הרצאה 8

1 הוכחת נכונות דקדוק

בהרצאה 7 ראינו את הדקדוק:

$$G = (V, T, S, P):$$
$$V = \{S\}, \qquad T = \{a, b\}, \qquad P = \{S \to aSb | ab\}$$

ואמרנו שהשפה המתאימה היא $L = \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}^+\}$.

כעת נוכיח את זה באינדוקציה. כלומר נראה כי $L = L(G)$ בהכלה דו כיוונית.

בכל כיוון נבצע אינדוקציה על המשתנה המתאים (גודל המילה, מספר צעדי הגזירה).

1.1 כיוון ראשון: $L \subseteq L(G)$

נוכיח באינדוקציה חזקה על $|w|$:

בסיס: נראה נכונות עבור $|w| \in [2]$:

עבור $|w| \in \{0,1\}$, לא קיימת כזו ב L, ולכן התנאי מתקיים באופן ריק.

עבור $|w| = 2$, רק ab מילה מתאימה, ואכן מתקיים $S \Rightarrow^1 ab$ כי קיים הכלל $S \to ab$.

צעד: יהי $i \geq 3$. נניח כי הטענה נכונה לכל $|w| = j < i$, ונוכיח עבור $|w| = i$.

נחלק לשלושה מקרים:

מקרה א: $|w| = 2k + 1$ (אי זוגי) – אין מילים בשפה באורך אי זוגי. אז מתקיים באופן ריק.

מקרה ב: $|w| = 2k$ (זוגי) – המילה היחידה בשפה באורך הזה היא $w = a^k b^k$. נראה סדרת גזירה עבור w.

$$S \to aSb \Rightarrow^* aa^{k-1}b^{k-1}b = a^k b^k$$

כאשר המעבר השני נובע מהנחת האינדוקציה. ■

1.2 כיוון שני: $L(G) \subseteq L$

תחילה נוכיח טענה חזקה יותר: לכל $n \geq 1$ ולכל צורה פסוקית $\gamma \in (V \cup T)^*$:

אם $S \Rightarrow^n \gamma$ אזי $\gamma = a^n b^n$ או $\gamma = a^n S b^n$. (כלומר, אם הגענו למשהו מ-S ב-n צעדים, אנחנו יודעים איך הוא נראה).

ואכן, הוכחת הכיוון הזה נגמרת כשנסיים עם הטענה החזקה. כי לכל $w \in T^*$, אם $S \Rightarrow^* w$ אזי מההגדרה קיים n כך שמתקיים $S \Rightarrow^n w$ צעדים, ומהטענה, w (שאינה מכילה משתנים) חייבת אם כך להיות מהצורה $w = a^n b^n$ ולכן שייכת ל-L.

נוכיח את הטענה החזקה, באינדוקציה על אורך הגזירה:

בסיס: $n = 1$. ואכן $\gamma = aSb$ או $\gamma = ab$. שכן מפעילים בדיוק כלל אחד מ-P ומתקיים $S \to ab | aSb \in P$.

צעד: נניח שהטענה מתקיימת עבור n כלשהו ונוכיח עבור $n + 1$: תהי γ כך ש $S \Rightarrow^{n+1} \gamma$. אזי מתקיים: $S \Rightarrow^n \beta \Rightarrow \gamma$.

מהנ"א נקבל $\beta = a^n S b^n$ או $\beta = a^n b^n$. אבל המקרה השני לא אפשרי, שכן $\beta \Rightarrow \gamma$ אבל אם $\beta = a^n b^n$ לא ניתן להמשיך לגזור.

אם כך, $\beta = a^n S b^n$. יש שתי אפשרויות לצעד הגזירה האחרון בסדרה (לפי כללי הגזירה של S):

$S \to ab$ ולכן $\beta \Rightarrow a^{n+1} b^{n+1}$, או: $S \to aSb$ ולכן $\beta \Rightarrow a^{n+1} S b^{n+1}$.

ואכן קיבלנו את γ כנדרש בטענה החזקה. מש"ל.

1.3 הוכחת נכונות של דקדוק – דוגמה 2

יהי $G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$, ורשימת כללי הגזירה: $S \to aSb|aSbb|aSbbb|ab|abb|abbb$.

מהי שפת הדקדוק?

$$L(G) = \{a^n b^k : 1 \le n, k; n \le k \le 3n\}$$

כי בכל שלב שמוסיפים a, מוסיפים לפחות b אחד ולכל היותר 3 b.

