הרצאה 3

1 אוטומט סופי לא דטרמיניסטי

אוטומט סופי לא דטרמיניסטי – אסל"ד. (NFA – Nondeterministic finite automaton).

1.1 אי-דטרמיניזם

אסל"ד יכול להמשיך לכמה מצבים, או להיתקע. אס"ד נתקע אם הוא מגיע לבור. אסל"ד נתקע אם הגענו למקום שאין בו חץ יוצא שמתאים לאות הבאה בקלט.

מתחילים ממצב התחלתי נתון. מעבר ממצב ואות נתונה יכול להיות לקבוצת מצבים.

לכל מילה ייתכנו מספר חישובים אפשריים, או אף חישוב אפשרי.

האוטומט מקבל אם קיימת סדרת מעברים המובילה למצב מקבל.

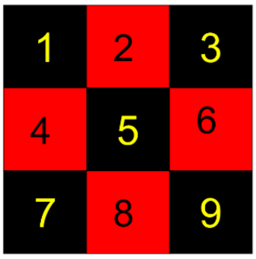
באופן אינטואיטיבי: אסל"ד תמיד "מנחש נכון" מהו המסלול שיוביל למצב מקבל, אם קיים כזה.

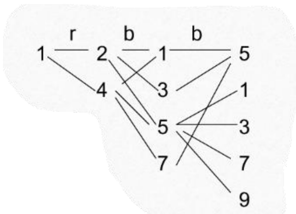
דוגמה 1: מעברים על לוח משבצות: קבוצת המצבים = קבוצת הריבועים על הלוח.

קלט: r = מעבר לריבוע שכן אדום. b = מעבר לריבוע שכן שחור.

מצב התחלתי ומצב מקבל הם ריבועים בפינות מנוגדות.

יש מסלול שמוביל ל9, ולכן rbb מתקבלת.

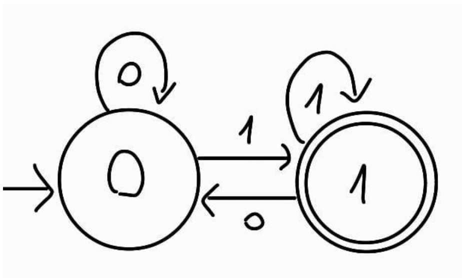




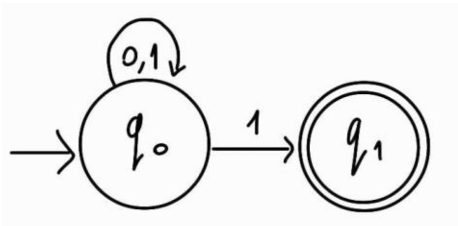
b	r	
5	2,4	→ 1
1,3,5	4,6	2
5	2,6	3
1,5,7	2,8	4
1,3,7,9	2,4,6,8	5
3,5,9	2,8	6
5	4,8	7
5,7,9	4,6	8
5	6,8	*9

דוגמה 2: נבנה אוטומט דטרמיניסטי לשפה:

$L = \{w1 : w \in \{0,1\}^*\}$:



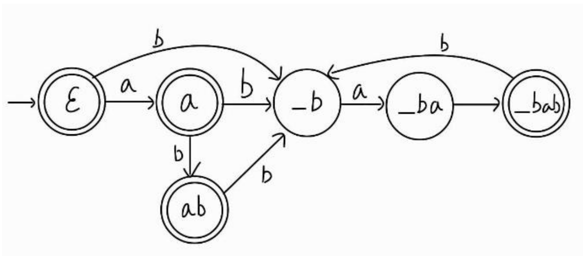
נבנה אסל"ד לאותה שפה:



דוגמה 3: נבנה אסל"ד לשפה: $L = \{\epsilon, a, ab\} \cdot \{bab\}^*$:

הסבר: החצי השמאלי זה כל המילים $\{\epsilon, a, ab\}$. כל אחת מהן מתקבלת. מכל אחת מהן, אפשר לעבור למצב ההתחלתי של צד ימין.

האוטומט לא דטרמיניסטי כי מהמילה "a" האות 'b' שולחת לשני כיוונים, ובגלל שאין שני חצים מכל מצב. אם אנחנו במצב "ab" ומקבלים 'a', ההתנהגות לא מוגדרת.



