8: Hamiltonicity

נסמן $\deg_G v$ את הדרגה (מספר השכנים) של קודקוד v, ו-$\delta(G)$ את $\min\limits_v \deg_G v$, הדרגה המינימום בגרף.

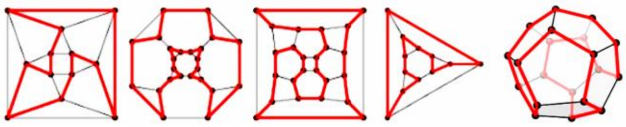
מסלול המילטון (*Hamilton path*) – מסלול <u>פשוט</u> הפורש את כל $V(G)$ (עובר בכל הקודקודים פעם אחת).

מעגל המילטון (*Hamilton cycle*) – מעגל <u>פשוט</u> הפורש את כל $V(G)$ (עובר בכל הקודקודים פעם אחת ומגיע חזרה להתחלה).

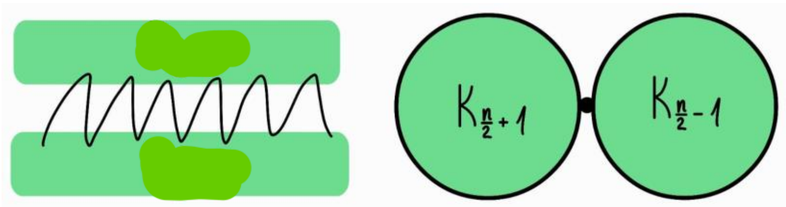
גרף ייקרא *Traceable* (ניתן למעקב) אם יש בו מסלול המילטון, ו-*Hamiltonian* (המילטוני) אם יש בו מעגל המילטון.

באופן כללי, בעיית ההכרעה של קיום מעגל המילטון בגרף היא *NPC*. נרצה להבין מתי בעיית הכרעה יכולה להיות ב-*P*.

דוגמאות לגרפים המילטונים:



דוגמאות לגרפים שלא יכולים להיות המילטונים: (בשניהם יש סה"כ n קודקודים. נניח ש-n זוגי, או ניקח את $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor, \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$).



שני גרפים $K_{\frac{n}{2}+1}, K_{\frac{n}{2}-1}$ שחולקים קודקוד אחד: ברגע שעברנו מצד אחד לצד השני, לא נוכל לחזור.
גרף דו-צדדי שלם עם צד אחד גדול יותר, $K_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}-1}$: כל מעבר חייב להיות רק בין שני הצדדים, ואנחנו ניתקע בצד הקטן.
שתי הדוגמאות הן גרפים מלאים יחסית: $\delta(G) = \frac{n}{2} - 1$. ועדיין, אין מעגל המילטוני.

משפט דיראק *Dirac's Theorem*

יהי גרף G עם $v(G) \geq 3$, ו- $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$. אזי, G הוא המילטוני (מכיל מעגל המילטון).

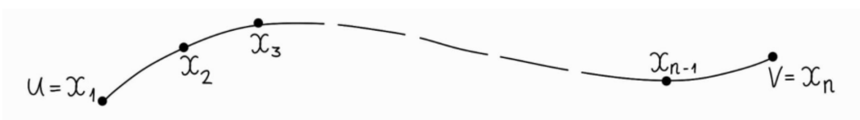
הוכחה: נב"ש שהמשפט לא נכון, ויהי G דוגמה נגדית מקסימלית בצלעות. כלומר, G לא המילטוני, אבל $G + e$ המילטוני לכל $e \notin E(G)$.

מכיוון ש-G לא המילטוני, הוא לא מלא (כי בגרף המלא יש מעגל המילטון). כלומר, קיימת צלע שלא בגרף: $\exists uv \in \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$.

מכיוון שב- $G + uv$ יש מעגל המילטון, ב- G יש מסלול-uv המילטוני. למה?

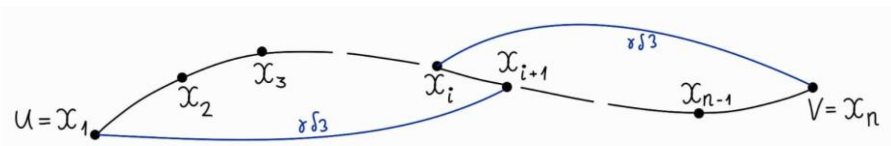
כי אם הוספת uv גרמה לכך שיש מעגל המילטון היא בהכרח חלק מהמעגל. אז אפשר להגיע מ-u ל-v בלי לחזור על קודקודים, ואז לעבור מ-v ל-u.

