TA Session 7: Graph Coloring

תזכורות

- מספר הצביעה של גרף: $\chi(G)$.
- גודל הקליקה המקסימלי בגרף: $\omega(G)$.
- גרף דו"צ אמ"מ הוא 2-צביע.
- אפשר לצבוע גרף דו"צ בשני צבעים בזמן פולינומי.
- ניתן לצבוע כל גרף ב- $\Delta(G)+1$ צבעים, בשיטה חמדנית.
- משפט ברוקס: בגרף קשיר, שהוא לא גרף שלם או מעגל אי-זוגי, מתקיים $\chi(G) \le \Delta(G)$.
- אלגוריתם צביעה חמדן:
  - נעבור על כל הקודקודים באיזשהו סדר.
  לכל קודקוד, ניתן לו את הצבע (המספר) הנמוך ביותר שאפשר (שאין לו שכן בצבע הזה).

טענה: יהי גרף עם n קודקודים שהוא 3-צביע. אזי ניתן למצוא צביעה ב- $O(\sqrt{n})$ צבעים בזמן פולינומי.

<u>הוכחה ע"י אלגוריתם:</u>

1. כל עוד קיים קודקוד v בגרף עם דרגה לפחות $\sqrt{n}$:
   a. נצבע את v בצבע חדש.
   b. נצבע את השכנים של v בשני צבעים חדשים.
   c. נסיר מהגרף את v ואת השכנים שלו.
2. נצבע את שאר הקודקודים בשיטה חמדנית.

בכמה צבעים השתמשנו?

בכל איטרציה של הלולאה, מסירים לפחות $\sqrt{n}$ קודקודים, אז יש לכל היותר $\sqrt{n}$ איטרציות. ומשתמשים בלכל היותר 3 צבעים בכל איטרציה. בנתיים $3\sqrt{n}$.

אחרי הלולאה, צובעים באופן חמדן גרף שמקיים $\Delta(G) < \sqrt{n}$. אז אפשר לצבוע אותו ב- $\sqrt{n}$ צבעים. סה"כ $4\sqrt{n}$ צבעים.

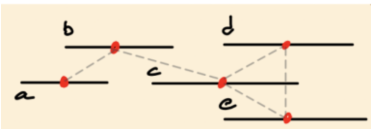
אפשר אולי עם $3\sqrt{n}+1$? פשוט נצבע את v בכל שלב בצבע a, קבוע. השכנים שלו נצבעים במבעים אחרים, וכל קודקוד אחר שיהיה ה-v בטוח לא יכול להיות שכן של v אחר, כי אחרת הוא היה נמחק. פורמלית:

נב"ש שקיים v_i (הקודקוד הנבחר באיטרציה ה-i) שהוא שכן של v_j (הקודקוד שנבחר באיטרציה ה-j) עבור $j < i$ כלשהו.
אזי, היינו מוחקים את v_j באיטרציה ה-i. סתירה לכך שהוא נבחר באיטרציה ה-j.

אז צבע אחד בשביל כל הקודקודים שהם v באיזשהו שלב, ועוד 2 צבעים בכל איטרציה, ועוד $\sqrt{n}$ צבעים בצביעה החמדנית. סה"כ $3\sqrt{n}+1$.

הגדרה: בהינתן קבוצה של אינטרוולים, נגדיר **גרף אינטרוולים**:

- כל אינטרוול יהיה קודקוד.
- שני קודקודים מחוברים אם האינטרוולים שלהם חופפים.



טענה: בגרף אינטרוולים, $\omega(G) = \chi(G)$. גודל הקליקה המקסימלי שווה המספר הכרומטי.

<u>כיוון ראשון:</u> טריוויאלי ש- $\omega(G) \le \chi(G)$. אם יש לי קליקה בגודל k, חייבים לפחות k צבעים.

<u>כיוון שני:</u> עבור גרף כלשהו, נמצא צביעה ב- $\omega(G)$ צבעים.

נסדר את הקודקודים לפי נקודות ההתחלה של האינטרוולים שלהם, ונפעיל את הצביעה החמדנית לפי הסדר הזה.

אם קודקוד v קיבל צבע k, זה אומר שיש לו שכנים שנצבעו בכל הצבעים $1, \dots, k-1$.

כלומר יש לו לפחות $k-1$ שכנים. זה לפחות $k-1$ אינטרוולים שנקודת ההתחלה של v מוכלת בתוכם.

סה"כ זה לפחות k אינטרוולים שחופפים, אז בגרף יש קליקה בגודל k.

יהי k^* הצבע המקסימלי שקיבלנו. אזי,

$$\chi(G) \le k^* \le \omega(G)$$

כנדרש. ■

תזכורת: גרף הוא דו"צ אמ"מ אין בו מעגלים אי-זוגיים.

טענה: יהי G גרף שבו לכל שני מעגלים אי-זוגיים יש קודקוד משותף. אזי, $\chi(G) \leq 5$.

הוכחה:

אם בגרף אין מעגלים אי-זוגיים, אז הוא דו"צ והוא 2-צביע.

אחרת, יש בו לפחות מעגל אי-זוגי אחד. יהי C המעגל האי-זוגי הקצר ביותר.

בגרף $G - C$ אין מעגלים אי-זוגיים, כי הורדנו קודקוד מכל מעגל אי-זוגי. אז $G - C$ הוא 2-צביע.

אבחנה: מיתר במעגל אי-זוגי מייצר מעגל אי-זוגי.

כי החלוקה של המעגל לשני חלקים נותן חלק אחד באורך זוגי, ואם מוסיפים לו את המיתר זה מעגל באורך אי-זוגי.

אז ב-C אין מיתרים. אז C הוא 3-צביע. נצבע אותו ב-3 צבעים חדשים.

סה"כ 5 צבעים, כנדרש. ■

הגדרה: גרף צלעות של גרף G מסומן $L(G)$, ומוגדר:

כל צלע uv הופכת לקודקוד $\overline{uv}$. בין שני קודקודים $\overline{uv}, \overline{xy}$ ב-$L(G)$ תהיה צלע $uvxy$ אם ל- uv, xy היה קודקוד משותף ב-G.

תזכורת: $\chi'(G)$ הוא המספר הכרומטי של צביעת צלעות.

מתקיים $\chi'(G) = \chi\big(L(G)\big)$.

וגם, $\Delta\big(L(G)\big) \leq 2\Delta(G) - 2$. כי הדרגה של קודקוד ב-$L(G)$ היא סכום הדרגות של הקודקודים המקוריים, פחות 2.

משפט ויזינג: $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

משפט ברוקס: בגרף קשיר, שהוא לא גרף שלם או מעגל אי-זוגי, מתקיים $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

נוכיח מקרה ספציפי של משפט ויזינג: $\Delta(G) = 3$. צ"ל ש- $\chi'(G) \leq 4$.

נוכיח ש- $\chi\big(L(G)\big) \leq 4$.

מכיוון ש- $\Delta(G) = 3$, נקבל ש- $\Delta\big(L(G)\big) \leq 4$.

אם $L(G)$ הוא לא מעגל אי-זוגי ולא קליקה, סיימנו לפי ברוקס.

אם הוא מעגל אי-זוגי, הוא 3-צביע וסיימנו.

אם הוא קליקה: עד K_4, בוודאי 4-צביע.

והוא לא יכול להיות K_5, כי זה אומר שהיו 5 צלעות שמחוברות בקודקוד. אז הקודקוד הזה בדרגה 5, סתירה לכך ש- $\Delta(G) = 3$.

ההוכחה הפורמלית של המקרה הכללי הייתה בהרצאה.