NP-completeness

תרגיל 1

הוכיחו שבעיית החיפוש של $3COL$ (כלומר, להחליט אם גרף הוא 3-צביע ואם כן לצבוע אותו), ניתנת לרדוקציה לבעיית ההכרעה. כלומר, בהינתן אלגוריתם פולינומי לבעיית ההכרעה **האם** גרף כלשהו הוא 3-צביע, נתאר אלגוריתם פולינומי למציאת צביעה כזו.

1. ניקח את האלגוריתם A שיודע לומר בזמן פולינומי האם גרף הוא 3-צביע. נניח ש-A רץ בזמן $O\big(f(n)\big)$.
2. נוסיף 3 קודקודים לגרף: $R,\ B,\ G$. 3 תתי-הקבוצות בגודל 2 הן: $C \coloneqq \big\{C_1 \coloneqq \{R,B\},\ C_2 \coloneqq \{B,G\},\ C_3 \coloneqq \{G,R\}\big\}$.
3. לכל C_i, נגדיר c_i את הצבע של הקודקוד שלא מופיע בו: $c_1 \coloneqq G, c_2 \coloneqq R, c_3 \coloneqq B$.
4. לכל $v \in V(G)$: זמן $O(n)$
   a. נגדיר קבוצה $B \coloneqq \emptyset$.
   b. לכל $C_i \in C$:
      i. נחבר את v לקודקודים של C_i ויהי G' הגרף המתקבל.
      ii. אם $A(G') = 1$, נגדיר $B \coloneqq B \cup \{c_i\}$. זמן $O\big(f(n)\big)$
      (כי זה אומר שיש צביעה כאשר v מחובר לשני הצבעים האחרים, כלומר יש צביעה כאשר v צבוע ב-c_i).
   c. נצבע את v באחד הצבעים שיש ב-B.

סה"כ זמן ריצה $O\big(n \cdot f(n)\big)$. אם f פולינומית, האלגוריתם פולינומי.

תרגיל 2

$$\text{3-CNF-SAT} \leq_p \text{NAE-4-CNF-SAT} \leq_p \text{NAE-3-CNF-SAT}$$

סעיף א: $\text{3-CNF-SAT} \leq_p \text{NAE-4-CNF-SAT}$

$$f\left(\underbrace{\left(\underbrace{(\ell_{1,1} \vee \ell_{1,2} \vee \ell_{1,3})}_{\varphi_1} \wedge \underbrace{(\ell_{2,1} \vee \ell_{2,2} \vee \ell_{2,3})}_{\varphi_2} \wedge \dots \wedge \underbrace{(\ell_{m,1} \vee \ell_{m,2} \vee \ell_{m,3})}_{\varphi_m}\right)}_{\varphi}\right)$$

$$\coloneqq \underbrace{\left(\underbrace{(\ell_{1,1} \vee \ell_{1,2} \vee \ell_{1,3} \vee F)}_{\varphi'_1} \wedge \underbrace{(\ell_{2,1} \vee \ell_{2,2} \vee \ell_{2,3} \vee F)}_{\varphi'_2} \wedge \dots \wedge \underbrace{(\ell_{m,1} \vee \ell_{m,2} \vee \ell_{m,3} \vee F)}_{\varphi'_m}\right)}_{\varphi'}$$

בגדול, פשוט נוסיף ליטרל שמקבל F לכל פסוקית.

אם φ ספיקה, זה אומר שיש השמה כך שבכל פסוקית יש T אחד לפחות. אז אותה השמה תספק גם את φ', ובגלל שהוספנו F, זו השמה NAE.

אם φ לא ספיקה, זה אומר שבכל השמה, יש פסוקית שמקבלת כולה F. אז גם בכל השמה שניתן ל-φ', תהיה פסוקית שהיא כולה F.

סעיף ב: $\text{NAE-4-CNF-SAT} \leq_p \text{NAE-3-CNF-SAT}$

$$f\left(\underbrace{\left(\underbrace{(\ell_{1,1} \vee \ell_{1,2} \vee \ell_{1,3} \vee \ell_{1,4})}_{\varphi_1} \wedge \underbrace{(\ell_{2,1} \vee \ell_{2,2} \vee \ell_{2,3} \vee \ell_{2,4})}_{\varphi_2} \wedge \dots \wedge \underbrace{(\ell_{m,1} \vee \ell_{m,2} \vee \ell_{m,3} \vee \ell_{m,4})}_{\varphi_m}\right)}_{\varphi}\right) \coloneqq$$

נפצל כל פסוקית לשתי פסוקיות:

$$(\ell_{i,1} \vee \ell_{i,2} \vee \ell_{i,3} \vee \ell_{i,4}) \coloneqq \underbrace{(\ell_{i,1} \vee \ell_{i,2} \vee w_i)}_{\varphi'_{i,1}} \wedge \underbrace{(\ell_{i,3} \vee \ell_{i,4} \vee \overline{w}_i)}_{\varphi'_{i,2}}$$

אם φ ספיקה NAE, זה אומר שיש השמה כך שבכל פסוקית יש לפחות T אחד ו-F אחד. ניקח את ההשמה הזו ל-φ'.

אם תחת ההשמה, $\ell_{i,1} = \ell_{i,2}$, נוכל להגדיר $w_i \coloneqq \overline{\ell}_{i,1}$.

אם $\ell_{i,1} = T$, אז $w_i = F$ והחלק הראשון מסופק NAE. באופן דומה אם $\ell_{i,1} = F$.

ובגלל ש $\ell_{i,1} = \ell_{i,2}$, אז $\ell_{i,3}, \ell_{i,4}$ חייבים להיות אחד T ואחד F (כי φ המקורית ספיקה NAE). אז גם החלק השני מסופק.

אחרת, $\ell_{i,1} \neq \ell_{i,2}$ אז החלק הראשון מסופק NAE. ונוכל להגדיר $w_i \coloneqq \bar{\ell}_{i,3}$. ואז באופן דומה למצב הראשון, נקבל השמה מספקת NAE.

אם φ' ספיקה NAE, זה אומר שיש השמה כך שבכל חלק (1,2) של כל פסוקית יש לפחות T אחד ו-F אחד.

נניח שבאחד החלקים, ה-F הוא w והשניים האחרים הם T. אזי בחלק השני, ה-w הוא T אז אחד האחרים הוא F. סה"כ בין 4 המקוריים יש T ו-F.

אם באחד החלקים, ה-T הוא w והשניים האחרים הם F, אזי בחלק השני ה-w הוא F אז אחד מהאחרים הוא T.

אחרת, בשני החלקים, השניים המקוריים הם אחד T ואחד F.

בכל מצב יש לנו במקוריים לפחות אחד T ואחד F, אז ההשמה הזו מספקת את φ.

תרגיל 3

צ"ל:

$$L \coloneqq \{(G,k)\colon\ k \in \mathbb{N}\ \ \wedge\ \ (\alpha(G) \geq k\ \ \vee\ \ \omega(G) \geq k)\} \in NPC$$

כלומר, בדיקה האם בגרף יש קבוצה בת"ל בגודל k **ו/או** קליקה בגודל k.

ראשית, נוכיח שהיא NP ע"י אלגוריתם וידוא: בהינתן קבוצת קודקודים, נבדוק אם הקבוצה בגודל k ויש 0 או $\binom{k}{2}$ צלעות.

נוכיח שהיא NPH ע"י רדוקציה משפה NPH אחרת. נוכיח $IS \leq_p L$.

בהינתן גרף על n קודקודים ומספר k, נגדיר:

$$f\big((G,k)\big) \coloneqq (G', k+n)$$

ונגדיר את G' להיות G בתוספת n קודקודים מבודדים.

נניח שיש ב-G קבוצה בת"ל בגודל k. אזי, הוספת n קודקודים מבודדים נותנת לנו קבוצה בת"ל בגודל $k+n$ ב-G'.

נניח שאין ב-G קבוצה בת"ל בגודל k. אזי, ב-G' לא תהיה קבוצה בת"ל בגודל $k+n$. וגם לא תהיה קליקה בגודל $k+n$ כי הוספנו n קודקודים מבודדים.

תרגיל 4

צ"ל:

$$L \coloneqq \{\varphi\colon \varphi\ \ is\ a\ CNF\ formula\ with \geq 2\ satisfying\ assignments\} \in NPC$$

שפת כל הנוסחאות CNF שיש להן לפחות 2 השמות מספקות.

נוכיח שהיא NP ע"י אלגוריתם וידוא: בהינתן 2 השמות, נבדוק אם הן שונות ומספקות.

נוכיח שהיא NPH ע"י רדוקציה משפה NPH אחרת: נוכיח $\text{CNF-SAT} \leq_p L$

בהינתן נוסחת CNF, נגדיר משתנה חדש x:

$$f(\varphi) \coloneqq \varphi \wedge (x \vee \bar{x})$$

אם φ ספיקה, אז גם החלק שהוא φ ב-$f(\varphi)$ יהיה ספיק עם אותה השמה. ונוסיף השמה ל-x: $x = T$ או $x = F$, בשני המקרים $f(\varphi)$ ספיקה וזה שתי השמות.

אם φ לא ספיקה, אז גם $f(\varphi)$ לא תהיה ספיקה (ובפרט אין לה 2 השמות מספקות).

תרגיל 5

צ"ל:

$$L \coloneqq \left\{G\colon \omega(G) \geq \frac{v(G)}{2}\right\} \in NPC$$

שפת כל הגרפים שיש להם קליקה על לפחות חצי מהקודקודים.

נוכיח שהיא NP ע"י אלגוריתם וידוא: בהינתן קבוצת קודקודים, נבדוק אם היא קליקה בגודל המתאים.

נוכיח שהיא NPH ע"י רדוקציה משפה NPH אחרת: נוכיח $\text{CLIQUE} \leq_p L$

בהינתן (G,k), נגדיר:

אם $k = \frac{v(G)}{2}$, אז $f\big((G,k)\big) := G$.

אם $k > \frac{v(G)}{2}$:

יהי G' הגרף המתקבל ע"י הוספת t קודקודים מבודדים ל-G.

אנחנו רוצים שאם ב-G הייתה קליקה בגודל k, אז ב-G' יש קליקה בגודל $\frac{v(G')}{2}$. כלומר נדרוש:

$$\frac{v(G')}{2} = \frac{v(G)+t}{2} = k \Longrightarrow v(G)+t = 2k \Longrightarrow t = 2k - v(G)$$

שזה חיובי, כי $k > v(G)/2 \Longrightarrow 2k > v(G)$.

ואם ב-G לא הייתה קליקה בגודל k, אז הוספת קודקודים מבודדים לא תשנה את זה ב-G'.

אם $k < v(G)/2$:

יהי G' הגרף המתקבל ע"י הוספת t קודקודים ל-G, שכל אחד מהם מחובר לכל השאר ולכל הקודקודים ב-G.

אנחנו רוצים שאם ב-G הייתה קליקה בגודל k, אז ב-G' יש קליקה בגודל $\frac{v(G')}{2}$.

בגלל שהוספנו t קודקודים שכל אחד מחובר לכל השאר ולכל הקודקודים ב-G, אז גודל הקליקה ב-G' יהיה $k+t$.

כלומר נדרוש:

$$\frac{v(G')}{2} = \frac{v(G)+t}{2} = k+2 \Longrightarrow v(G)+t = 2k+2t \Longrightarrow v(G) - 2k = t$$

שזה חיובי, כי $k < v(G)/2 \Longrightarrow 2k < v(G)$.

ואם ב-G לא הייתה קליקה בגודל k, אז הוספת K_t לא תייצר K_{k+t} ב-G'. (כי אחרת, הורדת ה-t קודקודים תשאיר K_k ב-G).

תרגיל 6

בעיית *subset-sum* מוגדרת:

$$SUSU := \{(C,T)\colon\ C \subseteq \mathbb{N}, T \in \mathbb{N}, \exists S \subseteq C\ s.t. \Sigma_{s\in S} s = T\}$$

נתון לנו ש $SUSU \in NPC$ ע"י רדוקציה $\text{3-CNF-SAT} \leq_p SUSU$. ההוכחה כאן, בעמוד 1118 (טענה 34.15). והיא מגעילה. אל תנסו להבין אפילו.

בעיית $PARTITION$ מוגדרת:

$$PARTITION := \{C\colon C \subseteq \mathbb{N}, \exists S \subseteq C\ s.t.\ \Sigma_{t\in S} t = \Sigma_{t\in C\setminus S} t\}$$

נוכיח שהיא NPC.

נוכיח שהיא NP ע"י אלגוריתם וידוא: בהינתן קבוצה S, נבדוק האם הסכום שלה הוא חצי סכום הקבוצה C.

נוכיח שהיא NPH ע"י רדוקציה $SUSU \leq_p PARTITION$:

ננתח את הבעיות: יהי (C,T) קלט לבעיית $SUSU$. באופן כללי, נגדיר $\Sigma_C := \sum_{c\in C} c$.

אם $T = \Sigma_C/2$, סיימנו.

אם $T < \Sigma_C/2$ או $T > \Sigma_C/2$, אנחנו רוצים בעצם לשאול האם אפשר לחלק את C לשתי קבוצות: אחת בגודל T והשנייה בגודל $\Sigma_C - T$.

הבעיה היא ש-*partition* יודעת רק לחלק קבוצה לשני חלקים שווים. נניח ששמנו בקבוצה אחת T. בצד השני נשאר $\Sigma_C - T$.

אם $T < \Sigma_C/2$, זה אומר שנשאר בצד השני יותר מחצי הסכום. אז נרצה לאזן את זה עם משהו שנוסיף לצד של T. נוסיף משהו בגודל t:

$$T + t = \Sigma_C - T \Longrightarrow t = \Sigma_C - 2T$$

אם $T > \Sigma_C/2$, זה אומר שבצד השני נשאר פחות מחצי מהסכום. נרצה להוסיף t לצד הזה:

$$T = \Sigma_C - T + t \Longrightarrow t = 2T - \Sigma_C$$

אז בהינתן בעיית $SUSU(C,T)$, תלוי ביחס בין T ל-$\Sigma_C/2$, נייצר איבר t ואז נפתור את $PARTITION(C \cup \{t\})$.

לפי תהליך הבנייה, אם $(C,T) \in SUSU$ אז $(C \cup \{t\}) \in PARTITION$.

בכיוון השני, נניח ש $(C \cup \{t\}) \in PARTITION$. כלומר קיימת חלוקה $C = S_1 \uplus S_2$ כך ש $\Sigma_{S_1} = \Sigma_{S_2}$.

אנחנו צריכים להוכיח ש $(C,T) \in SUSU$.

אם $t = 0$, אז $T = \Sigma_C/2$ והחלוקה היא פתרון גם ל-*SUSU*.

אם $t = \Sigma_C - 2T$, נניח בה"כ ש- $t \in S_1$. אזי נגדיר $S \coloneqq S_1 \setminus \{t\}$ ונקבל:

$$\Sigma_{C \cup t} = 2\Sigma_{S_1} = 2(\Sigma_S + t) = 2(\Sigma_S + \Sigma_C - 2T) = 2\Sigma_S + 2\Sigma_C - 4T$$

וניזכר ש:

$$\Sigma_{C \cup t} = \Sigma_C + t = \Sigma_C + \Sigma_C - 2T = 2\Sigma_C - 2T$$

אז:

$$2\Sigma_C - 2T = 2\Sigma_S + 2\Sigma_C - 4T \Longrightarrow 2T = 2\Sigma_S \Longrightarrow T = \Sigma_S$$

כלומר S היא תת קבוצה של C בסכום T, כנדרש.