כלומר גם בלי הצלע uv, אפשר להגיע מ-u ל-v בלי לחזור על קודקודים, שזה מסלול המילטון. נקרא לו P:

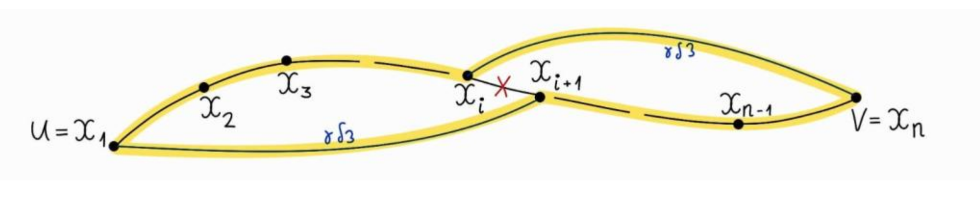


נציג את הרעיון של ***Rerouting*:**

אם יש צלע מ-u ל-x_{i+1} כלשהו, וגם צלע מ-v ל- x_i:



אז נוכל לבצע **ניתוב מחדש**, ולזרוק את הצלע x_i, x_{i+1}:



וזה נותן לנו מעגל המילטון. נלך מ-u ל-x_{i+1}, נמשיך מ-x_{i+1} ל-v, נלך מ-v ל- x_i, ומ- x_i ל- u.

כלומר, אם יש *rerouting*, יש מעגל המילטון.

אינטואיציה: במקרה של $K_{\frac{n}{2}+1}, K_{\frac{n}{2}-1}$ למעלה, אפשר לראות שאי אפשר לעשות *rerouting*, כי אי אפשר "לעקוף" את הקודקוד באמצע.
אבל במקרה של $K_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}-1}$, קשה יותר לראות למה אי אפשר לעשות *rerouting*.

נגדיר:

$$S \coloneqq \{i \in [n]: ux_{i+1} \in E(G)\}, \qquad T \coloneqq \{i \in [n]: vx_i \in E(G)\}$$

T זה פשוט האינדקסים של הקודקודים שהם שכנים של v. S זה כל הקודקודים **הקודמים** במסלול לקודקודים שהם שכנים של u.

נשים לב ש $n \notin S$ (כי x_{n+1} לא קיים). ולפי ההנחה, אין צלע uv. וגם, מכיוון ש $ux_2 \in E(G)$ (הצעד הראשון במסלול), אז $1 \in S$.

בסה"כ, הקודקוד הראשון במסלול מחובר ל-u ותורם 1 ל-S, וכל קודקוד אחר במסלול שמחובר ל-u יתרום גם 1. אז $|S| \geq \deg_G(u)$.

נשים לב גם ש $n \notin T$, כי הגרף פשוט (אין לולאות). וגם, לפי הגדרתו, $|T| \geq \deg_G(v)$.

אם $S \cap T \neq \phi$, כלומר קיים i ששייך לשניהם, אז: $i \in S$ נותן לנו שיש צלע ux_{i+1}. $i \in T$ נותן לנו שיש צלע vx_i.

זה מאפשר *rerouting*, כמו שראינו בדוגמה לעיל. וזה אומר שיש מעגל המילטוני.

אז נניח $S \cap T = \phi$, כלומר $|S \cap T| = 0$. אזי, מהכלה והדחה והמסקנות על $|S|, |T|$:

$$|S \cup T| + |S \cap T| = |S| + |T| \geq \deg_G(v) + \deg_G(u)$$

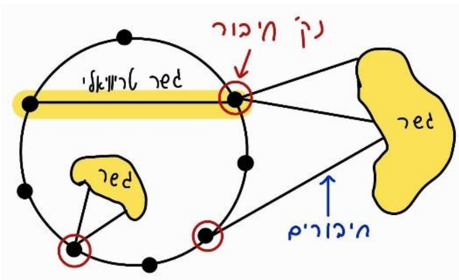
ומתקיים $\deg_G(v), \deg_G(u) \geq n/2$ כי $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$. אזי, $\deg_G(v) + \deg_G(u) \geq n$. בסה"כ, $|S \cup T| \geq n$.

אבל ראינו ש $n \notin S \cup T$, שזו סתירה.

