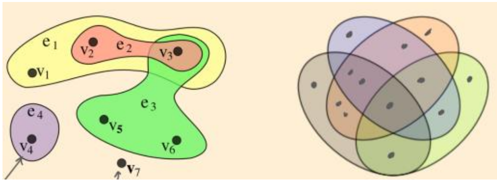
17: Approximating Min Set Cover – Greedy Algorithms

היפרגרף הוא זוג סדור: $H \coloneqq (V, \mathcal{E})$ כאשר $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(V)$. כלומר במקום צלעות רגילות, יש קבוצות של קודקודים.

אם כל האיברים של $\mathcal{E}$ הם זוגות, נאמר ש-H הוא גרף (רגיל). האיברים של H נקראים **היפר-צלעות** (*hyperedges*).

אם $|e| = k$ לכל $e \in \mathcal{E}$, אז H נקרא k-אחיד (*k-uniform*). אז גרף רגיל הוא 2-אחיד.



בהיפרגרף השמאלי: e_4 הוא לולאה. v_7 הוא קודקוד מבודד, יש לו דרגה 0.

בעיית *minimum set-cover*

כשנדבר על היפר-גרף, במקום לכתוב "היפר-צלע" נכתוב "צלע".

בהינתן היפרגרף $H \coloneqq (V, \mathcal{E})$, נרצה למצוא תת-קבוצת צלעות $C \subseteq \mathcal{E}$ כך ש: $\bigcup_{e \in C} e = V$, תחת האילוץ למזער את $|C|$.

אנחנו בעצם מחפשים כיסוי בצלעות מינימום של H. נסמן את הגודל של הכיסוי המינימלי $\varrho(H)$.

בעיית *minimum edge-cover* היא ב-P. בעיית *min SC* היא *NPC*. נוכיח ע"י רדוקציה מבעיית *min VC*. נרצה להראות ש $VC \leq_p SC$:

$$VC \coloneqq \{(G,k) : \tau(G) \leq k\}, \qquad SC \coloneqq \{(H,k) : H \text{ has a hyperedge cover} \leq k\}$$

נבנה פונקציה פולינומית שמקבלת (G,k_1), ומחזירה (H,k_2) כך ש: $(H,k_2) \in SC \iff (G,k_1) \in VC$.

עבור קודקוד $u \in V(G)$, נגדיר:

$$S_u \coloneqq \{e \in E(G) : v \in e\}$$

את קבוצת כל הצלעות שנוגעות ב-u.

בהינתן (G,k), נגדיר היפרגרף H באופן הבא:

$$V(H) \coloneqq E(G), \qquad \mathcal{E}(H) \coloneqq \{S_u : u \in V(G)\}$$

כלומר, כל צלע של G היא קודקוד ב-H, והקבוצות (היפר-צלעות) הן צלעות של G שחולקות קודקוד. ואז:

$$f\big((G,k)\big) = (H,k)$$

נוכיח את נכונות הרדוקציה

הפונקציה פולינומית, כי מספר הקודקודים ב-H הוא מספר הצלעות ב-G. ומספר ההיפר-צלעות חסום במספר תתי-הקבוצות של הקודקודים.

נוכיח ש $(H,k) \in SC \iff (G,k) \in VC$:

יהי קודקוד $v \in V(G)$. הקבוצה S_v מכילה את כל הצלעות ב-G ש-v נוגע בהן.

ב-H, הה"צ S_v מכסה את כל הקודקודים ב-H שמייצגים צלעות ש-v מכסה ב-G.

אז אם יש k קודקודים ב-G שמכסים את כל הצלעות, אז ה-S של אותם קודקודים יכסו ב-H את כל הקודקודים.

וגם הפוך, אם יש k היפר-צלעות ב-H שמכסות את כל הקודקודים של H, אז הקודקודים המתאימים ב-G מכסות את כל הצלעות.

אלגוריתם חמדן

עבור מערכת קבוצות A, נסמן: $\bigcup A \coloneqq \bigcup_{X \in A} X$.

