Approximation Algorithms

תרגיל 1

יהי K_n.

סעיף א: נניח שהצלעות ממושקלות ע"י $\{1, 2, \ldots, k\}$ עבור $k \in \mathbb{N}$ כלשהו. (כלומר, משקלים שלמים כאשר המשקל הגדול הוא k).

טענה: כל מעגל המילטוני הוא k-קירוב לסיור TSP אופטימלי.

ראשית, מעגל המילטוני קיים (כי הגרף הוא קליקה) וכל מעגל המילטוני הוא אכן סיור TSP.

כל מעגל המילטוני הוא באורך n אז המשקל שלו הוא לכל היותר $k \cdot n$. כל סיור TSP הוא באורך לפחות n והמשקל שלו הוא לפחות n. כנדרש.

סעיף ב: נניח שהצלעות ממושקלות ע"י פונקציה w המקיימת:

$$w(v_1, v_k) \leq C \cdot \left(w(v_1, v_2) + \cdots + w(v_{k-1}, v_k)\right)$$

כאשר $(v_1, \ldots, v_k)$ הוא מסלול, עבור C ממשי חיובי קבוע כלשהו.

סוג של C-קירוב של אי-שוויון המשולש.

נתאר אלגוריתם $1.5C$-מקרב עבור TSP בגרף כזה.

ניזכר באלגוריתם *Christofides*, אלגוריתם 1.5-מקרב לבעיית *MTSP*. נבצע את אותו האלגוריתם:

אלגוריתם:

1. יהי T עפ"מ של G.
2. תהי O קבוצת הקודקודים ב-T שבעלי דרגה אי"ז.
3. יהי M שידוך מושלם בעל משקל מינימום בגרף $G[O]$ (הגרף המלא על הקודקודים ב-O). מציאת ה-M המינימום היא בעיה ב-P.
4. נוסיף את M ל-T כדי לקבל את $\mathcal{T}$, שהוא אוילרי.
5. נמצא סיור אוילר ε ב- $\mathcal{T}$.
6. נבנה סיור TSP מ- ε ע"י קיצורי דרך.

נוכיח שהאלגוריתם הוא $1.5C$-מקרב.

> **למה:** יהי OPT המשקל של סיור TSP אופטימלי. תהי קבוצה $W \subseteq V(G)$ כך ש- $|W|$ זוגית.
>
> ויהי M שידוך מושלם במשקל מינימום ב- $G[W]$.
>
> אזי, $w(M) \leq C \cdot OPT/2$.

נניח שהלמה נכונה ונוכיח את הקירוב:

כל קיצור דרך נותן C-קירוב למשקל של אותו קטע לפני הקיצור. והמשקל של עפ"מ הוא לכל היותר המשקל של הסיור TSP, כי סיור TSP הוא עץ פורש.

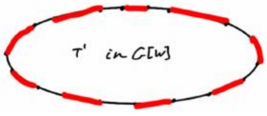
במקרה הגרוע עשינו קיצור דרך לכל צלע בעץ, ואז המשקל של הסיור TSP:

$$W \leq C \cdot w(T) + w(M) \leq C \cdot OPT + C \cdot OPT/2 = 1.5C \cdot OPT$$

נוכיח את הלמה: יהי T סיור TSP אופטימלי, ויהי T' סיור TSP ב- $G[W]$ שהתקבל ע"י קיצורי דרך ב-T.

בגלל החסם של C, נקבל $w(T') \leq C \cdot w(T)$.

מכיוון ש- $|W|$ זוגי, T' הוא מעגל זוגי, כלומר הוא איחוד של שני שידוכים מושלמים (זרים בצלעות) של $G[W]$:



מכיוון ש-M הוא במשקל מינימום ב- $G[W]$, המשקל שלו הוא לכל היותר חצי המשקל של T' (כי T' מורכב משני שידוכים): $w(M) \leq w(T')/2$.

אזי:

$$w(M) \leq w(T')/2 \leq C \cdot w(T)/2 = C \cdot OPT/2$$

כנדרש.

סעיף ג: נניח שהצלעות ממושקלות ע"י $\{1,2,\dots,k\}$ עבור $k\in\mathbb{N}$ כלשהו. נמצא אלגוריתם $\frac{3}{4}k$-מקרב עבור TSP.

נשים לב שמתקיים:

$$w(v_1,v_2)\le\frac{k}{2}\big(w(v_1,v_2)+\cdots+w(v_{\ell-1},v_\ell)\big)$$

למה? המקרה הגרוע הוא כש- $w(v_1,v_2)=k$, וש- $w(v_1,v_2)=\cdots=w(v_{\ell-1},v_\ell)=1$. ואז,

$$w(v_1,v_2)=k=k\cdot\frac{\ell}{\ell}=\frac{k}{\ell}\cdot\ell=\frac{k}{\ell}\big(w(v_1,v_2)+\cdots+w(v_{\ell-1},v_\ell)\big)$$

וזה הכי גדול כאשר $\ell=2$. כי עבור $\ell=1$ זה רק צלע אחת ואז היא לא יכולה להיות גם במשקל k וגם במשקל 1.

