שאלה 1

R, $RE \setminus R$, $coRE \setminus R$, $\overline{RE \cup coRE}$

סעיף א

$$L_1 \coloneqq \{\langle M_1, M_2 \rangle : |L(M_1) \cap L(M_2)| \le 10\}$$

שפת זוגות של מכונות שיש להן לכל היותר 10 מילים משותפות בשפה.

. מילים או שעוד א שעוד א שעוד א מצאנו 10 מילים, לדעת אם באמת אם לדעת אם באמר לדעת אם ברוץ ב-RE, לא נוכל לדעת אם באמת מיש פחות מ-10 מילים או שעוד לא מצאנו

. מילים משותפות, נקבל מרבין ממצאנו 10 וברגע שמצאנו לבדוק התנאי ההפוך: נרוץ ב-ווץ מdovetailing מילים משותפות, נקבל מרבין את התנאי ההפוך: נרוץ ב-ישראנו משותפות משותפות משותפות, נקבל

:פורמלית. $coRE \setminus R$ ב- אז השפה ב- RE מורמלית.

 $L_1 \in coRE$ עבור מקבלות. ששתיהן מילים מילים מכונות, ננחש שתי מכונות בהינתן עבור $\overline{L_1}$

 $:\!B,\!A$ מכונות שתי מכונה מכונה בהינתן הדוקציה . $\overline{SHALT} \leq L_1$ הדוקציה עשה לא ההשפה להוכיח כדי להוכיח

.10-אנחנו רוצים שאם $M(\varepsilon)$ לא עוצר, אז החיתוך יהיה קטן

מכונה A מקבלת הכל.

מכונה B מריצה את את מקבלת. B

$$M \in \overline{SHALT} \implies M(\varepsilon) = \infty \implies \forall x : B(x) = \infty \implies L(B) = \emptyset \implies |L(A) \cap L(B)| = 0 \le 10 \implies \langle A, B \rangle \in L_1$$
$$M \notin \overline{SHALT} \implies M(\varepsilon) \neq \infty \implies \forall x : B(x) \neq \infty \implies L(B) = \Sigma^* \implies |L(A) \cap L(B)| > 10 \implies \langle A, B \rangle \notin L_1$$

סעיף ב

$$L_2 \coloneqq \{\langle M_1, M_2 \rangle : 10 \leq |L(M_1) \cap L(M_2)| \leq 42\}$$

. מילים. עוד אם עוד אם עוד אם מצאנו 43 מילים. מילים. אינטואיטיבית, השפה א ב-RE כי לא נוכל לדעת אם עוד אם עוד אם מילים. מילים. וגם אינטואיטיבית, השפה לא ב-RE ע"י רדוקציה מ-SHALT. בהינתן M נייצר שתי מכונות $L_2 \notin RE$

 $M(\varepsilon)$ אנחנו רוצים שאם $M(\varepsilon)$ לא עוצר, אז החיתוך יהיה בין 10 ל-42.

מכונה A מקבלת הכל.

מכונה $M(\varepsilon)$ אחר, מריצה את אחר מילים. על מילים. של 11 מילים מתוך קבוצה אחד מתוך הוא אחד מחוד מכונה B

$$M \in \overline{SHALT} \Longrightarrow M(\varepsilon) = \infty \Longrightarrow \forall x \notin S : B(x) = \infty \Longrightarrow L(B) = S \Longrightarrow |L(A) \cap L(B)| = |S| = 11 \Longrightarrow \langle A, B \rangle \in L_2$$
$$M \notin \overline{SHALT} \Longrightarrow M(\varepsilon) \neq \infty \Longrightarrow \forall x : B(x) \neq \infty \Longrightarrow L(B) = \Sigma^* \Longrightarrow |L(A) \cap L(B)| = \infty > 42 \Longrightarrow \langle A, B \rangle \notin L_2$$

 $:B,\!A$ ע"י רדוקציה מ- אנייצר בהינתן M נייצר ע"י רדוקציה מ- בראה ע" רדוקציה מכונות $L_2 \notin coRE$

.42-אנחנו רוצים שאם $M(\varepsilon)$ עוצר, אז החיתוך יהיה בין 10 ל-42

מכונה A מקבלת הכל.

