הרצאה 10

תזכורת: כאשר דיברנו על ההירכיה של חומסקי, אמרנו כי לכל מודל דקדוקי יש מודל תיאורטי ששקול בכוחו לדקדוק. ראינו שדקדוק לינארי ימני/שמאלי שקול לשפות רגולריות (אס"ד).

אמרנו שדקדוק חסר הקשר שקול לאוטומט מחסנית (א"מ). דקדוק תלוי הקשר שקול למכונת טיורינג עם הגבלת זיכרון. דקדוק כללי שקול למכונת טיורינג ללא הגבלה – מחשב. כעת נכיר אוטומט מחסנית.

1 אוטומט מחסנית

לעומת אס"ד, שהזיכרון שלו חסום (כמות המצבים סופית), באוטומט מחסנית יש כלי נוסף – זיכרון מחסנית "אינסופי".

1.1 הגדרות

- באס"ד, פונקציית המעברים δ הייתה פונקציה של Q, Σ. בא"מ, הפונקציה δ תלויה גם בתו העליון שיש במחסנית. כלומר בכל צעד עושים pop למחסנית, והתו הזה משפיע על הפונקציה. אם המחסנית ריקה, אי אפשר להתקדם.
- על מנת להבדיל בין אותיות הקלט לאותיות שיש במחסנית, בד"כ נסמן את אותיות הקלט בא"ב קטן $(a, b, \dots, z)$ ואת האותיות בזיכרון המחסנית בא"ב גדול $(A, B, \dots, Z)$.
- על מנת להבדיל בין **המילים** של הקלט ו**המילים** במחסנית, בד"כ נסמן את מילות הקלט באותיות לטיניות (באנגלית) – x, y, z, ואת המילים במחסנית ב $\alpha, \beta, \dots, \gamma$.
- תחתית המחסנית תסומן על ידי תו מיוחד: $\perp$, שאינו חלק מהא"ב.

1.2 הגדרת האוטומט

אוטומט מחסנית הוא שביעייה: $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F, \Gamma, \perp)$.

הסימן Γ הוא הא"ב של המחסנית עצמה, ובד"כ לא נגביל אותו.

נגדיר רשמית את פונקציית המעברים:

$$\delta: Q \times (\Sigma, \epsilon) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$$

קלט: מצב, אות קלט (או אפסילון), ואת ראש המחסנית.

פלט: זוג סדור: מצב, ו"מה לכתוב בראש המחסנית".

למה זוגות? כי אוטומט המחסנית יהיה אי דטרמיניסטי.

כמה אפשר לכתוב בראש המחסנית? כמות סופית כלשהי. נרשום כך שהתו הימני ביותר של המחרוזת הוא זה שנכנס ראשון למחסנית.

1.3 קבלה של אוטומט מחסנית

נגדיר שתי אפשרויות לקבלת מילה באוטומט מחסנית:

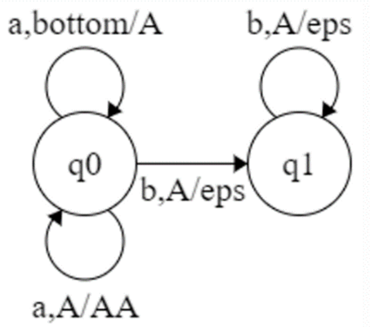
1. קבלה על ידי **מצב מקבל**. כלומר, אם האוטומט יגיע למצב ששייך ל-F והמילה נגמרה, אז המילה מתקבלת באוטומט. זו הדרך שאנחנו רגילים מהאוטומטים בתחילת הקורס.
2. קבלה על ידי **ריקון המחסנית**. כלומר, אם המחסנית התרוקנה וגם המילה נגמרה, אזי המילה מתקבלת באוטומט. ללא תלות במצבי האוטומט.

בהמשך נוכיח שקילות בין שני אופני הקבלה.

1.4 דוגמה

נבנה אוטומט מחסנית (המקבל ע"י ריקון) לשפה $L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$.

נצטרך מצב שבו מוסיפים אות למחסנית, ומצב שבו מרוקנים אות מהמחסנית. וכך נוכל להשוות בין כמות ה-a לכמות ה-b.



אם היינו ב-q_0, וקראנו a, ובמחסנית עשינו pop וקיבלנו את התו שמסמל את תחתית המחסנית – אז במצבים נישאר באותו מצב, ונכניס A למחסנית. (זה יקרה רק פעם אחת, בקריאת התו הראשון במילה).

אם היינו ב-q_0, וקראנו a, ובמחסנית קיבלנו A – אז נישאר באותו מצב, ונכניס AA למחסנית.

אם היינו ב-q_0, וקראנו b, ובמחסנית קיבלנו A – אז נעבור למצב q_1, ונכניס ϵ למחסנית.

אם היינו ב-q_1, וקראנו b, ובמחסנית קיבלנו A – אז נישאר באותו מצב, ונכניס ϵ למחסנית.