נסמן את התוצאה לעיל ב L. הוכיחו כי $L = L(G)$.

כיוון ראשון: $L(G) \subseteq L$. לשם כך נוכיח טענה חזקה יותר:

תהי $\gamma \in (V \cup T)^*$ תבנית פסוקית הנגזרת בדקדוק ב-n צעדי גרירה. אזי $\gamma = a^n S b^k$ או $\gamma = a^n b^k$ עבור $n \le k \le 3n$.

מהטענה החזקה נקבל את הכיוון, שכן כל מילה טרמינלית שנגזרת בדקדוק עבור $\gamma = a^n b^k$ אכן עונה על תנאי השפה.

נוכיח באינדוקציה על אורך הגזירה כי הטענה נכונה.

בסיס: עבור צעד גזירה יחיד $(n = 1)$ נקבל: $S \to ab|abb|abbb|aSb|aSbb|aSbbb$, כנדרש.

נניח כי הטענה מתקיימת עבור t צעדי גזירה, ונוכיח עבור $t + 1$ צעדים.

מהנ"א, אחרי t צעדים, יש לנו משהו מהצורה:

$$S \Rightarrow^t a^t S b^{k'}$$

כאשר $k' \in [t, 3t]$. חייב שיהיה S באמצע, שכן אחרת לא ניתן להמשיך לגזור את הצעד ה- $t + 1$.

נסמן $r \in [1,3]$. לפי כללי הגזירה אחד מהשניים הבאים יכול להתקיים:

$$S \to^t a^t S b^{k'} \to a^{t+1} S b^{k'+r}$$

$$S \to^t a^t b^{k'} \to a^{t+1} b^{k'+r}$$

ואכן $t + 1 \le k' + r \le 3t + 3$, כנדרש.

כיוון שני: $L \subseteq L(G)$. תהי $w \in L$. נוכיח באינדוקציה על $|w|$ כי $w \in L(G)$:

בסיס: עבור $|w| \le 4$, מתקיים: $w = ab, abb, abbb, aabb$. ואכן את שלושת הראשונות אפשר לגזור בצעד יחיד, שכן שלוש כללי הגזירה הרלוונטיים קיימים. והרביעים מגזרת ע"י $S \to aSb \to aabb$. ואלה כל המילים הרלוונטיות.

צעד: נניח עבור מילים עד אורך g, ונוכיח עבור w באורך g. כאשר $g \ge 5$. אם $w \notin L$, הטענה מתקיימת באופן ריק. אחרת, נסמן: $w = a^n b^k$. כאשר $n \le k \le 3n$.

אבחנה: נוכל להניח ש $2 \le n$. (אחרת w עד אורך 4, כמו בבסיס).

נסמן $k = \alpha n$ כאשר $1 \le \alpha \le 3$, והוא לאו דווקא שלם. יהי $r = \lfloor \alpha \rfloor$ ונסמן:

$$w = a \cdot \underbrace{a^{n-1} b^{k-r}}_{u} b^r = a u b^r$$

שימו לב שהקושי הטכני הוא בבחירת r טובה, כך ש $u \in L$ ולכן נוכל להשתמש עליו בהנחת האינדוקציה.

אם $u \in L$, אזי קיימת ל-w סדרת כללי הגזירה $S \Rightarrow aSb^r \Rightarrow^* aub^r = w$. כאשר הגזירה עם הכוכבית נובעת מכך ש $u \in L$, ומהנחת האינדוקציה. לכן $w \in L(G)$, כנדרש.

נותר להוכיח כי $u \in L$: תחילה נוכיח כי $1 \le n - 1$, ואז נראה כי $1 \le \frac{k-r}{n-1} \le 3$.

החלק הראשון נובע מכך ש $2 \le n$ (ראינו לעיל). לגבי החלק השני, נתבונן בשבר:

$$Q = \frac{k-r}{n-1} = \frac{\alpha n - \lfloor \alpha \rfloor}{n-1} = \frac{\alpha n - \alpha + \alpha - \lfloor \alpha \rfloor}{n-1} = \frac{\alpha(n-1) + \alpha - \lfloor \alpha \rfloor}{n-1} = \alpha \frac{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor}{n-1} \geq \alpha$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך ש $\alpha - \lfloor \alpha \rfloor \geq 0$.

נותר להראות ש $Q \leq 3$. נחלק לשלושה מקרים:

מקרה ראשון: $\alpha = 3$. במקרה זה $Q = 3 \leq 3$.

