Characterizing Local Connectivity

עבור גרף G, נגדיר את $\boldsymbol{\kappa(G)}$ (קאפא, *kappa*).

נתחיל עם ההגדרה לפי דיסטל (*Diestel*). יהיו בה חסרונות מסויימים. נתאר הגדרה לפי בונדי ומרטי (*Bondy & Murty*).

משפט מנגר יגיד שהן אותה הגדרה, ואז נשלב ביניהן.

ההגדרה של דיסטל

בהינתן $0 \leq k \in \mathbb{Z}$, וגרף G שמקיים $v(G) > k$. (זה מספר הקודקודים בגרף, לא גודל השידוך המקסימום $(\nu(G)$.

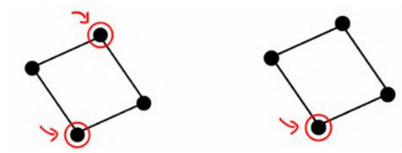
אם לכל $X \subseteq V(G)$ כך ש $|X| \leq k-1$, תת-הגרף $G - X$ הוא קשיר, אז G ייקרא ***k-connected***.

הסבר אינטואיטיבי א: אם אפשר להוריד כל קבוצה של עד $k-1$ קודקודים והגרף עדיין קשיר.

הסבר אינטואיטיבי ב: אם אין שני קודקודים שניתן לנתק אותם אחד מהשני על ידי הסרה של **פחות מ-**k קודקודים בגרף.

הסבר אינטואיטיבי ג: כדי לנתק שני קודקודים אחד מהשני, נצטרך להסיר לפחות k קודקודים.

לדוגמה, ניתוק כל קודקוד יחיד משאיר את הגרף קשיר. אבל אפשר לנתק אם מסירים שני קודקודים. הגרף הוא *2-connected*:



מה שמפריע לנו בהגדרה של דיסטל, זה החלק שבו מגדירים את G להיות עם $v(G) > k$. למה דורשים את זה?

אם אין את הדרישה הזו, אז גרף עם $v(G) \leq k-1$ קודקודים יהיה k-קשיר. כי אפשר פשוט להסיר את כל הגרף. לכן דורשים $v(G) > k$.

מצד שני, נשקול את K_1 ("הגרף השלם" על קודקוד יחיד). הרבה פעמים נרצה שהוא ייחשב גרף קשיר. אבל בהגדרה של דיסטל, הוא לא 1-קשיר.

את זה נתקן בהמשך. בנתיים, נגדיר את $\kappa(G)$.

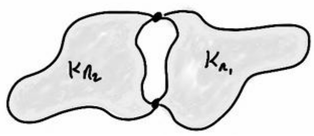
הגדרה: ה-$0 \leq k \in \mathbb{Z}$ הגדול ביותר שעבורו G הוא k-קשיר, יסומן $\boldsymbol{\kappa(G)}$. זה ה-*vertex-connectivity* של G.

כל גרף שאינו קשיר, מקיים $\kappa(G) = 0$ (כי מספיק להוריד 0 קודקודים כדי שיהיה לא קשיר).

כל גרף קשיר (חוץ מ-K_1) הם *1-connected*, כלומר מקיימים $\kappa(G) \geq 1$. גם $\kappa(K_1) = 0$.

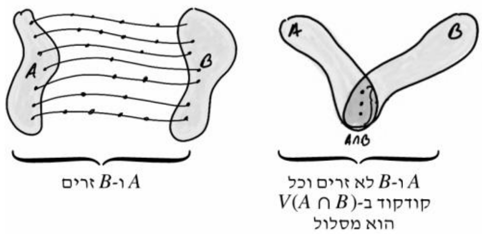
נשקול מעגלים. בגלל שמדובר בגרפים פשוטים, לכולם יש לפחות 3 קודקודים. כל מעגל הוא 2-קשיר. כלומר, לכל $3 \leq \ell \in \mathbb{N}$, מתקיים $\kappa(C_\ell) = 2$.