האלגוריתם:

1. נאתחל $A \coloneqq \emptyset$.
2. כל עוד $\bigcup A \neq V$:
   a. $e \coloneqq argmax\{|(\bigcup A) \cup e| : e \in \mathcal{E}\}$. נבחר את הצלע שאם ניקח אותה, זה ממקסם את מספר האיברים ב-A.
   b. $A \coloneqq A \cup \{e\}$.

יש דוגמאות שבהן האלגוריתם החמדן לא מוצא את הפתרון האופטימלי.

17: Approximating Min Set Cover – Greedy Algorithms

נשאל, מהי איכות הקירוב? בשביל זה, נגדיר את הגודל של הצלע הכי גדולה:

$$m \coloneqq \max\{|e| : e \in \mathcal{E}\}$$

נסמן $n \coloneqq |V(H)|$. באופן טריוויאלי, $m \leq n$ (הצלע הכי גדולה לא מכסה יותר קודקודים ממה שקיים).

נוכיח שהאלגוריתם הוא $O(\ln n)$-מקרב, ואז נשפר ונראה שהוא $O(\ln m)$-מקרב.

הוכחת קירוב $O(\ln n)$

אבחנה: האלגוריתם הוא איטרטיבי. וגודל הכיסוי שהוא מייצר שווה למספר האיטרציות, כי בכל איטרציה נוסיף צלע אחת לכיסוי.

נגדיר: A_i את קבוצת הצלעות בכיסוי של הפתרון החמדן בהתחלה של האיטרציה ה-i. במהלך האיטרציה ה-i, האלגוריתם עובר מפתרון A_i לפתרון A_{i+1}.

מספר הקודקודים החדשים שכוסו במהלך האיטרציה ה-i: $|\cup A_{i+1}| - |\cup A_i|$. ונשים לב, שכל הקודקודים החדשים הם מ- $V(H) \setminus \cup A_i$.

נרצה לתת חסם תחתון למספר הקודקודים החדשים שיכוסו.

נגדיר: OPT את גודל הכיסוי המינימלי של H, ויהי פיתרון אופטימלי כלשהו $p \coloneqq \{e_1, e_2, \dots, e_{OPT}\}$.

בכל איטרציה i, הפיתרון p מכיל צלע e_j שמקיימת:

$$\left|e_j \cap (V(H) \setminus \cup A_i)\right| \geq \frac{|V(H) \setminus \cup A_i|}{OPT}$$

כלומר, יש צלע כלשהי שהחיתוך שלה עם כל הקודקודים שעוד לא כוסו, הוא לפחות מספר הקודקודים הזה, חלקי גודל הפיתרון האופטימלי.

למה? מעיקרון שובך היונים. אם אין אפילו צלע אחת כזו, זה אומר שגם אם ניקח את כל צלעות הפתרון האופטימלי, הן לא יכסו את כל הקודקודים.

הצלע הזו היא לא חלק מהפתרון החמדן הנוכחי (כי יש לה חיתוך עם המשלים של הפתרון הנוכחי).

אז במעבר מ-A_i ל-A_{i+1}, ניקח את הצלע שמכסה הכי הרבה קודקודים חדשים, אז ניקח צלע שמכסה לפחות $\frac{|V(H)\setminus \cup A_i|}{OPT}$ קודקודים. אז השיפור יהיה לפחות:

$$|\cup A_{i+1}| - |\cup A_i| \geq \frac{|V(H) \setminus \cup A_i|}{OPT}$$

נעביר אגף ונקבל ש:

$$|\cup A_{i+1}| \geq \frac{|V(H) \setminus \cup A_i|}{OPT} + |\cup A_i|$$

ברגע שהגדרנו את A_{i+1}, כמה קודקודים עוד צריך לכסות?

