TA Session 4: Matchings in Graphs, part 1

תזכורות:

גודל שידוך מקסימום $\nu(G)$, כיסוי קודקודים מינימום $\tau(G)$, קבוצה בת"ל מקסימום $\alpha(G)$, כיסוי צלעות מינימום $\varrho(G)$.

לא להתבלבל בין מספר הקודקודים $\upsilon(G)$, לגודל שידוך מקסימום $\nu(G)$.

מסלול M-משפר זה מסלול שמתחלף בין צלעות של M לצלעות שלא, שקודקודי הקצה שלו לא ב-$V(M)$.

משפט ברג': M שידוך מקסימום אמ"מ אין מסלול M-משפר.

משפט קניג: בגרף דו"צ, $\tau(G) = \nu(G)$.

משפט הול: אם $G = (A \cup B, E)$ הוא גרף דו"צ, אז יש ב-G שידוך מ-A ל-B אמ"מ $\forall S \subseteq A: |S| \leq |N_G(S)|$.

משפט פרובניוס: בגרף דו"צ G יש שידוך מושלם אמ"מ הצדדים שווים בגודלם ואחד מהם מקיים את תנאי הול.

למה: יש בגרף דו"צ שידוך מושלם אמ"מ גודל הכיסוי קודקודים המקסימום הוא לפחות חצי מספר הקודקודים

יהי G גרף דו"צ. יש ב-G שידוך מושלם אמ"מ $\tau(G) \geq \upsilon(G)/2$.

<u>כיוון ראשון</u>: נניח שיש ב-G שידוך מושלם. צ"ל ש- $\tau(G) \geq \upsilon(G)/2$.

בשידוך מושלם יש בדיוק $\upsilon(G)/2$ צלעות (כי על כל שני קודקודים יש צלע).

כל קודקוד בכיסוי מכסה בדיוק צלע אחת מהשידוך. כי אם הו מכסה יותר, יש לפחות 2 צלעות בשידוך שחולקות קודקוד, בסתירה לשידוך.

אז הכיסוי צריך לפחות $\upsilon(G)/2$ קודקודים כדי לכסות את השידוך. ■

<u>כיוון שני</u>: נניח ש- $\tau(G) \geq \upsilon(G)/2$. צ"ל שיש ב-$G$ שידוך מושלם.

מכיוון ש-G דו"צ, לפי משפט קניג מתקיים $\tau(G) = \nu(G)$.

כלומר $\tau(G) = \nu(G) \geq \upsilon(G)/2$. גודל השידוך המקסימום הוא לפחות חצי מספר הקודקודים.

גודל שידוך המקסימום חסום בחצי מספר הקודקודים (כי צריך 2 קודקודים לצלע). כלומר $\nu(G) \leq \upsilon(G)/2$.

בסה"כ, $\nu(G) = \upsilon(G)/2$. שזה שידוך מושלם. ■

מסקנה: בגרף דו"צ d-רגולרי, יש שידוך מושלם

<u>הוכחה</u>: מספיק להוכיח ש $\tau(G) \geq \upsilon(G)/2$, ואז לפי הלמה הקודמת יש שידוך מושלם.

ניזכר בלמת לחיצת הידיים: בכל גרף, $2 \cdot e(G) = \sum_{v \in V(G)} \deg_G(v)$.

אז ב-G, $\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = d \cdot \upsilon(G)$. כלומר יש בדיוק $\upsilon(G) \cdot d/2$ צלעות. $e(G) = \upsilon(G) \cdot d/2$.

נב"ש שאין שידוך מושלם, כלומר $\nu(G) < \upsilon(G)/2$. בגלל שהגרף דו"צ, זה אומר שגם $\tau(G) < \upsilon(G)/2$.

יהי C הכיסוי המינימום, בגודל c.

ובגלל שזה כיסוי, חייב להתקיים $e(G) \leq c \cdot d$. בסה"כ: $e(G) \leq c \cdot d = \tau(G) \cdot d < \upsilon(G) \cdot d/2$, כלומר $e(G) < \upsilon(G) \cdot d/2$.

סתירה למה שהוכחנו, ש $e(G) = \upsilon(G) \cdot d/2$. ■

<u>עוד הוכחה</u>: יהי $G = (A \cup B, E)$ גרף דו"צ d-רגולרי.

בגלל שהוא d-רגולרי, מתקיים: $|B| \cdot d = e(G) = d \cdot |A|$. כלומר $|A| = |B|$.

