10: Linear Programming I

תכנון (תכנות) לינארי – *Linear Programming*

בהינתן: מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, וקטורים $c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$,

ופונקציית מטרה: $x \mapsto c^T x, x \in \mathbb{R}^n$ (ממפה את x למכפלה הסקלרית מעל $\mathbb{R}^n$, *inner product*),

המטרה היא למקסם (*maximize*) או למנמן/למזער (*minimize*) את פונקציית המטרה, תחת אילוצים לינארים הנתפסים ע"י A ו-b.

נבחין בין 2 סוגים של תכניות (לא קוד, אלא תכנית פעולה):

תכנון בשלמים – *IP, Integer Programming*

בדרך כלל *NPC*. נרצה למקסם (בדוגמה) או למזער, משהו מהצורה:

$$\max_{x\in\mathbb{Z}}\{c^T x : Ax \le b\}$$

יכולים להיות יותר אילוצים. ההשוואה בין Ax ל-b היא לפי אינדקס, כלומר נדרוש במקרה הזה שהכניסה ה-i של Ax תהיה קטנה-שווה לכניסה ה-i של b.

תכנון לינארי – *LP, Linear Programming*

בדרך כלל *P*. אותו דבר, אבל $x \in \mathbb{R}^n$.

לדוגמה בעיית תרמיל הגב. בעיית תרמיל הגב בשלמים היא בעיה של *IP*, בעיית תרמיל הגב בשברים היא *LP*.

הרבה מהבעיות שלנו יהיו *IP*. אז מה שנרצה לעשות, זה לקחת בעיה של גרפים ולצקת אותה בתור בעיית *IP* (שהיא *NPC*).

ואז, נעשה רילקסיציה (*relaxation*) לגרסת *LP*, נמצא פתרון אופטימלי (בשברים) ל-*LP*, ונאמר שזה מקרב (איכשהו) לפתרון אופטימלי *IP*.

IP ו-LP בבעיית שידוך מקסימום

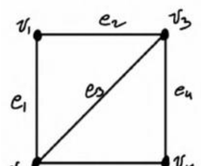
מטריצת הסמיכויות (*Incidence matrix*) של גרף היא מטריצה שמתארת את הקשר בין הצלעות והקודקודים (לא מטריצת שכנויות!).

כל עמודה מתארת צלע, כל שורה היא קודקוד. עבור גרף G, נסמן:

$$M := M(G) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & \dots & e_m \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array} & \begin{bmatrix} & \cdots & \\ & & \\ \vdots & \in\{0,1\} & \vdots \\ & \cdots & \end{bmatrix} \end{array}, \quad M_{ve} := \begin{cases} 1, & v \in e \\ 0, & v \notin e \end{cases}$$

כלומר, בשורה של הקודקוד בעמודה של הצלע, נשים 1 אם הצלע הזו מחוברת לקודקוד.

לדוגמה:



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

לכל עמודה יש בדיוק 2 אחדות. לכל שורה יש $\deg_G(v)$ אחדות.

בהינתן גרף עם n קודקודים ו-m-צלעות, נחפש וקטור בוליאני $x \in \{0,1\}^m$ שהוא **הווקטור האופייני** (*characteristic vector*) של שידוך, כלומר:

$$x_i = \begin{cases} 1, & e_i \in Matching \\ 0, & e_i \notin Matching \end{cases}$$

שיש לו כמות מקסימום של אחדות (שידוך מקסימום). כלומר למקסם את:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \Longrightarrow \max(1^T x)$$

הכוונה ב-"1" היא וקטור האחדות באורך המתאים.

נשתמש ב- $M := M(G)$ כדי לתפוס את האילוצים של השידוך. האילוץ שלנו הוא שלכל קודקוד יש לכל היותר צלע אחת שנוגעת בו בשידוך.

