תרגיל 1

סעיף א: בהיפרגרף, כל צלע היא קבוצת צלעות. גרף זה פשוט היפרגרף שבו כל צלע היא בגודל 2.

סעיף ב1: הווקטור שלנו יהיה מורכב מ- $x_v \in \{0,1\}$, משתנה לכל קודקוד. אנחנו רוצים למקסם את $\sum_{v\in V} x_v$, תחת ההגבלה:

$$\forall e \in E, \qquad \sum_{v\in V} A_{ve} x_v \le k-1$$

סעיף ב2: השינוי הוא $0 \le x_v \le 1$.

סעיף ג: נגדיר $X \coloneqq \sum_{v\in V} x_v$. זה גודל הקבוצה המתקבלת מהאלגוריתם.

נשים לב שמתקיים $OPT_f \ge \alpha(H)$, בהנחה שהפיתרון של ה-LP הוא אופטימלי. וגם $OPT_f = \sum_{v\in V} x_v^*$, בהגדרה.

וגם, $\alpha(H) \ge k-1$ כי כל צלע היא בגודל k, אז קבוצה בגודל $k-1$ לא יכולה לכסות אף צלע.

אז מתקיים:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{v\in V} x_v\right] = \sum_{v\in V} \mathbb{E}[x_v] = \sum_{v\in V} \mathbb{P}[x_v = 1] = \sum_{v\in V}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)x_v^* = \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sum_{v\in V} x_v^* = \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)OPT_f$$

אנחנו רוצים להשתמש ב- $\mathbb{P}\big[X < (1-\beta)\mathbb{E}[X]\big] \le \exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\mathbb{E}[X]\right)$, כדי לחסום את $\mathbb{P}[X < (1-\varepsilon)\alpha(H)]$. מכיוון ש-$OPT_f \ge \alpha(H)$, נקבל:

$$\mathbb{P}[X < (1-\varepsilon)\alpha(H)] \le \mathbb{P}\left[X < (1-\varepsilon)OPT_f\right]$$

נבחר $\beta = \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}$:

$$\mathbb{P}\left[X < \left(1-\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)OPT_f\right] = \mathbb{P}\left[X < \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)OPT_f - \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)OPT_f\right] = \mathbb{P}\left[X < OPT_f - \frac{\varepsilon}{2}OPT_f - \frac{\varepsilon}{2}OPT_f\right]$$
$$= \mathbb{P}\left[X < OPT_f - \varepsilon\cdot OPT_f\right] = \mathbb{P}\left[X < (1-\varepsilon)OPT_f\right] \le \exp\left(-\frac{\left(\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)^2}{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)OPT_f\right)$$

נצמצם את החזקה של e:

$$\frac{\left(\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)^2}{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon^2}{2(2-\varepsilon)^2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon^2}{2(2-\varepsilon)^2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon^2}{2(2-\varepsilon)(2-\varepsilon)}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon^2}{2(2-\varepsilon)2\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$= \frac{\varepsilon^2}{2(2-\varepsilon)2} = \frac{\varepsilon^2}{4(2-\varepsilon)} = \frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}$$

וניזכר ש- $OPT_f \ge \alpha(H) \ge k-1$, אז:

$$\exp\left(-\frac{\left(\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)^2}{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)OPT_f\right) = \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}(k-1)\right)$$

כנדרש.

סעיף ד: ה-m זה מספר הצלעות. ההסתברות $1 - m\cdot\exp\left(-\frac{\varepsilon^2(k-1)^2}{2n}\right)$ מרמזת על חסם איחוד על הצלעות.

לכל צלע $e \in E(H)$, מתקיים: $\sum_{v\in V} A_{ve}x_v^* \le k-1$. זה לפי הגדרת ה-$LP$.

נגדיר $F_e \coloneqq \sum_{v\in V} A_{ve}x_v$ ונשים לב ש- F_e עונה על התנאים של 1.3. אז לכל צלע מתקיים:

$$\mathbb{E}[F_e] = \mathbb{E}\left[\sum_{v\in V} A_{ve}x_v\right] = \sum_{v\in V} A_{ve}\mathbb{E}[x_v] = \sum_{v\in V} A_{ve}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)x_v^* = \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sum_{v\in V} A_{ve}x_v^* \le \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)(k-1)$$

אנחנו יכולים לחסום את: $\mathbb{P}\left[F_e > \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)(k-1) + \lambda\right]$, ורוצים לחסום את $\mathbb{P}[F_e > k-1]$. כלומר אנחנו רוצים:

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)(k-1) + \lambda = k-1 \Rightarrow \lambda = (k-1) - \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)(k-1) = (k-1) - (k-1) + \frac{\varepsilon}{2}(k-1) = \frac{\varepsilon}{2}(k-1)$$

$$\mathbb{P}\left[F_e > \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)(k-1) + \frac{\varepsilon}{2}(k-1)\right] \leq \exp\left(-\frac{2\left(\frac{\varepsilon}{2}(k-1)\right)^2}{n}\right) = \exp\left(-\frac{2\frac{\varepsilon}{2}(k-1)\frac{\varepsilon}{2}(k-1)}{n}\right) = \exp\left(-\frac{\varepsilon^2(k-1)^2}{2n}\right)$$

אז ההסתברות שאין אף צלע בעייתית, לפי חסם איחוד היא לפחות:

$$1 - m \cdot \exp\left(-\frac{\varepsilon^2(k-1)^2}{2n}\right)$$

כנדרש.

סעיף ה: נשתמש באלגוריתם הנתון, ונציב את הנתונים בחסמים שמצאנו. ההסתברות שקיבלנו קבוצה בת"ל:

$$1 - m \cdot \exp\left(-\frac{\varepsilon^2(k-1)^2}{2n}\right)$$

אנחנו רוצים שיתקיים:

$$m \cdot \exp\left(-\frac{\varepsilon^2(k-1)^2}{2n}\right) = o(1)$$

זה קורה אם:

$$\frac{\varepsilon^2(k-1)^2}{2n} \geq 2\ln m$$

כי אז:

$$m \cdot \exp\left(-\frac{\varepsilon^2(k-1)^2}{2n}\right) \leq m \cdot \exp(-2\ln m) = m \cdot \exp(\ln m^{-2}) = m \cdot m^{-2} = \frac{1}{m}$$

ונשים לב:

$$\frac{\varepsilon^2(k-1)^2}{2n} \geq 2\ln m \Longrightarrow \varepsilon^2(k-1)^2 \geq 4n\ln m \Longrightarrow (k-1)^2 \geq \frac{4n\ln m}{\varepsilon^2} \Longrightarrow$$

מכיוון ששני הצדדים חיוביים, נוכל להוציא שורש:

$$k-1 \geq \frac{\sqrt{4n\ln m}}{\varepsilon} \Longrightarrow k \geq \frac{\sqrt{4n\ln m}}{\varepsilon} + 1$$

?...

ההסתברות שהקבוצה בגודל לפחות $(1-\varepsilon)\alpha(H)$ היא לפחות:

$$1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}(k-1)\right)$$

אנחנו רוצים שיתקיים:

$$\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}(k-1)\right) = o(1)$$

ונשים לב שנתון לנו $k = \Omega\left(\sqrt{n\ln m}\right)$, אז:

$$\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}(k-1) = \Omega\left(\sqrt{n\ln m}\right) \Longrightarrow \exp\left(-\Omega\left(\sqrt{n\ln m}\right)\right) = o(1)$$

כנדרש.

תרגיל 2

סעיף א: בכל שלב, ניקח את הצלע שנוגעת בהכי הרבה קודקודים שלא מכוסים עדיין.

סעיף ב: ראשית, נשים לב שכל שתי צלעות חולקות לגל היותר $k-1$ קודקודים, כי אחרת הן אותה צלע.

נרוץ k פעמים. בכל פעם, ניקח את הצלע שמכסה הכי הרבה קודקודים שעוד לא מכוסים.

סעיף ג: $\cup \mathcal{A}_i$ זה כל הקודקודים שמכוסים בסוף האיטרציה ה-i.

בסוף האיטרציה ה-i, נשארו $OPT - |\cup \mathcal{A}_i|$ קודקודים שצריך לכסות. הפיתרון האופטימלי מכסה אותם, ע"י לכל היותר k צלעות. כלומר לפי עיקרון שובך היונים, יש צלע שמכסה לפחות $\frac{OPT-|\cup \mathcal{A}_i|}{k}$ קודקודים שעדיין לא מכוסים. ואנחנו לוקחים את הצלע שמכסה הכי הרבה קודקודים לא מכוסים, אז ניקח צלע שמכסה לפחות כזו כמות של קודקודים חדשים. בסה"כ:

$$N_{i+1} \geq \frac{OPT - |\cup \mathcal{A}_i|}{k}$$

סעיף ד: נוכיח באינדוקציה על i. עבור $i=0$ מתקיים:

$$OPT - \left|\bigcup \mathcal{A}_0\right| = OPT = \left(1-\frac{1}{k}\right)^0 OPT$$

צעד. מתקיים:

$$OPT - \left|\bigcup \mathcal{A}_{i+1}\right| = OPT - \left|\bigcup \mathcal{A}_i\right| - N_{i+1} \leq^{\aleph} OPT - \left|\bigcup \mathcal{A}_i\right| - \frac{OPT - |\cup \mathcal{A}_i|}{k} = \left(1-\frac{1}{k}\right)\left(OPT - \left|\bigcup \mathcal{A}_i\right|\right) \leq$$

א. מסעיף ג.

