הרצאה 5

1 מבוא לגרפים מקריים:

בהרצאה 3 השתמשנו בגרף שייצרנו בצורה מקרית כדי להוכיח חסם תחתון על מספרי רמזי. נראה עוד שימושים ושיטות:

1.1 מודל בסיסי על גרפים מקריים:

הגדרה 1.1: מודל גרף מקרי ארדוש-רניי $G(n,m)$ הוא מרחב ההסתברות שבו $\Omega = \{G = ([n], E) : |E| = m\}$, (כל הגרפים על ה-n קודקודים האלה, שיש להם בדיוק m צלעות), $\mathbb{P}$ היא ההתפלגות האחידה, כלומר:

$$\mathbb{P}(G) = \binom{\binom{n}{2}}{m}^{-1}, \quad \text{לכל } G \in \Omega.$$

כי יש $\binom{n}{2}$ צלעות אפשריות, ונבחר m מתוכן. נשים לב ששני גרפים עם אותו מספר צלעות (אפילו באותו מבנה, נגיד גרפים עם צלע אחת) הם גרפים שונים, אם זו צלע בין קודקודים שונים.

המודל הזה מאפשר לנו לחקור תכונות של גרף עם מספר גדול של קודקודים. הבעיה היא שיש בו הרבה דברים שהם לא בת"ל ולכן לא נוח להשתמש בו. לדוגמה אם יש חלק בגרף שיש בו הרבה צלעות; בגלל שקבענו את מספר הצלעות, זה משפיע על ההסתברות לצלעות במקומות האחרים. המודל הבא יותר נוח:

הגדרה 1.2: מודל גרף מקרי בינומי $G(n,p)$ הוא מרחב הסתברות שבו Ω היא קבוצת כל הגרפים על $[n]$, ופונקציית ההסתברות היא:

$$\mathbb{P}(G) = p^{|E(G)|}(1-p)^{\binom{n}{2}-|E(G)|}$$

כלומר, אם שההסתברות לקיום צלע מסוימת היא p. אז ההסתברות לגרף ספציפי היא ההסתברות שכל אחד מהצלעות הקיימות נבחרה, ואף אחד מהאחרות לא נבחרה.

הגדרה: "**תכונה**" של גרף היא פשוט תת-קבוצה של גרפים. לדוגמה, כל הגרפים שקיים בהם מעגל.
אם Q היא תכונה של גרף ומתקיים $G \in Q$, נאמר שG מקיימת את Q. תכונה Q נקראת **מונוטונית עולה** אם היא סגורה להוספת צלעות – כלומר, מהרגע שהיא קיימת בגרף, כל עוד רק נוסיף צלעות התכונה תישמר.
פורמלית: אם $G \in Q$ ו- $G \subseteq H$ גוררים ש- $H \in Q$.
לדוגמה, קיום מעגל היא תכונה מונוטונית עולה. קיום מעגל פשוט היא לא.

הערה 1.3:

א) דרך סטנדרטית לייצור גרף במודל הזה היא: לכל $1 \le i < j \le n$ נטיל מטבע שיוצא עץ בהסתברות p.
כל ההטלות בת"ל. הצלעות של G הן כל הצלעות שעבור הקודקודים שלהן יצא עץ.

ב) $\mathbb{P}(G)$ תלוי רק במספר הצלעות בG (ולא במבנה שלו או משהו אחר).
בפרט, לכל $0 \le m \le \binom{n}{2}$, הפונקציה אחידה על כל הגרפים על $[n]$ עם m צלעות.

ג) עבור $m \approx \binom{n}{2}p$, נצפה ש $G(n,p), G(n,m)$ יתנהגו בצורה דומה.
אמנם יש הבדלים בין המודלים, לצרכים שלנו בקורס הם מהותית אותו דבר.
(אפשר להוכיח את זה פורמלית אבל לא נעשה את זה בקורס הזה).
בפרט, ניתן להוכיח שמתקיים: עבור כל תכונת גרף מונוטונית עולה Q:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G(n,m) \in Q) = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G(n,p) \in Q) = 1$$

בפועל, זה נותן לנו לעבוד רק עם $G(n,p)$, שהוא יותר נוח, ולהסיק דברים על $G(n,m)$.

ד) מרחב ההסתברות $G(n, 1/2)$ הוא מ"ה אחיד מעל כל הגרפים על קבוצת הקודקודים $[n]$.
לכן, לכל גרף עם תכונה Q, אם נוכיח שמתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G(n,1/2) \in Q) = 1$$

זה בפועל מוכיח ש"כמעט" כל גרף גדול מקיים את Q.