ואם $t = 2T - \Sigma_C$, נניח בה"כ ש- $t \in S_1$. אזי נגדיר $S \coloneqq S_2$ ונקבל:

$$\Sigma_{C \cup t} = \Sigma_C + t = \Sigma_C + 2T - \Sigma_C = 2T$$

ויש חלוקה לשתי קבוצות שוות, כלומר:

$$\Sigma_{S_1} = \Sigma_{S_2} = T$$

כלומר S היא תת קבוצה של C בסכום T, כנדרש.

תרגיל 7

בעיית תרגיל הגב בשלמים – *KNAPSACK*:

נתונה רשימה של מוצרים $A \coloneqq [n]$, רשימת ערכים $V \coloneqq (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ורשימת משקלים $W \coloneqq (w_1, w_2, \dots, w_n)$,

כך שלמוצר i יש משקל w_i וערך v_i.

בנוסף, נתונים הגבלת משקל $C \in \mathbb{N}$ ורווח $P \in \mathbb{N}$. צריך לקבוע האם קיימת $B \coloneqq \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq A$ כך ש:

$$\sum_{j=1}^{k} w_{i_j} \leq C, \qquad \sum_{j=1}^{k} v_{i_j} \geq P$$

צ"ל: $SUSU \leq_p KNAPSACK$

בהינתן $C \subseteq \mathbb{N}, T \in \mathbb{N}$ כך ש- $|C| = n$, נגדיר:

$$W \coloneqq V \coloneqq C, \qquad A \coloneqq [n], \qquad C \coloneqq P \coloneqq T$$

נניח ש- $(C,T) \in SUSU$, כלומר קיימת $S \subseteq C$ כך ש- $\Sigma_S = T$. אזי ניקח את B להיות האיברים המתאימים ל-S מתוך W ו-V, ונקבל:

$$\sum_{j=1}^{k} w_{i_j} = T \leq C, \qquad \sum_{j=1}^{k} v_{i_j} = T \geq P$$

כנדרש.

נניח ש- $(A, W, V, C, P) \in KNAPSACK$. כלומר קיימת $B := \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq A$ כך ש:

$$\sum_{j=1}^{k} w_{i_j} \leq C = T, \qquad \sum_{j=1}^{k} v_{i_j} \geq P = T$$

כלומר:

$$\sum_{b \in B} b \leq T, \sum_{b \in B} b \geq T \Rightarrow \sum_{b \in B} b = T$$

כנדרש.

תרגיל 8

בהינתן גרף מכוון $D := (V, E)$, קבוצה $K \subseteq V$ תיקרא $kernel$ של D אם:

$$\forall u, v \in K : (u, v) \notin E(D)$$

$$\forall v \in V \setminus K : \ \exists u \in K \ \ s.t. (v, u) \in E(D)$$

לכל שני קודקודים ב-K אין צלע ביניהן. ולכל קודקוד u שלא ב-K, קיים קודקוד v ב-K כך שיש צלע מ-v ל-u.

כלומר K היא קבוצה בת"ל ש"שולטת" על הגרף.

צ"ל:

$$KERNEL := \{D : D \ is \ a \ directed \ graph \ with \ a \ kernel\} \leq_p \text{CNF-SAT}$$

בהינתן גרף מכוון, נצטרך לבנות בשבילו נוסחת CNF מתאימה.

לכל $v \in V$, נגדיר משתנה x_v. אנחנו רוצים בעצם (אינטואיטיבית, לא פורמלית) שאם $v \in K$ אז $x_v = T$. ונגדיר פסוקיות שיתפסו את ההגבלות.

ההגבלות שלנו הן:

1. אם שני קודקודים ב-K, אז אין ביניהן צלע.
2. אם קודקוד לא ב-K, אז יש צלע מקודקוד כלשהו ב-K אליו.

הגבלה 1: לכל צלע $uv \in E$, נגדיר פסוקית. אנחנו רוצים שהפסוקית לא תסופק אמ"מ שניהם ב-K. כלומר אנחנו רוצים שרק אם שניהם T, הפסוקית מקבלת F, כלומר: $\overline{x_u \wedge x_v}$. אבל זה לא צורה של פסוקית CNF. נשתמש בחוקי דה-מורגן כדי לקבל:

$$\varphi_{uv} := \overline{x_u \wedge x_v} = \bar{x}_u \vee \bar{x}_v$$

הגבלה 2: לכל $v \in V$ נגדיר פסוקית שתהיה T אם הקודקוד לא ב-K (כלומר הוא F) ויש צלע מקודקוד כלשהו ב-K אליו. אז הקודקוד עצמו נותן ליטרל חיובי – אם הקודקוד ב-K, הוא T ואז הפסוקית T (כי לא צריך שתהיה צלע). אם הקודקוד לא ב-K, הוא יהיה F, ואז צריך שתהיה צלע מקודקוד ב-K אליו. אז שאר הליטרלים בפסוקית יהיו כך שאם יש צלע מקודקוד ב-K ל-v, הליטרל יהיה T. ניקח את כל המשתנים שמייצגים קודקוד שיש צלע ממנו ל-v. מספיק שאחד מהם T (כלומר ב-K) והפסוקית תהיה מסופקת. כלומר נגדיר את החלק של השכנים:

$$\varphi_v := \bigvee\nolimits_{u : uv \in E} x_u$$

והפסוקית כולה היא:

$$x_v \vee \varphi_v$$

בסה"כ, הביטוי שמייצג את הגרף:

$$f\big(D := (V, E)\big) := \bigwedge\nolimits_{v \in V} \varphi_v \wedge \bigwedge\nolimits_{uv \in E} \varphi_{uv}$$

תהליך הבנייה הוא $O(n^2)$ עבור הבנייה של הפסוקיות של הצלעות. ו-$O(n \cdot n^2) = O(n^3)$ עבור הבנייה של הפסוקיות של הקודקודים (לכל קודקוד נעבור על כל הצלעות). בסה"כ זמן $O(n^3)$, פולינומי.

נוכיח נכונות: נניח שהגרף הוא גרף מכוון עם $kernel$. נתאר השמה מספקת ל-$f(D)$:

לכל קודקוד ב-K נגדיר T. לכל קודקוד אחר נגדיר F.

כל הפסוקיות של הצלעות מסופקות כי לפי ההנחה, אין צלעות בתוך K אז אין פסוקית ששני הקודקודים T, אז אין פסוקית ששני הליטרלים ההפוכים הוא F, אז כל פסוקית כזו מסופקת.

כל הפסוקיות של הקודקודים מסופקות כי אם הקודקוד v ב-K אז הוא קיבל T, ואם הקודקוד לא ב-K אז הוא F אבל לפי ההנחה קיים קודקוד ב-K שיש ממנו צלע ל-v אז המשתנה של אותו קודקוד קיבל T.

כיוון שני: נניח שקיימת לנוסחה השמה מספקת. ניקח השמה כזו. בכל פסוקית של צלע יש T אחד לפחות, כלומר יש במשתנים שלה F אחד לפחות. ניקח את הקודקודים שקיבלו T ל-K. ובגלל שבכל צלע יש לפחות F אחד במשתנים, זה אומר שאין צלע ששני הקודקודים שלה ב-K.

וגם, כל הפסוקיות של הקודקודים מסופקות. אם המשתנה של הקודקוד מסופק, זה אומר שלקחנו אותו ל-K. אם הוא F, אז אחד המשתנים האחרים הוא T, כלומר יש צלע מקודקוד ב-K אל הקודקוד שלנו. כנדרש.

.

Matching

תרגיל 1

יהי M שידוך בגרף G. צ"ל: ב-G יש שידוך מקסימום שמכסה את $V(M)$.

מכל השידוכים M' בגודל $\nu(G)$ האפשריים, ניקח אחד שממקסם את $|M \cap M'|$. כלומר, שידוך שיש לו כמה שיותר צלעות משותפות עם M.

נב"ש שיש קודקוד ב-$V(M) \setminus V(M')$. נקרא לו x. ניקח את הצלע $xy \in M$.

אם $y \notin V(M')$, אז אפשר להוסיף את xy לשידוך M', סתירה לכך שהוא מקסימום.

אז $y \in V(M')$. כלומר יש צלע $yz \in M'$. וניזכר ש-$x \notin V(M')$. נוכל לקחת את הצלע xy במקום הצלע yz, ולקבל שידוך שמכסה את x באותו גודל.

נקרא לשידוך הזה M''. אזי, $|M'' \cap M| > |M' \cup M|$, סתירה.

תרגיל 2

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}$ זוגי ויהי G גרף על n קודקודים שמקיים $\delta(G) \geq n/2$. אזי, יש ב-G שידוך מושלם.

הוכחה: יהי גרף $G := (V, E)$ כאמור. נב"ש שאין ב-G שידוך מושלם ויהי M השידוך המקסימום.

נסמן $S := V \setminus V(M)$ את קבוצת הקודקודים שלא בשידוך. מכיוון ש- $|V(M)|$ זוגי (כי כל צלע בשידוך נותנת שני קודקודים) אז גם $|S|$ זוגי.

S גם לא ריקה (כי הנחנו שאין שידוך מושלם). אז $|S| \geq 2$. וגם, S היא קבוצה בת"ל (כי אם יש צלע, אפשר להוסיף אותה לשידוך ולקבל שידוך גדול יותר).

אז יהיו $u, v \in S$. לכל צלע $xy \in V(M)$, יש לכל היותר שתי צלעות בין הקבוצות $\{x, y\}$ ו-$\{u, v\}$. כי אם יש יותר, אז יש מסלול M-משפר.

למה? נב"ש שיש 3 צלעות.

יש 2 צלעות מ-x או y (בה"כ x) ל-u ו-v: ux, vx. אז יש גם צלע מ-y ל-v או u (בה"כ u) אז יש מסלול M-משפר $v \to x \to y \to u$.

סתירה לכך ש-M מקסימלי.

כלומר, לא יכול להיות שגם u וגם v מתחברות גם ל-x וגם ל-y.

בגלל ש-S בת"ל, כל הצלעות שיוצאות מ- $\{u, v\}$ הן ל- $V(M)$.

מתקיים: $\deg_G v + \deg_G u \leq |V(M)|$ (כי כל צלע מ-u או מ-v הולכת לקודקוד ב-M).

וגם, $|V(M)| = 2|M|$. ומההנחה ש-M לא שידוך מושלם, מתקיים גם $2|M| \leq n - 2$.

בסה"כ: $\deg_G v + \deg_G u < n - 2$. כלומר לפחות אחד מהם קטן ממש מ- $n/2$.

סתירה.

תרגיל 3

יהיו $n \geq 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, ויהי G גרף על n קודקודים המקיים $\delta(G) \geq 2k - 1$. צ"ל: $\nu(G) \geq k$.

נב"ש ש- $\nu(G) < k$ ויהי M שידוך בגודל מקסימום. אז מתקיים:

$$v(M) = 2|M| \leq 2k - 2 < 2k - 1$$

מכיוון ש $n \geq 2k - 1$, יש לפחות קודקוד אחד $x \in V(G) \setminus V(M)$. ובגלל ש- $\delta(G) \geq 2k - 1$, יש לו שכן $y \in V(G) \setminus V(M)$.

אז אפשר להוסיף את xy לשידוך M, סתירה לכך שהוא שידוך מקסימום.

מסקנה: אם $\nu(G) \geq 2\delta(G)$, אז $\nu(G) \geq \delta(G)$.

הוכחה: נב"ש ש $\nu(G) < 2\delta(G)$ ויהי M שידוך מקסימום ב-G. אזי:

$$|V(M)| \leq v(G) < 2\delta(G) \Longrightarrow |V(M)| \leq 2\delta(G) - 2$$

אז יש לפחות שני קודקודים שלא ב-M. והם בת"ל, כי אחרת השידוך לא מקסימום. יהיו u, v שני קודקודים כאלה.

יש מכל אחד מהם לפחות $\delta(G)$ צלעות שיוצאות. ואף אחת מהן לא יכולה להיות לקודקוד שלא בשידוך. כלומר בסה"כ, $e_G(\{u, v\}, V(M)) \geq 2\delta(G)$.

נרצה להראות שקיים מסלול M-משפר: נראה שיש צלע $f := xy \in M$ שיש ממנה 3 צלעות ל-$\{u,v\}$, ואז יש מסלול מגדיל:

אם יש 3 צלעות, אז יש צלע מ-f ל-u וגם ל-v ועוד צלע לאחד מתוך u, v.

נלך מ-u לקודקוד של f שמחובר אליו – בה"כ x. נלך על f ל-y. אם y מחוברת ל-v, זה המסלול.

אחרת, y מחוברת רק ל-u. אז יש שתי צלעות מ-x. אז נלך מ-v ל-x, ל-y, ל-u. וזה המסלול.

נוכיח שיש צלע f כזו: נב"ש שאין, כלומר $e_G(\{u,v\},f) \leq 2$ לכל $f \in M$. אזי:

$$e_G\big(\{u,v\},V(M)\big) = \sum_{f\in M} e_G(\{u,v\},f) \leq 2|M| = |V(M)| < 2\delta(G)$$

סתירה ל- $e_G\big(\{u,v\},V(M)\big) \geq 2\delta(G)$ שהוכחנו.

אז יש צלע $f \in M$ כך ש- $e_G(\{u,v\},f) \geq 3$, כנדרש.

תרגיל 4

טענה: לכל $k \in \mathbb{N}$ קיים גרף G עם $\delta(G) \geq k$ שיש לו שידוך מושלם יחיד.

הוכחה – באינדוקציה על k:

בסיס: $k = 1$, K_2 מקיים $\delta(K_2) = 1$ ואכן יש שידוך יחיד.

צעד: יהי $k \in \mathbb{N}$, ונניח שקיים גרף G' עם $\delta(G') \geq k-1$ עם שידוך מושלם יחיד. נוכיח שקיים גרף עם $\delta(G) \geq k$ עם שידוך מושלם יחיד.

ניקח שני עותקים של G'. נקרא להם G'_x, G'_y. נוסיף שני קודקודים חדשים – x, y. כל אחד מהם נחבר לכל הקודקודים בגרף המתאים. ונחבר צלע xy.

זה הגרף G. הוא מקיים $\delta(G) \geq k$ כי לכל קודקוד ב- G'_x, G'_y הוספנו צלע. ו-x, y מחוברים כל אחד לכל הצלעות של אחד העותקים של G', שבכל אחד יש לפחות $\delta(G') - 1$ קודקודים. והצלע xy מוסיפה אחד.

ב- G'_x יש שידוך מושלם יחיד לפי הנ"א.

ואם ניקח ממנו קודקוד לשידוך עם x, זה ישאיר מספר אי זוגי של קודקודים ואז לא יהיה ב- G'_x שידוך מושלם ב-G. ובאופן דומה עבור G'_y.

