# הרצאה 11

## 1 משתנים מקריים רציפים נפוצים:

נראה מספר מ"מ רציפים עם התפלגויות נפוצות.

### 1.1 התפלגות אחידה:

עבור $a < b$ ממשיים, נאמר שמ"מ רציף X הוא בעל התפלגות **אחידה** על הקטע [a, b] אם פונקציית הצפיפות שלה היא:

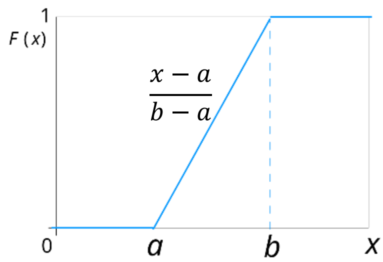
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & if\ a \le x \le b \\ 0, & else \end{cases}$$

נשים לב שזו אכן PDF כי:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx = 1$$

נרצה למצוא את ה-CDF של X. נשים לב שלכל $x < a$ מתקיים $F_X(x) = 0$, ולכל $x > b$ מתקיים $F_X(x) = 1$.
לכל $a \le x \le b$ מתקיים:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a}\,dt \overset{\aleph}{=} \frac{1}{b-a}\int_a^x dt = \left(\frac{x}{b-a}\right) - \left(\frac{a}{b-a}\right) = \frac{x-a}{b-a}$$




א – כי לכל ערך קטן מ-$a$ נקבל 0. השבר הוא קבוע ויוצא מהאינטגרל.

כלומר:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & if\ x < a \\ \left(\frac{x-a}{b-a}\right) & if\ a \le x \le b \\ 1 & if\ x > b \end{cases}$$

**דוגמה 1:** יהי X מ"מ שמתפלג אחיד על הקטע [0,1], ויהי $Y = aX + b$ עבור $a > 0, b \in \mathbb{R}$ כלשהם.
נרצה למצוא את ההתפלגות של Y: נשים לב שמתקיים (לפי הצבת ערכי הקטע בנוסחה):

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

אז לכל $y \in \mathbb{R}$ מתקיים (בשלב הרביעי משתמשים בנתון ש $a > 0$):

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(aX + b \le y) = \mathbb{P}\left(X \le \frac{y-b}{a}\right) = \begin{cases} 0, & if\ \ \frac{y-b}{a} < 0 \\ \frac{y-b}{a}, & if\ \ 0 \le \frac{y-b}{a} \le 1 \\ 1, & if\ \ \frac{(y-b)}{a} > 1 \end{cases} \overset{\aleph}{=}$$

$$= \begin{cases} 0, & if\ \ y < b \\ \frac{y-b}{(a+b)-b}, & if\ \ b \le y \le a+b \\ 1, & if\ \ y > a+b \end{cases}$$

א – נכפיל את כל האגפים ב- $a$, ונוסיף את $b$ לכל האגפים. בשבר הוספנו $b$ והחסרנו $b$.

כלומר Y מתפלג אחיד על הקטע $[b, (a+b)]$.

אינטואיטיבית זה הגיוני, כי עשינו בסה"כ פעולה לינארית על X – "מתחנו" לפי $a$ ו"הזזנו" לפי $b$. העתקה לינארית חח"ע ועל.

נחשב את התוחלת והשונות של X:

$$\mathbb{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}$$

כדי לחשב שונות נחשב את $\mathbb{E}(X^2)$:

$$\mathbb{E}(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_X(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_a^b=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

ולכן:

$$Var(X)=\mathbb{E}(X)-\left(\mathbb{E}(X)\right)^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\left(\frac{b+a}{2}\right)^2=\frac{4(a^2+ab+b^2)}{12}-\frac{3(b^2+2ab+a^2)}{12}$$
$$=\frac{4a^2+4ab+4b^2}{12}-\frac{3b^2+3ab+3a^2}{12}=\frac{a^2+ab+b^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

## 1.2 התפלגות מעריכית (אקספוננציאלית)

אפשר לחשוב עליה בתור גרסה רציפה של ההתפלגות הגיאומטרית.