פורמלית, נגדיר:

$$M = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{A, \bot\}, q_0, \bot, \phi, \delta)$$

$$\delta(q_0, a, \bot) = (q_0, A)$$
$$\delta(q_0, a, A) = (q_0, AA)$$
$$\delta(q_0, b, A) = (q_1, \epsilon)$$
$$\delta(q_1, b, A) = (q_1, \epsilon)$$

1.5 תיאור רגעי

עבור א"מ M, **תיאור רגעי** (*instantaneous Description - ID*) הוא שלישיה: (q, w, γ), כאשר:

- $q \in Q$ הוא מצב הבקרה הנוכחי,
- $w \in \Sigma^*$ היא יתרת הקלט,
- $\gamma \in \Gamma^*$ זה תוכן המחסנית.

בא"מ שבנינו קודם, עבור הקלט $aaabbb$, לאחר שני צעדים התיאור הרגעי הוא $(q_0, abbb, AA)$. לאחר שלושה צעדים התיאור הרגעי הוא (q_0, bbb, AAA).

כעת נוכל לתאר את חישובי האוטומט כרצף צעדים בין ID עוקבים.

1.6 תיאור רגעי עוקב

נאמר כי $ID_2 = (p, w, \beta\gamma)$ **עוקב ל-** $ID_1 = (q, \sigma w, Z\gamma)$ אמ"מ $(p, \beta) \in \delta(q, \sigma, Z)$.

במילים – אם ממצב q ע"י קריאת הקלט σ וראש המחסנית Z ניתן להגיע למצב p ולרשום במחסנית β. (ואז נשאר לקרוא בקלט רק את המילה w). כלומר, היינו במצב q, הקלט שנשאר הוא σw (וקראנו σ), והמחסנית הייתה $Z\gamma$ (Z בראש, ושאר המחסנית היא המילה γ). קראנו את σ וקיבלנו מהמחסנית Z, ועברנו למצב p, ועכשיו במחסנית יש $\beta\gamma$ – כלומר הכנסנו את β.

נסמן יחס זה כך: $(q, \sigma w, Z\gamma) \vdash_M (p, w, \beta\gamma)$.

וכפי שכבר התרגלנו, הסימון $\vdash_M^*$ מתאר סדרת צעדי חישוב. כלומר:

$$(q, w, \gamma) \vdash_M^* (p, x, \beta)$$

אמ"מ קיימת סדרת תיאורים רגעיים עוקבים המתחילה ב (q, w, γ) ומסתיימת ב (p, x, β).

כרגיל, ניעזר גם ב $\vdash^k$, $\vdash^+$. (כן, יהיו פה אינדוקציות. בהצלחה).

2 מודי קבלה

כעת נוכל להגדיר באופן רשמי את שני מודי הקבלה של א"מ. יהי אוטומט מחסנית: $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, F, \perp)$.

2.1 הגדרה פורמלית של מודי הקבלה

השפה המתקבלת על ידי **הגעה למצב מקבל** מסומנת: $L_f(M)$, ומוגדרת:

$$L_f(M) = \{w \in \Sigma^* : \exists p \in F, \gamma \in \Gamma^* \ s.t: (q_0, w, \perp) \vdash_M^* (p, \epsilon, \gamma)\}$$

קבוצת המילים כך ש: קיים מצב מקבל, ומחרוזת במחסנית, כך ש: אם היינו במצב ההתחלתי ועם מחסנית ריקה, וקראנו את המילה, כשהמילה נגמרה היינו במצב מקבל. לא מעניין אותנו מה יש במחסנית.

השפה המתקבלת על ידי **ריקון המחסנית** מסומנת $L_\epsilon(M)$, ומוגדרת:

$$L_\epsilon(M) = \{w \in \Sigma^* : (q_0, w, \perp) \vdash_M^* (p, \epsilon, \epsilon)\}$$

קבוצת המילים כך ש: אם היינו במצב ההתחלתי ועם מחסנית ריקה, וקראנו את המילה, כשהמילה נגמרה המחסנית הייתה ריקה. לא מעניין אותנו לאיזה מצב הגענו.

2.2 שקילות שני אופני הקבלה

נוכיח כי משפחת השפות המתקבלות ע"י א"מ שמקבל ע"י ריקון, זהה למשפחת השפות המתקבלות ע"י א"מ המקבל ע"י מצב מקבל.

נשים לב שההוכחה טענת כי בהינתן א"מ מצורה אחת, ניתן לבנות א"מ מהצורה השנייה. **היא לא טוענת** ש $L_f(M) = L_\epsilon(M)$.

לדוגמה, יהי $M = (\{q_0\}, \{a\}, \{\perp, A\}, \delta, q_0, \perp \ \{q_0\})$, כאשר $\delta(q_0, a, \perp) = (q_0, A \perp), \delta(q_0, a, A) = (q_0, AA)$. אזי: $L_f(M) = a^*$, $L_\epsilon(M) = \phi$. כי יש רק מצב אחד והוא מקבל, אז כל מילה מתקבלת. אבל האוטומט אף פעם לא מתרוקן.

