**הרצאה 2** – יום רביעי 23.7

### סוגים של *TM*

### מ"ט אינסופית – *Infinite TM*

ההבדל היחיד הוא שקבוצת המצבים יכולה להיות אינסופית. ואז גם פונקציית המעברים אינסופית (אבל עדיין יש מעבר יחיד לכל מצב).

נגיד שיש לנו פונקציה כלשהי שמוגדרת ע"י טבלה אינסופית. אם קבוצת המצבים אינסופית, אז נוכל לחשב את הפונקציה הזו ב-*TM* הזה.

מספר הקלטים האפשרי הוא $\aleph_0$ – כל הטבעיים, אינסופית בת מניה. לכל קלט יש $\aleph_0$ פלטים אפשריים. אז מספר הפונקציות שה-*TM* הזה יכול לחשב:

$$\aleph_0^{\aleph_0} \geq 2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

ול-*TM* רגיל יש רק מספר סופי של מצבים. ועבור כל קבוע $C$, מתקיים $C^{\aleph_0} = \aleph_0$. אז מכונת טיורינג אינסופית חזקה יותר ממכונת טיורינג רגילה.

(כי $\aleph_0 < \aleph_1$, האלכסון של קנטור).

### מ"ט מהירה – *Fast TM*

ההבדל היחיד הוא שבפונקציית המעברים, אפשר בכל צעד לעבור יותר מתא אחד בכל כיוון. כלומר במקום $\{\leftarrow,\rightarrow,\circ\}$, יש $\{\leftarrow,\rightarrow,\circ,\leftarrow\leftarrow,\rightarrow\rightarrow\}$.

אפשר למדל את זה ע"י מ"ט רגילה. במקום $(q_i,a) \to (q_j,b,\to\to)$, נוסיף מצב ביניים $q_{j,right}$ ונגדיר:

$$(q_i,a) \to (q_{j,right},b,\to), \qquad (q_{j,right},\forall) \to (q_j,\forall,\to)$$

כלומר, נכתוב $b$, ונעבור למצב ש"זוכר" שאנחנו עוברים ל-$q_j$ וזזים ימינה. במצב החדש הזה, לא נשנה את מה שכתוב.

### מ"ט עם *k* סרטים – *k-tape TM*

ההבדל היחיד הוא שיש $k$ סרטים נפרדים. לכל אחד יש ראש משלו. ופונקציית המעברים: $\delta: Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{\leftarrow,\rightarrow,\circ\}^k$.

כלומר נקרא $k$ תווים (אחד מכל קלט), נכתוב $k$ תווים, ונבצע $k$ תזוזות.

**תרגיל** – נמדל *PDA* (אוטומט מחסנית) ע"י *TM* עם 2 סרטים.

הסרט הראשון הוא פשוט סרט הקלט, כמו ב-*PDA*. כל התזוזות עליו יהיו רק ימינה. הסרט השני הוא המחסנית.

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ▷ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | _ | _ |

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ▷ | _ | _ | _ | _ | _ | _ | _ | _ | _ | _ | _ | _ | _ | _ | _ | _ |

כל פעם ש"דוחפים" משהו למחסנית, אנחנו רוצים לעבור למצב דחיפה שזוכר את המצב שאנחנו רוצים לעבור אליו. לדוגמה:

אם אנחנו עוברים ממצב $q_i$ ל-$q_j$ ודוחפים $s$ למחסנית, נעשה:

$$(q_i,a\forall) \to (q_{i,push},a\forall,SR), \qquad (q_{i,push},a\_) \to (q_j,as,RS)$$