כלומר, x ו-y לא משודכים לאף קודקוד מקורי. אז הם משודכים אחד לשני. וזה השידוך המושלם היחיד.

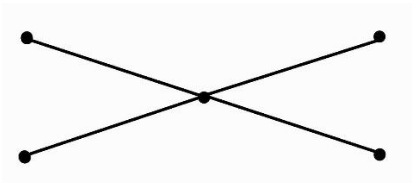
Connectivity

תרגיל 1

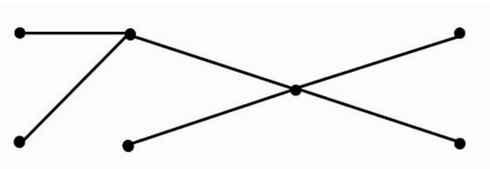
נצייר גרף G שמקיים: $\kappa(G) < \kappa'(G) < \delta(G)$.

מה אנחנו צריכים? צריך שיהיה אפשר להוריד כל $\kappa - 1$ קודקודים והגרף יישאר קשיר. וגם, שיהיה אפשר להוריד כל κ צלעות והגרף יישאר קשיר. וגם, שלכל קודקוד יש דרגה לפחות $\kappa + 2$.

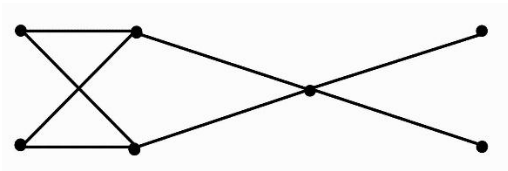
הכי קל שיהיה קודקוד חתך, ואז $\kappa = 1$. ואז צריך שיהיה אפשר להוריד כל צלע והגרף יישאר קשיר. אז הקודקוד חתך מחובר ל-2 צלעות. אבל שיש 2 צלעות שאם נוריד אותן, הגרף לא קשיר. נתחיל עם זה:



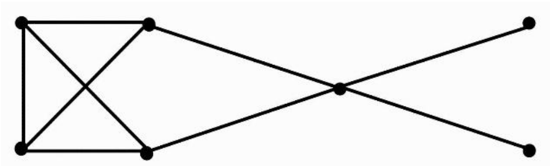
וצריך גם ש- $\delta(G) \geq 3$, אז נוסיף צלעות. נשים לב לא להוסיף צלעות שמחברות בין שני הצדדים של קודקוד החתך. וגם לא להוסיף צלעות שמבטלות את החשיבות של צלעות החתך. לכל קודקוד שיש פחות 2 שכנים, נוסיף צלעות. נתחיל עם זה:



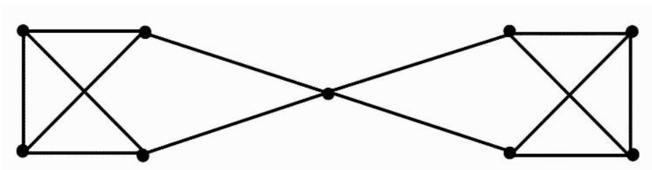
וגם לשני:



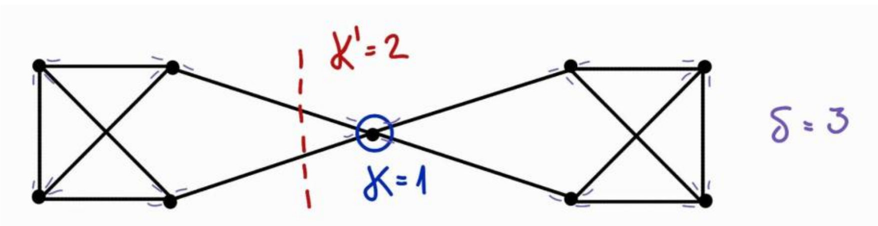
ועכשיו לשני הקודקודים החדשים חסרה צלע, נוסיף:



וכנ"ל לצד השני:



וסיימנו:



תרגיל 2

יהי $G := (V, E)$ גרף קשיר המקיים את התכונה שלכל צלע $e \in E$ יש שני מעגלים שנפגשים רק ב-e.

טענה: $\kappa'(G) \geq 3$.

הוכחה: נראה שכל זוג צלעות הן לא חתך-בצלעות.

יהיו שתי צלעות $f, g \in E$.

מההנחה ש-f מוכל בשני מעגלים (ובפרט במעגל אחד), $G - f$ הוא גרף קשיר.

ומכיוון שיש שני מעגלים שנפגשים רק ב-g, לפחות אחד מהם קיים ב- $G - f$.

אז g הוא לא גשר ב- $G - f$. כלומר אפשר להוריד גם אותו והגרף יישאר קשיר.

תרגיל 3

יהי $G \coloneqq (V, E)$ גרף r-קשיר עם $2n$ קודקודים, שאין בו תת-גרף מושרה שהוא עותק של $K_{1,r+1}$.

תת-גרף מושרה מוגדר ע"י תת קבוצה של קודקודים $S \subseteq V$, יחד עם כל הצלעות שיש ב-G בין קודקודים של S. מסומן $G[S]$.

גרף $K_{1,r+1}$ הוא גרף דו"צ עם $|A| = 1, |B| = r + 1$ כך שהקודקוד של A מחובר לכל קודקוד של B (כמו גרף *claw* שראינו).

טענה: ב-G יש שידוך מושלם.

ניזכר במשפט *Tutte*:

נסמן $\boldsymbol{C_o(G)}$ את מספר רכיבי הקשירות מדרגה אי-זוגית שיש ב-G.

קיים ב-G שידוך מושלם **אמ"מ** לכל $S \subseteq V(G)$ מתקיים $C_o(G - S) \le |S|$. (צד שמאל נקרא תנאי *Tutte*).

תהי $S \subseteq V$ כלשהי. נחלק למקרים ונראה שבכל אחד מהם, תנאי *Tutte* מתקיים:

אם $S = \emptyset$, אז $G - S = G$ וזה רכיב קשירות אחד. ויש $2n$ קודקודים, אז זה רכיב קשירות מדרגה זוגית. אז $C_o(G - S) = 0 \le 0 = |S|$.

אם $1 \le |S| \le r - 1$, אז מההנחה ש- $\kappa(G) = r$, נקבל ש- $G - S$ קשיר. אז יש רכיב קשירות אחד. ובכל מקרה נקבל:

$$C_o(G - S) = 1 \le 1 = |S|$$

עבור המקרה $|S| \ge r$, מספיק להראות ש- $C(G - S) \le |S|$ (מספר הרכיבים של $G - S$) כי $C_o(G - S) \le C(G - S)$.

כל רכיב C של $G - S$ מתחבר ללפחות r קודקודים ב-S. כי אחרת, G לא היה r-קשיר. (היינו מורידים את הקודקודים שהרכיב מחובר אליהם ב-S. נשאר לפחות קודקוד אחד ב-S והוא מבודד מהקודקודים של הרכיב).

לכל רכיב C של $G - S$, נבחר r צלעות שמחברות אותו עם r קודקודים שונים ב- S.

נשים לב – יכול להיות שיש שני קודקודים שונים ב-S שמתחברים לאותו קודקוד ברכיב.

לכל $v \in S$ בחרנו לכל היותר צלע אחת שמחברת אותו לכל רכיב (כי בחרנו r צלעות שמתחברות ל-r קודקודים שונים ב-S).

כלומר, אין מצב שבחרנו קודקוד $v \in S$ שמחובר לשני קודקודים שונים ברכיב.

אז אם $C(G - S) > |S|$, זה אומר שבתהליך הבחירה בחרנו יותר (ממש) מ- $r|S|$ צלעות שיוצאות מ-S. כלומר לפחות $r|S| + 1$.

אז לפי שובך היונים, יש קודקוד $v \in S$ שמחובר ל- $r + 1$ מהצלעות שבחרנו.

וכל צלע היא לרכיב קשירות אחר, אז אין צלעות בין הקודקודים שמחוברים ל-v.

הקודקוד v עם הצלעות שבחרנו מהווים עותק מושרה של $K_{1,r+1}$, בסתירה להגדרת הגרף.

תרגיל 4

יהי גרף $G \coloneqq (V, E)$, ותהי $S \subseteq V$.

טענה א:

$$e_G(S, V \setminus S) = \left(\sum\nolimits_{v \in S} \deg_G v\right) - 2e(G[S])$$

כלומר: סכום הדרגות ב-S, פחות פעמיים מספר הצלעות שיש בתת-גרף המושרה על S, שווה למספר הקודקודים שיש בין S לשאר הגרף.

נספור את סכום הדרגות של הקודקודים ב-S:

כל צלע ב- $e_G(S, V \setminus S)$ נספרת פעם אחת. כל צלע ב- $e(G[S])$ נספרת פעמיים. בסה"כ:

$$e_G(S, V \setminus S) + 2e(G[S]) = \left(\sum_{v \in S} \deg_G v\right)$$

כנדרש.

טענה ב: אם $S \neq \emptyset$ ו- $e_G(S, V \setminus S) < \delta(G)$, אז $|S| > \delta(G)$.

נסמן $\delta \coloneqq \delta(G)$. ראשית, נשים לב שאין קודקודים מבודדים כי אז $\delta = 0$. אז נוכל להניח $\delta \geq 1$.

אם $S = V$, אז $e_G(S, V \setminus S) = 0 < 1$. אז הדרגה נקבעה רק לפי S ואז, $|S| > \delta$ כי כדי שתהיה דרגה δ צריך לפחות $\delta + 1$ קודקודים.

נניח ש- $S \notin \{\emptyset, V\}$. אם $e_G(S, V \setminus S) = 0$ אז בכל צד מספר הקודקודים הוא לפחות $\delta + 1$. אז $\delta < \min\{|S|, |V \setminus S|\}$.

נניח ש- $1 \leq e_G(S, V \setminus S) < \delta$. לפי טענה א:

$$\left(\sum_{v \in S} \deg_G v\right) - 2e(G[S]) < \delta$$

באופן כללי מתקיים:

$$\sum_{v \in S} \deg_G v \geq \delta|S|, \qquad 2e(G[S]) \leq |S| \cdot (|S| - 1)$$

השמאלי לפי הגדרת δ, והימני כי אם נספור את כל הצלעות (המכוונות) האפשריות זה בדיוק $|S| \cdot (|S| - 1)$, וזה פעמיים מספר הצלעות הלא מכוונות.

כלומר:

$$\delta|S| - |S| \cdot (|S| - 1) \leq \left(\sum_{v \in S} \deg_G v\right) - 2e(G[S]) < \delta$$

נעביר אגפים:

$$\delta|S| - \delta < |S|(|S| - 1) \Longrightarrow \delta(|S| - 1) < |S|(|S| - 1) \Longrightarrow \delta < |S|$$

תרגיל 5

יהי $G \coloneqq (V, E)$ גרף על n קודקודים. נסמן $\delta \coloneqq \delta(G),\ \kappa' \coloneqq \kappa'(G)$.

טענה א: אם $\delta \geq \lfloor n/2 \rfloor$, אז $\kappa' = \delta$.

מתקיים $\kappa' \leq \delta$, לפי מסקנה ממשפט וויטני.

נב"ש ש- $\kappa' < \delta$ ותהי F קבוצת צלעות מפרידה בגודל מינימום. נתמקד ברכיבים של $G - F$. נבחר רכיב C כלשהו.

יש לכל היותר κ' צלעות שיוצאות ממנו בגרף המקורי (כי הורדנו רק κ' צלעות וזה הפריד אותו משאר הגרף).

אז אם ניקח את $S \coloneqq V(C)$, נקבל $e_G(S, V \setminus S) \leq \kappa' < \delta$, ולפי טענה 4ב נקבל ש $|C| = |S| > \delta$.

מכיוון שב- $G - F$ יש לפחות 2 רכיבי קשירות, נקרא להם C_1, C_2. אז:

$$n \geq |C_1| + |C_2|$$

וכל אחד מהם מקיים $|C| > \delta$, אז:

$$n \geq \underbrace{|C_1|}_{>\delta} + \underbrace{|C_2|}_{>\delta} \geq \delta + 1 + \delta + 1 = 2\delta + 2 = 2(\delta + 1)$$

ו- $\delta \geq \lfloor n/2 \rfloor$, נקבל:

$$n \geq 2(\delta + 1) \geq 2(\lfloor n/2 \rfloor + 1) \geq n + 1$$

סתירה.

טענה ב: נניח ש-G קשיר. אם $\deg_G x + \deg_G y \geq n-1$ לכל $xy \notin E$, אז $\kappa' = \delta$.

יהי F מפריד בצלעות בגודל מינימום ונב"ש ש- $|F| < \delta$. מכיוון ש-G קשיר, F מגדירה חתך מינימלי $(S, \bar{S})$.

אז לפי 4ב, נשים לב שמתקיים $e_G(S, V \setminus S) < \delta$ וגם $e_G(\bar{S}, V \setminus \bar{S}) < \delta$. אז לפי 4ב, נקבל $|S| > \delta$ וגם $|\bar{S}| > \delta$.

ננתח את ההנחה ש- $\deg_G x + \deg_G y \geq n-1$. אם אין ל- x, y אף שכן משותף וגם אין בניהם צלע, אז סכום הדרגות יהיה לכל היותר $n-2$.

כלומר, לכל $xy \notin E$ שמקיימים $\deg_G x + \deg_G y \geq n-1$, יש שכן משותף.

אז אם יש קודקוד $v \in S$ שאין לו אף שכן ב-$\bar{S}$, זה אומר שיש לו שכן משותף עם כל קודקוד ב-$\bar{S}$. וכל השכנים המשותפים האלה חייבים להיות ב-S.

אז על כל קודקוד ב-$\bar{S}$, יש צלע שחוצה את החתך. ומכיוון ש- $|\bar{S}| > \delta$, זה אומר ש- $e_G(S, V \setminus S) > \delta$. סתירה.

אז לכל קודקוד $v \in S$ יש לפחות שכן אחד ב-$\bar{S}$. מכיוון ש- $|S| > \delta$, נקבל ש- $e_G(S, V \setminus S) > \delta$, שוב סתירה.

תרגיל 6

תזכורת: מספר הצלעות במסלול הקצר $x \rightsquigarrow y$ מסומן $d_G(x, y)$. **היקף** של גרף $G \coloneqq (V, E)$ מוגדר

$$diam(G) \coloneqq \max_{x,y \in \binom{V}{2}} d_g(x, y)$$

כלומר, שני הקודקודים שהכי רחוקים אחד מהשני.

טענה: יש קורלציה הפוכה בין רמת הקשירות של הגרף וההיקף. בפרט,

$$diam(G) \leq \frac{v(G) - 2}{\kappa(G)} + 2$$

הוכחה: יהיו $x, y \in V$ כך ש- $d_G(x, y) = diam(G)$. נסמן $n \coloneqq v(G),\ \kappa \coloneqq \kappa(G),\ d \coloneqq d_G(x, y)$.

לפי משפט מנגר יש κ מסלולי xy זרים בקודקודים פנימיים. וכל אחד מהם באורך לפחות d.

נסמן L את האיחוד של כל המסלולים האלה. $L \subseteq G$. נספור את $V(L)$.