משפט: $L_f(M) \equiv L_\epsilon(M)$.

2.3 כיוון ראשון - בניית אוטומט ריקון בהינתן אוטומט מצב

בהינתן $L_f(M)$, נראה שניתן לבנות M' מ- L_ϵ.

הטענה הפורמלית: תהי M_1 שעבורה $L = L_f(M_1)$, ויהי $M_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, F, \perp)$. אזי קיים א"מ M_2 כך ש $L = L_\epsilon(M_2)$.

רעיון הבנייה: M_2 יתנהג כמו M_1, אך כאשר M_1 ייכנס למצב מקבל, נכניס את M_2 למצב שמרוקן את המחסנית.

נצטרך לזהות מתי M_1 רוקנה את המחסנית. לכן נשתמש ב"תחתית כפולה". (כי אם δ קוראת ϵ מראש המחסנית, האוטומט נתקע).

לכן, בתחילת הריצה M_2 תכיל את התחתית $\perp_2$, ובצעד הראשון היא תכניס את $\perp_1$. לכן, יהיה גם q_0' שיבצע את ההכנסה הזו, לפני הרצת M_1.

הגדרת M_2: נקבל את הא"מ הבא:

$$M_2 = (Q \cup \{q_e, q_0'\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\perp_2\}, \delta', q_0', \perp_2, \phi)$$

כאשר $q_e, q_0' \notin Q$ וגם $\perp_2 \notin \Gamma$. נגדיר את δ':

$$\delta'(q_0', \epsilon, \perp_2) = \{(q_0, \perp_1 \perp_2)\}$$

אם $q \notin F$ או $\sigma \neq \epsilon$ אזי M_2 מתנהג כמו M_1, כלומר לכל $Z \in \Gamma$:

$$\delta'(q, \sigma, Z) = \delta(q, \sigma, Z)$$

אם $q \in F$, אזי: לכל $Z \in \Gamma \cup \{\perp_2\}$ נגדיר:

$$\delta'(q,\epsilon,Z) = \delta(q,\epsilon,Z) \cup \{(q_e,\epsilon)\}$$

כלומר, אפשר להתקדם רגיל כמו ב-M_1 ואפשר ללכת למצב שבו מרוקנים את כל המחסנית.

לכל $Z \in \Gamma \cup \{\perp_2\}$ נגדיר: $\delta(q_e,\epsilon,Z) = (q_e,\epsilon)$ (נשארים במקום ומרוקנים).

נוכיח כי $L_f(M_1) = L_\epsilon(M_2)$, ע"י הכלה דו כיוונית:

2.3.1 כיוון ראשון: $L_f(M_1) \subseteq L_\epsilon(M_2)$

תהי $x \in L_f(M_1)$. כלומר, קיים חישוב $(q_0,x,\perp_1) \vdash^* (p,\epsilon,\gamma)$ עבור $p \in F, \gamma \in \Gamma^*$.

נמשיך את המסלול של x עד שיתקבל גם ב-M_2, כך:

ע"פ כלל א' (של δ): $(q_0',\epsilon,\perp_2) \vdash_{M_2} (q_0,x,\perp_1\perp_2)$

ע"פ כלל ב': M_2 מתנהגת כמו M_1 בכל קריאת המילה x, ולכן:

$$(q_0,x,\perp_1) \vdash_{M_2}^* (p,\epsilon,\gamma\perp_2)$$

לכן, נעבור משם למצב q_e בעזרת כלל ג' (ריקון אות) ונמשיך לרוקן עם כלל ד':

$$(p,\epsilon,\gamma\perp_2) \vdash_{M_2}^* (q_e,\epsilon,\epsilon)$$

לסיכום, מתקיים כי:

$$(q_0',x,\perp_2) \vdash_{M_2}^* (q_e,\epsilon,\epsilon)$$

כלומר, $x \in L_\epsilon(M_2)$.

2.3.2 כיוון שני: $L_\epsilon(M_1) \subseteq L_f(M_2)$

תהי $x \in L_\epsilon(M_1)$. כלומר, בקריאת x המחסנית התרוקנה לחלוטין.

הדרך היחידה לעשות את זה היא ע"י הגעה למצב q_e (שכן שאר צעדי M_1 לא יכולים לרוקן את M_2).

לכן, סדרת הצעדים ש M_2 מבצע על x, (פרט לצעד הראשון), קיימת גם ב M_1. ולכן $x \in L_f(M_1)$.

לסיכום, $L_f(M_1) = L_\epsilon(M_2)$. כנדרש.

2.4 כיוון שני – בניית אוטומט מצב בהינתן אוטומט ריקון

בהינתן $L_\epsilon(M)$, נראה שניתן לבנות M' מ- L_f.

רעיון הבנייה: כאשר הא"מ הראשון ירוקן את המחסנית, נבצע צעד אפסילון למצב מקבל (יחיד) ונרוקן את התחתית הנוספת (כי כל צעד מבצע pop לראש המחסנית, ואם היא ריקה האוטומט ייתקע).

