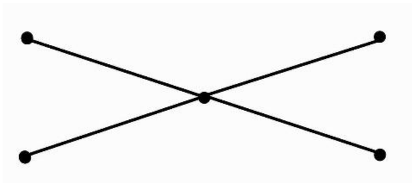
Connectivity

תרגיל 1

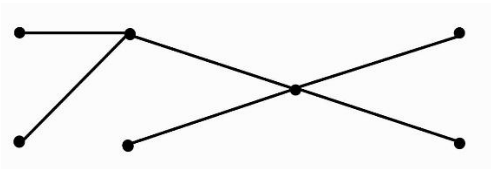
נצייר גרף G שמקיים: $\kappa(G) < \kappa'(G) < \delta(G)$.

מה אנחנו צריכים? צריך שיהיה אפשר להוריד כל $\kappa - 1$ קודקודים והגרף יישאר קשיר. וגם, שיהיה אפשר להוריד כל κ צלעות והגרף יישאר קשיר. וגם, שלכל קודקוד יש דרגה לפחות $\kappa + 2$.

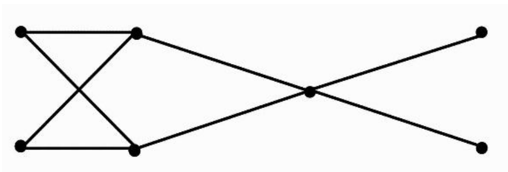
הכי קל שיהיה קודקוד חתך, ואז $\kappa = 1$. ואז צריך שיהיה אפשר להוריד כל צלע והגרף יישאר קשיר. אז הקודקוד חתך מחובר ל-2 צלעות. אבל שיש 2 צלעות שאם נוריד אותן, הגרף לא קשיר. נתחיל עם זה:



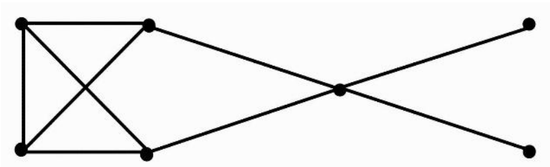
וצריך גם ש- $\delta(G) \geq 3$, אז נוסיף צלעות. נשים לב לא להוסיף צלעות שמחברות בין שני הצדדים של קודקוד החתך. וגם לא להוסיף צלעות שמבטלות את החשיבות של צלעות החתך. לכל קודקוד שיש פחות 2 שכנים, נוסיף צלעות. נתחיל עם זה:



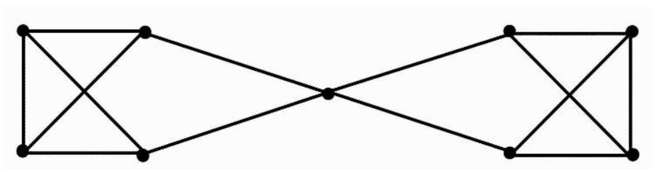
וגם לשני:



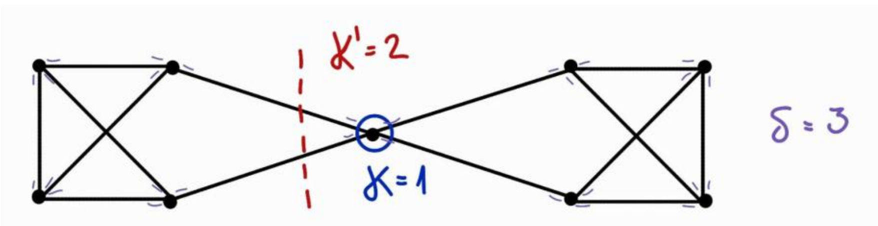
ועכשיו לשני הקודקודים החדשים חסרה צלע, נוסיף:



וכנ"ל לצד השני:



וסיימנו:



תרגיל 2

יהי $G := (V, E)$ גרף קשיר המקיים את התכונה שלכל צלע $e \in E$ יש שני מעגלים שנפגשים רק ב-e.

