שאלה 1

$$R, \qquad RE \setminus R, \qquad coRE \setminus R, \qquad \overline{RE \cup coRE}$$

סעיף א

$$L_1 \coloneqq \{\langle M_1, M_2\rangle : |L(M_1) \cap L(M_2)| \leq 10\}$$

שפת זוגות של מכונות שיש להן לכל היותר 10 מילים משותפות בשפה.

זה לא יהיה ב-RE כי גם אם נרוץ ב-*dovetailing*, לא נוכל לדעת אם באמת יש פחות מ-10 מילים או שעוד לא מצאנו 10 מילים.

זה כן ב-$coRE$, כי אפשר לבדוק את התנאי ההפוך: נרוץ ב-*dovetailing* וברגע שמצאנו 10 מילים משותפות, נקבל.

אם זה לא ב-RE זה גם לא ב-R, אז השפה ב- $coRE \setminus R$. פורמלית:

נתאר *NTM* עבור $\overline{L_1}$: בהינתן שתי מכונות, ננחש 11 מילים ששתיהן מקבלות. אז $L_1 \in coRE$.

כדי להוכיח שהשפה לא ב-R, נעשה רדוקציה $\overline{SHALT} \leq L_1$. בהינתן מכונה M, נייצר שתי מכונות B,A:

אנחנו רוצים שאם $M(\varepsilon)$ לא עוצר, אז החיתוך יהיה קטן מ-10.

מכונה A מקבלת הכל.

מכונה B מריצה את $M(\varepsilon)$ ואז מקבלת.

$$M \in \overline{SHALT} \Longrightarrow M(\varepsilon) = \infty \Longrightarrow \forall x\colon B(x) = \infty \Longrightarrow L(B) = \emptyset \Longrightarrow |L(A) \cap L(B)| = 0 \leq 10 \Longrightarrow \langle A, B\rangle \in L_1$$

$$M \notin \overline{SHALT} \Longrightarrow M(\varepsilon) \neq \infty \Longrightarrow \forall x\colon B(x) \neq \infty \Longrightarrow L(B) = \Sigma^* \Longrightarrow |L(A) \cap L(B)| > 10 \Longrightarrow \langle A, B\rangle \notin L_1$$

סעיף ב

$$L_2 \coloneqq \{\langle M_1, M_2\rangle : 10 \leq |L(M_1) \cap L(M_2)| \leq 42\}$$

אינטואיטיבית, השפה לא ב-RE כי לא נוכל לדעת אם עוד לא מצאנו 10 מילים. וגם לא ב-$coRE$ כי לא נוכל לדעת אם עוד לא מצאנו 43 מילים.

פורמלית, נראה ש- $L_2 \notin RE$ ע"י רדוקציה מ- $\overline{SHALT}$. בהינתן M נייצר שתי מכונות B,A:

אנחנו רוצים שאם $M(\varepsilon)$ לא עוצר, אז החיתוך יהיה בין 10 ל-42.

מכונה A מקבלת הכל.

מכונה B מקבלת מיד אם הקלט הוא אחד מתוך קבוצה S של 11 מילים. על כל קלט אחר, מריצה את $M(\varepsilon)$ ואז מקבלת.

$$M \in \overline{SHALT} \Longrightarrow M(\varepsilon) = \infty \Longrightarrow \forall x \notin S\colon B(x) = \infty \Longrightarrow L(B) = S \Longrightarrow |L(A) \cap L(B)| = |S| = 11 \Longrightarrow \langle A, B\rangle \in L_2$$

$$M \notin \overline{SHALT} \Longrightarrow M(\varepsilon) \neq \infty \Longrightarrow \forall x\colon B(x) \neq \infty \Longrightarrow L(B) = \Sigma^* \Longrightarrow |L(A) \cap L(B)| = \infty > 42 \Longrightarrow \langle A, B\rangle \notin L_2$$

נראה ש- $L_2 \notin coRE$ ע"י רדוקציה מ- $SHALT$. בהינתן M נייצר שתי מכונות B,A:

אנחנו רוצים שאם $M(\varepsilon)$ עוצר, אז החיתוך יהיה בין 10 ל-42.

מכונה A מקבלת הכל.

