Hamiltonicity

בגרף G, *k-factor* הוא קבוצת צלעות כך שכל קודקוד בגרף מחובר לבדיוק k צלעות. אז *1-factor* הוא שידוך מושלם.

תרגיל 1

יהי $G := (V, E)$ גרף 3-רגולרי, שיש לו 3-צביעה בצלעות יחידה.

טענה: G הוא המילטוני.

הוכחה:

נקרא למחלקות הצבע: M_1, M_2, M_3. ומתקיים: $E = M_1 \uplus M_2 \uplus M_3$.

כל M_i מהווה שידוך. ובגלל שהגרף הוא 3-רגולרי, כל קודקוד נוגע בשלושת הצבעים. אז כל אחד מהשידוכים הוא שידוך מושלם.

בנוסף, $M_1 \uplus M_2$ מהווה *2-factor* של G. כל קודקוד מחובר לבדיוק 2 צלעות. אז כל קודקוד הוא בעצם חלק ממעגל פשוט. וכל המעגלים האלה הם באורך זוגי, כי זה צלעות רק מ- $M_1 \uplus M_2$ אז זה חייב להיות מסלול בצבעים מתחלפים.

אם $M_1 \uplus M_2$ זה בדיוק מעגל אחד, זה מעגל המילטוני. אז נב"ש שיש לפחות שני מעגלים.

אז אפשר להחליף את הצבעים באחד המעגלים, סתירה לכך שיש צביעה יחידה.

תרגיל 2

יהי $G := (V, E)$ גרף שהוא *traceable* – כלומר, יש בו מסלול (לא בהכרח מעגל) המילטוני.

תהי קבוצה $S \subseteq V$. טענה: ב- $G - S$ יש לכל היותר $|S| + 1$ רכיבי קשירות.

הוכחה: יהי P מסלול המילטון ב-G. עבור גרף H, נסמן $C(H)$ את מספר רכיבי הקשירות שלו.

מכאן, נציע 3 הוכחות.

הוכחה א: כל קודקוד שמסירים מפצל את המסלול לשני חלקים, או שהוא מהקצה ואז הוא לא מפצל. אז $C(P - S) \leq |S| + 1$.

P פורש את כל קודקודי G, וכל קודקוד שהורדנו יורד משניהם. אז $P - S$ פורש את $G - S$. אז, $C(G - S) \leq C(P - S)$.

בסה"כ, $C(G - S) \leq |S| + 1$, כנדרש.

הוכחה ב: P מבקר בכל הרכיבים של $G - S$. בפרט, הוא יוצא מכל אחד מהרכיבים חוץ מהאחרון.

כל פעם שהוא עובר בין שני רכיבים, הוא עובר בקודקוד שלא שייך לשניהם (כי אחרת הם אותו רכיב).

כל הקודקודים האלה חייבים להיות מ-S, כי אחרת הם היו רכיב בעצמם.

אז בין כל שני רכיבים יש לפחות קודקוד אחד מ-S. אז $|S| \geq C(G - S) - 1 \Longrightarrow |S| + 1 \geq C(G - S)$, כנדרש.

הוכחה ג: נסמן u, v את קודקודי הקצה של P. אם $uv \in E$, אז G הוא המילטוני ואז (בטענה דומה להוכחה א) מתקיים $C(G - S) \leq |S|$.

אם $uv \notin E$, אז $G' := G + uv$ הוא המילטוני, ואז $C(G - S) \leq C(G' - S) + 1$, כנדרש.

הגדרה – **עמידות** של גרף:

נאמר שגרף $G := (V, E)$ הוא t-עמיד (*t-tough*) אם כל מפריד בקודקודים $S \subseteq V$ מקיים $|S| \geq t \cdot C(G - S)$.

מה שהראנו בתרגיל 2 זה שכל גרף המילטוני הוא 1-עמיד.

רמת העמידות של G היא ה-t הכי גדול כך ש-G הוא t-עמיד. נסמן $t(G)$.

השערה מפורסמת של *Chvátal* (שעדיין אין לה הוכחה) היא: קיים קבוע C כך שכל גרף G המקיים $t(G) \geq C$ הוא המילטוני.

כמה הערות לגבי עמידות:

Hamiltonicity

גרף יהיה t-עמיד אם כדי לחלק אותו ל-k רכיבים, צריך להוריד לפחות $t \cdot k$ קודקודים. אם נחבר את זה להגדרה לעיל: $C(G-S)=k, |S|=t\cdot k$.

