שאלה 2

סעיף ג

עבור גרף G, נגדיר $\bar{G}$ את הגרף המשלים: $\bar{G} \coloneqq \left(V(G), \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)\right)$.

צ"ל: לכל גרף G, מתקיים

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq v(G) + 1$$

נוכיח באינדוקציה על $n \coloneqq v(G)$.

בסיס: עבור $n = 1$, מתקיים

$$\chi(G) = \chi(\bar{G}) = 1 + 1 \leq v(G) + 1$$

צעד: נניח שהטענה מתקיימת לכל גרף על פחות מ-n קודקודים.

יהי גרף G על n קודקודים.

נבחר קודקוד v כלשהו ונגדיר $G' \coloneqq G - v$. אזי לפי הנ"א, $\chi(G') + \chi(\overline{G'}) \leq n$.

נחזיר את v. אנחנו רוצים שיתקיים

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$$

נשים לב שהורדת קודקוד אחד מורידה לכל היותר מחלקת צבע אחת (בצביעה האופטימלית).

אז $\chi(G) \leq \chi(G') + 1$ וגם $\chi(\bar{G}) \leq \chi(\overline{G'}) + 1$.

ונשים לב שכדי שיתקיים

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) > n + 1$$

זה מחייב ש $\chi(G) = \chi(G') + 1$ וגם $\chi(\bar{G}) = \chi(\overline{G'}) + 1$,

כי אז $\chi(G) + \chi(\bar{G}) = \chi(G') + 1 + \chi(\overline{G'}) + 1 = \chi(G') + \chi(\overline{G'}) + 2$,

ולפי הנ"א אנחנו יודעים ש $\chi(G') + \chi(\overline{G'}) \leq n$, כלומר נקבל $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 2$.

אם $\chi(G) = \chi(G') + 1$ (*) אז נקבל ש $\deg_G(v) \geq \chi(G')$ (כי זה אומר ש-v מחובר ללפחות קודקוד אחד מכל מחלקת צביעה).

ואם $\chi(\bar{G}) = \chi(\overline{G'}) + 1$ (**), אז נקבל ש $\deg_{\bar{G}}(v) \geq \chi(\overline{G'})$.

ואז, נקבל $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq \deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = n - 1$.

(הקודקודים שיש ל-v צלע אליהם ועוד הקודקודים שאין ל-v צלע אליהם זה בדיוק $n - 1$).

אחרת, נוכל להניח ש $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$, כנדרש.

שאלה 3

סעיף א

נוכיח משני כיוונים: בכיוון $OPT \geq OPT_R$, מעגל הוא סוג של הילוך סגור. אז פתרון *TSP-tour* הוא גם *TSP-walk*. אז המחיר של ה- *TSP-walk* האופטימלי הוא לכל היותר המחיר של ה- *TSP-tour* האופטימלי.

בכיוון השני, נוכיח ש $OPT \leq OPT_R$. יהיו פתרונות אופטימליים לבעיית *MTSPR* ובעיית *MTSP*: הילוך W במשקל OPT_R ומסלול P במשקל OPT.

בהילוך, בכל צלע שחוזרים עליה, בפרט חוזרים על הקודקודים שלה. אז אם יש צלע שחוזרים עליה, נגיע לקודקוד לפני הצלע.

נלך על ההילוך עד שנגיע לקודקוד הראשון שחוזרים עליו. נסמנו u. ההילוך הוא:

$$\dots, u, \dots, t, u, v$$

נוכל לעשות קיצור דרך $t \to v$ במקום $t \to u \to v$. ובגלל שאנחנו בבעיה המטרית, אי"ש המשולש מתקיים. אז זה רק מוריד את המשקל. ונוכל לעשות את זה בכל קודקוד שחוזרים עליו, עד שנקבל מעגל קל יותר. אז יש פתרון מעגל במשקל לכל היותר OPT_R. כלומר $OPT \leq OPT_R$, כנדרש.

סעיף ב

נניח שיש אלגוריתם A שהוא c-מקרב עבור בעיית *MTSPR*. ונבנה אלגוריתם c-מקרב עבור בעיית *GTSPR*.

בהינתן בעיית *GTSPR*, נגדיר מרחקים חדשים: המרחק בין כל 2 קודקודים הוא המרחק הקצר ביותר האפשרי ביניהם בבעיה המקורית. המרחקים החדשים האלה מהווים מטריקה. נמצא פתרון c-מקרב ע"י A, ובבעיית ה-*GTSPR* ניקח את המסלול המתאים לכל צלע. המשקלים של הפתרונות זהים.

סעיף ג

אלגוריתם *Christofides* נותן 1.5-קירוב לבעיית *MTSP*. לפי סעיף א, הפיתרון האופטימלי לבעיית *MTSP* שווה במשקל לפתרון של *MTSPR*. אז זה אלגוריתם 1.5-מקרב לבעיית *MTSPR*. ולפי סעיף ב, זה אומר שקיים אלגוריתם 1.5-מקרב עבור *GTSPR*.

שאלה 4

סעיף א

בהינתן פסוק *3-CNF* כלשהו φ, עם m פסוקיות ו-n משתנים. נתאר בעיית *IP*:

נגדיר $2n$ משתנים – לכל משתנה z ב-φ נגדיר שני משתנים (ליטרלים): $x_z, x_{\bar{z}}$.

נגדיר מטריצה $A_\varphi \in \{0,1\}^{(n+m)\times 2n}$. וקטור $b \in \{-1,1\}^{n+m}$. הווקטור פתרון יהיה $x \in \{0,1\}^{2n}$.

נתאר את הדרישות ע"י אי-שוויונות:

עבור פסוקית $\left(x_i \vee x_j \vee x_k\right)$ נדרוש: $x_i + x_j + x_\ell \geq 1$. זה צריך להיות בכיוון ההפוך, אז נדרוש: $-x_i - x_j - x_\ell \leq -1$.

עבור משתנה z, נדרוש: $x_z + x_{\bar{z}} \leq 1$ (שאין מצב ששניהם 1) וגם $x_z + x_{\bar{z}} \geq 1$ (שאין מצב ששניהם 0) כלומר $-x_z - x_{\bar{z}} \leq -1$.

סעיף ב

נעשה רדוקציה מ- *3-COL* ל- *MAX-3-CUT*.

$$f(G) \coloneqq \left(G, e(G)\right)$$

כיוון ראשון: נניח ש-G 3-צביע. כלומר, יש 3 מחלקות צבע שכל אחת מהן היא קבוצה בת"ל של קודקודים. אז כל הצלעות שיש בגרף עוברות בין המחלקות האלה. אז ניקח את מחלקות הצבעים ל- V_1, V_2, V_3 ויש $e(G)$ צלעות ביניהן.

כיוון שני: נניח שאפשר לחלק את G ל-3 קבוצות של קודקודים כך שיש $e(G)$ צלעות בין הקבוצות. זה אומר שכל הצלעות בגרף הן בין הקבוצות, אז כל קבוצה היא בת"ל בעצמה. אז הקבוצות האלה מגדירות 3-צביעה.