1.2 הגדרה פורמלית של אסל"ד – NFA

אסל"ד N הוא חמישייה $N = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, כאשר:

- Q היא קבוצת מצבים,
- Σ היא הא"ב הנתון,
- δ היא פונקציית מעברים,
- q_0 הוא המצב ההתחלתי,
- $F \subseteq Q$ היא קבוצת מצבים מקבלים.

פונקציית המעברים δ: $\delta(q, a)$ היא **קבוצת** מצבים. $\delta : (Q \times \Sigma) \rightarrow S \subseteq Q$.

הרחבת ההגדרה למחרוזות – הגדרה רקורסיבית:

בסיס: $\hat{\delta}(q, \epsilon) = \{q\}$.

צעד רקורסיבי: $\hat{\delta}(q, wa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,w)} \delta(p, a)$. (אם אנחנו במצב q, המצבים שאפשר להגיע אליהם ע"י המילה wa הם כל המצבים שאפשר להגיע אליהם ע"י w, ואז a).

הרחבה לקבוצת מצבים: $\hat{\delta}(P, w) = \bigcup_{q \in P} \hat{\delta}(q, w)$. המצבים שאפשר להגיע אליהם מקבוצת מצבים, זה פשוט איחוד של כל מה שאפשר להגיע אליהם מכל אחד מהמצבים).

1.3 שפה של אסל"ד

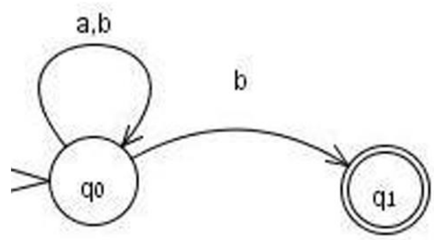
מחרוזת w מתקבלת אם $\hat{\delta}(q_0, w)$ מכיל לפחות מצב מקבל אחד. כלומר, קיים מסלול חישוב על w המכיל ב-q_0 ומסתיים במצב מקבל.

השפה של האוטומט היא קבוצת המחרוזות שהוא מקבל. עבור אסל"ד $N = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, השפה המתקבלת היא:

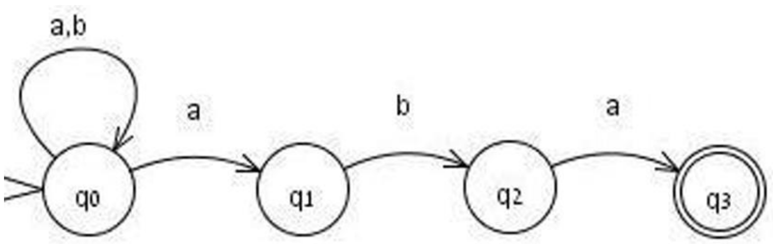
$$L(N) = \{w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \phi\}$$

דוגמה 4:

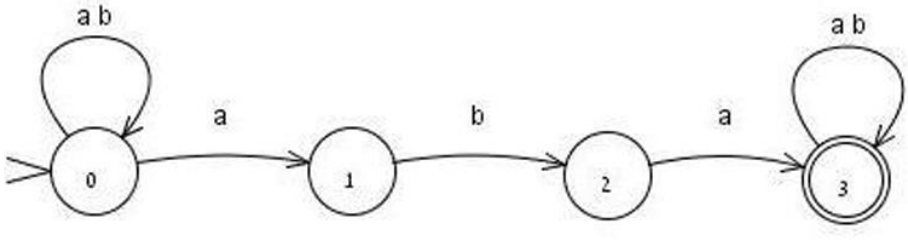
שפת המחרוזות המסתיימות ב-b:



שפת המחרוזות המסתיימות ב-aba:

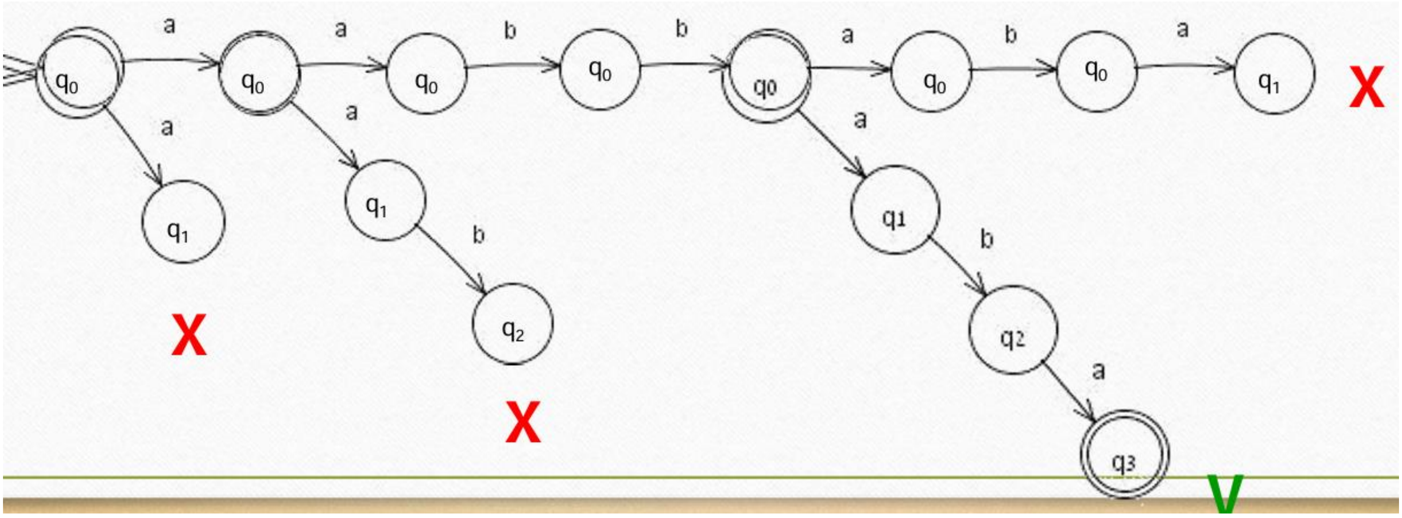


שפת המחרוזות המכילות aba:



בכל הדוגמאות, האוטומט "ינחש" מתי הוא מגיע למיקום המתאים במחרוזת כדי להתקדם.

דוגמה למסלולי חישוב על המילה: $aabbaba$: אם נעשה בחירה "לא נכונה", לא נגיע למצב מקבל. נבחר את המסלול שמוביל למצב מקבל:



2 שקילות של אס"ד ואסל"ד

מה כוח החישוב של אסל"ד ביחס לאס"ד? כלומר, האם קיימות שפות שמוד אחד מקבל והשני לא?

הגדרה: נאמר ששני אוטומטים הם **שקולים** אם הם מקבלים את אותה השפה.

טענה – שני המודלים שקולים. נוכיח בהכלה דו-כיוונית. בהינתן DFA נבנה NFA שקול, ולהיפך.

כיוון ראשון: בהינתן DFA, נבנה NFA שקול באופן הבא: אם $\delta_D(q,a) = p$, אז $\delta_N(q,a) = \{p\}$.

ההבדל הוא פשוט בסינטקס – מעבר לקבוצת מצבים במקום מצב יחיד. מבחינה לוגית (וציורית) הם אותו דבר.

2.1 אוטומט חזקה

כיוון שני: יהי אסל"ד $N = (Q, \Sigma, q_0, \delta_N, F_N)$. נבנה את האס"ד הבא:

- קבוצת המצבים היא $\mathcal{P}(Q)$ – קבוצת החזקה על Q, בלי $\emptyset$.
- הא"ב הוא Σ.
- המצב ההתחלתי היא $\{q_0\}$ (קבוצה שמכילה רק את q_0).
- קבוצת המצבים המקבלים היא F_D: כל תתי הקבוצות של Q, שמכילות איבר מ-F_N.
- פונקציית המעבר: $\delta_D(\{q_1, \dots q_k\}, a)$ היא קבוצה המתקבלת מאיחוד על כל $k \dots i = 1$ של $\delta_N(q_i, a)$.

כלומר, אם קראנו אות, איך נדע לאן אנחנו עוברים? נעבור על כל אחד מהמצבים בקבוצת המצבים הנוכחית, ולכל אחד נבדוק לאן האות הזאת שולחת אותנו מהמצב הזה.

אוטומט כזה נקרא **אוטומט חזקה.**

2.2 בניית אוטומט חזקה

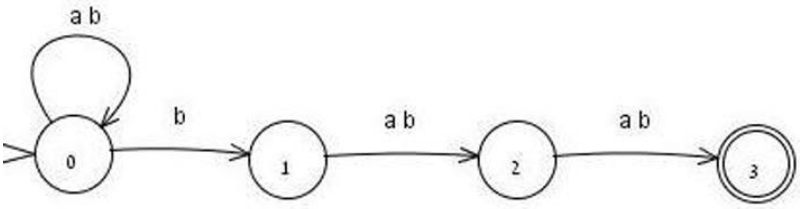
לא בהכרח צריך לבנות את כל מצבי אוטומט החזקה. ניתן לבנות רק את המצבים הניתנים להשגה: מתחילים במצב ההתחלתי, מתקדמים דרך המצבים שהגענו אליהם. עוצרים כשאין מצבים חדשים הניתנים להשגה.