מספר הקודקודים הפנימיים בכל מסלול הוא לפחות $d-2$, ויש לפחות κ מסלולים כאלה. ונוסיף את x, y. בסה"כ:

$$\kappa(d-2) + 2 \leq V(L) \leq n$$

קצת אלגברה:

$$\kappa(d-2) + 2 \leq n \Longrightarrow \kappa d - 2\kappa + 2 \leq n \Longrightarrow \kappa d \leq n - 2 + 2\kappa \Longrightarrow d \leq \frac{n-2}{\kappa} + 2$$

כנדרש.

Hamiltonicity

בגרף G, *k-factor* הוא קבוצת צלעות כך שכל קודקוד בגרף מחובר לבדיוק k צלעות. אז *1-factor* הוא שידוך מושלם.

תרגיל 1

יהי $G := (V, E)$ גרף 3-רגולרי, שיש לו 3-צביעה בצלעות <u>יחידה</u>.

טענה: G הוא המילטוני.

הוכחה:

נקרא למחלקות הצבע: M_1, M_2, M_3. ומתקיים: $E = M_1 \uplus M_2 \uplus M_3$.

כל M_i מהווה שידוך. ובגלל שהגרף הוא 3-רגולרי, כל קודקוד נוגע בשלושת הצבעים. אז כל אחד מהשידוכים הוא שידוך מושלם.

בנוסף, $M_1 \uplus M_2$ מהווה *2-factor* של G. כל קודקוד מחובר לבדיוק 2 צלעות. אז כל קודקוד הוא בעצם חלק ממעגל פשוט. וכל המעגלים האלה הם באורך זוגי, כי זה צלעות רק מ- $M_1 \uplus M_2$ אז זה חייב להיות מסלול בצבעים מתחלפים.

אם $M_1 \uplus M_2$ זה בדיוק מעגל אחד, זה מעגל המילטוני. אז נב"ש שיש לפחות שני מעגלים.

אז אפשר להחליף את הצבעים באחד המעגלים, סתירה לכך שיש צביעה יחידה.

תרגיל 2

יהי $G := (V, E)$ גרף שהוא *traceable* – כלומר, יש בו מסלול (לא בהכרח מעגל) המילטוני.

תהי קבוצה $S \subseteq V$. טענה: ב- $G - S$ יש לכל היותר $|S| + 1$ רכיבי קשירות.

הוכחה: יהי P מסלול המילטון ב-G. עבור גרף H, נסמן $C(H)$ את מספר רכיבי הקשירות שלו.

מכאן, נציע 3 הוכחות.

הוכחה א: כל קודקוד שמסירים מפצל את המסלול לשני חלקים, או שהוא מהקצה ואז הוא לא מפצל. אז $C(P - S) \leq |S| + 1$.

P פורש את כל קודקודי G, וכל קודקוד שהורדנו יורד משניהם. אז $P - S$ פורש את $G - S$. אז, $C(G - S) \leq C(P - S)$.

בסה"כ, $C(G - S) \leq |S| + 1$, כנדרש.

הוכחה ב: P מבקר בכל הרכיבים של $G - S$. בפרט, הוא יוצא מכל אחד מהרכיבים חוץ מהאחרון.

כל פעם שהוא עובר בין שני רכיבים, הוא עובר בקודקוד שלא שייך לשניהם (כי אחרת הם אותו רכיב).

כל הקודקודים האלה חייבים להיות מ-S, כי אחרת הם היו רכיב בעצמם.

אז בין כל שני רכיבים יש לפחות קודקוד אחד מ-S. אז $|S| \geq C(G - S) - 1 \Longrightarrow |S| + 1 \geq C(G - S)$, כנדרש.

הוכחה ג: נסמן u, v את קודקודי הקצה של P. אם $uv \in E$, אז G הוא המילטוני ואז (בטענה דומה להוכחה א) מתקיים $C(G - S) \leq |S|$.

אם $uv \notin E$, אז $G' := G + uv$ הוא המילטוני, ואז $C(G - S) \leq C(G' - S) + 1$, כנדרש.

הגדרה – **עמידות** של גרף:

נאמר שגרף $G := (V, E)$ הוא t-עמיד (*t-tough*) אם כל מפריד בקודקודים $S \subseteq V$ מקיים $|S| \geq t \cdot C(G - S)$.

מה שהראנו בתרגיל 2 זה שכל גרף המילטוני הוא 1-עמיד.

רמת העמידות של G היא ה-t הכי גדול כך ש-G הוא t-עמיד. נסמן $t(G)$.

השערה מפורסמת של *Chvátal* (שעדיין אין לה הוכחה) היא: קיים קבוע C כך שכל גרף G המקיים $t(G) \geq C$ הוא המילטוני.

כמה הערות לגבי עמידות:

גרף יהיה t-עמיד אם כדי לחלק אותו ל-k רכיבים, צריך להוריד לפחות $t \cdot k$ קודקודים. אם נחבר את זה להגדרה לעיל: $C(G-S)=k, |S|=t\cdot k$.

במסלול, הורדת k קודקודים יכולה לתת לנו לכל היותר $k+1$ רכיבים של המסלול.

נסמן t_{PATH} את המספר הממשי הגדול ביותר כך ש:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad k \geq t_{PATH} \cdot (k+1)$$

המקרה $k=1$ נותן חסם $t_{PATH} \leq 1/2$.

במעגל, הורדת k קודקודים יכולה לתת לנו לכל היותר k רכיבים של המסלול.

נסמן t_{CYCLE} את המספר הממשי הגדול ביותר כך ש:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad k \geq t_{CYCLE} \cdot (k)$$

המקרה $k=1$ נותן חסם $t_{CYCLE} \leq 1$.

תרגיל 3

טענה: לכל גרף $G := (V,E)$ מתקיים $t(G) \leq \kappa(G)/2$.

אם G לא קשיר, נקבל $t(G)=\kappa(G)=0$. נניח ש-G קשיר.

לכל S מפרידה בקודקודים, מתקיים $C(G-S) \geq 2$.

מההגדרה של $t(G)$, מתקיים לכל S:

$$|S| \geq t(G) \cdot C(G-S)$$

ובפרט, עבור $|S| = \kappa(G)$. אז מתקיים:

$$t(G) \leq \frac{|S|}{C(G-S)} \leq \frac{\kappa(G)}{2}$$

כנדרש.

תרגיל 4

בהינתן גרף G, נוסיף צלעות שמחברות קודקודים שאין ביניהם צלע ושסכום הדרגות שלהם הוא לפחות n.

למה: התהליך המתואר מפיק את אותו הגרף, לא משנה באיזה סדר לקחנו את הקודקודים.

הגרף המתקבל נקרא **הסגור** של G ומסומן $CL(G)$.

משפט *Bondi-Chvátal*: G הוא המילטוני אמ"מ $CL(G)$ הוא המילטוני.

נשתמש במשפט הזה כדי להוכיח שכל גרף $G := (V,E)$ על $n \geq 3$ קודקודים שמקיים $\delta(G) > n/2$ הוא קשיר-המילטונית.

ניקח $u,v \in V$ כלשהם. אנחנו רוצים להראות שיש מסלול $v \rightsquigarrow u$ המילטוני.

נגדיר גרף G':

$$V(G') := V(G) \cup \{w\}, \qquad E(G') := E(G) \cup \{uw, vw\}$$

בעצם, נוסיף קודקוד ונחבר אותו ל- u,v.

ב-G יש מסלול uv המילטוני אמ"מ G' הוא המילטוני.

כי אם ב-G יש מסלול כזה אז הצלעות uw, vw סוגרות מעגל. ואם יש מעגל המילטוני ב-G', אז זה נשאר מסלול uv המילטוני אחרי הורדת uw, vw.

לפי משפט *Bondi-Chvátal*, G' המילטוני אמ"מ $CL(G')$ המילטוני.

אז נראה ש- $CL(G')$ ונסיים.

לפי ההנחה ש- $\delta(G) > n/2$, נקבל שלכל x,y מתקיים:

$$\deg_G x + \deg_G y > \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$$

כלומר:

$$\deg_G x + \deg_G y \geq n + 1 = v(G')$$

אז כשנבצע את תהליך הוספת הצלעות על G', כל הקודקודים של G מקיימים שסכום הדרגות שלהם הוא לפחות $v(G')$. אז נוסיף צלעות בין כולם.

כלומר, $CL(G')[V(G)] \cong K_{v(G)}$. הקודקודים של G מהווים קליקה ב-$CL(G')$.

מכיוון ש- $E(G') \subseteq E\big(CL(G')\big)$, נקבל ש- $\{uw, vw\} \subseteq E\big(CL(G')\big)$.

אז $CL(G')$ הוא המילטוני: נתחיל מ-u, נעשה מעגל המילטוני ל-v דרך קודקודי G (כי זה קליקה), ונסיים עם uw, wv.

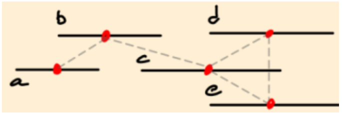
אז לפי משפט *Bondi-Chvátal*, G' המילטוני.

אז ב-G יש מסלול uv המילטוני, כנדרש.

Graph colorings

תרגיל 1

בהינתן קבוצת אינטרוולים ב- $\mathbb{R}^1$, נגדיר את הגרף $G(I)$ ע"י $V\big(G(I)\big) = I$, ונחבר שני קודקודים אם האינטרוולים שלהם חופפים.



גרף G שיש לו ייצוג באינטרוולים ייקרא גרף אינטרוולים.

טענה: בכל גרף אינטרוולים, $\chi(G) = \omega(G)$. מספר הצביעה שווה גודל הקליקה הכי גדולה.

הוכחה: נסמן $\chi \coloneqq \chi(G), \omega \coloneqq \omega(G)$. ראשית, נשים לב ש- $\chi \geq \omega$ כי הקליקה דורשת ω צבעים. אז מספיק להוכיח $\chi \leq \omega$.

ניזכר באלגוריתם צביעה חמדן: נעבור על הקודקודים בסדר כלשהו, ולכל קודקוד ניתן את הצבע הכי נמוך שלא קיים באף שכן שלו.

נסדר את הקודקודים לפי נקודות ההתחלה שלהם. אם יש שניים או יותר שמתחילים באותה נקודה, נבחר שרירותית ביניהם.

נתבונן בקודקוד שייצבע בצבע הכי גדול – נגיד, k. זה אומר שכל הצבעים $[k-1]$ נמצאים בשכנים שלו. ושהוא חלק מקליקה בגודל k.

טריוויאלית, $\chi \leq k$. וגם טריוויאלית, $k \leq \omega$. אז $\chi \leq \omega$, כנדרש.

תרגיל 2

יהי G גרף שבו, המעגלים האי-זוגיים שלו "חותכים בזוגות בקודקודים". כלומר, כל שני מעגלים חולקים לפחות קודקוד אחד.

טענה: $\chi(G) \leq 5$.

אינטואיציה: לכאורה, אם יש לי הרבה צלעות שחולקים קודקודים, זה יקשה על הצביעה. אבל הדרישה שכל שני מעגלים יחלקו קודקוד דווקא מגבילה את כמות המעגלים, שזה נוח לצביעה.

נסמן $\chi \coloneqq \chi(G)$.

הוכחה א: נוכל להניח שיש ב-G מעגלים אי-זוגיים, כי אחרת $\chi \leq 2$. יהי C המעגל האי-זוגי הקצר ביותר ב-G.

נוכל להניח ש- $\chi(G-C) \leq 2$. כי אחרת, יש ב- $G-C$ מעגל אי-זוגי שלא נחתך עם C. אז $G-C$ הוא 2-צביע.

המינימליות של C גוררת ש-C הוא מעגל פשוט (ללא מיתרים). אז C הוא 3-צביע.

נצבע את $G-C$ בשני צבעים, ואת C בעוד 3 צבעים. כנדרש.

הוכחה ב: נב"ש ש- $\chi \geq 6$, תהי צביעה ψ ב-χ צבעים ויהיו $C_1, \dots, C_6$ מחלקות הצביעה לפי ψ.

אם $G[C_1 \cup C_2 \cup C_3]$ לא מכיל מעגל אי-זוגי, אז אפשר לצבוע אותו בשני צבעים, סתירה למינימליות של ψ.

באופן דומה עבור $C_4 \cup C_5 \cup C_6$. כלומר, יש שני מעגלים אי זוגיים שלא חולקים קודקודים, סתירה.

תרגיל 3

טענה:

$$e(G) \geq \binom{\chi(G)}{2}$$

הוכחה: נסמן $\chi \coloneqq \chi(G), e \coloneqq e(G)$.

תהי ψ צביעה אופטימלית של G. נב"ש ש- $e < \binom{\chi}{2}$. אזי, קיימים שני צבעים $i,j \in [\chi]$ שאין אף צלע xy כך ש- $\psi(x) = i,\ \psi(y) = j$.

ומן הסתם אין אף צלע ששני הקודקודים שלה צבועים באותו צבע.

אז, האיחוד של כל הקודקודים שצבועים ב-i וכל הקודקודים שצבועים ב-j מהווה קבוצה בת"ל.

וכולם יכלו להיות צבועים באותו צבע, סתירה לאופטימליות של ψ.

תרגיל 4

תזכורת: $L(G)$ הוא גרף הצלעות של G. כל צלע $e \in E(G)$ הופכת לקודקוד ב- $V(L(G))$, ונחבר כל שני $e \in V(L(G))$ אם הם חלקו קודקוד ב-G.

יהי G גרף ללא קודקודים מבודדים. טענה: אם $L(G)$ הוא קשיר ו-k-רגולרי, אז אחד מהשניים מתקיים:

1. G הוא d-רגולרי, או
2. G הוא דו"צ, ולכל הקודקודים באותו צד יש דרגה זהה.

הוכחה: מכיוון שאין ב-G קודקודים מבודדים, העובדה ש- $L(G)$ קשיר גוררת ש- G קשיר.

לכל $e \coloneqq uv \in E(G)$, מתקיים:

$$\deg_{L(G)} e = \deg_G u + \deg_G v - 2$$

כי סופרים את כל הצלעות שהיו מחוברות ל-u או v, ונוריד את u ו-v עצמם.

מכיוון ש- $L(G)$ הוא d-רגולרי, מתקיים:

$$\deg_G x + \deg_G y - 2 = \deg_{L(G)} xy = \deg_G u + \deg_G v - 2$$

לכל צלע xy. אז עבור צלע vw, נקבל:

$$\deg_G w + \deg_G v - 2 = \deg_G u + \deg_G v - 2 \Longrightarrow \deg_G w = \deg_G u$$

כלומר לכל שני קודקודים ב-G שיש להם שכן משותף, יש אותה דרגה.

אם לכל הקודקודים יש אותה דרגה, G הוא d-רגולרי וסיימנו. נניח ש-G לא d-רגולרי.

אזי, יש ב-G שני קודקודים i, j שמקיימים: $\deg_G i \neq \deg_G j$.

לפי הטענה הקודמת, כל מסלול שמתחיל מ-i חייב להתחלף בין קודקודים בדרגה $\deg_G i$ וקודקודים בדרגה $\deg_G j$.

כלומר, אין מסלול סגור באורך אי-זוגי. שזה שקול לגרף דו"צ.