$$|V(H) \setminus \cup A_{i+1}| =^{\text{א}} |V(H)| - |\cup A_{i+1}| \leq^{\text{ב}} |V(H)| - \left(\frac{|V(H) \setminus \cup A_i|}{OPT} + |\cup A_i|\right) =^{\text{א}} |V(H)| - \left(\frac{|V(H)|}{OPT} - \frac{|\cup A_i|}{OPT} + |\cup A_i|\right) =^{\text{ג}}$$
$$= |V(H)| - \frac{|V(H)|}{OPT} - |\cup A_i| + \frac{|\cup A_i|}{OPT} =^{\text{ד}} \left(1 - \frac{1}{OPT}\right)(|V(H)| - |\cup A_i|) =^{\text{א}} \left(1 - \frac{1}{OPT}\right)|V(H) \setminus \cup A_i|$$

א. גודל של הפרש קבוצות.
ב. נציב את מה שקיבלנו לעיל.
ג. פתיחת סוגריים והחלפת סדר.
ד. גורם משותף.

כלומר כמות הקודקודים הלא-מכוסים אחרי האיטרציה ה- i, היא לכל היותר הכמות שהייתה בתחילת האיטרציה, כפול $\left(1 - \frac{1}{OPT}\right)$.

אז יש תבנית רקורסיבית: נגדיר U_i את הקודקודים הלא-מכוסים באיטרציה ה-i, אז: $U_0 = V(H)$, $U_i = V(H) \setminus \cup A_i$.

נגדיר $u_i = |U_i|$, ומתקיים:

$$u_i \leq \left(1 - \frac{1}{OPT}\right)u_{i-1} \leq \left(1 - \frac{1}{OPT}\right)\left(1 - \frac{1}{OPT}\right)u_{i-2} \leq \left(1 - \frac{1}{OPT}\right)^3 u_{i-3} \leq \cdots \leq \left(1 - \frac{1}{OPT}\right)^i u_0$$

נוכיח פורמלית באינדוקציה:

<u>בסיס</u>: באופן טריוויאלי מתקיים:

$$u_0 \leq \left(1 - \frac{1}{OPT}\right)^0 u_0$$

צעד: נניח שהטענה נכונה עבור כל u_i עם $i < n$, ונוכיח עבור u_n:

$$u_n \leq \left(1 - \frac{1}{OPT}\right) u_{n-1} = \left(1 - \frac{1}{OPT}\right)\left(1 - \frac{1}{OPT}\right)^{n-1} u_0 = \left(1 - \frac{1}{OPT}\right)^{n} u_0$$

ניזכר באי-שוויון: $1 - x \leq \exp(-x)$ לכל $x \in (0,1]$. כלומר:

$$u_i \leq \left(1 - \frac{1}{OPT}\right)^{i} u_0 \leq \exp\left(\frac{-i}{OPT}\right) \cdot n$$

הסדרה $u_0, u_1, \ldots$ היא סדרה יורדת, בשלמים. נשאל, מה ה-i הכי קטן שאפשר לשים כדי שיתקיים: (כלומר שלא נשארו קודקודים לכסות)

$$\exp\left(\frac{-i}{OPT}\right) \cdot n < 1 \implies n < \exp\left(\frac{i}{OPT}\right) \implies \ln n < \frac{i}{OPT} \implies OPT \cdot \ln n < i$$

אז כדי שלא יישארו קודקודים, צריך i כלשהו שהוא גדול ממש מ- $OPT \cdot \ln n$. אז $OPT \cdot \ln n + 1$ יעבוד.

כלומר, אחרי $OPT \cdot \ln n + 1$ איטרציות, נכסה את כל $V(H)$. ומספר האיטרציות זה הגודל של הפיתרון החמדן.

כלומר האלגוריתם החמדן הוא $O(\ln n)$-מקרב.

הוכחת קירוב $O(\ln m)$

אנחנו יודעים ש- $OPT \leq u_0$ (ברור שמספר הצלעות בכיסוי האופטימלי קטן ממספר הקודקודים שצריך לכסות).

