שאלה 1 – *Congestion Minimization*

בהינתן:

- גרף קשיר G,
- $k \geq 1$ זוגות של קודקודים $(s_1, t_1), \dots (s_k, t_k)$. בכל זוג, $s_i \neq t_i$ אבל יכול להיות ש- $\{s_i, t_i\} \cap \{s_j, t_j\} \neq \emptyset$,
- מערכת מסלולים $\mathcal{P} := \{P_1, \dots P_k\}$ שבה P_i הוא מסלול $s_i \rightsquigarrow t_i$.

נאמר שיש ל-$\mathcal{P}$ *congestion* (גודש) C אם כל צלע של G שוכנת על לכל היותר C מסלולים מתוך $\mathcal{P}$.

עבור צלע $e \in E(G)$, אפשר לסמן $\mathrm{cong}_{\mathcal{P}}(e)$ את מספר המסלולים של $\mathcal{P}$ ש-e נמצאת עליהן.

בעיית *congestion minimization*: בהינתן גרף וזוגות של קודקודים כמתואר, נרצה למצוא מערכת מסלולים שמחברת את הזוגות עם C מינימלי.

מטרת השאלה היא לפתח אלגוריתם מקרי שנותן קירוב $O(\log n)$, בהסתברות לפחות $1 - o(1)$.

סעיף א1: השלימו את ה-*IP* עבור הבעיה. הסבירו למה נדרש האילוץ $C \geq 1$.

עבור $i \in [k]$, נסמן $\mathcal{P}_i$ את קבוצת כל המסלולים $s_i \rightsquigarrow t_i$ שיש ב-G.

min C

Subject to:

$\sum_{P \in \mathcal{P}_i} ? = 1$ for every $i \in [k]$

$\sum_{?=1}^{?} \sum_{? \in \mathcal{P}_i : e \in ?} ? \leq C$ for every $e \in E(G)$

$C \geq 1$

$? \in \{0,1\}$ for every $?$ and every $?$

פתרון

נמזער את C, תחת האילוצים:

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_i} x_{P,i} = 1, \qquad \forall i \in [k]$$

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{P \in \mathcal{P}_i : e \in P} x_{P,i} \leq C, \qquad \forall e \in E(G)$$

$$C \geq 1, \qquad \forall i \in [k], P \in \mathcal{P}_i:\ x_{P,i} \in \{0,1\}$$

נסביר:

המשתנה $x_{P,i}$ יהיה 1 אם המסלול P מחבר את הזוג i.

לכל זוג מתקיים: $\sum_{P \in \mathcal{P}_i} x_{P,i} = 1$. צריך שלכל זוג ניקח מסלול שמחבר אותו.

לכל $e \in E(G)$ מתקיים: $\sum_{i=1}^{k} \sum_{P \in \mathcal{P}_i : e \in P} x_{P,i} \leq C$. כלומר נעבור על כל הזוגות, לכל אחד נעבור על כל המסלולים שמכילים את e. צריך שלכל e יהיו לכל היותר C מסלולים שהיא נמצאת עליהם.

אם לא נדרוש $C \geq 1$, אז הפיתרון האופטימלי יהיה שאין מסלולים בכלל.

סעיף א2: בצעו רילקסציה ל-*LP*.

פתרון: השינוי היחיד הוא $x_{P,i} \geq 0$.

סעיף ב: מוצע אלגוריתם ל- *congestion minimization*:

קלט: גרף G וזוגות של קודקודים $(s_1,t_1),\dots(s_k,t_k)$.

1. נפתור את גרסת ה-LP. יהי x^* פיתרון אופטימלי, בשברים.
2. לכל זוג (s_i,t_i), נדגום מסלול P_i מתוך $\mathcal{P}_i$, לפי ההתפלגות ש-x^* קובע על $\mathcal{P}_i$.
(נניח שיש לנו אלגוריתם קופסה שחורה שעושה את זה בזמן פולינומי).
3. נחזיר את אוסף המסלולים $\{P_1,\dots P_k\}$.

עבור צלע $e\in E(G)$, ועבור $i\in[k]$, נגדיר את האינדיקטור:

$$Y_i^{(e)} := \begin{cases}1, & e\in E(P_i)\\ 0, & e\notin E(P_i)\end{cases}$$

כאשר P_i הוא המסלול המתקבל מהאלגוריתם. ונגדיר את המשתנה המקרי: $Y_e := \sum_{i=1}^k Y_i^{(e)}$. מספר המסלולים ש-$e$ חלק ממנה.

