הרצאה 9 – יום רביעי 20.8

סיבוכיות מקום

יהי M, DTM שעוצר על כל קלט, ותהי פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. נאמר שיש ל-$M$ סיבוכיות מקום $f(n)$, או ש-M רצה במקום $f(n)$, אם מספר התאים ש-M קורא במהלך ריצה על כל קלט באורך n הוא לכל היותר $f(n)$.

עבור NTM, נגדיר את סיבוכיות המקום להיות המספר המקסימלי של תאים שנסרקים בכל ענף של עץ החישוב.

לגבי הקריאה של הקלט עצמו, לפעמים זה זניח (אם המקום הנדרש גדול מאורך הקלט) ולפעמים לא (אם המקום הנדרש קטן מאורך הקלט).

מחלקות סיבוכיות מקום, באופן כללי:

$$SPACE\big(f(n)\big) \coloneqq \big\{L \mid L \text{ is a language decided by an } O\big(f(n)\big)\text{-space } DTM\big\}$$

$$NSPACE\big(f(n)\big) \coloneqq \big\{L \mid L \text{ is a language decided by an } O\big(f(n)\big)\text{-space } NTM\big\}$$

דוגמה: $SAT \in SPACE(n)$

בעיית SAT דורשת זמן מעריכי, אבל מקום לינארי. כמו בסיבוכיות זמן, נראה את זה ע"י תיאור אלגוריתם שעובד במקום n:

נעבור על כל ההשמות וכל פעם נבדוק אם הנוסחה מסופקת. זה סיבוכיות זמן $EXPTIME$ אבל $O(n)$ בסיבוכיות מקום. בכל פעם צריך לשמור רק את ההשמה הנוכחית (אפשר בתור מחרוזת בוליאנית באורך מספר המשתנים) ולעדכן אותה (אפשר ע"י פעולת $+1$, לא דורשת עוד מקום, ולינארית בזמן).

משפט סביץ' – *Savitch's theorem*

לכל פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ כך ש- $f(n)\geq n$, מתקיים $NSPACE\big(f(n)\big)\subseteq SPACE\big(f^2(n)\big)$. כלומר, המעבר מ-$NTM$ ל-DTM הוא פולינומי (ריבועי).

<u>הוכחה</u>: יהי NTM N שרץ במקום $f(n)$ ותהי שפה $L\coloneqq L(N)$.

נעדכן את N כך שבקבלה, הוא מוחק את הסרט ומחזיר את הראש להתחלה. זה נותן לנו שיש בפועל קונפיגורציה מקבלת יחידה ($c_{accept}=q_Y$). זה לא משפיע על סיבוכיות המקום, כי זה רק צריך לעבור על המקסימום מבין גודל הקלט ומספר התאים שנכתבו.

נבנה DTM שמגדיר האם N יכול להגיע מ- c_1 ל-c_2 תוך t צעדים:

M_{yield} על קלט (c_1,c_2,t):

1. אם $t=1$ אז נבדוק ישירות האם $c_1\to c_2$. אם כן, נקבל. אחרת, נדחה.
2. אם $t>1$, אז לכל קונפיגורציה c_i:
   a. נריץ את $M_{yield}(c_1,c_i,t/2)$ ואת $M_{yield}(c_i,c_2,t/2)$. כל פעם שמבצעים את שלב b זה דורש מקום $f(n)$.
   b. אם שניהם מקבלים, נקבל.
3. אחרת, נדחה.

עכשיו, כדי לסמלץ את $N(x)$, נריץ את $M_{yield}\big(c_{start},c_{accept},2^{df(n)}\big)$, כאשר $c_{start}=(q_{start},x)$ ו-d הוא קבוע כך ש- $2^{df(n)}$ הוא חסם עליון לזמן הריצה של N על כל ענף.

מספר הקריאות הרקורסיביות הוא $\log t$, אז עבור ההרצה שלנו זה $\log O\big(2^{df(n)}\big)=O\big(df(n)\big)=O\big(f(n)\big)$ קריאות, שכל אחת משתמשת ב- $f(n)$ מקום. בסה"כ סיבוכיות מקום $O\big(f^2(n)\big)$. כלומר, המעבר מ-NTM ל-DTM דורש במקרה הגרוע הגדלה ריבועית של מקום.

