Matching

תרגיל 1

יהי M שידוך בגרף G. צ"ל: ב-G יש שידוך מקסימום שמכסה את $V(M)$.

מכל השידוכים M' בגודל $\nu(G)$ האפשריים, ניקח אחד שממקסם את $|M \cap M'|$. כלומר, שידוך שיש לו כמה שיותר צלעות משותפות עם M.

נב"ש שיש קודקוד ב-$V(M) \setminus V(M')$. נקרא לו x. ניקח את הצלע $xy \in M$.

אם $y \notin V(M')$, אז אפשר להוסיף את xy לשידוך M', סתירה לכך שהוא מקסימום.

אז $y \in V(M')$. כלומר יש צלע $yz \in M'$. וניזכר ש-$x \notin V(M')$. נוכל לקחת את הצלע xy במקום הצלע yz, ולקבל שידוך שמכסה את x באותו גודל.

נקרא לשידוך הזה M''. אזי, $|M'' \cap M| > |M' \cup M|$, סתירה.

תרגיל 2

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}$ זוגי ויהי G גרף על n קודקודים שמקיים $\delta(G) \geq n/2$. אזי, יש ב-G שידוך מושלם.

הוכחה: יהי גרף $G := (V, E)$ כאמור. נב"ש שאין ב-G שידוך מושלם ויהי M השידוך המקסימום.

נסמן $S := V \setminus V(M)$ את קבוצת הקודקודים שלא בשידוך. מכיוון ש- $|V(M)|$ זוגי (כי כל צלע בשידוך נותנת שני קודקודים) אז גם $|S|$ זוגי.

S גם לא ריקה (כי הנחנו שאין שידוך מושלם). אז $|S| \geq 2$. וגם, S היא קבוצה בת"ל (כי אם יש צלע, אפשר להוסיף אותה לשידוך ולקבל שידוך גדול יותר).

אז יהיו $u, v \in S$. לכל צלע $xy \in V(M)$, יש לכל היותר שתי צלעות בין הקבוצות $\{x, y\}$ ו-$\{u, v\}$. כי אם יש יותר, אז יש מסלול M-משפר.

למה? נב"ש שיש 3 צלעות.

יש 2 צלעות מ-x או y (בה"כ x) ל-u ו-v: ux, vx. אז יש גם צלע מ-y ל-v או u (בה"כ u) אז יש מסלול M-משפר $u \to y \to x \to v$.

סתירה לכך ש-M מקסימלי.

כלומר, לא יכול להיות שגם u וגם v מתחברות גם ל-x וגם ל-y.

בגלל ש-S בת"ל, כל הצלעות שיוצאות מ- $\{u, v\}$ הן ל- $V(M)$.

מתקיים: $\deg_G v + \deg_G u \leq |V(M)|$ (כי כל צלע מ-u או מ-v הולכת לקודקוד ב-M).

וגם, $|V(M)| = 2|M|$. ומההנחה ש-M לא שידוך מושלם, מתקיים גם $2|M| \leq n - 2$.

בסה"כ: $\deg_G v + \deg_G u < n - 2$. כלומר לפחות אחד מהם קטן ממש מ- $n/2$.

סתירה.

תרגיל 3

יהיו $n \geq 2k - 1$,$k \in \mathbb{N}$, ויהי G גרף על n קודקודים המקיים $\delta(G) \geq 2k - 1$. צ"ל: $\nu(G) \geq k$.

נב"ש ש- $\nu(G) < k$ ויהי M שידוך בגודל מקסימום. אז מתקיים:

$$v(M) = 2|M| \leq 2k - 2 < 2k - 1$$

מכיוון ש $n \geq 2k - 1$, יש לפחות קודקוד אחד $x \in V(G) \setminus V(M)$. ובגלל ש- $\delta(G) \geq 2k - 1$, יש לו שכן $y \in V(G) \setminus V(M)$.