אז המסלול שתיארנו עובר בין שני צידי הגרף, כלומר כל צד בדרגה אחרת.

תרגיל 5

טענה: בכל גרף,

$$e(L(G)) = \sum\nolimits_{v \in V(G)} \binom{\deg_G v}{2}$$

הוכחה א: נתבונן בקודקוד $v \in V(G)$. כל שתי צלעות שמחוברות אליו מגדירות צלע ייחודית ב-$L(G)$.

הוכחה ב: מתקיים לכל $e \coloneqq uv \in E(G)$ (כמו שהראנו בתרגיל הקודם):

$$\deg_{L(G)} e = \deg_G u + \deg_G v - 2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2 \cdot e(L(G)) \overset{\aleph}{=} \sum_{e \in V(L(G))} \deg_{L(G)} e = \sum_{e \coloneqq uv \in V(L(G))} (\deg_G u + \deg_G v - 2) = \sum_{e \coloneqq uv \in V(L(G))} (\deg_G u + \deg_G v) - 2 \cdot e(G)$$

א – בכל גרף.

נשים לב שמתקיים:

$$\sum_{uv \in E(G)} \deg_G u + \deg_G v = \sum_{x \in V(G)} (\deg_G x)^2$$

למה? נתבונן בקודקוד $x \in V(G)$ כלשהו, בזמן שסוכמים את דרגות הצלעות שלו:

כל קודקוד יופיע פעם אחת בסכום של כל צלע שהוא מופיע בה – שזה $\deg_G x$. ובכל פעם כזאת הוא תורם $\deg_G x$.

אז נוכל לרשום:

$$2\cdot e\big(L(G)\big)=\sum_{e:=uv\in V(L(G))}(\deg_G u+\deg_G v)-2\cdot e(G)\Rightarrow$$

$$e\big(L(G)\big)=\frac{1}{2}\sum_{e:=uv\in V(L(G))}(\deg_G u+\deg_G v)-e(G)=\frac{1}{2}\sum_{x\in V(G)}(deg_G\,x)^2-\frac{1}{2}\sum_{x\in V(G)}deg_G\,x=\sum_{x\in V(G)}\frac{(deg_G\,x)^2-deg_G\,x}{2}$$
$$=\sum_{x\in V(G)}\frac{deg_G\,x\cdot(deg_G\,x-1)}{2}=\sum_{x\in V(G)}\binom{deg_G\,x}{2}$$

כנדרש.

תרגיל 6

טענה: אם $\Delta(G)=3$, אז $\chi'(G)\le 4$.

נוכיח ע"י משפט ברוקס: נראה ש- $\chi\big(L(G)\big)\le 4$. ואז באופן ישיר $\chi'(G)\le 4$, כי $\chi\big(L(G)\big)=\chi'(G)$.

מההנחה ש- $\Delta(G)\le 3$, נקבל ש- $\Delta\big(L(G)\big)\le 4$ (כי כל קודקוד מחובר ל-3 צלעות לכל היותר, אז כל צלע מחוברת ל-4 צלעות לכל היותר).

אז לפי משפט ברוקס, $\chi\big(L(G)\big)\le 4$ אלא אם כן $L(G)$ הוא קליקה או מעגל אי-זוגי.

אם הוא מעגל אי-זוגי, אז $\chi\big(L(G)\big)\le 2$, וסיימנו.

אם הוא קליקה:

אם $L(G)\cong K_5$, אז הוא קשיר ו-k-רגולרי אז לפי 4ב, G הוא בעצמו רגולרי (ואז בגלל ש- $\Delta(G)=3$, הוא 3-רגולרי), או שהוא דו"צ.

אם G דו"צ וגם $\Delta(G)=3$, אז יש בו צד אחד עם לפחות 3 קודקודים (a,b,c), ובצד השני יש קודקוד v שמחובר לשלושתם. בנתיים זה נותן לנו 3 צלעות. כדי ש- $L(G)\cong K_5$, צריך 5 צלעות בדיוק. ואי אפשר להוסיף אותן ל-v, כי אז $\Delta(G)>3$. אז חייבים להוסיף עוד קודקוד u בצד של v, עם צלע ממנו ל-a (בה"כ). ואז יש לנו צלעות au,vb שלא חולקות קודקוד.

אז $L(G)$ לא קליקה. כי כדי ש- $L(G)$ תהיה קליקה, צריך שכל שתי צלעות ב-G יחלקו קודקוד.

אז G הוא 3-רגולרי. הגרף הכי קטן שהוא 3-רגולרי הוא K_4 (אפשר לבדוק את כל הגרפים עם עד 4 קודקודים) שיש לו 6 צלעות. אז $L(G)$ חייב להיות עם 6 קודקודים, סתירה לכך שהוא K_5.

בסה"כ, לפי משפט ברוקס, או ש- $L(G)$ הוא מעגל אי"ז ואז $\chi\big(L(G)\big)\le 2$, או ש- $\chi\big(L(G)\big)\le 4$. כנדרש.

תרגיל 1

יהי K_n.

סעיף א: נניח שהצלעות ממושקלות ע"י $\{1, 2, \dots, k\}$ עבור $k \in \mathbb{N}$ כלשהו. (כלומר, משקלים שלמים כאשר המשקל הגדול הוא k).

טענה: כל מעגל המילטוני הוא k-קירוב לסיור TSP אופטימלי.

ראשית, מעגל המילטוני קיים (כי הגרף הוא קליקה) וכל מעגל המילטוני הוא אכן סיור TSP.

כל מעגל המילטוני הוא באורך n אז המשקל שלו הוא לכל היותר $k \cdot n$. כל סיור TSP הוא באורך לפחות n והמשקל שלו הוא לפחות n. כנדרש.

סעיף ב: נניח שהצלעות ממושקלות ע"י פונקציה w המקיימת:

$$w(v_1, v_k) \leq C \cdot \left(w(v_1, v_2) + \cdots + w(v_{k-1}, v_k)\right)$$

כאשר $(v_1, \dots, v_k)$ הוא מסלול, עבור C ממשי חיובי קבוע כלשהו.

סוג של C-קירוב של אי-שוויון המשולש.

נתאר אלגוריתם $1.5C$-מקרב עבור TSP בגרף כזה.

ניזכר באלגוריתם *Christofides*, אלגוריתם 1.5-מקרב לבעיית *MTSP*. נבצע את אותו האלגוריתם:

אלגוריתם:

1. יהי T עפ"מ של G.
2. תהי O קבוצת הקודקודים ב-T שבעלי דרגה אי"ז.
3. יהי M שידוך מושלם בעל משקל מינימום בגרף $G[O]$ (הגרף המלא על הקודקודים ב-O). מציאת ה-M המינימום היא בעיה ב-P.
4. נוסיף את M ל-T כדי לקבל את $\mathcal{T}$, שהוא אוילרי.
5. נמצא סיור אוילר ε ב- $\mathcal{T}$.
6. נבנה סיור TSP מ- ε ע"י קיצורי דרך.

נוכיח שהאלגוריתם הוא $1.5C$-מקרב.

למה: יהי OPT המשקל של סיור TSP אופטימלי. תהי קבוצה $W \subseteq V(G)$ כך ש- $|W|$ זוגית.

ויהי M שידוך מושלם במשקל מינימום ב- $G[W]$.

אזי, $w(M) \leq C \cdot OPT/2$.

נניח שהלמה נכונה ונוכיח את הקירוב:

כל קיצור דרך נותן C-קירוב למשקל של אותו קטע לפני הקיצור. והמשקל של עפ"מ הוא לכל היותר המשקל של הסיור TSP, כי סיור TSP הוא עץ פורש.

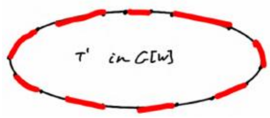
במקרה הגרוע עשינו קיצור דרך לכל צלע בעץ, ואז המשקל של הסיור TSP:

$$W \leq C \cdot w(T) + w(M) \leq C \cdot OPT + C \cdot OPT/2 = 1.5C \cdot OPT$$

נוכיח את הלמה: יהי T סיור TSP אופטימלי, ויהי T' סיור TSP ב- $G[W]$ שהתקבל ע"י קיצורי דרך ב-T.

בגלל החסם של C, נקבל $w(T') \leq C \cdot w(T)$.

מכיוון ש- $|W|$ זוגי, T' הוא מעגל זוגי, כלומר הוא איחוד של שני שידוכים מושלמים (זרים בצלעות) של $G[W]$:



מכיוון ש-M הוא במשקל מינימום ב- $G[W]$, המשקל שלו הוא לכל היותר חצי המשקל של T' (כי T' מורכב משני שידוכים): $w(M) \leq w(T')/2$.

אזי:

$$w(M) \leq w(T')/2 \leq C \cdot w(T)/2 = C \cdot OPT/2$$

כנדרש.

סעיף ג: נניח שהצלעות ממושקלות ע"י $\{1,2,\dots,k\}$ עבור $k \in \mathbb{N}$ כלשהו. נמצא אלגוריתם $\frac{3}{4}k$-מקרב עבור TSP.

נשים לב שמתקיים:

$$w(v_1,v_2) \le \frac{k}{2}\big(w(v_1,v_2)+\dots+w(v_{\ell-1},v_\ell)\big)$$

למה? המקרה הגרוע הוא כש- $w(v_1,v_2)=k$, וש- $w(v_1,v_2)=\dots=w(v_{\ell-1},v_\ell)=1$. ואז,

$$w(v_1,v_2)=k=k\cdot\frac{\ell}{\ell}=\frac{k}{\ell}\cdot\ell=\frac{k}{\ell}\big(w(v_1,v_2)+\dots+w(v_{\ell-1},v_\ell)\big)$$

וזה הכי גדול כאשר $\ell=2$. כי עבור $\ell=1$ זה רק צלע אחת ואז היא לא יכולה להיות גם במשקל k וגם במשקל 1.

אז קיבלנו שזה המקרה של סעיף ב, עם $C=k/2$. ואז האלגוריתם המקרב נותן לנו $\frac{3}{2}\cdot\frac{k}{2}=\frac{3}{4}k$ קירוב, כנדרש.

תרגיל 2

עבור צביעת קודקודים $\psi: V(G)\to\mathbb{N}$, נגדיר:

$$S_\psi \coloneqq \sum_{v\in V(G)}\psi(v)$$

את **הסכום** של הצביעה. עבור גרף G, נגדיר:

$$S(G)\coloneqq \min_\psi S_\psi$$

כלומר, ניקח את הצביעה התקינה שנותנת את הסכום המינימום.

סעיף א: טענה: אם קיימת צביעה כך ש: $S_\psi \le S\in\mathbb{N}$, אז קיימת קבוצת קודקודים $U\subseteq V(G)$ כך ש:

$$|U|\ge\frac{v(G)}{2},\qquad \forall u\in U: \psi(u)\le\frac{2S}{v(G)}$$

נוכיח: נב"ש שהטענה לא נכונה, כלומר לא קיימת קבוצה כזו. נגדיר:

$$U\coloneqq\left\{u\in V(G):\psi(u)\le\frac{2S}{v(G)}\right\}$$

אז לפי ההנחה בשלילה, נקבל ש- $|U|<v(G)/2$. אזי:

$$S\ge S_\psi=\sum_{v\in V(G)}\psi(v)=\underbrace{\sum_{u\in U}\psi(u)}_{\ge 0}+\sum_{v\notin U}\psi(v) >^{\text{א}} 0+\sum_{v\notin U}\frac{2S}{v(G)}\ge^{\text{ב}}\frac{v(G)}{2}\frac{2S}{v(G)}=S$$

א) כי $\psi(v)>\frac{2S}{v(G)}$, לכל $v\notin U$.
ב) כי $|U|<v(G)/2$.

בסה"כ קיבלנו $S>S$, סתירה.

סעיף ב: טענה: בהינתן צביעה ψ שמקיימת $S_\psi\le S$, קיימת קבוצת קודקודים בגודל לפחות $v(G)/2$ שיש בה לכל היותר $2S/v(G)$ צבעים.

הוכחה: לפי סעיף א, הקבוצה U מקיימת את התנאי.

סעיף ג: יהי $\alpha\ge 1$. טענה: אם יש אלגוריתם פולינומי α-מקרב לחישוב $S(G)$, אז יש אלגוריתם פולינומי $O(\alpha\log n)$-מקרב לחישוב $\chi(G)$.

הוכחה: יהי A אלגוריתם כמתואר. נתאר אלגוריתם לחישוב $\chi(G)$:

1. נשתמש ב-A כדי למצוא צביעה ψ שמקיימת $S_\psi\le\alpha\cdot S(G)$.
2. לפי סעיף ב, בצביעה הזו, לפחות $v(G)/2$ מהקודקודים צבועים ע"י לכל היותר $2\alpha S/v(G)$ צבעים. ניקח את U להיות הקבוצה הזו.

3. נגדיר $G := G - U$.
4. אם $V(G) > 0$, נחזור לשלב 1. אחרת, נעצור.
בכל איטרציה (שחוזרים ל-1), משתמשים בצבעים חדשים.

בכל איטרציה, מוחקים לפחות $v(G)/2$ קודקודים. אז יש $O(\log n)$ איטרציות.

עבור איטרציה i, נסמן: G_i, ψ_i את הגרף והצביעה באותו שלב.

מכיוון ש- $S(G) \le \chi(G) \cdot v(G)$ (המספר הכי גדול של צבע, כפול מספר הקודקודים), מתקיים לכל i: $S(G_i) \le \chi(G) \cdot v(G_i)$.

בנוסף, $S_{\psi_i} \le \alpha \cdot S(G_i)$ מהגדרת A. בסה"כ, מספר הצבעים בצביעה המתקבלת היא:

$$\sum_{i=1}^{O(\log n)} 2 \cdot \frac{S_{\psi_i}}{v(G_i)} \le \sum_{i=1}^{O(\log n)} \frac{2\alpha\chi(G)v(G_i)}{v(G_i)} = \sum_{i=1}^{O(\log n)} 2\alpha\chi(G_i) = 2\alpha\chi(G) \sum_{i=1}^{O(\log n)} 1 = 2\alpha O(\log n)\chi(G) = O(\alpha \log n)\chi(G)$$

כנדרש.

תרגיל 3

בהינתן גרף G עם $\alpha(G) \ge \frac{3}{4}v(G)$, נתאר אלגוריתם למציאת קבוצה בת"ל בגודל $\frac{v(G)}{2}$.

מכיוון ש- $\alpha(G) = v(G) - \tau(G)$, נקבל ש- $\tau(G) \le v(G)/4$.

נשתמש באלגוריתם 2-מקרב לכיסוי מינימום ונקבל כיסוי בגודל לכל היותר $v(G)/2$. והקבוצה המשלימה היא קבוצה בת"ל בגודל לפחות $v(G)/2$.

תרגיל 4

יהי $0 < \beta \le 1$. טענה: אם יש אלגוריתם פולינומי β-מקרב לחישוב $\alpha(G)$, אז יש אלגוריתם $O\left(\frac{\ln n}{\beta}\right)$-מקרב לחישוב $\chi(G)$.