מכונה B מריצה את M(arepsilon) ואז מקבלת אם הקלט הוא מתוך קבוצה S של 11 מילים.

$$M \in SHALT \implies M(\varepsilon) \neq \infty \implies \forall x : B(x) \neq \infty \implies L(B) = S \implies |L(A) \cap L(B)| = |S| = 11 \implies \langle A, B \rangle \in L_2$$

 $M \notin SHALT \implies M(\varepsilon) = \infty \implies \forall x : B(x) = \infty \implies L(B) = \emptyset \implies |L(A) \cap L(B)| = 0 < 10 \implies \langle A, B \rangle \notin L_2$

סעיף ג

$$L_3 = \{ \langle M_1, M_2, c \rangle : |L(M_1) \cap L(M_2)| = 26 \land |\langle M_1 \rangle| \le c \land |\langle M_2 \rangle| \le c^3 \}$$

לפי ההגבלה על גודל הקידודים של המכונות נראה שיש מספר סופי של מכונות שיכולות להיות בשפה. אבל נשים לב: c- מתקבל עם הקלט ויכול להיות כל הכי ההגבלה על גודל המכונות נראה שהחיתוך יהיה בגודל 26 בדיוק, זה כמו בסעיף בc- חסם עליון ותחתון. אז השפה לא בc- וגם לא בc- אוב לא כופי. והדרישה שהחיתוך יהיה בגודל 26 בדיוק, זה כמו בסעיף בc- חסם עליון ותחתון. אז השפה לא בc- ווכן להיות כל אוב בייוק, אוב מכונות מכו

:c ומספר B,A ע"י מכונות M נייצר בהינתן הייצר מ- \overline{SHALT} מיי ע"י רדוקציה ע"י רדוקציה בהינתן ומספר בהינתן ו

 $|A| \leq c, |B| \leq c^3$ וגם יתקיים אל א עוצר, אז החיתוך אל א א אנחנו רוצים אנחנו אנחנו א אנחנו אינחנו אונחנו אונו אינחנו אינחנו אונו אינחנו אינחנו אינחנו אינחנו אינחנו אינחנו אינחנו אינ

מכונה A מקבלת הכל.

מכונה $M(\varepsilon)$ אחר, מריצה על כל קלט מילים. של 26 של S מתוך קבוצה $M(\varepsilon)$ אחר מיד אם מקבלת מיד מכונה אחר מילים.

 $|A| \le c$, $|B| \le c^3$ -ש ברור ש. $|A| = |A| + |B|^3$ ונגדיר

$$M \in \overline{SHALT} \implies M(\varepsilon) = \infty \implies \forall x \notin S: B(x) = \infty \implies L(B) = S \implies |L(A) \cap L(B)| = |S| = 26 \implies \langle A, B, c \rangle \in L_3$$
$$M \notin \overline{SHALT} \implies M(\varepsilon) \neq \infty \implies \forall x: B(x) \neq \infty \implies L(B) = \Sigma^* \implies |L(A) \cap L(B)| = \infty > 26 \implies \langle A, B, c \rangle \notin L_3$$

 $:\!c$ ומספר Bע"י מכונות נייצר בהינתן הייצר בהינת "בייגר ע"י רדוקציה ע"י רדוקציה ב' ע"י רדוקציה בהינתן $L_3 \notin coRE$

 $|A| \leq c, |B| \leq c^3$ וגם יתקיים אום אוד יהיתוך אז עוצר, אז עוצר, או $M(\varepsilon)$ שאם רוצים אנחנו אנחנו

מכונה A מקבלת הכל.

