TA Session 5: Matching in Graphs, part 2

תזכורות:

גודל שידוך מקסימום $\nu(G)$, כיסוי קודקודים מינימום $\tau(G)$, קבוצה בת"ל מקסימום $\alpha(G)$, כיסוי צלעות מינימום $\varrho(G)$.

לא להתבלבל בין מספר הקודקודים $\upsilon(G)$, לגודל שידוך מקסימום $\nu(G)$.

מסלול M-משפר זה מסלול שמתחלף בין צלעות של M לצלעות שלא, שקודקודי הקצה שלו לא ב-$V(M)$.

משפט ברג': M שידוך מקסימלי אמ"מ אין מסלול M-משפר.

משפט קניג: בגרף דו"צ, $\tau(G) = \nu(G)$.

משפט הול: אם $G = (A \cup B, E)$ הוא גרף דו"צ, אז יש ב-G שידוך מ-A ל-B אמ"מ $\forall S \subseteq A: |S| \le |N_G(S)|$.

משפט פרובניוס: בגרף דו"צ G יש שידוך מושלם אמ"מ הצדדים שווים בגודלם ואחד מהם מקיים את תנאי הול.

משפט אורי

יהי גרף דו"צ $G = (A \cup B, E)$ ו-d קבוע. אם לכל $S \subseteq A$ מתקיים $|S| - d \le |N_G(S)|$, אז יש שידוך שמספק את כל A מלבד לכל היותר d קודקודים.

<u>הוכחה</u>: יהי גרף דו"צ $G = (A \cup B, E)$ ו-d קבוע. כך שלכל $S \subseteq A$ מתקיים $|S| - d \le |N_G(S)|$.

נוסיף ל-B d קודקודים חדשים, שכל אחד מהם מחובר לכל A. נקרא לגרף הזה G'. הוספנו לכל קודקוד ב-A d שכנים חדשים.

אז לכל $S \subseteq A$, מתקיים $|S| - d \le |N_G(S)| = |N_{G'}(S)| - d$. או פשוט $|S| \le |N_{G'}(S)|$.

A מקיימת את תנאי הול ב-G'. כלומר ב-G', יש שידוך שמספק את A. נקרא לו M.

ב-M, לכל היותר d צלעות מחוברות לקודקודים החדשים (כי יש רק d קודקודים חדשים).

אז ניקח את M בלי הצלעות האלה, וקיבלנו שידוך שמספק את A פחות לכל היותר d קודקודים. כנדרש. ■

מסקנה: אם נבחר $d \coloneqq \max\left(0, \max_{S \subseteq A}(|S| - |N_G(S)|)\right)$, נקבל $\nu(G) = |A| - d$.

<u>הסבר</u>: ניקח את d להיות ההפרש הכי גדול בין קבוצה S לשכנים שלה. אם לכל S יש יותר שכנים מאשר קודקודים, המספר יהיה שלילי אז ניקח 0.

במקרה הזה A מקיימת את תנאי הול אז גודל השידוך המקסימלי יהיה $|A|$.

אם יש קבוצה שבה ההפרש הזה חיובי, אז בשידוך המקסימלי אפשר לכסות לכל היותר $|A| - d$ קודקודים.

וזה אכן השידוך המקסימום, כי לכל $S \subseteq A$ יש שידוך שמספק אותה. ■

הגדרה: הי גרף דו"צ $G = (A \cup B, E)$.

נאמר ש-A הוא **$K_{1,r}$-ספיק** אם קיימים קבוצת כוכבים (בת"ל בקודקודים) כך שכל קודקוד ב-A הוא מרכז של כוכב בעל r צלעות.

כלומר, לכל קודקוד ב-A יש r שכנים שייחודיים לו. כל כוכב כזה הוא גרף $K_{1,r}$.

טענה: גרף דו"צ $G = (A \cup B, E)$ הוא $K_{1,r}$-ספיק **אמ"מ** $\forall S \subseteq A,\ r \cdot |S| \le |N_G(S)|$.

<u>כיוון ראשון</u>: אם G הוא $K_{1,r}$-ספיק, לפי הגדרה לכל קודקוד ב-A יש r שכנים ייחודיים לו, אז בוודאי שלכל $S \subseteq A$ יש לפחות $r \cdot |S|$ שכנים.