כל פעם שעושים *pop* (נגיד מוציאים $S$), והאוטומט עובר ממצב $q_i$ ל-$q_j$:

$$(q_i,as) \to (q_j,a\_,RL)$$

### *TM* שקול ל- *k-tape TM*

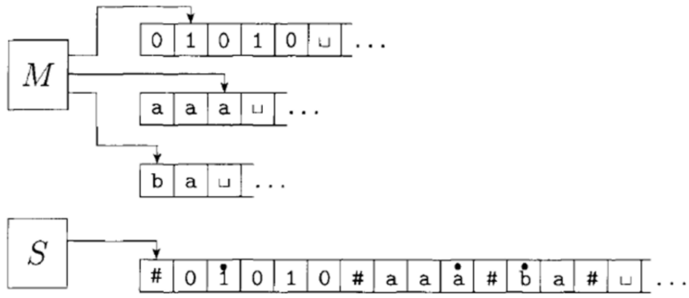
הכיוון הראשון טריוויאלי, *TM* זה *k-tape TM* עבור $k=1$.

בכיוון השני: יהי *k-tape-TM* כלשהו $M$, ויהי *TM* רגיל $S$. נמדל את $M$ ע"י $S$.

נוסיף תו "הפרדה" # שיסמן את ההפרדות בין הסרטים של $M$ שיהיו כתובים על הסרט של $S$.

יש גם הפרדות בהתחלה ובסוף של הסרט. אנחנו תוחמים את עצמנו ביניהם.

ולכל תו $c$, יהיה תו מקביל $\dot{c}$, שמסמן שהראש נמצא במיקום הזה.




בכל צעד:

- $S$ עובר על כל הסרט מהמפריד הראשון עד המפריד ה- $k+1$, וקורא את התווים המסומנים כדי לקבוע מצב.
- עובר שוב כדי לכתוב דברים בתאים האלה לפי הפונקציה. (תו אחר אם צריך, ולסמן את התו בתא ליד או באותו תא).
- אם הראש של $S$ הגיע ל-#, נכתוב __ במקומו (מקום ריק) ויכנס למצב מיוחד שעוברים עד סוף הסרט ומזיזים הכל מקום אחד ימינה. ואז חוזר למקום הריק.

**לסיכום**

- $DFA = NFA < PDA < TM$.
- נוכל להשתמש בכל מספר סרטים שנרצה, והכל שקול ל-$TM$ רגיל.
  - לדוגמה: סרט קלט, סרט פלט, ומספר סרטי עזר.
- מה עם סרט הפלט של *TM-1* הוא סרט הקלט של *TM-2*?
  - זה ממדל *subroutine* – כלומר נוכל לחלק את העבודה בין מכונות.
  - זה גם ממדל ערוצי תקשורת. כל $TM$ יכול לתקשר עם האחרים.
- נוכל לאחד מספר מכונות למכונה אחת.

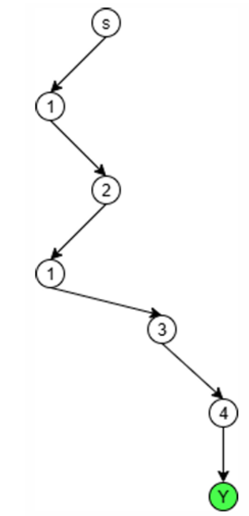
**מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית – *Non-deterministic TM (NTM)***

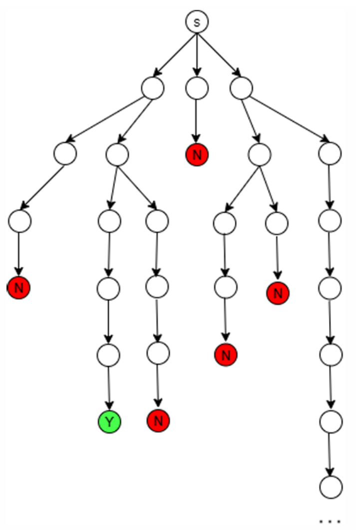
כמו מ"ט עם סרט אחד (ניזכר שזה שקול לכל מ"ט עם $k$ סרטים). ההבדל היחיד הוא שפונקציית המעברים היא **הסתברותית** (כמו $NFA$):

$$\delta: Q \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow, \circ\})$$

החישוב של המכונה הוא עץ שהצלעות שלו מתאימות לאפשרויות שונות. המכונה מקבלת אם אחד המסלולים מגיע למצב מקבל.