אז קיבלנו שזה המקרה של סעיף ב, עם $C=k/2$. ואז האלגוריתם המקרב נותן לנו $\frac{3}{2}\cdot\frac{k}{2}=\frac{3}{4}k$ קירוב, כנדרש.

תרגיל 2

עבור צביעת קודקודים $\psi\colon V(G)\to\mathbb{N}$, נגדיר:

$$S_\psi\coloneqq\sum_{v\in V(G)}\psi(v)$$

את **הסכום** של הצביעה. עבור גרף G, נגדיר:

$$S(G)\coloneqq\min_{\psi}S_\psi$$

כלומר, ניקח את הצביעה התקינה שנותנת את הסכום המינימום.

סעיף א: טענה: אם קיימת צביעה כך ש: $S_\psi\le S\in\mathbb{N}$, אז קיימת קבוצת קודקודים $U\subseteq V(G)$ כך ש:

$$|U|\ge\frac{v(G)}{2},\qquad\forall u\in U\colon\psi(u)\le\frac{2S}{v(G)}$$

נוכיח: נב"ש שהטענה לא נכונה, כלומר לא קיימת קבוצה כזו. נגדיר:

$$U\coloneqq\left\{u\in V(G)\colon\psi(u)\le\frac{2S}{v(G)}\right\}$$

אז לפי ההנחה בשלילה, נקבל ש- $|U|<v(G)/2$. אזי:

$$S\ge S_\psi=\sum_{v\in V(G)}\psi(v)=\underbrace{\sum_{u\in U}\psi(u)}_{\ge0}+\sum_{v\notin U}\psi(v)>^{\text{א}}0+\sum_{v\notin U}\frac{2S}{v(G)}\ge^{\text{ב}}\frac{v(G)}{2}\frac{2S}{v(G)}=S$$

א) כי $\psi(v)>\frac{2S}{v(G)}$, לכל $v\notin U$.
ב) כי $|U|<v(G)/2$.

בסה"כ קיבלנו $S>S$, סתירה.

סעיף ב: טענה: בהינתן צביעה ψ שמקיימת $S_\psi\le S$, קיימת קבוצת קודקודים בגודל לפחות $v(G)/2$ שיש בה לכל היותר $2S/v(G)$ צבעים.

הוכחה: לפי סעיף א, הקבוצה U מקיימת את התנאי.

סעיף ג: יהי $\alpha\ge1$. טענה: אם יש אלגוריתם פולינומי α-מקרב לחישוב $S(G)$, אז יש אלגוריתם פולינומי $O(\alpha\log n)$-מקרב לחישוב $\chi(G)$.

הוכחה: יהי A אלגוריתם כמתואר. נתאר אלגוריתם לחישוב $\chi(G)$:

1. נשתמש ב-A כדי למצוא צביעה ψ שמקיימת $S_\psi\le\alpha\cdot S(G)$.
2. לפי סעיף ב, בצביעה הזו, לפחות $v(G)/2$ מהקודקודים צבועים ע"י לכל היותר $2\alpha S/v(G)$ צבעים. ניקח את U להיות הקבוצה הזו.

3. נגדיר $G \coloneqq G - U$.
4. אם $V(G) > 0$, נחזור לשלב 1. אחרת, נעצור.

בכל איטרציה (שחוזרים ל-1), משתמשים בצבעים חדשים.

בכל איטרציה, מוחקים לפחות $v(G)/2$ קודקודים. אז יש $O(\log n)$ איטרציות.

עבור איטרציה i, נסמן: G_i, ψ_i את הגרף והצביעה באותו שלב.

מכיוון ש- $S(G) \le \chi(G) \cdot v(G)$ (המספר הכי גדול של צבע, כפול מספר הקודקודים), מתקיים לכל i: $S(G_i) \le \chi(G) \cdot v(G_i)$.

בנוסף, $S_{\psi_i} \le \alpha \cdot S(G_i)$ מהגדרת A. בסה"כ, מספר הצבעים בצביעה המתקבלת היא:

$$\sum_{i=1}^{O(\log n)} 2 \cdot \frac{S_{\psi_i}}{v(G_i)} \le \sum_{i=1}^{O(\log n)} \frac{2\alpha\chi(G)v(G_i)}{v(G_i)} = \sum_{i=1}^{O(\log n)} 2\alpha\chi(G_i) = 2\alpha\chi(G) \sum_{i=1}^{O(\log n)} 1 = 2\alpha O(\log n)\chi(G) = O(\alpha \log n)\chi(G)$$

כנדרש.

