TA Session 6: Connectivity and Hamiltonicity

מפריד בצלעות: קבוצת צלעות שאם נסיר אותן, יהיו יותר רכיבי קשירות ממה שהיה קודם. $C(G-F) > C(G)$.

אם נוסיף עוד צלעות למפריד-בצלעות, זה עדיין מפריד.

חתך בצלעות: קבוצת צלעות בין שתי קבוצות זרות של קודקודים.

אבחנה: כל חתך בצלעות הוא גם מפריד, אבל לא כל מפריד הוא חתך.

לדוגמה ניקח חתך ונוסיף (לחתך) צלע בין שני קודקודים מאותה קבוצה. אז עכשיו קבוצת הצלעות הזו לא מפרידה בין 2 קבוצות זרות.

טענה: יהי G גרף קשיר. כל מפריד בצלעות מינימלי הוא גם חתך.

<u>הוכחה</u>: יהי F מפריד-בצלעות מינימלי.

אם $|C(G-F)| = 2$, אז כל הצלעות חייבות להיות בין שני הרכיבים. אז זה חתך.

נב"ש ש- $|C(G-F)| \geq 3$, ויהי C רכיב קשירות ב- $(G-F)$.

אזי, $E_G(C,\ V(G) \setminus C) \subset F$. הצלעות שבין C לשאר הקודקודים שלא ב-C, הן תת-קבוצה ממש של המפריד.

למה? ראשית, היא תת-קבוצה כי כל צלע שבין C לשאר הקודקודים חייבת להיות במפריד (אחרת הוא לא מפריד).

וחייבת להיות לפחות עוד צלע במפריד שלא בין C לשאר הקודקודים, כי צריך להפריד בין 2 רכיבי קשירות אחרים (כי יש לפחות 3).

אבל הקבוצה הזו היא גם מפרידה בצלעות. סתירה למינימליות של F. $\blacksquare$

תזכורת: $\kappa(G)$ – גודל חתך בקודקודים מינימום. $\kappa'(G)$ – גודל חתך בצלעות מינימום.

משפט של וויטני: $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$.

אינטואיטיבית, אם יש חתך בצלעות, אז אם מורידים קודקוד אחד מכל צלע בחתך זה בעצם מוריד את הצלעות וזה חתך.

אבל יש את המצב שבו נוריד את **כל** הקודקודים באחד הצדדים, ואז הגרף שנשאר הוא קשיר. נצטרך הוכחה פורמלית:

יהי $(S,\bar{S})$ חתך-צלעות מינימום, בגודל κ'.

<u>מקרה ראשון</u>: אם $e_G(S,\bar{S}) = |S|\cdot|\bar{S}|$ (כלומר כל הצלעות בין S ל- $\bar{S}$ קיימות). אז:

$$\kappa'(G) = e_G(S,\bar{S}) = |S|\cdot|\bar{S}| = |S|\cdot(v(G)-|S|) \geq^{\text{א}} v(G)-1$$

א. כי ככל ש-$|S|$ גדלה, הביטוי גדל, עד $n/2$.

בנוסף, לכל גרף מתקיים $\kappa(G) \leq v(G)-1$. אם נוריד את כל הקודקודים חוץ מאחד, הגרף לא קשיר.

בסה"כ, $\kappa'(G) \geq v(G)-1 \geq \kappa(G)$.

<u>מקרה שני</u>: קיימים $x \in S,\ \ y \in \bar{S}$ כך שאין צלע xy.

נגדיר: $J \coloneqq \{v \in S \setminus \{x\} : N_G(v) \cap \bar{S} \neq \emptyset\}$. כלומר, כל הקודקודים ב-$S$ (חוץ מ-x) שיש להם שכן ב-$\bar{S}$.

וניקח את הקבוצה: $T \coloneqq J \cup (N_G(x) \cap \bar{S})$. כלומר, נוסיף ל-$J$ את כל הקודקודים ב-$\bar{S}$ שהם שכנים של x.

T היא חתך בקודקודים. כי אם נוריד אותה, אין דרך להגיע מ-x ל-y. אז $\kappa(G) \leq |T|$.