תהי $L = L_\epsilon(M_2)$ עבור $M_2 = (Q,\Sigma,\Gamma,q_0,\perp_2,\delta,\phi)$. אזי קיים א"מ M_1 כך ש $L = L_f(M_1)$.

$$M_1 = \left(Q \cup \{q_f,q_0'\},\Sigma,\Gamma \cup \{\perp_1\},\perp_1,\delta',q_0',q_f\right)$$

$$\delta'(q_0',\epsilon,\perp_1) = (q_0,\perp_2\perp_1)$$

לכל $q \in Q, Z \in \Gamma, \sigma \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ נגדיר: $\delta'(q,\sigma,Z) = \delta(q,\sigma,Z)$.

לכל $q \in Q$: $\delta'(q,\epsilon,\perp_1) = (q_f,\epsilon)$ (הסבר: מכל מצב נוסיף מסע אפסילון למצב מקבל, במקרה שהמחסנית של M_2 התרוקנה).

2.5 הוכחת נכונות הבנייה

כיוון ראשון: $L_f(M_1) \subseteq L_\epsilon(M_2)$

תהי $x \in L_f(M_1)$. כלומר הגענו למצב q_f. איך?

הדרך היחידה להגיע אל q_f היא ע"י סיום ריקון המחסנית כבמסלול החישוב של M_2, ואז כשמגיעים לתחתית הנוספת $\perp_1$ עוברים למצב מקבל.

לכן, $x \in L_\epsilon(M_2)$, כי רוקנו את המחסנית המקורית של M_2.

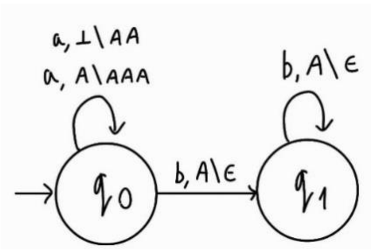
כיוון שני: $L_\epsilon(M_2) \subseteq L_f(M_1)$.

תהי $x \in L_\epsilon(M_2)$. אזי המחסנית של M_2 מתרוקנת בסיום קריאת המילה. לכן, היות והאוטומט M_1 רץ כמו M_2 על המילה (החל מהצעד השני), הוא גם ירוקן את המחסנית ויזהה את $\perp_1$ בתחתית, ומשם יעבור למצב מקבל, ולכן $x \in L_f(M_1)$, כנדרש.

2.6 דוגמאות

לכל שפה נבנה אוטומט ריקון ואוטומט מצב מקבל:

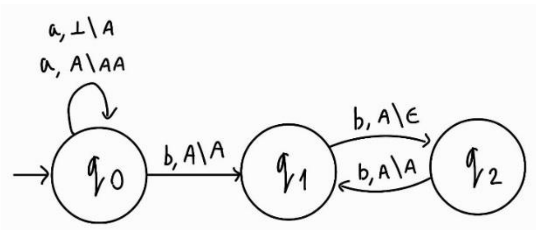
$$\boldsymbol{L_1 = \{a^n b^{2n} : 1 \leq n\}}$$



בקריאת האות הראשונה (בהנחה שזה a. אם זה b אז האוטומט נתקע), המחסנית תהיה ריקה. נכניס AA כי זה כמות ה-b שנרצה לראות.

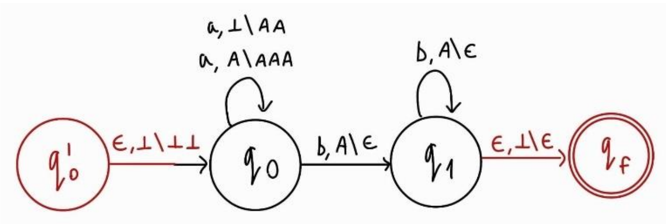
בכל קריאה של a, מוציאים A מהמחסנית ונכניס AAA. ככה בעצם הוספנו AA למחסנית.

בקריאה הראשונה של b, מוציאים A ועוברים למצב השני.



בכל קריאה אחרת של b, מוציאים A. אם המילה נגמרה והמחסנית ריקה, זה אומר שהיה בדיוק b^{2n}.

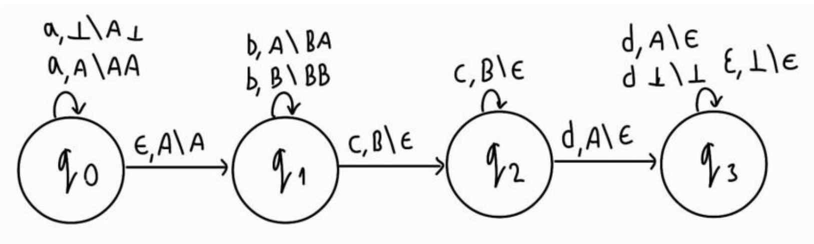
עוד אפשרות: כל a יוסיף A אחד, ונעשה שני מצבים של b, שאחד מהם מוריד A והשני לא. זה אותו אפקט:



איך נהפוך את זה לאוטומט מצב מקבל?

