שאלה 1

$$R, RE, coRE, \overline{RE \cup coRE}$$

סעיף ב

$$L_2 = \{M : M \text{ } is \text{ } a \text{ } TM \text{ } s.t. \{\varepsilon, 0, 1110\} \subseteq L(M) \text{ } and \text{ } 11111 \notin L(M)\}$$

לא ב-RE כי גם אם $11111 \notin L(M)$, אולי $M(11111) = \infty$ אז לא נדע. ולא ב-$coRE$ כי אם $M(\varepsilon) = \infty$ אז גם לא נדע. פורמלית:

עם משפט רייס: התכונה היא תכונה של שפה (לפי הגדרה), וגם אם יש שתי מכונות שמקבלות את אותה שפה, אז או שבשתיהן התנאי מתקיים או שלא.

התכונה לא טריוויאלית: מכונה שמקבלת את 11111 לא מקיימת, ומכונה שמקבלת בדיוק את $\{\varepsilon, 0, 1110\}$ מקיימת.

בנוסף, $\emptyset$ לא מקיימת (כי יש מילים בשפה) וגם Σ^* לא מקיימת (כי יש מילה שלא בשפה). אז ממשפט רייס, השפה לא ב-RE או $coRE$.

אפשר גם רדוקציה מ- $\overline{SHALT}$: בהינתן M, נייצר את N כך שאם $M(\varepsilon)$ לא עוצר אז $N \in L_2$. N על קלט y:

1. אם $y \in \{\varepsilon, 0, 1110\}$, מקבל.
2. אחרת, מריץ את $M(\varepsilon)$ ואז מקבל.

$$N(\varepsilon) \in \overline{SHALT} \Longrightarrow N(\varepsilon) = \infty \Longrightarrow \forall y \notin \{\varepsilon, 0, 1110\}: N(y) = \infty \Longrightarrow L(N) = \{\varepsilon, 0, 1110\} \Longrightarrow N \in L_2$$

$$N(\varepsilon) \notin \overline{SHALT} \Longrightarrow N(\varepsilon) \neq \infty \Longrightarrow \forall y: N(y) \neq \infty \Longrightarrow L(N) = \Sigma^* \Longrightarrow N \notin L_2$$

ורדוקציה מ-$SHALT$:

בהינתן M, נייצר את N כך שאם $M(\varepsilon)$ עוצר אז $N \in L_2$. N על קלט y:

1. אם $y \in \{\varepsilon, 0, 1110\}$, מריץ את $M(\varepsilon)$ ומקבל.
2. אחרת, דוחה.

$$N(\varepsilon) \in SHALT \Longrightarrow N(\varepsilon) \neq \infty \Longrightarrow \forall y: N(y) \neq \infty \Longrightarrow L(N) = \{\varepsilon, 0, 1110\} \Longrightarrow N \in L_2$$

$$N(\varepsilon) \notin SHALT \Longrightarrow N(\varepsilon) = \infty \Longrightarrow \forall y: N(y) = \infty \Longrightarrow L(N) = \emptyset \Longrightarrow N \notin L_2$$

סעיף ג

$$L_3 = \{(A, B, k) : A, B \text{ } are \text{ } TMs \text{ } and \text{ } |L(A) \cap L(B)| \geq k^3\}$$

אינטואיטיבית: ב-RE, כי אם מקבלים קלט בשפה אם נרוץ בהרצה מבוקרת נמצא מספיק מילים.

לא ב-$coRE$, כי גם בהרצה מבוקרת, לא נוכל לדעת אם עוד לא מצאנו מספיק מילים כדי לדחות. נוכיח ע"י רדוקציה מ-$SHALT$. בהינתן M, נייצר את A שעל כל קלט, מריצה את $M(\varepsilon)$ ואז מקבלת. אם $M(\varepsilon) \in SHALT$ אז A תמיד עוצרת והשפה שלה היא Σ^*. נחזיר את $(A, A, 1)$.

שאלה 2

$$P, NP, coNP, \overline{NP \cup coNP}$$

סעיף א

$$L_4 = \left\{\varphi : \varphi \text{ } is \text{ } a \text{ } formula \text{ } of \text{ } n \text{ } variables \text{ } and > \frac{5}{8} \text{ } of \text{ } assignments \text{ } are \text{ } satisfying\right\}$$

צריך לבדוק $\frac{5}{8} \cdot 2^n = O(2^n)$ השמות כדי לבדוק שייכות ל-L_4, ו- $\frac{3}{8} \cdot 2^n = O(2^n)$ השמות כדי לבדוק שייכות ל- $\overline{L_4}$. אז $L_4 \in \overline{NP \cup coNP}$.

$$L_5 = \left\{\varphi 1^{2^n} : \varphi \text{ } is \text{ } a \text{ } formula \text{ } of \text{ } n \text{ } variables \text{ } and > \frac{7}{8} \text{ } of \text{ } assignments \text{ } are \text{ } satisfying\right\}$$

נשים לב שהקלט הוא בגודל $O(2^n)$. בדיקה של כל ההשמות דורשת זמן $O(2^n)$, שזה $O(m)$ כאשר m הוא גודל הקלט. אז $L_5 \in P$.

סעיף ב

מחלקת $coPP$: שפות שיש להן PTM שרצה בזמן פולינומי כך שלכל x:

$$x \in L \Longrightarrow P[M(x) = 1] \geq 1/2\,, \qquad x \notin L \Longrightarrow P[M(x) = 1] < 1/2$$

לפי הגדרה, $BPP \subseteq coPP$. ומכיוון ש- $P \subseteq coRP \subseteq BPP$, הקבל שהכל מוכל ב-$coPP$.

שאלה 3

סעיף ב

אם $P = NP$ אז $NP = coNP$. הוכחה:

נניח $P = NP$. אז:

$$L \in NP \Leftrightarrow^{א} L \in P \Leftrightarrow^{ב} \bar{L} \in P \Leftrightarrow^{א} \bar{L} \in NP \Leftrightarrow^{ג} L \in coNP$$

א. בהנחה ש- $P = NP$.
ב. סגירות P למשלים.
ג. הגדרת $coNP$.

שאלה 4

סעיף א

נוכיח שהמודל שקול ל-TM: בהינתן מ"ט, נייצר מ"ט מהמודל החדש: נוסיף לא"ב $\{\sigma_1, \dots \sigma_n\}$ את הקבוצה $\{\sigma_1', \dots, \sigma_n'\}$. כל מעבר שבו קוראים σ_i וכותבים σ_j נחליף בשני מעברים: אם קוראים σ_i כותבים σ_j', ואם קוראים σ_i' כותבים σ_j.

ומ"ט מהסוג הזה הוא בפרט מ"ט רגיל.

סעיף ב

מכיוון שהמודל החדש שקול למ"ט רגיל, הדרישה היא בעצם:

$$L = \{M : there\ exists\ a\ TM\ M'\ s.t.\ L(M) \subset L(M')\}$$

זו תכונה לא טריוויאלית (השפה הריקה מקיימת, Σ^* לא מקיימת) והיא תכונה של שפה, ו-Σ^* לא מקיימת את לפי רייס המורחב $L \notin RE$.

.