נתון משפט:

יהיו $X_1,\dots,X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים:

$$\mathbb{P}[X_i=1]=p_i,\qquad \mathbb{P}[X_i=0]=1-p_i$$

ונגדיר:

$$S := \sum_{i=1}^n a_iX_i\,,\qquad 0\le a_i,\dots,a_n\le 1\in\mathbb{R}$$

אזי לכל $0<\beta<1$ ממשי:

$$\mathbb{P}\big[S\ge(1+\beta)\mathbb{E}[S]\big]\le\exp\left(-\frac{\beta^2}{3}\mathbb{E}[S]\right)$$

בנוסף, אם $r\ge 6\mathbb{E}[S]$, אז:

$$\mathbb{P}[S\ge r]\le 2^{-r}$$

השתמשו במשפט כדי להראות שבהינתן $e\in E(G)$, מתקיים:

$$\mathbb{P}\left[Y_e\ge\max\left\{\frac{6\cdot3\cdot3}{(1/2)^2}\log n\,,\left(1+\frac{1}{2}\right)\mathbb{E}[Y_e]\right\}\right]\le\frac{1}{n^3}$$

רמזים:

- שימו לב שבמשפט יש שתי טענות, ובאי-שוויון שצריך להוכיח, המקסימום הוא בין שני דברים.
- הביטוי $1/n^3$ מרמז לכך שצריך להתייחס לשני מקרים עבור התוחלת (ולא לחשב אותה) ודרך המקרים האלה נקבל את $\log n$.

פתרון

נחלק לשני מקרים:

אם $\mathbb{E}[Y_e]\ge\frac{3\cdot3}{(1/2)^2}\log n$, אז:

$$\mathbb{P}\left[Y_e\ge\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{3\cdot3}{(1/2)^2}\log n\right]\le\exp\left(-\frac{(1/2)^2}{3}\frac{3\cdot3}{(1/2)^2}\log n\right)=\exp(-3\log n)\le\frac{1}{n^3}$$

אם $\mathbb{E}[Y_e]<\frac{3\cdot3}{(1/2)^2}\log n$, אז עבור $r\ge6\cdot\frac{3\cdot3}{(1/2)^2}\log n$ נקבל:

$$\mathbb{P}\left[Y_e\ge6\cdot\frac{3\cdot3}{(1/2)^2}\log n\right]\le2^{-6\cdot\frac{3\cdot3}{(1/2)^2}\log n}\le2^{-3\log n}\le\frac{1}{n^3}$$

כנדרש.

סעיף ג: הוכיחו ש- $\mathbb{E}[Y_e] \leq OPT_f$ לכל $e \in E(G)$, כאשר OPT_f זה עלות הפיתרון האופטימלי של ה-LP.

פתרון

מתקיים:

$$\mathbb{E}[Y_e] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left[Y_i^{(e)}\right] = \sum_{i=1}^{k} \sum_{P \in \mathcal{P}_i} x_{P,i} \leq^{א} OPT_f$$

א. לפי ההגבלה $\sum_{i=1}^{k} \sum_{P \in \mathcal{P}_i : e \in P} x_{P,i} \leq C$ ב-LP.

סעיף ד: הוכיחו:

$$\mathbb{P}\left[\exists e \in E(G): Y_e \geq \max\left\{\frac{6 \cdot 3 \cdot 3}{(1/2)^2} \log n, \left(1 + \frac{1}{2}\right) OPT_f\right\}\right] \leq \frac{1}{n}$$

פתרון: מתקיים כי $\mathbb{E}[Y_e] \leq OPT_f$, ולפי חסם איחוד על n^2 צלעות אפשריות.

סעיף ה: הוכיחו שהאלגוריתם המוצע מהווה $O(\log n)$-קירוב בהסתברות לפחות $1 - o(1)$.

רמז: מה יחס הקירוב בכל אחד מהמקרים של המקסימום?

פתרון

אם $\frac{6 \cdot 3 \cdot 3}{(1/2)^2} \log n < \left(1 + \frac{1}{2}\right) OPT_f$, זה אומר שההסתברות שקיימת צלע שמופיעה ביותר מ-$\left(1 + \frac{1}{2}\right) OPT_f$ מסלולים, היא לכל היותר $1/n$. כלומר בהסתברות $1 - o(1)$, יחס קירוב של 1.5.

