הרצאה 10 – יום ראשון 24.8

מחלקות L, NL

כל TM אמור לקרוא את כל הקלט, אז המקום הוא לפחות n. מה אם, חוץ מקריאת הקלט, הוא משתמש רק במספר קטן של תאים, אפילו פחות מ-n?
נשתמש במודל אחר: יש סרט אחד שהוא רק קלט (קריאה בלבד, *read-only*) וסרט עבודה. נאמר שיש ל-M סיבוכיות מקום $f(n)$ או ש-M רץ במקום $f(n)$, אם מספר **תאי העבודה** ש-M קורא הוא לכל היותר $f(n)$.

עבור N NTM, נגדיר את סיבוכיות המקום ע"י המספר המקסימלי של תאי עבודה שנסרקים מעל כל הענפים של עץ החישוב, עבור קלט באורך n.

$$L \coloneqq SPACE(\log n), \qquad NL \coloneqq NSPACE(\log n)$$

לדוגמה

$$L_1 \coloneqq \left\{0^{n/2}1^{n/2} : n \in \mathbb{N}\right\} \in L$$

נוכיח ע"י תיאור אלגוריתם שמכריע את השפה, במקום $\log n$. נניח שהקלט מתקבל על סרט 1, ויש את סרט 2 – סרט עבודה.

1. נעבור על סרט 1 עד ה-1 הראשון. בכל 0 שרואים, נוסיף 1 לספירה בסרט 2.
2. נמשיך על סרט 1 עד הסוף. לכל 1 שרואים, נחסיר 1 מהספירה בסרט 2.
3. אם קוראים מקום ריק בסרט 1 ובסרט 2 כתוב 0, נקבל. אחרת, נדחה.

המקום הדרוש הוא $O(\log n)$ עבור שמירת מספר עד n.

דוגמה 2

$$PATH \coloneqq \{\langle G, s, t\rangle : directed\ graph\ G\ has\ a\ path\ from\ s\ to\ t\} \in NL$$

נוכיח ע"י תיאור אלגוריתם לוגריתמי אי-דטרמיניסטי שמכריע את השפה. עבור קלט $\langle G, s, t\rangle$ כאשר יש ב-G m קודקודים:

1. נשמור מצביע לקודקוד s.
2. נרוץ עד שנגיע ל-t, או m פעמים:
   a. המצביע השמור מצביע על a. נבחר (באופן אי-דטרמיניסטי) צלע (a, b), ונצביע על b.
   b. אם הגענו ל-m פעמים, נדחה.
3. נקבל.

בכל ענף, ה-NTM שומר רק מצביע לקודקוד (מספר עד m) ומונה (שיכול להיות עד m). בסה"כ, מקום $O(\log m)$.

קונפיגורציה של TM עם שני סרטים

ב-TM עם סרט קריאה בלבד, התוכן שלו לא משתנה – ולכן הוא לא חלק מהקונפיגורציה (רק המיקום של הראש). אם M הוא מ"ט שרץ במקום תת-לינארי $f(n)$, אז מספר הקונפיגורציות שלו הוא $n \cdot f(n) \cdot 2^{O(f(n))}$.

$n \cdot f(n)$ זה מספר המיקומים האפשריים של שני הראשים. $2^{O(f(n))}$ זה מספר האפשרויות לתוכן של סרט 2.

אם $f(n) = \log n$ אז ה-TM רץ בזמן לכל היותר $O(n^2 \log n)$. כלומר, L ו-NL הם בזמן פולינומי: $L, NL \in P$.

משפט סביץ' בהרחבה למקום תת-לינארי

ניזכר במשפט סביץ': לכל פונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ כך ש- $f(n) \geq n$, מתקיים: $NSPACE(f(n)) \subseteq SPACE(f^2(n))$.

משפט סביץ' המורחב: לכל פונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ כך ש- $f(n) \geq \log n$, מתקיים: $NSPACE(f(n)) \subseteq SPACE(f^2(n))$.

ההוכחה זהה להוכחה של משפט סביץ' הרגיל, כאשר משתמשים ב-TM עם שני סרטים (אחד לקריאה בלבד).

