Computability and Complexity.

Homework 1

1. Build (formally, with a program) a Turing Machine (you can use the type of standard TM you prefer: 1-tape, k-tape, deterministic or non-deterministic):
    a. Computing the arithmetic addition $f(x, y) = x + y$, where $x, y \in \{0,1\}^*$

    b. deciding $L_1 = \{x \in \{0,1\}^* | \, x \text{ contains substring } 001\}$

    c. computing $Ax \oplus b$ where A is a binary $n \times n$ matrix, and x and b are n-long binary vectors.

2. Prove or refute the equivalency of the following model to a standard TM:
    a. A 1-tape TM where the tape is infinite to both sides.
    b. A 1-tape TM with a finite tape.
    c. A standard machine without a "stay" move (i.e. on every step, the head always moves to the left or to the right)
3. Suggest an alternative encoding of a Turing machine using binary rather than unary representation.
4. For some language $L \subseteq \Sigma^*$ let:
    a. Prove or refute that if $L_1 \in R$, $L_2 \in R$ then $L_1 \setminus L_2 \in R$
    b. Prove or refute the language $UPF(L)=\{y \in \Sigma^* | \forall x \in \Sigma \text{ it holds that } xy \notin L\}$. that $L \in coRE \Leftrightarrow UPF(L) \in RE$ and $L \in R \Leftrightarrow UPF(L) \in R$
    c. Prove that $REV=\{\langle M \rangle | \text{if M accepts x then it accepts also } x^R\} \notin R$ (here, x^R denotes the reverse x, I.e. $0010^R=0100$)
5. a. Prove or refute: $A_{TM}=\{\langle M,x \rangle | M \text{ accepts } x\}$ is a RE-complete language.
   b. Prove or refute: $EQ_{TM}=\{\langle M,M' \rangle | L(M)=L(M')\}$ is a RE-complete language.
   c. Prove or refute: $L=\{0^*1^*\}$ is an R-complete language.
6. To which minimal class of those: R, RE, coRE, $\overline{RE \cup coRE}$ belongs the following language:
    a. $L_1=\{\langle M,M' \rangle | L(M) \subseteq L(M'), |L(M') \setminus L(M)|=1 \text{ and } M,M' \text{ are TMs}\}$
    b. $L_2=\{\langle M \rangle | \exists M' \text{ such that } L(M') \subseteq L(M), \text{ where } M,M' \text{ are TMs}\}$
    c. $L_3=\{\langle M,M' \rangle | \, |L(M') \cap L(M)|>1, \text{ where } M,M' \text{ are TMs}\}$
    d. $L_4=\{\langle M \rangle | \text{ M is a 1-type TM, and the head never visits cell number } a\}$ (hint: the head starts from cell number 0, and if it never visits cell a then it never changes the content to the right from a)

חישוביות וסיבוכיות

מטלה 1

1. בנו מכונת טיורינג (פורמלית, עם מימוש של דלתא). ניתן להשתמש במודלים שקולים (כמה סרטים, מכונה לא דטרמיניסטית...) :
   a. מחשבת $f(x,y) = x + y$ עבור $x, y \in \{0,1\}^*$
   b. מחליטה את $L_1 = \{x \in \{0,1\}^* |\ x\ contains\ substring\ 001\}$
   c. מחשבת $Ax \oplus b$ כאשר A היא מטריצה בינארית $n \times n$, ו x , b הם וקטורים בינארים באורך n.

2. הוכיחו או הפריכו, האם המודלים הבאים שקולים למכונת טיורינג.
   a. מכונה עם סרט אחד, אינסופי לשני הצדדים.
   b. מכונה עם סרט אחד סופי.
   c. מכונה ללא אפשרות להשאיר את הראש במקום (הצעדים היחידים עבור הראש קורא הם ימינה או שמאלה, בלי להשאר במקום).

3. הציעו encoding (ייצוג מספרי) של מכונות טיורינג בבינארי במקום אונארי.

4. עבור שפה $L \subseteq \Sigma^*$:
   a. הוכח או הפרך, אם $L_1 \in R, L_2 \in R$ אז $L_1 \setminus L_2 \in R$
   b. $UPF(L)=\{y \in \Sigma^* | \forall x \in \Sigma \text{ it holds that } xy \notin L\}$.
   הוכח או הפרך, $L \in coRE \Leftrightarrow UPF(L) \in RE$ וגם $L \in R \Leftrightarrow UPF(L) \in R$.
   c. הוכיחו כי
   $REV=\{<M>|\text{if } M \text{ accepts } x \text{ then it accepts also } x^R\} \notin R$
   (here, x^R denotes the reverse x, I.e. $0010^R=0100$)

5. הוכח או הפרך:
   a. $A_{TM}=\{<M,x>|M \text{ accepts } x\}$ is a RE-complete language.
   b. $EQ_{TM}=\{<M,M'>|L(M)=L(M')\}$ is a RE-complete language.
   c. $L=\{0^*1^*\}$ is an R-complete language.

6. סווגו את השפות הבאות לקבוצה המינימלית מבין $R, RE, coRE, \overline{RE \cup coRE}$:
   a. $L_1=\{<M,M'>|L(M) \subseteq L(M'), |L(M') \setminus L(M)|=1 \text{ and } M,M' \text{ are TMs}\}$
   b. $L_2=\{<M>|\exists M' \text{ such that } L(M') \subseteq L(M), \text{ where } M,M' \text{ are TMs}\}$
   c. $L_3=\{<M,M'>|\ |L(M') \cap L(M)|>1, \text{ where } M,M' \text{ are TMs}\}$
   d. $L_4=\{<M>|\ M \text{ is a 1-type TM, and the head never visits cell number } a\}$
   (רמז: הראש מתחיל מתא מספר 0, ואף פעם לא מגיע לתא a ולכן הסרט לא משתנה מעבר לתא a)