תרגיל 3

בהינתן גרף G עם $\alpha(G) \ge \frac{3}{4} v(G)$, נתאר אלגוריתם למציאת קבוצה בת"ל בגודל $\frac{v(G)}{2}$.

מכיוון ש- $\alpha(G) = v(G) - \tau(G)$, נקבל ש- $\tau(G) \le v(G)/4$.

נשתמש באלגוריתם 2-מקרב לכיסוי מינימום ונקבל כיסוי בגודל לכל היותר $v(G)/2$. והקבוצה המשלימה היא קבוצה בת"ל בגודל לפחות $v(G)/2$.

תרגיל 4

יהי $0 < \beta \le 1$. טענה: אם יש אלגוריתם פולינומי β-מקרב לחישוב $\alpha(G)$, אז יש אלגוריתם $O\left(\frac{\ln n}{\beta}\right)$-מקרב לחישוב $\chi(G)$.

הוכחה: יהי A אלגוריתם כמתואר, ונתאר אלגוריתם לחישוב $\chi(G)$:

1. נגדיר $c \coloneqq 1$, הצבע ההתחלתי.
2. כל עוד $V(G) \ne \emptyset$, נבצע:
   a. $I \coloneqq A(G)$.
   b. נצבע את הקודקודים של I בצבע c.
   c. $c \coloneqq c + 1$.
   d. $G \coloneqq G - I$.
3. נחזיר את הצביעה המתקבלת.

הצביעה תקינה כי כל פעם צובעים קבוצה בת"ל, בצבע חדש.

בכל איטרציה השתמשנו בצבע אחד, אז נחשב את מספר האיטרציות.

נסמן G_i את הגרף שנשאר בסוף האיטרציה ה-i. נגדיר $n \coloneqq v(G), n_i \coloneqq v(G_i)$. מכיוון שכל מחלקת צביעה היא קבוצה בת"ל, מתקיים:

$$\alpha(G) \ge \frac{n}{\chi(G)}$$

נוכל לבנות את נוסחת הנסיגה הבאה:

$$n_0 = n$$

$$n_1 \le^{א} n_0 - \beta\alpha(G) \le^{ב} n_0 - \beta\frac{n_0}{\chi(G_0)} = n - \frac{\beta n}{\chi(G)} = n\left(1 - \frac{\beta}{\chi(G)}\right)$$

א. כי בשלב הראשון מורידים לפחות קבוצה בגודל $\beta\alpha(G)$.
ב. כי $\alpha(G_0) \ge n_0/\chi(G_0)$.

$$n_2 \le n_1 - \beta\alpha(G_1) \le n_1 - \beta\frac{n_1}{\chi(G_1)} =^{א} n_1\left(1 - \frac{\beta}{\chi(G_1)}\right) \le^{ב} n_1\left(1 - \frac{\beta}{\chi(G)}\right) \le n\left(1 - \frac{\beta}{\chi(G)}\right)\left(1 - \frac{\beta}{\chi(G)}\right) = n\left(1 - \frac{\beta}{\chi(G)}\right)^2$$

א. גורם משותף.

ב. כי $\chi(G_1) \leq \chi(G)$.

ובאינדוקציה, נוכיח ש:

$$n_i \leq n\left(1-\frac{\beta}{\chi(G)}\right)^i$$

בסיס - $i=\{0,1,2\}$ מתקיים. צעד:

$$n_i \leq n_{i-1}-\beta\alpha(G_{i-1}) \leq n_{i-1}-\beta\frac{n_{i-1}}{\chi(G_{i-1})} = n_{i-1}\left(1-\frac{\beta}{\chi(G_{i-1})}\right) \leq n_{i-1}\left(1-\frac{\beta}{\chi(G)}\right) \leq^{\text{א}} n\left(1-\frac{\beta}{\chi(G)}\right)^{i-1}\left(1-\frac{\beta}{\chi(G)}\right) = n\left(1-\frac{\beta}{\chi(G)}\right)^i$$

א. מהנ"א.

כמה איטרציות יהיו? נעצור כש- $n_i < 1$. נגדיר $r \coloneqq \beta/\chi(G)$, אנחנו מחפשים את ה-$i$ הכי קטן שעבורו מתקיים:

$$n(1-r)^i < 1 \Rightarrow \left(1-\frac{1}{r}\right)^i < \frac{1}{n}$$

נסמן $i \coloneqq kr$, עם $k \coloneqq k(n)$ שנמצא בהמשך. אזי:

$$\left(1-\frac{1}{r}\right)^i = \left(\left(1-\frac{1}{r}\right)^r\right)^k \leq \left(\left(e^{-\frac{1}{r}}\right)^r\right)^k = (e^{-1})^k \leq e^{-k}$$

כדי שיתקיים $e^{-k} < n^{-1}$, מספיק לקבוע $k \coloneqq \Omega(\ln n)$. בסה"כ, נקבל $n_i < 1$ עבור:

$$i = \Omega(\ln n)\cdot r = \Omega\left(\frac{\ln n}{\beta}\right)\chi(G)$$

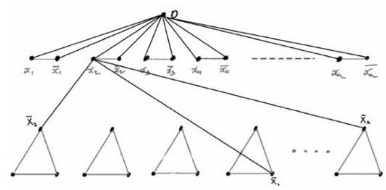
כנדרש.