נייצר קבוצה T': לכל קודקוד ב-T נבחר צלע: לשכנים של x ניקח את הצלע שיש בינם לבין x. לקודקודים מ-J ניקח צלע כלשהי מהם לצד השני.

נצטרך להוריד לפחות את כל הצלעות האלה כדי להפריד בין S ל-$\bar{S}$. כלומר $|T'| \leq e_G(S,\bar{S})$.

קיבלנו קבוצה T' כך ש $|T'| = |T|$, אז $\kappa(G) \leq |T'|$.

בסה"כ: $\kappa(G) \leq |T'| \leq \kappa'(G)$, כנדרש. $\blacksquare$

TA Session 6: Connectivity and Hamiltonicity

תזכורת: גרף G הוא k-קשיר אם צריך להוריד k קודקודים כדי שהגרף יהיה לא קשיר.

טענה: אם לכל שני קודקודים שאין ביניהם צלע יש לפחות k שכנים משותפים, הגרף הוא k-קשיר.

<u>הוכחה</u>: ראשית, אם אין שני קודקודים בלי צלע ביניהם אז הטענה מתקיימת באופן ריק (וגם זה קליקה אז ברור שהוא k-קשיר).

נב"ש שיש חתך-קודקודים בגרף בגודל פחות מ-k.

נתבונן בשני הרכיבים שהוא יוצר. ניקח קודקוד מכל אחד מהם.

אין ביניהם צלע (כי הם בצדדים שונים של החתך-קודקודים) אז יש להם k שכנים משותפים ב-G.

הורדנו לכל היותר $k-1$ קודקודים, אז יש להם עדיין שכן משותף. סתירה לכך שזה חתך. ■

טענה: אם $\delta(G) \geq v(G)-2$, אז $\kappa(G)=\delta(G)$.

<u>הוכחה</u>: יהי גרף G כך ש $v(G)=n$.

אם $\delta(G)=n-1$, G הוא קליקה אז צריך להוריד $n-1=\delta(G)$ קודקודים כדי שהגרף יהיה לא קשיר.

אחרת, $\delta(G)=n-2$ אז אם יש שני קודקודים שאין ביניהם צלע משותפת, כל אחד מהם מחובר לכל שאר הקודקודים.

אז יש להם $\delta(G)$ שכנים משותפים. לפי הטענה הקודמת, הגרף הוא $\delta(G)$-קשיר. כלומר $\kappa(G)=\delta(G)$, כנדרש. ■

טענה: יהי G גרף עם n קודקודים. אם $\delta(G) \geq \frac{n+k-2}{2}$, הגרף הוא k-קשיר.

<u>הוכחה</u>: נוכיח שלכל שני קודקודים בלי צלע ביניהם יש לפחות k שכנים משותפים. יהיו x, y שאין צלע ביניהם.

באופן כללי מתקיים: $|N_G(x) \cup N_G(y)| = |N_G(x)| + |N_G(y)| - |N_G(x) \cap N_G(y)|$, אז מתקיים:

$$|N_G(x) \cap N_G(y)| = |N_G(x)| + |N_G(y)| - |N_G(x) \cup N_G(y)| \geq \frac{n+k-2}{2} + \frac{n+k-2}{2} - (n-2) = n+k-2-n+2 = k$$

כי $|N_G(x)|,\ |N_G(y)| \geq \frac{n+k-2}{2}$ (מספר השכנים הוא לפחות הדרגה המינימלית),

וגם $|N_G(x) \cup N_G(y)| \leq n-2$ (כי אין ביניהם צלע, אז גם ביחד יש להם לכל היותר $n-2$ שכנים).

מש"ל. ■

תזכורת: מסלול המילטוני בגרף הוא מסלול שעובר בכל הקודקודים, כל אחד פעם אחת בדיוק.

מעגל המילטוני הוא מעגל שעובר בכל קודקוד פעם אחת בדיוק (וחוזר להתחלה). גרף ייקרא המילטוני אם יש בו מעגל המילטוני.

עבור גרף G, הגרף $\bar{G}$ הוא הגרף ההופכי על אותם קודקודים (איפה שיש צלע ב-G אין צלע ב-$\bar{G}$, והפוך).