בהינתן וקטור אופייני של שידוך $u \in \{0,1\}^m$, נביט ב- Mu: המכפלה של המטריצה M כפול u:

$$\begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & \cdots & e_m \end{array} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{M \\ n \times m}} \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\substack{u \\ m \times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \\ (Mu)_i \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\substack{Mu \\ n \times 1}}$$

כאשר $(Mu)_i \coloneqq \langle v_i, u\rangle$, כמות הצלעות שיהיו מחוברות לקודקוד. לכן נדרוש $Mu \le 1$ (בכל מקום לכל היותר 1). בסה"כ, הניסוח של הבעיה:

$$IP\ for\ max\ matching: \max_{x\in\mathbb{Z}^m}\{1^T x : Mx \le 1, x \ge 0\}$$

והניסוח המתאים ב-*LP*, *corresponding LP relaxation*:

$$\max_{x\in\mathbb{R}^m}\{1^T x : Mx \le 1, x \ge 0\}$$

במקרה הזה זה לא באמת משנה, כי $max\text{-}matching \in P$.

_IP_ ו-_LP_ בבעיית כיסוי קודקודים מינימום

נרצה למצוא פיתרון לבעיית כיסוי הקודקודים (*vertex cover, VC*). היא בעיה ב-*NPC*.

בהינתן גרף G עם n קודקודים ו-m צלעות, אנחנו מחפשים וקטור אופייני עבור ה-*VC*: $y \in \{0,1\}^n$, כך ש $y_i = 1$ אם $v_i \in VC$, ו-0 אחרת.

ואנחנו רוצים למזער את הסכום, שזה מקביל למזעור המכפלה של הווקטור ב-1:

$$\sum_i y_i \Rightarrow \min 1^T y$$

אנחנו צריכים לתפוס את האילוצים של VC ע"י מטריצת הסמיכויות. לכל צלע, לפחות אחד הקצוות שלה חייב להיות ב-*VC*. נשקול את M^T.

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & \cdots & V_n \end{array} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{M^T \\ m \times n}} \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\substack{y \\ n \times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \\ (M^T y)_e \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\substack{M^T y \\ m \times 1}}$$

כאשר $(M^T y)_e$ זה מספר הקודקודים בכיסוי ששייכים ל-*e*. אנחנו דורשים שלכל *e*, $(M^T y)_e \ge 1$. כלומר הניסוח של *IP* ו-*LP*:

$$\min_{y\in\mathbb{Z}^m}\{1^T y : M^T y \ge 1, y \ge 0\}, \qquad \min_{y\in\mathbb{R}^m}\{1^T y : M^T y \ge 1, y \ge 0\}$$

הניסוח ב-*LP* הוא ב-*P* במקום *NPC*.

משפט קניג בניסוח _LP_

ניזכר במשפט קניג: אם גרף G הוא דו"צ, אז $\tau(G) = \nu(G)$. גודל השידוך המקסימום ν שווה לגודל הכיסוי המינימום τ.

בניסוח *IP*, התרגום הוא: אם G דו"צ, אזי:

$$\max_{x\in\mathbb{Z}^m}\{1^T x : Mx \le 1, x \ge 0\} = \min_{y\in\mathbb{Z}^m}\{1^T y : M^T y \ge 1, y \ge 0\}$$

ומסתבר שגם:

$$\max_{x\in\mathbb{R}^m}\{1^T x : Mx \le 1, x \ge 0\} = \min_{y\in\mathbb{R}^m}\{1^T y : M^T y \ge 1, y \ge 0\}$$

כלומר המעבר ל-*LP* משאיר את השוויון של הפתרונות האופטימליים. ההוכחה לזה היא לא טריוויאלית.

בבעיית השידוך, אפשר גם להוכיח שבפתרון האופטימלי ב-*LP*, הווקטור *x* עדיין שייך בעצם ל-$\mathbb{Z}^m$.

כלומר הפיתרון האופטימלי גם ב-$\mathbb{R}$ הוא בשלמים. גם לא טריוויאלי.

