16: Approximating Max Cut

בעיית *max-cut*: בהינתן גרף G, נרצה למצוא חלוקה של הקודקודים לשתי קבוצות זרות $(S, V(G)\setminus S)$ שממקסמת את $e_G(S, V(G)\setminus S)$.

משפט: בגרף G, גודל החתך המקסימום הוא לפחות $e(G)/2$.

נגזר מכך, שלכל גרף יש תת-גרף דו"צ פורש, עם לפחות $e(G)/2$ צלעות.

כלומר אפשר למצוא חלוקה של קודקודי הגרף לשתי קבוצות ותת-קבוצה בגודל $e(G)/2$ של הצלעות, כך שכל הצלעות הן רק בין הקבוצות.

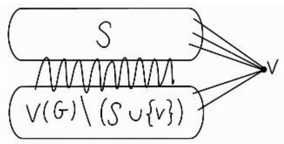
הוכחה: באינדוקציה על $v(G)$.

<u>בסיס</u>: עבור קודקוד 1 או 2, הטענה טריוויאלית.

<u>צעד</u>: נניח שהטענה מתקיימת עבור כל גרף G' עם $v(G') < n$, ונוכיח עבור גרף G עם $v(G) = n$:

נבחר קודקוד $v \in V(G)$ שרירותי, ונתבונן ב- $G - v$:

ניקח את החלוקה שקיימת ב- $G - v$ לפי הנ"א: $\big(S, V(G)\setminus(S\cup\{v\})\big)$. יש בין הקבוצות $e(G-v)/2$ צלעות, לפי הנ"א.



נוסיף את v חזרה, לקבוצה שבה יש לו פחות שכנים. כלומר, מוסיפים לחתך לפחות $(\deg_G v)/2$ צלעות.

אז גודל החתך שנוצר אחרי ההוספה הוא לפחות:

$$\frac{e(G-v)}{2} + \frac{\deg_G v}{2} = \frac{e(G-v) + \deg_G v}{2} = \frac{e(G)}{2}$$

כנדרש.

ההוכחה הזו נותנת לנו אלגוריתם פולינומי שהוא 0.5-מקרב לבעיית *max-cut*. האלגוריתם מגיע דרך תהליך ***de-randomization***.

התהליך של *de-randomization* הוא בניית אלגוריתם מקרי (שזה תהליך הרבה יותר קל) ואז המרת האלגוריתם למבנה דטרמיניסטי.

בנייה רנדומית

נבנה אלגוריתם אקראי ל-*max-cut*:

1. נאתחל $A := \emptyset,\ B := \emptyset$.
2. לכל קודקוד $v \in V(G)$, נטיל מטבע הוגן (כל ההטלות בת"ל):
   a. אם יצא עץ, נשים את הקודקוד ב-A. אחרת, ב-B.

ניתוח האלגוריתם: מה ההסתברות שהאלגוריתם מוציא חתך בגודל לפחות $e(G)/2$.

טענה: ההסתברות היא לפחות $1\Big/\left(\frac{e(G)}{2}+1\right)$. זו לא הסתברות טובה, אבל האלגוריתם הזה הוא רק הבסיס.

הוכחה: נצטרך כמה טענות עזר:

עבור צלע $e \in E(G)$, נגדיר את האינדיקטור לכך ש-e חוצה את החתך:

$$X_e := \begin{cases} 1, & e \in E_G(A,B) \\ 0, & e \notin E_G(A,B) \end{cases}$$

עבור צלע $e := uv$, מתקיים:

$$\mathbb{E}[X_e] = \mathbb{P}[u \in A\ \wedge\ v \in B] + \mathbb{P}[u \in B\ \wedge\ v \in A] = 1/4 + 1/4 = 1/2$$

כי המיקומים נקבעים לפי מטבעות הוגנים בת"ל. נוכל לרשום:

$$e_G(A,B) = \sum_{e \in E(G)} X_e$$

כלומר, הגודל של החתך יהיה מספר הצלעות שהאינדיקטור שלהן יצא 1.