אז בגלל שה-u הם סדרה יורדת, מתקיים:

$$\exists i^* \ s.t \ \ u_{i^*} \geq OPT > u_{i^*+1}$$

כי היא מתחילה מעל OPT ומסתיימת ב-0.

כלומר, אחרי האיטרציה ה- $i^* + 1$, יש לכל היותר $OPT - 1$ קודקודים שצריך לכסות.

מאותו רגע, נצטרך לבצע לכל היותר עוד $OPT - 1$ איטרציות.

גם אם בכל איטרציה נכסה רק קודקוד אחד, זה יספיק.

אז נוכל לרשום:

$$\textit{size-of-greedy-solution} \leq i^* + 1 + OPT - 1 = i^* + OPT$$

נוכל להעריך את $i*$. אנחנו יודעים ש:

$$OPT \leq u_{i^*} \leq \exp\left(\frac{-i^*}{OPT}\right) \cdot n \implies \frac{OPT}{n} \leq \exp\left(\frac{-i^*}{OPT}\right) \implies \exp\left(\frac{i^*}{OPT}\right) \leq \frac{n}{OPT} \implies i^* \leq \ln\left(\frac{n}{OPT}\right) \cdot OPT$$

אז:

$$\textit{size-of-greedy-solution} \leq \ln\left(\frac{n}{OPT}\right) \cdot OPT + OPT = \left(1 + \ln\left(\frac{n}{OPT}\right)\right) \cdot OPT$$

ונשים לב ש:

$$m := \max\{|e| : e \in \mathcal{E}\} \geq \frac{n}{OPT}$$

כי כל פתרון אופטימלי מכיל צלע שמכסה לפחות n/OPT קודקודים (שובך היונים). אז בוודאי שיש צלע בגודל כזה. אזי מתקיים:

$$\ln\left(\frac{n}{OPT}\right) \leq \ln(m)$$

ובסה"כ נקבל:

$$\textit{size-of-greedy-solution} \leq (1 + \ln(m)) \cdot OPT$$

17: Approximating Min Set Cover – Greedy Algorithms

Min Cost Set Cover

בהינתן היפר-גרף H, ופונקציית משקל $c: E(H) \to \mathbb{R}^+$. נרצה למצוא תת-קבוצה של צלעות $C \subseteq E(H)$ שמכסה את כל הקודקודים, שממזערת את:

$$\sum_{e \in C} c(e)$$

ראינו אלגוריתם חמדן עבור הגרסה הלא-ממושקלת. הוא לא מתאים לגרסה הממושקלת. ננסה להתאים את האלגוריתם לגרסה הממושקלת:

נשקול את האיטרציה ה-i של האלגוריתם. נניח ש- $V(H) \setminus \cup A_i \neq \emptyset$, כלומר יש עוד קודקודים שלא מכוסים.

עבור צלע $e \in V(H) \setminus A_i$, נתבונן ביחס:

$$\frac{|e \setminus \cup A_i|}{|V(H) \setminus \cup A_i|}$$

כלומר: קודקודים ב-e שעדיין לא מכוסים, חלקי כל הקודקודים שעדיין לא מכוסים. ככל שהיחס גבוה יותר, הצלע משמעותית יותר.

אז דרך חדשה לתאר את הבחירה החמדנית היא הבחירה של הצלע הכי משמעותית.

בשביל הגרסה הממושקלת, נרצה להתחשב במשקלים:

$$\frac{c(e \setminus \cup A_i)}{|V(H) \setminus \cup A_i|}$$

הבעיה היא, שזה לא מוגדר היטב. כי $e \setminus \cup A_i$ לא בהכרח תהיה צלע.

ננסה משהו אחר. נשקול את היחס:

$$\frac{1}{|e \setminus \cup A_i|}$$

ככל שהוא נמוך יותר, זה מכסה יותר קודקודים חדשים. אם נבחר את הצלע שממזערת את זה, זה שקול לאלגוריתם החמדן המקורי.