לפי משפט פרובניוס, אם נראה שאחד הצדדים מקיים את תנאי הול, זה יוכיח שיש שידוך מושלם.

תהי $S \subseteq A$. צ"ל ש $|S| \leq |N_G(S)|$.

נשים לב שבגלל ש $S \subseteq A$, מתקיים $e(S, N_G(S)) \leq e(A, N_G(S))$.

בגלל שהגרף הוא d-רגולרי, מתקיים: $d \cdot |S| = e(S, N_G(S)) \leq e(A, N_G(S)) = d \cdot |N_G(S)|$

כלומר $|S| \leq |N_G(S)|$, כנדרש ■

TA Session 4: Matchings in Graphs, part 1

תזכורת: $\alpha(G)+\tau(G)=v(G)$ (גודל הכיסוי המינימלי פלוס גודל הקבוצה בת"ל המקסימלית שווה מספר הקודקודים).

בפרט, קבוצת קודקודים S היא בת"ל **אמ"מ** $V(G)\setminus S$ היא כיסוי בקודקודים.

משפט גלאי: לכל גרף קודקודים מבודדים, $\nu(G)+\varrho(G)=v(G)$.

בגרף דו"צ בלי קודקודים מבודדים, $\varrho(G)=\alpha(G)$

מתקיימים:

$$\alpha(G) \overset{\text{א}}{=} v(G)-\tau(G) \overset{\text{ב}}{=} v(G)-\nu(G) \overset{\text{ג}}{=} \varrho(G)$$

א. ראינו כבר $\alpha(G)+\tau(G)=v(G)$.
ב. בגלל שהגרף דו"צ, ממשפט קניג, $\tau(G)=\nu(G)$.
ג. ובגלל שאין קודקודים מבודדים, ממשפט גלאי, $\nu(G)+\varrho(G)=v(G)$.

מש"ל. ■

בגרף עם $2n$ קודקודים ודרגה מינימום לפחות n, יש שידוך מושלם

הוכחה: יהי גרף G עם $2n$ קודקודים ו- $\delta(G)\ge n$.

נב"ש שאין ב-G שידוך מושלם, ויהי M השידוך המקסימום.

נסמן את הקודקודים שלא חלק מהשידוך: $S=V(G)\setminus V(M)$. וגם, $|V(G)|,|V(M)|$ זוגיים. אז $|S|$ זוגי.

S גם לא ריקה (כי אחרת השידוך מושלם) כלומר יש ב-S לפחות 2 קודקודים.

S היא קבוצה בת"ל, כי אחרת, M הוא לא מקסימלי. אם יש 2 קודקודים שלא בשידוך ויש ביניהן צלע, אפשר להוסיף את הצלע הזו לשידוך.

יהיו u, v שני קודקודים ב-S. לכל צלע $xy\in V(M)$, יש לכל היותר 2 צלעות בין הקבוצות: $\{u,v\}$ $\{x,y\}$. כי אם יש יותר, אז יש מסלול M-משפר.

למה? נב"ש שיש 3 צלעות.

יש 2 צלעות מ-x או y (בה"כ x) ל-u ו-v: ux, vx. אז יש גם צלע מ-y ל-v או u (בה"כ u) אז יש מסלול M-משפר $v\to x\to y\to u$.

סתירה לכך ש-M מקסימלי.

כלומר, לא יכול להיות שגם u וגם v מתחברות גם ל-x וגם ל-y.

בגלל ש-S בת"ל, כל הצלעות שיוצאות מ- $\{u,v\}$ הן ל- $V(M)$.

מתקיים: $\deg_G v+\deg_G u\le |V(M)|$. (כי כל צלע מ-$u$ או מ-v הולכת לקודקוד ב-M).

וגם, $|V(M)|=2|M|$. ומההנחה ש-M לא שידוך מושלם, מתקיים גם $2|M|\le 2n-2$.

בסה"כ: $\deg_G v+\deg_G u<2n-2$. כלומר לפחות אחד מהם קטן ממש מ- n.

סתירה. ■

בגרף דו"צ $G=(A\cup B,E)$, $R\subseteq V(G)$. קיים שידוך שמספק את R אמ"מ קיים שידוך שמספק את $R\cap A$ וגם שידוך שמספק את $R\cap B$

("שידוך שמספק את R" הכוונה שידוך שמשדך את כל הקודקודים ב-R).

כיוון ראשון: יהי גרף דו"צ $G=(A\cup B,E)$, ותהי $R\subseteq V(G)$. נניח שיש שידוך שמספק את R. אז בפרט הוא מספק את $R\cap A, R\cap B$.