גשרים

יהי C מעגל בגרף G. **גשר** (*bridge*) ב-C הוא אחד משני דברים:

1. **גשר טריוויאלי** הוא מיתר במעגל – צלע בין שני קודקודים במעגל שאינה חלק מהמעגל.
2. או, רכיב קשירות של $G - C$ (קבוצות שאם נסיר את C מהגרף, הם יהיו רכיב קשירות):

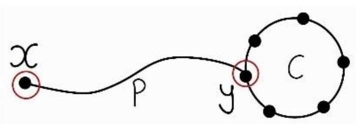


הצלעות שמחברות את הגשר עם המעגל נקראות **חיבורים** (*attachments*) של הגשר.

הקודקודים על המעגל שמתחברים לגשר נקראים **נקודות חיבור** (*points of attachments*).

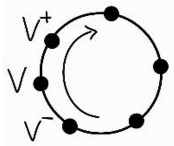
Lollipops

תת-גרף $C \cup P$ שבנוי ממעגל C ומסלול $P \coloneqq x \rightsquigarrow y$ (כאשר נקודת המפגש היחידה של P עם C היא נקודת החיבור y) ייקרא *(x, y)-lollipop*.



בהינתן מעגל C, ניתן לו **אוריינטציה** (כיוון). בהתחשב בכיוון הזה, נוכל לומר עבור קודקוד v איזה קודקוד הגיע לפני ואיזה אחריו.
נסמן v^- את הקודקוד לפניו, ו-v^+ את הקודקוד אחריו:

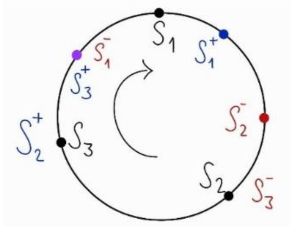
8: Hamiltonicity



בהינתן קבוצת קודקודים על מעגל $S \subseteq V(C)$, נסמן:

$$S^- := \{s^- : s \in S\}, \qquad S^+ := \{s^+ : s \in S\}$$

את קבוצות הקודקודים שבאים לפני ואחרי הקודקודים של S.

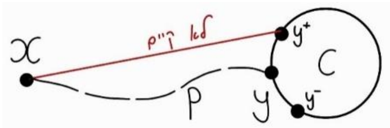


נשים לב שקודקוד יכול להיות שייך ליותר מקבוצה אחת. לדוגמה $S^- \cap S^+$, או ל- $S \cap S^+$.

Lollipop Lemma

יהי C המעגל הארוך ביותר ב-G. יהי $C \cup P := (x, y)\text{-}lollipop$ ב-G. נכוון את C. אזי, $xy^-, xy^+ \notin E(G)$.

כלומר, אין צלע מ-x לקודקודים שלפני או אחרי y במעגל:



נוכיח: נב"ש שיש – אזי מצאנו מעגל ארוך יותר מ-C בגרף: נתחיל מ-y^+, נלך בכיוון המעגל עד y, נלך ל-x, ונלך ל-y^+.

זה מעגל ארוך יותר מ-C כי איבדנו רק צלע אחת (את yy^+) והרווחנו לפחות 2 צלעות: הצלע xy^+, ואת הצלעות של P (לפחות אחת).

Erdős – Chvátal Theorem

נזכיר: $\alpha(G)$ זה גודל הקבוצה הבת"ל הגדולה ב-G, $\kappa(G)$ זה ה-k-קשירות של G (מספר הקודקודים המינימלי שצריך כדי לנתק זוג קודקודים כלשהו).

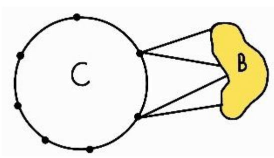
יהי G עם $v(G) \geq 3$, $\kappa(G) \geq \alpha(G)$. אזי G הוא המילטוני.

הוכחה:

נב"ש שהטענה שגויה. יהי גרף G עם התכונות לעיל ויהי C המעגל הארוך ביותר ב-G.

מההנחה ש-G לא המילטוני, נקבל ש $V(G) \setminus V(C) \neq \phi$. יש קודקודים (לפחות אחד) בגרף שלא נמצאים על המעגל.

אזי, יש ב-G גשר לא טריוויאלי עם 2 נקודות חיבור:



למה? נבחן את מרכיבי הקשירות של $G - C$: כבר אמרנו שיש קודקוד שלא על המעגל, אז גשר קיים, אולי אין לו 2 נקודות חיבור?

אם אין לו בכלל נקודות חיבור, אז מכיוון שיש לפחות קודקוד אחד בגשר ואחד במעגל, זה שני קודקודים שהם בת"ל. כלומר $\alpha(G) \geq 2$.

אז מההנחה, $\kappa(G) \geq 2$. אבל הגרף לא קשיר. סתירה.

