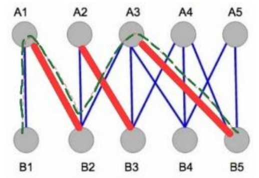
4: Berg's Theorem, Hungarian Method

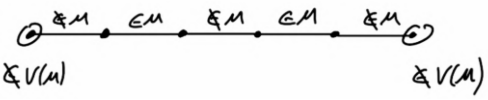
Characterizing Max Matchings

אפיון שידוך מקסימום בגרף כללי.

עבור גרף G ושידוך M בגרף, מסלול ב-G ייקרא **מסלול M-מתחלף** (*M-Alternating path*) אם צלעותיו מתחלפות בין M ל-$E(G) \setminus M$:



מסלול M-מתחלף ב-G ייקרא **M-משפר** (*M-Augmenting path*) אם קודקודי הקצה לא מרווים ע"י M (כלומר לא שייכים ל-$V(M)$).



בפרט, צלעות הקצה לא יהיו שייכות ל-M.

זה נקרא מסלול משפר כי נוכל לזרוק מהשידוך את הצלעות במסלול ששייכות ל-M ולהוסיף למסלול ולהוסיף לשידוך את הצלעות במסלול שאינן ב-M,

ובכך להגדיל את השידוך M כולו (כי במסלול יש צלע אחת יותר שלא מהשידוך מאשר צלעות מהשידוך).

לפיכך, אם קיים בגרף מסלול M משפר, אז M הוא לא שידוך מקסימלי ($|M| < \nu(G)$).

משפט ברג' יוכיח שזה אמ"מ.

תזכורת – בהינתן 2 קבוצות Y,X, **ההפרש סימטרי** שלהן מוגדר: $X \Delta Y \coloneqq (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.

כל מה שנמצא רק באחת הקבוצות ולא בשתיהן.

הפרש סימטרי של שידוכים: בהינתן 2 שידוכים N,M בגרף G, ההפרש הסימטרי שלהם הוא הגרף:

$$M \Delta N \coloneqq \big(V(G), (M \setminus N) \cup (N \setminus M)\big)$$

כלומר, תת-גרף פורש עם צלעות מההפרש הסימטרי.

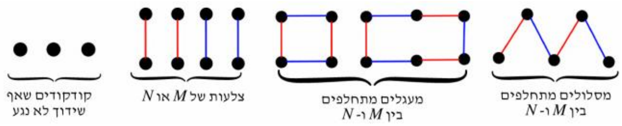
איך נראה הגרף $M \Delta N$?

הדרגה המקסימום בגרף היא לכל היותר 2. למה?

הדרך היחידה לקבל קודקוד עם דרגה 3 ומעלה, היא אם מאחד השידוכים הגיעו 2 צלעות לפחות שנגעו בקודקוד הזה – בסתירה להגדרת שידוך.

רכיבי הקשירות של הגרף הם רק מהצורה:

1. קודקוד בודד, 2. מסלולים (כולל צלע בודדת), 3. מעגלים.



אם $M \Delta N$ מכיל מעגל, הוא בהכרח באורך זוגי (כי הוא חייב להיות מתחלף).

כל המסלולים חייבים להיות מסלולים מתחלפים בין M ל-N. גם מסלול באורך 1 נחשב מתחלף.

Berg's Theorem

משפט ברג: יהי G גרף, ויהי $M \subseteq E(G)$ שידוך ב-G. אזי, לא קיים ב-G מסלול M-משפר **אמ"מ** M הוא שידוך מקסימום.

נוכיח את השלילה של המשפט, כלומר: קיים ב-G מסלול משפר אמ"מ M הוא לא שידוך מקסימום.

כיוון ראשון: אם קיים מסלול משפר, נוכל להגדיל את השידוך אז הוא לא מקסימום. מש"ל.

כיוון שני: נניח ש-M אינו שידוך מקסימום, ויהי N שידוך מקסימום (כלומר $|N| = \nu(G) > |M|$).