אם $\frac{6 \cdot 3 \cdot 3}{(1/2)^2} \log n > \left(1 + \frac{1}{2}\right) OPT_f$, זה אומר שההסתברות שקיימת צלע שמופיעה ביותר מ-$\frac{6 \cdot 3 \cdot 3}{(1/2)^2} \log n$ מסלולים, היא לכל היותר $1/n$. כלומר בהסתברות $1 - o(1)$, יחס קירוב של $\log n$.

שאלה 2 – *Van der Waerden Numbers*

נפתח שני חסמים תחתונים על המספרים. אחד בלי הלמה הלוקאלית של לובאס והשנייה (טובה יותר) עם הלמה.

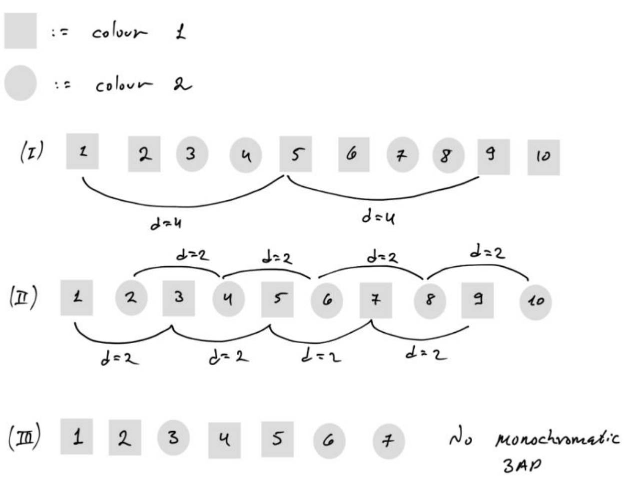
יהי $k \in \mathbb{N}$. סדרה חשבונית באורך k (נקרא לה *kAP – k-term arithmetic progression*) נראית כך:

$$x, x + d, x + 2d, \ldots, x + (k - 1)d$$

הפרמטר d נקרא ה- *common gap* של הסדרה.

עבור $k \in \mathbb{N}$, נסמן $W(k)$ את המספר $n \in \mathbb{N}_{>0}$ הקטן ביותר כך שכל 2-צביעה של $[n]$ מכילה *kAP* מונוכרומטית.

מספרי $W(k)$ נקראים מספרי *Van der Waerden*. לדוגמה, צביעות עם ובלי *3AP*:



המטרה הראשונה היא להוכיח ללא הלמה של לובאס את המשפט הבא:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad W(k) = \Omega\left(\sqrt{k} \cdot 2^{k/2}\right)$$

סעיף א: בהינתן $k \leq n \in \mathbb{N}$, כך ש-$k = o(n)$, הוכיחו שמספר ה-kAP ב-$[n]$ הוא לפחות:

$$\frac{n^2}{2k}\left(1 + \frac{1}{n} - \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \frac{k}{n^2}\right) = \frac{n^2}{2k}\left(1 \pm o(1)\right)$$

רמזים:

- בכמה דרכים אפשר לבחור את האיבר הראשון של kAP ב-$[n]$?
- בהינתן $x \in [n]$, מספר ה- kAP ב-$[n]$ שעבורן x יכול להיות האיבר הראשון, שווה למספר הפרמטרים d שאפשר לבחור כך שה-kAP יהיה מוכל ב-$[n]$. הגדירו את המספר הזה.
- מתקיים $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
- החלק השמאלי של השוויון הוא רק בתור כיוון. ההוכחה עצמה נדרשת רק עבור החלק הימני.

פתרון

האיבר הראשון יכול להיות כל איבר ב- $[n-k+1]$.

עבור $i \in [n]$ שיהיה האיבר הראשון, הסדרה תעבור על $n-i+1$ מספרים, ב-k קפיצות. כלומר ה-d המקסימלי הוא $\frac{n-i+1}{k}$. אז זה גם מספר ה-d האפשריים.

נרצה לסכום את:

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} \frac{n-i+1}{k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n-k+1}(n-i+1) =$$

נסמן $j \coloneqq n-i+1$. כאשר $i=1$ מתקיים $j=n$, וכאשר $i=n-k+1$ מתקיים $j=k$:

$$= \frac{1}{k}\sum_{j=n}^{k} j = \frac{1}{k}\sum_{i=k}^{n} i = \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{k-1} i\right) = \frac{1}{k}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(k-1)k}{2}\right) = \frac{1}{2k}\left(n^2 + n - k^2 + k\right) = \frac{n^2}{2k}\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{k^2}{n^2} + \frac{k}{n^2}\right)$$

כנדרש.