המחלקות *PSPACE, NPSPACE*

$$PSPACE \coloneqq \bigcup_k SPACE(n^k),\qquad NPSPACE\coloneqq\bigcup_k NSPACE(n^k)$$

$PSPACE$ זו מחלקת השפות שמוכרעות ע"י DTM במקום פולינומי. $NPSPACE$ זו מחלקת השפות שמוכרעות ע"י NTM במקום פולינומי. משפט סביץ' אומר לנו שהם שווים: $PSPACE=NPSPACE$, כי המעבר מ-NTM ל-DTM דורש רק שינוי ריבועי במקום (ולא מעריכי כמו שהיה בסיבוכיות זמן).

בגלל שכל מעבר על תא נחשב צעד, מתקיים $P\subseteq PSPACE$. אם מכונה פועלת ב-k צעדים, היא לא יכולה לבקר ביותר מ-k תאים.

באופן דומה, המקום של NTM חסום באורך הענף הארוך, אז $NP\subseteq NPSPACE$.

ואם TM משתמש במקום $f(n)$, אז מספר הקונפיגורציות הוא לכל היותר $f(n)2^{O(f(n))}$. בסה"כ:

$$P \subseteq NP \subseteq PSPACE = NPSPACE \subseteq EXPTIME$$

שלמות *PSPACE – PSPACE-completeness*

שפה L תיקרא *PSPACE-hard* אם לכל $L' \in PSPACE$ מתקיים $L' \leq_p L$. (רדוקציה פולינומית בזמן! כי פולינומיות בזמן גוררת פולינומיות מקום).
והיא תיקרא *PSPACE-complete* אם בנוסף היא שייכת ל-*PSPACE*.

בעיית *TQBF – True Quantified Boolean Formula*

ניזכר **בכמתים** – *quantifiers*. $\forall$ – לכל, $\exists$ – קיים. המשתנה שמופיע יחד עם הכמת נקרא "קשור" (*bound*) לכמת, והנוסחה שיש בסוגריים אחרי הכמת נקראים התחום (*scope*) של הכמת. לדוגמה:

$$\varphi = \forall x\, \exists y\, \underbrace{[(x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)]}_{scope\ of\ \forall x, \exists y}$$

המשמעות של הנוסחה היא: **לכל** ערך שנבחר ל- x (T או F, 0 או 1), **קיים** ערך שאפשר לבחור ל- y, כך שהנוסחה φ תקבל ערך אמת.

אם כל משתנה בנוסחה מופיע בתחום של כמת כלשהו, נאמר שהנוסחה היא *fully quantified* (מכומתת).

$$TQBF \coloneqq \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi \text{ is a true fully quantified boolean formula}\}$$

לדוגמה: $\varphi_1 = \forall x\, \exists y\, [(x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)] \in TQBF$.

אם $x = 0$ אז נבחר $y = 1$ ואז נקבל $(0 \vee 1) \wedge (1 \vee 0) = 1$. אם $x = 1$ אז נבחר $y = 0$ ואז $(1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1) = 1$.

מנגד, $\varphi_2 = \exists y\, \forall x\, [(x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)] \notin TQBF$.

כי אם $y = 0$ ונבחר $x = 0$, אז נקבל $(0 \vee 0) \wedge (1 \vee 1) = 0$. ואם $y = 1$ ונבחר $x = 1$ אז $(1 \vee 1) \wedge (0 \vee 0) = 0$.

הסדר של הכמתים משנה! (וואו, זוכרים לוגיקה? איכס).

TQBF היא *PSPACE-complete*

נוכיח בשני חלקים. ראשית, $TQBF \in PSPACE$. נוכיח ע"י תיאור *DTM* שמכריע את השפה בסיבוכיות מקום פולינומית:

M על קלט φ:

1. אם אין ל-φ כמתים (כלומר כל משתנה כבר קבוע), אז נחשב את הנוסחה ונחזיר את מה שיצא.
2. אם $\varphi = \exists x\, \varphi'$ (כלומר, הכמת הראשון הוא $\exists$. φ' זה המשך הנוסחה) אז נקרא ל- $M(\varphi')$ פעמיים: עם $x = 0$ ועם $x = 1$. אם אחד מהם מקבל אז נקבל. אחרת, נדחה.
3. אם $\varphi = \forall x\, \varphi'$ אז נקרא ל- $M(\varphi')$ פעמיים: עם $x = 0$ ועם $x = 1$. אם שניהם מקבלים אז נקבל. אחרת, נדחה.

עומק הרקורסיה הוא לכל היותר מספר המשתנים, ובכל פעם צריך לבצע את החישוב ($O(n)$) ולשמור רק את הערך שיצא – 0 או 1. אז:

$$TQBF \in SPACE(n) \subseteq PSPACE$$

שנית, נוכיח ש-*TQBF* היא *PSPACE-hard*. תהי שפה $L \in SPACE\left(n^k\right)$ שמוכרעת ע"י *DTM*, M. נתאר רדוקציה $L \leq_p TQBF$.

