שקילות מודלים

שני מודלים חישוביים A, B ייקראו שקולים אם:

לכל $L \subseteq \Sigma^*$, קיים מודל מסוג A שמכריע את L אמ"מ קיים מודל מסוג B שמכריע את L.

בדרך כלל כדי להוכיח, ניקח מודל מסוג A ונשנה אותו כך שיהיה מסוג B (ועדיין יכריע את אותה שפה), ולהיפך.

כדי להפריך, נמצא שפה שסוג אחד יכול להכריע והסוג השני לא. לפעמים נשתמש בעוצמות.

תרגיל 1

מכונת טיורינג עם אתחול (RTM – $Reset\ TM$) זהה למ"ט, אבל בתזוזות של הראש אין שמאלה – אפשר רק לחזור להתחלה. (S, R, res).

מודל זה שקול למ"ט – נוכיח:

<u>כיוון ראשון</u>: בהינתן RTM, נבנה TM שקול:

כל הפקודות שיש בהן S או R, נשארות אותו דבר.

אם יש פקודה עם res שעוברת למצב q_i (ב-RTM), נעביר למצב $q_{i,res}$ שהולך שמאלה עד ההתחלה ואז עובר למצב q_i.

פורמלית: בהינתן RTM עם קבוצת מצבים Q ופונקציית מעברים δ, נגדיר TM. נוסיף את המצבים המאתחלים:

$$Q' \coloneqq Q \cup \{q_{res} : q \in Q\}$$

אם זזים ימינה או נשארים, לא צריך לשנות כלום:

$$\delta(q,\sigma) \coloneqq (\hat{q},\hat{\sigma},R) \Longrightarrow \delta'(q,\sigma) \coloneqq (\hat{q},\hat{\sigma},R), \qquad \delta(q,\sigma) \coloneqq (\hat{q},\hat{\sigma},S) \Longrightarrow \delta'(q,\sigma) \coloneqq (\hat{q},\hat{\sigma},S)$$

אם מאתחלים:

$$\delta(q,\sigma) \coloneqq (\hat{q},\hat{\sigma},res) \Longrightarrow \delta'(q,\sigma) \coloneqq (\hat{q}_{res},\hat{\sigma},L)$$

$$\delta'(\hat{q}_{res},\forall) \coloneqq (\hat{q}_{res},\forall,L), \qquad \delta'(\hat{q}_{res},start) \coloneqq (\hat{q},start,S)$$

<u>כיוון שני</u>: בהינתן TM, נבנה RTM שקול:

כל הפקודות שיש בהן S או R, נשארות אותו דבר. אם יש תזוזה L, נצטרך דרך לחזור להתחלה ואז למצוא את התא לפני הנוכחי.