הוכחה: יהי A אלגוריתם כמתואר, ונתאר אלגוריתם לחישוב $\chi(G)$:

1. נגדיר $c := 1$, הצבע ההתחלתי.
2. כל עוד $V(G) \neq \emptyset$, נבצע:
   a. $I := A(G)$.
   b. נצבע את הקודקודים של I בצבע c.
   c. $c := c + 1$.
   d. $G := G - I$.
3. נחזיר את הצביעה המתקבלת.

הצביעה תקינה כי כל פעם צובעים קבוצה בת"ל, בצבע חדש.

בכל איטרציה השתמשנו בצבע אחד, אז נחשב את מספר האיטרציות.

נסמן G_i את הגרף שנשאר בסוף האיטרציה ה-i. נגדיר $n := v(G), n_i := v(G_i)$. מכיוון שכל מחלקת צביעה היא קבוצה בת"ל, מתקיים:

$$\alpha(G) \ge \frac{n}{\chi(G)}$$

נוכל לבנות את נוסחת הנסיגה הבאה:

$$n_0 = n$$

$$n_1 \le^{\text{א}} n_0 - \beta\alpha(G) \le^{\text{ב}} n_0 - \beta\frac{n_0}{\chi(G_0)} = n - \frac{\beta n}{\chi(G)} = n\left(1 - \frac{\beta}{\chi(G)}\right)$$

א. כי בשלב הראשון מורידים לפחות קבוצה בגודל $\beta\alpha(G)$.
ב. כי $\alpha(G_0) \ge n_0/\chi(G_0)$.

$$n_2 \le n_1 - \beta\alpha(G_1) \le n_1 - \beta\frac{n_1}{\chi(G_1)} =^{\text{א}} n_1\left(1 - \frac{\beta}{\chi(G_1)}\right) \le^{\text{ב}} n_1\left(1 - \frac{\beta}{\chi(G)}\right) \le n\left(1 - \frac{\beta}{\chi(G)}\right)\left(1 - \frac{\beta}{\chi(G)}\right) = n\left(1 - \frac{\beta}{\chi(G)}\right)^2$$

א. גורם משותף.

ב. כי $\chi(G_1) \le \chi(G)$.

ובאינדוקציה, נוכיח ש:

$$n_i \le n\left(1-\frac{\beta}{\chi(G)}\right)^i$$

בסיס - $i = \{0,1,2\}$ מתקיים. צעד:

$$n_i \le n_{i-1} - \beta\alpha(G_{i-1}) \le n_{i-1} - \beta\frac{n_{i-1}}{\chi(G_{i-1})} = n_{i-1}\left(1-\frac{\beta}{\chi(G_{i-1})}\right) \le n_{i-1}\left(1-\frac{\beta}{\chi(G)}\right) \overset{\text{א}}{\le} n\left(1-\frac{\beta}{\chi(G)}\right)^{i-1}\left(1-\frac{\beta}{\chi(G)}\right) = n\left(1-\frac{\beta}{\chi(G)}\right)^i$$

א. מהנ"א.

כמה איטרציות יהיו? נעצור כש- $n_i < 1$. נגדיר $r \coloneqq \beta/\chi(G)$, אנחנו מחפשים את ה-$i$ הכי קטן שעבורו מתקיים:

$$n(1-r)^i < 1 \Rightarrow \left(1-\frac{1}{r}\right)^i < \frac{1}{n}$$

נסמן $i \coloneqq kr$, עם $k \coloneqq k(n)$ שנמצא בהמשך. אזי:

$$\left(1-\frac{1}{r}\right)^i = \left(\left(1-\frac{1}{r}\right)^r\right)^k \le \left(\left(e^{-\frac{1}{r}}\right)^r\right)^k = (e^{-1})^k \le e^{-k}$$

כדי שיתקיים $e^{-k} < n^{-1}$, מספיק לקבוע $k \coloneqq \Omega(\ln n)$. בסה"כ, נקבל $n_i < 1$ עבור:

$$i = \Omega(\ln n)\cdot r = \Omega\left(\frac{\ln n}{\beta}\right)\chi(G)$$

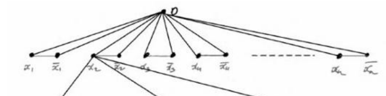
כנדרש.

תרגיל 5

נסמן f את הרדוקציה הפולינומית $\text{NAE-3-CNF-SAT} \le_p 3\text{COL}$.

סעיף א: נוכיח שלכל φ נוסחת *3-CNF*, מתקיים $\chi\big(f(\varphi)\big) \le 4$.

ניזכר במבנה של $f(\varphi)$:



נצבע את D בצבע 1. את כל ה"נדנדות" אפשר לצבוע בצבעים 2,3. כל קודקוד של משולש מחובר לכל היותר לקודקוד אחד של נדנדה אחת, אז אפשר לצבוע אותו בצבע של הקודקוד השני של הנקודה. נעשה את זה לשני קודקודים מכל משולש. את הקודקוד השלישי, נצבע בצבע 4. כנדרש.

סעיף ב: נוכיח שאם $P \ne NP$, אז אין אלגוריתם $\left(\frac{4}{3}-\varepsilon\right)$-מקרב לחישוב $\chi(G)$, לאף $\varepsilon > 0$.

כלומר, שאלגוריתם $\frac{3}{4}$-מקרב זה הכי טוב שאפשר בזמן פולינומי, אם $P \ne NP$. כלומר שאם נמצא אלגוריתם פולינומי $\left(\frac{4}{3}-\varepsilon\right)$-מקרב לחישוב $\chi(G)$, אז $\text{NAE-3-CNF-SAT} \in P$, ואז $P = NP$.

בסעיף א הוכחנו ש- $\chi\big(f(\varphi)\big) \le 4$. ב-$f(\varphi)$ יש משולשים, אז $\chi\big(f(\varphi)\big) \ge 3$. אז מנכונות הרדוקציה נקבל:

$$\chi\big(f(\varphi)\big) = 3 \Leftrightarrow f(\varphi) \in 3COL \Leftrightarrow \varphi \in \text{NAE-3-CNF-SAT}$$

$$\chi\big(f(\varphi)\big) = 4 \Leftrightarrow f(\varphi) \notin 3COL \Leftrightarrow \varphi \notin \text{NAE-3-CNF-SAT}$$

אז הבעיה הבאה היא NPH:

בהינתן G, נקבע האם $\chi(G) \leq 3$ או $\chi(G) \geq 4$.

יהי $\varepsilon > 0$ כלשהו ונניח שקיים אלגוריתם פולינומי $\left(\frac{4}{3}-\varepsilon\right)$-מקרב לחישוב $\chi(G)$. נקרא לו A.

אזי, האלגוריתם הבא הוא אלגוריתם פולינומי לבעיית NAE-3-CNF-SAT:

בהינתן φ נוסחת *3-CNF*, נבנה את הגרף $G \coloneqq f(\varphi)$ ונשתמש באלגוריתם A כדי לקבל קירוב ל-$\chi(G)$.

אם הקירוב הוא $\chi(G) \leq 4-3\varepsilon$, אז $\varphi \in$ NAE-3-CNF-SAT. אחרת, $\varphi \notin$ NAE-3-CNF-SAT.

נוכיח נכונות: אם $\varphi \in$ NAE-3-CNF-SAT, אז $\chi(G) = 3$ ואז הקירוב נותן:

$$\chi(G) \leq \left(\frac{3}{4}-\varepsilon\right) \cdot 3 = 4-3\varepsilon$$

אחרת, הקירוב יהיה גדול יותר.

תרגיל 6

נצייר גרף עם משקלים על הקודקודים, כך שאם נריץ אלגוריתם 2-מקרב עבור הגרסה הלא-ממושקלת (שמבוסס על שידוך מקסימום), הכיסוי המתקבל לא יהיה 2-קירוב עבור הכיסוי **הקל** ביותר.

ניזכר באלגוריתם ואיך הוא עובד (קובץ 14, *Approximating min VC*):

ניזכר ששידוך מקסימום היא בעיה ב-P. וגם, שגודל הכיסוי המינימום $\tau(G)$ הוא לפחות גודל השידוך המקסימום $\nu(G)$.

אז נוכל למצוא שידוך מקסימום בגרף, ולקחת את הקודקודים של הצלעות של השידוך.

כי זה בוודאות מכסה את כל הצלעות (אם יש צלע שלא מכוסה, אפשר להוסיף אותה לשידוך).

מספר הצלעות הוא לכל היותר כגודל הכיסוי ($\nu(G) \leq \tau(G)$), ולקחנו 2 קודקודים לכל צלע.

כלומר לקחנו לכל היותר $2 \cdot \tau(G)$ קודקודים. פי 2 מגודל הכיסוי המינימום, כלומר 2-קירוב.

האלגוריתם לוקח את השידוך המקסימום. נבנה גרף שבו יש שידוך מקסימום יחיד, שהקודקודים שלו במשקל גבוה.

בכל גרף שיש בו שידוך מושלם, ניקח את כל הקודקודים. נצייר גרף דו"צ, שבו הקודקודים ב-A במשקל גדול יותר מהקודקודים של B. הכיסוי המינימום הוא רק הקודקודים של B. אפילו שני קודקודים יספיקו:

השידוך הוא הצלע, והאלגוריתם ייקח את שני הקודקודים. המשקל הוא 3, שזה 3 פעמים המשקל של הכיסוי המינימום (רק הקודקוד 1).

תרגיל 7

תזכורת:

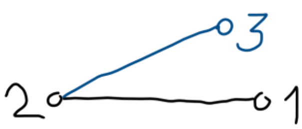
$\alpha(G)$ – גודל הקבוצה הבת"ל המקסימום בגרף. $\tau(G)$ – גודל הכיסוי בקודקודים המינימום בגרף.

יהי A האלגוריתם למציאת כיסוי מינימום ע"י השידוך המקסימום. עם הזהות $\alpha(G)+\tau(G)=\nu(G)$ נציע את האלגוריתם B הבא למציאת קבוצה בת"ל:

1. $C \coloneqq A(G)$. הכיסוי המינימום המתקבל מהאלגוריתם של השידוך.
2. נחזיר את $V(G) \setminus C$. (ניזכר שקבוצה S היא בת"ל אמ"מ $V(G) \setminus S$ היא כיסוי).

נצייר גרף על $n+1$ קודקודים שמקיים $\alpha(G) > n/2$, שעבורו B יחזיר קבוצה בגודל 1.

אנחנו בעצם צריכים ש-A ייתן קבוצה בגודל n. כלומר שיהיה קודקוד אחד בלבד שלא בשידוך. נרחיב את הגרף מהשאלה הקודמת:



(המספרים הם מספרי קודקודים, לא משקלים). הקבוצה הבת"ל המקסימום היא $\{1,3\}$. מתקיים $n=2$, $\alpha(G) > 1 = n/2$.

השידוך המקסימום יהיה אחת הצלעות, אז הקבוצה הבת"ל המתקבלת תהיה 1 או 3.

אגב, הפתרון בקובץ מציע לקחת גרף $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, ולהוסיף לו קודקוד אחד. מה שעשינו כאן זה אותו דבר עם $n = 2$.

תרגיל 8

גרף G ייקרא חסר משולשים אם אין בו אף עותק של K_3. כלומר, אין אף קבוצה של 3 קודקודים שיש ביניהם 3 צלעות.

נתאר בעיה: בהינתן גרף G, מה המספר הנמוך ביותר של צלעות שאפשר להוריד כדי לקבל גרף חסר משולשים.

נציע אלגוריתם 3-מקרב פולינומי. כלומר, אם ב-G אפשר לקבל גרף חסר משולשים ע"י הסרת k צלעות, האלגוריתם שלנו מוצא קבוצה של לכל היותר $3k$ צלעות שאם נוריד אותן נקבל גרף חסר משולשים.

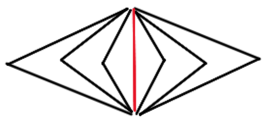
נעבור על כל ה- $\binom{n}{3}$ קבוצות של 3 קודקודים. לכל קבוצה, נבדוק אם היא משולש. אם כן, נוריד את הצלעות.

האלגוריתם פולינומי:

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \le n^3$$

והוא בוודאות מספק גרף חסר משולשים. נוכיח את איכות הקירוב:

קודם, אינטואיציה. למה אי אפשר להוריד צלע אחת מכל משולש? כי לדוגמה בגרף כזה:

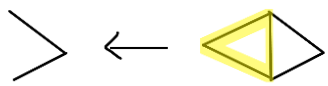


נחשוב על גרף כזה עם $2n + 1$ צלעות (זו דוגמה עם $n = 6$). אם מכל משולש נוריד את אחת הצלעות השחורות, נקבל קבוצה של n צלעות. אבל הפיתרון האופטימלי הוא צלע אחת.

מצד שני, בגרף שהוא רק משולשים מבודדים, הפיתרון האופטימלי הוא צלע אחת מכל משולש. והפיתרון שלנו מוריד את כל הצלעות. שזה בדיוק 3-קירוב.

איך נשווה את הפיתרון שלנו לפיתרון האופטימלי?

נשים לב שבכל גרף, הצלעות שאנחנו מורידים מהווים קבוצה של משולשים זרים-בצלעות. כי אם יש משולשים חופפים ב-G, נוריד רק אחד מהם:



נסמן S את המשולשים שהאלגוריתם מוריד. ונשים לב, שכל פיתרון (גם האופטימלי) צריך להוריד לפחות צלע אחת מכל משולש כזה. כלומר $OPT \ge |S|$.

האלגוריתם מוריד $3|S|$ צלעות, כנדרש.

תרגיל 9

ננסה גרסה ממושקלת של תרגיל 8. יהי גרף $G := (V, E)$ ותהי $w: E \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ פונקציית משקל אי שלילית על הצלעות. מתוך כל הקבוצות $R \subseteq E$ שעבורן $G - R$ הוא חסר משולשים, נרצה למצוא את הקבוצה במשקל מינימום.

סעיף א: נראה דוגמה שעבורה הפיתרון החמדן מתרגיל 8 לא נותן 3-קירוב.

הפיתרון שלנו מוריד משולשים שלמים. נצייר גרף של משולשים מבודדים (ככה שהאלגורית יוריד את כולם):

הפיתרון האופטימלי הוא להוריד רק את צלע 1, אבל האלגוריתם שלנו יוריד את כולם והמשקל יהיה 5, פי 5 מהמשקל האופטימלי.

סעיף ב: נציע אלגוריתם LP למציאת 3-קירוב לבעיה.

תרגילים 10, 11, 12, 13

מופיעים בתרגול 9.

תרגיל 14

בעיית שידוך במשקל מקסימום: יהי גרף $G \coloneqq (V, E)$ ותהי $w: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ פונקציית משקל אי שלילית על הצלעות. אלגוריתם מקרב:

1. $M \coloneqq \emptyset$.
2. כל עוד $E \neq \emptyset$:
   a. ניקח את uv, הצלע הכבדה ביותר.
   b. $M \coloneqq M \cup \{uv\}$.
   c. $G \coloneqq G - uv - \{xy \in E: \{x, y\} \cap \{u, v\} \neq \emptyset\}$. (נוריד את הצלע הכבדה וכל הצלעות שחולקות איתה קודקוד).
3. נחזיר את M.