דוגמה 6: נבנה אס"ד מתוך האסל"ד שראינו בדוגמה 1:

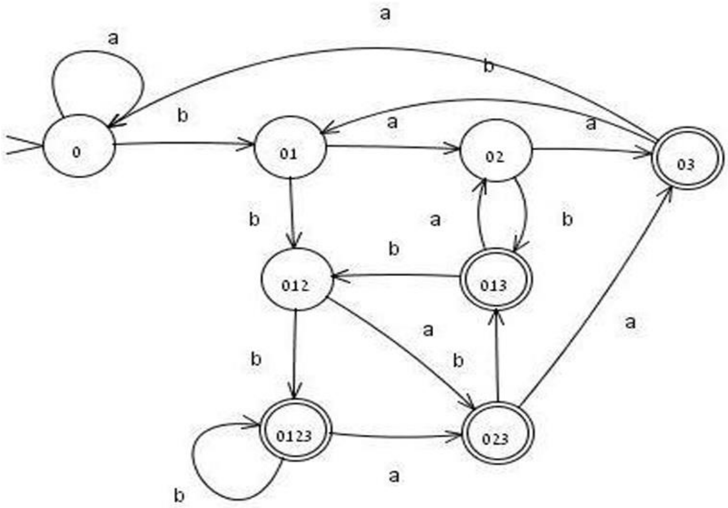
		r	b
→	{1}	{2,4}	{5}
	{2,4}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7}
	{5}	{2,4,6,8}	{1,3,7,9}
	{2,4,6,8}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
	{1,3,5,7}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
*	{1,3,7,9}	{2,4,6,8}	{5}
*	{1,3,5,7,9}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}

		r	b
→	1	2,4	5
	2	4,6	1,3,5
	3	2,6	5
	4	2,8	1,5,7
	5	2,4,6,8	1,3,7,9
	6	2,8	3,5,9
	7	4,8	5
	8	4,6	5,7,9
*	9	6,8	5

דוגמה 7: שפת כל המילים מעל $\{a,b\}$ שבהן האות השלישית מהסוף היא b. האסל"ד הוא:

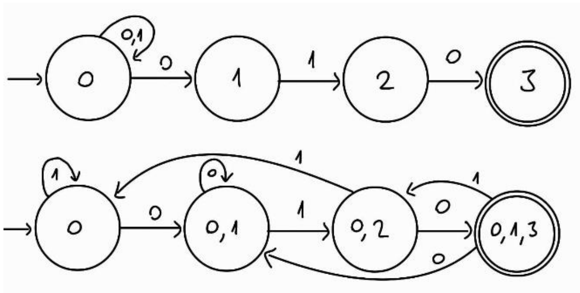


נבנה אס"ד:



	a	b
{0}	{0}	{0,1}
{0,1}	{0,2}	{0,1,2}
{0,2}	{0,3}	{0,1,3}
{0,1,2}	{0,2,3}	{0,1,2,3}
{0,3}	{0}	{0,1}
{0,1,3}	{0,2}	{0,1,2}
{0,2,3}	{0,3}	{0,1,3}
{0,1,2,3}	{0,2,3}	{0,1,2,3}

דוגמה 8: מחרוזות בינאריות שמסתיימות ב 010: ניקח את האסל"ד ונבנה אס"ד:



2.3 הוכחת שקילות

נוכיח באינדוקציה על $|w|$ שמתקיים: $\hat{\delta}_N(q_0,w)=\hat{\delta}_N(\{q_0\},w)$.

כלומר: כל מילה, באסל"ד היא מובילה לקבוצת מצבים. צריך להוכיח שבאס"ד, המצב (היחיד) שהמילה הזו מובילה אליו, הוא המצב שקרוי על שם אותה קבוצת מצבים.

בסיס: עבור $w=\epsilon$, $\hat{\delta}_D(\{q_0\},\epsilon)=\{q_0\}=\hat{\delta}_N(q_0,\epsilon)$.

צעד: נניח שהטענה נכונה ל-x, ותהי $w=xa$.

