5: Tutte's Theorem

***Tutte's Theorem* – מאפיין התנהגות של זיווג מושלם בגרף כללי**

משפט *Frobenius* – בהינתן גרף דו"צ $G = (A \cup B, E)$, מתקיים:

קיים שידוך מושלם ב-G **אמ"מ** $|A| = |B|$ וגם A או B מקיימים את תנאי הול.

נשאל – מה אם G אינו גרף דו"צ? נרצה למצוא תנאי לקיום שידוך מושלם בגרפים כלליים.

הסרת קודקודים מגרף

שיטת $G - S$: יהי G גרף ותהי $S \subseteq V(G)$ תת-קבוצת קודקודים.

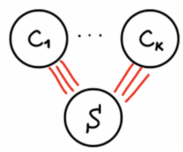
נסמן $\boldsymbol{G - S}$ את תת-הגרף המתקבל מ-G לאחר הסרת כל הקודקודים שב-S והצלעות המחוברות אליהם. הוא תת-גרף של G.

כעת נוכל להציג את G באמצעות רכיבי הקשירות מ- $G - S$ יחד עם הקבוצה S והצלעות שיוצאות מ-S.

כי הקבוצה S והצלעות שלה זה בדיוק מה שהורדנו כדי לקבל את $G - S$, אז אם נחזיר אותם נקבל את G.

כל הצלעות יהיו בין S לרכיבי הקשירות, בתוך רכיבי הקשירות עצמם, ובתוך S עצמה. בין רכיבי הקשירות אין צלעות, כי אחרת הם היו אותו רכיב.

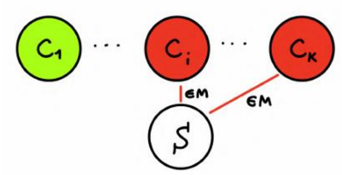
נקבל את המבנה:



בהינתן S, נחלק את רכיבי הקשירות של $G - S$ לאלו עם כמות זוגית של קודקודים ולאלו עם כמו אי זוגית של קודקודים.

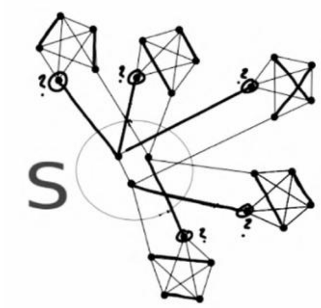
נניח שקיים שידוך מושלם ב-G. נקרא לו M.

ברכיבי הקשירות מסדר אי זוגי (השניים הימניים באיור), בהכרח יישאר לפחות קודקוד אחד ללא שידוך בתוך הרכיב ולכן הוא יתחבר ל-S:



כלומר M חייב להשקיע לפחות צלע אחת בין S לכל רכיב קשירות מסדר אי-זוגי.

לדוגמה באיור הבא, בכל אחד מהמחומשים נשאר קודקוד שחייב להיות מחובר ל-S.



נשים לב שאם יש פחות קודקודים ב-S מאשר רכיבי קשירות אי-זוגיים, אז יש קודקודים ב-S שיצטרכו להתחבר ליותר מצלע אחת.

מסקנה: אם קיימת קבוצה S כזו, אין בגרף שידוך מושלם.

Tutte's Theorem

נסמן $\boldsymbol{C_o(G)}$ את מספר רכיבי הקשירות מדרגה אי-זוגית שיש ב-G.

קיים ב-G שידוך מושלם **אמ"מ** לכל $S \subseteq V(G)$ מתקיים $C_o(G - S) \leq |S|$. (צד שמאל נקרא תנאי *Tutte*).

נשים לב ש-S יכולה להיות הקבוצה הריקה ϕ.

הוכחה – **כיוון ראשון:** כבר הראנו שתנאי *Tutte* הכרחי.

כיוון שני – נוכיח שהתנאי מספיק:

5: Tutte's Theorem

גרף G ייקרא ***Factorizable*** אם יש לו שידוך מושלם. נב"ש שקיים גרף G שמקיים את תנאי *Tutte* ואינו *Factorizable*.

אבחנה 1: יהי גרף G המקיים את תנאי *Tutte* ויהי $e \notin E(G)$. אזי הגרף $G' \coloneqq G + e$ גם מקיים את תנאי *Tutte*.