בחישוב $DTM$ על קלט $x$, המכונה עוברת בין מצבים ועוצרת באחד מהם או נכנסת ללולאה אינסופית:




על אותו קלט, החישוב של $NTM$ יכול להיות אחד מהבאים:

- עוצר במצב מקבל אם אחד המסלולים נגמר במצב מקבל,
- נכנס ללולאה אינסופית אם אחד המסלולים אינסופי ואין מצב מקבל בעץ,

- עוצר במצב דוחה אחרת (כי זה אומר שכל העלים הם $q_N$).

***DTM = NTM***

הכיוון הראשון טריוויאלי: כל *DTM* הוא בפרט *NTM*.

בכיוון השני, נרצה למדל *NTM* כלשהו *M* ע"י *DTM* כלשהו, *S*.

נבנה את *S*: *3-tape-DTM*.

1. הסרט הראשון הוא הקלט של *M*, הוא לא משתנה.
2. הסרט השני הוא עותק של הסרט של *M*.
3. הסרט השלישי עוקב אחרי עץ החישוב של *M*. הא"ב שלו הוא $\{1,2,\dots,b\}$ כאשר $b$ הוא הרוחב המקסימלי של העץ.

בכל שלב, נרשום על סרט 3 את אחד המסלולים האפשריים של העץ, לפי סדר לקסיקוגרפי. לדוגמה עבור העץ:

```
     S
   / | \
  1  2  3
 / \  \  \
1   2  1  1
```

המסלולים שנחשב יהיו:

$$1, 2, 3, 11, 12, 21, 31$$

אז *S* עובד ככה:

1. סרט 1 מכיל את הקלט.
2. נעתיק את הקלט לסרט 2.
3. נריץ את *M* על סרט 2, כאשר בוחרים את הכיוון שנלך אליו לפי מה שכתוב על סרט 3.
   אם הגענו למצב מקבל, סיימנו. אחרת, נמשיך לשלב 4.
4. נכתוב את המחרוזת הבאה (בסדר הלקסיקוגרפי) על סרט 3, ונחזור לשלב 3.

אם ב-*M* אין מצב מקבל ואין לולאה, *S* עדיין תיכנס ללולאה – כי נמשיך לבדוק מחרוזות ארוכות יותר.

אנחנו צריכים דרך לסמן האם להמשיך את המחרוזת או לא.

בשלב *k*, אם הדברים הבאים לא קורים:

- המסלול נגמר ב-$q_N, q_Y$
- אין מסלול כזה (נגיד המסלול 22, בדוגמה למעלה).

אז נוסיף # בסוף המחרוזת בסרט. וזה מסמן שיש המשך. אם הגענו לסוף המחרוזת ואין #, אין המשך אז נחזיר $q_N$.

נעדכן את איך ש-*S* עובד:

1. סרט 1 מכיל את הקלט.
2. נעתיק את הקלט לסרט 2.
3. נריץ את *M* על סרט 2, כאשר בוחרים את הכיוון שנלך אליו לפי מה שכתוב על סרט 3.
   - *a.* אם הגענו למצב מקבל, סיימנו.
   - *b.* אם הגענו למצב דוחה או מסלול לא קיים, נעבור לשלב 4.
   - *c.* אחרת, נכתוב # במקום הריק הראשון של סרט 3, ונעבור לשלב 4.
4. המחרוזת הבאה:
   - *a.* אם כתוב $b \dots b$ על הסרט:
     - *i.* נבדוק אם יש # בסוף. אם כן, נכתוב את המחרוזת הבאה ונחזור לשלב 3.
     - *ii.* אחרת, נחזיר $q_N$ ונסיים.
   - *b.* אחרת, נכתוב את המחרוזת הבאה (נשאיר את ה-# אם יש) ונחזור לשלב 3.