דוגמה 1: נראה של"כמעט" כל גרף גדול יש קוטר לכל היותר 2. קוטר של גרף – המרחק המקסימלי בין כל שני קודקודים. (קוטר 2 משמעותו שלכל שני קודקודים יש או צלע משותפת או שכן משותף). נסמן את התכונה D_2. לפי הערה 1.3 ד, מספיק להוכיח שמתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G(n,1/2) \notin D_2) = 0$$

יהי $G\sim G(n,1/2)$ ולכל $1 \le i < j \le n$, נסמן A_{ij} את המאורע $\mathrm{dist}_G(i,j) > 2$.
לכל $z \in V(G) \setminus \{i,j\}$, ההסתברות ש z הוא שכן משותף של שניהם היא $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
ולכן ההסתברות ש z הוא לא שכן משותף של שניהם היא $\frac{3}{4}$.
לכן, ההסתברות שאין להם שכן משותף היא $(3/4)^{n-2}$.
בפרט, $\mathbb{P}(A_{ij}) \le (3/4)^{n-2}$ לכל שני קודקודים. נוכל להסיק שמתקיים:

$$\mathbb{P}(G \notin D_2) =^{א} \mathbb{P}\left(\bigcup_{1\le i<j\le n} A_{ij}\right) \le^{ב} \sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{P}(A_{ij}) \le^{ג} \binom{n}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} =^{ד} o(1)$$

א – מספיק שזוג אחד לא מקיים את התכונה.
ב – חסם איחוד.
ג – מספר הזוגות, והחסם על ההסתברות שמצאנו.
ד – כי $(3/4)^{n-2}$ פונקציה מעריכית, שואפת לאפס הרבה יותר מהר מאשר $\binom{n}{2} \in O(n^2)$ שהיא בפועל פולינום.

אז מהערה 1.3ג נקבל ש $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G(n,m) \notin D_2) = 0$, עבור $m = \left\lceil\frac{n(n-1)}{4}\right\rceil$.
אפשר להוכיח את זה ישירות (ולא דרך המודל השני) אבל זה קשה יותר.

1.2 חשיפה הדרגתית, ומונוטוניות ב $G(n,p)$

לפעמים שימושי לבנות גרף בשלבים. נגיע לשלב מסוים שנוח לנו, נסיק משהו לגבי הגרף ואז נמשיך. מה שעשינו מקודם, הטלנו מטבע לכל צלע אפשרית. אפשר לעשות את זה בשלבים – לעצור בשלב מסוים, להסיק משהו ואז להמשיך. עכשיו אנחנו רוצים לעשות משהו אחר: אנחנו רוצים להטיל את **כל** המטבעות, הטלה "חלקית":

הצעה 1.4: יהי k שלם חיובי, ונניח שיש לנו: $0 \le p, p_1, \dots p_k \le 1$ שמקיימים: $1-p = \prod_{i=1}^{k}(1-p_i)$.
אז $G(n,p)$ ו- $\bigcup_{i=1}^{k} G(n,p_i)$ מייצגים את אותו מרחב הסתברות. כלומר לגרף מסוים, ההסתברות לקבל אותו שווה בשני המרחבים. כלומר אם נסיק משהו על גרף באחד המרחבים, המסקנה תקפה גם למרחב השני.

הדרך שקיבלנו את המרחב השני היא: הטלנו את כל ה-$\binom{n}{2}$ מטבעות, בהסתברות שונה מה-p המקורי. וחזרנו על אותה פעולה עבור כל p_i. כאילו הפרדנו כל מטבע ל-k מטבעות שונים. הרעיון העיקרי הוא שלא סתם נטיל את כולם: נטיל את הראשון ונסיק מסקנות, נטיל את השני ונסיק, וכו'.

הוכחה: מרחב המדגם זהה (כל הגרפים על [n]).
אנחנו צריכים רק להראות שבהינתן גרף מסוים, ההסתברות לקבל אותו שווה בשני המרחבים.
נוכיח שלכל זוג קודקודים, ההסתברות לקיום צלע שווה בשני המודלים:
יהיו $1 \le i < j \le n$ כלשהם. נשים לב שבשני המודלים, קיום כל אחת מהצלעות הם מאורעות בלתי תלויים.
בנוסף, ההסתברות ש ij היא **לא** צלע היא $\prod_{i=1}^{k}(1-p_i) = 1-p$, שווה בשני המודלים.

1.4 הוא כלי פשוט אבל שימושי. בפרט, הוא יכול להוכיח את המונוטוניות של $G(n,p)$ ב-p.