נוסיף מצב התחלתי, עם מסע אפסילון שבקריאת תחתית המחסנית מכניס שתי "תחתיות". ומהמצב האחרון, מסע אפסילון למצב מקבל. המסע אפסילון הזה קורה רק בקריאת תחתית המחסנית:

$$\boldsymbol{L_2 = \{a^l b^m c^m d^n : 1 \leq l \leq n, 1 \leq m\}}$$

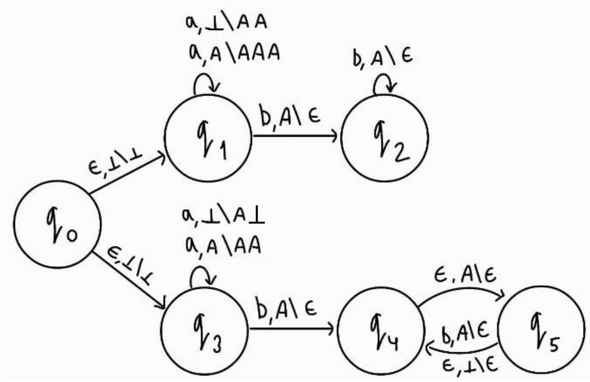


נספור כמה a יש. נעבור למצב b. צריך להיות אותו מספר c כמו b. ואז צריך להיות d לפחות כמו a, ואפשר יותר. לכן המצב האחרון מאפשר לרוקן את המחסנית.

המעבר למצב 1 דורש A כי חייב לפחות a אחד. אם אין דרישה כזו, אז צריך להוסיף מסע אפסילון.

מעבר לאוטומט מצב מקבל יעבוד באותה דרך כמו בסעיף הקודם. נוסיף מצה התחלתי ומצב מקבל עם מסעי אפסילון.

$$L_3 = \{a^n b^{2n} \cup a^{2n} b^n : 1 \le n\}$$



אוטומט לכל שפה, ומסע אפסילון שנותן לנו לבחור את אחת מהן.

באוטומט הראשון, נספור פעמיים את כמות ה-a ואז כל b יוציא אחד.

באוטומט השני, נספור כמה a יש. ואז כל b שני יוציא A אחד. וכשנגיע לסוף המחסנית, נרוקן אותה.

3 אוטומט מחסנית דטרמיניסטי

נאמר שאוטומט מחסנית הוא דטרמיניסטי אם הוא מקיים:

1. לכל $q \in Q, \sigma \in \Sigma, Z \in \Gamma$: $|\delta(q,\sigma,Z)| \le 1$. כלומר מכל מצב, עבור אותה אות ותו מחסנית – יש רק חץ אחד. לדוגמה, האוטומט האחרון לא מקיים את זה, כי מq_0 יש שני חיצים עם אותם תנאים.

2. לכל $q \in Q, Z \in \Gamma$: אם $\delta(q,\epsilon,Z) \ne \phi$, אזי לכל $\sigma \in \Sigma$ מתקיים: $\delta(q,\sigma,Z) = \phi$.
כלומר: אם קיים מסע אפסילון עבור ראש מחסנית כלשהו, אז זה המסע היחיד עבור אותו ראש מחסנית.

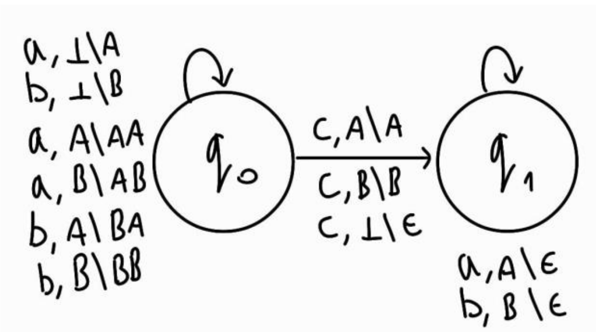
3.1 דוגמה 1

נבנה א"מ דטרמיניסטי המתקבל ע"י ריקון לשפה הבאה:

$$L_{mp} = \{wcw^R : w \in \{a,b\}^*\}, \Sigma = \{a,b,c\}$$

נצטרך מצב שבו קוראים את המילה w, ומצב שבו מרוקנים את המחסנית ומוודאים שאכן יש לנו w^R. המעבר ביניהם הוא ע"י קריאת c, בלי לגעת בראש המחסנית.

למחסנית נצטרך להכניס את המילה, ולכן $\Gamma = \{A,B,\perp\}$. צריך להגדיר את δ לכל תו קלט ולכל ראש מחסנית (ולשני המצבים).