הגדרה: גרף G נקרא קשיר-המילטונית אם לכל זוג קודקודים x, y יש מסלול המילטוני $x \rightsquigarrow y$.

גרף קשיר-המילטונית הוא בפרט גם המילטוני.

משפט: יהי G גרף עם $n \geq 3$ קודקודים. אזי,

אם $e(G) \geq \binom{n-1}{2}+2$, אז G המילטוני.

אם $e(G) \geq \binom{n-1}{2}+3$, אז G קשיר-המילטונית.

<u>נוכיח באינדוקציה על n</u>:

TA Session 6: Connectivity and Hamiltonicity

<u>בסיס</u>:

- עבור $n=3$, אם $e(G)\geq\binom{2}{2}+2=3$ זה הגרף המלא, הוא קשיר המילטונית.
- עבור $n=4$:
  - אם $e(G)\geq\binom{3}{2}+2=5$ אז ב-G חסרה רק צלע אחת, זה גרף המילטוני.
  - אם $e(G)\geq\binom{3}{2}+3=6$ אז זה הגרף המלא.

<u>צעד</u>:

ננסח את הטענות בצורה אחרת:

$$e(G)\geq\binom{n-1}{2}+2\equiv e(\bar{G})\leq\binom{n}{2}-\binom{n-1}{2}-2=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}-2=\frac{1}{2}[n(n-1)-(n-1)(n-2)]-2$$
$$=\frac{1}{2}\left[(n-1)\big(n-(n-2)\big)\right]-2=\frac{1}{2}[(n-1)2]-2=n-1-2=n-3$$

ובאופן דומה,

$$e(G)\geq\binom{n-1}{2}+3\equiv e(\bar{G})\leq n-4$$

<u>נוכיח את טענה 2</u>:

נניח שטענה 2 מתקיימת עבור כל גרף עם עד $n-1$ קודקודים.

יהי גרף G עם $n>4$ קודקודים כך ש $e(\bar{G})\leq n-4$. צ"ל ש-G קשיר-המילטונית.

יהיו x,y שני קודקודים ב-G.

<u>מקרה ראשון</u>: אם x מבודד ב-$\bar{G}$, זה אומר שאם נוריד אותו מ-G, לא השפענו על מספר הצלעות בגרף המשלים. אז מתקיים:

$$e(\overline{G-x})=e(\bar{G})\leq n-4=(n-1)-3$$

אז לפי הנ"א, $G-x$ הוא המילטוני. כלומר יש מעגל המילטוני.

בגלל ש-x מבודד ב-$\bar{G}$, הוא מחובר לכל הקודקודים ב-G. אז יש ב-G מסלול המילטוני $x \rightsquigarrow y$:

יהי $y,v_2,v_3,\dots,v_n,y$ המעגל ההמילטוני. אז המסלול: $x\to v_2\rightsquigarrow v_n\to y$ הוא מסלול המילטוני.

<u>מקרה שני</u>: אם x לא מבודד ב-$\bar{G}$, אז:

$$e(\overline{G-x})\leq e(\bar{G})-1\leq n-5=(n-1)-4$$

לפי הנ"א, $G-x$ הוא קשיר-המילטונית. כלומר יש מסלול המילטוני בין כל שני קודקודים.

בפרט קיים מסלול המילטוני בין y לשכן כלשהו של x.

נלך מ-x לקודקוד כלשהו, ומהקודקוד הזה יש מסלול המילטוני ל-y, כנדרש.

<u>נוכיח את טענה 1</u>:

נניח שטענה 1 מתקיימת עבור כל גרף עם עד $n-1$ קודקודים.

יהי גרף עם $n>4$ קודקודים כך ש $e(\bar{G})\leq n-3$. צ"ל ש-G המילטוני.

אם $e(\bar{G})\leq n-4$, אז לפי מה שכבר הוכחנו, G קשיר-המילטונית וסיימנו.

נניח ש $e(\bar{G})=n-3$.

נשים לב: הדרגה המינימלית ב-G היא לפחות 2.

