TA Session 2: Classical Reductions, Gallai's Theorem

NPC-ו *NPH*

רדוקציה פולינומית: פונקציה שמעבירה אותנו מבעיה אחת לבעיה אחרת, בזמן פולינומי. הגדרה פורמלית:

פונקציה *f* היא רדוקציה פולינומית בין שפה L_1 לשפה L_2 אם לכל $x \in L_1$:

1. $f(x)$ ניתנת לחישוב בזמן פולינומי.
2. $f(x) \in L_2 \Leftrightarrow x \in L_1$.

שפה *L* תיקרא *NPH* אם לכל שפה ב-*NP* יש רדוקציה אליה. בפועל, לא צריך לעשות רדוקציה מכולן. רדוקציה היא טרנזיטיבית, אז אפשר לקחת שפה שאנחנו כבר מכירים שהיא ב-*NPH* ולהראות רדוקציה ממנה. השפה הראשונה שהתגלתה שהיא *NPH* היא *CNF-SAT*.

הגדרה: $NPC = NPH \cap NP$

איך מראים ששפה *L* היא *NPH*?

1. בוחרים שפה אחרת L' שאנחנו יודעים שהיא *NPH*.
2. בונים פונקציה $L' \to L$.
3. מראים שהפונקציה פולינומית.
4. מראים ש $f(x) \in L \Leftrightarrow x \in L'$.

NAE-K-CNF-SAT

ראינו ש- *2-CNF-SAT* היא *P*, ושעבור כל $k \geq 3$, *k-CNF-SAT* היא *NPC*.

ראינו את *NAE-SAT*, ואת *NAE-k-CNF-SAT*.

נרצה להראות ש *NAE-3-CNF-SAT* היא *NPH*. כדי לעשות את זה, נעשה קודם רדוקציה: $\text{3-CNF-SAT} \leq_p \text{NAE-4-CNF-SAT}$, ואז רדוקציה $\text{NAE-4-CNF-SAT} \leq_p \text{NAE-3-CNF-SAT}$.

$\text{3-CNF-SAT} \leq_p \text{NAE-4-CNF-SAT}$:

נגדיר משתנה חדש *w*. ונגדיר פונקציית עזר: $g\big((x \vee y \vee z)\big) = (x \vee y \vee z \vee w)$.

פונקציית הרדוקציה: $f(\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m) = g(\varphi_1) \wedge g(\varphi_2) \wedge \cdots \wedge g(\varphi_m) = \varphi'$

נוכיח את קיום 2 התנאים:

1. קל לראות שהפונקציה פולינומית.

2. נוכיח את שני הכיוונים:

כיוון ראשון: נניח ש $\varphi \in \text{3-CNF-SAT}$. כלומר יש השמה מספקת. אז בכל פסוקית יש ליטרל שמקבל *T* תחת ההשמה. אז אם נוסיף ליטרל שמקבל *F*, נקבל נוסחה מסופקת עם 4 ליטרלים שבה יש לפחות אחד *T* ואחד *F*.

כיוון שני: נניח ש $f(\varphi) \in \text{NAE-4-CNF-SAT}$. כלומר יש לו השמה מספקת. אם $w = F$ תחת ההשמה, אז בכל פסוקית יש משתנה מקורי *T*. אם $w = T$ תחת ההשמה, בוודאות יש ליטרל אחר שמקבל *F*. אז ניקח את ההשמה הנגדית (ועכשיו $w = F$, ועדיין יש ליטרל שמקבל *T*).

$\text{NAE-4-CNF-SAT} \leq_p \text{NAE-3-CNF-SAT}$:

לכל פסוקית נגדיר משתנה חדש, w_i. ניקח את הפסוקית בגודל 4 ונפצל אותה ל-2 פסוקיות בגודל 3:

$$g\big(\varphi_i = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)\big) = (x_1 \vee x_2 \vee w_i) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee \overline{w}_i)$$

פונקציית הרדוקציה: $f(\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m) = g(\varphi_1) \wedge g(\varphi_2) \wedge \cdots \wedge g(\varphi_m) = \varphi'$

נוכיח את התנאים:

1. ברור שהפונקציה פולינומית.

2. נוכיח את שני הכיוונים:

כיוון ראשון: נניח ש $\varphi \in \text{NAE-4-CNF-SAT}$.

אם תחת ההשמה המספקת, $x_1 = x_2$, אז נגדיר את $w_i = \overline{x_1}$. אחרת, נגדיר $w_i = \overline{x_3}$.

אם תחת ההשמה המספקת, $x_1 \neq x_2$, אז הפסוקית הראשונה היא *NAE-SAT*. כנ"ל עבור $x_3 \neq x_4$ בפסוקית השנייה.