עבור K_{n_1}, k_{n_2} שמחוברים בשני קודקודים, יש $\kappa(G) = 2$:



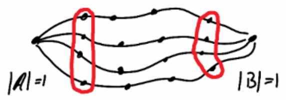
לכל $r \in \mathbb{N}$, $\kappa(K_r) = r - 1$. כי אפשר להוריד $r-2$ קודקודים לפני שהגרף הופך ל-K_1, שהוא לא 1-קשיר.

הגדרה: יהי גרף G, ויהיו $A, B \subseteq V(G)$. נסמן $\varrho_G(A,B)$ את מספר המסלולים **הזרים בקודקודים** מ-A ל-B.



אם $|A| = 1$ או $|B| = 1$, נספור את מספר המסלולים הזרים **פנימית** בקודקודים (כלומר לא נתחשב בקצוות):

7: Menger's Theorem



ההגדרה של בונדי ומרטי

גרף G ייקרא *k-connected* אם $\varrho_G(u,v) \geq k$ לכל שני קודקודים $u \neq v$ **שונים.**

עם ההגדרה הזו, כל גרף קשיר יהיה 1-קשיר, ו-K_1 יהיה קשיר (כי התנאי מתקיים באופן ריק).

נעדכן את ההגדרה לפי דיסטל:

בהינתן $0 \leq k \in \mathbb{Z}$, וגרף G שמקיים $v(G) > k > 1$.

אם לכל $X \subseteq V(G)$ כך ש $|X| \leq k-1$, תת-הגרף $G - X$ הוא קשיר, אז G ייקרא k-קשיר.

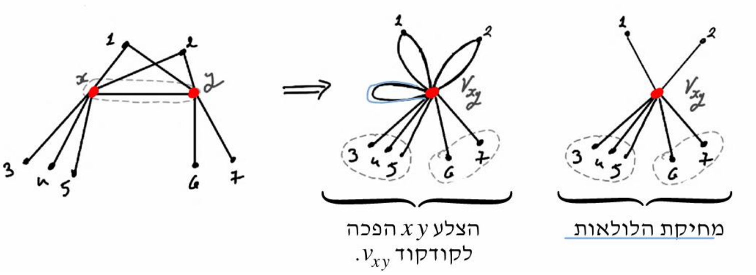
אם $v(G) = 1$, אז G הוא 1-קשיר.

נציג את הרעיון של **כיווץ צלעות** (*edge contractions*).

נתבונן בצלע xy בגרף. כיווץ x ו-y "מחבר" אותם, ומייצר קודקוד חדש V_{xy}. נקבל מזה מולטי-גרף (*multigraph*):

- כל קודקוד שהיה שכן רק של x או רק של y, יהיה מחובר ל-V_{xy}.
- כל קודקוד שהיה מחובר ל-x וגם ל-y, יהיה מחובר בצלע כפולה ל-V_{xy}.
- הצלע xy הופכת להיות לולאה על V_{xy}.

אם נרצה לעבוד עם גרפים פשוטים: נסיר את הלולאה, וכל צלע כפולה נהפוך לצלע יחידה. וזה מחזיר אותנו לגרף רגיל.



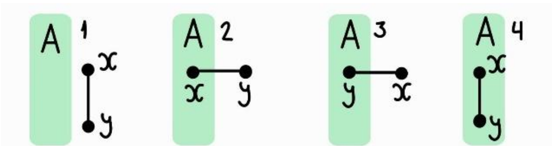
בהינתן צלע $e = \{x,y\} \in E(G)$, נגדיר G/e (כמו חלוקה, *quotient*) את הגרף הנוצר ע"י כיווץ e (אחרי החזרה לגרף פשוט).

נניח שיש לנו 2 קבוצות קודקודים, $A, B \subseteq V(G)$.

בגרף G/e, יכול להיות שהשפענו על הקבוצות A או B.