- אם יש תזוזה שמאלה, נסמן את התא הנוכחי ב-**, נחזור להתחלה, וניכנס למצב "מחפשים את ה-**".
  $$\delta(q,\sigma) \coloneqq (\hat{q},\hat{\sigma},L) \Longrightarrow \delta'(q,\sigma) \coloneqq (\hat{q}_{start1},\hat{\sigma}^{**},res)$$
- אם התא הנוכחי מסומן ב-**, נמחק את הסימון ונחזור למצב המקורי: $\delta'(\hat{q}_{start1},\forall^{**}) \coloneqq (\hat{q},\forall,S)$.
- אם התא הנוכחי לא מסומן, נסמן אותו ב-* ונעבור למצב "בדיקה אם התא הבא הוא **". $\delta'(\hat{q}_{start1},\forall) \coloneqq (\hat{q}_{start2},\forall^*,R)$.
- אם התא הבא הוא **, נמחק את הסימון, נלך להתחלה, ונעבור למצב "מחפשים את ה-* ומסיימים". $\delta'(\hat{q}_{start2},\forall^{**}) \coloneqq (\hat{q}_{finish},\forall,res)$.
  - במצב הזה, אם תא לא מסומן פשוט נמשיך ימינה: $\delta'(\hat{q}_{finish},\forall) \coloneqq (\hat{q}_{finish},\forall,R)$.
  - אם תא כן מסומן ב-*, נמחק את הסימון ונחזור למצב המקורי: $\delta'(\hat{q}_{finish},\forall^*) \coloneqq (\hat{q},\forall,S)$.
- אם התא הבא לא **, נסמן אותו ב-*, נחזור להתחלה וניכנס למצב "מחפשים ומוחקים את הסימון * הראשון שרואים":
  $$\delta'(\hat{q}_{start2},\forall) \coloneqq (\hat{q}_{start3},\forall^*,res)$$
  - במצב הזה, הולכים ימינה עד שמוצאים *. $\delta'(\hat{q}_{start3},\forall) \coloneqq (\hat{q}_{start3},\forall,R)$.
  - אם מצאנו *, נמחק את הסימון, נעבור ימינה וניכנס למצב "צריך לבדוק אם התא הבא הוא אחד לפני **":
    $$\delta'(\hat{q}_{start3},\forall^*) \coloneqq (\hat{q}_{check2},\forall,R)$$
  - אנחנו מצפים שנהיה במקום שמסומן *. נעבור ימינה וניכנס למצב "בדיקה אם התא הבא הוא **":
    $$\delta'(\hat{q}_{check2},\forall^*) \coloneqq (\hat{q}_{check3},\forall^*,R)$$
  - אם התא הבא הוא **, נמחק את הסימון, נלך להתחלה, ונעבור למצב "מחפשים את ה-* ומסיימים".
    $$\delta'(\hat{q}_{check3},\forall^{**}) \coloneqq (\hat{q}_{finish},\forall,res)$$
  - אחרת, נסמן את התא הזה ב-*, נחזור להתחלה, ונחזור למצב "מחפשים ומוחקים את הסימון * הראשון שרואים":
    $$\delta'(\hat{q}_{check3},\forall) \coloneqq (\hat{q}_{start3},\forall^*,res)$$

במצגת עושים $\delta'(\hat{q}_{start3},\forall^*) \coloneqq (\hat{q}_{check1},\forall^*,S),\ \delta'(\hat{q}_{check1},\forall^*) \coloneqq (\hat{q}_{check2},\forall,R)$. המצב q_{check1} לא משמש לשום דבר אחר, אז אפשר פשוט לצמצם את המעבר: $\delta'(\hat{q}_{start3},\forall^*) \coloneqq (\hat{q}_{check2},\forall,R)$.

תרגיל 2

יהי מודל מ"ט מוגבל ($BTM – Bounded\ TM$) – כמו מ"ט רגיל, אבל $|Q| + |\Gamma| \leq 100$. הוכיחו או הפריכו: BTM שקול ל-TM.

נפריך: כל מכונה מוגדרת באופן יחיד ע"י Γ, Q, δ (ניזכר בקידודים).

ו-δ מוגדרת ע"י $\delta: Q' \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}$, כלומר היא חסומה בגודל של Γ, Q.

כלומר, עבור $|Q| + |\Gamma| \leq 100$, יש מספר סופי של מכונות BTM.

ויש מספר אינסופי ($\aleph_0$) של שפות ש-TM יכול להכריע.

תרגיל 3

הוכיחו או הפריכו: אסל"ד שקול למ"ט.

נפריך: ראינו באוטומטים שאין אסל"ד שמכריע את השפה $\{w \in \{0,1\}^* : \#_0(w) = \#_1(w)\}$. מנגד, בתרגול 1 ראינו מ"ט עבור אותה שפה.

מ"ט אוניברסלית – UTM

$$U(\langle M, x \rangle) \coloneqq M(x)$$

באופן כללי, אנחנו יכולים לבנות מכונה M' שיכולה לסמלץ כל מכונה שרירותית M.

- אם אנחנו יודעים את המבנה של M, אפשר להעתיק את המבנה שלה לתוך המבנה של M'.
- אחרת, נשתמש ב-U שתקבל את M בתור קלט.