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\},w)=\hat{\delta}_D(\{q_0\},xa)=^{\text{א}}\delta_D\left(\hat{\delta}_D(\{q_0\},x),a\right)=^{\text{ב}}\delta_D\left(\hat{\delta}_N(q_0,x),a\right)=^{\text{ג}}\delta_N\left(\hat{\delta}_N(q_0,x),a\right)=\hat{\delta}_N(q_0,w)$$

א – נשים לב שזה מעבר מקריאת מילה לקריאת אות. קבוצת המצבים שאפשר להגיע אליהם מ-q_0 ע"י קריאת xa, זהה לקבוצת המצבים שאשפר להגיע אליהם מ"קבוצת המצבים שאפשר להגיע אליהם מ-q_0 על ידי קריאת x" ע"י קריאת a.

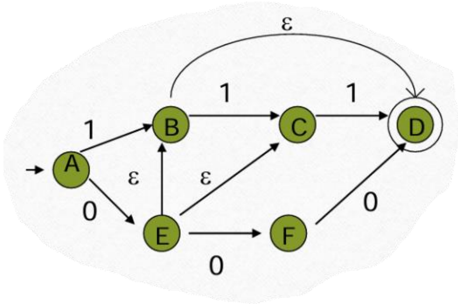
ב, ג – מהגדרת פונקציית המעברים בבנייה. ההבדל הוא בסינטקס בלבד.

כעת, נקבל:

$$w\in L(D)\Leftrightarrow^{\text{א}}\hat{\delta}_D(\{q_0\},w)\in F_D\Leftrightarrow^{\text{ב}}\hat{\delta}_D(\{q_0\},w)\cap F_N\neq\emptyset\Leftrightarrow^{\text{ג}}\hat{\delta}_N(q_0,w)\cap F_N\neq\emptyset\Leftrightarrow^{\text{ד}}w\in L(N)$$

א – הגדרה, ב – לוגיקה, ג – לפי ההוכחה לעיל, ד – הגדרה.

3 מסעי אפסילון



מסעי אפסילון מאפשרים מעבר ממצב למצב בעזרת קלט ϵ.

$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \to P(Q)$. לדוגמה:

אז באוטומט הזה, $\delta(A,0) = \{E,B,C,D\}$.

3.1 סגור של קבוצת מצבים

סגור אפסילון של מצב q הוא קבוצת המצבים שניתן להגיע אליהם מ-q ע"י מסעי אפסילון בלבד. נסמן: $CL^\epsilon(q)$.

בדוגמה: $CL^\epsilon(A) = \{A\}, CL^\epsilon(E) = \{B,C,D,E\}$

הסגור של קבוצת מצבים P הוא איחוד כל הסגורים של האיברים ב-P: $CL^\epsilon(P) = \bigcup_{q\in P} CL^\epsilon(q)$.

בדוגמה: $CL^\epsilon(\{A,E,F\}) = CL^\epsilon(A) \cup CL^\epsilon(E) \cup CL^\epsilon(F) = \{B,C,D,E\}$.

3.2 הרחבה למילים של פונקציית המעברים

בסיס: $\delta'(q,\epsilon) = CL^\epsilon(q)$

שלב האינדוקציה: $\delta'(q,xa) = \bigcup_{p\in\hat{\delta}'(q,x)} CL^\epsilon\big(\delta(p,a)\big)$.

כלומר: לכל אחד מהמצבים שאפשר להגיע אליהם ע"י קריאת x, נבדוק לאן אפשר להגיע משם ע"י קריאת a, ונבדוק מה הסגור אפסילון של כל אחד מהם.

אינטואיציה: $\hat{\delta}'(q,w)$ היא קבוצת המצבים שאליהם ניתן להגיע מ-q ע"י קריאת w ושימוש אפשרי במסעי אפסילון בכל שלב.
בדוגמה: $\delta'(A,\epsilon) = CL^\epsilon(A) = \{A\}$,

$$\delta'(A,0) = \bigcup_{p\in\delta'(A,\epsilon)} CL^\epsilon\big(\delta(p,0)\big) = CL^\epsilon\big(\delta(A,0)\big) = CL^\epsilon(\{E\}) = \{B,C,D,E\}$$

$$\delta'(A,01) = \bigcup_{p\in\delta'(A,0)} CL^\epsilon\big(\delta(p,1)\big) = \bigcup_{p\in\{B,C,D,E\}} CL^\epsilon\big(\delta(p,1)\big) = CL^\epsilon(C) \cup CL^\epsilon(D) = \{C,D\}$$