מקרה שני: $\alpha \leq 2$: במקרה זה:

$$Q = \alpha + \frac{1}{n-1} \leq 2 + 1 = 3$$

מקרה שלישי: $2 < \alpha < 3$: היות ומתקיים $\alpha = k/n$ עבור $k, n \in \mathbb{N}$, אז בהכרח $\alpha \leq 3 - 1/n$ וכן $\alpha - \lfloor \alpha \rfloor \leq \frac{n-1}{n}$. נציב במשוואה של השבר ונקבל:

$$Q \leq 3 - \frac{1}{n} + \frac{\frac{n-1}{n}}{n-1} = 3 \leq 3$$

2 ההירככיה של חומסקי

הוגדרה על ידי נועם חומסקי[1] ב1956, והיוותה בסיס לחקר השפות הפורמליות במדעי המחשב.

הרעיון הכללי הוא, שעל ידי השמת "מגבלות" על דקדוקים, נוכל לסווג אותם לכמה סוגים שכל אחד מהם מתאים למודל "אוטומטים" שונה.

הרעיון המקורי היה שעל ידי השמת "מגבלות" על דקדוקים, נוכל לסווג אותם למורפולוגיה אנגלית (שפות רגולריות), או דקדוק אנגלי (שפות חסרות/תלויות הקשר).

לכל מודל דקדוקי קיים מודל חישובי, סוג של אוטומט, שכוחו מספיק בדיוק לקבלת שפות ממשפחת הדקדוקים המתאימה.

2.1 ההירככיה עצמה

קיימים ארבעה סוגי דקדוקים, ובכל קבוצה עוקבת מוסיפים מגבלות נוספות.

$$\Gamma_3 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_0$$

שפה תיקרא מטיפוס i אם קיים דקדוק Γ_i היוצר אותה. יעניין אותנו מהו המודל ה"חלש ביותר" שיכול ליצור אותה.

$\boldsymbol{\Gamma_0}$ – **דקדוקים כלליים:** אין מגבלות. בפרט, מותר שיהיו כללים מקצרי אורך. לדוגמה, $aBAb \to bbc$. לא נעסוק בהם בקורס. המודל הזה כה חזק שהוא שקול למכונת טיורינג כללית, ומכונת טיורינג שקולה למחשב כללי. (נראה בקורס חישוביות).

$\boldsymbol{\Gamma_1}$ – **דקדוקים תלויי הקשר:** כאן יש רק כללים שאינם מקצרי אורך. כלומר, אם $\alpha \to \beta$, אזי $|\alpha| \leq |\beta|$. יוצא דופן הוא $S \to \epsilon$, שמותר. המודל הזה שקול למכונת טיורינג שיש עליה מגבלת זיכרון לינארי. (נראה לקראת סוף הקורס).

$\boldsymbol{\Gamma_2}$ – **דקדוקים חסרי הקשר:** כאן נוספה מגבלה הדורשת שבאגף שמאל של הכללים יהיה תמיד משתנה בודד. כלומר, כל כללי הגזירה מהצורה $\alpha \to \beta$ דורשים ש $\alpha \in V^1$. ושוב, מותר $S \to \epsilon$. השם "חופשיי הקשר" נובע מכך ש α הוא משתנה בודד, ולא משנה היכן הוא מופיע בתוך הצורה הפסוקית, ניתן החליף אותו ב β.

המודל הזה שקול לאוטומט מחסנית אי דטרמיניסטי, ואנחנו נעסוק בו בהמשך הקורס.

---

[1] הוא יהודי-אמריקאי ממוצא פולני, לימד 50 שנה ב-*MIT* ומתגורר במסצ'וסטס (מגניב!). הוא גם מתנגד לעצם הקיום של מדינת ישראל, ותומך מוצהר של חמאס וחיזבאללה (פחות מגניב).

"למשפחת דקדוקים זאת חשיבות מיוחדת כיוון שחלק גדול מהתחביר של שפות התכנות ניתן לתיאור באמצעות דקדוקים חופשיי הקשר". – הטכניון

Γ_3 – דקדוקים רגולריים: דקדוק לינארי ימני או לינארי שמאלי.

כל כללי השכתוב הם מהצורות: $A \to aB$ (או $A \to Ba$, אם זה לינארי שמאלי), $A \to a$, $S \to \epsilon$ ($\forall A, B \in V, \forall \sigma \in \Sigma$).

מודל זה שקול לשפות רגולריות, כלומר, לכל המודלים הבאים: NFA, DFA, $\epsilon - NFA$.

