# 11: Linear Programming II

**תכנון לינארי בתצורת שוויון**

בהינתן מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ בעלת $rank(A) = m$ (כלומר $n \geq m$), אנחנו נחקור את הפתרונות של:

$$\max\{c^T x : Ax = b, \;\; x \geq 0\}$$

בדוגמה נראה מקסימום, כמובן שהרעיון עובד גם למינימום. העניין החשוב הוא האילוצים (שנדרש שוויון ואי-שליליות).
וראינו שאפשר לעבור מתצורה אחרת לתצורה הזו.

נרצה ללמוד איך נראה פיתרון אופטימלי. נציג את הרעיון של **פיתרון בסיסי** – *basic solution*.

בהינתן $I \subseteq [n]$ (קבוצה שמייצגת אינדקסים של עמודות), נגדיר $A_I$ את המטריצה המתקבלת ע"י לקיחת רק העמודות של $A$ לפי $I$.

וקטור $x \in \mathbb{R}^n$ שמקיים $Ax = b$ ייקרא בסיסי אם קיים $B \subseteq [n]$ כך ש $|B| = m$, וגם:

$A_B$ היא מטריצה לא-סינגולרית (העמודות שלה בת"ל), ו- $x_j = 0$ לכל $j \notin B$.

נשים לב שמכיוון של-$A$ יש $m$ שורות, אז $A_B$ היא ריבועית.

נשים לב גם שפתרון בסיסי לא בהכרח מקיים אי-שליליות. אם הוא בנוסף מקיים, הוא ייקרא *basic feasible solution*, פתרון בסיסי ישים.

**אבחנה טריוויאלית – אבחון מתי פתרון הוא בסיסי**

בהינתן $x \in \mathbb{R}^n$ כך ש $x \geq 0$, $Ax = b$: $x$ יהיה בסיסי **אמ"מ** העמודות של $A_K$ בת"ל עבור $K := \{j \in [n] : x_j > 0\}$.

כלומר, ניקח את העמודות של $A$ רק באינדקסים שבהם $x$ גדול ממש מ-0. אם העמודות האלה בת"ל, הפיתרון בסיסי.

**הוכחה:** זה מאוד דומה להגדרה עצמה.

<u>כיוון ראשון</u>: נניח ש-$x$ בסיסי, כלומר קיים $|B| = m$, $B \subseteq [n]$ כך ש $A_B$ לא סינגולרית ו- $x_j = 0$ לכל $j \notin B$.

מכיוון ש- $x \geq 0$, אז כל אינדקס שהוא לא 0 יהיה גדול ממש מ-0. נקבל ש $K \subseteq B$, אז העמודות של $A_K$ יהיו בת"ל.

<u>כיוון שני</u>: נניח שהעמודות של $A_K$ בת"ל עבור $K := \{j \in [n] : x_j > 0\}$.

נרחיב את העמודות של $A_K$ לקבוצה בת"ל מקסימלית בעמודות של $A$. יש $m$ עמודות כאלה כי $rank(A) = m$ לפי הנחה.

נסמן $B$ את הקבוצה הזו. מכיוון ש $x \geq 0$, ו-$K$ זה כל המקומות שבהן $x_j > 0$, אז כל המקומות של $x$ שהן לא ב-$K$ הן 0.

ומכיוון ש $K \subseteq B$, נקבל ש $x_j = 0$ לכל $j \notin B$.

האבחון הזה נותן לנו אלגוריתם לבדיקה מתי פיתרון ישים הוא בסיסי:

<u>קלט</u>: $x \in \mathbb{R}^n$ כך ש $Ax = b$, $x \geq 0$. <u>פלט</u>: 0 או 1, האם הפיתרון בסיסי.

נגדיר $K := \{j \in [n] : x_j > 0\}$. אם העמודות של $A_K$ בת"ל, נחזיר 1. אחרת, 0.

אנחנו רוצים פתרונות בסיסיים, כי אין הרבה כאלו. זה מקטין את המרחב שבו צריך לחפש פיתרון.

**טענה:** לכל קבוצה $B \subseteq [n], \;\; |B| = m$, יש לכל היותר פתרון ישים בסיסי אחד שמתאים לה.

כלומר, אם נמצא פיתרון בסיסי לפי $B$, זה הפיתרון הבסיסי היחיד לפי ה-$B$ הזו.

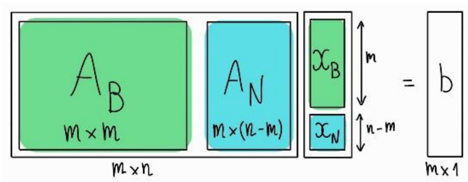
**הוכחה:** בהינתן $B \subseteq [n], \;\; |B| = m$, נגדיר $N := [n] \setminus B$.