משפט סביץ' מוכיח ש- $PSPACE = NPSPACE$, אבל לא ש- $L = NL$. למה?

כי המעבר הריבועי גדול יותר מהלוגריתם. כלומר, המשפט נותן לנו: $NL \subseteq SPACE(\log^2 n)$, שזה לא זמן לוגריתמי.

אז השאלה $L =_? NL$ היא שאלה פתוחה.

NL-reducibility

מכונת *log space transducer (LST)* היא *TM* עם:

- סרט קלט לקריאה בלבד.
- סרט פלט לכתיבה בלבד – שלא יכול לזוז שמאלה.
- סרט עבודה לקריאה וכתיבה – שיכול להכיל עד $O(\log n)$ תווים.

פונקציה **חשיבה במקום לוגריתמי** (*log space computable function, LSC*) היא פונקציה: $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ כך שקיים *LST* כלשהו *M* שמחשב את f – כלומר עבור קלט x שמתקבל על סרט הקלט, יהיה כתוב $f(x)$ על סרט הפלט בסוף הריצה אחרי ש- $M(x)$ עוצר.

שפה *A* תיקרא *log space reducible* לשפה *B* (נסמן $A \leq_L B$) אם קיימת פונקציה *LSC* כך ש: $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$.

שפה *B* תיקרא ***NL-hard*** אם כל שפה *A* ב-*NL* היא *log space reducible* ל-*A*. כלומר אם מתקיים: $\forall A \in NL:\ A \leq_L B$.

אם בנוסף, $B \in NL$, אז *B* היא ***NL-complete (NLC)***.

נשים לב שרדוקציה שהיא $\leq_L$ (לוגריתמית במקום) היא גם $\leq_p$ (פולינומית בזמן), כי לוגריתמי במקום גורר פולינומי במקום, ופולינומי במקום גורר פולינומי בזמן.

NL-completeness

<u>טענה</u>: אם $A \leq_L B$, אז $B \in L \Longrightarrow A \in L$.

<u>הוכחה</u>: ראשית, נשים לב לבעיה: $f(x)$ המתקבל מה-*LST* הוא לא בהכרח בגודל $\log n$. אז איך אפשר לומר שהרדוקציה לוגריתמית? כדי לשמור את הפלט, צריך מקום לא-לוגריתמי.

נעשה טריק: במקום לחשב את כל $f(x)$ ואז להעביר את הפלט בתור קלט ל-*TM* של *B*, נריץ את ה-*TM* של *B* במקביל ל*LST*, וכשה-*TM* של *B* צריך עוד תו, נחשב אותו. פורמלית:

יהי M_B ה-*TM* המכריע את *B* (משתמש במקום לוגריתמי). ויהי M_A ה-*LST* המחשב את $f(x)$. בהינתן $x \in_? A$, נריץ את M_A עד שנקבל תו. נריץ את M_B עד שהראש רוצה לקרוא את התו הבא. ואז נריץ את M_A עד שמקבלים את התו הבא, ונריץ את M_B עד שהוא רוצה לקרוא עוד תו... וכו'.

אנחנו צריכים רק לשמור את המיקום של הראש הקורא של M_B, שזה דורש מקום $O(\log|f(x)|)$.
ובגלל ש- $f(x) \in O(n^2 \log n) < O(n^3)$, נקבל ש- $O(\log|f(x)|) \in O(\log n)$.

כלומר, המערכת (M_A, M_B) היא *DTM* לוגריתמי במקום שמכריע את *A*.

מסקנה: אם יש שפה אחת שהיא *NL-complete* וגם ב-*L*, אז $L = NL$.

PATH היא *NLC*

כבר ראינו ש- $PATH \in NL$. נראה עכשיו שלכל שפה $A \in NL$, מתקיים $A \leq_L PATH$.

יהי *N*, *NTM* שמכריע את *A* במקום $O(\log n)$. נבנה את הרדוקציה:

אנחנו צריכים לבנות גרף שיתאר את תהליך הריצה של *N*. נשנה את *N* כך שתהיה לו קונפיגורציה מקבלת יחידה (פשוט מכל קונפיגורציה מקבלת, נמחק את הסרט ונזיז את הראש למיקום הכי שמאלי). עכשיו, בהינתן קלט *x* עבור *N*, נבנה את $\langle G, s, t\rangle$:

- כל קונפיגורציה של *N* תהיה קודקוד של *G*. זה נותן לנו $O(n^2)$ קודקודים.
- נגדיר $s \coloneqq c_{start},\ t \coloneqq c_{accept}$.
- נוסיף צלע $\left(c_i, c_j\right)$ אם c_i מניבה את c_j בצעד אחד.