טענה: $\kappa'(G) \geq 3$.

הוכחה: נראה שכל זוג צלעות הן לא חתך-בצלעות.

יהיו שתי צלעות $f,g \in E$.

מההנחה ש-f מוכל בשני מעגלים (ובפרט במעגל אחד), $G-f$ הוא גרף קשיר.

ומכיוון שיש שני מעגלים שנפגשים רק ב-g, לפחות אחד מהם קיים ב- $G-f$.

אז g הוא לא גשר ב- $G-f$. כלומר אפשר להוריד גם אותו והגרף יישאר קשיר.

תרגיל 3

יהי $G \coloneqq (V,E)$ גרף r-קשיר עם $2n$ קודקודים, שאין בו תת-גרף מושרה שהוא עותק של $K_{1,r+1}$.

תת-גרף מושרה מוגדר ע"י תת קבוצה של קודקודים $S \subseteq V$, יחד עם כל הצלעות שיש ב-G בין קודקודים של S. מסומן $G[S]$.

גרף $K_{1,r+1}$ הוא גרף דו"צ עם $|A|=1, |B|=r+1$ כך שהקודקוד של A מחובר לכל קודקוד של B (כמו גרף *claw* שראינו).

טענה: ב-G יש שידוך מושלם.

ניזכר במשפט *Tutte*:

נסמן $\boldsymbol{C_o(G)}$ את מספר רכיבי הקשירות מדרגה אי-זוגית שיש ב-G.

קיים ב-G שידוך מושלם **אמ"מ** לכל $S \subseteq V(G)$ מתקיים $C_o(G-S) \le |S|$. (צד שמאל נקרא תנאי *Tutte*).

תהי $S \subseteq V$ כלשהי. נחלק למקרים ונראה שבכל אחד מהם, תנאי *Tutte* מתקיים:

אם $S=\emptyset$, אז $G-S=G$ וזה רכיב קשירות אחד. ויש $2n$ קודקודים, אז זה רכיב קשירות מדרגה זוגית. אז $C_o(G-S)=0 \le 0 = |S|$.

אם $1 \le |S| \le r-1$, אז מההנחה ש- $\kappa(G)=r$, נקבל ש- $G-S$ קשיר. אז יש רכיב קשירות אחד. ובכל מקרה נקבל:

$$C_o(G-S) = 1 \le 1 = |S|$$

עבור המקרה $|S| \ge r$, מספיק להראות ש- $C(G-S) \le |S|$ (מספר הרכיבים של $G-S$) כי $C_o(G-S) \le C(G-S)$.

כל רכיב C של $G-S$ מתחבר ללפחות r קודקודים ב-S. כי אחרת, G לא היה r-קשיר. (היינו מורידים את הקודקודים שהרכיב מחובר אליהם ב-S. נשאר לפחות קודקוד אחד ב-S והוא מבודד מהקודקודים של הרכיב).

לכל רכיב C של $G-S$, נבחר r צלעות שמחברות אותו עם r קודקודים שונים ב- S.

נשים לב – יכול להיות שיש שני קודקודים שונים ב-S שמתחברים לאותו קודקוד ברכיב.

לכל $v \in S$ בחרנו לכל היותר צלע אחת שמחברת אותו לכל רכיב (כי בחרנו r צלעות שמתחברות ל-r קודקודים שונים ב-S).

כלומר, אין מצב שבחרנו קודקוד $v \in S$ שמחובר לשני קודקודים שונים ברכיב.

אז אם $C(G-S) > |S|$, זה אומר שבתהליך הבחירה בחרנו יותר (ממש) מ- $r|S|$ צלעות שיוצאות מ-S. כלומר לפחות $r|S|+1$.

אז לפי שובך היונים, יש קודקוד $v \in S$ שמחובר ל- $r+1$ מהצלעות שבחרנו.

וכל צלע היא לרכיב קשירות אחר, אז אין צלעות בין הקודקודים שמחוברים ל-v.