אם מעתיקים את המבנה של מכונה, מקבלים את אותו זמן ריצה. אם מסמלצים, אז זמן הריצה יהיה לפחות $f(M)\log\big(f(M)\big)$.

סמלוץ זה לא רק קופסה שחורה: אפשר:

- לסמלץ כמות מוגבלת של תעדים,
- לקבל מתוך הסמלוץ פרטים כמו בדיקה לאיזה אינדקס הגענו,
- לעצור סמלוץ ולהמשיך אח"כ, ועוד.

מחלקות חישוביות

האם השפות הבאות ב-RE? ב-R?

א. $\{w \in \{0,1\}^* : \#_0(w) = \#_1(w)\}$

ראינו שיש מכונה שמכריעה (תמיד עוצרת) אז היא ב-R.

ב. שפת הגרפים הקשירים.

הבדיקה תלויה רק בייצוג של הגרף – $\langle G \rangle$. אפשר לבדוק את זה ע"י DFS מקודקוד שרירותי, ולבדוק אם אפשר לכל קודקוד יש זמן הגעה.
הבדיקה קורית בזמן סופי (ופולינומי) אז המכונה שעושה את זה תמיד עוצרת. אז השפה ב-R.

ג. SAT – נוסחאות בוליאניות ספיקות.

לכל נוסחה, אפשר לעבור על כל ה- 2^n השמות ולבדוק כל אחת. זמן ריצה אקספוננציאלי, אבל סופי. אז השפה ב-R.
אפשר גם עם מכונה לא דטרמיניסטית, לנחש השמה מספקת ולוודא.

ד. $\{\langle M, x \rangle \mid M(x) = 1\}$.

זה בדיוק A_{TM}, והיא ב-RE ולא ב-R.

ה. שפת המכונות שבהינתן קלט 0, עוצרות תוך לכל היותר 10 צעדים.

אפשר לסמלץ את ההרצה של המכונה על 0, ע"י U, ולספור צעדים. אם עברנו 10 צעדים, נחזיר 0.
מכיוון שהבדיקה חסומה בצעדים, היא סופית בזמן ריצה. אז תמיד נקבל תשובה 0 או 1, אז השפה ב-R.

ו. השפות $\Sigma^*, \emptyset$.

מכונה שמייד מקבלת, או מייד דוחה – תמיד נקבל תשובה. אז הן ב-R.

ז. $\{\langle M\rangle \mid \exists x : M(x) = 1\}$ – כל המכונות שקיימת מילה שהיא מקבלת.

היא ב-RE, כי בהינתן מכונה אפשר להריץ ב-*dovetailing* ולקבל 1 אם יש מילה שהיא מקבלת. אבל אם היא לא מקבלת אף מילה, אז אף פעם לא נסיים לבדוק. אז היא לא ב-R.

Dovetailing – הרצה מבוקרת: באיטרציה ה-i, נריץ את כל המילים באורך i, למשך i צעדים (או עד שהמכונה עוצרת).

אפשר גם באופן לא דטרמיניסטי – ננחש x ונבדוק אותו.

תכונות סגור של R

R סגורה לפעולות: משלים, איחוד, חיתוך, שרשור, איטרציה, היפוך (רוורס).

משלים, איחוד, חיתוך, שרשור הוכחנו בהרצאה.

<u>איטרציה</u>: דומה להוכחה של שרשור. בהינתן w, נעשה הרצה מבוקרת:

לכל חלוקה של w לתתי-מחרוזות (יש מספר סופי של חלוקות) נבדוק כל תת-מחרוזת ע"י סמלוץ של מכונה M שמכריעה את L.

אם כולן מקבלות, נקבל. אחרת, נדחה. מכיוון שהסמלוץ של M תמיד מחזיר תשובה (כי L ב-R), גם פה תמיד נקבל תשובה.

אפשר גם ע"י מכונה אי-דטרמיניסטית: ננחש את החלוקה באופן לא דטרמיניסטי, ונבדוק כל חלק.