3.3 שפה של $\epsilon - NFA$

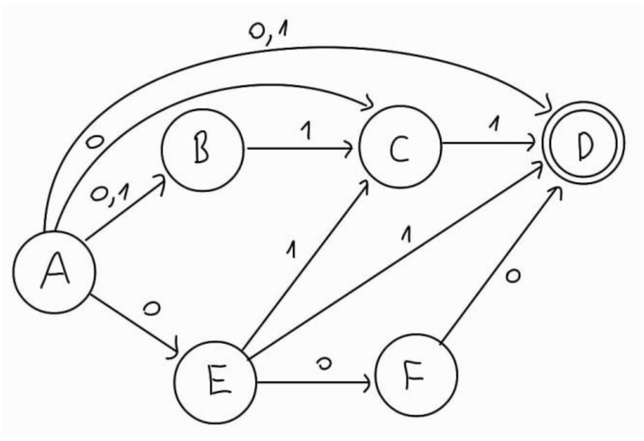
שפה של אוטומט לא דטרמיניסטי עם מסעי אפסילון היא קבוצת כל המחרוזות w שעבורן $\hat{\delta}'(q_0,w)$ <u>מכילה</u> מצב מקבל.

שקילות בין אל"ד עם מסעי אפסילון לבין אל"ד בלי מסעי אפסילון:

כיוון ראשון: כל אל"ד בלי מסעי אפסילון הוא גם אל"ד עם מסעי אפסילון – באופן טריוויאלי.

כיוון שני: מכל $\epsilon - NFA$, אפשר לבנות NFA רגיל. נראה שניתן לחבר מסע אפסילון עם המעבר הבא על הקלט:

נתון אסל"ד עם מסעי אפסילון בו קבוצת מצבים Q, א"ב Σ, מצב התחלתי q_0, קבוצת מצבים מקבלים F_E, ופונקציית מעברים δ_E. נבנה אסל"ד $A(Q,\Sigma,q_0,F_N,\delta_N)$. פונקציית המעברים מוגדרת: $\delta_N(q,a) := \delta_E(q,a) = \bigcup_{p\in CL^\epsilon(q)} CL^\epsilon\big(\delta_E(p,a)\big)$. כלומר, קבוצת המצבים שניתן להגיע אליהם מ-q ע"י שימוש במסעי אפסילון וקריאת a.



הקבוצה F_N:

אם אפסילון לא שייך לשפת האוטומט E, אז $F_N = F_E$.

אם אפסילון כן שייך לשפת האוטומט אז $F_N = F_E \cup \{q_0\}$.

לכל $w \in \Sigma^+$, נוכיח באינדוקציה על $|w|$ שמתקיים: $\hat{\delta}_N(q_0,w) = \hat{\delta}_E(q_0,w)$.

בסיס: עבור $|w| = 1$, $w = \sigma$. לפי הגדרת δ_N: $\delta_N(q_0,\sigma) = \delta_E(q_0,\sigma)$.

צעד: נניח שהטענה נכונה עבור $u \neq \epsilon$ ונוכיח נכונות עבור $w = u\sigma$:

$$\hat{\delta}_N(q_0,u\sigma) = \delta_N\big(\hat{\delta}_N(q_0,u),\sigma\big) \overset{\text{א}}{=} \delta_N\big(\hat{\delta}_E(q_0,u),\sigma\big) \overset{\text{ב}}{=} \delta_E\big(\hat{\delta}_E(q_0,u),\sigma\big) \overset{\text{ג}}{=} \hat{\delta}_E(q_0,u\sigma)$$

א – לפי הנ"א, ב – לפי הגדרת δ_N לתו יחיד, ג – לפי הגדרת δ_E.

כדי להשלים את הוכחת השקילות עלינו להראות כי שני האוטומטים מקבלים את אותן המילים, כלומר ש:

$$\hat{\delta}_N(q_0,w) \cap F_N \neq \emptyset \Leftrightarrow \hat{\delta}_E(q_0,w) \cap F_E \neq \emptyset$$

עבור $w = \epsilon$, זה נובע מהגדרת F_N.

עבור $w \neq \epsilon$, זה נובע מטענת העזר (כי ההתקדמות לפי פונקציית המעברים זהה) והגדרת F_N.