2.2 דקדוקים רגולריים – בניית דקדוק בהינתן אוטומט

נחלק את Γ_3 בין דקדוק לינארי ימני (כל הכללים מהצורה $A \to aB$) ובין דקדוק לינארי שמאלי (כל הכללים מהצורה $A \to Ba$). וגם, נוכיח שהם שקולים בכוחם.

נוכיח גם כי דקדוק לינארי ימני שקול לשפות רגולריות, בהכלה דו כיוונית:

משפט 1: קבוצת השפות הרגולריות מוכלת ב Γ_3.

הוכחה: תהי L שפה רגולרית. לכן קיים עבורה אוטומט $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$. נבנה דקדוק G כך ש $L(G) = L(A) = L$.

רעיון הבנייה: נרצה לסמלץ את פעולת A בעזרת תהליך הגזירה בדקדוק של G. נקצה משתנה לכל מצב של A. נרצה שיתקיים:

$$\forall w \in \Sigma^*, \forall p, q \in Q(A) : \hat{\delta}(p, w) = q \Leftrightarrow p \Rightarrow^* wq$$

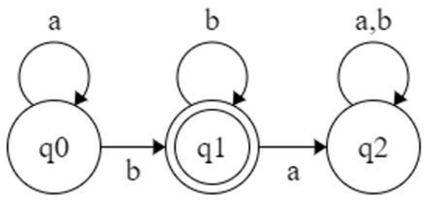
כמו כן, נצטרך לטפל במצבים סופיים (ב F).

פורמלית, נגדיר: $G = (V = Q, T = \Sigma, S = q_0, P)$.

לכל $a \in \Sigma, q \in Q$ נוסיף ל-P את הכלל $q \to ap$ אם $p = \delta(q, a)$.

אם $p \in F$, נוסיף גם את הכלל $q \to a$.

לדוגמה: נתון האוטומט הבא:



נמיר אותו לדקדוק:

$$T = \{a, b\}, \qquad S = \{q_0\}, \qquad V = \{q_0, q_1, q_2\}$$

$$\begin{aligned} P = \{q_0 \to aq_0, \qquad & q_0 \to bq_1, \\ q_1 \to bq_1, \qquad & q_1 \to aq_2, \\ q_2 \to aq_2, \qquad & q_2 \to bq_2, \\ q_0 \to b, \qquad & q_1 \to b\} \end{aligned}$$

2.3 לקראת הוכחת נכונות הבנייה

נוכיח תחילה עבור שפות שבהן $\epsilon \notin L$, ואז נראה איך מכלילים.

נשתמש בכמה טענות עזר:

טענת עזר 1: יהי G דקדוק לינארי ימני. אזי, אם מתקיים $A \Rightarrow^* \alpha$ (כאשר $A \in V^1,\ \alpha \in (V \cup T)^*$) אז α מהצורה wB או w כאשר $w \in T^*$, ו- $B \in V^1$.

הוכחה: באינדוקציה על אורך סדרת הגזירה של α.

בסיס: $A \Rightarrow^0 \alpha$. במקרה זה בהכרח $\alpha = A$ כלומר היא אכן מהצורה wB כאשר $B = A,\ w = \epsilon \in (V \cup T)^0$.

נניח שהטענה נכונה עבור סדרת גזירות באורך i, ונוכיח עבור סדרת גזירות באורך $i + 1$:

תהי α כך ש $A \Rightarrow^{i+1} \alpha$. אפשר לרשום את סדרת הגזירה בתור $A \Rightarrow^i \beta \Rightarrow \alpha$.

מהנ"א, β מהצורה w או wB כאשר $B \in V,\ w \in T^*$.

היות וגזרנו מ-β את α, אזי β חייבת להיות מהצורה wB. מהגדרת דקדוק לינארי, בצעד האחרון ניתן להפעיל אחד מהכללים הבאים:

כלל מהצורה $B \to \sigma C$ ואז נסיק $\alpha = w\sigma C$, כנדרש,

או כלל מהצורה $B \to \sigma$ או $B \to \epsilon$. במקרה זה נקבל מילה טרמינלית $(w, w\sigma)$, כנדרש.

טענת עזר 2: $\forall w \in \Sigma^*, \forall p, q \in Q(A) : \hat{\delta}(p, w) = q \Leftrightarrow p \Rightarrow^* wq$.