אזי, לפי לינאריות התוחלת נקבל:

$$\mathbb{E}[e_G(A,B)] = \sum_{e\in E(G)} \mathbb{E}[X_e] = \frac{e(G)}{2}$$

נחזור להוכחה: אנחנו רוצים לחסום מלמטה את:

$$p \coloneqq \mathbb{P}[e_G(A,B) \geq e(G)/2]$$

נמצא את הביטוי הזה בתוך התוחלת. מתקיים:

$$e(G)/2 = \mathbb{E}[e_G(A,B)] =$$

נחשב את התוחלת לפי הגדרה, ונפצל את הסכום לשניים:

$$= \sum_{i\leq \frac{e(G)}{2}-1} i\cdot \mathbb{P}[e_G(A,B)=i] + \sum_{i\geq \frac{e(G)}{2}} i\cdot \mathbb{P}[e_G(A,B)=i] \leq$$

ננתח את צד שמאל: אם נשתמש רק ב-i הכי גדול בו, נקבל ביטוי שחוסם אותו מלמעלה:

$$\leq \left(\frac{e(G)}{2}-1\right)\underbrace{\sum_{i\leq \frac{e(G)}{2}-1} \mathbb{P}[e_G(A,B)=i]}_{1-p} + \sum_{i\geq \frac{e(G)}{2}} i\cdot \mathbb{P}[e_G(A,B)=i] \leq$$

כל החלק המסומן, זה ההסתברות המשלימה למצב שאנחנו מחפשים. כלומר זה $1-p$.

נעשה דבר דומה גם בצד ימין: הערך הכי גדול ש-i יכול לקבל זה $e(G)$:

$$\leq \left(\frac{e(G)}{2}-1\right)(1-p) + e(G)\cdot \underbrace{\sum_{i\geq \frac{e(G)}{2}} \mathbb{P}[e_G(A,B)=i]}_{p} = \left(\frac{e(G)}{2}-1\right)(1-p) + e(G)p$$

בסה"כ, הראנו ש:

$$\frac{e(G)}{2} \leq \left(\frac{e(G)}{2}-1\right)(1-p) + e(G)p$$

נבודד את p ונקבל שאכן הוא חסום מלמטה כמו שרצינו.

קצת הסתברות

במרחב הסתברות כשלהו, נאמר שאירוע $\mathcal{E}$ הוא **מדיד** (*measurable*) אם $\mathbb{P}[\mathcal{E}]$ מוגדרת.

ההסתברות $\mathbb{P}[\mathcal{E}]=0$ היא מוגדרת היטב.

עבור מאורעות B,A כך ש $\mathbb{P}[B]>0$ נרשום:

$$\mathbb{P}[A|B] \coloneqq \frac{\mathbb{P}[A\cap B]}{\mathbb{P}[B]}, \qquad \mathbb{P}[B]\cdot\mathbb{P}[A|B] \coloneqq \mathbb{P}[A\cap B]$$

ועבור חלוקה בת מניה: $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots$, מתקיים:

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{i:\,\mathbb{P}[B_i]>0} \mathbb{P}[A|B_i]\cdot\mathbb{P}[B_i] = \sum_i \mathbb{P}[A\cap B_i]$$

עבור מ"מ Y,X בדידים, וערך y בטווח של Y:

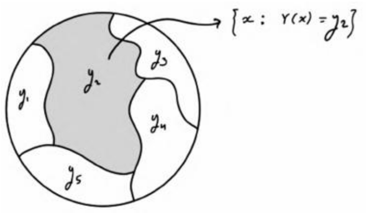
$$\mathbb{E}[X \mid Y=y] \coloneqq \sum_x x\cdot \mathbb{P}[X=x \mid Y=y]$$

$\mathbb{E}[X \mid Y]$ זה הפונקציה:

$$y \longmapsto \mathbb{E}[X \mid Y=y]$$

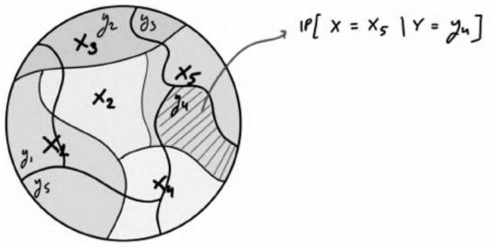
לפעמים נרשום $\mathbb{E}[X \mid Y](y)$ במקום $\mathbb{E}[X \mid Y=y]$.