כיוון שני: הי גרף דו"צ $G=(A\cup B,E)$, ותהי $R\subseteq V(G)$. יהי שידוך N שמספק את $R\cap B$ ושידוך M (אולי אחר) שמספק את $R\cap A$.

נוכיח שקיים שידוך המספק את R.

נתבונן בגרף $G'=[M\cup N]$, ועל רכיבי הקשירות שלו.

מקרה ראשון: בכל רכיב קשירות C, אחד (לפחות) מתוך M או N נוגע בכל הקודקודים של R.

נסמן $H(C)$ את השידוך שנוגע בכל $R\cap C$ ב-C.

ניקח את $L\coloneqq\bigcup_C H(C)$ את השידוך המורכב מכל ה- $H(C)$ של כל רכיבי הקשירות.

זה שידוך שמספק את R.

TA Session 4: Matchings in Graphs, part 1

<u>מקרה שני</u>: נב"ש שיש רכיב קשירות C שבו גם M וגם N לא מכסים את כל R. כלומר לכל אחד יש קודקוד ב-R שהוא מפספס.

נשים לב שהם לא יכולים לפספס את אותו קודקוד, כי M מספק את $A \cap R$ אז הוא יכול לפספס רק $b \in B$, ובאותו אופן N יכול לפספס רק $a \in A$.

בגלל ש-C רכיב קשירות, יש מסלול $a \rightsquigarrow b$. ובגלל שהם בצדדים שונים, המסלול באורך אי-זוגי.

בנוסף, אין 2 צלעות מאותו שידוך שמחוברות לאותו קודקוד, אז המסלול מתחלף בין M ו-N.

כלומר 2 הצלעות בקצוות הן באותו שידוך, שהוא יהיה $H(C)$.

אז $H(C)$ נוגע גם ב-a וגם ב-b, סתירה. ■

מסקנה 1: בגרף דו"צ $G = (A \cup B, E)$, $R \subseteq V(G)$. קיים שידוך שמספק את R אמ"מ $R \cap A$ וגם $R \cap B$ מקיימים את תנאי הול.

<u>כיוון ראשון</u>: יהי גרף דו"צ $G = (A \cup B, E)$, ותהי $R \subseteq V(G)$. נניח שיש שידוך שמספק את R.

בפרט, יש שידוך שמספק את $R \cap A$. כלומר $A \cap R$ משתדכת לתוך B. אז לפי משפט הול, $A \cap R$ מקיימת את תנאי הול.

ובאופן דומה גם $R \cap B$.

<u>כיוון שני</u>: יהי גרף דו"צ $G = (A \cup B, E)$, ותהי $R \subseteq V(G)$. נניח ש $A \cap R,\ B \cap R$ מספקים את תנאי הול.

כלומר, $A \cap R$ משתדכת לתוך B וגם $B \cap R$ משתדכת לתוך A. איחוד השידוכים האלה הוא שידוך שמספק את R. ■

מסקנה 2: בגרף דו"צ $G = (A \cup B, E)$. לכל M,N שידוכי מקסימום, קיים שידוך מקסימום שמספק את $(V(M) \cap A) \cup (V(N) \cap B)$.

<u>הוכחה</u>: M מספק את כל $V(M)$, ובפרט את $V(M) \cap A$. באופן דומה N מספק את $V(N) \cap B$.

ניקח $R = (V(M) \cap A) \cup (V(N) \cap B)$, ולפי הטענה הקודמת נקבל שיש שידוך שמספק את R. נקרא לו L.

נוכיח ש-L מקסימום.

הוא מספק את $V(M) \cap A$ אז $|L| \geq |V(M) \cap A|$, (כי כל הקודקודים ב-$(V(M) \cap A)$ נמצאים באותו צד).

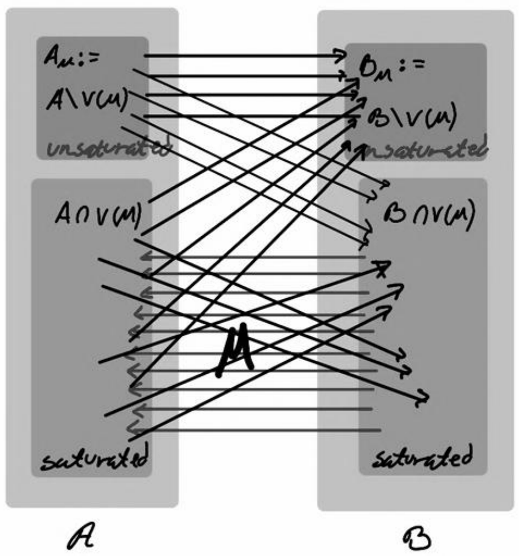
וגם M מספק את $V(M) \cap A$, אז $|M| = |V(M) \cap A|$.