הקודקוד v עם הצלעות שבחרנו מהווים עותק מושרה של $K_{1,r+1}$, בסתירה להגדרת הגרף.

תרגיל 4

יהי גרף $G \coloneqq (V,E)$, ותהי $S \subseteq V$.

טענה א:

$$e_G(S, V \setminus S) = \left(\sum\nolimits_{v \in S} \deg_G v\right) - 2e(G[S])$$

כלומר: סכום הדרגות ב-S, פחות פעמיים מספר הצלעות שיש בתת-גרף המושרה על S, שווה למספר הקודקודים שיש בין S לשאר הגרף.

נספור את סכום הדרגות של הקודקודים ב-S:

כל צלע ב- $e_G(S,V\setminus S)$ נספרת פעם אחת. כל צלע ב- $e(G[S])$ נספרת פעמיים. בסה"כ:

$$e_G(S,V\setminus S)+2e(G[S])=\left(\sum\nolimits_{v\in S}\deg_G v\right)$$

כנדרש.

טענה ב: אם $S\neq\emptyset$, ו- $e_G(S,V\setminus S)<\delta(G)$, אז $|S|>\delta(G)$.

נסמן $\delta:=\delta(G)$. ראשית, נשים לב שאין קודקודים מבודדים כי אז $\delta=0$. אז נוכל להניח $\delta\geq 1$.

אם $S=V$, אז $e_G(S,V\setminus S)=0<1$. אז הדרגה נקבעה רק לפי S ואז, $|S|>\delta$ כי כדי שתהיה דרגה δ צריך לפחות $\delta+1$ קודקודים.

נניח ש- $S\notin\{\emptyset,V\}$. אם $e_G(S,V\setminus S)=0$ אז בכל צד מספר הקודקודים הוא לפחות $\delta+1$. אז $\delta<\min\{|S|,|V\setminus S|\}$.

נניח ש- $1\leq e_G(S,V\setminus S)<\delta$. לפי טענה א:

$$\left(\sum\nolimits_{v\in S}\deg_G v\right)-2e(G[S])<\delta$$

באופן כללי מתקיים:

$$\sum\nolimits_{v\in S}\deg_G v\geq\delta|S|,\qquad 2e(G[S])\leq|S|\cdot(|S|-1)$$

השמאלי לפי הגדרת δ, והימני כי אם נספור את כל הצלעות (המכוונות) האפשריות זה בדיוק $|S|\cdot(|S|-1)$, וזה פעמיים מספר הצלעות הלא מכוונות.

כלומר:

$$\delta|S|-|S|\cdot(|S|-1)\leq\left(\sum\nolimits_{v\in S}\deg_G v\right)-2e(G[S])<\delta$$

נעביר אגפים:

$$\delta|S|-\delta<|S|(|S|-1)\Longrightarrow\delta(|S|-1)<|S|(|S|-1)\Longrightarrow\delta<|S|$$

תרגיל 5

יהי $G:=(V,E)$ גרף על n קודקודים. נסמן $\delta:=\delta(G),\ \kappa':=\kappa'(G)$.

טענה א: אם $\delta\geq\lfloor n/2\rfloor$, אז $\kappa'=\delta$.

מתקיים $\kappa'\leq\delta$, לפי מסקנה ממשפט וויטני.

נב"ש ש- $\kappa'<\delta$ ותהי F קבוצת צלעות מפרידה בגודל מינימום. נתמקד ברכיבים של $G-F$. נבחר רכיב C כלשהו.

יש לכל היותר κ' צלעות שיוצאות ממנו בגרף המקורי (כי הורדנו רק κ' צלעות וזה הפריד אותו משאר הגרף).

אז אם ניקח את $S:=V(C)$, נקבל $e_G(S,V\setminus S)\leq\kappa'<\delta$, ולפי טענה 4ב נקבל ש $|C|=|S|>\delta$.

