעות זוגיות $(e_2, e_4, \dots e_t)$ נוסיף ε. ועבור צלעות אי-זוגיות $(e_1, e_3, \dots, e_{t-1})$ נחסיר ε.

נסתכל על המשקל של הפתרון אחרי כל שינוי:

$$\begin{aligned} w\left({x^*}'\right) &= \sum_{e \notin C} x_e^* \cdot w_e + \sum_{e \in C_{even}} (x_e^* + \varepsilon) \cdot w_e + \sum_{e \in C_{odd}} (x_e^* - \varepsilon) \cdot w_e \\ &= \sum_{e \notin C} x_e^* \cdot w_e + \sum_{e \in C_{even}} x_e^* \cdot w_e + \sum_{e \in C_{odd}} x_e^* \cdot w_e + \sum_{e \in C_{even}} \varepsilon \cdot w_e - \sum_{e \in C_{odd}} \varepsilon \cdot w_e \\ &= \sum_{e} x_e^* \cdot w_e + \sum_{e \in C_{even}} \varepsilon \cdot w_e - \sum_{e \in C_{odd}} \varepsilon \cdot w_e \end{aligned}$$

נוכל לבחור ε חיובי או שלילי כך שהפתרון לא יקטן. והוא אף פעם לא יגדל, כי לקחנו פתרון אופטימלי (מקסימום).

ונשים לב שעבור כל קודקוד, סכום הצלעות שלו עדיין 1.

אז אם ניקח את ה-ε עם ערך מוחלט הכי גדול שעדיין שומר על המשקלים בין 0 ל-1, נקבל פתרון באותו משקל שיש בו רכיב אחד פחות שלא שלם.

ונוכל לחזור על התהליך עד שאין רכיבים לא שלמים.

TA Session 9: Approximations

רדוקציות שמשמרות יחס קירוב

<u>רדוקציה משמרת יחס קירוב בין בעיה A לבעיה B</u> היא זוג פונקציות (f,g) כך ש:

$$f: A \to B, \qquad g: S(B) \to S(A)$$

כאשר $S(X)$ מסמן את מרחב הפתרונות של X.

אם נתון אלגוריתם $Algo$ שהוא k-מקרב עבור B, אזי $g\big(Algo(f)\big)$ הוא אלגוריתם k-מקרב עבור A.

לדוגמה, עבור בעיית $3\text{-}CNF\text{-}SAT$. נשתמש ב-f כדי להעביר את הבעיה לבעיית 3-צביעה, נשתמש באלגוריתם צביעה שהוא k-מקרב, ונקבל פתרון φ. ונשתמש ב-g כדי להעביר את הפתרון ל- φ', השמה מספקת ל- $3\text{-}CNF$.

$$3\text{-}CNF\text{-}SAT \xrightarrow{f} 3\text{-}COLOR \xrightarrow{Algo} \varphi \xrightarrow{g} \varphi'$$

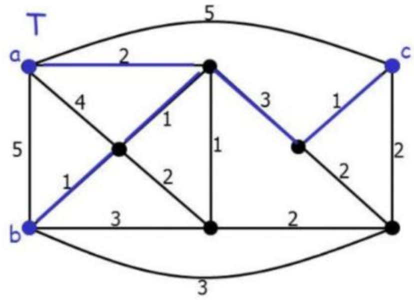
באופן כללי:

1. נקבל קלט x לבעיה A.
2. נמיר אותו לקלט $y = f(x)$ לבעיה B.
3. נפעיל אלגוריתם קירוב ל-y ונקבל פתרון s.
4. נמיר את s לפתרון $s' = g(s)$ עבור x.

עץ שטיינר

נתון גרף עם משקלים אי-שליליים על הצלעות, וחלוקה של הקודקודים ל-2 קבוצות R, S.

המטרה היא למצוא עץ מינימלי שפורש את כל R. (מותר לכלול קודקודים מ-S אבל לא חובה).



עץ שטיינר מטרי

אותה הגדרה, אבל הגרף מלא והמשקלים מקיימים את אי-שוויון המשולש. כלומר $w(uv) \le w(ux) + w(xv)$ לכל x, u, v.