נוכיח שהאלגוריתם הוא 0.5-מקרב:

נסמן M_g, M_o את הפתרונות החמדן והאופטימלי. ונסמן: $F_1 \coloneqq M_o \cap M_g,\ F_2 \coloneqq M_g \setminus M_o,\ F_3 \coloneqq M_o \setminus M_g$. ונשים לב ש- $M_o = F_1 \dot{\cup} F_3$.

לכל צלע $e \in F_3$, יש צלע $e' \in F_2$ סמוכה ל-e כך ש- $w(e) \geq w(e')$. כי אם $e' \in F_2$, זה אומר שלא לקחנו אותה לפתרון החמדן כי לקחנו צלע שסמוכה אליה, כי הצלע הסמוכה הייתה באותו משקל או יותר. אז נוכל להגדיר מיפוי:

$$f: F_3 \to F_2, \qquad f(e) \coloneqq e'$$

ונשים לב שכל צלע $e' \in F_2$ סמוכה לכל היותר ל-2 צלעות ב-F_3, כי אם לקחנו צלע סמוכה מכל צד לפיתרון האופטימלי, אי אפשר לקחת יותר כי אז זה לא שידוך. אז לכל צלע $e' \in F_2$ יש לכל היותר 2 צלעות $e \in F_3$ כך ש- $f(e) \coloneqq e'$. ולכן:

$$w(F_3) = \sum_{e \in F_3} w(e) \leq \sum_{e \in F_3} w\big(f(e)\big) \leq 2 \sum_{e' \in F_2} w(e')$$

הסכום הראשון: נעבור על כל הצלעות שהן באופטימלי ולא בחמדן, וניקח את המשקל של הצלע הזו.

הסכום השני: נעבור על כל הצלעות שהן באופטימלי ולא בחמדן, ולכל אחת ניקח צלע שבגללה הצלע לא בחמדן. וניקח את המשקל של הצלע הזו.

הסכום השלישי: נעבור על כל הצלעות שהן בחמדן ולא באופטימלי. לכל צלע כזו יש לכל היותר 2 צלעות באופטימלי שלא בחמדן ששולחים אליה. אז פספסנו לכל היותר צלע אחת ב- F_3 לכל צלע ב- F_2. והמשקל שאנחנו סוכמים זה המשקל של הצלע ב- F_2, ככה שזה לא משנה איזה צלע ב- F_3 פספסנו.

כלומר:

$$\frac{1}{2} w(f_3) = \frac{1}{2} \sum_{e \in F_3} w(e) \leq \sum_{e' \in F_2} w(e') = w(F_2) \Longrightarrow w(F_2) \geq \frac{w(F_3)}{2}$$

נוכל לרשום:

$$w\big(M_g\big) = w(F_1) + w(F_2) \geq w(F_1) + \frac{w(F_3)}{2} \geq \frac{w(F_1)}{2} + \frac{w(F_3)}{2} = \frac{w(F_1) + w(F3_3)}{2} = \frac{w(M_o)}{2}$$

כנדרש.

תרגיל 15

הגדרה: **קבוצה שלטת** היא קבוצה של קודקודים כך שכל קודקוד בגרף הוא שכן של הקבוצה (או בקבוצה עצמה).

נתון אלגוריתם לבעיית *min dominating set*:

1. נאתחל $D \coloneqq \emptyset$.
2. כל עוד $V(G) \neq \emptyset$:
   a. נבחר $u \in V(G)$ שרירותי.
   b. נגדיר $D \coloneqq D \cup \{u\}$.
   c. נגדיר $G \coloneqq G - \{u \cup N\_G(u)\}$. (נסיר את u וכל השכנים שלו).
3. נחזיר את D.

נוכיח שהאלגוריתם הוא <u>לא</u> $(\log n)$-מקרב:

נתאר גרף שבו יש פיתרון מאוד יעיל (נגיד, קודקוד יחיד) אבל האלגוריתם יכול לתת פתרון גרוע. נציע גרף כוכב: $K_{1,n-1}$. אם הקודקוד הראשון שנבחר הוא לא האמצעי (שיש לו רק הסתברות $1/n$ להיבחר), אז נצטרך לקחת את כל שאר הקודקודים. גודל הפיתרון יהיה $n-1$, במקום 1.

זה לא $(\log n)$-מקרב. זה בקושי *n*-מקרב.

תרגיל 16

סעיף א: נוכיח שאם קיים אלגוריתם *k*-מקרב עבור בעיית *min set cover*, אז יש אלגוריתם *k*-מקרב לבעיית *min dominating set*.

נתאר רדוקציה: $\text{MIN-DS} \leq_p \text{MIN-SC}$:

בהינתן בעיית *min-dc*: (G,k) כאשר השאלה היא האם קיימת בגרף G קבוצה שלטת בגודל לכל היותר k, נתאר פונקציה שמעבירה את הבעיה לבעיה מסוג *min-sc*: (H,k), כאשר H הוא היפרגרף והשאלה האם קיימת קבוצת צלעות שמכסה את כל הקודקודים, בגודל לכל היותר k.

נסמן: $\Gamma_v \coloneqq N_G(v) \cup \{v\}$. נתאר את ההיפרגרף H: $V(H) \coloneqq V(G),\ E(H) \coloneqq \{\Gamma_v : v \in V(G)\}$.

$$f\big((G,k)\big) \coloneqq (H,k)$$

נכונות הרדוקציה: קבוצה $S \subseteq V(G)$ היא שלטת אמ"מ הקבוצה $\{\Gamma_v : v \in S\}$ היא כיסוי ב-H.

ומהגדרת הרדוקציה, גודל הפתרונות האופטימליים של הבעיות שווה. אז הקירוב הוא אותו קירוב.

סעיף ב: בעיית *min-connected-dominating-subgraph* (תת-גרף קשיר שולט מינימום): בהינתן גרף G, נרצה למצוא תת-גרף $S \subseteq G$ כך ש:

1. S קשיר,
2. $V(S)$ קבוצה שלטת ב-G,
3. הגודל $e(S)$ (מספר הצלעות ב-S) הוא מינימום.

בהינתן גרף קשיר G, ואלגוריתם *k*-מקרב לבעיית *SC*, נתאר אלגוריתם *6k*-מקרב לבעיית *MCDS*. רמז: עצי שטיינר.

האלגוריתם ה *k*-מקרב ל- *SC* נותן לנו (לפי סעיף א) אלגוריתם *k*-מקרב לבעיית *DS*. נשתמש באלגוריתם *k*-מקרב לבעיית *DS* כדי למצוא קבוצה שלטת, *D*. עכשיו, אנחנו צריכים למצוא תת-גרף על הקודקודים של *D*.

יהי S עץ שטיינר 2-מקרב ל-$V(D)$, יהי T עץ שטיינר אופטימלי ל-$V(D)$, ויהי C פתרון אופטימלי ל-*MCDS*. נראה ש- $e(S) \leq 6k \cdot e(C)$.

נשים לב ש- $e(T) \leq e(C) + |D|$, כי כל קודקוד ב-$V(D)$, או שהוא שייך ל-$V(C)$ או שהוא שכן של קודקוד ב-$V(C)$. אז ההרחבה מ-C ל-T דורשת לכל היותר צלע אחת לכל קודקוד ב-D. אזי:

$$e(S) \leq 2 \cdot e(T) \leq 2 \cdot (e(C) + |D|) \leq 2 \cdot e(C) + 2 \cdot k \cdot OPT_{DS}$$

כאשר OPT_{DS} הוא מחיר הפיתרון האופטימלי ל-*DS*.

ונשים לב ש- $OPT_{DS} \leq e(C) + 1$, כי כל תת גרף שולט הוא לא עץ, והקודקודים שלו הם קבוצה שלטת. אז:

$$\begin{aligned} 2 \cdot e(C) + 2 \cdot k \cdot OPT_{DS} &\leq 2 \cdot e(C) + 2 \cdot k \cdot (e(C)+1) = 2e(C) + 2ke(C) + 2k \leq 2e(C) + 2ke(C) + 2ke(C) \\ &= e(C) \cdot (2+4k) \leq e(C) \cdot (2k+4k) = 6ke(C) \end{aligned}$$

כנדרש.

סעיף ג: בעיית *travelling through neighborhoods* – נסיעה דרך שכונות:

נתון גרף G. סיור שכונות של G הוא C, הילוך סגור (כמו מעגל אבל מותר לחזור על קודקודים, לא על צלעות) ב-G שמקיים את התכונה:

$$\forall v \in V(G):\ V(C) \cap (N_G(v) \cup \{v\}) \neq \emptyset$$

כלומר, כל קודקוד הוא או בעצמו בהילוך או שיש לו שכן בהילוך. אנחנו מחפשים הילוך כזה באורך מינימום. נתאר אלגוריתם $O(\log n)$-מקרב.

רמזים: קיים אלגוריתם $O(\log n)$-מקרב לבעיית *SC*, ונשתמש ב-*DFS* על תת-גרף קשיר שולט.

לפי האלגוריתם המקרב לבעיית *SC*, עם סעיף א, קיים אלגוריתם מקרב לבעיית *MCDS*. יהי $S \subseteq G$ תת-גרף כזה.

ניקח את D, הילוך *DFS* על S. D הוא הילוך שכונות על G. נוכיח את איכות הקירוב:

הילוך שכונות (*NW*) אופטימלי על G הוא גם תת-גרף קשיר שולט (*MCDS*) של G. אז $OPT_{MCDS} \leq OPT_{NW}$.

בהגדרה, $e(S)=O(\log n)OPT_{MCDS}$ (כי זה מבוסס על האלגוריתם שנתון לנו, $O(\log n)$-מקרב). וגם, מתקיים $e(D)=2e(S)$ (הולכים על כל צלע בדיוק פעמיים, כי זה DFS על עץ). בסה"כ:

$$e(D)=2e(S)=O(\log n)OPT_{MCDS}\le O(\log n)OPT_{NW}$$

כנדרש.

תרגיל 17

בעיית *hitting set*: נתונה קבוצה $P:=\{p_1,\dots,p_n\}$, ואוסף של תתי-קבוצות לא-ריקות של P: $\{S_1,\dots S_m\}\subseteq\mathcal{P}(P)$. כך ש- $\forall i\in[m]: |S_i|\le 4$.

קבוצת *hitting set* עבור $\{S_i\}_{i\in[m]}$ היא קבוצה $H\subseteq P$ שמקיימת: $\forall i\in[m]: |H\cap S_i|\ge 1$. אנחנו מחפשים קבוצה HS בגודל מינימום.

זה פשוט בעיית *min-SC* עבור היפר-גרפים.

סעיף א: נתאר ניסוח ILP לבעיה: לכל איבר p נגדיר משתנה $x_p\in\{0,1\}$. אנחנו מחפשים:

$$\min\sum_{p\in P}x_p\,,\qquad \forall j\in[m]:\ \sum_{p\in S_j}x_p\ge 1$$

כמה שפחות איברים, כך שלכל קבוצה S יש איבר ב-H.

סעיף ב: נתאר 4-קירוב עבור הבעיה ב-LP:

$$\min\sum_{p\in P}x_p\,,\qquad \forall j\in[m]:\ \sum_{p\in S_j}x_p\ge 1,\qquad x_p\in[0,1]$$

$$H:=\left\{p\in P:\ x_p\ge 1/4\right\}$$

נוכיח את הקירוב: לכל $p\in P$, נגדיר:

$$y_p:=\begin{cases}1, & x_p\ge 1/4\\ 0, & else\end{cases}$$

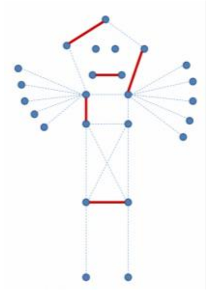
ואז, $y_p\le 4x_p$ לכל $p\in P$. ונוכל לרשום:

$$|H|=\sum_{p\in P}y_p\le\sum_{p\in P}4x_p=4\sum_{p\in P}x_p=4\cdot OPT_f\le 4\cdot OPT$$

כנדרש.

Edge-dominating sets

קבוצת צלעות שלטת בגרף G היא קבוצה של צלעות $D \in E(G)$ כך שלכל $e \in E(G)$, מתקיים $e \in D$ או שקיימת $e' \in D$ שחולקת קודקוד עם e.



נשקול את האלגוריתם הבא: קלט – גרף G, פלט – קבוצת צלעות שלטת.

1. יהי $v \in V(G)$ ויהי T עץ DFS שמושרש ב-v.
2. אם ל-T יש עומק 1, נגדיר את D להיות אחת מהצלעות של T.
3. אם ל-T יש עומק 2 או יותר, אז נגדיר את D להיות כל הצלעות של T שלא נוגעות בעלה.

נוכיח את נכונות האלגוריתם:

יהי T עץ DFS של G. אזי, כל צלע $e \in E(G) \setminus E(T)$ שנוגעת בעלה היא צלע $back\ edge$ (לפי צורת ה-DFS). (בגרף לא מכוון יש רק צלעות $tree$ או $back$). כל צלע בגרף שהיא לא בעץ, היא לא בעץ כי כבר יש צלע בעץ שמגיעה לאותו קודקוד. בפרט, שני עלים ב-T לא יהיו סמוכים ב-G. אז לא צריך לקחת אף צלע שנוגעת בעלה.

טענה א: האלגוריתם הוא 6-מקרב לבעיית $min\ EDS$.

טענה ב: יהי D פתרון אופטימלי ל-EDS בגרף G, ויהי $e \coloneqq uv \in D$. אזי, ל- $G - e$ יש קבוצת EDS בגודל לכל היותר $|D| + 1$.

הוכחה: נבנה קבוצת צלעות שלטת עבור $G - e$:

אם e מבודדת (כלומר $\deg_G u = \deg_G v = 1$), נעצור.

אחרת, אם $\deg_G u > 1$, נוסיף צלע שרירותית שנוגעת ב-u ל- $D - e$. ואותו דבר עבור v.

כל צלע שנוגעת ב-e, נוגעת גם באחת הצלעות שהוספנו. אז הקבוצה המתקבלת היא שלטת.

טענה ג: אם $G' \subseteq G$, אז $OPT_{G'} \leq 2 \cdot OPT_G$.

הוכחה: יהי D פתרון אופטימלי ל-G. נפעיל את טענה ב על כל צלע של D שהיא לא ב-G'.

הוכחת טענה א: יהי T עץ DFS של G.

נגדיר תת-גרף פורש $G' \subseteq G$:

לכל קודקוד שהוא לא עלה ב-T, ניקח $v \in V(T)$ שהוא ילד של u ב-T. נוסיף את uv ל-G'. נשים לב ש- G' הוא אוסף של מסלולים זרים בקודקודים (יכולים להיות גם צלע בודדת).

נסמן t את מספר הצלעות ב-D, הקבוצה המתקבלת מהאלגוריתם. אזי, ל-T יש $t + 1$ קודקודים שהם לא עלה. כי לעץ עם t צלעות יש $t + 1$ קודקודים. אז $e(G') = t + 1$. עכשיו, נשים לב שמתקיים:

$$OPT_{G'} \geq \frac{t+1}{3} \geq \frac{|D|}{3}$$

למה? ניזכר ש-G' הוא אוסף של מסלולים זרים בקודקודים. אם P הוא מסלול, עם $e(P) \geq 1$, אז $OPT_P \geq e(P)/3$. אם $e(P) \leq 2$ זה טריוויאלי, ואם $e(P) \geq 3$ אז נשים לב שצלע שלא נוגעת בקצוות מכסה 3 צלעות: עצמה ועוד 2 שלידה.