<u>כיוון שני</u>: נשכפל כל קודקוד ב-A r פעמים, ונחבר את השכפולים האלה לכל השכנים של הקודקוד המקורי. נסמן את הגרף החדש G'.

בכל $S' \subseteq A'$ ב-G', מספר הקודקודים המשוכפלים מכל קודקוד מקורי הוא לכל היותר r.

סמן S^* את הקבוצה של הקודקודים המקוריים של קודקודים ב-S'. מספר הקודקודים המקוריים של קודקודים ב-S' הוא לפחות $\frac{|S'|}{r}$, כלומר $|S^*| \le \frac{|S'|}{r}$.

כל קבוצה כזו היא $S^* \subseteq A$, אז היא מקיימת את התנאי, כלומר יש לה לפחות $r \cdot |S^*|$ שכנים.

כלומר ל-S' יש לפחות $|S'| = |S^*| \cdot r$ שכנים. A' מקיימת את תנאי הול ב-G'. כלומר יש ב-G' שידוך שמספק את A'.

ניזכר שעל כל קודקוד מקורי ב-A' יש r קודקודים חדשים שמחוברים רק לשכנים המקוריים. כלומר לכל קודקוד מקורי יש r שכנים ייחודיים, כנדרש. ■

TA Session 5: Matching in Graphs, part 2

תזכורת: משפט *tutte*:

נסמן $C_o(G)$ את מספר רכיבי הקשירות מדרג אי-זוגי ב-G. בגרף G יש שידוך מושלם **אמ"מ** לכל $S \subseteq V(G)$ מתקיים $C_o(G-S) \leq |S|$.

טענה: יהי גרף עם $2n$ קודקודים ו- $\delta(G) \geq n$. אזי יש ב-G שידוך מושלם.

ראינו הוכחה עם הנחה בשלילה וקבוצה S, לפחות 2 קודקודים וכו'. נראה הוכחה בעזרת משפט *tutte*.

יהי גרף G כמתואר, ונב"ש שאין בו שידוך מושלם. אז לפי משפט *tutte*, קיימת $S \subseteq V(G)$ כך ש $C_o(G-S) > |S|$.

נסמן $C_1, C_2, \dots, C_m$ את רכיבי הקשירות של $G-S$. כאשר $C_1, \dots C_k$ בגודל אי-זוגי, ו- $C_{k+1}, \dots C_m$ בגודל זוגי.

נניח ש- C_1 הוא בגודל הכי קטן. נשים לב ש $k = C_o(G-S) > |S|$.

כל קודקוד $u \in C_1$ יכול להיות שכן של כל הקודקודים ב-C_1, ושל כל הקודקודים ב-S.

הוא לא יכול להיות שכן של קודקוד מאף רכיב קשירות אחר ב- $G-S$, כי אז הם היו אותו רכיב.

ניזכר שהדרגה המינימלית ב-G היא n, אז לכל $u \in C_1$ מתקיים:

$$n \leq \deg(u) \leq |C_1| + |S| - 1$$

כלומר, נחלק ב-$v(G) = 2n$ ונקבל:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{|C_1|+|S|-1}{2n} =^{\text{א}} \frac{|C_1|+|S|-1}{|S|+\sum_{i=1}^{m}|C_i|} \leq^{\text{ב}} \frac{|C_1|+|S|-1}{|S|+\sum_{i=1}^{k}|C_i|} \leq^{\text{ג}} \frac{|C_1|+|S|-1}{|S|+\sum_{i=1}^{k}|C_1|} =^{\text{ד}} \frac{|C_1|+|S|-1}{|S|+k\cdot|C_1|}$$

א. מספר הקודקודים בגרף הוא הקודקודים ב-S ועוד כל הקודקודים של רכיבי הקשירות בלי S.
ב. $\sum_{i=1}^{m}|C_i| \geq \sum_{i=1}^{k}|C_i|$, אז המנה גדלה.
ג. $\sum_{i=1}^{k}|C_i| \geq \sum_{i=1}^{k}|C_1|$, כי C_1 הכי קטן, אז המנה גדלה.
ד. הסכום לא תלוי ב-i.

