TA Session 3: Polynomial Reductions

תזכורת: רדוקציה פולינומית היא פונקציה שמעבירה מבעיה בשפה אחת לשפה אחרת, בזמן פולינומי וכך שהבדיקה עבור השפה השנייה פותרת את הבעיה הראשונה:

1. f ניתנת לחישוב בזמן פולינומי,
2. מתקיים $f(x) \in L_2 \Leftrightarrow x \in L_1$.

$$clique \coloneqq \{(G,k): K_k \; is \; a \; subgraph \; of \; G\}$$

$$IS \coloneqq \{(G,k): \exists C \subseteq V(G): |C| = k \; and \; no \; edges \; on \; C\}$$

$$VC \coloneqq \{(G,k): \exists C \subseteq V(G): |C| = k \; and \; all \; edges \; touch \; C\}$$

$clique \leq_p IS$

הרדוקציה תהיה:

$$f\big((G,k)\big) = (\bar{G}, k)$$

נוכיח נכונות: הפונקציה פולינומית, ומתקיים: $(G,k) \in clique \Leftrightarrow (\bar{G},k) \in IS$.

$$(G,k) \in clique \Leftrightarrow G \; has \; K_k \; as \; subgraph \Leftrightarrow \bar{G} \; has \; IS \; of \; size \; k \Leftrightarrow (\bar{G},k) \in IS$$

$clique \leq_p VC$

הראנו את הרדוקציה $clique \leq_p IS$. ובתרגול הקודם ראינו את הרדוקציה $IS \leq_p VC$. נעשה הרכבה של הפונקציות האלה:

הרדוקציה $clique \leq_p IS$ מקבלת $(G,k) \in clique$ ומחזירה $(\bar{G},k) \in IS$, נקרא לה f.

הרדוקציה $IS \leq_p VC$ מקבלת $(G,k) \in IS$ ומחזירה $(G, v(G) - k)$, נקרא לה g.

ההרכבה $g \cdot f$ מקבלת $(G,k) \in clique$ ומחזירה $(\bar{G}, v(G) - k)$.

הזמן פולינומי. נוכיח נכונות: לפי הגדרה,

$$x \in clique \Leftrightarrow f(x) \in IS \Leftrightarrow g\big(f(x)\big) \in VC$$

$Subset\text{-}sum \leq_p Partition$

עבור קבוצת מספרים A, נסמן $\bar{A} = \sum_{a \in A} a$. נגדיר: $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

$$subset\text{-}sum \coloneqq \left\{(A,t) : \forall i \; a_i \in \mathbb{N}, \qquad t \in \mathbb{N}, \qquad \exists C \subseteq A \; s.t. \; \sum_{c \in C} c = t\right\}$$

מערך של מספרים שיש בו תת קבוצה שסכומה T.

$$partition \coloneqq \left\{A : \forall i \; a_i \in \mathbb{N}, \qquad \exists C \subseteq A \; s.t. \; \sum_{c \in C} c = \frac{\bar{A}}{2}\right\}$$

מערך של מספרים שיש תת קבוצה שסכומה הוא חצי סכום כל האיברים.

הרדוקציה $partition \leq_p subset\text{-}sum$ היא פשוטה:

$$f(A) = \left(A, \frac{\bar{A}}{2}\right)$$

כי *partition* זה מקרה פרטי של *subset-sum*.

בכיוון השני, נחלק למקרים. הקלט הוא (A,t), כאשר יש תת-קבוצה של A שסכומה t:

אם $t = \bar{A}/2$, אז $f(A,t) = A$. כי *partition* ימצא בדיוק את הקבוצה בסכום הזה.

אם $t < \bar{A}/2$:

TA Session 3: Polynomial Reductions

זה אומר שקיימת קבוצה $C \subseteq A$ שהסכום שלה הוא t. אנחנו רוצים לייצר מצב שיש קבוצה בסכום $\bar{A}/2$. כמה צריך להוסיף לקבוצה המקורית?