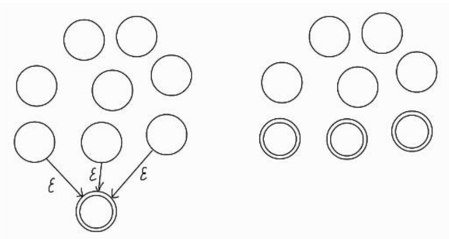
לכן, w מתקבלת ע"י האוטומט המקורי (עם מסעי אפסילון) אמ"מ היא מתקבלת ע"י האוטומט החדש.

4 מודלים שקולים נוספים

תרגיל: האם $\epsilon - NFA$ <u>עם מצב מקבל יחיד</u> שקול ל-*DFA* רגיל? כן.

כיוון ראשון: יהי $E = (Q,\Sigma,\delta,q_0,q_f)$. אז ניתן להמיר אותו ל-*NFA*, וכל *NFA* אפשר להמיר ל*DFA*.

כיוון שני: יהי $A = (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$. (עם מספר לא ידוע של מצבים מקבלים).



נבנה E עם מצב מקבל יחיד כך: $E = (Q \cup \{q_f\},\Sigma,\delta_E,q_0,q_f)$,

$\forall \sigma \in \Sigma, \forall q \in Q : \delta_E(q,\sigma) = \delta(q,\sigma)$, $\forall q \in F : \delta_E(q,\epsilon) = q_f$

כלומר, ניקח את אותה קבוצת מצבים בתוספת q_f, (המצב המקבל) עם אותם המעברים.
ומכל מצב שהיה מצב מקבל באוטומט המקורי יהיה מסע אפסילון למצב המקבל:

האם *DFA* עם מצב מקבל יחיד שקול ל-*DFA* רגיל? לא.

נוכיח בעזרת שפה הדורשת שני מצבים מקבלים ב-*DFA*. (כלומר אי אפשר לייצר לה *DFA* רגיל).

תהי $L = \{\sigma w \sigma : \sigma \in \{0,1\}, w \in \{0,1\}^*\}$. נב"ש כי L דורשת מצב מקבל יחיד ב-*DFA*, נקרא לו q_f.

נשקול את המילים $1w1, 0w0$. שתיהן בשפה ולכן: $\hat{\delta}(q_0,1w1) = \hat{\delta}(q_0,0w0) = q_f$.

נוסיף את התו 0:

$$\hat{\delta}(q_0,0w00) = \delta\big(\hat{\delta}(q_0,0w0),0\big) = \delta\big(q_f,0\big) = q_f$$
$$\hat{\delta}(q_0,1w10) = \delta\big(\hat{\delta}(q_0,1w1),0\big) = \delta\big(q_f,0\big) = q_f$$

שזו סתירה, כי $1w10 \notin L$.

4.1 שקילות נוספת לשפה רגולרית

הוכנו כבר ששפה L רגולרית אמ"מ קיים לה אס"ד. כעת, הוכחנו ש: $\epsilon - NFA \equiv NFA \equiv DFA$, כלומר נוכל להרחיב את הטענה: **שפה L רגולרית אמ"מ קיים לה אס"ד / אסל"ד / אסל"ד אם מסעי אפסילון**.

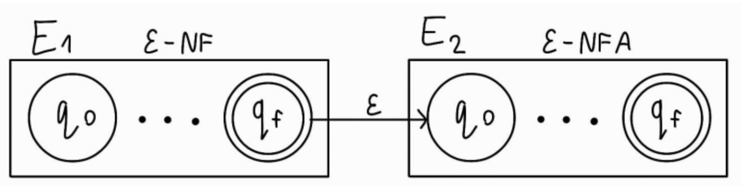
כלומר, במקום להראות טענות על *DFA* נוכל להראות אותן על $\epsilon - NFA$ באותה מידה, ולקבל שהטענה עובדת גם עבור *DFA*.

הראנו בהרצאות הקודמות שבהינתן L_1, L_2 רגולריות, אזי גם $L_1 \setminus L_2, \overline{L_1}, L_1 \cap L_2, L_1 \cup L_2$ גם רגולריות. כמו כן, ראינו ש $L \subseteq L_1$ לא בהכרח רגולרית.