כלומר,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{|C_1|+|S|-1}{|S|+k\cdot|C_1|} \implies |S|+k\cdot|C_1| \leq 2(|C_1|+|S|-1) \implies |S|+k\cdot|C_1| \leq 2|C_1|+2|S|-2 \implies$$
$$k\cdot|C_1| \leq 2|C_1|+|S|-2 \implies k\cdot|C_1|-2|C_1|+2 \leq |S| \implies (k-2)|C_1|+2 \leq |S|$$

מכיוון ש $|C_1| \geq 1$, נקבל ש

$$|S| \geq (k-2)|C_1|+2 \geq (k-2)+2 = k$$

סתירה לכך ש $|S| < k$.

טענה: משפט *tutte* גורר את משפט הול. (אם משפט *tutte* נכון, גם משפט הול נכון).

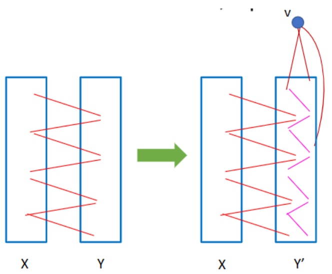
נתון גרף דו"צ $G = (X \cup Y, E)$ שבו X מקיימת את תנאי הול. נניח שמשפט *tutte* נכון ונוכיח שיש ב-G שידוך המספק את X.

נגדיר גרף חדש:

$$H = \left(X \cup Y', E(G) \cup \binom{V(Y')}{2}\right), \qquad Y' := \begin{cases} Y, & v(G)\ is\ even \\ Y \cup \{v\}, & v(G)\ is\ odd \end{cases}$$

כלומר: אם $v(G)$ אי-זוגי, נוסיף קודקוד חדש v ונחבר אותו לכל קודקוד ב-Y. אז $v(H)$ זוגי.

ונוסיף ל- $E(G)$ את כל הצלעות בתוך Y' (נהפוך את $G[Y']$ לקליקה). דוגמה למקרה שבו $v(G)$ אי-זוגי:



TA Session 5: Matching in Graphs, part 2

כדי להוכיח את הטענה, נוכיח 2 למות:

<u>למה 1</u>: יש ב-H שידוך מושלם אמ"מ יש ב-G שידוך שמספק את X.

<u>כיוון ראשון</u>: נניח שיש ב-H שידוך מושלם, M.

נשים לב שאין צלעות $v \to X$. כל הצלעות שיוצאות מ-X מגיעות ל-Y המקורית.

אם ניקח מ-M את הצלעות שמשדכות קודקודים של X, זה שידוך שמספק את X ב-G.

<u>כיוון שני</u>: נניח שיש שידוך שמספק את X. כיוון ש-Y' הוא גרף מלא, מספיק להוכיח ש $|Y'|-|X|$ זוגי.

כי אנחנו יודעים ש- $|Y'|$ זוגי, אז זה יראה שגם $|X|$ זוגי,

ואז השידוך עם X ייקח מספר זוגי של קודקודים מ-Y', וזה משאיר מספר זוגי של קודקודים ב-Y' שישתדכו ביניהם). מתקיים:

$$\underbrace{v(H)}_{even} = |X| + |Y'| = \underbrace{2|X|}_{even} + (|Y'| - |X|)$$

אז $|Y'|-|X|$ זוגי.

<u>למה 2</u>: אם X מקיימת את תנאי הול ב-G, אז H מקיים את תנאי $tutte$.

נניח ש-X מקיימת את תנאי הול, ונב"ש ש-H לא מקיימת את תנאי $tutte$. כלומר, קיימת $S \subseteq V(H)$ כך ש $C_o(H-S) > |S|$.

איך $H-S$ נראה?

יש רכיב קשירות של מה שנשאר מ-Y' וכל הקודקודים ב-X שמחוברים אליו. נקרא לו C.

ויש עוד קודקודים מבודדים מ-X שהיו מחוברים רק לקודקודים ב-S. נסמן אותם $x_1, x_2, \dots, x_k$. הם בעצם רכיבי קשירות בגודל אי-זוגי.

