שאלה 1 – סיווג ל-R,RE

סעיף א

$$L_1=\{M : M \text{ is a TM and stops after a single step on every input}\}$$

שפת המכונות שעוצרות אחרי צעד אחד לכל קלט.

הדרישה של "לכל קלט" לכאורה מרמזת שהשפה לא ב-RE כי לא נוכל לבדוק את זה. אבל אם המכונה צריכה לעצור אחרי צעד אחד, היא לא קוראת יותר מתו אחד. אז מספיק לבדוק את כל המילים באורך 1. אם בכולם עצרנו אחרי צעד אחד, אז לא משנה איזה קלט נקבל, לא נעשה עוד צעדים. השפה ב-R.

סעיף ב

$$L_2=\left\{M : M \text{ is a TM and stops after at most } 2^{|M|} \text{ steps on every input}\right\}$$

בדומה לסעיף א, לכל מכונה מספיק לבדוק את כל הקלטים עד אורך $2^{|M|}$. אם בכולם עצרנו אחרי לכל היותר $2^{|M|}$ צעדים, אז $M\in L_2$. אז $L_2\in R$.

סעיף ג

$$L_3=\{M : M \text{ is a TM and } L(M) \text{ is either infinite or empty}\}$$

אם נקבל מכונה שלא עוצרת על אף קלט, לא נוכל לדעת אם היא תקבל מילה או לא. ואם מכונה קיבלה מילים, לא נוכל לדעת אם היא תקבל את כולם. אז לא ב-RE. נעשה רדוקציה מ- $\overline{SHALT}$: בהינתן M, נייצר את M': אנחנו רוצים שאם $M(\varepsilon)$ לא עוצר, אז שהשפה של M' תהיה ריקה או אינסופית. נגדיר את M': על כל קלט x, הרץ את $M(\varepsilon)$ ואז, אם $x=10$ אז קבל.

$$M\in\overline{SHALT}\Rightarrow M(\varepsilon)=\infty\Rightarrow\forall x{:}\,M'(x)=\infty\Rightarrow L(M')=\emptyset$$

$$M\notin\overline{SHALT}\Rightarrow M(\varepsilon)\neq\infty\Rightarrow\forall x{:}\,M'(x)\neq\infty\Rightarrow L(M')=\{0\}$$

שאלה 2 – הוכיחו או הפריכו

סעיף א

תהי שפה A מעל $\{0,1,\#\}$. נגדיר:

$$L_A=\{x\in\{0,1\}^* : \exists y\in\{0,1\}^*\ s.t.\ x\#y\in A\}$$

טענה: אם $A\in R$ אז $L_A\in R$.

אולי ננסה להוכיח: אם $A\in R$ אז יש DTM M מכריע M. ננסה להשתמש ב-M כדי לייצר NTM M' שמכריע את L_A:

בהינתן x, העד הוא y מתאים. ואז מספיק לוודא ש- $M(x\#y)=1$. הבעיה היא שיש אינסוף אפשרויות ל-y. אם אין y מתאים, לא נוכל לוודא את זה.

נפריך ע"י רדוקציה. נגדיר את A:

$$A=\{x\#1^t : x \text{ is an encoding of a TM } M, \text{and } M(\varepsilon) \text{ halts within } t \text{ steps}\}\in R$$

אז אפשר לוודא את זה תמיד, כי אפשר לסמלץ את $M(\varepsilon)$ ולעצור אחרי t צעדים. לכן $A\in R$. אז:

$$L_A=\{x\in\{0,1\}^* : \exists y\in\{0,1\}^*\ s.t.\ x\#y\in A\}=\{M : M(\varepsilon)\ halts\}=SHALT\notin R$$

סעיף ב

אם נגדיר $f(x)=0$ לכל $x\in\Sigma^*$, אז $L_1=\{0\}\in R$ אבל L_2 יכולה להיות $HALT$ שהיא לא ב-R.