נמצא רדוקציה משמרת קירוב בין עץ שטיינר (G,T) לעץ שטיינר מטרי (G',T').

$$f(G) = G', \qquad g(T') = T$$

נגדיר את $f(G)$: אותם קודקודים כמו ב-G, והמשקל של כל צלע uv הוא המרחק הכי קצר בין v ל-u ב-G. המרחק הקצר מקיים את אי"ש המשולש.

נגדיר את $g(T')$: לכל צלע ב-T' ניקח את המסלול שהיא מייצגת ב-G, ובסוף ניקח עץ פורש על מה שמתקבל. בגלל שזה עץ פורש ב-G' על כל הקודקודים של R, זה אומר שיש מסלול בין כל שני קודקודים ב-R דרך T'. אז גם ב-T יהיה מסלול.

אנחנו צריכים להוכיח:

1. $OPT(G) \ge OPT(G')$.
2. לכל עץ T' מתקיים $cost(T) \le cost(T')$.
3. יש אלגוריתם k-מקרב עבור הבעיה המטרית.

נוכיח את 1:

$OPT(G)$ זה המשקל של העפ"מ של G. מתקיים לפי תהליך הבנייה: $\text{cost}_G(uv) \ge \text{cost}_{G'}(uv)$, כי ניקח את המשקל הכי נמוך שמחבר ביניהם.

אז המשקל האופטימלי ב-G' הוא לכל היותר המשקל האופטימלי ב-G.

נוכיח את 2:

מכיוון שלוקחים עבור כל צלע את המסלול שהיא מייצגת (שהיא באותו משקל), המשקל של כל מסלול בין שני קודקודים נשאר זהה.

יכולות להיות צלעות שחוזרות על עצמן, ובמקרה הזה זה רק מוריד את המשקל.

בסה"כ, התחלנו עם G ועברנו ל-G' שבו יש פתרון אופטימלי יותר טוב.

מוצאים פתרון k-מקרב T' ב-G' ומעבירים אותו ל-T, והמשקל של T נמוך יותר מ-T'. אז:

$$cost(T) \leq cost(T') \leq k \cdot OPT(G') \leq k \cdot OPT(G)$$

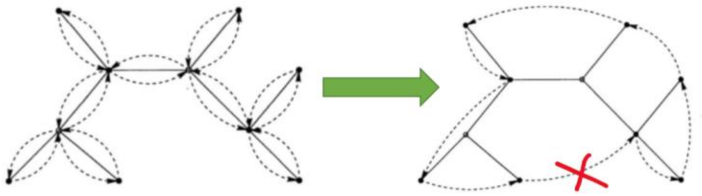
אלגוריתם מקרב לעץ שטיינר מטרי

נמצא עץ פורש מינימלי ב-G'. נקרא לו T.

<u>טענה</u>: האלגוריתם הזה הוא 2-מקרב. ($cost(T) \leq 2OPT(G)$).

<u>הוכחה</u>: יהי T^* פתרון אופטימלי, במשקל $OPT(G)$.

נכפיל את הצלעות של T^*, ונקבל הילוך אויילר:



נעשה קיצורי דרך בהילוך כך שלא יהיו קודקודים שחוזרים על עצמם ושלא יהיו קודקודים של S (אפשר, כי זה גרף מלא).

נקבל מעגל המילטון. נסיר ממנו צלע שרירותית ונקבל עץ פורש T' (לא בהכרח מינימלי) של $G[R]$.

$$cost(T) \leq cost(T') \leq 2cost(T^*) = 2OPT(G)$$

<u>טענה</u>: האלגוריתם $\left(2\left(1-\frac{1}{|R|}\right)\right)$-מקרב.

<u>הוכחה</u>: יהי T^* פתרון אופטימלי, במשקל OPT. נכפיל את הצלעות של T^* ונקבל הילוך אויילר.

נעשה קיצורי דרך בהילוך כך שלא יהיו קודקודים שחוזרים על עצמם או קודקודים מ-S.

נקבל מעגל המילטון C, נסיר ממנו את הצלע <u>בעלת המשקל הכי גדול</u> ונקבל עץ פורש T' (לא בהכרח מינימלי) של $G[R]$.

$$cost(T) \leq cost(T') \leq^{\text{א}} cost(C) - \frac{cost(C)}{|C|} =^{\text{ב}} cost(C) - \frac{cost(C)}{|R|} =^{\text{ג}}$$
$$= cost(C) \cdot \left(1 - \frac{1}{|R|}\right) \leq^{\text{ד}} 2 \cdot cost(T^*) \cdot \left(1 - \frac{1}{|R|}\right) =^{\text{ה}} 2 \cdot OPT(G) \cdot \left(1 - \frac{1}{|R|}\right)$$

א. שובך היונים, יש צלע במשקל לפחות $cost(C)/|C|$.
ב. C הוא מעגל המילטון על הקודקודים של R.
ג. גורם משותף.
ד. המשקל של C הוא לכל היותר פעמיים המשקל של T^*.
ה. בהגדרה, T^* הוא במשקל אופטימלי.