כל פיתרון ישים $x \in \mathbb{R}^n$ מקיים $Ax = b$.

אם $x$ מתאים ל-$B$, נוכל לכתוב:

$$A_B x_B + A_N x_N = b, \qquad and, \qquad x_j = 0 \;\; \forall j \notin B$$

כאשר $x_B \in \mathbb{R}^m$ הוא הווקטור $x$ רק באינדקסים של $B$, ו- $x_N \in \mathbb{R}^{n-m}$ הוא $x$ רק באינדקסים של $N$.



# 11: Linear Programming II

כמובן שהעמודות יכולות לשנות מקום, הסדר שלהן לא משנה.

אם $x$ מתאים ל-$B$, אז כל הקורדינטות שלא ב-$B$ הן 0, כלומר $x_N = 0$. אז מתקיים $A_B x_B = b$.

ומכיוון ש- $A_B$ לא סינגולרית, יש ל- $A_B y = b$ לכל היותר פיתרון אחד.

אז יש לכל היותר $\binom{n}{m}$ פתרונות ישימים בסיסיים. אבל, זה לא מבטיח שאחד מהפתרונות האלה הוא **אופטימלי.**

**טענה:** תהי בעיית $LP$: $\max\{c^T x : x \geq 0, Ax = b\}$ ישימה וחסומה. אזי, לכל פתרון ישים $x_0$ קיים פתרון ישים בסיסי $\tilde{x}$ כך ש: $c^T \tilde{x} \geq c^T x_0$.

אם ניקח $x_0$ אופטימלי, לפי הלמה נקבל $\tilde{x}$ אופטימלי.

זה נותן לנו אלגוריתם בדיד (אבל אקספוננציאלי) לפתירת כל בעיית $LP$ (מתוך ה-6 צורות שראינו):

1. נעבור לתצורת שוויון.
2. לכל $B \subseteq [n], |B| = m$ כך ש- $A_B$ לא סינגולרית,
   a. ננסה לפתור את $A_B x = b$,
   b. אם יש פתרון נסמן את ה-$B$ הזה **כמועמד**.
3. נבחר את הפיתרון הטוב ביותר מבין המועמדים.

**הגיאומטריה של תכנון לינארי**

מה שבעצם קורה מאחורי הקלעים של $LP$, היא שכל האילוצים מגדירים פוליהדרון (פאון, *polyhedron*) קמור (*convex*). בתמונה, השמאלי קמור:

כל פיתרון ישים בסיסי יהיה בקצוות, ובפרט בקודקודים. כלומר האלגוריתמים שלנו ינסו להתחיל מפיתרון ישים כלשהו (על אחת הפאות), ולפי הטענה לעיל (עם קצת שינויים) ימירו את הפיתרון בפתרונות ישימים בסיסיים עד שיגיעו לפינה. ואז יקחו את הפינה הכי טובה.

יש שני אלגוריתמים קלאסיים, שעוברים על הפוליגון בצורה חכמה (כמובן שהפוליגון לא באמת קיים, אבל זה עוזר לנו לדמיין):
אלגוריתם *Simplex*, ואלגוריתם *Ellipsoid*.
יש הוכחה ש-*Ellipsoid* הוא פולינומי. *Simplex* הוא לא בהגדרה פולינומי, אבל בכל מקרה פרקטי הוא הרבה יותר פשוט (צריך לבנות את הבעיות האלה בצורה מאוד ספציפית ומלאכותית כדי שתהיה בעיה שגורמת ל-*simplex* להיות מעריכי). ולכן הוא יותר נפוץ.

**דואליות**

בעיות $LP$ מגיעות בזוגות: ***Primal LP***, ***Dual LP***.

כבר ראינו את הרעיון של דואליות: במשפט קניג, ראינו שהשידוך המקסימום שווה לכיסוי המינימום (בגרף דו"צ).

במשפט מנגר, ראינו שהחתך המינימום בין קודקודים שווה למספר המקסימום של מסלולים זרים בקודקודים ביניהם.

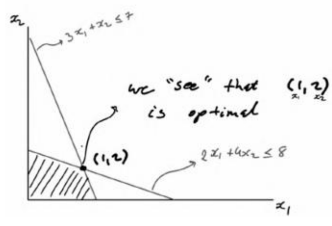
נראה דרך טכנית ויחסית פשוטה לקבל את הבעיה הדואלית של בעיה *primal* נתונה. לפני כן, נשאל מה התפקיד של דואליות ולמה זה עוזר:

1. עוזר להוכיח אופטימליות של פתרונות ישימים בתכנית המקורית.
2. עוזר לתכנן אלגוריתמים שמבוססים על $LP$ אבל לא משתמשים ב *simplex* או *ellipsoid* שהם כבדים ויקרים. (דיקסטרה עובד ככה).

