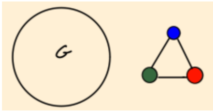
TA Session 1: Self Reductions for 3-col, 2-CNF-SAT in P

אלגוריתם לבעיית *3-COL*

בהינתן אלגוריתם A לבעיית ההכרעה של *3-COL* (מחזיר 1 אם הצביעה אפשרית ו-0 אחרת), נגדיר אלגוריתם B לבעיית החיפוש:

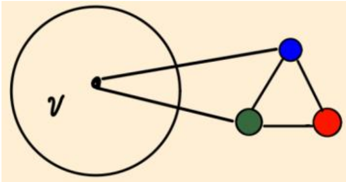
אם $A(G) = 0$, נחזיר $NULL$.

אחרת, נוסיף 3 קודקודים חדשים לגרף. נצבע אותם $R,\ G,\ B$. ונחבר אותם בצלעות:



לכל קודקוד $v \in V(G)$:

נחבר את v ל-B ו-G:

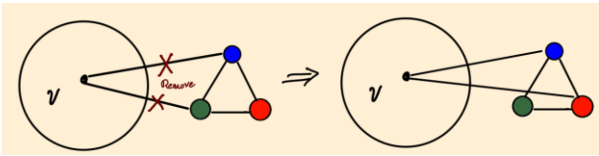


כדי שתהיה 3-צביעה חוקית, הקודקוד הזה חייב להיות אדום.

נריץ את A על הגרף החדש.

אם קיבלנו 1, נצבע את v באדום ונמשיך לקודקוד הבא.

אם קיבלנו 0: נמחק את שתי הצלעות החדשות ונעשה את אותו תהליך עם R ו-B.



נחזיר את הצביעה שקיבלנו בסוף.

זמן הריצה הוא פולינומי ב- $T(A)$. אז אם A אלגוריתם פולינומי, גם B פולינומי.

הסבר: אם A החזיר 1, אז בוודאות יש 3-צביעה תקינה אפשרית. נמצא אותה. נוסיף את 3 הקודקודים. הם לא משפיעים על הצביעה של הגרף.

אם הוא היה 3-צביע לפני, אז הוא עדיין 3-צביע.

נסתכל על קודקוד כלשהו ונחבר אותו לשניים מהקודקודים החדשים.

הסיבה היחידה שהגרף החדש לא יהיה 3-צביע, היא אם בכל 3-צביעה אפשרית, הקודקוד הזה צריך להיות באחד הצבעים שחיברנו אותו אליהם.

בגלל שיש 3-צביעה אפשרית, בוודאות הקודקוד הזה יכול להיות באחד הצבעים. צריך רק למצוא איזה צבע.

אחרי שמצאנו את הצבע לקודקוד הזה, נמשיך ונמצא את הצבע לקודקוד הבא. התהליך זהה.

יש פה סוג של אינדוקציה – בכל שלב, השינוי לא משפיע על האפשרות לצביעה תקינה של הגרף.

ובכל שלב אנחנו קובעים צבע תקין לקודקוד לפי הצביעה. אז בסוף נקבל את הצביעה.

P and NP

P היא קבוצת כל השפות (בעיות הכרעה) שקיים עבורן אלגוריתם פולינומי.

NP היא קבוצת כל השפות שקיים עבורן **מוודא** (עד) פולינומי. כלומר, בהינתן פתרון, נוכל לבדוק את הנכונות שלו בזמן פולינומי.

עבור שפת *k-clique* (כל הגרפים שיש בהם k-קליקה בתור תת-גרף), העד יהיה תת-הגרף הזה (קבוצת הקודקודים, ואז נוודא שיש את כל הצלעות ביניהן).

עבור *3-COL*, העד הוא 3-צביעה. נעבור על כל הצלעות ונבדוק אם יש שני קודקודים סמוכים באותו צבע.

עבור *CNF-SAT*, העד הוא השמה. נעבור על הפסוק לפי ההשמה ונוודא שבכל פסוקית יש T ו-F ושהפסוק מסופק.

TA Session 1: Self Reductions for 3-col, 2-CNF-SAT in P

נוכיח ש-$2\text{-}CNF\text{-}SAT$ נמצאת ב-P:

בהינתן פסוק φ, נגדיר גרף מכוון D כך:

לכל משתנה x, נגדיר קודקודים $x, \bar{x}$.

לכל פסוקית $(x \vee y)$ נגדיר צלעות בגרף: $\bar{x} \to y,\ \bar{y} \to x$.

טענה 1: השמה a לא מספקת את φ **אמ"מ** קיימת צלע בגרף מהצורה $T \to F$.

<u>כיוון ראשון</u>: נניח ש-a לא מספקת. כלומר לפי ההשמה, בפסוק יש פסוקית מהצורה: $(F \vee F)$. כלומר בגרף, תהיה צלע מהצורה $\bar{F} \to F$, שזה $T \to F$.