תרגיל 5

נסמן f את הרדוקציה הפולינומית $\text{NAE-3-CNF-SAT} \leq_p 3\text{COL}$.

סעיף א: נוכיח שלכל φ נוסחת *3-CNF*, מתקיים $\chi\big(f(\varphi)\big) \leq 4$.

ניזכר במבנה של $f(\varphi)$:



נצבע את D בצבע 1. את כל ה"נדנדות" אפשר לצבוע בצבעים 2,3. כל קודקוד של משולש מחובר לכל היותר לקודקוד אחד של נדנדה אחת, אז אפשר לצבוע אותו בצבע של הקודקוד השני של הנקודה. נעשה את זה לשני קודקודים מכל משולש. את הקודקוד השלישי, נצבע בצבע 4. כנדרש.

סעיף ב: נוכיח שאם $P \neq NP$, אז אין אלגוריתם $\left(\frac{4}{3}-\varepsilon\right)$-מקרב לחישוב $\chi(G)$, לאף $\varepsilon > 0$.

כלומר, שאלגוריתם $\frac{3}{4}$-מקרב זה הכי טוב שאפשר בזמן פולינומי, אם $P \neq NP$. כלומר שאם נמצא אלגוריתם פולינומי $\left(\frac{4}{3}-\varepsilon\right)$-מקרב לחישוב $\chi(G)$, אז $\text{NAE-3-CNF-SAT} \in P$, ואז $P = NP$.

בסעיף א הוכחנו ש- $\chi\big(f(\varphi)\big) \leq 4$. ב-$f(\varphi)$ יש משולשים, אז $\chi\big(f(\varphi)\big) \geq 3$. אז מנכונות הרדוקציה נקבל:

$$\chi\big(f(\varphi)\big) = 3 \Leftrightarrow f(\varphi) \in 3COL \Leftrightarrow \varphi \in \text{NAE-3-CNF-SAT}$$

$$\chi\big(f(\varphi)\big) = 4 \Leftrightarrow f(\varphi) \notin 3COL \Leftrightarrow \varphi \notin \text{NAE-3-CNF-SAT}$$

אז הבעיה הבאה היא NPH:

בהינתן G, נקבע האם $\chi(G) \leq 3$ או $\chi(G) \geq 4$.

יהי $\varepsilon > 0$ כלשהו ונניח שקיים אלגוריתם פולינומי $\left(\frac{4}{3} - \varepsilon\right)$-מקרב לחישוב $\chi(G)$. נקרא לו A.

אזי, האלגוריתם הבא הוא אלגוריתם פולינומי לבעיית NAE-3-CNF-SAT:

בהינתן φ נוסחת *3-CNF*, נבנה את הגרף $G := f(\varphi)$ ונשתמש באלגוריתם A כדי לקבל קירוב ל-$\chi(G)$.

אם הקירוב הוא $\chi(G) \leq 4 - 3\varepsilon$, אז $\varphi \in$ NAE-3-CNF-SAT. אחרת, $\varphi \notin$ NAE-3-CNF-SAT.

נוכיח נכונות: אם $\varphi \in$ NAE-3-CNF-SAT, אז $\chi(G) = 3$ ואז הקירוב נותן:

$$\chi(G) \leq \left(\frac{3}{4} - \varepsilon\right) \cdot 3 = 4 - 3\varepsilon$$

אחרת, הקירוב יהיה גדול יותר.

תרגיל 6

נצייר גרף עם משקלים על הקודקודים, כך שאם נריץ אלגוריתם 2-מקרב עבור הגרסה הלא-ממושקלת (שמבוסס על שידוך מקסימום), הכיסוי המתקבל לא יהיה 2-קירוב עבור הכיסוי **הקל** ביותר.

ניזכר באלגוריתם ואיך הוא עובד (קובץ 14, *Approximating min VC*):

ניזכר ששידוך מקסימום היא בעיה ב-P. וגם, שגודל הכיסוי המינימום $\tau(G)$ הוא לפחות גודל השידוך המקסימום $\nu(G)$.

אז נוכל למצוא שידוך מקסימום בגרף, ולקחת את הקודקודים של הצלעות של השידוך.

כי זה בוודאות מכסה את כל הצלעות (אם יש צלע שלא מכוסה, אפשר להוסיף אותה לשידוך).