מכיוון שב- $G-F$ יש לפחות 2 רכיבי קשירות, נקרא להם C_1,C_2. אז:

$$n\geq|C_1|+|C_2|$$

וכל אחד מהם מקיים $|C|>\delta$, אז:

$$n\geq\underbrace{|C_1|}_{>\delta}+\underbrace{|C_2|}_{>\delta}\geq\delta+1+\delta+1=2\delta+2=2(\delta+1)$$

ו- $\delta\geq\lfloor n/2\rfloor$, נקבל:

$$n\geq 2(\delta+1)\geq 2(\lfloor n/2\rfloor+1)\geq n+1$$

סתירה.

Connectivity

טענה ב: נניח ש-G קשיר. אם $\deg_G x + \deg_G y \geq n-1$ לכל $xy \notin E$, אז $\kappa' = \delta$.

יהי F מפריד בצלעות בגודל מינימום ונב"ש ש- $|F| < \delta$. מכיוון ש-G קשיר, F מגדירה חתך מינימלי $(S,\bar{S})$.

אז לפי 4ב, נשים לב שמתקיים $e_G(S, V \setminus S) < \delta$ וגם $e_G(\bar{S}, V \setminus \bar{S}) < \delta$. אז לפי 4ב, נקבל $|S| > \delta$ וגם $|\bar{S}| > \delta$.

ננתח את ההנחה ש- $\deg_G x + \deg_G y \geq n-1$. אם אין ל- x, y אף שכן משותף וגם אין בניהם צלע, אז סכום הדרגות יהיה לכל היותר $n-2$.

כלומר, לכל $xy \notin E$ שמקיימים $\deg_G x + \deg_G y \geq n-1$, יש שכן משותף.

אז אם יש קודקוד $v \in S$ שאין לו אף שכן ב-$\bar{S}$, זה אומר שיש לו שכן משותף עם כל קודקוד ב-$\bar{S}$. וכל השכנים המשותפים האלה חייבים להיות ב-S.

אז על כל קודקוד ב-$\bar{S}$, יש צלע שחוצה את החתך. ומכיוון ש- $|\bar{S}| > \delta$, זה אומר ש- $e_G(S, V \setminus S) > \delta$. סתירה.

אז לכל קודקוד $v \in S$ יש לפחות שכן אחד ב-$\bar{S}$. מכיוון ש- $|S| > \delta$, נקבל ש- $e_G(S, V \setminus S) > \delta$, שוב סתירה.

תרגיל 6

תזכורת: מספר הצלעות במסלול הקצר $x \rightsquigarrow y$ מסומן $d_G(x,y)$. **היקף** של גרף $G \coloneqq (V,E)$ מוגדר

$$diam(G) \coloneqq \max_{x,y \in \binom{V}{2}} d_g(x,y)$$

כלומר, שני הקודקודים שהכי רחוקים אחד מהשני.

טענה: יש קורלציה הפוכה בין רמת הקשירות של הגרף וההיקף. בפרט,

$$diam(G) \leq \frac{v(G)-2}{\kappa(G)} + 2$$

הוכחה: יהיו $x, y \in V$ כך ש- $d_G(x,y) = diam(G)$. נסמן $n \coloneqq v(G),\ \kappa \coloneqq \kappa(G),\ d \coloneqq d_G(x,y)$.

לפי משפט מנגר יש κ מסלולי xy זרים בקודקודים פנימיים. וכל אחד מהם באורך לפחות d.

נסמן L את האיחוד של כל המסלולים האלה. $L \subseteq G$. נספור את $V(L)$.

מספר הקודקודים הפנימיים בכל מסלול הוא לפחות $d-2$, ויש לפחות κ מסלולים כאלה. ונוסיף את x, y. בסה"כ:

$$\kappa(d-2) + 2 \leq V(L) \leq n$$

קצת אלגברה:

$$\kappa(d-2) + 2 \leq n \Rightarrow \kappa d - 2\kappa + 2 \leq n \Rightarrow \kappa d \leq n - 2 + 2\kappa \Rightarrow d \leq \frac{n-2}{\kappa} + 2$$

כנדרש.