לכל מילה מעל הא"ב ולכל שני מצבים באוטומט: המעבר ממצב אחד למצב אחר על ידי קריאת המילה, שקול לכלל שיכתוב.

הוכחה: (רק בכיוון אחד), באינדוקציה על $|w|$. נניח ש $\hat{\delta}(p, w) = q$:

בסיס: עבור $|w| = 0$ נקבל $w = \epsilon$, מתקיים $\hat{\delta}(p', \epsilon) = p'$ (לכל אוטומט), ואכן $p' = p'$ ע"י אפס צעדים. (תזכורת: בחרנו DFA עבור השפה L, ואם היינו לוקחים $\epsilon - NFA$ הבנייה הייתה מטפלת בזה בהתאם).

נניח כי הטענה נכונה עבור $|w| = i$ ונוכיח עבור $|w| = i + 1$. כרגיל, נסמן $w = u\sigma$. מתקיים:

$$\hat{\delta}(p, w) = \delta\big(\hat{\delta}(p, u), \sigma\big) = \delta(q', \sigma) = q$$

כאשר השוויון השני נובע מהנ"א.

מהנ"א, נקבל $p \Rightarrow^* uq'$, ומהגדרת הבנייה נקבל שבדקדוק קיים הכלל $q' \to \sigma q$ ולכן קיימת סדרת הגזירה $p \Rightarrow^* uq' \to wq$, כנדרש.

ניגש להוכיח את הטענה המרכזית של הבנייה, בהכלה דו כיוונית:

2.4 הוכחת נכונות הבנייה

כיוון ראשון: $L(A) \subseteq L(G)$: תהי $y \in L(A)$. היות ו- $\epsilon \notin L(A)$, נקבל $y \neq \epsilon$.

נסמן $y = x\sigma$ (כאשר יכול להיות ש $x = \epsilon$). נסמן $\hat{\delta}(q_0, x) = p'$.

מטענת עזר 2 מתקיים $q_0 \Rightarrow^* xp'$. בנוסף: $\hat{\delta}(q_0, y) = \delta\big(\hat{\delta}(q_0, x), \sigma\big) = \delta(p', \sigma) \in F$.

מהבנייה, היות ו- $q \in F$, קיים ב-G כלל הגזירה $p \to \sigma$. לכן, קיימת ב-G סדרת הגזירה $q_0 \Rightarrow^* xp' \Rightarrow x\sigma = y$.

כלומר, אכן $L(A) \subseteq L(G)$.

כיוון שני: $L(G) \subseteq L(A)$: תהי $w \in L(G)$, אזי קיימת סדרת גזירה באורך לפחות 1 מהצורה $q_0 \Rightarrow^* w$. (באורך לפחות 1 כי q_0 הוא משתנה, ו-w הוא טרמינל).

נרשום $q_0 \Rightarrow^* \beta \Rightarrow w$. מטענת עזר 1, בהכרח β מהצורה uB כאשר: $B \in V, u \in T^*$.

כלומר, הצעד האחרון הוא מהצורה $uB \Rightarrow w$ (כמובן ש-w טרמינלית).

כלומר, בהכרח בצעד הזה השתמשנו בכלל גזירה מהצורה $B \to \sigma$.

מהבנייה, בהכרח $\delta(B,\sigma) = q \in F$. שכן אחרת אין לנו כלל $B \to \sigma$. מטענת עזר 2 נקבל $\hat{\delta}(q_0,u) = B$ ולכן:

$$\hat{\delta}(q_0,w) = \delta\big(\hat{\delta}(q_0,u),\sigma\big) = \delta(B,\sigma) = q$$

היות ו- $q \in F$, נקבל $w \in L(A)$, כנדרש.

2.5 הכללה עבור אפסילון

ומה אם $\epsilon \in L$?

נבנה דקדוק כמו קודם, אבל כעת נוסיף את הכלל $q_0 \to \epsilon$ ונקרא לדקדוק החדש G'. נוכיח כי $L(G') = L(A)$.

הכיוון הראשון $L(A) \subseteq L(G')$ הוא פשוט. לכל $w \neq \epsilon$ הוכחנו כבר, ועבור $w = \epsilon$ יש לנו את כלל הגזירה החדש: $q_0 \to \epsilon$. ולכן $q_0 \Rightarrow \epsilon$ כלומר $\epsilon \in L(G')$.

הכיוון השני $L(G') \subseteq L(A)$ יותר קשה.

כפי שראינו לעיל, $\epsilon \in L(A), L(G')$ ולכן נותר להראות שלא הוספנו מילים חדשות ל-$L(G)$ שלא היו מקודם.