מספר הצלעות הוא לכל היותר כגודל הכיסוי ($\nu(G) \leq \tau(G)$), ולקחנו 2 קודקודים לכל צלע.

כלומר לקחנו לכל היותר $2 \cdot \tau(G)$ קודקודים. פי 2 מגודל הכיסוי המינימום, כלומר 2-קירוב.

האלגוריתם לוקח את השידוך המקסימום. נבנה גרף שבו יש שידוך מקסימום יחיד, שהקודקודים שלו במשקל גבוה.

בכל גרף שיש בו שידוך מושלם, ניקח את כל הקודקודים. נצייר גרף דו"צ, שבו הקודקודים ב-A במשקל גדול יותר מהקודקודים של B. הכיסוי המינימום הוא רק הקודקודים של B. אפילו שני קודקודים יספיקו:

השידוך הוא הצלע, והאלגוריתם ייקח את שני הקודקודים. המשקל הוא 3, שזה 3 פעמים המשקל של הכיסוי המינימום (רק הקודקוד 1).

תרגיל 7

תזכורת:

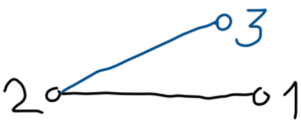
$\alpha(G)$ – גודל הקבוצה הבת"ל המקסימום בגרף. $\tau(G)$ – גודל הכיסוי בקודקודים המינימום בגרף.

יהי A האלגוריתם למציאת כיסוי מינימום ע"י השידוך המקסימום. עם הזהות $\alpha(G) + \tau(G) = \nu(G)$ נציע את האלגוריתם B הבא למציאת קבוצה בת"ל:

1. $C := A(G)$. הכיסוי המינימום המתקבל מהאלגוריתם של השידוך.
2. נחזיר את $V(G) \setminus C$. (ניזכר שקבוצה S היא בת"ל אמ"מ $V(G) \setminus S$ היא כיסוי).

נצייר גרף על $n + 1$ קודקודים שמקיים $\alpha(G) > n/2$, שעבורו B יחזיר קבוצה בגודל 1.

אנחנו בעצם צריכים ש-A ייתן קבוצה בגודל n. כלומר שיהיה קודקוד אחד בלבד שלא בשידוך. נרחיב את הגרף מהשאלה הקודמת:



(המספרים הם מספרי קודקודים, לא משקלים). הקבוצה הבת"ל המקסימום היא $\{1,3\}$. מתקיים $n = 2$, $\alpha(G) > 1 = n/2$.

השידוך המקסימום יהיה אחת הצלעות, אז הקבוצה הבת"ל המתקבלת תהיה 1 או 3.

אגב, הפתרון בקובץ מציע לקחת גרף $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, ולהוסיף לו קודקוד אחד. מה שעשינו כאן זה אותו דבר עם $n = 2$.

תרגיל 8

גרף G ייקרא חסר משולשים אם אין בו אף עותק של K_3. כלומר, אין אף קבוצה של 3 קודקודים שיש ביניהם 3 צלעות.

נתאר בעיה: בהינתן גרף G, מה המספר הנמוך ביותר של צלעות שאפשר להוריד כדי לקבל גרף חסר משולשים.

נציע אלגוריתם 3-מקרב פולינומי. כלומר, אם ב-G אפשר לקבל גרף חסר משולשים ע"י הסרת k צלעות, האלגוריתם שלנו מוצא קבוצה של לכל היותר $3k$ צלעות שאם נוריד אותן נקבל גרף חסר משולשים.

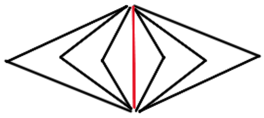
נעבור על כל ה- $\binom{n}{3}$ קבוצות של 3 קודקודים. לכל קבוצה, נבדוק אם היא משולש. אם כן, נוריד את הצלעות.

האלגוריתם פולינומי:

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \leq n^3$$

והוא בוודאות מספק גרף חסר משולשים. נוכיח את איכות הקירוב:

קודם, אינטואיציה. למה אי אפשר להוריד צלע אחת מכל משולש? כי לדוגמה בגרף כזה:

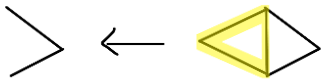


נחשוב על גרף כזה עם $2n + 1$ צלעות (זו דוגמה עם $n = 6$). אם מכל משולש נוריד את אחת הצלעות השחורות, נקבל קבוצה של n צלעות. אבל הפיתרון האופטימלי הוא צלע אחת.

מצד שני, בגרף שהוא רק משולשים מבודדים, הפיתרון האופטימלי הוא צלע אחת מכל משולש. והפיתרון שלנו מוריד את כל הצלעות. שזה בדיוק 3-קירוב.

איך נשווה את הפיתרון שלנו לפיתרון האופטימלי?