במסלול, הורדת k קודקודים יכולה לתת לנו לכל היותר $k+1$ רכיבים של המסלול.

נסמן t_{PATH} את המספר ה<u>ממשי</u> הגדול ביותר כך ש:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad k \geq t_{PATH} \cdot (k+1)$$

המקרה $k=1$ נותן חסם $t_{PATH} \leq 1/2$.

במעגל, הורדת k קודקודים יכולה לתת לנו לכל היותר k רכיבים של המסלול.

נסמן t_{CYCLE} את המספר ה<u>ממשי</u> הגדול ביותר כך ש:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad k \geq t_{CYCLE} \cdot (k)$$

המקרה $k=1$ נותן חסם $t_{CYCLE} \leq 1$.

תרגיל 3

טענה: לכל גרף $G \coloneqq (V,E)$ מתקיים $t(G) \leq \kappa(G)/2$.

אם G לא קשיר, נקבל $t(G)=\kappa(G)=0$. נניח ש-G קשיר.

לכל S מפרידה בקודקודים, מתקיים $C(G-S) \geq 2$.

מההגדרה של $t(G)$, מתקיים לכל S:

$$|S| \geq t(G) \cdot C(G-S)$$

ובפרט, עבור $|S|=\kappa(G)$. אז מתקיים:

$$t(G) \leq \frac{|S|}{C(G-S)} \leq \frac{\kappa(G)}{2}$$

כנדרש.

תרגיל 4

בהינתן גרף G, נוסיף צלעות שמחברות קודקודים שאין ביניהם צלע ושסכום הדרגות שלהם הוא לפחות n.

למה: התהליך המתואר מפיק את אותו הגרף, לא משנה באיזה סדר לקחנו את הקודקודים.

הגרף המתקבל נקרא **הסגור** של G ומסומן $CL(G)$.

משפט *Bondi-Chvátal*: G הוא המילטוני אמ"מ $CL(G)$ הוא המילטוני.

נשתמש במשפט הזה כדי להוכיח שכל גרף $G \coloneqq (V,E)$ על $n \geq 3$ קודקודים שמקיים $\delta(G) > n/2$ הוא קשיר-המילטונית.

ניקח $u,v \in V$ כלשהם. אנחנו רוצים להראות שיש מסלול $v \rightsquigarrow u$ המילטוני.

נגדיר גרף G':

$$V(G') \coloneqq V(G) \cup \{w\}, \qquad E(G') \coloneqq E(G) \cup \{uw, vw\}$$

בעצם, נוסיף קודקוד ונחבר אותו ל- u,v.

ב-G יש מסלול uv המילטוני אמ"מ G' הוא המילטוני.

כי אם ב-G יש מסלול כזה אז הצלעות uw, vw סוגרות מעגל. ואם יש מעגל המילטוני ב-G', אז זה נשאר מסלול uv המילטוני אחרי הורדת uw, vw.

לפי משפט *Bondi-Chvátal*, G' המילטוני אמ"מ $CL(G')$ המילטוני.

אז נראה ש- $CL(G')$ ונסיים.

לפי ההנחה ש- $\delta(G) > n/2$, נקבל שלכל x,y מתקיים:

$$\deg_G x + \deg_G y > \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$$

כלומר:

$$\deg_G x + \deg_G y \geq n + 1 = v(G')$$

אז כשנבצע את תהליך הוספת הצלעות על G', כל הקודקודים של G מקיימים שסכום הדרגות שלהם הוא לפחות $v(G')$. אז נוסיף צלעות בין כולם.

כלומר, $CL(G')[V(G)] \cong K_{v(G)}$. הקודקודים של G מהווים קליקה ב-$CL(G')$.

מכיוון ש- $E(G') \subseteq E\big(CL(G')\big)$, נקבל ש- $\{uw, vw\} \subseteq E\big(CL(G')\big)$.

אז $CL(G')$ הוא המילטוני: נתחיל מ-u, נעשה מעגל המילטוני ל-v דרך קודקודי G (כי זה קליקה), ונסיים עם uw, wv.

אז לפי משפט *Bondi-Chvátal*, G' המילטוני.

אז ב-G יש מסלול uv המילטוני, כנדרש.