נתבונן ברכיבים של הגרף $N \Delta M$:

מעגלים, או קודקודים בודדים, או מסלול עם מספר שווה של צלעות מ-M ו-N – כולם תורמים מספר שווה ל-M ו-N.

בסה"כ יש יותר צלעות מ-N מאשר מ-M. כלומר חייבים להיות רכיב (לפחות אחד) שמכיל יותר צלעות של N מאשר M. (יכול להיות גם צלע בודדת).

כל רכיב כזה הוא מסלול מתחלף. כדי שיהיו בו יותר צלעות של N מאשר של M, הוא חייב להתחיל ולהסתיים בצלע מ-N. כלומר הוא מסלול M-משפר.

The Hungarian Method

אלגוריתם למציאת שידוכים מקסימום בגרפים דו"צ. הוא מסתמך על משפט ברג:

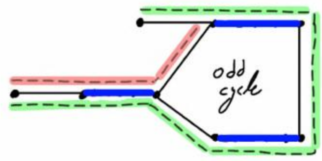
האלגוריתם מוגדר על גרף כללי, בהמשך נתאר את הקשר לגרף דו"צ.

קלט: גרף G.   פלט: שידוך מקסימום M ב-G.

1. נאתחל $M = \emptyset$.
2. כל עוד קיים ב-G מסלול M-משפר:
   נמצא מסלול M-משפר ונשפר את M לאורך P.
3. נחזיר את M.

אז הבעיה שלנו מצטמצמת: בהינתן גרף G ושידוך M, נרצה לבדוק האם קיים מסלול M-משפר ב-G. ואם קיים, למצוא אותו.

זו לא בעיה פשוטה. לדוגמה, עבור השידוך הצבוע בכחול:

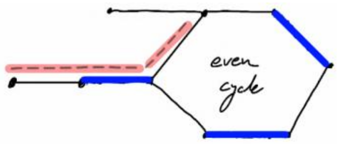


המסלול הירוק (הארוך יותר) הוא מסלול M-משפר.

המסלול האדום הוא מסלול M-מתחלף שצלעות הקצה שלו לא ב-M אבל הוא לא מסלול M-משפר, כי קודקוד הקצה שלו מרווה ע"י M.

איך נדע, אלגוריתמית, להימנע מהמסלול האדום?

אפשר לראות שהבעיה נפתרת כאשר המעגל זוגי, ואז המסלול האדום הוא טוב:



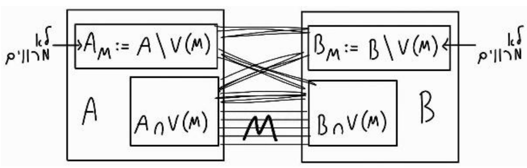
ננסה לפתור את הבעיה בגרף דו"צ.

Finding Augmenting Paths in Bipartite Graphs

הפתרון: בהינתן גרף דו"צ $G = (A \cup B, E)$ ושידוך $M \subseteq E(G)$, נגדיר:

$$A_M \coloneqq A \setminus V(M), \qquad B_M \coloneqq B \setminus V(M)$$

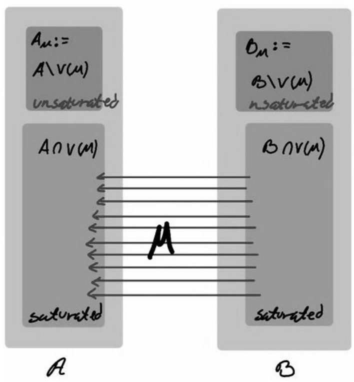
כלומר קבוצות הקודקודים של A ו-B (בהתאמה) שאינן מרווים (נוגעים) בשידוך M. לכן ניתן לחלק את הגרף בצורה הבאה:



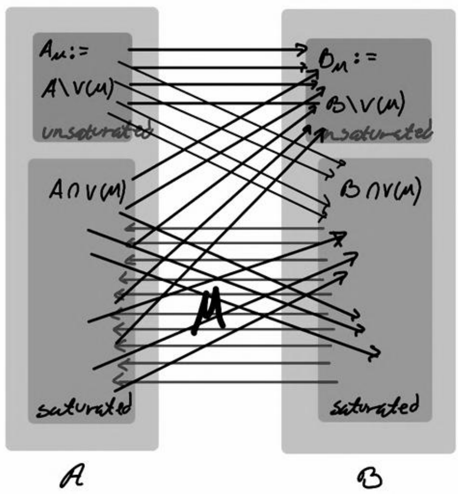
נשים לב שאם יש צלע בין A_M ל-B_M אז היא מסלול M-משפר ונוכל להוסיף אותה לשידוך.

אבל לא נוכל להסתמך על כך שיהיו צלעות כאלה. איך נזהה מסלול M-משפר?

נבנה גרף עזר, גרף מכוון באופן הבא: כל צלע מהשידוך M נהפוך לצלע מכוונת מ-B ל-A:



וכל צלע שאינה בשידוך נהפוך לצלע מכוונת מ-A ל-B:



נשים לב שיכולות להיות צלעות בין $A \cap V(M)$ ל- $B \cap V(M)$ שאינן בשידוך M, ולכן גם אותן נכוון מ-A ל-B.

אבחנה: כל מסלול מ-A_M ל-B_M הוא מסלול M-משפר.

הוכחה: יהי P מסלול מכוון בין A_M ל-B_M. מספיק שנוכיח כי P הוא מסלול M-מתחלף וקודקודי הקצה שלו אינם מרווים ע"י M.

טריוויאלי שקודקודי הקצה אינם מרווים ע"י M, כי הם שייכים ל-A_M ו-B_M.

נראה שהמסלול הוא M-מתחלף: נשים לב ש-P חייב להיות באורך אי-זוגי לפי מבנה הגרף – או 1, או 3.

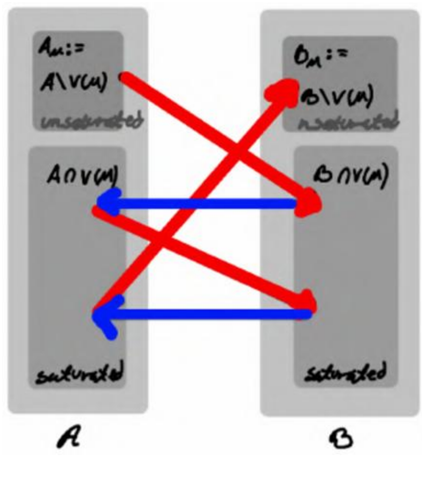
אם הוא באורך 1, אז הטענה טריוויאלית.

אחרת, המסלול באורך לפחות 3.

אזי P מתחיל בצלע מכוונת שאינה בשידוך מ-A_M ל-$B \cap V(M)$, וממשיך עם צלע בשידוך מ-$B \cap V(M)$ ל- $A \cap V(M)$.

ומכאן יכול להיות מסלול מתחלף הלוך חזור בין $A \cap V(M)$ ל-$B \cap V(M)$ שמסתיים ב-$A \cap V(M)$, כלומר הצלע האחרונה הייתה בשידוך.

לבסוף, המסלול יסתיים בצלע שאינה בשידוך מ-$A \cap V(M)$ ל-B_M:



האלגוריתם:

<u>קלט</u>: גרף דו"צ $G = (A \cup B, E)$.   <u>פלט</u>: שידוך מקסימום M ב-G.

1. נחלק את A ו-B לקודקודים המרווים ע"י M (כלומר $A \cap V(M)$, $B \cap V(M)$), ולקודקודים שאינם מרווים ע"י M (A_M, B_M).
2. ניצור את הגרף המכוון המתואר לעיל.
3. כל עוד ריצת DFS או BFS מוצאה מסלול בין A_M ל-B_M, זה יהיה גם מסלול M-משפר.
   3.1. נשפר את M לאורך המסלול.
   3.2. נבנה מחדש את הגרף המכוון כמתואר לעיל.
4. נחזיר את M.