סעיף ב: הוכיחו את המשפט: $\forall k \in \mathbb{N},\ W(k) = \Omega\left(\sqrt{k} \cdot 2^{k/2}\right)$, ללא הלמה הלוקאלית של לובאס.

רמזים:

- נייצר את φ, 2-צביעה של $[n]$ שנבחר באופן מקרי ואחיד (הטלת מטבע לכל מספר).
- נסמן $\mathcal{E}_S$ את המאורע ש-kAP כלשהו $S \subseteq [n]$ היא מונוכרומטית תחת φ. אנחנו מעוניינים במאורע המשלים.
- אם ההסתברות ש"משהו" קורה היא גדולה ממש מ-0, אז המשהו הזה קיים.
- חסם האיחוד מסופק ע"י סעיף א.

פתרון

אם מתקיים $\mathbb{P}\left[\wedge_S \bar{\mathcal{E}}_S\right] > 0$, זה אומר שקיימת 2-צביעה של $[n]$ כך שכל ה-kAP האפשריות הן לא מונוכרומטיות. אז $W(k) > n$. מתקיים:

$$\mathbb{P}[\mathcal{E}_S] = 2 \cdot 2^{-k} = 2^{1-k}$$

כי פשוט צריך שכל אחד מהאיברים יהיה באותו צבע. אז לפי חסם איחוד נקבל:

$$\mathbb{P}\left[\wedge_S \bar{\mathcal{E}}_S\right] = 1 - \mathbb{P}\left[\vee_S \mathcal{E}_S\right] \geq 1 - \frac{n^2}{2k}\left(1 \pm o(1)\right)2^{1-k}$$

כדי שיתקיים $\mathbb{P}\left[\wedge_S \bar{\mathcal{E}}_S\right] > 0$, נדרוש שהחלק השני יהיה קטן ממש מ-1:

$$\frac{n^2}{2k}\left(1 \pm o(1)\right)2^{1-k} < 1 \Rightarrow n^2 < \frac{2k}{\left(1 \pm o(1)\right)2^{1-k}} = \frac{2k \cdot 2^{k-1}}{1 \pm o(1)} = 2k \cdot 2^{k-1} \cdot \left(1 \pm o(1)\right)$$

כלומר:

$$n < 2^{k/2}\sqrt{k}\left(1 \pm o(1)\right)$$

כנדרש.

סעיף ג: כתבו (ללא הוכחה) את הלמה הלוקאלית של לובאס.

פתרון

בקורס למדנו את הגרסה הסימטרית. בגדול, אם יש לנו הרבה אירועים שכולם לא "יותר מדי" סבירים, והם לא "יותר מדי" קשורים, אז ההסתברות שלא כולם קורים גדולה ממש מ-0.

פורמלית: יהיו $\mathcal{E}_1, \dots \mathcal{E}_n$ אירועים כך שמתקיים $\mathbb{P}[\mathcal{E}_i] \le p$ לכל $i \in [n]$ עבור $0 \le p \le 1$ כלשהו.

אם קיים גרף תלויות של המאורעות כך שהדרגה המקסימלית שלו היא d, ומתקיים $4pd \le 1$, אזי $\mathbb{P}\left[\wedge_{i\in[n]} \bar{\mathcal{E}}_i\right] > 0$.

כל גרף על המאורעות $\mathcal{E}_1, \dots \mathcal{E}_n$, שבו בין שני מאורעות תלויים יש צלע, הוא גרף תלויות של $\mathcal{E}_1, \dots \mathcal{E}_n$.

סעיף ד: הוכיחו את המשפט: $\forall k \in \mathbb{N},\ W(k) = \Omega\left(\frac{2^{k-3}}{k}\right)$, בעזרת הלמה הלוקאלית של לובאס.

רמז: הקודקודים של גרף התלויות כבר הוגדרו ברמז של סעיף ב.

פתרון

ניזכר שאנחנו בעצם עובדים עם צביעה φ אקראית. אנחנו רוצים להראות שיש הסתברות חיובית ממש שאין kAP מונוכרומטית ב-$[n]$.

הקודקודים הם המאורעות $\mathcal{E}_S$. כל אחד מייצג kAP כלשהי $S \subseteq [n]$. תהיה צלע $\mathcal{E}_S\mathcal{E}_{S'}$ אם $S \cap S' \neq \emptyset$. כל S היא בת"ל מכל הקודקודים שלא שכנים שלה (כי אם אין איברים משותפים, אין קשר בין הצביעה שלהן).