מכונה B מילים. את אם אוז מקבלת אם הקלט ואז $M(\varepsilon)$ אל מריצה מריצה מכונה מכונה

 $|A| \le c, |B| \le c^3$ -ש. אז ברור ש. $c = |A| + |B|^3$ ונגדיר

$$M \in SHALT \implies M(\varepsilon) \neq \infty \implies \forall x: B(x) \neq \infty \implies L(B) = S \implies |L(A) \cap L(B)| = |S| = 26 \implies \langle A, B, c \rangle \in L_3$$

 $M \notin SHALT \implies M(\varepsilon) = \infty \implies \forall x: B(x) = \infty \implies L(B) = \emptyset \implies |L(A) \cap L(B)| = 0 \neq 26 \implies \langle A, B, c \rangle \notin L_3$

שאלה 2

 $P, NP, coNP, \overline{NP \cup coNP}$

סעיף א

 $L_4 = \{ \langle G, k \rangle : G \text{ has a subset of } k \text{ vertices, } 10 \text{ of them are a } VC \}$

 $\langle G, k \rangle \notin L_4$ נשים לב שאם אז בוודאות, k < 10

בנוסף, לכל $k \leq n$ קודקודים שהם בה 10 קודקודים שהם בה 10 קודקודים שהם בגודל k שיש בה 10 קודקודים שהם בנוסף, לכל $k \leq n$ לכל $k \leq n$ שיש בה 10 קודקודים שהם k7. אמ"מ קיימת קבוצה בגודל 10 שהיא k7.

אז צריך רק לבדוק בגודל 10, ולכל אחת לבדוק שיש VC שיש בגודל 10, ולכל אחת לבדוק עריי מעבר על כל ה- $\binom{n}{10}=O(n^{10})$ ע"י מעבר על לבדוק שיש VC אחת לבדוק שיש VC אחת לבדוק שהיא באלעות - $O(n^{12})$. סה"כ $O(n^{2})$ אז ע"י מעבר על כל הצלעות - VC

 $L_5 = \{ \langle \varphi \rangle : \varphi \text{ is a tautology} \}$

. מספקת. אם $\varphi \notin \overline{L_5}$ ננחש השמה לא מספקת ונוודא $\varphi \in \overline{L_5}$ אז יש לה השמה לא מספקת. אם יש אין לה השמה לא מספקת. אם : $\overline{L_5} \in NP$

סעיף ב

 $L_1 \in \mathit{BPP}$ אז $L_2 \in \mathit{RP}, \ L_1 \leq_p L_2$ אם

: בזמן פולינומי ב- את אמכריע את אמכריע קיים $L_2 \in RP$ - מכיוון ש- בזמן פולינומי כך ש: הוכחה: נוכיח ש- בזמן פולינומי כך ש

חישוביות (חורף תשפ"ה) – מועד א

 $P[M_2(x)=0]=1$ אז $x \notin L_2$ אז $P[M_2(x)=1] \geq 1/2$ אז $x \in L_2$ אם אם או

 $f\colon L_1 \to L_2$ נתונה לנו גם רדוקציה פולינומית

:בר כך ש: $M_1\ PTM$ נתאר

 $P[M_1(x)=0]=1$ אז $x \notin L_1$ אם $P[M_1(x)=1] \geq 1/2$ אז $x \in L_1$ אם $x \in L_1$

: אזירה. מחזירה שהיא ונחזיר מה אונחזיר אז. $M_2ig(f(x)ig)$ את גריץ קלט אזירה. בהינתן

 $Pigl[M_2igl(f(x)igr)=0igr] \geq 1$ ולכן $f(x)
otin L_2$ אז $f(x)
otin L_2$ אז או $f(x)
otin L_2$ אם $f(x)
otin L_2$ אז $f(x)
otin L_2$ אם $f(x)
otin L_2$ אם

 $L_1 \in BPP$ אז $RP \subseteq BPP$ נקבל ש- $L_1 \in RP$ אז

שאלה 3

סעיף א

 $AHP = Almost-Hamiltonian-Path = \{(G, s, t) : \exists \ a \ ham - path \ from \ s \ to \ t, possibly \ without \ one \ edge\} \in NPC$