סעיף ג

נגדיר:

$$L_1=\{00\}^*,\qquad L_2=\{01\}^*,\qquad L_3=\{10\}^*,\qquad L_4=\{11\}^*$$

השפות שונות, ונגדיר רדוקציות ביניהן:

$f: L_i \to L_j$ מוגדרת: קרא את המחרוזת בזוגות. כל 00 תהפוך ל-01, כל 01 תהפוך ל-10, וכל 10 תהפוך ל-11. אם קראת תו בודד תשאיר אותו.

בה"כ עבור $L_1 \to L_2$: אם $x \in L_1$ אז x הוא רצף של זוגות 00, אז $f(x)$ יהיה רצף של זוגות של 01. אם $x \notin L_1$ אז או ש-x באורך אי זוגי ואז יישאר תו בודד גם ב- f ואז $f(x) \notin L_2$. או שיש זוג שהוא לא 00, ואז הזוג לא יהפוך ל-01 כלומר $f(x)$ לא יהיה רצף של זוגות 01. אז $f(x) \notin L_2$.

והרדוקציה $L_1 \leq L_2$ היא אותה פונקציה של $L_3 \leq L_4$.

שאלה 3

סעיף א1

נוכיח: בכל פסוקית ב-CNF יש "או" בין הליטרלים. כדי שפסוקית תהיה לא מסופקת, צריך שכל הליטרלים יהיו F. כלומר כדי שכל הפסוקיות יהיו לא מסופקות, צריך שכל הליטרלים בנוסחה יקבלו F. זה אפשרי רק אם כל משתנה מופיע רק בתור ליטרל חיובי או שלילי (ולא שניהם).

אז יש השמה מספקת: לכל משתנה ניתן השמה כך שהליטרלים שלו מסופקים. אז $\varphi \in CNF - SAT_F \implies \varphi \in CNF - SAT$.

סעיף א2

נפריך: הנוסחה:

$$\varphi = (x_1 \vee \overline{x_1}) \in CNF - SAT$$

אבל אין לה השמה שלא מספקת אף פסוקית – למעשה, כל השמה מספקת את הפסוקית.

סעיף ב

נוכיח ש- $ONE - 3SAT \in coNPC$. ראשית, היא ב-$coNP$ כי השפה המשלימה:

$$\overline{ONE - 3SAT} = \{\varphi : \varphi \text{ is not a } 3CNF \text{ formula, or is a } 3CNF \text{ formula but has } 2 \text{ or more satisfying assignments}\}$$

היא ב-NP – הבדיקה שהקלט לא נוסחת $3CNF$ תקינה היא פולינומית, והעד הוא שתי השמות.

השפה המשלימה היא גם NPH – נראה רדוקציה מ- $3CNF$: בהינתן נוסחה, נוסיף לה פסוקית $(w \vee \bar{w})$. ועכשיו כל השמה מספקת הפכה לשתי השמות מספקות. ואם הנוסחה לא הייתה ספיקה, אז גם עכשיו היא לא ספיקה.

ומתקיים: $\bar{L} \in coNPC \Leftrightarrow L \in NPC$. הוכחה: נניח ש- $L \in NPC$ כלומר $L \in NP$ וגם $\forall L' \in NP: L' \leq_p L$.

בגלל שלכל שפה $L' \in NP$ קיימת פונקציה $f: L' \to L$ כך שלכל x:

$$x \in L' \Leftrightarrow f(x) \in L$$

אז:

$$x \in \overline{L'} \Leftrightarrow x \notin L' \Leftrightarrow f(x) \notin L \Leftrightarrow f(x) \in \bar{L}$$

כלומר אותה הפונקציה היא רדוקציה $\overline{L'} \leq_p \bar{L}$. ו- $\overline{L'} \in coNP$ כי נתון $L' \in NP$, ו-$\bar{L} \in coNP$ כי $L \in NP$. אז $\bar{L}$ היא $coNPC$.

בסה"כ, הראנו ש- $\overline{ONE - 3SAT} \in NPC$ ולכן $ONE - 3SAT \in coNPC$. אז אם $ONE - 3SAT \in NP$ גם כל שפה $L \in coNP$ היא ב-NP.

שאלה 4

.