כלומר, נראה שאם $\epsilon \neq w \in L(G')$ אז $w \in L(G)$.

המצב הבעייתי היחיד הוא אם השתמשנו בכלל $q_0 \to \epsilon$ במהלך סדרת הגזירה.

בעזרת טענת עזר 1, זה יכול להתרחש רק בצעד הגזירה האחרון. (כי העלמנו את המשתנה).

נסמן את סדרת הגזירה: $q_0 \Rightarrow_G^* uq_0 \to_G u$.

כעת, מכיוון ש $q_0 \in F$ (שכן $\epsilon \in L(A)$) בהכרח, בצעד לפני האחרון התבצעה גזירה $\beta = lp \to l\sigma q_0$ (כאשר $l\sigma = u$).

אבל, היות ו-$q_0 \in F$, קיים הכלל $p \to \sigma$ ולכן כבר בצעד הזה יכולנו להשתמש בו ולהגיע אל u מבלי להשתמש בכלל $q_0 \to \epsilon$.

כלומר יכולנו לייצר את המילה גם בלי הכלל החדש, כנדרש.

זה מוכיח שבהינתן *DFA* ניתן לבנות דקדוק לינארי ימני.

2.6 בניית אוטומט בהינתן דקדוק

כעת, נראה את הבנייה של הכיוון השני, בעזרת $\epsilon - NFA$:

בהינתן $G = (V,T,S,P)$ לינארי ימני, נבנה $A_G = \left(Q = V \cup \{q_f\}, \Sigma = T, q_0 = S, \delta, \{q_f\}\right)$. כאשר δ מוגדרת:

לכל $A, B \in V$, $\sigma \in T$, אם $A \to aB \in P$ נוסיף את B ל- $\delta(A,\sigma)$.

אם $A \to \sigma \in P$, נוסיף את q_f ל- $\delta(A,\sigma)$.

אם $A \to \epsilon \in P$, נוסיף את q_f ל- $\delta(A,\epsilon)$.

כי אלו המצבים היחידים שהתווספו ל- $\delta(A,\sigma)$-ים השונים.

גם את זה אפשר להוכיח באינדוקציה.

2.7 דקדוק לינארי ימני ושמאלי

תזכורת: דקדוק רגולרי הוא המודל המוגבל ביותר. קיימים בו רק את הכללים $S \to \epsilon, A \to \sigma$, ואמרנו שבדקדוק לינארי ימני יש $A \to \sigma B$ ובדקדוק לינארי שמאלי יש $A \to B\sigma$.

בהמשך נראה שאם מאפשרים גם לינארי ימני וגם לינארי שמאלי באותו דקדוק, כבר הגדלנו את כוח המודל ועברנו לדקדוק חפשי הקשר. כעת נוכיח שדקדוק לינארי ימני שקול לדקדוק לינארי שמאלי. ונקבל שלינארי שמאלי גם שקול לשפות רגולריות.

תהי L שפה רגולרית. לכן, קיים דקדוק לינארי ימני G היוצר אותה. בגלל ש-L רגולרית, גם L^R (רוורס) רגולרית, ולכן קיים דקדוק לינארי ימני G_R שיוצר את L^R. כלומר $L^R = L(G_R)$.

נתאים ל- G_R דקדוק לינארי שמאלי G_L כך:

כל כלל מהצורה $A \to \sigma$ מ-G_R ייכנס גם אל G_L.

כל כלל מהצורה $A \to \sigma B$ מ-G_R ייכנס גם אל G_L עם היפוך: $A \to B\sigma$.

טענה: $x \in L(G_L) \Leftrightarrow x^R \in L(G_R)$. (לא נוכיח). בהגיון – אם הפכנו את הכיוון של הכללים, אז כל בנייה תקרה פשוט הפוך.

הוכחה: הכלה דו כיוונית באינדוקציה על אורך הגזירה.

נשתמש בזה כדי לסיים את ההוכחה: $L(G_L) = \left(L(G_R)\right)^R = (L^R)^R = L$, ולכן הדקדוק הלינארי השמאלי אכן גוזר את השפה L, כנדרש.

אלגוריתם הנובע מההוכחה: יהי $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$. נבנה את A^R. נמיר אותו לדקדוק לינארי ימני. בדקדוק נחליף כל $A \to \sigma B$ ב- $A \to B\sigma$, וכך יצרנו דקדוק לינארי שמאלי לשפה.