אם $x_1 = x_2 = T$, אז נגדיר את $w_i = F$. ומהגדרת ה-*NAE-4-CNF-SAT*, אנחנו יודעים שלא יכול להיות ש $x_3 = x_4 = T$. אז $\overline{w}_i = T$, ושתי הפסוקיות מקיימות *NAE-SAT*.

אם $x_1 = x_2 = F$, אז נגדיר את $w_i = T$. ומהגדרת ה-*NAE-4-CNF-SAT*, אנחנו יודעים שלא יכול להיות ש $x_3 = x_4 = F$. אז $\overline{w}_i = F$, ושתי הפסוקיות מקיימות *NAE-SAT*.

כיוון שני: נניח ש $f(\varphi) \in$ NAE-3-CNF-SAT

אם $x_1 \neq x_2$ או $x_3 \neq x_4$, סיימנו.

אם $x_1 = x_2 = T$, אז הגדרנו את $w_i = F$. וזה אומר ש $\overline{w}_i = T$, ובגלל התנאי *NAE-3-CNF-SAT* אנחנו יודעים שלפחות אחד מתוך x_3, x_4 היה F.

אם $x_1 = x_2 = F$, אז הגדרנו את $w_i = T$. ובצורה דומה אנחנו יודעים שלא יכול להיות ש $x_3 = x_4 = F$.

ובה"כ עבור המקרה שבו $x_3 = x_4$.

בכל המקרים, נקבל ש-$\varphi \in$ NAE-4-CNF-SAT

$\boldsymbol{Clique \in NPH}$

שפת כל הזוגות: (G, k) כך שבתוך הגרף G יש תת-גרף שהוא קליקה K_k. (תת-קבוצה של קודקודים בגודל k שיש ביניהם את כל הצלעות).

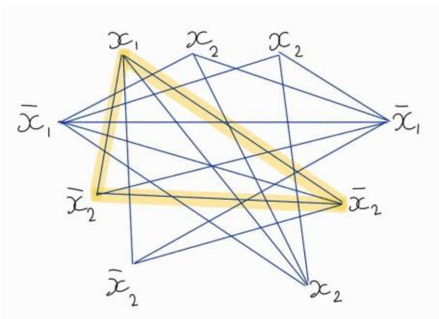
נראה רדוקציה: $3\text{-}CNF\text{-}SAT \leq_p clique$.

בהינתן פסוק *3-CNF-SAT*, נייצר גרף G:

מכל פסוקית $\varphi_i = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ נייצר 3 קודקודים מתאימים: x_1^i, x_2^i, x_3^i.

נחבר כל 2 קודקודים שהם לא הפכים אחד של השני ולא מאותה פסוקית. לדוגמה:

$$\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_2)$$



ככה, אם בכל פסוקית יש ליטרל שיכול להיות אמת, אז כולם יהיו מחוברים בגרף.

הפונקציה תחזיר את G ו-m (מספר הפסוקיות בביטוי).

נוכיח את נכונות הרדוקציה. בניית הגרף היא בסיבוכיות פולינומית. נוכיח ש $\varphi \in 3\text{-}CNF\text{-}SAT \Leftrightarrow (G, m) \in Clique$:

כיוון ראשון:

נניח ש $\varphi \in 3\text{-}CNF\text{-}SAT$:

כלומר קיימת השמה מספקת. מכל פסוקית, ניקח ליטרל אחד שמקבל אמת תחת ההשמה (בוודאות קיים) ונשים את הקודקוד המתאים בקבוצה S.

בקבוצה S, אין שני קודקודים מאותה פסוקית (כי לקחנו רק אחד מכל פסוקית).

כל הקודקודים האלה הם בוודאות לא הפכים (כלומר $x, \bar{x}$) כי כולם T.

כלומר, יהיו צלעות בין כולם (לפי הבנייה).

מצאנו קליקה בגודל m, אז $(G, m) \in Clique$.

כיוון שני:

נניח ש $(G,m) \in Clique$:

ניקח את S, קבוצת הקודקודים שמגדירים את הקליקה. לפי הבנייה, כולם הגיעו מפסוקיות שונות ואף אחד לא משלים של השני.

אז ההשמה המספקת – כל ליטרל ב-S יקבל T (ואין סתירות). כל ליטרל שלא ב-S יכול לקבל כל ערך.

זאת השמה מספקת כי יש ליטרל אחד מסופק (לפחות) בכל פסוקית. אז $\varphi \in 3\text{-}CNF\text{-}SAT$.

תזכורות והגדרות:

IS (Independent Set) – קבוצה בלתי תלויה. קבוצת קודקודים שאין ביניהם אף צלע. השפה:

$$IS = \{(G,k) : \exists C \subseteq V(G) : |C| = k, and\ C\ is\ an\ IS\}$$

VC (Vertex Cover) – כיסוי קודקודים. קבוצת קודקודים שנוגעת בכל הצלעות.

$$VC = \{(G,k) : \exists C \subseteq V(G) : |C| = k, and\ C\ is\ a\ VC\}$$

Matching – שידוך. קבוצת צלעות שאין ביניהם אף קודקוד משותף.