נוכיח שאם יש מסלול המילטוני $s \leadsto t$ ב- $s \leadsto t$ בהינתן מסלול כך שאם לייצר G' כך שאם לייצר רוצים בהינתן בהינתן: HAM: בהינתן HAM: בהיה מסלול בהיא בהיא מסלול המילטוני $t \leadsto t$ ב- $t \leadsto t$ אז ב- $t \leadsto t$ לא יהיה מסלול כמעט המילטוני $t \leadsto t$ ב- $t \leadsto t$ לא יהיה מסלול באיא ב- $t \leadsto t$ ב- $t \leadsto t \leadsto t$ לא יהיה מסלול באיא ב- $t \leadsto t \leadsto t$

(G',a,t) את ונחזיר (G' זה s-לוחור שנחבר שנחבר שנחבר שנחבר לגרף ועוד לגרף מבודד a לגרף ועוד קודקוד שנחבר שנחבר אותו

.a(o)b o s woheadrightarrow t במעט המילטוני G'ב אז עכשיו ב-,Gאז עכשיו ב-, אז עכשיו ב-, אז שמלול המילטוני

והוא עובר $a \leadsto t$ כדי להגיע מ-s לכל קודקוד צריך "לדלג" על צלע חסרה - אז כל שאר הצלעות במסלול קיימות. והוא עובר s לכל קודקוד צריך "לדלג" על און חסרה - און לאן להמשיך). אז המסלול דרך $a \leadsto t$ הוא הייב לקפוץ ל- $a \Join t$ ומשם יש דרך רק ל- $a \Join t$ (כי אם הוא מגיע לקודקוד אחר קודם, הוא יגיע ל- $a \Join t$ ומשם יש מסלול המילטוני $a \leadsto t$ בסה"כ יש מסלול המילטוני $a \leadsto t$ בסה"כ יש מסלול המילטוני ל- $a \leadsto t$ ומשם יייב ל- $a \leadsto t$ ומשם יש מסלול המילטוני ל- $a \leadsto t$ מחליל המילטוני ל- $a \leadsto t$ ומשם יש מסלול המילטוני ל- $a \leadsto t$ מחליל המילטוני ל- $a \leadsto t$ ומשם יש מסלול המילטוני ל- $a \leadsto t$ מחליל המילטוני ל- $a \leadsto t$ ומשם יש מסלול המילטוני ל- $a \leadsto t$ מחליל המילטוני ל- $a \leadsto t$ מולטוני ל- $a \leadsto t$ מולטו

נוכיח ברנו אמ"מ הייתה את סדר הקודקודים ואת הקפיצה על הצלע החסרה, ונספור קודקודים וקפיצות. נקבל אמ"מ הייתה קפיצה אחת ועברנו NTM נוספור אמ"מ הייתה קפיצה אחת ועברנו n קודקודים.

סעיף ב

שאלה 4

סעיף א

:תהי מפות המקיימת קבוצת $S \subseteq RE$

 $\Sigma^* \notin S$, $\exists L \in R \ s.t. \ L \in S$

 $L_S = \{M: L(M) \in S\} \in RE$:הוכיחו או הפריכו

ישירות ממשפט רייס: התכונה היא תכונה לא טריוויאלית, כי קיימת שפה שמקיימת את התכונה (L הנתונה) וקיימת שפה שלא מקיימת את התכונה - Σ^* . אז התכונה לא ב-E. ובהגדרה זו תכונה של שפה. ובנוסף נתון ש- Σ^* לא מקיימת את התכונה, אז התכונה לא ב-E.

y על קלט M' את את נייצר את, M, בהינתן את מכונה המכריעה מכונה M_L על תהי M_L . על את ע"י רדוקציה מ-

- .1 מריצה את $M_I(y)$ אם קיבלה, נקבל.
- . בחתה, נהיץ את M(x) אם קיבלה, נקבל, ואם החתה, נדחה.