נוכיח את האבחנה: נרצה להראות שלאחר הוספת e, לא קיימת $S \subseteq V(G') = V(G)$ כך ש- $C_o(G' - S) > |S|$.

תהי קבוצה S: $S \subseteq V(G') = V(G)$ (לא הוספנו קודקודים חדשים אלא רק צלעות).

מההנחה, G מקיים את תנאי *Tutte* בפרט עבור S, כלומר $C_o(G - S) \leq |S|$.

נעבור על כל האפשרויות של הוספת e לגרף G ונראה שבכל המקרים, מספר רכיבי הקשירות האי-זוגיים לא עולה. אז התנאי עדיין מתקיים.

אפשרות 1 – הוספת e בין שני רכיבי קשירות מדרגה זוגית. אזי נקבל רכיב קשירות חדש מדרגה זוגית כתוצאה מאיחוד 2 רכיבי הקשירות. ולכן נקבל:

$$C_o(G' - S) = C_o(G - S) \leq |S|$$

אפשרות 2 – הוספת e בין שני רכיבי קשירות מדרגה אי-זוגית.

אזי נקבל רכיב קשירות חדש מדרגה זוגית כתוצאה מאיחוד 2 רכיבי הקשירות, ונאבד 2 רכיבי קשירות מדרגה אי-זוגית:

$$C_o(G' - S) < C_o(G - S) \leq |S|$$

אפשרות 3 – הוספת e בין רכיב קשירות מדרגה אי-זוגית לרכיב מדרגה זוגית.

אזי נקבל רכיב קשירות חדש מדרגה אי-זוגית כתוצאה מהאיחוד, ונאבד רכיב קשירות 1 מדרגה אי-זוגית:

$$C_o(G' - S) = C_o(G - S) \leq |S|$$

אפשרות 4 – הוספת e בתוך S או אחד מרכיבי הקשירות. זה לא משפיע על הגודל של S או על מספר רכיבי הקשירות.

בסה"כ, לכל קבוצה S ולכל סוג של הוספת צלע, תנאי *Tutte* נשמר.

אבחנה 2: יהי G גרף המקיים את תנאי *Tutte*. אזי $|V(G)|$ זוגי.

הוכחה: מכיוון ש-G מקיים את תנאי *Tutte*, הוא בפרט מקיים אותו עבור $S = \phi$.

אזי, $C_o(G - \phi) \leq |S| = 0$ כלומר אין ב-G רכיבי קשירות דרגה אי-זוגית, אז לא יכול להיות מספר אי-זוגי של קודקודים.

נמשיך בהוכחת משפט *Tutte*: הנחנו בשלילה שקיים גרף G המקיים את תנאי *Tutte* ואינו *Factorizable*.

נדמיין שנוסיף את כל הצלעות עד שנקבל קליקה ואז קיים שידוך מושלם. ובכל השלבים של הוספת צלע, תנאי *Tutte* ממשיך להתקיים (לפי אבחנה 1).

כלומר, יש שלב שבו יש לנו G שהוא דוגמה נגדית, וכל הוספת צלע תגרום לו להפסיק להיות דוגמה נגדית.

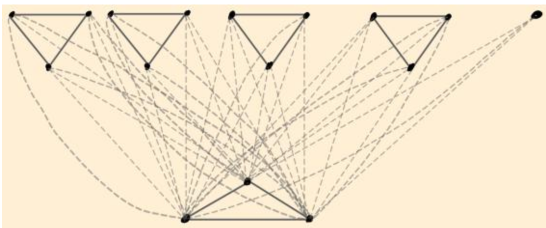
לכן, אפשר להניח כי G הינו דוגמה נגדית מקסימלית בצלעות. כלומר שאם נוסיף לה צלע, היא כבר לא תהיה דוגמה נגדית.

לפי אבחנה 2, ל-G יש מספר זוגי של קודקודים. אם G שלם, אז הוא גרף שלם עם מספר זוגי של קודקודים ויש לו שידוך מושלם. אז G לא שלם.

המטרה שלנו – להוכיח שגרף כמו G אינו קיים.