כי אם יש קודקוד עם דרגה 0 או 1, אין מספיק צלעות בשביל $\binom{n-1}{2}+2$.

בנוסף, קיים ב-$\bar{G}$ קודקוד x עם דרגה לפחות 2. למה? כי אם לכל קודקוד יש דרגה פחות מ-2, אז יש ב-$\bar{G}$ לכל היותר $n/2$ צלעות.

TA Session 6: Connectivity and Hamiltonicity

עבור $n \in \{5,6\}$ אפשר לטפל ידנית. לכל $n > 6$, אם יש לכל היותר $n/2$ צלעות אז לא יכולות להיות $n-3$ צלעות כמו שיש בהנחה.

אז $(n-1)-4 = n-5 = e(\bar{G})-2 \geq e(\overline{G-x})$. לפי הנ"א יש מסלול המיטוני בין כל שני שכנים של x.

אז זה נותן מעגל המילטוני ב-G.

הוכחנו את טענות 1,2, כנדרש. ■

הגדרה: טורניר הוא גרף מכוון שבו לכל זוג קודקודים יש בדיוק צלע אחת ביניהם.

נסמן: $\deg_H(v)$ את מספר הצלעות שיש בין קודקוד v לתת-גרף H.

למה: יהי D גרף מכוון ויהי $P = v_1 \to v_2 \to \cdots v_{\ell+1}$ המסלול הארוך ביותר בגרף, באורך $\ell + 1$.

אזי, לכל קודקוד $v \notin V(P)$ מתקיים $\deg_P(v) \leq \ell$.

<u>הוכחה</u>:

נגדיר קבוצות:

$X \coloneqq \{v_i \in V(P) : (v, v_i) \in E(D)\}$ – קודקודים שיש צלע מ-v אליהם.

$Y \coloneqq \{v_i \in V(P) : (v_{i-1}, v) \in E(D)\}$ – קודקודים שיש צלע מהקודקוד לפניהם ל-v.

נשים לב שלא קיימות הצלעות $(v, v_1), (v_{\ell+1}, v)$, כי אחרת המסלול P לא הכי ארוך.

וגם, $X \cup Y \subseteq \{v_2, \dots, v_{\ell+1}\}$.

וגם, $X \cap Y = \emptyset$. כי אם יש קודקוד בשניהם, יש צלע (v_{i-1}, v) וגם (v, v_i). אז P לא הכי ארוך.

אז מתקיים: $\deg_P(v) = |X| + |Y| = |X \cup Y| + \underbrace{|X \cap Y|}_{=0} \leq \ell$, כנדרש. ■

<u>עוד דרך</u> (אותו רעיון, יותר אינטואיטיבי):

נב"ש שיש $\ell + 1$ צלעות בין v ל-P. כלומר יש צלע בין v וכל קודקוד במסלול.

אם הצלע $v_{\ell+1}, v$ היא בכיוון $v_{\ell+1} \to v$, אז המסלול $P' = v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{\ell+1} \to v$ ארוך יותר מ-P.

אז היא בכיוון $v \to v_{\ell+1}$.

אם הצלע v, v_1 היא בכיוון $v \to v_1$, אז המסלול $P' = v \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{\ell+1}$ ארוך יותר מ-P.

אז היא בכיוון $v_1 \to v$.

כלומר איפשהו במסלול יש i כך שיש צלע $v_i \to v$, וצלע $v \to v_{i+1}$.

אז המסלול $P' = v_1 \to \cdots v_i \to v \to v_{i+1} \to \cdots \to v_{\ell+1}$ ארוך יותר מ-P. ■

טענה: בטורניר יש מסלול המילטון מכוון.

<u>הוכחה</u>: יהי P המסלול הארוך ביותר בטורניר, באורך $\ell + 1$. נב"ש שהוא לא מסלול המילטון.

אזי קיים קודקוד $v \notin V(P)$. אז לפי הלמה, $\deg_P(v) \leq \ell$. כלומר יש קודקוד במסלול שהוא לא מחובר אליו.

אבל זה טורניר אז v חייב להיות מחובר לכולם, סתירה. ■