<u>מקרה ראשון</u>: אם C בגודל זוגי, אז $C_o(H-S) = C_o(G-S) = k$. ומההנחה שתנאי $tutte$ לא מתקיים, נקבל $|S| < k$.

אבל X מקיימת את תנאי הול ב-G, ובפרט עבור $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. כלומר:

$$C_o(G-S) = \underbrace{|\{x_1, x_2, \dots, x_k\}|}_{k} \le |N_G(\{x_1, x_2, \dots, x_k\})| = |S|$$

כלומר $|S| \le k$, סתירה למה שראינו ש $|S| < k$.

<u>מקרה שני</u>: אם C בגודל אי-זוגי, אז $C_o(G-S) = k+1$.

נשים לב ש $v(H) = |S| + |C| + k$. מספר הקודקודים ב-C, ועוד הקודקודים שלא ב-C, ועוד הקודקודים שהורדנו.

ונשים לב ש $v(H)$ זוגי ש-$|C|$ אי-זוגי, אז $|S|+k$ אי זוגי. מההנחה שתנאי $tutte$ לא מתקיים, נקבל ש- $|S| < k+1$.

אז נוכל לרשום $|S| \le k$.

אם $|S| = k$, אז $|S|+k$ זוגי, סתירה.

אז $|S| < k$. כמו במקרה הראשון, בגלל ש-X מקיימת את תנאי הול ב-G נקבל $|S| \ge k$, סתירה.

נחזור להוכחת הטענה:

נתון גרף דו"צ $G = (X \cup Y, E)$ שבו X מקיימת את תנאי הול. נניח שמשפט $tutte$ נכון.

אזי מלמה 2, H מקיים את תנאי $tutte$. אז ב-H יש שידוך מושלם.

לפי למה 1, ב-G יש שידוך שמספק את X. ■

הגדרה: בגרף קשיר G, צלע נקראת **גשר** אם $G \setminus \{e\}$ לא קשיר.

משפט פיטרסון: בגרף קשיר, 3-רגולרי, חסר גשרים, יש שידוך מושלם.

<u>טענת עזר</u>: יהי G גרף כמתואר. לכל $S \subseteq V(G)$ ולכל רכיב קשירות אי-זוגי C ב- $G-S$, מתקיים $e_G(S,C) \ge 3$.

<u>הוכחה</u>: יהי G גרף כמתואר. ויהיו $S \subseteq V(G)$ ורכיב קשירות אי-זוגי C ב- $G-S$. מתקיים:

$$\sum_{v\in V(C)} \deg_{G[C]}(v) = 3\cdot v(C) - e_G(S,C)$$

מספר הצלעות בתוך C (ב- $G-S$) הוא 3 כפול מספר הקודקודים ב-C, פחות הצלעות שבין C ל-S בגרף המקורי.

סכום הדרגות ב-C הוא פעמיים מספר הצלעות, אז הוא זוגי.

מכיוון ש $v(C)$ אי-זוגי גם $3\cdot v(C)$ אי-זוגי, אז $e_G(S,C)$ אי-זוגי.

$e_G(S,C)\neq 1$, כי זה גשר. אז $e_G(S,C)\geq 3$.

<u>ניגש להוכחת המשפט</u>: יהי גרף G קשיר, 3-רגולרי, חסר גשרים.

תהי $S\subseteq V(G)$. מספר הצלעות שיוצאות מהקודקודים של S הוא לכל היותר $3|S|$. כלומר $e_G(S,V)\leq 3|S|$.

בפרט, מספר הצלעות שיוצאות מ-S חסום ב- $3|S|$. כלומר $e_G(S,V)\leq 3|S|$.

מצד שני (לפי טענת העזר), כל רכיב קשירות אי-זוגי C ב- $G-S$ מחובר ל-S בלפחות 3 צלעות.

נסמן $k\coloneqq C_o(G-S)$ את מספר רכיבי הקשירות האי-זוגיים ב- $G-S$. כלומר יש לפחות $3k$ צלעות מ-S לשאר הגרף: $3k\leq e_G(S,V)$.

בסה"כ $3k\leq e_G(S,V)\leq 3|S|$, אז $C_o(G-S)=k\leq |S|$.

כלומר G מקיים את תנאי *tutte*, אז יש בו שידוך מושלם. ■