אם G לא דו"צ, אז בעיית השידוך של IP נשארת ב-P, אבל בעיית הכיסוי היא NPC.

צורות של LP

ראינו איך אפשר לצקת בעיות בגרפים לתוך תבניות של IP או LP. עכשיו בעצם יש לנו עניין (בלי קשר לבעיות בגרפים), לפתור בעיות במבנה הבא:

$$(1)\ \max\{c^Tx : Ax \le b\},\qquad (2)\ \max\{c^Tx : x \ge 0, Ax \le b\},\qquad (3)\ \max\{c^Tx : x \ge 0, Ax = b\}$$

$$(4)\ \min\{c^Tx : Ax \ge b\},\qquad (5)\ \min\{c^Tx : x \ge 0, Ax \ge b\},\qquad (6)\ \min\{c^Tx : x \ge 0, Ax = b\}$$

ראינו את (2) בשידוך מקסימום, ואת (5) בכיסוי מינימום.

מבחינת LP, כולן שקולות, ונראה איך לעבור בין פורמטים.

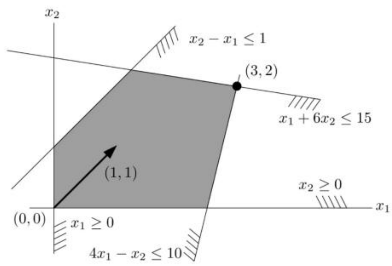
(3) ו-(6) הם במבנה **תצורת שוויון** – *equational form*, והפתרונות האופטימלים שלהם הם הכי קלים להסברה.

האילוצים $x \ge 0$ נקראים **אילוצי אי-שליליות** – *non-negativity constraints*.

דוגמה

צריך למקסם את $x_1 + x_2$, כך ש:

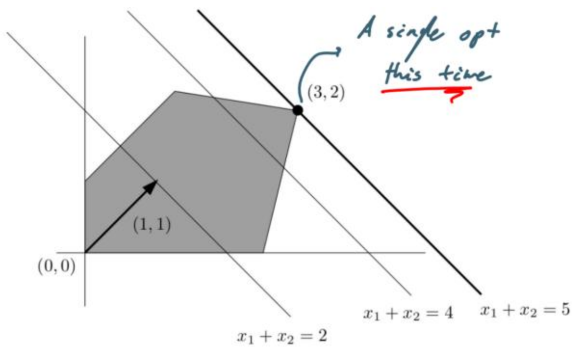
$$-x_1 + x_2 \le 1,\qquad x_1 + 6x_2 \le 15,\qquad 4x_1 - x_2 \le 10,\qquad x_1 \ge 0,\qquad x_2 \ge 0$$



נמיר את הבעיה לתצורת LP:

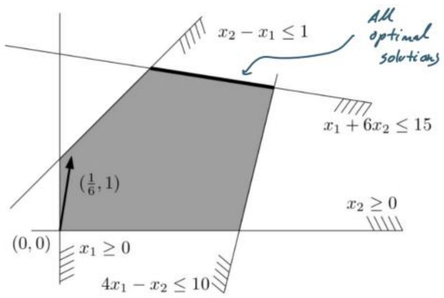
$$\max_{x\in\mathbb{R}^2}\left\{(1,1)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 6\\ 4 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \le \begin{pmatrix}1\\15\\10\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

פתירת הבעיה בצורה גיאומטרית:



נצייר את האילוצים. נצייר את $c = (1,1)$ ונדמיין את המכפלה שלו עם $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, עד שנגיע לנקודה שבה המכפלה מקסימלית.

במקרה הזה קיבלנו פיתרון אופטימלי יחיד. יש בעיות שיתנו יותר, לדוגמה אם נרצה למקסם את $\frac{x_1}{6} + x_2$:



10: Linear Programming I

נקבל שכל הישר למעלה הוא פתרונות אופטימלים.

נרצה למצוא דרך שיטתית לפתור בעיות כאלה גם במימדים גבוהים.