מכונה B מריצה את $M(\varepsilon)$ ואז מקבלת אם הקלט הוא מתוך קבוצה S של 11 מילים.

$$M \in SHALT \Longrightarrow M(\varepsilon) \neq \infty \Longrightarrow \forall x\colon B(x) \neq \infty \Longrightarrow L(B) = S \Longrightarrow |L(A) \cap L(B)| = |S| = 11 \Longrightarrow \langle A, B\rangle \in L_2$$

$$M \notin SHALT \Longrightarrow M(\varepsilon) = \infty \Longrightarrow \forall x\colon B(x) = \infty \Longrightarrow L(B) = \emptyset \Longrightarrow |L(A) \cap L(B)| = 0 < 10 \Longrightarrow \langle A, B\rangle \notin L_2$$

סעיף ג

$$L_3=\{\langle M_1,M_2,c\rangle : |L(M_1)\cap L(M_2)|=26\ \wedge\ |\langle M_1\rangle|\le c\ \wedge\ |\langle M_2\rangle|\le c^3\}$$

לפי ההגבלה על גודל הקידודים של המכונות נראה שיש מספר סופי של מכונות שיכולות להיות בשפה. אבל נשים לב: ה-c מתקבל עם הקלט ויכול להיות כל דבר. אז זה לא סופי. והדרישה שהחיתוך יהיה בגודל 26 בדיוק, זה כמו בסעיף ב – חסם עליון ותחתון. אז השפה לא ב-RE וגם לא ב-$coRE$.

נראה ש- $L_3\notin RE$ ע"י רדוקציה מ- $\overline{SHALT}$. בהינתן M נייצר שתי מכונות B,A ומספר c:

אנחנו רוצים שאם $M(\varepsilon)$ לא עוצר, אז החיתוך יהיה 26 וגם יתקיים $|A|\le c, |B|\le c^3$.

מכונה A מקבלת הכל.

מכונה B מקבלת מיד אם הקלט הוא אחד מתוך קבוצה S של 26 מילים. על כל קלט אחר, מריצה את $M(\varepsilon)$ ואז מקבלת.

ונגדיר $c=|A|+|B|^3$. אז ברור ש- $|A|\le c, |B|\le c^3$.

$$M\in\overline{SHALT}\Longrightarrow M(\varepsilon)=\infty\Longrightarrow\forall x\notin S: B(x)=\infty\Longrightarrow L(B)=S\Longrightarrow|L(A)\cap L(B)|=|S|=26\Longrightarrow\langle A,B,c\rangle\in L_3$$

$$M\notin\overline{SHALT}\Longrightarrow M(\varepsilon)\neq\infty\Longrightarrow\forall x: B(x)\neq\infty\Longrightarrow L(B)=\Sigma^*\Longrightarrow|L(A)\cap L(B)|=\infty>26\Longrightarrow\langle A,B,c\rangle\notin L_3$$

נראה ש- $L_3\notin coRE$ ע"י רדוקציה מ- $SHALT$. בהינתן M נייצר שתי מכונות B,A ומספר c:

אנחנו רוצים שאם $M(\varepsilon)$ עוצר, אז החיתוך יהיה 26 וגם יתקיים $|A|\le c, |B|\le c^3$.

מכונה A מקבלת הכל.

מכונה B מריצה את $M(\varepsilon)$ ואז מקבלת אם הקלט הוא מתוך קבוצה S של 26 מילים.

ונגדיר $c=|A|+|B|^3$. אז ברור ש- $|A|\le c, |B|\le c^3$.

$$M\in SHALT\Longrightarrow M(\varepsilon)\neq\infty\Longrightarrow\forall x: B(x)\neq\infty\Longrightarrow L(B)=S\Longrightarrow|L(A)\cap L(B)|=|S|=26\Longrightarrow\langle A,B,c\rangle\in L_3$$

$$M\notin SHALT\Longrightarrow M(\varepsilon)=\infty\Longrightarrow\forall x: B(x)=\infty\Longrightarrow L(B)=\emptyset\Longrightarrow|L(A)\cap L(B)|=0\neq26\Longrightarrow\langle A,B,c\rangle\notin L_3$$

שאלה 2

$$P, NP, coNP, \overline{NP\cup coNP}$$

סעיף א

$$L_4=\{\langle G,k\rangle : G \text{ has a subset of } k \text{ vertices, 10 of them are a } VC\}$$

נשים לב שאם $k<10$, אז בוודאות $\langle G,k\rangle\notin L_4$.

בנוסף, לכל $10\le k\le n$, זה לא משנה מה גודל הקבוצה כל עוד יש בה 10 קודקודים שהם VC. כלומר קיימת קבוצה בגודל k שיש בה 10 קודקודים שהם VC, אמ"מ קיימת קבוצה בגודל 10 שהיא VC.

אז צריך רק לבדוק $10\le k\le n$, ואז לבדוק שיש VC בגודל 10 ע"י מעבר על כל ה- $\binom{n}{10}=O(n^{10})$ תתי קבוצות בגודל 10, ולכל אחת לבדוק שהיא VC ע"י מעבר על כל הצלעות - $O(n^2)$. סה"כ $O(n^{12})$ אז $L_4\in P$.

$$L_5=\{\langle\varphi\rangle : \varphi \text{ is a tautology}\}$$

נראה ש- $\overline{L_5}\in NP$: נחש השמה לא מספקת ונוודא – $O(n)$. אם $\varphi\in\overline{L_5}$ אז יש לה השמה לא מספקת. אם $\varphi\notin\overline{L_5}$ אז אין לה השמה לא מספקת.