נטען שגם $(L_1 \cdot L_2), (L_1)^R, (L_1)^*, (L_1 \Delta L_2)$ כולן רגולריות:

4.2 $L_1 \cdot L_2$

L_1, L_2 רגולריות ולכן קיימים להן $\epsilon - NFA$ עם מצב מקבל יחיד. נבנה $\epsilon - NFA$ עבור $L_1 \cdot L_2$ בצורה הבאה:



4.3 L_1^R

L_1 רגולרית ולכן קיים לה $\epsilon - NFA$ עם מצב מקבל יחיד $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, q_f)$. נבנה $\epsilon - NFA$ עבור L_1^R:

$$E' = \left(Q, \Sigma, \delta', q_0', q_f'\right)$$

$q_0' = q_f$ כלומר, התחלת חישוב האוטומט החדש הוא מהמצב המקבל היחיד של האוטומט המקורי.

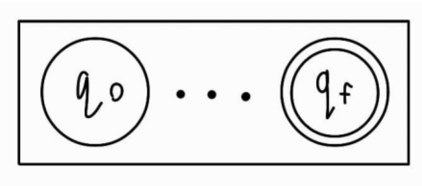
$$\forall q \in Q, \forall \sigma \in \Sigma \cup \{\epsilon\} : p \in \delta(q, \sigma) \Longrightarrow q \in \delta'(p, \sigma)$$

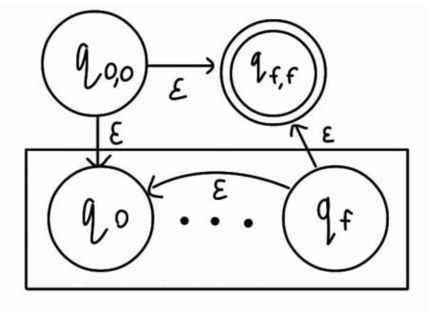
כלומר, הופכים את הכיוונים של כל החיצים מהאוטומט המקורי.

$q_f' = q_0$ כלומר, המצב המקבל הוא q_0 הישן. (ובפועל, גם כל מצב שיש ממנו מסע אפסילון למצב המקבל).

4.4 L_1^*

L_1 רגולרית ולכן קיים לה $\epsilon - NFA$ עם מצב מקבל יחיד. נבנה ממנו אוטומט:





נוכיח שקילות:

כיוון ראשון: ϵ מתקבל ע"י האוטומט כי יש מסע אפסילון מ-q_0^* ל-q_f^*. עבור כל מילה שהיא שרשור של מספר סופי של מילים מ-L, נעבור בתוך הלולאה הפנימית שבאיור האוטומט, ולבסוף נעבור עם מסע האפסילון ל-q_f^*. כך ניתן להגדיר מסלול חישוב מקבל עבור כל $w \in L^+$. פורמלית – צריך לעשות אינדוקציה על מספר השרשורים.

כיוון שני: נניח ש E^* מקבל את w, ונתבונן במסלול חישוב מקבל. מקרה א': המסלול מבצע מסע מ-q_0^* ל-q_f^*. במקרה זה, $w = \epsilon$, ולכן $w \in L^*$. מקרה ב': המסלול מגיע $k \geq 1$ פעמים ל-q_f, ולאחר כל ביקור ב-q_f (פרט לאחרון) מבצע מסע אפסילון ל-q_0. במקרה זה, ניתן לרשום $w = w_1 w_2 \cdots w_k$, כאשר כל w_i מתקבלת ע"י E. לכן במקרה זה $w \in L^*$.

4.5 $L_1 \Delta L_2$

$$L_1 \Delta L_2 = \{w \in L_1 \land w \notin L_2\} \cup \{w \in L_2 \land w \notin L_1\} = \{w \in L_1 \land w \in \overline{L_2}\} \cup \{w \in \overline{L_1} \land w \in L_2\}$$

כל הפעולות בדרך הן פעולות שמשמרות רגולריות.

4.6 $L_1 \cup L_2$

כבר הראינו באמצעות דה-מורגן. נראה בעוד דרך:

L_1 רגולרית ולכן קיים לה $\epsilon - NFA$. L_2 רגולרית ולכן קיים לה $\epsilon - NFA$. נבנה אוטומט עבור $L_1 \cup L_2$ בצורה הבאה:

$$E_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, F_1), \qquad E_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{02}, F_2)$$

$$E = (Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}, \Sigma, \delta, q_0, F_1 \cup F_2)$$

$$\forall q \in Q_1, \sigma \in \Sigma : \delta(q,\sigma) = \delta_1(q,\sigma), \qquad \forall q \in Q_2, \sigma \in \Sigma : \delta(q,\sigma) = \delta_2(q,\sigma)$$

$$\delta(q_0, \epsilon) = \{q_{01}, q_{02}\}$$