אז אם $x \in A$, זה אומר שיש סדרת מעברים בין קונפיגורציות שמסתיימת במצב המקבל. שזה בדיוק מסלול $s \rightsquigarrow t$. והפוך, מסלול $s \rightsquigarrow t$ מתאר סדרת קונפיגורציות שמחילה ב- c_{start} ומגיעה ל- c_{accept}.

נוכיח שהפונקציה היא לוגריתמית במקום. ניזכר שאנחנו לא צריכים לשמור את כל הפלט ביחד – רק להעביר אותו למכונה של *PATH*. נתייחס לקונפיגורציה ע"י מספר סדרתי – עבור $O(n^2)$ קונפיגורציות, זה דורש רק $O(\log n^2) = O(2\log n) = O(\log n)$ מקום. לכל אחת, גם נבדוק לאיזה קונפיגורציות אפשר להגיע בצעד יחיד (בשביל הצלעות). אפשר לבדוק כל קונפיגורציה בנפרד ולא צריך לשמור מידע בין לבין, אז כל זה קורה ב- $O(\log n)$ מקום. והבדיקה היא פולינומית בזמן.

מסקנה: $NL \subseteq P$

<u>הוכחה</u>: כל TM שמשתמש במקום $f(n)$ רץ בזמן $n \cdot 2^{O(f(n))}$, אז גם הרדוקציה שתיארנו יכולה לרוץ בזמן פולינומי. כלומר לכל שפה $A \in NL$, מתקיים $A \leq_p PATH$. ואפשר לפתור את $PATH$ בזמן פולינומי (ע"י BFS, DFS). אז כל שפה ב-NL היא גם ב-P.

מחלקת $coNL$

$$coNL \coloneqq \{A : \overline{A} \in NL\}$$

<u>טענה – משפט אימרמן</u> (*Immerman – Szelepcsényi*): $NL = coNL$. כלומר כל שפה שהמשלים שלה מוכרע ע"י DTM במקום לוגריתמי, בעצמה גם ניתנת להכרעה ע"י DTM במקום לוגריתמי.

<u>הוכחה</u>: נוכיח ש- $\overline{PATH} \in NL$. אנחנו כבר יודעים שלכל $A \in NL$, מתקיים $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in PATH$. כלומר:

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A \Leftrightarrow f(x) \notin PATH \Leftrightarrow f(x) \in \overline{PATH}$$

אז תהי שפה $A \in NL$ כלשהי, אנחנו יודעים שמתקיים $\overline{A} \leq_L \overline{PATH}$, כלומר $\overline{A} \in NL$. אז $A \in coNL$, כנדרש.

נותר להוכיח ש- $\overline{PATH} \in NL$. תהי $A \in NL$, ויהי $NTM\ N$ שמכריע את A במקום $O(\log n)$ עבור קלט בגודל n.

נשתמש באותה בנייה של הגרף מהרדוקציה של $A \leq_L PATH$, אבל הפעם נרצה לבדוק אם **אין** מסלול $s \rightsquigarrow t$. לכאורה, נוכל פשוט לבדוק את כל המסלולים באורך m שיוצאים מ-s, ואם הגענו ל-t, נדחה. הבעיה היא שנצטרך לשמור רשימה של המסלולים והקודקודים שעברנו בהם, וזה דורש יותר מקום מ- $O(\log n)$.

נציע רעיון – ספירה בשכבות. עבור $m = |V(G)|$, נשאל: לכמה קודקודים אפשר להגיע מ-s בצעד אחד, לכמה קודקודים אפשר להגיע בשני צעדים... לכמה אפשר להגיע ב-m צעדים. פורמלית, נגדיר:

$$R_i \coloneqq \{v : v \text{ is reacable from } s \text{ in} \leq i \text{ steps}\}, \qquad c[i] \coloneqq |R_i|$$

ברור שמתקיים: $R_0 = \{s\},\ c[0] = 1$. ו- R_m זה כל הקודקודים שאפשר להגיע אליהם מ-s. אנחנו רוצים לחשב את $c[m]$ בזמן לוגריתמי.