הכנסת תו ראשון למחסנית:

$$\delta(q_0,a,\perp) = (q_0,A), \qquad \delta(q_0,b,\perp) = (q_0,B)$$

הכנסת המילה w למחסנית:

$$\forall\sigma \in \{a,b\}, \forall\gamma \in \{A,B\}: \ \delta(q_0,\sigma,\gamma) = (q_0,\sigma\gamma)$$

מעבר למצב השני, שבו מרוקנים ומוודאים שהמילה הנוספת היא אכן w^R: $\forall\gamma \in \{a,b\} : \delta(q_0,c,\gamma) = (q_1,\gamma)$

ריקון המחסנית: $\delta(q_1,a,A) = (q_1,\epsilon),\ \delta(q_1,b,B) = (q_1,\epsilon)$

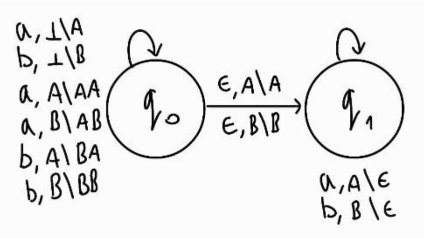
טיפול במצב שבו $w = \epsilon$: $\delta(q_0,c,\perp) = (q_1,\epsilon)$

ניתן להוכיח באינדוקציה כי $L_\epsilon(M) = L$ (כמובן).

3.2 דוגמה 2

נבנה א"מ א"ד המתקבל ע"י ריקון, לשפה $L_{nmp} = \{ww^R : w \in \{a,b\}^*\}$.

כאן אין את התו c שמכריע אם הגענו לסוף w, אלא נצטרך לנחש בצורה אי דטרמיניסטית. וניעזר במחסנית בשביל לוודא שיש את w^R.



הכנסת תו ראשון למחסנית: $\delta(q_0,\sigma,\perp)=(q_0,\sigma)$

הכנסת המילה w: $\forall\sigma\in\{a,b\},\forall\gamma\in\{a,b\}:\ \delta(q_0,\sigma,\gamma)=(q_0,\sigma\gamma)$

מעבר אי דטרמיניסטי למצב הבא: $\delta(q_0,a,a)=(q_1,\epsilon),\ \delta(q_0,b,b)=(q_1,\epsilon)$

ריקון המחסנית כל עוד המילה באמת הפוכה:

$$\delta(q_1,a,a)=(q_1,\epsilon),\qquad \delta(q_1,b,b)=(q_1,\epsilon)$$

טיפול במצב שבו $w=\epsilon$: $\delta(q_0,\epsilon,\perp)=(q_0,\epsilon)$

למה פה לא עוברים ל-q_1? זה לא קריטי. העיקר הוא שאם ראש המחסנית הוא ϵ, לא ניתן להתקדם, ואז לא משנה איפה אנחנו.

4 שקילות בין א"מ לדח"ה

במודל הרגולרי, ראינו שאי-דטרמיניזם לא מוסיף כוח (כי האוטומטים שקולים). לעומת זאת, במודל ח"ה, ראינו שפה שלא ניתן לבדוק באוטומט מחסנית דטרמיניסטי, אלא רק בא"מ א"ד. כלומר הוא מוסיף כוח. ונצטרך אותו כשנראה שקילות לדח"ה.

מוטיבציה: לפעמים יהיה נוח יותר לבנות אחד ולא את השני. לדוגמה, בשפות תכנות נוח להשתמש בדח"ה. א"מ נוח לתיאור של אלגוריתם או מודל חישובי שבודק תחביר של שפה.

נראה כיוון אחד של הוכחת השקילות: בהינתן דקדוק ח"ה, נבנה אוטומט מחסנית שקול.

4.1 רעיון ההוכחה

טענה: לכל שפה ח"ה L, קיים M כך ש $L=L_\epsilon(M)$.

לכל שפה ח"ה קיים דקדוק ח"ה שיוצר אותה (לפי הגדרה).

נבנה א"מ שיחקה **גזירה שמאלית ביותר** בדקדוק. גזיר שמאלית ביותר – אם יש לנו רצף של משתנים, תמיד נגזור את השמאלי ביותר. אם גזרנו וקיבלנו עוד משתנים – גם הפעם, נגזור את השמאלי ביותר לפני שנמשיך. (מבנה קצת רקורסיבי).

התבנית הפסוקית הנוכחית תיוצג ע"י שרשור רישא הקלט שהאוטומט קרא, יחד עם תוכן המחסנית (ב-ID השארנו את מה שנותר לקרוא, ואילו כאן יעניין אותנו מה שכבר קראנו).

המטרה: לסיים את מילת הקלט ואת תוכן המחסנית בבת אחת (L_ϵ).