שזה, לפי הנ"א:

$$\leq \left(1-\frac{1}{k}\right)\left(OPT - \left|\bigcup \mathcal{A}_i\right|\right) \leq \left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{k}\right)^i OPT = \left(1-\frac{1}{k}\right)^{i+1} OPT$$

כנדרש.

סעיף ה: מספר הקודקודים שיש בפתרון האופטימלי שהפתרון החמדן מפספס, הוא:

$$OPT - \left|\bigcup \mathcal{A}_k\right| \leq^{\aleph} \left(1-\frac{1}{k}\right)^k OPT \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{e} OPT$$

א. לפי סעיף ד.

כנדרש.

תרגיל 3

סעיף א: נוכיח ע"י רדוקציה משפת *CNF-SAT*. לכל משתנה, נייצר גאדג'ט:

$$g(x) \coloneqq (x \vee x \vee x \vee x \vee \bar{x})$$

ונגדיר:

$$f(\varphi) \coloneqq \varphi \wedge \bigwedge\nolimits_{x\in\varphi} g(x)$$

ב- $f(\varphi)$, כל משתנה מופיע לפחות 5 פעמים. ומכיוון שכל גאדג'ט תמיד מסופק, הספיקות תלויה רק בספיקות של φ.

סעיף ב: נעשה רדוקציה משפת *k-clique*. בהינתן בעיה (G,k), כאשר $v(G)=n$, נגדיר גרף G':

נוסיף n^2-n קודקודים חדשים. (כלומר ב- G' יהיו בדיוק n^2 קודקודים. אנחנו רוצים שתהיה קליקה בגודל n, אמ"מ ב-G הייתה קליקה בגודל k).

מתוכם נבחר קבוצה S בגודל $n-k$. נהפוך אותה לקליקה, ונחבר כל קודקוד ב-S לכל הקודקודים של G.

אם הייתה ב-G קליקה בגודל k, אז הוספנו $n-k$ קודקודים לקליקה ויש לנו קליקה בגודל n בגרף עם n^2 קודקודים.

אם לא הייתה ב-G קליקה בגודל k, אז הקליקה הגדולה ביותר ב- G' לא תהיה בגודל n.

כנדרש.

תרגיל 4

סעיף א: $\kappa(G)$ מוגדר להיות ה-k הכי גדול כך שלכל קבוצת קודקודים בגודל $k-1$ שנוריד, הגרף יישאר קשיר.

$\kappa'(G)$ מוגדר באופן דומה, עבור צלעות.

סעיף ב1: מתקיים $\kappa(G)\le\kappa'(G)$.

סעיף ב2: כי אם יש קבוצת צלעות מפרידה, אם נוריד קודקוד אחד מכל צלע כזו, זה מוריד את כל הצלעות האלה.

סעיף ג:

הכיוון הראשון טריוויאלי: אם יש k מסלולים זרים בקודקודים, אז על כל מסלול נצטרך להוריד צלע כדי להפריד ביניהם. אז $\kappa'_G(x,y)\le\rho'_G(x,y)$.

בכיוון השני:

נגדיר גרף G': נוסיף קודקוד s מחובר ל-x, וקודקוד t מחובר ל-y. זה לא משפיע על הקשירות של הגרף. בפרט,

$$\kappa'_G(x,y)=\kappa'_{G'}(x,y),\qquad \rho'_G(x,y)=\rho'_{G'}(x,y)$$

נתבונן ב- $L(G')$ – גרף הצלעות של G'. מסלול זר בצלעות בין x,y ב-G' הוא מסלול זר בקודקודים בין sx,yt ב- $L(G')$. ולפי משפט מנגר, מתקיים:

$$\kappa_{L(G')}(xs,yt)=\rho_{L(G')}(xs,yt)$$

חתך בצלעות ב-G' הוא חתך בקודקודים ב- $L(G')$, אז $\kappa'(G')=\kappa\big(L(G)\big)$. אז:

$$\kappa'_{G'}(x,y)=\kappa_{L(G')}(xs,yt)$$

ומסלול זר בקודקודים ב-G' הוא מסלול זר בצלעות ב- $L(G')$, אז:

$$\rho'_{G'}(x,y)=\rho_{L(G')}(xs,yt)$$

בסה"כ:

$$\kappa'_G(x,y)=\kappa'_{G'}(x,y)=\kappa_{L(G')}(xs,yt)=\rho_{L(G')}(xs,yt)=\rho'_{G'}(x,y)$$

כנדרש.

.