נשים לב שבכל גרף, הצלעות שאנחנו מורידים מהווים קבוצה של משולשים זרים-בצלעות. כי אם יש משולשים חופפים ב-G, נוריד רק אחד מהם:



נסמן S את המשולשים שהאלגוריתם מוריד. ונשים לב, שכל פיתרון (גם האופטימלי) צריך להוריד לפחות צלע אחת מכל משולש כזה. כלומר $OPT \geq |S|$.

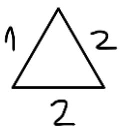
האלגוריתם מוריד $3|S|$ צלעות, כנדרש.

תרגיל 9

ננסה גרסה ממושקלת של תרגיל 8. יהי גרף $G \coloneqq (V, E)$ ותהי $w: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ פונקציית משקל אי שלילית על הצלעות. מתוך כל הקבוצות $R \subseteq E$ שעבורן $G - R$ הוא חסר משולשים, נרצה למצוא את הקבוצה במשקל מינימום.

סעיף א: נראה דוגמה שעבורה הפיתרון החמדן מתרגיל 8 לא נותן 3-קירוב.

הפיתרון שלנו מוריד משולשים שלמים. נצייר גרף של משולשים מבודדים (ככה שהאלגורית יוריד את כולם):



הפיתרון האופטימלי הוא להוריד רק את צלע 1, אבל האלגוריתם שלנו יוריד את כולם והמשקל יהיה 5, פי 5 מהמשקל האופטימלי.

סעיף ב: נציע אלגוריתם LP למציאת 3-קירוב לבעיה.

תרגילים 10, 11, 12, 13

מופיעים בתרגול 9.

תרגיל 14

בעיית שידוך במשקל מקסימום: יהי גרף $G \coloneqq (V, E)$ ותהי $w: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ פונקציית משקל אי שלילית על הצלעות. אלגוריתם מקרב:

1. $M \coloneqq \emptyset$.
2. כל עוד $E \neq \emptyset$:
   a. ניקח את uv, הצלע הכבדה ביותר.
   b. $M \coloneqq M \cup \{uv\}$.
   c. $G \coloneqq G - uv - \{xy \in E : \{x, y\} \cap \{u, v\} \neq \emptyset\}$. (נוריד את הצלע הכבדה וכל הצלעות שחולקות איתה קודקוד).
3. נחזיר את M.

נוכיח שהאלגוריתם הוא 0.5-מקרב:

נסמן M_g, M_o את הפתרונות החמדן והאופטימלי. ונסמן: $F_1 \coloneqq M_o \cap M_g,\ F_2 \coloneqq M_g \setminus M_o,\ F_3 \coloneqq M_o \setminus M_g$. ונשים לב ש- $M_o = F_1 \dot\cup F_3$.

לכל צלע $e \in F_3$, יש צלע $e' \in F_2$ סמוכה ל-e כך ש- $w(e) \geq w(e')$. כי אם $e' \in F_2$, זה אומר שלא לקחנו אותה לפתרון החמדן כי לקחנו צלע שסמוכה אליה, כי הצלע הסמוכה הייתה באותו משקל או יותר. אז נוכל להגדיר מיפוי:

$$f: F_3 \to F_2, \qquad f(e) \coloneqq e'$$

ונשים לב שכל צלע $e' \in F_2$ סמוכה לכל היותר ל-2 צלעות ב-F_3, כי אם לקחנו צלע סמוכה מכל צד לפיתרון האופטימלי, אי אפשר לקחת יותר כי אז זה לא שידוך. אז לכל צלע $e' \in F_2$ יש לכל היותר 2 צלעות $e \in F_3$ כך ש- $f(e) \coloneqq e'$. ולכן:

$$w(F_3) = \sum_{e \in F_3} w(e) \leq \sum_{e \in F_3} w\big(f(e)\big) \leq 2 \sum_{e' \in F_2} w(e')$$

הסכום הראשון: נעבור על כל הצלעות שהן באופטימלי ולא בחמדן, וניקח את המשקל של הצלע הזו.

הסכום השני: נעבור על כל הצלעות שהן באופטימלי ולא בחמדן, ולכל אחת ניקח צלע שבגללה הצלע לא בחמדן. וניקח את המשקל של הצלע הזו.

הסכום השלישי: נעבור על כל הצלעות שהן בחמדן ולא באופטימלי. לכל צלע כזו יש לכל היותר 2 צלעות באופטימלי שלא בחמדן ששולחים אליה. אז פספסנו לכל היותר צלע אחת ב- F_3 לכל צלע ב- F_2. והמשקל שאנחנו סוכמים זה המשקל של הצלע ב- F_2, ככה שזה לא משנה איזה צלע ב- F_3 פספסנו.