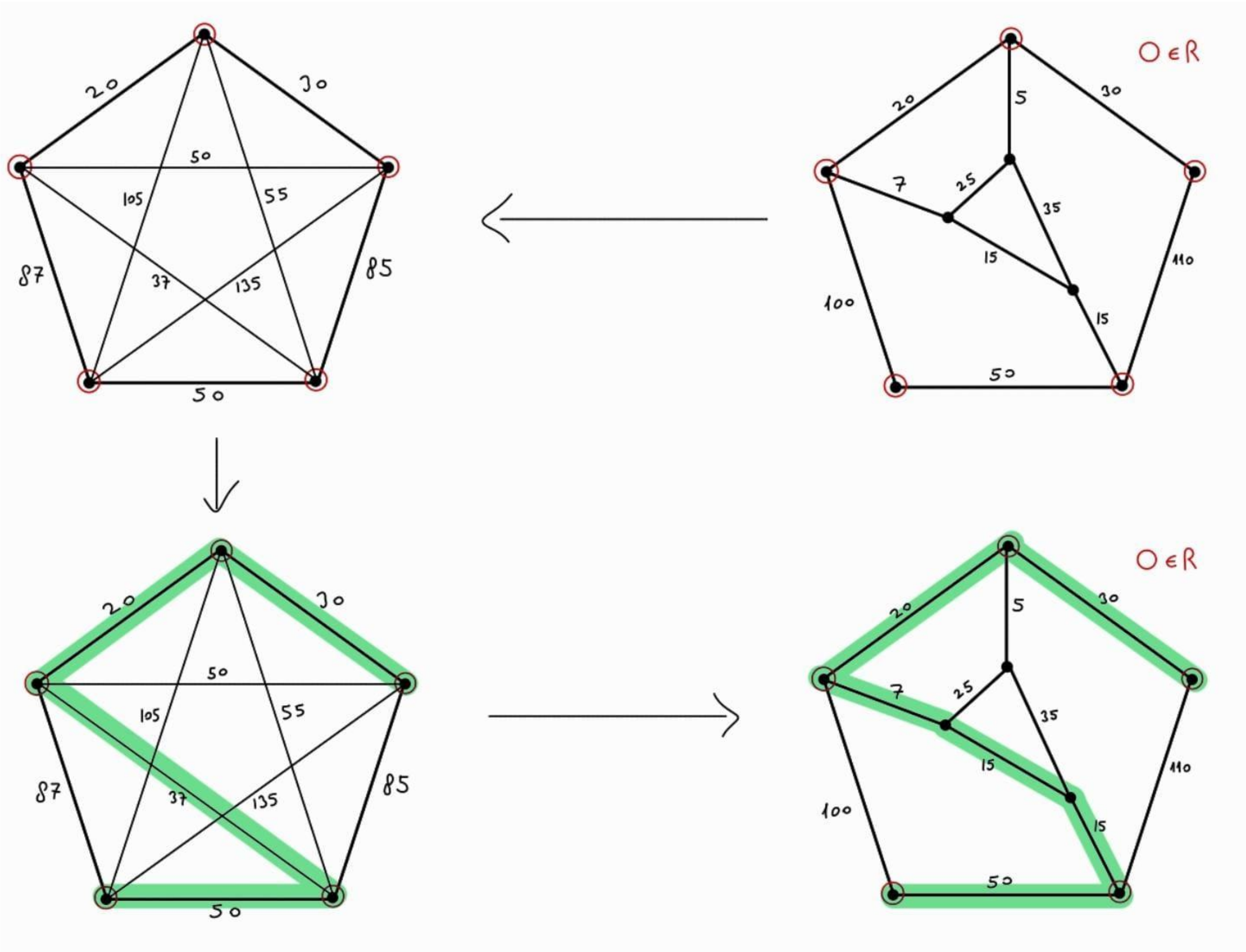
כנדרש. ■

דוגמה

נריץ את האלגוריתם על הגרף:

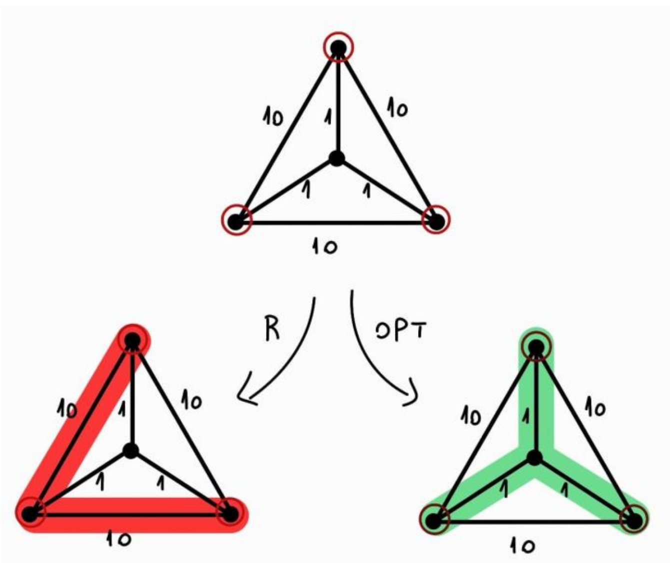
במעבר לקליקה, לא ציירנו את הקודקודים של S כי לא צריך אותם. העץ יהיה רק בין קודקודים של R.

כשנמיר חזרה למסלולים בעץ המקורי, נשתמש גם בקודקודים של S.



דוגמה 2

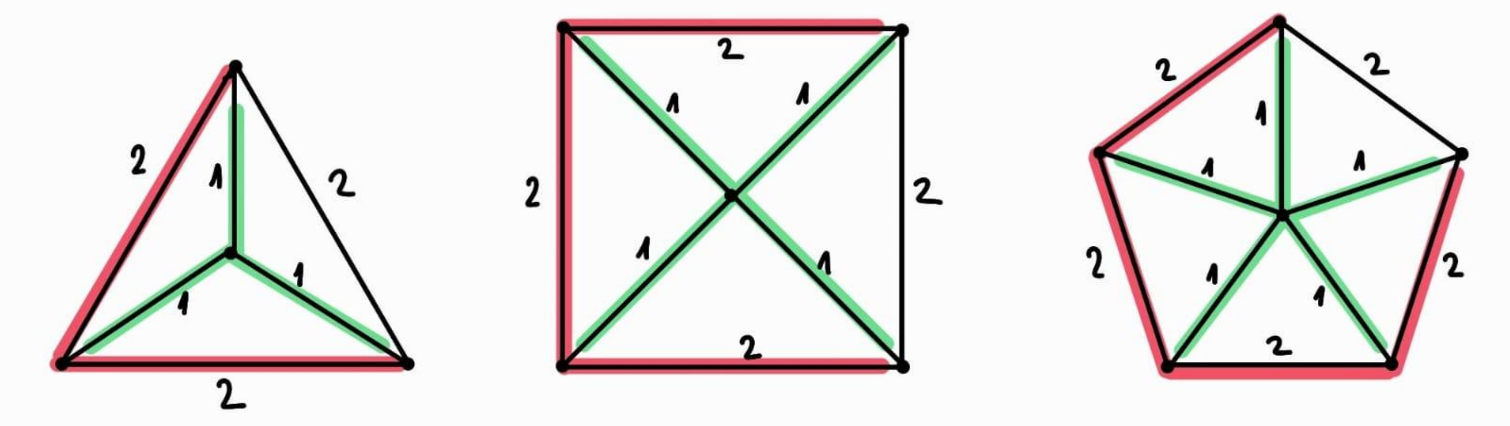
בבעיה המטרית, MST על הקודקודים של R נותן פתרון 2-מקרב. במקרה הכללי (לא מטרי) זה לא עובד:



דוגמה 3

ניתן 3 דוגמאות לבעיה <u>המטרית</u> כך ש:

1. $S \neq \emptyset$
2. ל-MST על R יש משקל גבוה יותר מהפתרון האופטימלי.