עבור $\mathbb{R}\ni 0<\lambda$ כלשהו, מ"מ רציף X הוא בעל התפלגות **מעריכית** עם פרמטר λ אם הPDF שלו מוגדר:

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

נשים לב שזאת אכן פונקציית צפיפות כי:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)\,dx=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}\,dx\overset{\text{א}}{=}-e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}=\underbrace{\Big(-\underbrace{e^{-\lambda\infty}}_{e^{-\infty}=0}\Big)}_{0}-\underbrace{\Big(-\underbrace{e^{-\lambda\cdot 0}}_{e^{0}=1}\Big)}_{-1}=0-(-1)=1$$

א – ניזכר שהנגזרת של $e^{f(x)}$ היא $f'(x)e^{f(x)}$, כלומר כשנגזור את $e^{-\lambda x}$ נקבל $-\lambda e^{-\lambda x}$. צריך בלי המינוס, אז נתקן: $\left(-e^{-\lambda x}\right)'=(-\lambda)\left(-e^{-\lambda x}\right)=\lambda e^{-\lambda x}$.

נרצה למצוא את ה-CDF של X: נשים לב שאם $x<0$ אז $F_X(x)=0$ ומצד שני, אם $x\geq 0$ אז

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(t)\,dt=\int_0^x\lambda e^{-\lambda t}\,dt=-e^{-\lambda t}\Big|_0^x=-e^{-\lambda x}-(-1)=1-e^{-\lambda x}$$

כלומר

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0\end{cases}$$

תזכורת מהסתברות 1:

יהי $X\sim Geom(p)$, $x$ שלם חיובי:

$$\mathbb{P}(X>x)=\sum_{k=x+1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=x+1}^{\infty}p(1-p)^{k-1}=p\sum_{k=x+1}^{\infty}(1-p)^{k-1}=p\cdot\frac{(1-p)^x}{1-(1-p)}$$
$$=(1-p)^x\overset{\text{א}}{\approx}e^{-px}$$

א – עבור p קטן

אם $X\sim Exp(\lambda)$ אז: ($x$ יכול להיות ממשי, $\lambda$ לא חייב להיות קטן)

$$\mathbb{P}(X>x)=1-\underbrace{F_X(x)}_{\mathbb{P}(X\le x)}=1-\left(1-e^{-\lambda x}\right)=e^{-\lambda x}$$

ניתן לראות את הדמיון ביניהם. בשניהם מודדים "עד להצלחה". בבדיד מודדים ניסיונות, ברציף מודדים זמן.

**דוגמה 2:** יהי $X$ מ"מ מעריכי עם פרמטר $\lambda>0$. נגדיר $Y=cX$ עבור $c>0$ ממשי כלשהו. נרצה למצוא את ההתפלגות של $Y$. מכיוון ש $c>0$, לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים ש $x<0$ אמ"מ $cx<0$. לכן:

$$F_Y(y)=\mathbb{P}(Y\le y)=\mathbb{P}(cX\le y)=\mathbb{P}\left(X\le\frac{y}{c}\right)=\begin{cases}0, & y<0\\ 1-e^{-\lambda y\backslash c}, & y\ge 0\end{cases}$$

כלומר גם $Y$ מתפלג מעריכית, עם פרמטר $\lambda/c$.

נחשב את התוחלת והשונות של $X$: נעשה אינטגרציה בחלקים עם $u=x, v'=\lambda e^{-\lambda x}$ ונקבל את משוואה (1):

$$\mathbb{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx=\underbrace{\int_0^{\infty}x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx}_{\int uv'}=\underbrace{x\cdot\int_0^{\infty}-e^{-\lambda x}dx}_{uv}-\underbrace{\int_0^{\infty}1\cdot -e^{-\lambda x}dx}_{\int u'v}=$$

$$\overset{\text{א}}{=}-xe^{-\lambda x}\big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}-e^{-\lambda x}dx\overset{\text{ב}}{=}(0-0)+\frac{1}{\lambda}\underbrace{\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx}_{PDF}=\frac{1}{\lambda}$$

תזכורת לאינטגרציה בחלקים: $(uv)'=u'v+uv'\Longrightarrow uv=\int u'v+\int uv'\Longrightarrow\int uv'=uv-\int u'v$

א – כשמציבים $\infty$, מקבלים $-\infty e^{-\infty}=-\infty\cdot\frac{1}{e^{\infty}}$, שנראה כאילו זה $-\frac{\infty}{\infty}$, לא מוגדר. אבל פונקציה עם אינסוף במעריך שואפת לאינסוף הרבה יותר מהר מ"סתם" אינסוף, אז זה שואף לאפס. לכן בשלב הבא זה $(0-0)$.

