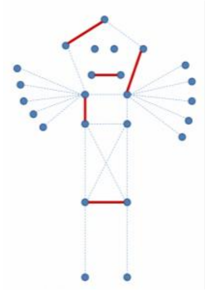
Edge-dominating sets

קבוצת צלעות שלטת בגרף G היא קבוצה של צלעות $D \in E(G)$ כך שלכל $e \in E(G)$, מתקיים $e \in D$ או שקיימת $e' \in D$ שחולקת קודקוד עם e.



נשקול את האלגוריתם הבא: קלט – גרף G, פלט – קבוצת צלעות שלטת.

1. יהי $v \in V(G)$ ויהי T עץ DFS שמושרש ב-v.
2. אם ל-T יש עומק 1, נגדיר את D להיות אחת מהצלעות של T.
3. אם ל-T יש עומק 2 או יותר, אז נגדיר את D להיות כל הצלעות של T שלא נוגעות בעלה.

נוכיח את נכונות האלגוריתם:

יהי T עץ DFS של G. אזי, כל צלע $e \in E(G) \setminus E(T)$ שנוגעת בעלה היא צלע *back edge* (לפי צורת ה-DFS). (בגרף לא מכוון יש רק צלעות *tree* או *back*). כל צלע בגרף שהיא לא בעץ, היא לא בעץ כי כבר יש צלע בעץ שמגיעה לאותו קודקוד. בפרט, שני עלים ב-T לא יהיו סמוכים ב-G. אז לא צריך לקחת אף צלע שנוגעת בעלה.

טענה א: האלגוריתם הוא 6-מקרב לבעיית *min EDS*.

טענה ב: יהי D פתרון אופטימלי ל-EDS בגרף G, ויהי $e \coloneqq uv \in D$. אזי, ל- $G - e$ יש קבוצת EDS בגודל לכל היותר $|D| + 1$.

הוכחה: נבנה קבוצת צלעות שלטת עבור $G - e$:

אם e מבודדת (כלומר $\deg_G u = \deg_G v = 1$), נעצור.

אחרת, אם $\deg_G u > 1$, נוסיף צלע שרירותית שנוגעת ב-u ל- $D - e$. ואותו דבר עבור v.

כל צלע שנוגעת ב-e, נוגעת גם באחת הצלעות שהוספנו. אז הקבוצה המתקבלת היא שלטת.

טענה ג: אם $G' \subseteq G$, אז $OPT_{G'} \leq 2 \cdot OPT_G$.

הוכחה: יהי D פתרון אופטימלי ל-G. נפעיל את טענה ב על כל צלע של D שהיא לא ב-G'.

הוכחת טענה א: יהי T עץ DFS של G.

נגדיר תת-גרף פורש $G' \subseteq G$:

לכל קודקוד שהוא לא עלה ב-T, ניקח $v \in V(T)$ שהוא ילד של u ב-T. נוסיף את uv ל-G'. נשים לב ש- G' הוא אוסף של מסלולים זרים בקודקודים (יכולים להיות גם צלע בודדת).

נסמן t את מספר הצלעות ב-D, הקבוצה המתקבלת מהאלגוריתם. אזי, ל-T יש $t + 1$ קודקודים שהם לא עלה. כי לעץ עם t צלעות יש $t + 1$ קודקודים. אז $e(G') = t + 1$. עכשיו, נשים לב שמתקיים:

$$OPT_{G'} \geq \frac{t + 1}{3} \geq \frac{|D|}{3}$$

למה? ניזכר ש-G' הוא אוסף של מסלולים זרים בקודקודים. אם P הוא מסלול, עם $e(P) \geq 1$, אז $OPT_P \geq e(P)/3$. אם $e(P) \leq 2$ זה טריוויאלי, ואם $e(P) \geq 3$ אז נשים לב שצלע שלא נוגעת בקצוות מכסה 3 צלעות: עצמה ועוד 2 שלידה.

אז נוכל לרשום:

$$\frac{|D|}{3} \leq \frac{t + 1}{3} \leq OPT_{G'} \leq 2 \cdot OPT_G \Longrightarrow |D| \geq 6 \cdot OPT_G$$

כנדרש.