בגרסה הממושקלת, היחס יהיה:

$$\frac{c(e)}{|e \setminus \cup A_i|}$$

המשקל של e מתחלק על כל הקודקודים שהיא תוסיף לכיסוי.

עבור קבוצת קודקודים $U \subseteq V(H)$, וצלע $e \in E(H)$, נגדיר את **היעילות** של e:

$$\text{eff}_U(e) \coloneqq \begin{cases} \infty, & e \subseteq U \\ \dfrac{c(e)}{|e \setminus \cup A_i|}, & else \end{cases}$$

אנחנו נרצה למזער את זה. אז אם הצלע כולה מוכלת בקבוצה U, יש לה "יעילות אינסופית" ואז לא ניקח אותה.

אז האלגוריתם החמדן למשקלים:

3. נאתחל $A \coloneqq \emptyset$.
4. כל עוד $\cup A \neq V$:
   a. $e \coloneqq argmin\{\text{eff}_{\cup A}(e) : e \in E(H)\}$. הצלע עם מינימום יעילות ביחס לקודקודים שכבר מכוסים.
   b. $A \coloneqq A \cup \{e\}$.

נרצה לנתח את יחס הקירוב של האלגוריתם. בגרסה הקודמת, השתמשנו בזה שבכל איטרציה מוסיפים צלע אחת.

עכשיו אין לנו את האפשרות הזו, כי אנחנו לא יודעים מה המשקל שמוסיפים כל פעם. נצטרך להשתמש בניתוח לשיעורין (*amortized analysis*).

אינטואיציה: יהי p פתרון אופטימלי, שעלותו OPT. קיימת צלע $e \in p$ שמקיימת:

$$\frac{c(e)}{|e|} \leq \frac{OPT}{n}$$

למה? נב"ש שלכל צלע $e \in p$ מתקיים:

$$\frac{c(e)}{|e|} > \frac{OPT}{n}$$

אזי,

$$OPT = \sum_{e\in p} c(e) =^{א} \sum_{e\in p}\sum_{v\in e}\frac{c(e)}{|e|} >^{ב} \sum_{e\in p}\sum_{v\in e}\frac{OPT}{n} = \frac{OPT}{n}\underbrace{\sum_{e\in p}\sum_{v\in e} 1}_{\geq n} \geq^{ג} \frac{OPT}{n}\cdot n = OPT$$

א. ניתן לכל קודקוד בצלע את המשקל הממוצע בצלע. ביחד זה יוצא שהמשקל של הצלע זהה.
ב. לפי ההנחה בשלילה.
ג. כי סכום הקודקודים שיש בצלעות של כל פתרון הוא לפחות n (כי הפתרון מכסה את כל הקודקודים).

קיבלנו ש-OPT גדול יותר מעצמו, שזו כמובן סתירה.

אז תמיד קיימת צלע בפתרון האופטימלי, שמכסה את הקודקודים שלה בעלות לכל היותר OPT/n.

ניתוח לשיעורין באלגוריתם החמדן

נתבונן בבחירה הראשונה. האלגוריתם בוחר צלע e שממזערת את:

$$\frac{c(e)}{|e \setminus \emptyset|} = \frac{c(e)}{|e|}$$

אנחנו הוכחנו שיש צלע שמקיימת $\frac{c(e)}{|e|} \leq \frac{OPT}{n}$. והצלע הראשונה שבחרנו ממזערת את היחס הזה, כלומר הצלע e הראשונה מקיימת את האי-שוויון הזה.

נרצה להכליל את הטענה לכל שלב.

נסמן p פתרון אופטימלי בעלות OPT. ונסמן A את הצלעות המכוסות ברגע כלשהו במהלך האלגוריתם.