בהינתן x, נייצר φ_x: ראשית, נשים לב שמספר הקונפיגורציות וזמן הריצה חסומים ב- $2^{O(n^k)}$.

רעיון הרדוקציה: נייצר משתנה לכל קונפיגורציה, כך ש- $\varphi = T$ אמ"מ אפשר להגיע מהקונפיגורציה ההתחלתית לקונפיגורציה מקבלת ב-t צעדים. כלומר:

$\varphi_{c_1,c_2,1} = 1$ אם $c_1 \rightarrow c_2$, ואחרת 0. באופן כללי:

$$\varphi_{c_{start},c_{accept},t} = \exists c_i \left[\varphi_{c_{start},c_i,t/2} \wedge \varphi_{c_i,c_{accept},t/2}\right] = \exists c_1 \dots \exists c_t \left[\varphi_{c_{start},c_1,1} \wedge \varphi_{c_1,c_2,1} \wedge \dots \wedge \varphi_{c_t,c_{accept},1}\right]$$

הבעיה היא, שגודל הנוסחה הוא $2^{O(n^k)}$. ואנחנו צריכים רדוקציה פולינומית, ושהמקום יהיה פולינומי. אז נשנה קצת את הנוסחה שאנחנו בונים:

חישוביות (קיץ תשפ"ו) – הרצאה 9 – סיבוכיות מקום, PSPACE, NPSPACE, משפט סביץ', שלמות PSPACE

$$\varphi_{c_{start},c_{accept},t} = \exists c_i \left[\varphi_{c_{start},c_i,t/2} \wedge \varphi_{c_i,c_{accept},t/2}\right] = \exists c_i\ \forall (c_1,c_2) \in \{(c_{start},c_i),(c_i,c_{accept})\}\left[\varphi_{c_1,c_2,t/2}\right]$$

עומק הרקורסיה: $\log 2^{O(n^k)} = O(n^k)$. מקום בכל קריאה: 3 קונפיגורציות, $O(n^k)$. גודל הנוסחה: $O(n^k)O(n^k) = O(n^{2k})$, פולינומי.

שיטות משחק

אפשר לחשוב על הבעיה בתור משחק: שחקן A בוחר את ההשמות למשתנים עם כמת $\forall$, שחקן E בוחר את ההשמות למשתנים עם כמת $\exists$. סדר הבחירות הוא לפי סדר הופעת הכמתים בנוסחה. A רוצה שהנוסחה תצא 0, E רוצה שהיא תצא 1. בדוגמאות שראינו למעלה, E ניצח ב- φ_1, ו-A ניצח ב- φ_2. נאמר שיש לשחקן אסטרטגיה מנצחת (*winning strategy*) אם השחקן הזה מנצח בהנחה ששני השחקנים משחקים בצורה אופטימלית. נפרמל את זה ע"י השפה:

$$FORMULA\text{-}GAME \coloneqq \{\varphi \mid player\ E\ has\ a\ winning\ strategy\ for\ \varphi\}$$

<u>טענה</u>: $FORMULA\text{-}GAME \in PSPACE\text{-}complete$.

<u>הוכחה</u>: אם יש ל-E אסטרטגיה מנצחת, זה אומר שלא משנה מה A קובע למשתנים שלו, הנוסחה יוצאת אמת. כלומר:

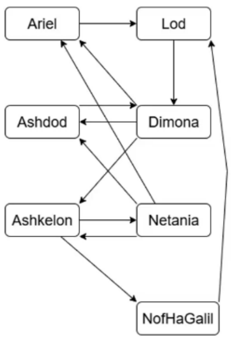
$$E\ has\ a\ winning\ strategy\ in\ \varphi \Leftrightarrow \varphi \in TQBF$$

זו בעצם רדוקציה $FG \le_p TQBF$, ומכיוון ש-*TQBF* היא *PSPACE-complete*, גם *FG* היא *PSPACE-complete*.

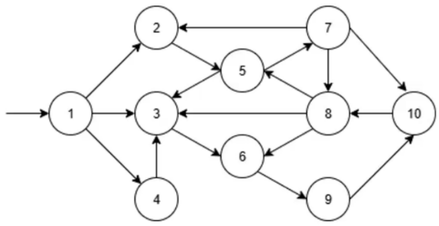
הרצאה 10 – יום ראשון 24.8

"משחק גיאוגרפיה מוכלל"

שחקן 1 מתחיל עם שם של עיר. שחקן 2 צריך לתת שם של עיר שמתחיל באות האחרונה של העיר הקודמת. שחקן 1 כנ"ל... עד שאין עוד ערים שאפשר לתת. באיור, רואים רשימה של הערים והחיבורים האפשריים ביניהם. משחק הוא בעצם מסלול פשוט בגרף.