Y מחלק את העולם לקבוצות *level-sets*:

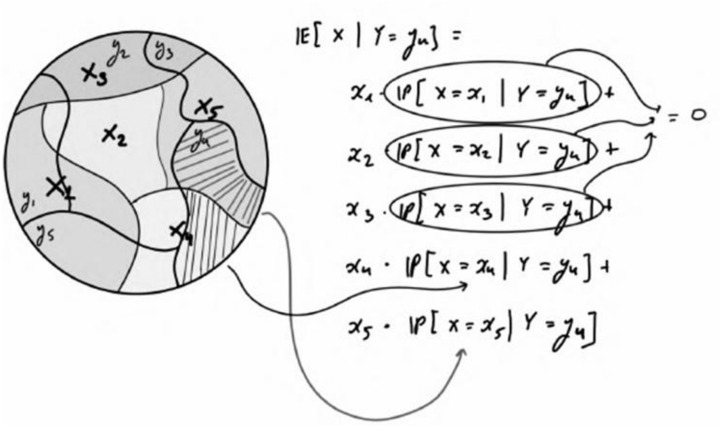


ההסתברות (*measure*) של *level-set* היא: $\mathbb{P}[Y = y_i]$.

נוסיף את X, עם ה- *level-sets* שלו, ונשים לב שהחלוקות של X ו-Y מעדנות אחת את השנייה:



אז התוחלת המותנית:



וחוק התוחלת השלימה:

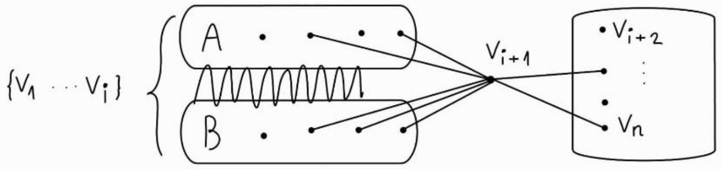
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{y \in supp(Y)} \mathbb{E}[X \mid Y = y] \cdot \mathbb{P}[Y = y]$$

חזרה ל-*Max-cut*, ביצוע *de-randomization*

היה לנו אלגוריתם אקראי, וחסמנו מלמטה את ההסתברות שהוא מצליח. נשתמש בתוחלת המותנית כדי להוציא מהאלגוריתם את האקראיות.

יהי $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ את הסדר שבו עברנו על הקודקודים באלגוריתם הרנדומי.

נתבונן במצב שבו $\{v_1, v_2, \dots v_i\}$ כבר מוקמו בקבוצות A ו-B. נשקול את הרגע שבו מטילים מטבע עבור v_{i+1}:



לפי נוסחת התוחלת השלימה, התוחלת של מספר הצלעות בחתך בהינתן שכבר מיקמנו את $\{v_1, v_2, \dots v_i\}$:

$$\mathbb{E}[e_G(A, B) \mid v_1, \dots, v_i \; placed] =$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}[v_{i+1} \in A]}_{0.5} \cdot \mathbb{E}[e_G(A, B) \mid v_1, \dots, v_i \; placed \; \wedge \; v_{i+1} \in A] + \underbrace{\mathbb{P}[v_{i+1} \in B]}_{0.5} \cdot \mathbb{E}[e_G(A, B) \mid v_1, \dots, v_i \; placed \; \wedge \; v_{i+1} \in B] =$$

$$= 0.5 \cdot \left(\underbrace{\mathbb{E}[e_G(A, B) \mid v_1, \dots, v_i \; placed \; \wedge \; v_{i+1} \in A]}_{E_A} + \underbrace{\mathbb{E}[e_G(A, B) \mid v_1, \dots, v_i \; placed \; \wedge \; v_{i+1} \in B]}_{E_B} \right)$$

נסמן את התוחלת $\mathbb{E}$. יש לנו את המבנה: $2\mathbb{E} = E_A + E_B \implies \mathbb{E} = (E_A + E_B)/2$.

כלומר, $E_A \geq \mathbb{E}$ או $E_B \geq \mathbb{E}$. (כי אם שניהם קטנים יותר, הסכום שלהם לא יעלה על $2\mathbb{E}$).

כלומר: לפחות אחת האופציות **לא מקטינה** את התוחלת המותנית. לפי העיקרון הזה, נבנה אלגוריתם דטרמיניסטי:

1. יהי $v_1, v_2, \dots v_n$ סדר כלשהו של הקודקודים.
2. נאתחל $A = B = \emptyset$
3. עבור $i = 1$ עד n:
   a. נחשב את E_A, E_B. (אח"כ נסביר איך).
   b. אם $E_A > E_B$, נשים את v_i ב-A. אחרת, נשים אותו ב-B.