Edge Cover – כיסוי צלעות. קבוצת צלעות שנוגעת בכל הקודקודים.

$\alpha(G)$ – גודל הקבוצה בת"ל המקסימום.

$\tau(G)$ – (טאו, *tau*) גודל כיסוי בקודקודים מינימום.

$\nu(G)$ – (נו, *nu*) גודל שידוך מקסימום.

$\varrho(G)$ – (רו, *rho*) גודל כיסוי בצלעות מינימום.

$\upsilon(G)$ – מספר הקודקודים בגרף, $|V(G)|$.

משפט: קבוצת קודקודים S היא בת"ל **אמ"מ** $V(G) \setminus S$ היא כיסוי בקודקודים.

הוכחה: גרירה דו כיוונית.

<u>כיוון ראשון</u>: S קבוצה בת"ל <= לכל צלע בגרף, מקסימום קצה אחד נמצא ב-S <= לכל צלע יש לפחות קודקוד אחד שלא ב-S <= $V(G) \setminus S$ נוגעת בכל הצלעות <= $V(G) \setminus S$ היא כיסוי בקודקודים.

<u>כיוון שני</u>: תהי $V(G) \setminus S$ כיסוי בקודקודים <= לכל צלע, לפחות אחת הצלעות נוגעת ב-$V(G) \setminus S$ <= אין ב-S שני קודקודים על אותה צלע <= S היא קבוצה בת"ל.

מסקנה מהמשפט: $\alpha(G) + \tau(G) = |V(G)|$.

$IS \leq_p VC$

נרצה פונקציה שמקבלת $(G,k) \in IS$, ומחזירה $(G, |V(G)| - k) \in VC$.

משפט *Gallai*: לכל גרף G בלי קודקודים מבודדים, מתקיים: $\rho(G) + \nu(G) = |V(G)|$.

בלי קודקודים מבודדים – הגרף יכול להיות לא קשיר, אבל אין קודקוד שאין לו שכנים בכלל.

נוכיח בשני שלבים: חסם עליון וחסם תחתון.

הוכחת חסם תחתון: $\boldsymbol{\rho(G) + \nu(G) \geq |V(G)|}$

ניקח את L להיות הכיסוי המינימלי בצלעות.

נתבונן בגרף המושרה $G[L]$: אין בו מעגלים. (אם יש מעגל, אז אפשר לוותר על צלע אחת ולקבל כיסוי מינימלי יותר).

ואין בו P_3 – מסלולים באורך 3. (כי אפשר לוותר על הצלע האמצעית).

כלומר, הכיסוי הוא אוסף של "כוכבים" מופרדים. כוכב יכול להיות גם צלע בודדת.

יהי s מספר הכוכבים. אם ניקח צלע אחת מכל כוכב, נקבל שידוך. אז $\nu(G) \geq s$.

נשים לב ש $\rho(G) + s = |V(G)|$.

כי s הוא גם מספר הקודקודים הפנימיים בכוכבים. ו-ρ הוא מספר הצלעות בכוכבים – שזה שווה למספר הקודקודים החיצוניים בקודקודים.

אז $\rho(G) + \nu(G) \geq |V(G)|$.

חסם עליון: $\boldsymbol{\rho(G) + \nu(G) \leq |V(G)|}$

יהי M שידוך מקסימלי. נגדיר $U = V(G) \setminus V(M)$.

אז $|U| = |V(G)| - 2\nu(G)$. (כי כל צלע בשידוך תורמת 2 קודקודים).

U היא IS (כי אם הייתה צלע, היא לא מחוברת לאף קודקוד בשידוך, אז היינו יכולים להוסיף אותה לשידוך, סתירה למקסימליות).

ניזכר בהנחה שאין קודקודים מבודדים בגרף. כלומר, כל קודקוד ב-U מחובר ללפחות קודקוד אחד ב-$V(M)$ (כי כל קודקוד ב-U לא מחובר לאף קודקוד אחר ב-U, אבל הוא חייב להיות מחובר לקודקוד כלשהו. אז זה חייב להיות קודקוד מ-$V(M)$).

עבור כל קודקוד $u \in U$, נבחר צלע אחת שמתחברת ל-$V(M)$. נשים אותם בקבוצה S.

אזי, $S \cup M$ היא כיסוי בצלעות. כי M מכסה את הקודקודים שלה, והוספו צלע שמחוברת לכל קודקוד שלא ב-M.

היא לא בהכרח מינימלית, אבל מתקיים:

$$\rho(G) \leq |M \cup S| = \nu(G) + |U| = \nu(G) + |V(G)| - 2\nu(G) = |V(G)| - \nu(G)$$

$$\rho(G) + \nu(G) \leq |V(G)|$$