סעיף ב

אם $L_1\le_p L_2$, $L_2\in RP$ אז $L_1\in BPP$.

הוכחה: נוכיח ש- $L_1\in RP$. מכיוון ש- $L_2\in RP$, קיים PTM M_2 המכריע את L_2 בזמן פולינומי כך ש:

אם $x \in L_2$ אז $P[M_2(x) = 1] \geq 1/2$, ואם $x \notin L_2$ אז $P[M_2(x) = 0] = 1$.

נתונה לנו גם רדוקציה פולינומית $f: L_1 \to L_2$.

נתאר M_1 PTM עבור L_1 כך ש:

אם $x \in L_1$ אז $P[M_1(x) = 1] \geq 1/2$, ואם $x \notin L_1$ אז $P[M_1(x) = 0] = 1$.

בהינתן קלט x, נריץ את $M_2\big(f(x)\big)$ ונחזיר מה שהיא מחזירה. אז:

אם $x \in L_1$ אז $f(x) \in L_2$ ולכן $P\big[M_2\big(f(x)\big) = 1\big] \geq 1/2$, ואם $x \notin L_1$ אז $f(x) \notin L_2$ ולכן $P\big[M_2\big(f(x)\big) = 0\big] \geq 1$.

נקבל ש- $L_1 \in RP$, ומתקיים $RP \subseteq BPP$ אז $L_1 \in BPP$.

שאלה 3

סעיף א

$$AHP = Almost\text{-}Hamiltonian\text{-}Path = \{(G, s, t) : \exists\ a\ ham - path\ from\ s\ to\ t, possibly\ without\ one\ edge\} \in NPC$$

נוכיח $AHP \in NPH$ ע"י רדוקציה מ-HAM: בהינתן (G, s, t), אנחנו רוצים לייצר G' כך שאם יש מסלול המילטוני $s \rightsquigarrow t$ ב-G אז ב-G' יהיה מסלול כמעט המילטוני $t \rightsquigarrow s$. ושאם לא היה מסלול המילטוני $s \rightsquigarrow t$ ב-G אז ב-G' לא יהיה מסלול כמעט המילטוני $t \rightsquigarrow s$.

נוסיף קודקוד מבודד a לגרף ועוד קודקוד b שנחבר אותו רק ל-s (זה G') ונחזיר את (G', a, t).

אם היה מסלול המילטוני $s \rightsquigarrow t$ ב-G, אז עכשיו ב-G' יש מסלול כמעט המילטוני $a(\rightarrow)b \rightarrow s \rightsquigarrow t$.

ואם יש מסלול כמעט המילטוני $a \rightsquigarrow t$ ב-G', כדי להגיע מ-s לכל קודקוד צריך "לדלג" על צלע חסרה – אז כל שאר הצלעות במסלול קיימות. והוא עובר דרך b, אז הוא חייב לקפוץ ל-b ומשם יש דרך רק ל-s (כי אם הוא מגיע לקודקוד אחר קודם, הוא יגיע ל-a לפני b ואז מ-b אין לאן להמשיך). אז המסלול מתחיל עם $a \rightarrow b$, ומשם חייב ל-s, ומשם יש מסלול המילטוני ל-t. בסה"כ יש מסלול המילטוני $s \rightsquigarrow t$ ב-G.

נוכיח $AHP \in NP$ ע"י NTM: ננחש את סדר הקודקודים ואת הקפיצה על הצלע החסרה, ונספור קודקודים וקפיצות. נקבל אמ"מ הייתה קפיצה אחת ועברנו n קודקודים.

סעיף ב

שאלה 4

סעיף א

תהי $S \subseteq RE$ קבוצת שפות המקיימת:

$$\Sigma^* \notin S, \qquad \exists L \in R\ \ s.t.\ L \in S$$

הוכיחו או הפריכו: $L_S = \{M : L(M) \in S\} \in RE$

ישירות ממשפט רייס: התכונה היא תכונה לא טריוויאלית, כי קיימת שפה שמקיימת את התכונה (L הנתונה) וקיימת שפה שלא מקיימת את התכונה - Σ^*. אז התכונה לא ב-RE. ובהגדרה זו תכונה של שפה. ובנוסף נתון ש- Σ^* לא מקיימת את התכונה, אז התכונה לא ב-RE.

אפשר גם ע"י רדוקציה מ-$\overline{L_u}$. תהי M_L מכונה המכריעה את L. בהינתן M, x, נייצר את M'. על קלט y:

1. מריצה את $M_L(y)$. אם קיבלה, נקבל.
2. אחרת, נריץ את $M(x)$. אם קיבלה, נקבל, ואם דחתה, נדחה.

אז, אם $(M, x) \in \overline{L_U}$, אז M' מקבלת רק את $L(M_L) = L \in S$. ואם $(M, x) \notin \overline{L_U}$ אז $L(M') = \Sigma^* \notin S$.

.