<u>כיוון שני</u>: נניח שקיימת צלע מהצורה $T \to F$. כלומר הייתה פסוקית $(F \vee F)$ תחת ההשמה. אז ההשמה לא מספקת.

טענה 2: אם בגרף קיימת הצלע $x \to y$, אז קיימת גם הצלע $\bar{y} \to \bar{x}$.

הוכחה: הצלע $x \to y$ קיימת $\Leftarrow$ הפסוקית $(\bar{x} \vee y)$ קיימת $\Leftarrow$ הצלע $\bar{y} \to \bar{x}$ קיימת.

תזכורת: רכיב קשירות חזקה (SCC): קבוצת קודקודים שאפשר להגיע מכל קודקוד לכל קודקוד אחר, בכל כיוון.

טענה 3: אם x, y נמצאים באותו רכיב קשירות חזקה, אז גם $\bar{x}, \bar{y}$.

הוכחה: אם הם באותו רכיב קשירות חזקה, אז יש מסלולים $x \rightsquigarrow y,\ y \rightsquigarrow x$.

לפי טענה 2, כל אחת מהצלעות במסלול קיימת גם בכיוון ההפוך עם המשלימים, אז יש גם מסלולים $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{y},\ \bar{y} \rightsquigarrow \bar{x}$.

טענה 4: קיימת השמה מספקת **אמ"מ** אין משתנה x כך ש-$x, \bar{x}$ שניהם נמצאים באותו רכיב קשירות חזקה.

<u>כיוון ראשון</u>: תהי השמה מספקת a. נב"ש שקיים משתנה x כך ש-$x, \bar{x}$ שניהם נמצאים באותו רכיב קשירות חזקה.

כלומר קיימים המסלולים $x \rightsquigarrow \bar{x},\ \bar{x} \rightsquigarrow x$. כלומר המסלולים הם בעצם $T \rightsquigarrow F,\ F \rightsquigarrow T$.

אז איפשהו באמצע יש צלע $T \to F$. לפי טענה 1, זה אומר שההשמה לא מספקת. סתירה.

<u>כיוון שני</u>: נניח שאין משתנה x כך ש-$x, \bar{x}$ שניהם נמצאים באותו רכיב קשירות חזקה.

ניקח את גרף הרכיבים של D (כל רכיב קשירות חקה הוא קודקוד, בהכרח יש צלעות רק בכיוון אחד בין כל קודקוד אז הגרף חסר מעגלים).
נבצע מיון טופולוגי של הגרף.

לכל משתנה x, נגדיר $a(x) = T$ אם x מופיע אחרי $\bar{x}$. אחרת, $a(x) = F$. כלומר לכל משתנה, הערך F יופיע לפני הערך T.

לפי טענה 1, מספיק להוכיח שאין צלע $T \to F$.

נתבונן בצלע $x \to y$ כלשהי. לפי טענה 2, גם הצלע $\bar{y} \to \bar{x}$ קיימת.

<u>מקרה א</u>: נניח ש-x, y נמצאים באותו רכיב קשירות חזקה.

לפי טענה 3, $\bar{x}, \bar{y}$ נמצאים באותו רכיב קשירות חזקה. ולפי ההנחה, הצלע נמצאת ברכיב קשירות חזקה אחר.

אם $\bar{x}, \bar{y}$ נמצאים לפני x, y במיון הטופולוגי, אז $\bar{x} = F,\ \bar{y} = F$, אם $\bar{x}, \bar{y}$ נמצאים אחרי x, y במיון הטופולוגי, אז $\bar{x} = T,\ \bar{y} = T$.

כלומר הצלעות הן רק $T \to T$ או $F \to F$.

<u>מקרה ב</u>: אם x, y לא באותו רכיב קשירות חזקה, אז בגלל המיון הטופולוגי, x מופיע לפני y.

נב"ש שהצלע היא $T \to F$. כלומר, $\bar{x}$ מופיע לפני x, ו-$\bar{y}$ יהיה אחרי y. כלומר יש לנו משהו מהצורה:

$$\bar{x} \rightsquigarrow x \to y \rightsquigarrow \bar{y}$$

וכמו שאמרנו לפי טענה 2, גם הצלע $\bar{y} \to \bar{x}$ קיימת. סתירה לכך שהגרף חסר מעגלים ולמיון הטופולוגי.

אז בעזרת טענה 4, נתאר אלגוריתם עבור $2\text{-}CNF\text{-}SAT$:

נבנה את הגרף D כמו שתיארנו לעיל. (זמן ריצה $O(n+m)$)

לכל משתנה x: $O(n)$

בעזרת BFS, נחפש האם קיימים מסלולים $\bar{x} \rightsquigarrow x$ או $x \rightsquigarrow \bar{x}$. $O(n+m)$

אם שניהם קיימים (כלומר x, $\bar{x}$ נמצאים באותו רכיב קשירות חזקה), נחזיר 0 (בגלל טענה 4).

נחזיר 1.

סה"כ זמן ריצה $O(n^2+nm)$