נגדיר את $A_e \subseteq V(G/e)$ כך:

1. אם $\{x,y\} \cap A = \phi$ (הצלע לא קשורה ל-A), נגדיר: $A_e \coloneqq A$.
2. אם $x \in A, y \notin A$ (רק x שייכת ל-A), נגדיר: $A_e \coloneqq (A \setminus \{x\}) \cup \{V_e\}$. כלומר נסיר את הקודקוד שבפנים ונוסיף את החדש.
3. אם $y \in A, x \notin A$ (רק y שייכת ל-A), נגדיר: $A_e \coloneqq (A \setminus \{y\}) \cup \{V_e\}$.
4. אם $\{x,y\} \subseteq A$ (שניהם בתוך A), נגדיר: $A_e \coloneqq (A \setminus \{x,y\}) \cup \{V_e\}$. כלומר נסיר את שני הקודקודים שבפנים ונוסיף את החדש.



ונגדיר את B_e באותה צורה.

7: Menger's Theorem

משפט מנגר

יהי גרף G, ויהיו $A, B \subseteq V(G)$ לא ריקות. נסמן $\kappa_G(A,B)$ להיות הגודל של החתך-קודקודים המינימום בין A ל-B.

כלומר, המספר הקטן ביותר של קודקודים שנצטרך להסיר כדי להפריד בין A ל-B.

אזי, $\kappa_G(A,B) = \varrho_G(A,B)$. זה בעצם משפט *min-cut-max-flow*.

הכיוון הראשון פשוט: מתקיים $\kappa_G(A,B) \geq \varrho_G(A,B)$, כי על כל מסלול זר בקודקודים, נצטרך להשקיע לפחות קודקוד אחד כדי לנתק אותם.

נוכיח את הכיוון השני: במקום $\varrho_G(A,B)$, $\kappa_G(A,B)$, נרשום κ, ρ. אנחנו רוצים להוכיח $\kappa \leq \varrho$.

נוכיח באינדוקציה על $e(G)$.

<u>בסיס</u>: עבור $e(G) = 0$, אז $\varrho = |A \cap B|$ לפי הגדרה, וזה גם מספר הקודקודים שצריך להסיר כדי להפריד בין A ל-B.

<u>צעד</u>: נניח ש $e(G) > 0$, ותהי $e = xy \in E(G)$.

נניח שבגרף G/e יש κ מסלולים זרים בקודקודים בין A_e ל- B_e.

כל מסלול שלא מכיל את V_e, קיים גם ב-G.

אם אף מסלול לא מכיל את V_e, סיימנו. כי זה מראה שיש κ מסלולים זרים בקודקודים בתוך G.

נניח שיש מסלול שהכיל את e (יכול להיות רק אחד, כי המסלולים זרים בקודקודים ובפרט זרים בצלעות).

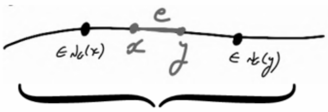
"נפתח" את e חזרה ל-x ו-y. יש 4 מצבים שהמסלול יכול להיות בהם אחרי הפתיחה, מבחינת הסדר של x, y, ושני הקודקודים הסמוכים אליהם:

אם x מופיע לפני y במסלול, והקודקוד לפני x היה שכן של x ב-G, והקודקוד אחרי y היה שכן של y ב-G,

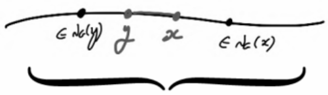
או ש-y מופיע לפני x במסלול, והקודקוד לפני y היה שכן של y ב-G, והקודקוד אחרי x היה שכן של x ב-G,

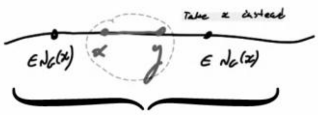
אז המסלול בסדר, אנחנו יודעים שהמסלול הזה קיים גם ב-G.