נוכיח שהאלגוריתם לעיל תמיד מייצר חתך בגודל לפחות $e(G)/2$:

כבר הראנו ש- $e(G)/2 \leq \mathbb{E}[e_G(A,B)]$.

והראינו שכל צעד לא מקטין את התוחלת המותנית. כלומר:

$$\mathbb{E}[e_G(A,B)] \leq \mathbb{E}[e_G(A,B) \mid v_1 \textit{ is placed}] \leq \mathbb{E}[e_G(A,B) \mid v_1, v_2 \textit{ are placed}] \leq \cdots \leq \mathbb{E}[e_G(A,B) \mid v_1, v_2 \dots, v_n \textit{ are placed}]$$

והשלב האחרון זה אחרי שמיקמנו את כל הנקודות. בסה"כ, קיבלנו שהתוחלת של $e_G(A,B)$ היא לפחות $e(G)/2$, גם בסוף האלגוריתם.

חישוב E_A, E_B

נגדיר את $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ ונפריד ביניהם לבין A,B:

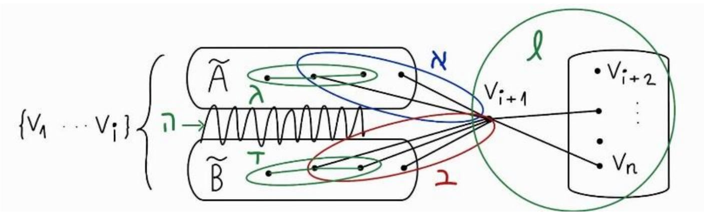
בשלב אחרי שמיקמנו את $v_1, \dots, v_i$, נאמר ש- $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ זה מה שאנחנו רואים ב-A,B באותו הרגע. A ו-B הם בשביל המשתנה המקרי $e_G(A,B)$.

נשקול מה קורה עבור v_{i+1}: נרצה לחשב את E_A, E_B כדי שנדע לאיזה צד להכניס אותו. על מה בעצם לוקחים תוחלת מותנית?

$\widetilde{A}, \widetilde{B}$ כבר מקובעים, ואנחנו יודעים איזה צלעות יש ביניהם, ואיזה צלעות יש בין v_{i+1} לכל אחד מ- $\widetilde{A}, \widetilde{B}$.

מה שעדיין לא קבוע, הם הצלעות שמחוברות ל- $v_{i+2}, \dots, v_n$. נסמן את הכמות של הצלעות האלה ℓ:

$$\ell \coloneqq e(G) - \underbrace{\deg_G(v_{i+1}, \widetilde{A})}_{\text{א}} - \underbrace{\deg_G(v_{i+1}, \widetilde{B})}_{\text{ב}} - \underbrace{e_G(\widetilde{A})}_{\text{ג}} - \underbrace{e_G(\widetilde{B})}_{\text{ד}} - \underbrace{e_G(\widetilde{A}, \widetilde{B})}_{\text{ה}}$$



E_A זה התוחלת של גודל החתך, עבור המצב הנוכחי ותחת ההנחה ששמנו את v_{i+1} ב-A.

שזה שווה למספר הצלעות הנוכחי בחתך, ועוד מספר הצלעות שיש בין v_{i+1} ל- $\widetilde{B}$,
ועוד התוחלת של מספר הצלעות הלא-קבועות שיחצו את החתך – שזה חצי מהן.

$$E_A \coloneqq \mathbb{E}[e_G(A,B) \mid v_1, \dots, v_i \ \textit{are placed} \ \wedge \ v_{i+1} \in A] = e_G(\widetilde{A}, \widetilde{B}) + \deg_G(v_{i+1}, \widetilde{B}) + \ell/2$$

$$E_B \coloneqq \mathbb{E}[e_G(A,B) \mid v_1, \dots, v_i \ \textit{are placed} \ \wedge \ v_{i+1} \in B] = e_G(\widetilde{A}, \widetilde{B}) + \deg_G(v_{i+1}, \widetilde{A}) + \ell/2$$

אז ההבדל בין E_A ל- E_B הוא רק ההבדל בין הדרגות:

$$|E_A - E_B| = \left|\deg_G(v_{i+1}, \widetilde{B}) - \deg_G(v_{i+1}, \widetilde{A})\right|$$

אז אפשר לבדוק רק איזה מהדרגות גדולה יותר. וזה בדיוק האלגוריתם הראשון שראינו.