אנחנו רוצים לייצר מצב שיש 2 קבוצות בסכום שווה:

$$S_1 = C \cup \{x\}, \qquad \overline{S_1} = t + x$$

כאשר x הוא האיבר שנוסיף.

$$S_2 = A \setminus C, \qquad \overline{S_2} = \bar{A} - t$$

נמצא את הערך של x:

$$t + x = \bar{A} - t \Longrightarrow x = \bar{A} - 2t$$

אז $f(A, t) = (a_1, a_2, \dots, a_n, \bar{A} - 2t)$

אם $t > \bar{A}/2$:

באופן דומה, יהיו 2 קבוצות שנרצה שהסכום שלהן יהיה שווה:

$$S_1 = C, \qquad \overline{S_1} = t$$

הפעם בגלל ש $t > \bar{A}/2$, אנחנו רוצים להוסיף משהו ל-S_2:

$$S_2 = (A \setminus C) \cup \{x\}, \qquad \overline{S_2} = \bar{A} - t + x$$

נחשב:

$$\bar{A} - t + x = t \Longrightarrow x = 2t - \bar{A}$$

אז $f(A, t) = (a_1, a_2, \dots, a_n, 2t - \bar{A})$

נוכיח את נכונות הרדוקציה:

ראינו כבר את הכיוון $x \in subset\text{-}sum \Longrightarrow f(x) \in partition$ (זה תהליך הבנייה).

נוכיח את הכיוון השני: נתון לנו $f\big((a_1, a_2, \dots, a_n), t\big) \in partition$. וצ"ל: $\big((a_1, a_2, \dots, a_n), t\big) \in subset\text{-}sum$.

יהיו 3 אפשרויות:

אם $f\big((a_1, a_2, \dots, a_n), t\big) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, אז בעצם נתון לנו ש $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in partition$.

וצ"ל $\big((a_1, a_2, \dots, a_n), \bar{A}/2\big) \in subset\text{-}sum$.

כלומר קיימת תת-קבוצה: $C \subseteq (a_1, a_2, \dots, a_n)$ כך ש $2\bar{C} = \bar{A}$. מש"ל.

אם נתון לנו $f\big((a_1, a_2, \dots, a_n), t\big) = (a_1, a_2, \dots, a_n, \bar{A} - 2t) \in partition$, צ"ל $\big((a_1, a_2, \dots, a_n), t\big) \in subset\text{-}sum$.

לפי הנתון, יש לנו 2 קבוצות שוות בסכום:

$$\overline{S_1} = \overline{S_2} = \bar{A} - t$$

נניח בה"כ ש $\bar{A} - 2t \in S_1$. אז נגדיר $C = S_1 \setminus \{\bar{A} - 2t\}$. נחשב:

$$\bar{C} = \bar{A} - t - (\bar{A} - 2t) = t$$

אם נתון לנו $f\big((a_1, a_2, \dots, a_n), t\big) = (a_1, a_2, \dots, a_n, 2t - \bar{A}) \in partition$, צ"ל $\big((a_1, a_2, \dots, a_n), t\big) \in subset\text{-}sum$.

לפי הנתון, יש לנו 2 קבוצות שוות בסכום:

$$\overline{S_1} = \overline{S_2} = t$$

נניח בה"כ $2t - \bar{A} \in S_1$, אז ניקח $C = S_2$. מש"ל.

TA Session 3: Polynomial Reductions

$\boldsymbol{Subset\text{-}sum \leq_p Knapsack}$

תזכורת:

$$knapsack \coloneqq \{(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n, W, P) : \exists C \subseteq [n] \; s.t. \; \Sigma_{i \in C} v_i \geq P, \qquad \Sigma_{i \in C} w_i \leq W \}$$

נבנה רדוקציה:

$$f\big((a_1, \dots, a_n), t\big) = (a_1, \dots, a_n, a_1, \dots, a_n, t, t)$$

נוכיח נכונות:

כיוון ראשון: נניח $\big((a_1, \dots, a_n), t\big) \in subset\text{-}sum$. כלומר קיימת תת קבוצה עם סכום t, וזה יקיים את התנאים של $knapsack$.

כיוון שני: נניח $(a_1, \dots, a_n, a_1, \dots, a_n, t, t) \in knapsack$. כלומר, קיימת C כך ש:

$$\sum_{i \in C} a_i \leq t \,, \qquad and, \qquad \sum_{i \in C} a_i \geq t$$

כלומר הסכום שווה t.