**דוגמה**

נשקול את ה-$LP$ הבא: $\max(5x_1 + 5x_2),\ 3x_1 + x_2 \leq 7,\ 2x_1 + 4x_2 \leq 8,\ x_1, x_2 \geq 0$

אפשר לראות באיור איפה הנקודה האופטימלית:



איך נוכיח שזה אכן הפיתרון האופטימלי?

עבור 1,2, פונקציית המטרה נותנת: $5x_1 + 5x_2 = 5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 15$. כל פיתרון ישים מקיים: $3x_1 + x_2 \leq 7,\ \ 2x_1 + 4x_2 \leq 8$.

אם נחבר את המשוואות האלה, נקבל בדיוק $5x_1 + 5x_2 \leq 15$, כלומר הסכום שלהם לא יכול לעבור את 15. אז 1,2 זה פתרון אופטימלי.

אבל זה עובד רק במקרה הזה. אם המשוואות של האילוצים לא נסכמות בדיוק לפונקציית המטרה, זה לא עובד. לדוגמה:

$$\max(7x_1 + 4x_2)\,, \qquad 3x_1 + x_2 \leq 7, \qquad 2x_1 + 4x_2 \leq 8, \qquad x_1, x_2 \geq 0$$

התשובה היא, שכל פתרון ישים מקיים:

$$3x_1 + x_2 \leq 7 \overset{\times 2}{\Longrightarrow} 6x_1 + 2x_2 \leq 14, \qquad 2x_1 + 4x_2 \leq 8 \overset{\times 0.5}{\Longrightarrow} x_1 + 2x_2 \leq 4$$

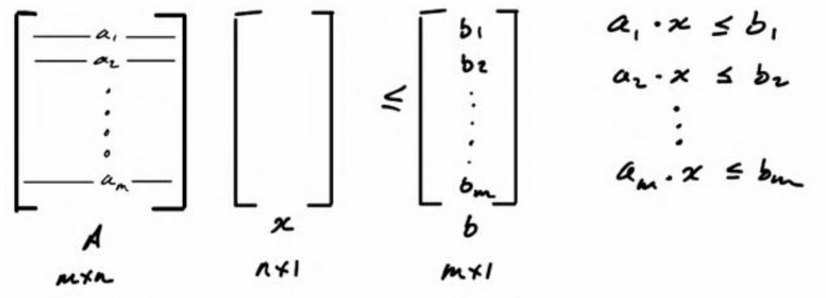
כלומר, כל פתרון ישים מקיים:

$$7x_1 + 4x_2 \leq 18$$

וזה נותן לנו ש- 2,1 אופטימלי. (ולא 1,2)

### הכללה של הדוגמאות

נדגים את ההכללה על $LP$ מהצורה: $\max\{c^T x : Ax \leq b\}$.



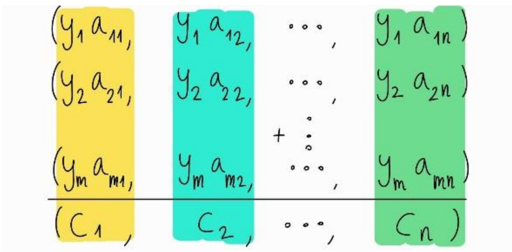

כל שורה $a_i \cdot x \leq b_i$ היא אילוץ של ה-$LP$ הראשונית. נכפיל כל אילוץ במשתנה דואלי $y_i \geq 0$.

אחרי כל ההכפלות נראה שסכום האילוצים הוא פונקציית המטרה:

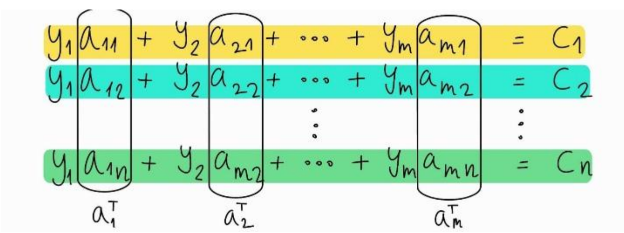
$$
\begin{array}{r c}
 & y_1 \cdot (a_1 \cdot x \leq b_1) \\
 & y_2 \cdot (a_2 \cdot x \leq b_2) \\
 & \vdots \\
+ & y_m \cdot (a_m \cdot x \leq b_m) \\
 & = \\
 & c^T x \leq y^T b
\end{array}
$$

זה מה שהיינו רוצים לקבל. אם נצליח למצוא $y$ כזה, נקבל חסם עליון על פונקציית המטרה (על הפיתרון האופטימלי).