אם יש לנו ייצוג של גרף, אפשר להתעלם משמות הערים ולהתייחס רק לצלעות. זו הגרסה המוכללת:



לשחקן 1 יש אסטרטגיה מנצחת: אם הוא יבחר בצלע (1,4), שחקן 2 חייב לבחור לעבור ל-3, ואז שחקן 1 חייב לעבור ל-6, וכו':

$$1_{start} \to 4_A \to 3_B \to 6_A \to 9_B \to 10_A \to 8_B \to 5_A \to 7_B \to 2_A \to \phi$$

לעומת זאת, אם שחקן 1 הולך ל-3, אז לשחקן 2 יש אסטרטגיה מנצחת. במקרה הזה, אחרי הבחירה הראשונה בעצם לא היו בחירות. ניזכר שזה לא תמיד ככה – אפשרי שבמשחק, גם באסטרטגיה מנצחת, יש בכל שלב כמה אפשרויות. אסטרטגיה מנצחת היא אסטרטגיה שגורמת לשחקן לנצח אם שני השחקנים משחקים בצורה אופטימלית.

נגדיר את השפה:

$$GG \coloneqq \{\langle G,b\rangle :\ player\ 1\ has\ a\ winning\ strategy\ for\ GG\ game\ on\ graph\ G\ starting\ at\ node\ b\}$$

היא *PSPACE-complete*. ראשית, נוכיח ש- $GG \in PSPACE$ – נבנה אלגוריתם M שמכריע את GG במקום פולינומי:

בהינתן גרף G עם m קודקודים, נבצע $M(G,b)$:

1. אם $\deg_G(b) = 0$ אז נדחה.
2. נגדיר $G' \leftarrow G - b$ (נסיר את b וכל הצלעות המחוברות אליו).
3. לכל קודקוד ש-b מצביע עליו: $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$:
   a. נבצע את $M(G', b_i)$.
4. אם כולם מקבלים, אז נדחה – כי זה אומר שיש אסטרטגיה מנצחת מאחד השכנים של b, כלומר אסטרטגיה מנצחת עבור שחקן 2. אחרת, נקבל.

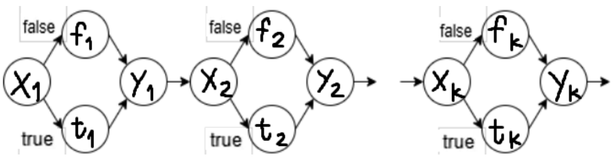
כדי לשמור את כל שכבות הרקורסיה, צריך עד m שכבות (אחת לכל קודקוד ב-G) ובכל שכבה יש קודקוד יחיד – סה"כ מקום לינארי ב- m.

כדי להוכיח שהשפה *PSPACE-hard*, נעשה רדוקציה פולינומית מ- *Formula Game*, שהיא שפה *PSH*. בהינתן נוסחת *QBF* φ, נבנה משחק *GG*:

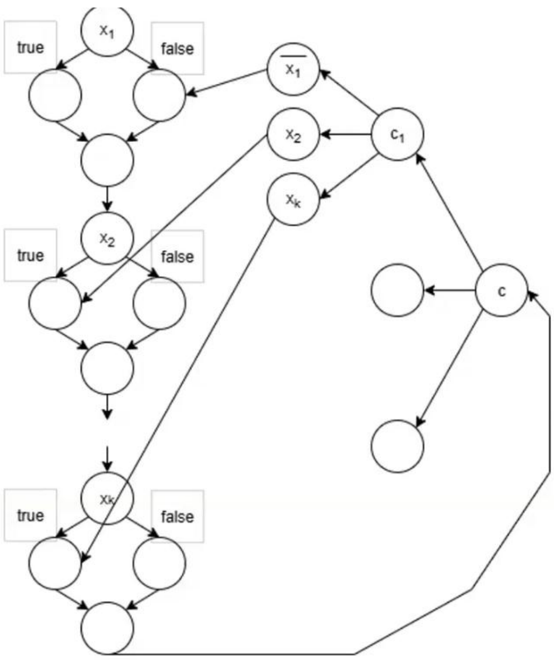
נניח שהנוסחה φ בנויה כך שהיא מתחילה ומסתיימת עם $\exists$, ומתחלפת בין $\exists, \forall$ לסירוגין. אם היא לא, אפשר להוסיף כמתים שלא משפיעים (קשורים רק למשתנה יחיד שיש $\vee$ בינו לשאר הנוסחה ואז הוא לא משפיע).