אז נוכל לרשום:

$$\frac{|D|}{3} \leq \frac{t+1}{3} \leq OPT_{G'} \leq 2 \cdot OPT_G \Longrightarrow |D| \geq 6 \cdot OPT_G$$

כנדרש.

Some review questions

תרגיל 1

יהי G גרף דו"צ. הוכיחו או הפריכו:

סעיף א: $\tau(G) \le \nu(G)$ (גודל הכיסוי המינימום הוא לכל היותר גודל השידוך המקסימום).

נוכיח: לפי משפט קניג, מתקיים שוויון.

סעיף ב: $\alpha(G) + \tau(G) \ge \nu(G)$.

נוכיח: בפרט, מתקיים שוויון. קבוצה S היא בת"ל אמ"מ $V(G) \setminus S$ היא כיסוי בקודקודים.

S בת"ל $\Leftrightarrow$ אין אף צלע בין קודקודי S $\Leftrightarrow$ הקודקודים של $V(G) \setminus S$ מכסים את כל הצלעות $\Leftrightarrow$ $V(G) \setminus S$ היא כיסוי.

אז הקבוצה הבת"ל המקסימום משאירה הכי פחות קודקודים לכיסוי המינימום.

סעיף ג: $\varrho(G) + \nu(G) = v(G)$. גודל הכיסוי בצלעות המינימום ועוד גודל השידוך המקסימום, הוא בדיוק מספר הקודקודים.

נפריך: אם יש קודקודים מבודדים, אין כיסוי בצלעות.

סעיף ד: $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

נפריך: גרף שהוא מעגל זוגי הוא דו"צ, ומתקיים: $\chi'(G) = 2 < 3 = \Delta(G) + 1$. בפרט, $\chi'(G) = \Delta(G)$ לכל גרף דו"צ.

סעיף ה: $\Delta(G) > \chi(G)$.

נפריך: גרף שהוא מעגל זוגי הוא דו"צ, ומתקיים: $\chi(G) = 2 = \Delta(G)$.

סעיף ו: $\chi'(G) \le \chi(G)$.

נפריך: גרף $K_{1,n}$, לכל $n \ge 3$. מתקיים: $\chi'(G) = n > 2 = \chi(G)$.

סעיף ז: $\Delta(G) \le \kappa(G)$. הדרגה המקסימום היא לכל היותר מספר הקודקודים שצריך להוריד כדי שהגרף יהיה לא קשיר.

נפריך: גרף $K_{1,n}$, לכל $n \ge 2$. מתקיים: $\Delta(G) = n > 1 = \kappa(G)$.

סעיף ח: במהלך ה-*de-randomization* של האלגוריתם ההסתברותי המקרב של *max-cut*, ראינו את הביטוי:

$$\mathbb{E}[e_G(A,B) \mid v_1 \dots v_i \text{ are placed and } v_{i+1} \in A] = e_G(\tilde{A}, \tilde{B}) + \deg_G(v_{i+1}, \tilde{B}) + \frac{\ell}{2}$$

מה מייצג ה- $\ell/2$?

ℓ הוא מספר הצלעות שעוד לא קבענו ב-A או B. $\ell/2$ זה התוחלת של מספר הצלעות שעוד לא מיקמנו, שיחצו את החתך.

סעיף ט: ניזכר בהוכחה לכך שהאלגוריתם המקרב לבעיית *k-centers* הוא 2-מקרב. בהשוואה של האלגוריתם החמדן לאופטימלי היו שני מקרים. מהם?

המקרים הם שיש מרכז אחד מהאופטימלי בכל רדיוס של המרכזים של החמדן, או שלא. במקרה השני, יש רדיוס של החמדן עם שני מרכזים של האופטימלי.

תרגיל 2

בהינתן גרף $G := (V,E)$ על n קודקודים, עם פונקציית משקלים שלמים חיוביים על הצלעות: $w: E \to \mathbb{Z}_{>0}$, נסמן:

$$w(S) := \sum_{e \in E_G(S, V \setminus S)} w(e)$$

את המשקל של החתך המוגדר ע"י S, לכל $S \subseteq V$. ונגדיר:

$$wc(G) := \max_{(S, V \setminus S)} w(S)$$

את המשקל המקסימום מבין כל החתכים.

אלגוריתם 1:

1. נאתחל $S = \emptyset$.
2. לולאה *while True*:
   a. אם קיים קודקוד $v \in V$, שאם נעביר אותו לצד השני של החתך נקבל משקל גבוה יותר, אז נעשה את זה ונעדכן את S.
   b. אחרת, נצא מהלולאה.
3. נחזיר את $(S, V \setminus S)$.

סעיף א: נוכיח שהאלגוריתם תמיד עוצר, נחשב את זמן הריצה שלו, ונוכיח האם הוא פולינומי.

האלגוריתם תמיד עוצר: בכל איטרציה אנחנו מגדילים (גדול ממש) את משקל החתך. מכיוון שלחתך המקסימום יש משקל סופי, נעצור מתישהו.

זמן ריצה: יכולות להיות עד $\sum_{e\in E} w(e)$ איטרציות, כאשר כל איטרציה לוקחת זמן $O(n^2)$. בפרט, לא מובטח שקודקוד יישאר בקבוצה אחרי שהעברנו אותו. זה לא פולינומי.

סעיף ב: נוכיח שעבור הקבוצה S המתקבלת מהאלגוריתם, $w(S) \geq wc(G)/2$. כלומר שהוא 0.5-מקרב.

לכל $v \in S$, מתקיים:

$$\sum_{e\in I_v \cap E_G(S,V\setminus S)} w(e) \geq \frac{\sum_{e\in I_v} w(e)}{2}$$

כאשר I_v היא קבוצת הצלעות שמחוברות ל-v. כלומר, החתך תופס לפחות חצי מהמשקל של הצלעות של כל קודקוד, כי אחרת היינו מעבירים את הקודקוד לצד השני. אז בסה"כ מתקיים:

$$4 \cdot \sum_{e\in E_G(S,V\setminus S)} w(e) \geq \sum_{v\in S}\sum_{e\in I_v} w(e) + \sum_{v\in S}\sum_{e\in I_v} w(e) = 2 \cdot \sum_{e\in E} w(e) \geq 2 \cdot wc(G)$$

כנדרש.

תרגיל 3

אין קשר בין הסעיפים.

סעיף א: תהי φ נוסחת *CNF* ויהי x משתנה של φ. הליטרל החיובי של x מסומן x, והליטרל השלילי מסומן $\bar{x}$. מופעים של הליטרל החיובי נקראים מופע חיובי, ומופעים של הליטרל השלילי נראים מופע שלילי.

נוסחת *CNF* φ תיקרא מאוזנת אם יש לה את התכונה שלכל משתנה x, מספר המופעים החיוביים והשליליים של x שווים. שימו לב – התכונה היא פנימית לכל משתנה. אם יש 2 מופעים של $x, \bar{x}$, ו-3 מופעים של $y, \bar{y}$, זו נוסחה מאוזנת. וגם, איזון היא תכונה של הנוסחה, ללא קשר לספיקות או השמה כלשהי.

נגדיר L את קבוצת כל הנוסחאות *3-CNF* שמאוזנות וספיקות. נוכיח ש- L $\leq_p$ 3-CNF-SAT.

בהינתן נוסחת *3-CNF*, לכל משתנה x נסמן p_x, n_x את מספר המופעים החיוביים והשליליים שלו. נגדיר גאדג'ט של משתנה:

$$g(x) \coloneqq \begin{cases} \left(\underbrace{x \vee \ldots \vee x}_{n_x - p_x + 1} \vee \bar{x}\right), & p_x < n_x \\ \left(\underbrace{\bar{x} \vee \ldots \vee \bar{x}}_{p_x - n_x + 1} \vee x\right), & p_x > n_x \\ (x \vee \bar{x}), & p_x = n_x \end{cases}$$

$$f(\varphi) \coloneqq \varphi \wedge \bigwedge_{x\in\varphi} g(x)$$

הגאדג'טים האלה תמיד T, אז הם לא משפיעים על הספיקות של הנוסחה. φ ספיקה אמ"מ $f(\varphi)$ ספיקה, כנדרש.

סעיף ב: נגדיר L' את קבוצת נוסחאות *CNF* שיש להן מספר זוגי של משתנים, שעבורן יש השמה מספקת שבה בדיוק חצי מהמשתנים מקבלים T.

נוכיח ש- L' $\leq_p$ CNF-SAT. נזכיר – אין קשר לסעיף א.

לכל משתנה x_i נגדיר משתנה חדש y_i, ונגדיר גאדג'ט: $g(x_i) \coloneqq (y_i \vee \bar{y}_i)$. ונגדיר:

Some review questions

$$f(\varphi) \coloneqq \varphi \wedge \bigwedge_{x \in \varphi} g(x)$$

כל הגאדג'טים תמיד מסופקים, אז $f(\varphi)$ ספיקה אמ"מ φ ספיקה.

עבור השמה על המשתנים של φ, ניקח את אותה השמה ל-φ ונגדיר T או F למשתנים y_i כדי שיהיה מספר שווה של T ו-F בהשמה.

עבור השמה על המשתנים של φ', נתעלם מהמשתנים y_i וניקח את ההשמה של ה- x_i ל-φ.

תרגיל 4

סעיף א: נתאר את האלגוריתם ההונגרי למציאת שידוך מקסימום בגרף דו"צ. בגדול:

נתחיל עם $M = \emptyset$, וניתן כיוונים לצלעות: צלעות יהיו:

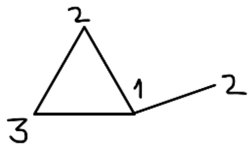
$$A \setminus V(M) \to B \setminus V(M), \qquad B \setminus V(M) \to A \cap V(M), \qquad A \cap V(M) \to B \setminus V(M)$$

ונריץ BFS כדי למצוא מסלולים מ- $A \setminus V(M)$ ל- $B \setminus V(M)$. כל מסלול כזה הוא מסלול מגדיל.

האלגוריתם המפורט, עם הוכחה, נמצא בקובץ 4: משפט ברג' והשיטה ההונגרית.

סעיף ב: נצייר גרף קשיר לא דו"צ שמקיים $\Delta(G) = \chi(G)$.

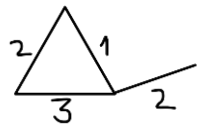
משולש פלוס צלע:



מתקיים $\Delta(G) = 3$.

יש משולש אז $\chi(G) \geq 3$, והצביעה שלנו עם 3 צבעים. אז מתקיים $\Delta(G) = \chi(G)$. הגרף קשיר, ויש בו מעגל אי"ז אז הוא לא דו"צ.

סעיף ג: נצייר גרף לא ריק, קשיר, לא דו"צ, לא מלא, שמקיים $\chi'(G) = \Delta(G)$.



יש משולש אז $\chi'(G) \geq 3$. הצביעה שלנו עם 3 צבעים.

סעיף ד: נצייר גרף קשיר, לא מלא, שמקיים $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

מעגל אי זוגי. $\chi'(G) = 3 = 2 + 1 = \Delta(G) + 1$.

סעיף ה: נצייר גרף לא מלא שמקיים $\tau(G) > \nu(G)$.

נשים לב שאין דרישה שהגרף יהיה קשיר. אז כל גרף שנוסיף לו מספיק קודקודים מבודדים, יקיים את התנאי. או, מעגל אי-זוגי.

סעיף ו: נתאר את האלגוריתם שלמדנו שבהינתן גרף G, מוצא כיסוי בצלעות מינימום (אם קיים).

האלגוריתם מוצא שידוך, ומרחיב אותו לכיסוי לכל קודקוד שלא בכיסוי, מבחר צלע שרירותית שסמוכה אליו ונוסיף אותה. הוכחת הנכונות והמינימליות מבוססת על משפט גלאי: $\rho(G) + \nu(G) = v(G)$ בגרף קשיר.

אנחנו מוסיפים $v(G) - 2\nu(G)$ צלעות. אז גודל הכיסוי המתקבל הוא $|L| = \nu(G) + \left(v(G) - 2\nu(G)\right) = v(G) - \nu(G)$. עם משפט גלאי, נקבל:

$$|L| = v(G) - \nu(G) = v(G) - \left(v(G) - \rho(G)\right) = \rho(G)$$

כנדרש.

Some review questions

סעיף ז: השלימו את המשפט: "יהי G גרף. אזי $BC(G)$ (גרף הבלוקים) הוא עץ אמ"מ ______".

...אמ"מ G הוא קשיר. כי כל גרף בלוקים יהיה חסר מעגלים, כי אם יש מעגל בבלוקים הם היו אותו בלוק. גרף קשיר חסר מעגלים = עץ.

סעיף ח: הגדירו את המושג רדוקציה פולינומית בין שתי שפות.

עבור 2 שפות L_1, L_2, פונקציה תיקרא רדוקציה $L_1 \leq_p L_2$ אם היא מקיימת 3 תנאים:

1. מבנה: הפונקציה מקבלת כל אובייקט x במבנה של L_1 (ללא קשר לשייכות לשפה), ומחזירה אובייקט $f(x)$ במבנה של L_2.
2. זמן: הפונקציה רצה בזמן פולינומי בגודל הקלט.
3. נכונות: מתקיים $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$.

סעיף ט: כתבו את האלגוריתם שלמדנו בקורס, שבהינתן נוסחת *2-CNF* קובעת האם היא ספיקה או לא.

הפונקציה מופיעה בתרגול 1. בהינתן נוסחה φ, נבנה את הגרף D:

לכל משתנה x נגדיר קודקודים $x, \bar{x}$. לכל פסוקית $(x \vee y)$ נגדיר צלעות $\bar{x} \to y, \bar{y} \to x$.

נריץ *DFS* מכל קודקוד v. אם קיים מסלול $x \rightsquigarrow \bar{x}$, וגם $\bar{x} \rightsquigarrow x$, נחזיר 0 (כי $x, \bar{x}$ באותו רכיב קשירות). אם לא קיים אף קודקוד כזה, נחזיר 1.

סעיף י: הגדירו את המונח *equatorial form* ב-*LP*:

בעיית *LP* שההגבלה שלה היא מהצורה $Ax = b$.

תרגיל 5: כתבו והוכיחו את משפט מנגר:

בגדול, מספר הקודקודים שצריך כדי להפריד בין 2 קבוצות שווה לגודל השידוך המקסימום בין הקבוצות. *Min cut max flow*.

ההוכחה בקובץ 7, משפט מנגר. 2.5 עמודים. תהנו.

תרגיל 6: כתבו בעיית *IP* ל- *min edge cover*.

$$\min \sum_{e \in E(G)} x_e\,, \qquad \forall v \in V(G): C_v \coloneqq \{e \in E(G): v \in e\}, \sum_{e \in C_v} x_e \geq 1, \qquad \forall e \in E(G): x_e \in \{0,1\}$$