אם יש שכנים של y לפני ואחרי, אז פשוט ניקח רק את y, וזה מסלול שקיים גם ב-G. ובאופן דומה אם יש רק שכנים של x.

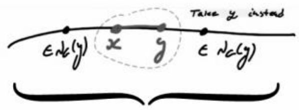


מקרה א'


מקרה ב'



מקרה ג'



מקרה ד'

אפשר גם להסתכל על זה כך: נשאל (לפני הפתיחה), מה יש לפני ואחרי הקודקוד המכווץ במסלול.

ואז לפי המצב נחליט מה לעשות עם הצלע אחרי שנפתח אותה: או שנשתמש בה, או שנשתמש רק באחד הקודקודים.

בכל מקרה, אם בגרף G/e יש κ מסלולים זרים בקודקודים בין A_e ל- B_e, סיימנו.

עכשיו, נניח שבגרף G/e אין κ מסלולים זרים בקודקודים בין A_e ל- B_e.

ניזכר בהנחת האינדוקציה: $\kappa = \rho$ עבור גרף כלשהו עם פחות צלעות מאשר $e(G)$. בפרט, הגרף G/e.

כלומר, לפי ההנחה שלנו $\kappa_{G/e}(A_e, B_e) < \kappa$.

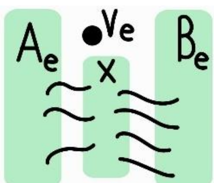
נסתכל על החתכים המינימומים שמפרידים בין A_e ל- B_e ב- G/e:

כל חתך בין A_e ל- B_e חייב להכיל את V_e. כי אחרת, יש ב-G חתך מפריד בין A ל-B (ב-G) שהוא קטן מ-κ.

וזה לא אפשרי כי ההנחה שלנו היא ש- $\kappa_G(A,B) = \kappa$.

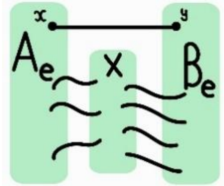
למה אם יש חתך בין A_e ל- B_e שלא מכיל את V_e יש ב-G חתך מפריד בין A ל-B (ב-G) שהוא קטן מ-κ?

ניקח חתך כזה, X, ב-G/e. כל הקודקודים ב-X קיימים גם ב-G:

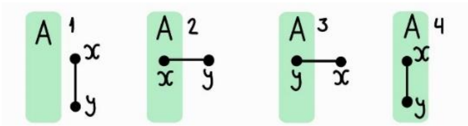


לפי הנ"א, $|X| < \kappa$. אם X מפרידה בין A ל-B ב-G, אז יש חתך מפריד בגודל קטן מ-κ. אז נניח שהיא לא מפרידה.

איך זה יכול לקרות? רק אם הצלע xy המקורית חיברה בין A ל-B ב-G (כי זה ההבדל היחיד בין G ל- G/e):



אבל נשים לב: ניזכר ב-4 המצבים ש-xy יכולה להיות ביחס ל-A,B:



אם הצלע היא מ-A ל-B, זה מצב 2 עבור A ומצב 3 עבור B. כלומר יתקיים $A_e := (A \setminus \{x\}) \cup \{V_e\}, B_e := (B \setminus \{y\}) \cup \{V_e\}$.

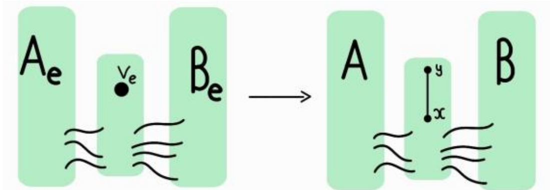
אז $V_e \in A_e \cap B_e$, כלומר היא חייבת להיות חלק מכל חתך ביניהם, ובפרט חלק מ-X. סתירה.

מזה נובע, שכל חתך בין A_e ל- B_e ב- G/e הוא בגודל $\kappa - 1$.