<u>רוורס</u>: כל קלט, נהפוך ואז נבדוק ע"י סמלוץ של מכונה שמכריעה את L.

תכונות סגור של RE

RE סגורה לאותן פעולות, חוץ ממשלים.

איחוד, חיתוך, שרשור הוכחנו בהרצאה.

<u>רוורס</u>: כל קלט, נהפוך ואז נבדוק ע"י סמלוץ של מכונה שמקבלת את L. אם $x^R \in L$ אז $x \in L^R$. ואם לא, אז או שנקבל 0 או שלא נעצור.

<u>איטרציה</u>: כמו ההוכחה של סגירות עבור R. ניחוש של החלוקה והרצה מבוקרת.

נוכיח ש-RE לא סגורה למשלים, ע"י דוגמה נגדית. אנחנו יודעים ש:

$$A_{TM} \in RE \setminus R, \qquad \overline{A_{TM}} \in coRE \setminus R$$

אנחנו יודעים ש- $RE \cap coRE = R$, אז אם $\overline{A_{TM}} \in RE$ זה אומר ש- $\overline{A_{TM}} \in coRE \cap RE$, כלומר $\overline{A_{TM}} \in R$, סתירה.

<u>חיסור</u>: RE לא סגורה לחיסור. נוכיח ע"י דוגמה נגדית:

$$A_{TM} \in RE, \qquad \Sigma^* \in RE, \qquad \Sigma^* \setminus A_{TM} = \overline{A_{TM}} \notin RE$$

חישוביות (קיץ תשפ"ו) – תרגול 2

נסווג את השפות הבאות למחלקות: $\overline{RE \cup coRE}$,$coRE$,RE ,R.

באופן כללי:

RE – אם לכל קלט, אני יכול לקבל תשובה 1 תמיד אם הקלט בשפה. אם טוענים שקלט כלשהו בשפה, האם אני יכול לוודא את זה?

$corRE$ – אם אני תמיד יכול לקבל תשובה 0 תמיד אם הקלט לא בשפה. אם טוענים שקלט כלשהו לא בשפה, האם אני יכול לוודא את זה?

א. $L_1 \coloneqq \{M \mid M(\langle M \rangle) = \infty\}$

השפה ב-$coRE$, כי לכל קלט שלא בשפה – כלומר $M(\langle M \rangle)$ תמיד עוצרת – תמיד נוכל לקבל תשובה 0.

ב. $L_2 \coloneqq \{M : |L(M)| \geq 42\}$

בהרצה מבוקרת, נבדוק מילים עד שנקבל לפחות 42 מילים. אז השפה ב-RE. היא לא ב-$coRE$, כי אם אין 42 מילים, לא נוכל לדעת את זה.

ג. $L_3 \coloneqq \{(M, M') : M \ and \ M' \ are \ DTM's, and \ M(\varepsilon) = 1, M'(\varepsilon) = 0\}$

מהנתון, שתי המכונות תמיד עוצרות בהינתן ε. נריץ את $M(\varepsilon)$ עד שהיא מקבלת (אם היא דוחה, נדחה).

נריץ את $M'(\varepsilon)$ עד שהיא דוחה (אם היא מקבלת, נדחה). ונקבל. אז השפה ב-RE.

ד. $SHALT \coloneqq \{M \mid M \ halts \ on \ \varepsilon\}$.

השפה ב-RE (כי אם מכונה עוצרת בהינתן ε, אפשר לוודא את זה) אבל לא ב-R. הוכחה: נב"ש שכן, אז קיימת מכונה S שמכריעה אותה.

אז בהינתן $\langle M, x \rangle$, נבנה את M_x – לכל קלט, היא מריצה את $M(x)$. ואז, אם נריץ את $S(\langle M_x \rangle)$, אם היא תחזיר 1 זה אומר ש- $M(x)$ עוצרת.

ואם היא תחזיר 0 זה אומר ש- $M(x)$ לא עוצרת. כלומר זה מכריע את $HALT$, סתירה לכך ש- $HALT \notin R$.