נגדיר את קבוצת כל הצלעות מ-p, שיש בהן קודקודים שעוד לא מכוסים. כלומר עוד לא נבחרו בחמדן:

$$T := \{e \in p : e \setminus \cup A \neq \emptyset\} \subseteq p$$

נשים לב שהקודקודים שלא מכוסים עדיין, מוכלים בקודקודים ב-T:

$$(V(H) \setminus \cup A) \subseteq \cup T$$

נוכיח: נב"ש שקיים קודקוד $v \in V(H) \setminus \cup A$ כך ש: $v \notin \cup T$, ותהי $e \in p$ כך ש- $v \in e$.

אזי, $e \setminus \cup A \neq \emptyset$, אז $e \in T$. ואז $v \in \cup T$, סתירה.

טענה על T: קיימת צלע $e \in T$ כך ש:

$$\frac{c(e)}{|e \setminus \cup A|} \leq \frac{OPT}{|V(H) \setminus \cup A|}$$

ונשים לב שהטענה שאמרנו לעיל: $\frac{c(e)}{|e|} \leq \frac{OPT}{n}$, היא מקרה פרטי של הטענה הזו עבור $\cup A = \emptyset$, האיטרציה הראשונה.

הוכחה: נב"ש שלכל $e \in T$,

$$\frac{c(e)}{|e \setminus \cup A|} > \frac{OPT}{|V(H) \setminus \cup A|}$$

אז באופן דומה למה שעשינו למעלה:

$$OPT =^{א} \sum_{e\in p} c(e) \geq^{ב} \sum_{e\in T} c(e) =^{ג} \sum_{e\in T}\sum_{v\in e\setminus\cup A}\frac{c(e)}{|e \setminus \cup A|} >^{ד} \sum_{e\in T}\sum_{v\in e\setminus\cup A}\frac{OPT}{|V(H)\setminus\cup A|} = \frac{OPT}{|V(H)\setminus\cup A|}\sum_{e\in T}\sum_{v\in e\setminus\cup A} 1 \geq OPT$$

א. הגדרת OPT, סכום העלות של הפתרון האופטימלי.
ב. כי $T \subseteq p$.
ג. פיצול כמו שעשינו מקודם, לפי הגדרת T.
ד. לפי ההנחה בשלילה.

סתירה.

17: Approximating Min Set Cover – Greedy Algorithms

איכות הקירוב של האלגוריתם החמדן

נוסיף חלק באלגוריתם בשביל בניתוח:

1. נאתחל $A \coloneqq \emptyset$.
2. כל עוד $\cup A \neq V$:
   a. $e \coloneqq argmin\{\text{eff}_{\cup A}(e) : e \in E(H)\}$.
   b. עבור כל קודקוד $v \in (e \setminus \cup A)$, (הקודקודים של e, שעוד לא מכוסים):
      i. נגדיר $ac(v) \coloneqq \text{eff}_{\cup A}(e)$. ($ac$ = *amortized cost*)
   c. $A \coloneqq A \cup \{e\}$.

למה: המחיר של הפתרון החמדן שווה ל: $\sum_{v \in V} ac(v)$.

הוכחה: יהי A פתרון חמדן, וניתן איזשהו סדר לבחירות שלו:

$$A \coloneqq \{e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{im}\}$$

נסמן A_j את הפתרון החמדן החלקי - כלומר נעצור אותו בשלב כלשהו:

$$A_j \coloneqq \{e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ij}\}$$

באופן דומה למה שכבר עשינו פעמיים, נשים לב שהעלות של החמדן מקיימת:

$$\sum_{e \in A} c(e) = \sum_{j=1}^{m} c(e_{ij}) \overset{\text{א}}{=} \sum_{j=1}^{m} \sum_{v \in (e_{ij} \setminus \cup A_{j-1})} \frac{c(e_{ij})}{|e_{ij} \setminus \cup A_{j-1}|} \overset{\text{ב}}{=} \sum_{j=1}^{m} \sum_{v \in (e_{ij} \setminus \cup A_{j-1})} ac(v) \overset{\text{ג}}{=} \sum_{v \in V} ac(v)$$

א. נחלק את המחיר בין הקודקודים. אפשר לחשוב על זה בתור חלוקה והכפלה ב- $|e_{ij} \setminus \cup A_{j-1}|$.
ב. לפי הגדרת ac.
ג. מעבר על כל הקודקודים החדשים בכל שלב, זה פשוט כל הקודקודים.