נשקול את בעיית ה-*LP* הבאה. יש לה "אילוצים מעורבבים" – *mixed constraints*. היא לא באף אחת מהתצורות שראינו למעלה:

$$\max(3x_1 - 2x_2)\,, \qquad 2x_1 - x_2 \le 4, \qquad x_1 + 3x_2 \ge 5, \qquad x_2 \ge 0$$

נרצה להמיר את זה לתצורה (3): $\max\{c^T x : x \ge 0, Ax = b\}$. נטפל בכל אחד מהאילוצים.

האילוץ $2x_1 - x_2 \le 4$, אנחנו רוצים שהוא יהיה בתצורת שוויון. נגדיר משתנה חדש, $x_3 \ge 0$.

הוא נקרא ה- *slack variable*, כלומר הוא מכסה על הפער שייווצר לנו. נחליף את האילוץ המקורי ע"י:

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \qquad x_3 \ge 0$$

ב- $x_1 + 3x_2 \ge 5$, הבעיה היא שהכיוון הפוך. אז נכפיל הכל ב- -1 כדי שיהיה $\le$, ונחליף ב:

$$-x_1 - 3x_2 + x_4 = -5, \qquad x_4 \ge 0$$

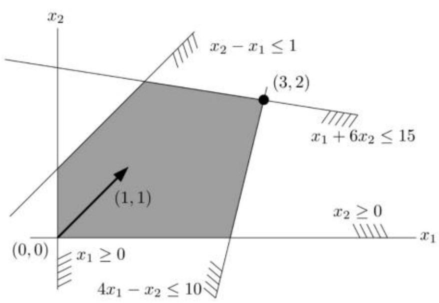
ונוסיף אילוץ *non-negativity* ל- x_1. כל מספר ממשי הוא הפרש בין שני ממשיים חיוביים, אז במקום x_1 נרשום:

$$x_1 = y_1 - z_1, \qquad y_1 \ge 0, \qquad z_1 \ge 0$$

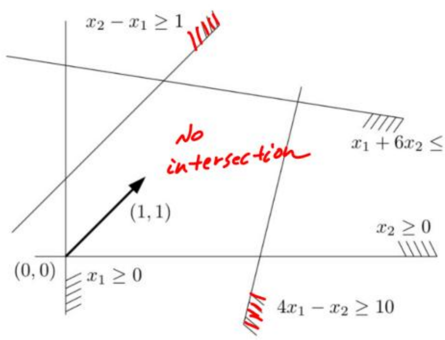
התצורה הסופית של בעיית ה-*LP* היא:

$$\max(3y_1 - 3z_1 - 2x_2)\,, \qquad 2y_1 - 2z_1 - x_2 + x_3 = 4, \qquad -y_1 + z_1 - 3x_2 + x_4 = 5, \qquad y_1, z_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

נחזור לבעיה הראשונה שראינו:

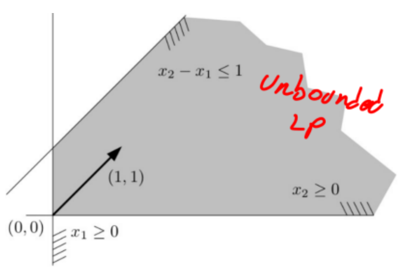


מה אם "נהפוך" את $-x_1 + x_2 \le 1,\ 4x_1 - x_2 \le 10$ ל- $-x_1 + x_2 \ge 1,\ 4x_1 - x_2 \ge 10$:



עכשיו, אין פיתרון. זאת בעיית *LP* שהיא *infeasible*, לא ישימה.

ואם נמחק את האילוצים $x_1 + 6x_2 \le 15,\ 4x_1 - x_2 \le 10$, הבעיה היא *feasible yet unbounded*, ישימה אבל אין מקסימום:



לכל בעיית *LP* שהיא *feasible* ולא *unbounded*, יש פיתרון אופטימלי.