הצעה 1.5: מונוטוניות. תהי Q תכונה מונוטונית עולה, ויהיו $0 \le p_1 \le p_2 \le 1$, כאשר $p_1 < 1$.
אזי $\mathbb{P}(G(n,p_1) \in Q) \le \mathbb{P}(G(n,p_2) \in Q)$.
כלומר, אם ההסתברות לצלע גדולה יותר, ההסתברות לתכונה מונוטונית עולה גדולה יותר.

הוכחה: נגדיר: $p_0 = 1 - \frac{1-p_2}{1-p_1}$ ונשים לב שמתקיים: $0 \le p_0 \le 1$, וגם: $1-p_2 = (1-p_0)(1-p_1)$.
לכל $i \in \{0,1,2\}$ יהי $G_i \sim G(n,p_i)$. בבירור מתקיים $G_1 \subseteq G_0 \cup G_1$.

אז מכיוון שQ מונוטונית עולה, מתקיים:

$$\mathbb{P}(G_1 \in Q) \leq^{א} \mathbb{P}(G_0 \cup G_1 \in Q) =^{ב} \mathbb{P}(G_2 \in Q)$$

א – חסם איחוד
ב – לפי 1.4, $G_2 \sim G_0 \cup G_1$

מה שבעצם עשינו זה שייצרנו את G_1, ראינו שהוא מקיים את התכונה שרצינו, ואז הוספנו לו צלעות וזה נתן לנו את G_2. ומכיוון שהתכונה מונוטונית עולה, הוספת צלעות לא תבטל אותה.

1.3 גרפים עם מותן גדולה ומספר כרומטי גדול

לפני שנגדיר ונוכיח את המסקנות מהחלק הקודם, נצטרך מספר הגדרות וטענות עזר:

הגדרה 1.6: **המותן** של גרף G, נסמן: $g(G)$, הוא אורך המעגל הקצר ביותר ב-G.
אם אין מעגלים נגדיר $g(G) = \infty$.

הגדרה 1.7: יהי $G = (V, E)$ גרף, ותהי $S \subseteq V$. S תיקרא בת"ל אם אין בה צלעות. **מספר אי-התלות** של G הוא גודל הקבוצה הבת"ל הגדולה ביותר ב-G. נסמן אותו $\alpha(G)$.

הגדרה 1.8: **המספר הכרומטי** של G הוא השלם החיובי k הקטן ביותר שעבורו קיימת פונקציה $c : V \to \{1 \dots k\}$, כך שאם $uv \in E$, אז $c(u) \neq c(v)$. נקרא גם "k-צביעה" של G.
המשמעות היא פשוט שלכל שני קודקודים שמחוברים ע"י צלע יש צבעים שונים. נסמן אותו $\chi(G)$.
K צביעה של גרף זו פשוט חלוקה של הקודקודים ל-k קבוצות בת"ל.

נשים לב שאם יש בתוך G עותק של K_d (קליקה על d קודקודים), אז $\chi(G) \geq d$.
טבעי שנשאל האם גם ההפך מתקיים, כלומר שאם $\chi(G) \geq d$ אומר ש- $K_d \subseteq G$.
זה מתקיים באופן טריוויאלי עבור $d \in \{1,2\}$, אבל כפי שנראה בדוגמה, לא מתקיים באופן כללי:

משפט 1.9: (ארדוש 1959). לכל k, ℓ שלמים קיים גרף G כך שמתקיים: $\chi(G) > k$ וגם $g(G) > \ell$.
כלומר, מספר כרומטי גדול לא חוסם את המותן (יכול להיות שלא נוכל לצבוע עם מספר מסוים של צבעים גם אם המעגל הכי קטן הוא גדול – ונובע מכך בקלות שאין קליקה).
וגם, מותן גדולה לא מגבילה את המספר הכרומטי (תמיד נוכל למצוא גרף שאי אפשר לצבוע עם k צבעים. צביעה היא לא תכונה לוקאלית – היא תלויה בכל הגרף, וצביעה בחלק מסוים לא מבטיחה שום דבר לגבי הצביעה של כל הגרף).

לפני שנוכיח את 1.9, נוכיח חסם תחתון על המספר הכרומטי של גרף:

טענה 1.10: יהי G גרף על n קודקודים. אזי $\chi(G) \geq n/\alpha(G)$.