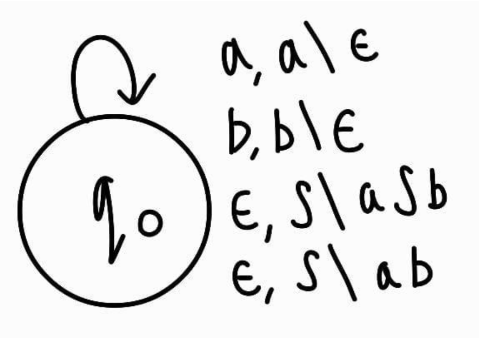
האוטומט יפעיל את האלגוריתם הבא:

4.2 אלגוריתם לאוטומט המחסנית

1. נאתחל מחסנית בסימן יחיד S.
2. אם בראש המחסנית מופיע המשתנה הדקדוקי $A\in V$,
נבחר (באופן אי דטרמיניסטי) באחד מכללי הגזירה $A\to\alpha$,
ונכניס למחסנית את α. (מסעי אפסילון).
3. אם בראש המחסנית מופיע σ וגם אות הקלט הבאה היא σ, נקרא את האות ונוציא את σ מראש המחסנית.
4. אם המילה לא נגמרה, נחזור לשלב 2.

שימו לב: אין כאן יצירת מצבים. כלומר, נשארנו בכל הריצה ב-q_0.

4.3 דוגמת הרצה



תהי $L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$. ויהי $G = (\{a,b\}, \{S\}, S, S \to aSb \mid ab)$ הדקדוק שיוצר אותה. נדגים ריצת א"מ מתאים:

$$\delta(q_0, \epsilon, S) = \{(q_0, aSb), (q_0, ab)\}$$
$$\delta(q_0, a, a) = (q_0, \epsilon) = \delta(q_0, b, b)$$

נתבונן בגזירה: $S \to aSb \to aaSbb \to aaabbb$. להלן החישוב של האוטומט:

$$(q_0, aaabbb, S) \vdash (q_0, aaabbb, aSb) \vdash (q_0, aabbb, Sb)$$
$$\vdash (q_0, aabbb, aSbb) \vdash (q_0, abbb, Sbb)$$
$$\vdash (q_0, abbb, abbb) \vdash_M^4 (q_0, \epsilon, \epsilon)$$

כאשר ארבעת הצעדים האחרונים הם $(q_0, \sigma w, \sigma w) \vdash (q_0, w, w)$

4.4 בנייה פורמלית

יהי $G = (V, T, S, P)$ כך ש $L = L(G)$. נגדיר א"מ כך:

$$M = (\{q_0\}, T, V \cup T, \delta, q_0, S, \phi)$$

כאשר δ מוגדרת לפי כללי P:

לכל $A \in V$: $\delta(q_0, \epsilon, A) = \{(q_0, \alpha) : A \to \alpha \in P\}$.

לכל $a \in T$, $\delta(q_0, a, a) = (q_0, \epsilon)$.

טענה: לכל $x \in T^*$, ולכל $\alpha \in (V \cup T)^*$ (שאינה מתחילה בטרמינל):

$S \Rightarrow^* x\alpha$ בגזירה שמאלית ביותר **אמ"מ** $(q_0, x, S) \vdash^* (q_0, \epsilon, \alpha)$.

כלומר: אם בדקדוק הצלחנו לשכתב מ-S את $x\alpha$, אז גם באוטומט: אם התחלנו מהמצב ההתחלתי, עם S במחסנית, אחרי קריאת x יהיה לנו α במחסנית.

למה זה עוזר? כי עבור $\alpha = \epsilon$ נקבל $x \in L(G) \Leftrightarrow x \in L(M)$. נוכיח בהכלה דו כיוונית:

4.5 כיוון ראשון

טענה: לכל $x \in T^*$ ולכל $\alpha \in (V \cup T)^*$, אם $(q_0, x, S) \vdash^* (q_0, \epsilon, \alpha)$ אזי $S \Rightarrow^* xa$ בגזירה שמאלית ביותר.

הוכחה באינדוקציה על i: מספר צעדי החישוב.

בסיס: עבור $i = 0$, בהכרח $x = \epsilon, \alpha = S$. ואכן $S \Rightarrow^0 S = x\alpha$.

צעד: נניח כי הטענה נכונה לכל חישוב שאורכו קטן מ-i, וכי $(q_0, x, S) \vdash_M^i (q_0, \epsilon, \alpha)$.

כלומר אחרי i צעדים, סיימנו את x ונשאר α במחסנית. מה היה הצעד האחרון?

יש שני סוגים של צעדים באוטומט: מסע אפסילון שמחליף משתנה (הפעלת כלל גזירה), או מסע של ריקון טרמינל מהקלט.

מקרה א – המסע האחרון מחליף משתנה: היה במחסנית $A\alpha'$, קראנו את A, אולי הכנסנו משהו למחסנית ועכשיו יש במחסנית α. מהגדרה, זה מסע אפסילון. וזה הצעד האחרון, כלומר כבר סיימנו לקרוא את x: $(q_0, x, S) \vdash_M^{i-1} (q_0, \epsilon, A\alpha') \vdash_M (q_0, \epsilon, \alpha)$.