אנחנו מכפילים את $y_i \cdot a_i$, ומקבלים את הווקטור $c$. נראה את התהליך ביותר פירוט:



כל עמודה נסכמת ל- $c_j$. נכתוב בתור שורות:



בסה"כ, כל העמודות כאן נותנות את $A^T$. זה בעצם מבטא את $A^T y$. ואנחנו רוצים למצוא $y$ כך ש $A^T y = c$.

נשים לב שעבור: $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ \ c \in \mathbb{R}^n,\ \ b \in \mathbb{R}^m,\ \ 0 \le y \in \mathbb{R}^m$. אם $A^T y = c$ וגם $Ax \le b$, אז $c^T x \le y^T b$.

כלומר, אם מצאנו $y$ מתאים, אז פונקציית המטרה $c^T x$ חסומה ב- $y^T b$ לכל וקטור אפשרי ($Ax \le b$).

הוכחה: אנחנו יודעים ש $b \ge Ax$, אז $b^T y \ge (Ax)^T y$. ואנחנו יודעים ש $(Ax)^T y = x^T A^T y$ (חוקי כפל מטריצות ושחלוף).

וכבר אמרנו ש $A^T y = c$, אז בסה"כ: $b^T y \ge (Ax)^T y = x^T A^T y = x^T c$.

### ***The Weak Duality Theorem*** – משפט הדואליות החלש

אם שני הבעיות $LP$ הן ישימות וחסומות, אזי:

$$\max\{c^T x : Ax \le b\} \le \min\{y^T b : A^T y = c,\ \ y \ge 0\}$$

אנחנו מנסים לחסום את הבעיה הראשונית ע"י הבעיה הדואלית. במעבר מהראשוני לדואלי, כל אילוץ מקבל משתנה דואלי $y_i$ כך ש:

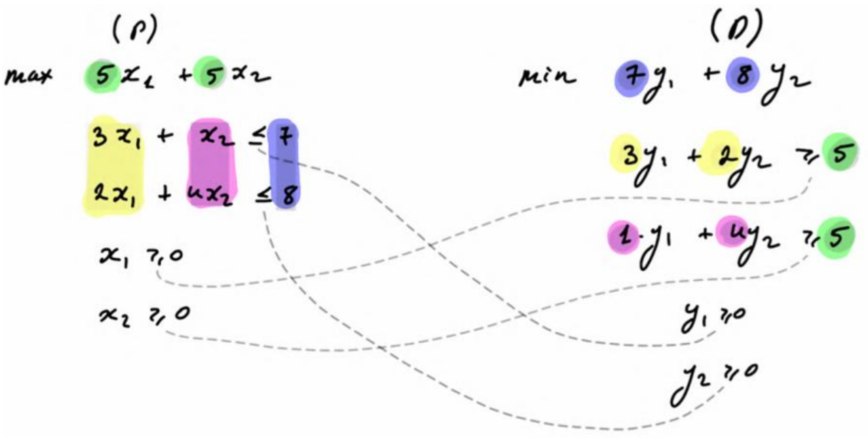
$$\begin{array}{rcl} primal, & & dual \\ \langle a_i, x\rangle \le b_i & \Longrightarrow & y_i \ge 0 \\ \langle a_i, x\rangle = b_i & \Longrightarrow & y_i \in \mathbb{R} \\ \langle a_i, x\rangle \ge b_i & \Longrightarrow & y_i \le 0 \end{array}$$

נשים לב שאם האילוץ הראשוני היה שוויון, במשתנה הדואלי אין אילוץ.

במעבר הזה, כל משתנה ראשוני נהיה אילוץ דואלי:

$$\begin{array}{lcl} primal, & & dual \\ x_i \ge 0 & \Longrightarrow & y_1 a_{1i} + y_2 a_{2i} + \cdots + y_m a_{mi} \ge c_i \\ x_i \le 0 & \Longrightarrow & y_1 a_{1i} + y_2 a_{2i} + \cdots + y_m a_{mi} \le c_i \\ x_i \in \mathbb{R} & \Longrightarrow & y_1 a_{1i} + y_2 a_{2i} + \cdots + y_m a_{mi} = c_i \end{array}$$

דוגמה:




לדואלי יש בעצמו דואלי. הדואלי של הדואלי הוא הראשוני.

### משפט הדואליות החזק

יהיו $(P)$ ו-$(D)$ ראשוני והדואלי שלו. יש בדיוק 4 אופציות, ובדיוק אחת מהן אפשרית. אנחנו נעסוק רק ברביעית.

1. שניהם לא ישימים,
2. הראשוני ישים והדואלי לא,
3. הראשוני לא ישים והדואלי כן,
4. שניהם ישימים, חסומים, ויש חפיפה בין החסימות – כלומר המקסימום שווה למינימום, יש שוויון ולא רק חסימה.