המאורע $\mathcal{E}_S$ הוא ש- S מונוכרומטית תחת הצביעה האקראית. והראינו שמתקיים: $\mathbb{P}[\mathcal{E}_S] \le 2^{1-k}$.

הדרגה המקסימום בגרף: לכל איבר ב-S, נבדוק בכמה kAP אחרים הוא יכול להופיע: נבנה אותם. יש לכל היותר k מקומות לשים בהם את האיבר, ומספר ה-d האפשריים הוא לכל היותר n/k. ויש k איברים ב-S, בסה"כ יש לכל היותר nk דרכים לבנות kAP שיכיל את האיבר. אז לכל kAP יש לכל היותר nk שכנים.

אם $4pd = 4 \cdot 2^{1-k} \cdot nk \le 1$, אז זה אומר שיש הסתברות חיובית ממש שאין kAP מונוכרומטית ב-$[n]$, כלומר יש צביעה שמקיימת את זה, כלומר לא בכל צביעה של $[n]$ יש kAP מונוכרומטית. ואז זה אומר שה-n הזה לא מספיק גדול.

$$4 \cdot 2^{1-k} \cdot nk \le 1 \Rightarrow n \le \frac{1}{k \cdot 2^2 \cdot 2^{1-k}} = \frac{1}{k \cdot 2^{3-k}} = \frac{2^{k-3}}{k}$$

אז n חייב להיות לפחות $\frac{2^{k-3}}{k}$, כנדרש.

שאלה 3 – *NP-Hardness*

סעיף א: בהינתן גרף G, זוג $(S, V(G) \setminus S)$ שמקיים $S \subseteq V(G), |S| = |V(G) \setminus S|$ ייקרא *bisection*. נסמן $e_G(S, V(G) \setminus S)$ את הגודל של $(S, V(G) \setminus S)$, מספר הצלעות שעוברות מ-S ל-$V(G) \setminus S$. ונסמן $\beta(G)$ את הגודל של ה-*bisection* הכי גדול ב-G.

הוכיחו: $B \coloneqq \{(G,k) : \beta(G) \ge k\} \in NPH$.

רמז: עשינו רדוקציה מ-*max cut* ל-*bisection*.

פתרון

בהינתן בעיית *max-cut*: (G,k), נגדיר את הרדוקציה: נוסיף $v(G)$ קודקודים מבודדים לגרף.

$$f\left((G,k)\right) \coloneqq (G', 2k), \qquad G' \coloneqq \left(V(G) \cup \{x_v : v \in V(G)\}, E(G)\right)$$

המבנה של הרדוקציה תקין לפי תהליך הבניה, והפונקציה פולינומית. נוכיח נכונות:

אם יש חתך ב-G בגודל k, אז אותו חתך ב-G' יהיה בגודל k, ונוכל לקחת כמה קודקודים שצריך כדי שהצדדים יהיו באותו גודל.

אם יש *bisection* בגודל k ב-G', זה אומר שיש k צלעות שחוצות את החתך הזה ב-G, אז אותו חתך (בלי הקודקודים הנוספים) הוא חתך בגודל k ב-G.

סעיף ב: נוסחת *CNF* תיקרא מאוזנת אם לכל משתנה x, מספר המופעים החיוביים והשליליים של x שווים. הוכיחו:

$$\text{BALANCED-CNF-SAT} \coloneqq \{\varphi : \varphi\ is\ a\ satisfiable\ balanced\ CNF\ formula\} \in NPH$$

פתרון

נעשה רדוקציה מ-*CNF-SAT*.

לכל משתנה x נסמן p_x, n_x את מספר המופעים החיוביים והשליליים שלו. נגדיר גאדג'ט של משתנה:

$$g(x) \coloneqq \begin{cases} \left(\underbrace{x \vee \ldots \vee x}_{n_x - p_x + 1} \vee \bar{x}\right), & p_x < n_x \\ \left(\underbrace{\bar{x} \vee \ldots \vee \bar{x}}_{p_x - n_x + 1} \vee x\right), & p_x > n_x \\ (x \vee \bar{x}), & p_x = n_x \end{cases}$$

$$f(\varphi) \coloneqq \varphi \wedge \bigwedge_{x \in \varphi} g(x)$$

הגאדג'טים האלה תמיד T, אז הם לא משפיעים על הספיקות של הנוסחה. φ ספיקה אמ"מ $f(\varphi)$ ספיקה, כנדרש.