הוכחה: יהי $k = \chi(G)$, ותהי $c : V \to \{1 \dots k\}$ k-צביעה של G.
לכל $1 \leq i \leq k$ נגדיר: $A_i = \{u \in V | c(u) = i\}$. כלומר, קבוצת הקודקודים שצבועים בצבע i.
נשים לב ש $A_1 \cup \dots \cup A_k$ היא חלוקה של V, ושכל ה-A_i בת"ל. אזי:

$$n = |V| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| \leq k \cdot \alpha(G)$$

כי הגודל של כל אחת מהקבוצות הוא לכל היותר הגודל של $\alpha(G)$, הקבוצה הבת"ל הכי גדולה. מסקנה:
$\chi(G) = k \geq n/\alpha(G)$, כנדרש.

הוכחת 1.9: יהי $\theta = 1/2\ell$, ויהי $G \sim G(n, p)$, כאשר n "מספיק גדול"[1] וכאשר $p = n^{\theta - 1}$. נקרא למעגל ב-G **קצר** אם הוא באורך לכל היותר ℓ. יהי X משתנה מקרי שסופר כמה מעגלים קצרים יש. אזי מתקיים:

[1] פורמלית, n הוא סדרה אינסופית ששואפת לאינסוף. אז פשוט נגיד שניקח את ה-n שמספיק גדול שהטענה תתקיים.

$$\mathbb{E}(X) =^{א} \sum_{i=3}^{\ell} \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-i+1)}{2i} \cdot p^i \leq^{ב} \sum_{i=3}^{\ell} n^i \cdot p^i =^{ג} \sum_{i=3}^{\ell} n^{\theta i} =^{ד} O\left(n^{\theta \ell}\right) =^{ה} o(n)$$

א – עבור כל אורך מעגל: בחירת i קודקודים עם חשיבות לסדר, וחלוקה בספירה הכפולה – אפשר לבחור קודקוד התחלתי למעגל ב-i דרכים, ו"כיוון" למעגל בשני דרכים. וכל אחד כפול p בחזקת מספר הקודקודים.

ב – המונה הוא מכפלה של i גורמים, שכל אחד קטן שווה n.

ג – במקום p נציב $n^{\theta-1}$. אז כשמעלים את זה בחזקת i נקבל $n^{\theta i-i}$, וזה כפול n^i. אז זה מצטמצם.

ד – האיבר הכי גדול בסכום הוא $n^{\theta\ell}$, ומחברים ℓ איברים. אז ניקח את האיבר הגדול ℓ פעמים וזה חסם עליון לסכום, ובגלל ש ℓ קבוע הוא יוצא ב-O.

ה – בגלל ש $\theta < 1/\ell$, אנחנו מעלים את n בחזקה קטנה מ1.

אז מאי-שוויון מרקוב נקבל: (1) $\mathbb{P}(X \geq n/2) = o(1)$.

מה עושים מכאן: אנחנו לא רוצים מעגלים קצרים, ואנחנו רוצים שמספר הצביעה יהיה גבוה.
אז אנחנו נרצה להגריל גרף כזה ששני התנאים האלה מתקיימים.
כדי להראות שמספר הצביעה גבוה, נראה חסם עליון על גודל הקבוצה הבת"ל המקסימלית.
ולפי טענה 1.10, זה נותן חסם תחתון למספר הכרומטי.
הבעיה היא שלא קיבלנו שאין בכלל מעגלים קצרים, קיבלנו שיש מעט.
אז מה שנעשה זה שנראה שההסתברות של שני המאורעות שואפת לאפס,
ולכן ההסתברות שלפחות אחד מהם קורה גם שואפת לאפס (חסם איחוד).
כלומר, בהסתברות גבוה קיבלנו גרף שיש בו מעט מעגלים ואין בו קבוצה בת"ל גדולה.
קיבלנו שגרף מקרי כמעט נתן לנו את מה שרצינו,
עכשיו "נתקן" את הגרף בצורה שלא תהרוס את התכונה של מספר הצביעה ונגרום לכך שאין מעגלים קצרים.
ונקבל שהגרף מקיים את התכונות שרצינו.
הטריק העיקרי הוא: התחלנו עם גרף מקרי, ונתקן אותו בצורה דטרמיניסטית כדי לקבל את מה שרוצים.

נחזור להוכחה: בעצם יש פה סדרה של גרפים, כי n הוא טכנית סדרה ו- p תלוי ב- n. קיבלנו שעבור n מספיק גדול, התוחלת של מספר המעגלים הקצרים היא קטנה ולכן עם אי"ש מרקוב הראנו שההסתברות שיש לפחות n/2 מעגלים שואפת לאפס. בחלק הבא, נראה שבהסתברות גבוהה, $\alpha(G)$ לא גדול.