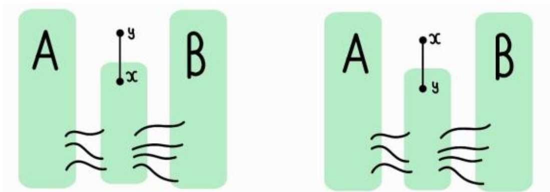
כי הוא מכיל את V_e, אז גם אחרי הפתיחה אפשר להוסיף לו רק קודקוד אחד. אז אם הוא היה קטן יותר, לא היינו יכולים להגיע ל-$\kappa_G(A,B) = \kappa$.

וניזכר שאנחנו בהנחה ש $\kappa_{G/e}(A_e,B_e) < \kappa$. אז חייב להיות $\kappa_{G/e}(A_e,B_e) = \kappa - 1$.

אזי אנחנו יודעים ש-X בגודל $\kappa - 1$, מכילה את V_e, ופורשת את xy – כלומר, כשנפתח את e, X תכיל את x ואת y, ככה:



ולא ככה:



כי אם לא נכיל את x ואת y, אז בפתיחה, "איבדנו" את V_e ו"הרווחנו" את x או y, אבל זה 1 תמורת 1.

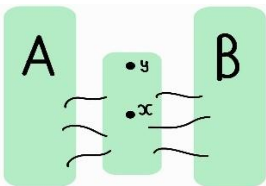
אז החתך נשאר אותו גודל, $\kappa_G(A,B) = \kappa - 1$. וזה סתירה להנחת העבודה שלנו ש $\kappa_G(A,B) = \kappa$.

אז ב-G, יש את החתך שלנו X, הוא בגודל κ, והוא פורש את e. (יכול להיות ש $X = A$ או B, זה לא משנה).

נתבונן בגרף $G - e$ (נוריד את הצלע, הקודקודים נשארים). גודל החתך המינימום בין A ל-X הוא לפחות κ, וגם בין X ל-B:

$$\kappa_{G-e}(X,A) \geq \kappa, \qquad \kappa_{G-e}(X,B) \geq \kappa$$

כי אם יש חתך קטן יותר באחד מהם, זה מהווה חתך קטן יותר בין A ל-B:



אז מהנ"א, בגלל שב- $G - e$ יש פחות צלעות, נוכל לומר שבין A ל-X יש κ מסלולים, זרים בקודקודים. וכנ"ל בין B ל-X.

ואנחנו יודעים שכל מסלול בין A ל-B חייב לעבור בחתך (אחרת הוא לא היה חתך).

בסה"כ יש לנו κ מסלולים בין A ל-B, כנדרש.

7: Menger's Theorem

סיכום ההוכחה

נגדיר $\kappa := \kappa_G(A,B), \varrho := \varrho_G(A,B)$. מספיק להוכיח ש $\varrho \ge \kappa$ (שבין A ל-B יש לפחות κ מסלולים זרים בקודקודים).

נוכיח באינדוקציה על $e(G)$. עבור $e(G) = 0$, אז $\varrho = |A \cap B| = \kappa$.

נניח ש- $e(G) > 0$, הנחת האינדוקציה שלנו היא ש $\kappa = \varrho$ עבור גרף שיש לו פחות קודקודים מאשר $e(G)$.

נבדוק מה קורה אם מכווצים את הצלע e ומנסים להפעיל את הנ"א על G/e.

(אחרי שנבין את החתכים של G/e, נגיע למסקנה שיש חתך כלשהו בין A ל-B ב-G, שפורש את הצלע המכווצת.)

לפני כן, בגרף G/e, הגדרנו את A_e, B_e, לפי היחס לקודקוד החדש V_e.

בשלב הראשון, אמרנו ש**אם** יש ב-G/e, κ מסלולים זרים בקודקודים בין A_e, B_e, סיימנו. כי כל מסלול שלא מכיל את V_e, קיים גם ב-G.