ב – נשים לב שזה דומה למשהו שכבר חישבנו לו את האינטגרל, רק בלי ה-$\lambda$. אז נחלק ונכפיל את האינטגרל בקבוע.

התוחלת בהתפלגות גיאומטרית הייתה $\frac{1}{p}$, ושוב רואים את הדמיון ביניהם.

כדי לחשב את השונות של $X$, נחשב את $\mathbb{E}(X^2)$. נעשה אינטגרציה בחלקים עם $u=x^2, v'=\lambda e^{-\lambda x}$ ועם (1) נקבל:

$$\mathbb{E}(X^2)\overset{\text{א}}{=}\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_X(x)dx=\int_0^{\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=-x^2e^{-\lambda x}\big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}-2xe^{-\lambda x}dx$$

$$\overset{\text{ב}}{=}(0-0)+2\int_0^{\infty}xe^{-\lambda x}dx\overset{\text{ג}}{=}\frac{2}{\lambda}\underbrace{\int_0^{\infty}x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx}_{\mathbb{E}(X)=1/\lambda}=\frac{2}{\lambda^2}$$

א – כמו שכבר ראינו, חישוב תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי.

ב – כמו א בשלב הקודם.

ג – נשים לב שזה דומה לתוחלת. נחלק ונכפיל בקבוע כדי להביא את האינטגרל למצב הרצוי.

ולכן:

$$Var(X)=\mathbb{E}(X^2)-\left(\mathbb{E}(X)\right)^2=\frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

**תכונות חוסר זיכרון**

משתנה מקרי אי שלילי $X$ ייקרא **חסר זיכרון** אם לכל $s,t \geq 0$ ממשיים מתקיים: $\mathbb{P}(X > s + t \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s)$

כלומר, ההסתברות ש: $X > s + t$ בהינתן ש: $X > t$, שווה להסתברות ש: $X > s$.

לדוגמה, אם נטיל מטבע באופן בלתי תלוי, ההסתברות שנקבל עץ ב-4 פעמים הבאות שווה להסתברות שנקבל עץ ב-4 פעמים הבאות גם בהינתן זה שיצא עץ כבר 5 פעמים ברצף. זה משתנה מקרי ש"לא זוכר את ההיסטוריה".

נשים לב שמתקיים באופן כללי: (נוסחת הסתברות מותנה)

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > s + t, X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > t)}$$

ולכן, משתנה מקרי אי שלילי $X$ יהיה חסר זיכרון אמ"מ, לכל $s,t \geq 0$ ממשיים מתקיים: (2)

$$\mathbb{P}(X > s + t) = \mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t)$$

**משפט 1.1:** יהי $X$ משתנה מקרי רציף אי-שלילי. אזי $X$ חסר זיכרון אמ"מ הוא מתפלג מעריכית.

הוכחה: בכיוון הראשון, נניח ש $X$ מתפלג מעריכית עם פרמטר $\lambda > 0$.

אז, לכל $s,t \geq 0$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t) &= \big(1 - \mathbb{P}(X \leq s)\big)\big(1 - \mathbb{P}(X \leq t)\big) = \big(1 - F_X(s)\big)\big(1 - F_X(t)\big) = \\ &= \Big(1 - \big(1 - e^{-\lambda s}\big)\Big)\Big(1 - \big(1 - e^{-\lambda t}\big)\Big) = e^{-\lambda s}e^{-\lambda t} = e^{-\lambda(s+t)} = 1 - \big(1 - e^{-\lambda(s+t)}\big) = \\ &= 1 - F_X(s + t) = 1 - \mathbb{P}(X \leq s + t) = \mathbb{P}(X > s + t)\end{aligned}$$

בכיוון השני, נניח ש $X$ משתנה מקרי רציף אי-שלילי חסר זיכרון. נגדיר את $F_X$ ה- CDF של $X$.

אם נצליח להראות ש $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ לכל $x \geq 0$ (ושווה 0 אחרת), זה יראה ש-$X$ מתפלג מעריכית.

כדי לא לגרור את ה- "$-1$", נגדיר את הפונקציה: $g(x) = 1 - F_X(x)$ לכל $x \geq 0$.