תרגיל

נתון גרף קשיר G עם משקלים אי-שליליים על הצלעות. הקודקודים מחולקים ל-2 קבוצות: R – לקוחות, S – ספקים.

צריך למצוא תת גרף במשקל מינימלי, כך שלכל לקוח יש לפחות ספק אחד ברכיב הקשירות שלו.

נמצא אלגוריתם 2-מקרב: נעשה רדוקציה לעץ שטיינר, ונשתמש באלגוריתם עבור שטיינר.

נוסיף ל-G קודקוד v נוסף, שמחובר לכל הקודקודים ב-S, עם צלע במשקל 0. נקרא לגרף החדש G'.

נפעיל את האלגוריתם ה-2-מקרב של שטיינר על G', כאשר $R' := R \cup \{v\}$. יהי T העץ המתקבל. הפתרון יהיה $T' := T \setminus \{v\}$.

האלגוריתם ימצא עץ פורש של R', שזה כולל את v. והוא מחובר לכל S, אז כל קודקוד ב-R יהיה עם קודקוד מ-S ברכיב קשירות.

<u>נוכיח שהוא 2-מקרב</u>: יהי OPT הפתרון האופטימלי לבעיה.

נשים לב ש $E(OPT) \cup \{(v,s): s \in S\}$ הוא תת גרף במשקל של OPT. ואם נמחק צלעות בין S ל-v נקבל עץ T^* שהוא עץ שטיינר כלשהו. אז:

$$\mathrm{OPT}_{steiner} \leq E(OPT) \cup \{(v,s): s \in S\} = OPT$$

אז:

$$T' \leq T^* \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{steiner} \leq 2 \cdot OPT$$

הגדרה: קבוצה שלטת היא קבוצה של קודקודים כך שכל קודקוד בגרף הוא שכן של הקבוצה (או בקבוצה עצמה).

עבור קבוצת קודקודים כלשהי, נגדיר:

- קודקוד בקבוצה – שחור,
- קודקוד עם שכן בקבוצה – אפור,
- קודקוד לא בקבוצה ובלי שכן בקבוצה – לבן.

ונסמן $w_S(v)$ את מספר השכנים הלבנים של v.

עבור קבוצה שלטת, אין קודקודים לבנים בגרף.

אלגוריתם מקרב עבור קבוצה שלטת

1. נאתחל $S = \emptyset$.
2. כל עוד יש קודקודים לבנים בגרף,
   a. נבחר את הקודקוד עם $w_S(v)$ הכי גדול ונוסיף ל-S.
3. נחזיר את S.

<u>נוכיח שהוא $O(\ln(\Delta(G)))$-מקרב</u>:

נגדיר לכל קודקוד את ה"עלות" של הפיכה מלבן לאפור או שחור. אם בחרנו קודקוד v:

- אם v לבן, לכל קודקוד <u>לבן</u> שנהפך לאפור/שחור בעקבות הבחירה ניתן עלות $1/(w_S(v)+1)$.
- אם v אפור, לכל קודקוד <u>לבן</u> שנהפך לאפור בעקבות הבחירה ניתן עלות $1/(w_S(v))$.

נסמן את העלות הזו $ac(v)$.

אבחנה: $|S| = \sum_{v\in V(G)} ac(v)$, כי בכל בחירה של קודקוד הוספנו בדיוק 1 לסכום.

יהי $S^* := \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ הפתרון האופטימלי.

נסמן $S_1, S_2, \dots, S_t$ את הכוכבים שהמרכזים שלהם הם $v_1, \dots v_t$. הכוכבים לא בהכרח זרים.

מספיק להוכיח ש

$$ac(S_i) := \sum_{u\in S_i} ac(u) = O(\ln(\Delta(G)))$$

למה? כי אם נכפיל הכל ב-t:

$$|S| = \sum_{v\in V(G)} ac(v) \le \sum_{i=1}^{t} ac(S_i) = t\cdot O(\ln(\Delta(G)))$$

במקרה הגרוע בריצה של האלגוריתם, כל קודקוד אפור נצבע אפור ע"י בחירה שונה של קודקוד שהפכנו לשחור.

כלומר בכל בחירה כיסינו רק עוד קודקוד אחד. נניח שזה המצב.

עבור S_i כלשהו, יהיו $w_1, \dots, w_\ell$ קודקודי הכוכב. ויהיו $u_1, \dots, u_\ell$ הבחירות שהפכו את $w_1, \dots, w_\ell$ לאפורים.