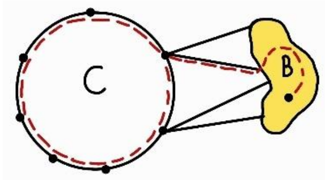
אם יש לו נקודת חיבור אחת: המעגל הוא מעגל פשוט, כלומר יש לו לפחות 3 קודקודים. אז אחד הקודקודים בגשר (נקרא לו v) מחובר בצלע לאחד מהם.

יש עוד 2 קודקודים במעגל (נקרא לאחד מהם w), שלא מחוברים בצלע לאף קודקוד בגשר. אז $\{v, w\}$ היא קבוצה בת"ל, כלומר $\alpha(G) \geq 2$.

אז גם פה $\kappa(G) \geq 2$, אבל אפשר לנתק את הגשר מהמעגל על ידי הסרת קודקוד יחיד. גם סתירה.

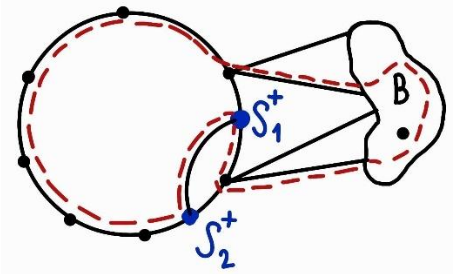
אז יהי B גשר כמו שאמרנו. נסמן S את קבוצת נקודות החיבור של B עם C. אנחנו יודעים ש $|S| \geq 2$.

לכל $b \in B, s \in S$, נקבל (b,s)-$lollipop$:



נכוון את C. מתקיים ש- S^+ היא קבוצה בת"ל, כי אחרת:

נב"ש שלא, כלומר יש צלע $s_1^+s_2^+$ (המספרים הם בה"כ). אזי, נוכל למצוא מעגל גדול יותר, לדוגמה:



כי נאבד 2 צלעות מ-C, ונרוויח את הצלע $s_1^+s_2^+$ ואת הצלעות שמחברות את B ל-C.

פורמלית: יהי Q מסלול $s_1 \rightsquigarrow s_2$ זר בקודקודים פנימיים, שמוכל ב-B. בהכרח קיים כי: יש ל-s_1 שכן ב-B (לכן הוא ב-S) וגם ל-s_2.

ויש בתוך B מסלול זר בקודקודים בין השכנים של s_1, s_2 (כי הוא רכיב קשירות). אזי, יש מעגל:

$$Q \cup s_2Cs_1^+ \cup \{s_1^+s_2^+\} \cup s_2^+Cs_1$$

שארוך יותר מ-C בלפחות צלע אחת, כי הוא תופס את כל הקודקודים ב-C, ומרוויח לפחות קודקוד מ- $V(Q) \cap V(B)$.

בפרט, זה מראה ש $s_1^+ \neq s_2$, כלומר S לא יכולה להכיל קודקודים סמוכים במעגל.

נזכיר את ה- $lollipop$-$lemma$: אם יש (x,y)-$lollipop$, אז אין צלע xy^+ או xy^-. כפי שאמרנו, לכל $b \in B, s \in S$, יש (b,s)-$lollipop$.

אזי $bs^+ \notin E(G)$ לכל $b \in B, s \in S$. כלומר אין אף צלע בין b ל-S^+, לכל $b \in B$.

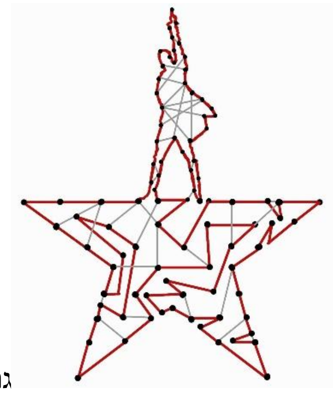
כלומר, $S^+ \cup \{b\}$ היא קבוצה בת"ל לכל $b \in B$. אז $\alpha(G) \geq |S^+| + 1$.

וניזכר ש-S היא קבוצת נקודות החיבור של B עם C. היא חתך בגרף (כי אם נסיר אותה, B יתנתק מ-C). כלומר $\kappa(G) \leq |S|$.

ומתקיים $|S^+| = |S|$ (כי לכל קודקוד $s \in S$ יש קודקוד $s^+ \in S^+$ ייחודי), כלומר:

$$\kappa(G) \leq |S| = |S^+| < |S^+| + 1 \leq \alpha(G)$$

סתירה להנחה ש $\kappa(G) \geq \alpha(G)$. ■



גרף המילטוני