כלומר:

$$\frac{1}{2} w(f_3) = \frac{1}{2} \sum_{e \in F_3} w(e) \leq \sum_{e' \in F_2} w(e') = w(F_2) \Longrightarrow w(F_2) \geq \frac{w(F_3)}{2}$$

נוכל לרשום:

$$w\big(M_g\big) = w(F_1) + w(F_2) \geq w(F_1) + \frac{w(F_3)}{2} \geq \frac{w(F_1)}{2} + \frac{w(F_3)}{2} = \frac{w(F_1) + w(F3_3)}{2} = \frac{w(M_o)}{2}$$

כנדרש.

תרגיל 15

הגדרה: **קבוצה שלטת** היא קבוצה של קודקודים כך שכל קודקוד בגרף הוא שכן של הקבוצה (או בקבוצה עצמה).

נתון אלגוריתם לבעיית *min dominating set*:

1. נאתחל $D \coloneqq \emptyset$.
2. כל עוד $V(G) \neq \emptyset$:
   a. נבחר $u \in V(G)$ שרירותי.
   b. נגדיר $D \coloneqq D \cup \{u\}$.
   c. נגדיר $G \coloneqq G - \{u \cup N\_G(u)\}$. (נסיר את u וכל השכנים שלו).
3. נחזיר את D.

נוכיח שהאלגוריתם הוא <u>לא</u> $(\log n)$-מקרב:

Approximation Algorithms

נתאר גרף שבו יש פיתרון מאוד יעיל (נגיד, קודקוד יחיד) אבל האלגוריתם יכול לתת פתרון גרוע. נציע גרף כוכב: $K_{1,n-1}$. אם הקודקוד הראשון שנבחר הוא לא האמצעי (שיש לו רק הסתברות $1/n$ להיבחר), אז נצטרך לקחת את כל שאר הקודקודים. גודל הפיתרון יהיה $n-1$, במקום 1.

זה לא $(\log n)$-מקרב. זה בקושי *n*-מקרב.

תרגיל 16

סעיף א: נוכיח שאם קיים אלגוריתם *k*-מקרב עבור בעיית *min set cover*, אז יש אלגוריתם *k*-מקרב לבעיית *min dominating set*.

נתאר רדוקציה: $\text{MIN-DS} \leq_p \text{MIN-SC}$:

בהינתן בעיית *min-dc*: (G,k) כאשר השאלה היא האם קיימת בגרף G קבוצה שלטת בגודל לכל היותר k, נתאר פונקציה שמעבירה את הבעיה לבעיה מסוג *min-sc*: (H,k), כאשר H הוא היפרגרף והשאלה האם קיימת קבוצת צלעות שמכסה את כל הקודקודים, בגודל לכל היותר k.

נסמן: $\Gamma_v \coloneqq N_G(v) \cup \{v\}$. נתאר את ההיפרגרף H: $V(H) \coloneqq V(G),\ E(H) \coloneqq \{\Gamma_v : v \in V(G)\}$.

$$f\big((G,k)\big) \coloneqq (H,k)$$

נכונות הרדוקציה: קבוצה $S \subseteq V(G)$ היא שלטת אמ"מ הקבוצה $\{\Gamma_v : v \in S\}$ היא כיסוי ב-H.

ומהגדרת הרדוקציה, גודל הפתרונות האופטימליים של הבעיות שווה. אז הקירוב הוא אותו קירוב.

סעיף ב: בעיית *min-connected-dominating-subgraph* (תת-גרף קשיר שולט מינימום): בהינתן גרף G, נרצה למצוא תת-גרף $S \subseteq G$ כך ש:

1. S קשיר,
2. $V(S)$ קבוצה שלטת ב-G,
3. הגודל $e(S)$ (מספר הצלעות ב-S) הוא מינימום.

בהינתן גרף קשיר G, ואלגוריתם *k*-מקרב לבעיית *SC*, נתאר אלגוריתם *6k*-מקרב לבעיית *MCDS*. רמז: עצי שטיינר.

האלגוריתם ה *k*-מקרב ל- *SC* נותן לנו (לפי סעיף א) אלגוריתם *k*-מקרב לבעיית *DS*. נשתמש באלגוריתם *k*-מקרב לבעיית *DS* כדי למצוא קבוצה שלטת, *D*. עכשיו, אנחנו צריכים למצוא תת-גרף על הקודקודים של *D*.

יהי S עץ שטיינר 2-מקרב ל-$V(D)$, יהי T עץ שטיינר אופטימלי ל-$V(D)$, ויהי C פתרון אופטימלי ל-*MCDS*. נראה ש- $e(S) \leq 6k \cdot e(C)$.