ברדוקציה, שחקן $1 \equiv$ שחקן E, שחקן $2 \equiv$ שחקן A.

לכל משתנה נבנה גאדג'ט – תת-גרף:



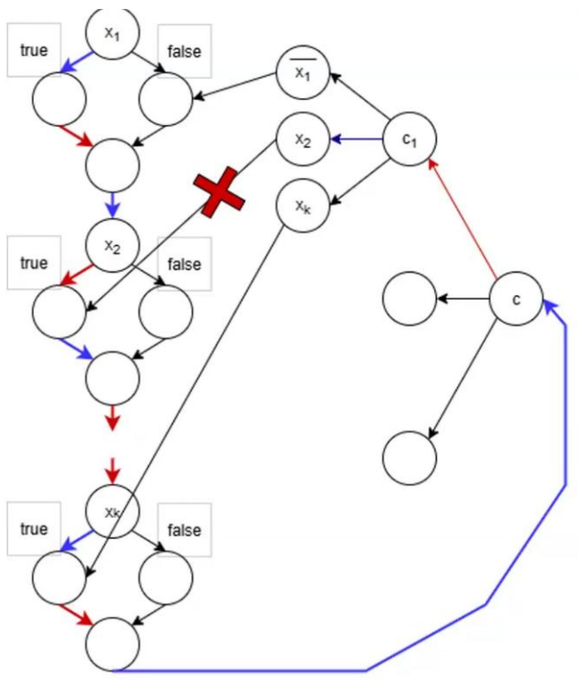
הרעיון הוא שהבחירה לכל משתנה T או F מקבילה למעבר על צלע *true* או *false*. זה הבחירה של שחקן 1, ואז שחקן 2 חייב להמשיך לקודקוד ה"ביניים" (מסומן y_1), ושחקן 1 חייב להמשיך לקודקוד הבא – x_2. ומשם, יש לשחקן 2 בחירה. זה מקביל לרעיון של המשחק עם הכמתים – בחירה של שחקן E, ואז A, וכו' לסירוגין.



לכל פסוקית נוסיף גאדג'ט: קודקוד שמייצג את הפסוקית, ממנו צלעות לכל הליטרלים שמופיעים בפסוקית, ומכל ליטרל כזה – צלע לקודקוד t או f המתאים בגאדג'ט המשתנה. ונוסיף קודקוד c שממנו יש קודקוד לכל קודקודי הפסוקיות:

המעבר בין כל הגאדג'טים של המשתנים לפי הסדר מקביל לתהליך המשחק. ואז, מהגאדג'ט האחרון, שחקן 1 עובר לקודקוד c. שחקן 2 בוחר לאיזה פסוקית לעבור. ושחקן 1 בוחר לאיזה ליטרל. הוא יבחר ליטרל מסופק – אם המשתנה קיבל T זה יהיה החיובי, ואם המשתנה קיבל F זה יהיה השלילי. כלומר מהקודקוד הזה, יש צלע רק לקודקוד שכבר היינו בו – כלומר אין לשחקן 2 לאן להמשיך, ושחקן 1 ניצח.

אם אין ליטרל מסופק בפסוקית הזו, אז שחקן 1 חייב לבחור ליטרל שממנו יש צלע לקודקוד שלא היינו בו, ואז שחקן 2 עובר לקודקוד הזה, ולשחקן 1 אין לאן להמשיך.



ונשים לב שאם יש ליטרל מסופק בפסוקית ששחקן 2 בחר, אז שחקן 1 תמיד יוכל לבחור בליטרל הזה. אז שחקן 2 ירצה לבחור פסוקית שאין בה ליטרל מסופק. כלומר, אם יש פסוקית כזו (ואז הנוסחה לא מסופקת) אז שחקן 2 מנצח. ואם אין פסוקית כזו (אז הנוסחה מסופקת) אז שחקן 1 מנצח.

כלומר, אם יש לשחקן E אסטרטגיה מנצחת ב-*FG*, זו אסטרטגיה מנצחת לשחקן 1 ב-*GG*. ואסטרטגיה מנצחת לשחקן 1 ב-*GG*, זו אסטרטגיה מנצחת לשחקן E ב-*FG*.

גודל הגרף (מספר הקודקודים), עבור נוסחה עם k משתנים ו- m פסוקיות הוא $4k + m$, שזה לינארי בגודל הקלט.