מהנ"א, $S \Rightarrow^* xA\alpha'$ בגזירה שמאלית ביותר, ומהגדרת M מתקיים $A\alpha' \Rightarrow \kappa\alpha' = \alpha$, כאשר $A \to \kappa \in P$. מכאן $S \Rightarrow^* x\alpha$ בגזירה שמאלית ביותר, כנדרש.

מקרה ב – המסע האחרון הוא ריקון טרמינל מהקלט: אחרי $i-1$ צעדים נשאר לקרוא σ, ובראש המחסנית יש σ ומתחתיו α.

הצעד האחרון (בקריאת σ) מוחק את σ מראש המחסנית: $(q_0, x, S) \vdash_M^{i-1} (q_0, \sigma, \sigma\alpha) \vdash_M (q_0, \epsilon, \alpha)$ כאשר $x = x'\sigma$.

לכן נוכל לרשום $(q_0, x', S) \vdash_M^{i-1} (q_0, \epsilon, \sigma\alpha)$. מהנ"א נקבל $S \Rightarrow^* x'\sigma\alpha$ בגזירה שמאלית ביותר, (וכמובן $x = x'\sigma$), כנדרש.

4.6 כיוון שני

טענה: לכל $x \in T^*$ ולכל $\alpha \in (V \cup T)^*$ שאינה מתחילה בטרמינל, אם $S \Rightarrow^* x\alpha$ בגזירה שמאלית ביותר אזי $(q_0, x, S) \vdash^* (q_0, \epsilon, \alpha)$. הוכחה באינדוקציה על אורך הגזירה, i.

בסיס: עבור $i = 0$, בהכרח $x = \epsilon, \alpha = S$. בוודאי מתקיים $(q_0, \epsilon, S) \vdash_M^0 (q_0, \epsilon, S)$.

צעד: נניח כי הטענה נכונה לכל גזירה עד אורך $i-1$, ויהי $S \Rightarrow^i x\alpha$ בגזירה שמאלית ביותר, כאשר $x \in T^*$ ו- $\alpha \in (V \cup T)^*$ שאינה מתחילה בטרמינל.

היות והגזירה שמאלית ביותר (בכלל פעם נטפל במשתנה הכי שמאלי), ניתן לרשום $S \Rightarrow^{i-1} x'Aw\alpha' \Rightarrow x\alpha$, כאשר α' אינה מתחילה בטרמינל (הנ"א) וכלל הגזירה האחרון שהופעל הוא $A \to \ddot{x}\ddot{\alpha}$. ($x'$ מורכבת רק מטרמינלים).

נחלק בין מקרים: אם A שכתבה רק טרמינלים, אז $x'\ddot{x}\ddot{\alpha}w\alpha'$ היא תת מחרוזת של x. כלומר $\ddot{\alpha} = \epsilon$.

אחרת, $\ddot{\alpha} \neq \epsilon$. כלומר $\ddot{x}\ddot{\alpha}$ מכילה טרמינלים. ואז $x'\ddot{x}$ היא תת מחרוזת של x, $\ddot{\alpha}w\alpha'$ היא תת מחרוזת של α.

מקרה א: $\ddot{\alpha} = \epsilon$:

במקרה זה נקבל כי $\alpha = \alpha'$ וכי $x = x'\ddot{x}w$. מהנ"א נקבל $(q_0, x', S) \vdash_M^* (q_0, \epsilon, Aw\alpha')$ ולכן:

$$(q_0, x, S) = (q_0, x'\ddot{x}w, S) \vdash_M^* (q_0, \ddot{x}w, Aw\alpha')$$

שוב, היות והכלל המופעל הוא $A \to \ddot{x}$, ניתן להמשיך כך:

$$(q_0, \ddot{x}w, Aw\alpha') \vdash_M (q_0, \ddot{x}w, \ddot{x}w\alpha') \vdash (q_0, \epsilon, \alpha')$$

ולכן קיים החישוב:

$$(q_0, x, S) \vdash_M^* (q_0, \epsilon, \alpha)$$

כנדרש.

מקרה ב: $\ddot{\alpha} \neq \epsilon$:

במקרה זה נקבל כי $\alpha = \ddot{\alpha}w\alpha'$ וכי $x = x'\ddot{x}$. בנוסף, מהנ"א נקבל $(q_0, x', S) \vdash_M^* (q_0, \epsilon, Aw\alpha')$ ולכן:

$$(q_0, x, S) = (q_0, x'\ddot{x}, S) \vdash_M^* (q_0, \ddot{x}, Aw\alpha')$$

היות והכלל המופעל הוא $A \to \ddot{x}\ddot{\alpha}$, ניתן להמשיך כך:

$$(q_0, \ddot{x}, Aw\alpha') \vdash_M (q_0, \ddot{x}, \ddot{x}\ddot{\alpha}w\alpha') \vdash_M^* (q_0, \epsilon, \ddot{\alpha}w\alpha')$$

ולכן קיים החישוב:

$$(q_0, x, S) \vdash_M^* (q_0, \epsilon, \alpha)$$

כנדרש.

עד כאן אוטומטים, ברוך שפטרנו. ■