נשים לב ש- $e(T) \leq e(C) + |D|$, כי כל קודקוד ב-$V(D)$, או שהוא שייך ל-$V(C)$ או שהוא שכן של קודקוד ב-$V(C)$. אז ההרחבה מ-C ל-T דורשת לכל היותר צלע אחת לכל קודקוד ב-D. אזי:

$$e(S) \leq 2 \cdot e(T) \leq 2 \cdot (e(C) + |D|) \leq 2 \cdot e(C) + 2 \cdot k \cdot OPT_{DS}$$

כאשר OPT_{DS} הוא מחיר הפיתרון האופטימלי ל-*DS*.

ונשים לב ש- $OPT_{DS} \leq e(C) + 1$, כי כל תת גרף שולט הוא לא עץ, והקודקודים שלו הם קבוצה שלטת. אז:

$$\begin{aligned} 2 \cdot e(C) + 2 \cdot k \cdot OPT_{DS} &\leq 2 \cdot e(C) + 2 \cdot k \cdot (e(C)+1) = 2e(C) + 2ke(C) + 2k \leq 2e(C) + 2ke(C) + 2ke(C) \\ &= e(C) \cdot (2+4k) \leq e(C) \cdot (2k+4k) = 6ke(C) \end{aligned}$$

כנדרש.

סעיף ג: בעיית *travelling through neighborhoods* – נסיעה דרך שכונות:

נתון גרף G. סיור שכונות של G הוא C, הילוך סגור (כמו מעגל אבל מותר לחזור על קודקודים, לא על צלעות) ב-G שמקיים את התכונה:

$$\forall v \in V(G):\ V(C) \cap (N_G(v) \cup \{v\}) \neq \emptyset$$

כלומר, כל קודקוד הוא או בעצמו בהילוך או שיש לו שכן בהילוך. אנחנו מחפשים הילוך כזה באורך מינימום. נתאר אלגוריתם $O(\log n)$-מקרב.

רמזים: קיים אלגוריתם $O(\log n)$-מקרב לבעיית *SC*, ונשתמש ב-*DFS* על תת-גרף קשיר שולט.

לפי האלגוריתם המקרב לבעיית *SC*, עם סעיף א, קיים אלגוריתם מקרב לבעיית *MCDS*. יהי $S \subseteq G$ תת-גרף כזה.

ניקח את D, הילוך *DFS* על S. D הוא הילוך שכונות על G. נוכיח את איכות הקירוב:

הילוך שכונות (*NW*) אופטימלי על G הוא גם תת-גרף קשיר שולט (*MCDS*) של G. אז $OPT_{MCDS} \leq OPT_{NW}$.

בהגדרה, $e(S) = O(\log n)OPT_{MCDS}$ (כי זה מבוסס על האלגוריתם שנתון לנו, $O(\log n)$-מקרב). וגם, מתקיים $e(D) = 2e(S)$ (הולכים על כל צלע בדיוק פעמיים, כי זה *DFS* על עץ). בסה"כ:

$$e(D) = 2e(S) = O(\log n)OPT_{MCDS} \leq O(\log n)OPT_{NW}$$

כנדרש.

תרגיל 17

בעיית *hitting set*: נתונה קבוצה $P \coloneqq \{p_1, \dots, p_n\}$, ואוסף של תתי-קבוצות לא-ריקות של P: $\{S_1, \dots S_m\} \subseteq \mathcal{P}(P)$. כך ש- $\forall i \in [m]: |S_i| \leq 4$.

קבוצת *hitting set* עבור $\{S_i\}_{i\in[m]}$ היא קבוצה $H \subseteq P$ שמקיימת: $\forall i \in [m]: |H \cap S_i| \geq 1$. אנחנו מחפשים קבוצה *HS* בגודל מינימום.

זה פשוט בעיית *min-SC* עבור היפר-גרפים.

סעיף א: נתאר ניסוח *ILP* לבעיה: לכל איבר p נגדיר משתנה $x_p \in \{0,1\}$. אנחנו מחפשים:

$$\min \sum_{p\in P} x_p, \qquad \forall j \in [m]: \sum_{p\in S_j} x_p \geq 1$$

כמה שפחות איברים, כך שלכל קבוצה S יש איבר ב-H.

סעיף ב: נתאר 4-קירוב עבור הבעיה ב-*LP*:

$$\min \sum_{p\in P} x_p, \qquad \forall j \in [m]: \sum_{p\in S_j} x_p \geq 1, \qquad x_p \in [0,1]$$

$$H \coloneqq \{p \in P:\ x_p \geq 1/4\}$$

נוכיח את הקירוב: לכל $p \in P$, נגדיר:

$$y_p \coloneqq \begin{cases} 1, & x_p \geq 1/4 \\ 0, & else \end{cases}$$

ואז, $y_p \leq 4x_p$ לכל $p \in P$. ונוכל לרשום:

$$|H| = \sum_{p\in P} y_p \leq \sum_{p\in P} 4x_p = 4\sum_{p\in P} x_p = 4 \cdot OPT_f \leq 4 \cdot OPT$$

כנדרש.