ועכשיו מספיק להוכיח ש: $g(x) = e^{-\lambda x}$. (עבור $x \geq 0$)

מכיוון ש-$X$ חסר זיכרון מתקיים לפי (2): (3)

$$\begin{aligned}g(s + t) &= 1 - F_X(s + t) = 1 - \mathbb{P}(X \leq s + t) = \mathbb{P}(X > s + t) = \mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t) \\ &= \big(1 - \mathbb{P}(X \leq s)\big)\big(1 - \mathbb{P}(X \leq t)\big) = \big(1 - F_X(s)\big)\big(1 - F_X(t)\big) = g(s)g(t)\end{aligned}$$

אנחנו נטען ש: $g\left(\frac{m}{n}\right) = g^m\left(\frac{1}{n}\right)$ לכל $m,n > 0$ שלמים.

(כאשר $g^m\left(\frac{1}{n}\right)$ הכוונה היא ל- $\left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m$. הסימון הוא לצורך הנוחות. לא להתבלבל עם הרכבה).

נקבע $n$ כלשהו ונוכיח באינדוקציה על $m$. הטענה מתקיימת באופן טריוויאלי עבור $m = 1$. זה בסיס האינדוקציה.

נניח שהטענה מתקיימת עבור $m \geq 1$ כלשהו ונוכיח עבור $(m + 1)$. מתקיים:

$$g\left(\frac{m + 1}{n}\right) = g\left(\frac{m}{n} + \frac{1}{n}\right) \overset{\text{א}}{=} g\left(\frac{m}{n}\right)g\left(\frac{1}{n}\right) \overset{\text{ב}}{=} g^m\left(\frac{1}{n}\right)g\left(\frac{1}{n}\right) = g^{m+1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

א – לפי (3). ב – לפי הנ"א.

זה נתן לנו מידע על $g$ ברציונליים חיוביים. זה יאפשר לנו לקבוע את $g$: נשים לב ש:

$$g(1) = g\left(\frac{n}{n}\right) = g^n\left(\frac{1}{n}\right) \overset{\text{א}}{\Longrightarrow} g\left(\frac{1}{n}\right) = \big(g(1)\big)^{1/n}$$

א – נוציא שורש בדרגה $n$.

כלומר אם אנחנו יודעים את $g(1)$, אנחנו יודעים את $g\left(\frac{1}{n}\right)$ לכל $n$ טבעי. מכאן נובע ש:

$$g\left(\frac{m}{n}\right)=\left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m=\left(g(1)^{1/n}\right)^m=\left(g(1)\right)^{\frac{m}{n}}$$

אז אנחנו יודעים לחשב את $g$ לכל רציונלי (כתלות ב- $g(1)$).

ניזכר ש$X$ רציפה ולכן גם $g$ רציפה. ומכיוון שהיא רציפה, אנחנו יודעים אותה לכל ממשי. (קצת אינפי).

כלומר מתקיים לכל $x \geq 0$ ממשי: $g(x)=\left(g(1)\right)^x$.

אז עכשיו אנחנו יודעים ש- $g$ אקספוננציאלית, אז זה כבר בכיוון הנכון. עכשיו צריך להביא אותה לצורה של $e^{-\lambda x}$:

נקבע $\lambda=-\ln g(1)$. אנחנו צריכים שיתקיים: $0<g(1)<1$ (כדי ש-$\lambda$ יהיה מוגדר וחיובי).

מכיוון ש $g(1)$ היא הסתברות של מאורע, מתקיים $0 \leq g(1) \leq 1$.

נב"ש ש $g(1)=1$, אזי לפי מה שמצאנו מתקיים $g \equiv 1$ ואז $F_X \equiv 0$.
זאת סתירה לדרישה ש $F_X(\infty)=1$ (דרישה עבור כל CDF).

נב"ש ש $g(1)=0$, אז $F_X(x)=1$ לכל $x>0$, ו- $F_X(x)=0$ לכל $x \leq 0$.
סתירה לכך ש- $F_X$ רציפה.

ולכן, מתקיים:

$$g(x)=\left(g(1)\right)^x=e^{\ln\left(g(1)\right)^x}=e^{x\ln g(1)}=e^{-\lambda x}$$

כנדרש.