כלומר $\ell = |V(S_i)| = \deg_{S_i}(v_i) + 1$.

נסמן T_j את הרגע לפני בחירת הקודקוד u_j שהפך את w_j לאפור או שחור.

בזמן הזה יש בדיוק $j-1$ קודקודים אפורים/שחורים.

מצד אחד האלגוריתם חמדן אז הוא צובע את הקודקוד עם המספר המקסימלי של שכנים לבנים. כלומר:

$$w_{T_j}(u_j) \ge w_{T_j}(v_i)$$

מצד שני,

$$w_{T_j}(v_i) \ge \deg(v_i) - (j-1) = \deg(v_i) - j + 1$$

אזי,

$$ac(w_j) \le \frac{1}{w_{T_j}(u_j)} \le \frac{1}{w_{T_j}(v_i)} \le \frac{1}{\deg(v_i) - j + 1}$$

ומתקיים:

$$ac(S_i) = \left(\sum_{i=1}^{\deg(v)} ac(w_i)\right) + ac(v_i) \le \left(\sum_{i=1}^{\deg(v)} \frac{1}{\deg(v_i) - j + 1}\right) + 1 \le \left(\sum_{k=1}^{\deg(v)} \frac{1}{k}\right) + 1 = O(\ln(\deg(v)))$$
$$\le O(\ln(\Delta(G)))$$

כנדרש. ■

בעיית *max-3-CNF-SAT*

נתונה נוסחת *3-CNF*, φ. נרצה למצוא השמה לנוסחה, כך שכמה שיותר פסוקיות יהיו מסופקות.

<u>אלגוריתם אקראי</u>: לכל משתנה ניתן 0 או 1 בהסתברות חצי.

התוחלת של הפסוקיות המסופקות: לפסוקית מסויימת, צריך שכל 3 המשתנים לא יהיו מסופקים. כלומר $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

אז התוחלת של מספר הפסוקיות המסופקות היא $m \cdot \frac{7}{8}$, כלומר קיבלנו $\left(\frac{7}{8}\right)$-קירוב.

<u>נעשה דה-רנדומיזציה</u>: נגדיר W משתנה מקרי שסופר את מספר הפסוקיות שסופקו. $E[W] = \frac{7}{8}m$.

ניזכר בנוסחת התוחלת השלמה. לכל משתנה x:

$$E[w] = E[w \mid x = T] \cdot \underbrace{P[x = T]}_{0.5} + E[w \mid x = F] \cdot \underbrace{P[x = F]}_{0.5} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{E[w \mid x = T]}_{a} + \underbrace{E[w \mid x = F]}_{b}\right)$$

אז בוודאות, אחד מתוך a או b הם לפחות $E[w]$. נחשב את שניהם ונבחר את מה שמגדיל את התוחלת (אם הם שווים אז נבחר אחד שרירותי).

לכל $i = 1$ עד n:

נחשב את $E(w \mid x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_{i-1} = b_{i-1}, x_i = 0)$ ואת $E(w \mid x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_{i-1} = b_{i-1}, x_i = 1)$.

ונקבע את b_i לפי מ שמגדיל את התוחלת. בגלל שבכל שלב, התוחלת לא קטנה, אז האלגוריתם נותן לפחות $\left(\frac{7}{8}\right)$-קירוב.

נשים לב שזה עובד לכל k, לא רק 3. כלומר לכל נוסחת *k-CNF*, נקבל $\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$-קירוב.

<u>ניסיון לשיפור האלגוריתם</u>: במקום השמה בהסתברות חצי, נבחר 1 בהסתברות p ו-0 בהסתברות $1 - p$

עבור פסוקית עם a ליטרלים חיוביים (x) ו-b ליטרלים שליליים $(\bar{x})$, ההסתברות שהיא לא תסופק היא $p^b(1-p)^a$.

נניח בה"כ ש- $p > 1/2$. ההסתברות שפסוקית C תסופק:

$$P[C\ is\ SAT] = 1 - p^b \underbrace{(1-p)}_{<0.5}{}^a > 1 - p^b p^a = 1 - p^k$$

אז $E[w] > m \cdot \left(1 - p^k\right)$. וכיוון ש- $p > 0.5$, קיבלנו תוצאה פחות טובה.