נציב $t = \lceil 3 \ln n/p \rceil$ ונשים לב שמתקיים: (2)

$$\mathbb{P}(\alpha(G) \geq t) \leq^{א} \binom{n}{t}(1-p)^{\binom{t}{2}} \leq^{ב} n^t e^{-\frac{pt(t-1)}{2}} \leq^{ג} \left(n \cdot e^{-\frac{p(t-1)}{2}}\right)^t \leq^{ד} \left(n \cdot e^{-1.4 \ln n}\right)^t =^{ה} o(1)$$

א – חסם איחוד: ההסברות שיש קבוצה בת"ל בגודל לפחות t, היא ההסתברות שלכל קבוצה בגודל t שנבחר (יש $\binom{n}{t}$ כאלו), כל הצלעות לא קיימות – כלומר הסתברות $(1-p)$, $\binom{t}{2}$ פעמים. בגלל שבמודל הזה אין תלות בין כל הצלעות.

ב – נחסום את $\binom{n}{t}$ על ידי n^t, ונחסום את $1-p$ על ידי e^{-p}. ונפתח את $\binom{t}{2}$.

ג – נוציא את הt החוצה.

ד – ה-t,n נשארו אותו דבר. ניזכר מה הצבנו ב-p. אנחנו רוצים להגדיל את הביטוי הכללי, כלומר להגדיל את החזקה. בגלל שיש שם מינוס, נקטין את מה שכתוב. אז היינו רוצים לעשות: (ה-3 הוא פשוט קבוע גדול מ-2):

$$e^{-\frac{p}{2}(t-1)} \leq e^{-\frac{p}{2}\cdot\frac{3\ln n}{p}} = n^{-\frac{3}{2}}$$

הבעיה היא שלא התייחסנו לזה שהיה כתוב $(t-1)$. אז נכפיל את כל החזקה ב-0.99: כאשר n שואף לאינסוף, זה מוריד הרבה יותר מ- $p/2$, שזה מה שצריך:

$$e^{-\frac{p}{2}(t-1)} \leq e^{-\frac{p}{2}\cdot\frac{3\ln n}{p}\cdot 0.99} = n^{-\frac{3}{2}\cdot 0.99} \leq n^{-1.4}$$

ה – כי זה n כפול מספר ששואף לאפס (e בחזקת מינוס אינסוף), בחזקת t.

נחבר את (1), (2) ונקבל: $\mathbb{P}\left(X \geq \frac{n}{2} \text{ or } \alpha(G) \geq t\right) = o(1)$ כמו שכתבנו בהסבר למעלה.
בפרט, קיים גרף H על n קודקודים שיש בו לכל היותר $n/2$ מעגלים קצרים,
ושהקבוצה הבת"ל הכי גדולה שלו היא בגודל לפחות t.
עכשיו נתקן את הגרף: נרצה שלא יהיו מעגלים קצרים.
אם נמחק קודקוד אחד (לפחות) מכל מעגל קצר,
נקבל שאין מעגלים קצרים בכלל, ונישאר עם לפחות $n/2$ קודקודים בגרף.
ובגרף החדש מתקיים: $g(H') > \ell$ וגם $\alpha(H') \leq t$
(כי לא מחקנו צלעות, אז מה שלא היה בת"ל לא יהפוך להיות בת"ל). נסיק ש:

$$\chi(H') \geq^{\text{א}} \frac{|V(H')|}{\alpha(H')} \geq^{\text{ב}} \frac{n/2}{\left\lceil 3\ln\frac{n}{p}\right\rceil} \geq^{\text{ג}} n^{\theta/2} >^{\text{ד}} k$$

א - לפי טענה 1.10

ב – לפי התהליך שבנינו את הגרף

ג - $\frac{n^{\theta}}{12\ln n} = \frac{np}{12\ln n} = \frac{\frac{1}{2}\binom{n}{2}}{3\ln\frac{n}{p}} \geq \frac{n/2}{\left\lceil 3\ln\frac{n}{p}\right\rceil}$ החצי באי"ש הראשון זה כדי לפצות על זה שהורדנו את הערך עליון, וכל השאר זה אלגברה ונציב את מה שקבענו ל-p.

ד – n שואף לאינסוף, אז בחזקה גדולה מ-1 הוא גדול מכל קבוע.

בסה"כ הוכחנו שהמותן של הגרף גדולה מ- ℓ, ושמספר הצביעה גדול מ- k. בפרט, הוכחנו יותר מזה – הוכחנו שמספר הצביעה שואף לאינסוף.