ונתון ש-M מקסימום, כלומר $|M| = \nu(G)$. בסה"כ מתקיים: $|L| \geq |V(M) \cap A| = |M| = \nu(G)$, כנדרש. ■

תזכורת: השיטה ההונגרית למציאת שידוך מקסימום בגרף דו"צ.

האלגוריתם מתאר איטרציה אחת. בפועל, נחזור על האלגוריתם עד שאין מסלול משפר.

1. נתחיל עם שידוך אקראי M. כל צלע בשידוך תהיה בכיוון $b \leftarrow a$, כל צלע לא בשידוך תהיה בכיוון $a \rightarrow b$.
2. נתמקד בקבוצות: $A_M \coloneqq A \setminus V(M),\ B_M \coloneqq B \setminus V(M)$.
3. אם יש מסלול $A_M \rightarrow B_M$, הוא M-משפר. נשפר את השידוך לפי המסלול. ונחזיר את M', המשופר.
4. אם אין מסלול, M הוא שידוך מקסימום.



TA Session 4: Matchings in Graphs, part 1

מציאת כיסוי קודקודים מינימום בגרף דו"צ (בעזרת השיטה ההונגרית)

1. נקבל שידוך מקסימום M. כל צלע בשידוך תהיה בכיוון $a \leftarrow b$, כל צלע לא בשידוך תהיה בכיוון $a \to b$.
2. נתמקד בקבוצות: $A_M \coloneqq A \setminus V(M),\ \ B_M \coloneqq B \setminus V(M)$. נסמן D_M את הגרף המכוון.
3. נגדיר R_M את כל הקודקודים ב-D_M שאפשר להגיע אליהם מ-A_M. (זה כולל את A_M עצמה)
4. נחזיר את $(A \setminus R_M) \cup (B \cap R_M)$.

נוכיח שזה אכן כיסוי. נבדוק את כל סוגי הצלעות. תהי צלע $u \to v$:

אין צלעות $A_M \to B_M$, כי אחרת זה היה מסלול משפר.

אין צלעות $B_M \to A_M$ או $B_M \to A \setminus A_M$ או $B \setminus B_M \to A_M$, כי זה היה אומר שיש צלע כזו בשידוך, סתירה להגדרת A_M, B_M.

אם היא צלע $A_M \to B \setminus B_M$. מכיוון שאפשר להגיע מ-A_M ל-v, הקודקוד v יהיה בכיסוי.

אם היא צלע $A \setminus A_M \to B_M$. אין מסלול $A_M \to u$, כי אחרת היה מסלול $A_M \to B_M$. אז u נמצא בכיסוי.

אם היא צלע $A \setminus A_M \to B \setminus B_M$. אז אם אפשר להגיע ל-$u$ מ-A_M אז אפשר להגיע ל-v. ואז v תהיה בכיסוי.

ואם אי אפשר להגיע ל-u מ-A_M זה אומר ש-u תהיה בכיסוי.

אם היא צלע $B \setminus B_M \to A \setminus A_M$, אז אין עוד צלע $B \to v$. אז אם אפשר להגיע מ-A_M ל-v אז v נבחר.

ואם אי אפשר אז אי אפשר להגיע גם ל-u אז u נמצא בכיסוי.

נוכיח שהכיסוי מינימלי:

נסמן C את הכיסוי המתקבל. $V(M)$ מכילה את כל הקודקודים חוץ מ- A_M, B_M.

לא לקחנו ל-C אף קודקוד מ-A_M, ובגלל שאין צלע מ-A_M ל-B_M, גם לא לקחנו קודקודים מ-B_M.

אז $C \subseteq V(M)$.

אם צלע נמצאת בשידוך $(B \setminus B_M \to A \setminus A_M)$, אז או ששני הקודקודים נגישים מ-A_M או ששניהם לא. אז לכל צלע בשידוך לקחנו בדיוק קודקוד אחד.

אז $|C| = |M| = \nu(G)$. ובגלל שהגרף דו"צ, לפי משפט קניג, $\tau(G) = \nu(G)$.

אז $|C| = \tau(G)$, זה גודל הכיסוי המינימום. ■