הוכחת קירוב $O(\ln n)$

נסמן A, A_j כמו לעיל.

כל איטרציה מכסה לפחות קודקוד אחד חדש.

באיטרציה ה-j, הצלע e_{ij} נבחרת, ומכסה קודקודים חדשים. נסמן אותם: $k(j)$ זה מספר הקודקודים החדשים שכוסו באיטרציה ה-j.

$$v_1^j, v_2^j, \dots, v_{k(j)}^j$$

נסדר את כל הקודקודים ב-V לפי הסדר שבו הם כוסו ע"י האלגוריתם: m הוא גודל הפתרון החמדן.

$$V \coloneqq \{v_1, v_2, \dots, v_n\} = \{v_1^1, v_2^1, \dots, v_{k(1)}^1, v_1^2, \dots, v_{k(2)}^2, \dots, v_1^m, v_2^m, \dots, v_{k(m)}^m\}$$

לכל $j \in [m]$, מתקיים:

$$ac(v_1^j) = ac(v_2^j) = \dots = ac\left(v_{k(j)}^j\right) = \text{eff}_{\cup A_{j-1}}(e_{ij}) = \frac{c(e_{ij})}{|e_{ij} \setminus \cup A_{j-1}|}$$

נקבע איטרציה j כלשהי ויהי $v_k \in \{v_1, \dots, v_n\}$ הקודקוד הראשון שכוסה באיטרציה הזו. כלומר, $|\cup A_{j-1}| = k - 1$.

כל פתרון אופטימלי מכיל צלע e שמוסיפה קודקודים חדשים:

$$e \setminus \cup A_{j-1} \neq \emptyset$$

וגם, לפי ה"טענה על T" שהוכחנו לעיל,

$$\text{eff}_{\cup A_{j-1}}(e) \leq \frac{OPT}{|V(H) \setminus \cup A_{j-1}|} = \frac{OPT}{n - (k-1)} = \frac{OPT}{n - k + 1}$$

באיטרציה ה-j, בחרנו את e_{ij}. מכיוון ש $e \setminus \cup A_{j-1} \neq \emptyset$, הצלע e גם הייתה מועמדת. כלומר בחרנו את e_{ij} על פני e. כלומר:

$$\mathrm{eff}_{\cup A_{j-1}}\left(e_{ij}\right) \leq \mathrm{eff}_{\cup A_{j-1}}(e) \leq \frac{OPT}{n-k+1}$$

אזי,

$$ac(v_k) = \mathrm{eff}_{\cup A_{j-1}}\left(e_{ij}\right) \leq \frac{OPT}{n-k+1}$$

כל קודקוד $v_{k+\ell}$ (עבור $\ell \geq 0$) שמכוסה ביחד עם v_k מקיים:

$$ac(v_{k+\ell}) \leq \frac{OPT}{n-k+1} \leq \frac{OPT}{n-(k+\ell)+1}$$

אזי לכל $r \in [n]$, מתקיים:

$$ac(v_r) \leq \frac{OPT}{n-r+1}$$

כלומר, המחיר של החמדן חסום ב:

$$COST =^{\text{א}} \sum_{i=1}^{n} ac(v_i) \leq^{\text{ב}} \sum_{i=1}^{n} \frac{OPT}{n-i+1} =^{\text{ג}} OPT \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-i+1} =^{\text{ד}} OPT \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} =^{\text{ה}} O(\ln n)$$

א. הוכחנו, זה בדיוק הרעיון של ac.
ב. האי-שוויון שבדיוק הוכחנו.
ג. נוציא גורם משותף.
ד. נשים לב שהסכימה הפכה להיות בעצם מ-n עד 1.
ה. טור הרמוני.

כנדרש.