• נתחיל עם $c[0] \leftarrow 1$.	$R_0 = \{s\}$
• **שלב L:** לכל $0 \leq i < m$:	לכל שכבה, נחשב את $c[i+1]$ מתוך $c[i]$.
○ נאתחל $c[i+1] \leftarrow 1$.	כי תמיד $s \in R_{i+1}$.
○ לכל קודקוד $v \neq s$:	אנחנו רוצים לקבוע אם $v \in R_{i+1}$
▪ נאתחל $d \leftarrow 0$	סופר כמה קודקודים יהיו ב- R_{i+1}
• לכל קודקוד u:	אנחנו רוצים לבדוק את הקודקודים שפוטנציאלים שיגיעו לפני v בדרך.

- ○ באופן לא דטרמיניסטי, נבחר אם לבדוק את u או לא. אם נבחר לבדוק, אז:
  - ▪ נלך i צעדים מ-s (נבחר את הצעדים באופן לא דטרמיניסטי), ואם לא הגענו ל-u, נדחה את הענף הזה.
  - ▪ אם מצאנו את u, נוסיף 1 ל-d: $d \leftarrow d + 1$.
  - ▪ אם בנוסף, $(u,v) \in E(G)$, אז $c[i+1] \leftarrow c[i+1] + 1$, ונחזור לשלב L (נעבור לקודקוד v הבא).
- אחרי שבדקנו את כל ה-u, נבדוק אם $d = c[i]$. אם לא, נדחה את הענף. זה מוודא שהענף הזה מצא בדיוק את כל הקודקודים של R_i.

באינטואיציה, למה זה עובד:

- האי-דטרמיניזם נותן לנו לבחור בדיוק את ה- $c[i]$ קודקודים של R_i שאנחנו רוצים לוודא.
- הבדיקה $d = c[i]$ מבטלת כל ענף עם יותר מדי או פחות מדי.
- לכל v, מספיק שיהיה $u \in R_i$ יחיד עם $(u,v) \in E(G)$ כדי שנספור את v לתוך $c[i+1]$.
- אנחנו לא שומרים קבוצות – רק את האינדקס והספירה. זה דורש רק מקום $O(\log m)$.

עכשיו, אנחנו צריכים לבדוק ש-t **לא נמצא** ב- R_m:

- נאתחל מונה: $d \leftarrow 0$. זה יספור לכמה קודקודים ב- R_m אפשר להגיע.
- לכל קודקוד u:
  - ○ באופן לא דטרמיניסטי, נבחר אם לבדוק את u או לא. אם נבחר לבדוק, אז:

- נעשה m צעדים (נבחר את הצעדים באופן לא דטרמיניסטי), ואם לא הגענו ל-u, נדחה את הענף הזה.
- אם $u = t$, כלומר יש מסלול $t \rightsquigarrow s$, **נדחה.**
- אחרת, $d \leftarrow d + 1$.

- בדיקה אם $d = c[m]$.
  - אם לא, אז **נדחה** (כי אחרת, היינו אולי שומרים ענף לא תקין. הדרישה הזו גורמת לנו לשמור רק ענפים שמגיעים ל-t, אם יש מסלול כזה).
  - אחרת, **נקבל.**

סיבוכיות מקום: שומרים את:

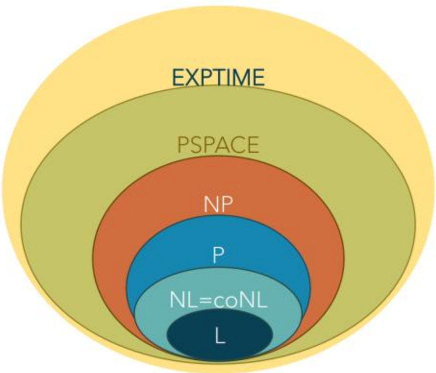
- m (מספר הקודקודים),
- u, v (מספרים סידוריים של הקודקודים הנוכחיים שנבדקים),
- i (אינדקס),
- $c[i],\ \ c[i+1]$ (מונים מהשלב הראשון),
- d (מונה כללי לווידוא).