ניסיון שיפור באמצעות *LP*

<u>נגדיר את בעיית ה-*IP*</u>: לכל פסוקית C, נגדיר $P(C)$ את הליטרלים החיוביים שלה, ו- $N(C)$ את הליטרלים השליליים.

ונגדיר $Z_C \in \{0,1\}$ אינדיקטור לכך שהפסוקית מסופקת. לכל משתנה x_i נגדיר $y_i \in \{0,1\}$.

$$\max \sum_C Z_C\ , \qquad \sum_{i \in P(C)} y_i + \sum_{i \in N(C)} 1 - y_i \geq Z_C$$

אם פסוקית לא מסופקת, זה אומר שכל המשתנים $i \in P(C)$ קיבלו 0, וכל המשתנים $i \in N(C)$ קיבלו 1. אז הסכום יהיה 0, וזה יגביל את Z_C.

<u>נעשה *relaxation*</u>:

הכל אותו דבר אבל: $Z_C \in [0,1],\ \ y_i \in [0,1]$.

נקבל (y^*, Z^*) אופטימליים עבור ה-*LP*. לכל משתנה, ניתן השמה 1 בהסתברות y_i^*.

<u>נחשב את תוחלת יחס הקירוב</u>: לכל פסוקית, ההסתברות שהיא לא מסופקת:

$$p_C := \prod_{i \in P(C)} (1 - y_i^*) \cdot \prod_{i \in N(C)} y_i^*$$

נגדיר:

$$a_i \coloneqq \begin{cases} y_i^*, & i \in N(C) \\ 1-y_i^*, & i \in P(C) \end{cases}$$

לפי אי-שוויון *AM-GM* (קבלו את זה כנתון, לא צריך להוכיח), מתקיים:

$$p_C = \prod_{i=1}^{k} a_i \leq \left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^k = \left(\frac{1}{k}\left[\sum_{i\in P(C)}(1-y_i^*)\cdot\sum_{i\in N(C)}(y_i^*)\right]\right)^k = \left(\frac{1}{k}\left[\sum_{i\in P(C)}1-\sum_{i\in P(C)}y_i^*-\sum_{i\in N(C)}(1-y_i^*)+\sum_{i\in N(C)}1\right]\right)^k$$
$$= \left(\frac{|P(C)|+|N(C)|}{k}-\frac{1}{k}\left[\sum_{i\in P(C)}y_i^*+\sum_{i\in N(C)}(1-y_i^*)\right]\right)^k = \left(1-\frac{1}{k}\left[\sum_{i\in P(C)}y_i^*+\sum_{i\in N(C)}(1-y_i^*)\right]\right)^k$$

ולפי ההגבלות שקבענו,

$$\sum_{i\in P(C)}y_i^*+\sum_{i\in N(C)}(1-y_i^*) \geq Z_C^*$$

אז:

$$p_C \leq \left(1-\frac{1}{k}Z_C^*\right)^k$$

אז ההסתברות ש-C מסופקת היא לפחות:

$$\Pr[C\ is\ SAT] \geq 1-\left(1-\frac{1}{k}Z_C^*\right)^k$$

מתקיים (עוד אי שוויון נתון):

$$1-\left(1-\frac{x}{k}\right)^k \geq \left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^k\right)x, \qquad \forall k\geq 0, x\in[0,1]$$

אז נוכל לרשום:

$$\Pr[C\ is\ SAT] \geq \left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^k\right)z_C^*$$

אז התוחלת של מספר הפסוקיות המסופקות:

$$E[w] = \sum_C \Pr[C\ is\ SAT] \geq \sum_C\left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^k\right)z_C^* = \left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^k\right)\sum_C z_C^* =$$

ונשים לב ש- $\sum_C Z_C$ זה הביטוי שאנחנו צריכים למקסם, ו-Z^* זה הפתרון האופטימלי. אז:

$$= \left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^k\right)\mathrm{OPT}_f \geq \left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^k\right)OPT$$

נשים לב שזה בערך $\left(1-\frac{1}{e}\right)$-מקרב, כי:

$$\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)^k = \frac{1}{e}$$

אז

$$1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^k \geq 1-\frac{1}{e}, \qquad \forall k>1$$

זה בעצם פחות טוב מהיחס $\left(1-\frac{1}{8}\right)$ שהיה לנו בהתחלה, עם האלגוריתם הכי פשוט.