נגדיר: גרף *SNF*

גרף G שאין בו שידוך מושלם, אבל **כן** מקיים ש- $G + e$ הוא *Factorizable* לכל צלע $e \notin E(G)$, נקרא *Saturated non-factorizable graph*.

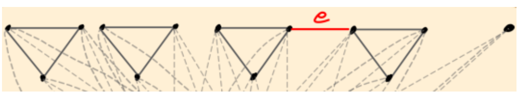


נסביר את מבנה הגרף ב<u>דוגמה</u>: בין המשולשים והקודקוד היחיד למעלה אין צלעות בכלל. בינם לבין המשולש למטה, כל הצלעות קיימות.

הוא לא מקיים את תנאי *Tutte*: אם ניקח את S להיות המשולש התחתון, אז מספר הרכיבים האי-זוגיים בגרף גדול מ- $|S|$.

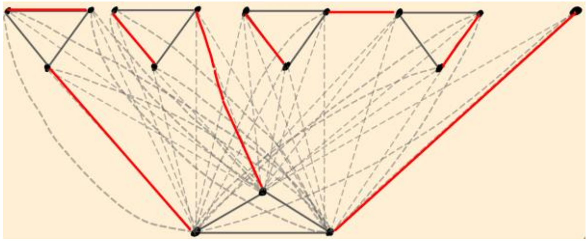
לכן, אין בו שידוך מושלם. (כי כבר הראנו שהתנאי הכרחי לשידוך מושלם).

כל צלע שנוסיף לגרף תגרום לו להיות *Factorizable*. לדוגמה, אם נוסיף את e:



5: Tutte's Theorem

אז יש שידוך מושלם:



לגרף SNF יש מבנה מיוחד (לא נוכיח), ומקיים את הטענות הבאות: יהי G גרף SNF:

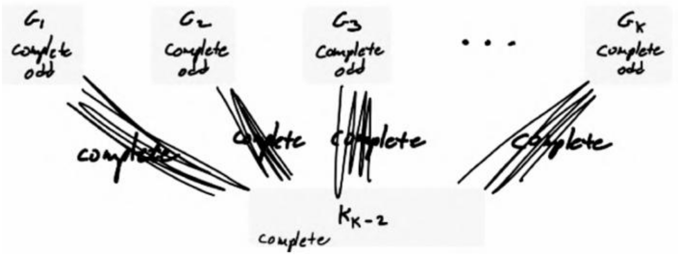
אם יש בו מספר אי-זוגי של קודקודים, הוא הגרף השלם על n קודקודים: K_n.

ל- K_n עם n אי-זוגי אין שידוך מושלם. ומתקיים: כל צלע שניתן להוסיף תגרום לזיווג מושלם (באופן ריק, כי אין צלעות כאלו).

אם יש בו מספר זוגי של קודקודים, אז יש לו את המבנה הבא:

קיימת חלוקה של הקודקודים ל-k קבוצות כך שיש עותק אחד של K_{k-2} (נקרא לו הגרף התחתון),

וכל שאר הקבוצות (הגרפים העליונים) הן גרף שלם עם מספר אי-זוגי של קודקודים. וכל הצלעות בין הגרף התחתון לעליונים, קיימות:



בפרט, גרף SNF לא מקיים את תנאי $Tutte$. למה?

ראשית, כי לכל גרף שמקיים את תנאי $Tutte$ יש מספר זוגי של קודקודים (הוכחנו). אז אם יש לו מספר אי זוגי, הוא לא מקיים את תנאי $Tutte$.

אם יש לגרף מספר זוגי של קודקודים, אז לפי המבנה שתיארנו, תנאי $Tutte$ לא מתקיים (בגלל שיש יותר רכיבים אי-זוגיים מאשר קודקודים בגרף התחתון).

נחזור להוכחת משפט $Tutte$: נוכיח שתנאי $Tutte$ הכרחי.

יהי G דוגמה נגדית מקסימלית בצלעות (מקיים את תנאי $Tutte$ ולא $factorizable$).

לפי מה שהוכחנו, הוא גרף SNF.

גרף SNF לא מקיים את תנאי $Tutte$.

סתירה.

בסה"כ, הוכחנו שתנאי $Tutte$ הוא הכרחי ומספיק לקיום שידוך מושלם בגרף.