זה מספר קבוע של מונים וקידודים, אז $O(\log m)$. שזה קטן יותר מ- $O(\log n)$ (n זה גודל הקלט המקורי). בסה"כ:

$$\overline{PATH} \in NL\text{-}complete \Longrightarrow PATH \in coNL\text{-}complete \Longrightarrow NL = coNL$$

כנדרש.

סיכום ביניים



משפט היררכיית המקום – *The Space Hierarchy Theorem*

פונקציה $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ כך ש- $f(n) \geq O(\log n)$ תיקרא **חשיבה במקום** (*space constructable*) אם קיים DTM כלשהו M כך שבהינתן קלט 1^n (שרשור, ייצוג אונארי) הוא מחשב את $f(n)$ במקום $O(f(n))$.

דוגמאות: כדי לחשב את $\log n$, אפשר לכתוב את n בייצוג בינארי (או בבסיס לפי בסיס הלוג) ולספור את מספר הביטים. הספירה הזו דורשת עוד $\log \log n$ מקום.
כדי לחשב כפל של $x \cdot y$, צריך $|x| + |y|$ מקום.

<u>משפט היררכיית המקום</u>: לכל פונקציה $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ חשיבה במקום, קיימת שפה A המוכרעת ב- $O(f(n))$ מקום, ולא מוכרעת ב- $o(f(n))$ מקום.

<u>הוכחה</u>: נבנה אלגוריתם ב- $O(f(n))$ מקום ונראה שהשפה שלו לא יכולה להיות מוכרעת ב- $o(f(n))$ מקום.

ניזכר בהגדרה של o – החל ממקום מסויים n_0, יש שאיפה לאפס.

יהי M TM כך ש- $|\langle M \rangle| \geq n_0$ (כלומר, גודל הקידוד מספיק ארוך כדי שנראה את ההשפעה של o).

נתאר את D על קלט $\langle M \rangle$, כאשר $n \coloneqq |\langle M \rangle|$:

1. נחשב את $f(n)$ ונסמן את התא הזה בסרט. אם ננסה לעבור את המקום הזה, נדחה.
2. נסמלץ את $M(\langle M \rangle)$ תוך מעקב אחרי מספר הצעדים. אם עברנו $2^{f(n)}$, נדחה.
3. נחזיר את ההיפך ממה שיצא.

D מכריע שפה כלשהי (את $L \coloneqq L(D)$) ב- $f(n)$ מקום. עכשיו, נראה ש-L לא מוכרעת ב- $o(f(n))$ מקום.

נב"ש שיש TM כלשהו M שמכריע את L ב- $g(n) \coloneqq o\big(f(n)\big)$ מקום. כלומר $L = L(M)$. אז $D(\langle M\rangle)$ מסמלץ את M ב- $d \cdot g(n) < f(n)$ מקום (d הוא קבוע כלשהו כדי לפצות על הפער שיכול להיות בגלל א"ב שונה או מספר מצבים שונה). $D(\langle M\rangle)$ מחזיר את ההיפך מ- $M(\langle M\rangle)$, סתירה לכך ש- $L(D) = L = L(M)$.

מסקנות מ- *SHT*

1. לכל שתי פונקציות $f(n), g(n)$ חשיבות במקום, כך ש- $g(n) = o\big(f(n)\big)$, מתקיים $SPACE\big(g(n)\big) \subsetneq SPACE\big(f(n)\big)$.
2. לכל $1 \le a < b \in \mathbb{R}$, מתקיים $SPACE(n^a) \subsetneq SPACE\big(n^b\big)$.
3. $NL \subsetneq PSPACE$. כי ממשפט סביץ', $NL \in SPACE(\log^2 n)$, ו- $\log^2 n \in o(n)$.

$$EXPSPACE = \bigcup_k SPACE\left(2^{n^k}\right)$$

4. $PSPACE \subsetneq EXPSPACE$, כי היחס בין מקום פולינומי למעריכי הוא יחס של o.