שאלה 4 – *Matchings in Bipartite Graphs*

סעיף א: כתבו, ללא הוכחה, את משפט קניג ומשפט הול על שידוכים בגרפים דו"צ.

פתרון

משפט קניג: בגרף דו"צ, $\tau(G) = \nu(G)$.

משפט הול: יהי גרף דו"צ $G \coloneqq (A \uplus B, E)$. אזי, A משתדכת לתוך B אמ"מ לכל $S \subseteq A$ מתקיים $|N_G(v)| \geq |S|$.

סעיף ב: הוכיחו שמשפט קניג גורר את משפט הול.

פתרון

נניח שמשפט קניג נכון ונוכיח את משפט הול. נניח שבכל גרף דו"צ מתקיים $\tau(G) = \nu(G)$, יהי $G \coloneqq (A \uplus B, E)$ גרף דו"צ.

ראשית, נוכיח $A \circlearrowright B \Longrightarrow \forall S \subseteq A, |N_G(v)| \geq |S|$.

נב"ש ש-A משתדכת לתוך B אבל קיימת קבוצה $S \subseteq A$ כך ש- $|N_G(v)| < |S|$. אז את אותה הקבוצה אי אפשר לשדך לתוך B. סתירה.

עכשיו, נוכיח $A \circlearrowright B \Longleftarrow \forall S \subseteq A, |N_G(v)| \geq |S|$.

אם נוכיח ש- $|A| \leq \tau(G)$, לפי משפט קניג נקבל ש- $|A| \leq \nu(G)$, כלומר כל שידוך מקסימום תופס את כל קודקודי A.

יהי C כיסוי קודקודים בגודל $\tau(G)$. נרצה להוכיח ש- $|A| \leq |C|$.

כל צלע מ- $A \setminus C$ הולכת ל- $B \cap C$, כי אחרת הצלע הזאת לא מכוסה. אז $N_G(A \setminus C) \subseteq B \cap C$, כלומר $|N_G(A \setminus C)| \leq |B \cap C|$.

וגם, A מקיימת את תנאי הול אז $|A \setminus C| \leq |N_G(A \setminus C)| \leq |B \cap C|$. אז:

$$\tau(G) = |C| = |A \cap C| + |B \cap C| \geq |A \cap C| + |A \setminus C| = |A|$$

כנדרש.

סעיף ג: יהי $G := (X \dot\cup Y, E)$ גרף דו"צ. תת-קבוצה $Z \subseteq V(G)$ שמקיימת $|N_G(Z)| = |Z|$ תיקרא *tight-Hall-set*.

הוכיחו שאם יש ב-G שידוך שמספק את X, וגם $S, T \subseteq X$ הן קבוצות *tight-Hall*, אז גם $S \cap T$ היא *tight-Hall-set*.

רמז: הכלה והדחה: $|X \cup Y| + |X \cap Y| = |X| + |Y|$.

בהוכחה נשתמש ב- $|S \cup T| + |S \cap T| \leq |N_G(S \cup T)| + |N_G(S \cap T)| \leq \cdots = |S| + |T|$.
נסו לפתח את זה מהכיוון השני ולהשלים את החלקים החסרים.

פתרון

מתקיים:

$$|S| + |T| \stackrel{א}{=} |N_G(S)| + |N_G(T)| \stackrel{ב}{=} |N_G(S) \cup N_G(T)| + |N_G(S) \cap N_G(T)| \stackrel{ג}{=} |N_G(S \cup T)| + |N_G(S \cap T)| \stackrel{ד}{\geq} |S \cup T| + |S \cap T|$$

א. מהנתון ש- T,S הן *tight-Hall-sets*.
ב. הכלה והדחה.
ג. קודקוד נמצא באיחוד של קבוצות השכנים אמ"מ הוא נמצא בשכנים של איחוד הקבוצות. כנ"ל לחיתוך.
ד. לפי משפט הול, מהנתון שיש ב-G שידוך שמספק את X.

בנוסף, מהכלה והדחה נקבל ש-$|S \cup T| + |S \cap T| = |S| + |T|$. כלומר בביטוי שקיבלנו, הכל שוויון. אז:

$$|N_G(S \cup T)| + |N_G(S \cap T)| = |S \cup T| + |S \cap T|$$

וכבר נתון לנו ש:

$$|N_G(S \cup T)| \geq |S \cup T|, \qquad |N_G(S \cap T)| \geq |S \cap T|$$

מתוך תנאי הול, אז שוויון מתקיים רק אם $|N_G(S \cap T)| = |S \cap T|$. כנדרש.