וזה נותן לפחות $\kappa - 1$ מסלולים. ואם יש מסלול עם V_e, הראנו איך ע"י פתיחת הכיווץ נוכל לשחזר מסלול בין A ל-B שגם זר בקודקודים.

אז נבדוק את המקרה שב- G/e אין κ מסלולים. אז לפי הנ"א, גם גודל החתך קטן ממש מ-κ. כי מהנ"א, $\varrho = \kappa$.

הראנו שכל חתך מינימום בין A_e, B_e מכיל את V_e, ושהוא חייב להיות בגודל $\kappa - 1$, ושהוא פורש את xy.

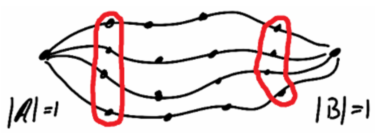
עכשיו, סיימנו לעבוד עם G/e ועוברים ל- $G - e$, ומפעילים את האינדוקציה ע"י פעולה אחרת על הגרף.

והראנו שלא צריך את xy כדי לבנות κ מסלולים בין A ל-B.

השלכות של משפט מנגר

מסקנה: בגרף G כלשהו, $\kappa_G = \min\{\varrho_G(u,v) : u,v \in V(G), u \ne v\}$.

זה בעצם מה שאמרנו בהתחלה, שאם $|A| = |B| = 1$, אפשר להתייחס לשכנים שלהם במסלולים הזרים מ-A ל-B.



מספר המסלולים בין הקודקודים הוא מספר הקודקודים שצריך להסיר כדי לנתק אותם.

The Extension Lemma

יהי G גרף k-קשיר. הגרף H מתקבל ע"י הוספת קודקוד w וחיבורו ל-k קודקודים ב-G, שרירותית.
אזי, H הוא k-קשיר.

הוכחה: נשקול קבוצת קודקודים $S \subseteq V(H)$ כלשהי שמקיימת $|S| = k - 1$. יש שני מקרים:

אם $w \in S$, אז הסרת S מ-H מסירה את w (אז הוא לא צריך להיות קשיר) ומסירה $k - 2$ קודקודים מקוריים מ-G. הגרף נשאר קשיר כי G היה k-קשיר.

אם $w \notin S$, אז הסרת S מסירה $k - 1$ קודקודים שהיו ב-G. G היה k-קשיר אז כל הקודקודים המקוריים עדיין קשירים, ו-w היה מחובר ל-k קודקודים.

אז אפילו אם הוא היה מחובר לכל S, עדיין נשאר לו קודקוד אחד שהוא מחובר אליו.

דרך שנייה:

מכיוון ש-G הוא k-קשיר, מתקיים $\kappa(G) \ge k$. לכן, לכל שני קודקודים $u \ne v$, מתקיים $\varrho_G(u,v) \ge k$.

בגרף H, הטענה מתקיימת לכל שני קודקודים שהם לא w, כי רק הוספנו צלעות. אז אם היו k' מסלולים מ-u ל-v ב-G, גם ב-H יש.

אז מספיק להוכיח שהטענה מתקיימת עבור v כלשהו עם w. כלומר שלכל $v \in V(G)$, מתקיים $\varrho_H(v,w) \ge k$.

ניזכר ש-w מחובר ל-k קודקודים.

אם v הוא אחד מהם, אז יש מסלול vw, שהוא זר בקודקודים פנימיים לכל מסלול שקיים ב-G. (כי אין לו קודקודים פנימיים).

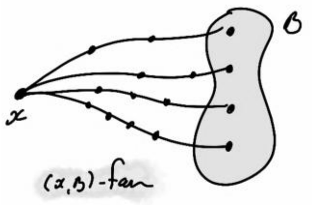
ו-w מחובר ל- $k - 1$ קודקודים אחרים. ומכל קודקוד כזה יש k מסלולים ל-v, כולם קיימים ב-G וזרים בקודקודים פנימיים.