אז אפשר להוסיף את xy לשידוך M, סתירה לכך שהוא שידוך מקסימום.

מסקנה: אם $\nu(G) \geq 2\delta(G)$, אז $\nu(G) \geq \delta(G)$.

הוכחה: נב"ש ש $\nu(G) < 2\delta(G)$ ויהי M שידוך מקסימום ב-G. אזי:

$$|V(M)| \leq v(G) < 2\delta(G) \Longrightarrow |V(M)| \leq 2\delta(G) - 2$$

אז יש לפחות שני קודקודים שלא ב-M. והם בת"ל, כי אחרת השידוך לא מקסימום. יהיו u, v שני קודקודים כאלה.

יש מכל אחד מהם לפחות $\delta(G)$ צלעות שיוצאות. ואף אחת מהן לא יכולה להיות לקודקוד שלא בשידוך. כלומר בסה"כ, $e_G\big(\{u, v\}, V(M)\big) \geq 2\delta(G)$.

Matching

נרצה להראות שקיים מסלול M-משפר: נראה שיש צלע $f := xy \in M$ שיש ממנה 3 צלעות ל-$\{u, v\}$, ואז יש מסלול מגדיל:

אם יש 3 צלעות, אז יש צלע מ-f ל-u וגם ל-v ועוד צלע לאחד מתוך u, v.

נלך מ-u לקודקוד של f שמחובר אליו – בה"כ x. נלך על f ל-y. אם y מחוברת ל-v, זה המסלול.

אחרת, y מחוברת רק ל-u. אז יש שתי צלעות מ-x. אז נלך מ-v ל-x, ל-y, ל-u. וזה המסלול.

נוכיח שיש צלע f כזו: נב"ש שאין, כלומר $e_G(\{u, v\}, f) \leq 2$ לכל $f \in M$. אזי:

$$e_G\big(\{u, v\}, V(M)\big) = \sum_{f \in M} e_G(\{u, v\}, f) \leq 2|M| = |V(M)| < 2\delta(G)$$

סתירה ל- $e_G\big(\{u, v\}, V(M)\big) \geq 2\delta(G)$ שהוכחנו.

אז יש צלע $f \in M$ כך ש- $e_G(\{u, v\}, f) \geq 3$, כנדרש.

תרגיל 4

טענה: לכל $k \in \mathbb{N}$ קיים גרף G עם $\delta(G) \geq k$ שיש לו שידוך מושלם יחיד.

הוכחה – באינדוקציה על k:

בסיס: $k = 1$, K_2 מקיים $\delta(K_2) = 1$ ואכן יש שידוך יחיד.

צעד: יהי $k \in \mathbb{N}$, ונניח שקיים גרף G' עם $\delta(G') \geq k - 1$ עם שידוך מושלם יחיד. נוכיח שקיים גרף עם $\delta(G) \geq k$ עם שידוך מושלם יחיד.

ניקח שני עותקים של G'. נקרא להם G'_x, G'_y. נוסיף שני קודקודים חדשים – x, y. כל אחד מהם נחבר לכל הקודקודים בגרף המתאים. ונחבר צלע xy.

זה הגרף G. הוא מקיים $\delta(G) \geq k$ כי לכל קודקוד ב- G'_x, G'_y הוספנו צלע. ו-x, y מחוברים כל אחד לכל הצלעות של אחד העותקים של G', שבכל אחד יש לפחות $\delta(G') - 1$ קודקודים. והצלע xy מוסיפה אחד.

ב- G'_x יש שידוך מושלם יחיד לפי הנ"א.

ואם ניקח ממנו קודקוד לשידוך עם x, זה ישאיר מספר אי זוגי של קודקודים ואז לא יהיה ב- G'_x שידוך מושלם ב-G. ובאופן דומה עבור G'_y.

כלומר, x ו-y לא משודכים לאף קודקוד מקורי. אז הם משודכים אחד לשני. וזה השידוך המושלם היחיד.