אם v לא אחד מהם, אז w מחובר ל-k קודקודים אחרים, ומכל קודקוד כזה יש k מסלולים ל-v, כולם קיימים ב-G וזרים בקודקודים פנימיים.

בשני המקרים, קיבלנו שיש k מסלולים זרים בקודקודים פנימיים בין w ו-v, כנדרש.

למת המניפה

בהינתן קודקוד $x \in V(G)$, וקבוצת קודקודים $B \subseteq V(G)$ כך ש- $x \notin B$, נסמן $(x, B)\text{-}fan$ את הגרף:



קבוצת מסלולים זרים בקודקודים (חוץ מ-x) שמתחילים ב-x ומסתיימים בקודקוד כלשהו ב-B.

טענה: בהינתן G גרף k-קשיר, $x \in V(G), B \subseteq V(G) \setminus \{x\}$. (קודקוד בגרף וקבוצת קודקודים שלא מכילה אותו).

אז ל-G יש מניפה (x, B) בגודל $\min\{k, |B|\}$. (k מסלולים, או מסלול לכל קודקוד ב-B).

הוכחה: זו מסקנה ישירה של משפט מנגר: לכל $A, B \subseteq V(G)$ לא ריקות מתקיים $\kappa_G(A, B) = \varrho_G(A, B)$.

ניקח את $A \coloneqq \{x\}, B \coloneqq B$. הגרף הוא k-קשיר, אז ברור שמתקיים $\kappa_G(A, B) = \min\{k, |B|\}$ (או שנוריד k קודקודים, או שנוריד את כל B).

אז $\varrho_G(A, B) = \min\{k, |B|\}$, כנדרש.

משפט דיראק – *Dirac's Theorem*

הכללה של משפט וויטני (שאמר שבגרף 2-קשיר, כל 2 קודקודים יושבים על מעגל).

בהינתן $2 \leq k \in \mathbb{N}$, וגרף G שהוא k-קשיר, וקבוצה $S \subseteq V(G)$ כך ש- $2 \leq |S| \leq k$.

אזי, G מכיל מעגל שמכיל את S כולה. כלומר, בגרף k-קשיר, כל k קודקודים יושבים על מעגל.

הוכחה: באינדוקציה על k.

בסיס: עבור $k = 2$, זה משפט וויטני.

צעד: נבחר x, קודקוד שרירותי ב-S. נסמן $T = S \setminus \{x\}$.

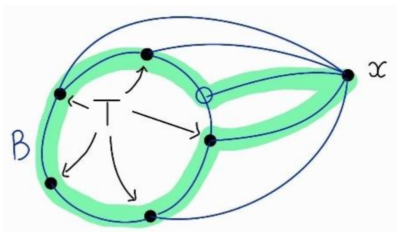
באופן טריוויאלי, $\kappa(G - x) \geq k - 1$ (כי הוא היה k-קשיר. הורדנו קודקוד אחד, אז אם זה "קידם" אותנו לכיוון אי-קשירות, עכשיו אנחנו ב- $k - 1$).

מכיוון ש- $|T| = k - 1$, אז לפי הנ"א יש מעגל בגרף שמכיל את כל T. נגדיר את כל קודקודי המעגל הזה כקבוצה B.

נגדיר את x בתור מקור של מניפה ונקבל שהמניפה (x, B) היא בגודל $k - 1$ (ישירות מלמת המניפה).

יש $k - 1$ מסלולים שיוצאים מ-x ומגיעים למעגל. הקבוצה T מחלקת את המעגל ל- $k - 1$ קשתות.

מכיוון ש- $k \geq 3$, מתקיים $k - 1 \geq 2$, אז יש לפחות 2 קשתות ויש לפחות 2 מסלולים זרים מ-x ל-T. ונוכל להשתמש במסלולים האלה כדי לייצר מעגל:



כלומר x גם חלק מהמעגל. אז בסה"כ יש k קודקודים ב- $T \cup \{x\}$, והם על מעגל. כנדרש.