הרצאה 12

1 משתנים מקריים נורמליים

משתנה מקרי רציף X ייקרא בעל התפלגות **נורמלית** עם פרמטרים μ, σ^2 (כאשר $\sigma > 0$) אם הPDF שלו מוגדרת לכל $x \in \mathbb{R}$:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

נוכיח שזו אכן PDF: ראשית, נציב $y = (x-\mu)/\sigma$ כך שמתקיים: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sigma}$.

אנחנו רוצים להראות: $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$. קודם נציב את הנוסחה מלמעלה, ואת החלק הקבוע (השבר) נוציא החוצה. ואז נציב. בגלל איך שקבענו את y, מתקיים:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}{2} = \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

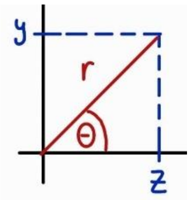
בנוסף, גבולות האינטגרל נשארים כמו שהם כי גם כשנציב $x = -\infty, \infty$ בנוסחה של y נקבל אינסוף.

במקום dx צריך לרשום dy, כלומר צריך לגזור את y לפי x. ולכן ה-σ נעלמת מהמכנה. ולכן מתקיים:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy$$

ולכן, מספיק להוכיח ש $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi}$. נגדיר $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy$ ונוכיח ש $I^2 = 2\pi$:

$$I^2 = I \cdot I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy =^{א} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2+z^2}{2}} dydz$$



א – נחליף את שם המשתנה בשביל הנוחות, ונכתוב את מכפלת האינטגרלים כאינטגרל כפול.

כדי לחשב את האינטגרל הכפול נעשה הצבה של z, y לייצוג קוטבי.
כלומר נתייחס ל-(y, z) בתור נקודה על מערכת צירים.
נציב $y = r\sin\theta, z = r\cos\theta$ וזה ייתן לנו ש $dzdy = rd\theta dr$.[1] ולכן:
$r \in [0, \infty)$ כי הוא מייצג אורך. $\theta \in [0, 2\pi]$ – זוויות של העיגול.
$y^2 + z^2 = r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = r^2$ ע"פ זהות טריגו ולכן:

$$I^2 = \int_0^{\infty} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} re^{-\frac{r^2}{2}} d\theta\right)}_{2\pi} dr = 2\pi \int_0^{\infty} re^{-r^2/2} dr = -2\pi e^{-r^2/2}\Big|_0^{\infty} = 2\pi$$

הפונקציה לא תלויה בθ, (מבחינת θ זה קבוע) אז האינטגרל הפנימי לפי $d\theta$ זה פשוט θ. בשלב השני, זה בדיוק מה שרצינו – e בחזקת פונקציה כפול הנגזרת הפנימית.

כלומר, $I = \sqrt{2\pi}$, כנדרש.

טענה 1.1: יהי X מ"מ נורמלי עם פרמטרים μ, σ^2. יהי $Y = aX + b$ עבור ממשיים b, $a > 0$ כלשהם. אז Y מתפלג נורמלית עם פרמטרים $a\mu + b,\ a^2\sigma^2$.

הוכחה: יהי F_Y ה-CDF של Y. אז, לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \le x) = \mathbb{P}(aX + b \le x) = \mathbb{P}\left(X \le \frac{x-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

נגזור לפי y ונקבל:

---

[1] שקר מתמטי כלשהו. אין הוכחה לזה פה, לא למדנו באינפי. פשוט תזרמו עם זה

$$f_Y(x)=\frac{1}{a}f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)=\frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{x-b}{a}-\mu\right)^2/(2\sigma^2)}=\frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-b-a\mu)^2/(2a^2\sigma^2)}$$

כלומר Y מתפלג נורמלית עם פרמטרים $a\mu+b,\ a^2\sigma^2$. $\qquad Y\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$.

מסקנה 1.2: יהי $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. אז אם ניקח $Y=aX+b$ עם $a=\frac{1}{\sigma},b=-\frac{\mu}{\sigma}$, כלומר: $Y:=(X-\mu)/\sigma$, זה מקיים: $Y\sim N(0,1)$

התפלגות $N(0,1)$ נקראת **התפלגות נורמלית סטנדרטית** (Standard Normal Distribution). נשים לב שה-PDF שלה היא:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

נהוג לסמן את ה-CDF של התפלגות סטנדרטית ב"פי" $\Phi(x)$, כלומר:

$$F_X(x)=\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt$$

בפרט, $\Phi(\infty)=1$. תכונה חשובה של Φ, היא סימטריות ביחס לאפס:

טענה 1.3: לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

הוכחה: לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\underbrace{\Phi(x)}_{\mathbb{P}(X\le x)}+\Phi(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$
$$=^{\text{א}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{\infty}e^{-y^2/2}dy=^{\text{ב}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}dt=1$$

א – נציב $y=-t$. אז $\frac{dy}{dt}=-1$. ולכן "הופכים" את האינטגרל.

ב – אינטגרל על PDF.

עכשיו, אם $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, אז $Y:=(X-\mu)/\sigma$ הוא סטנדרטי, ולכן:

$$F_X(x)=\mathbb{P}(X\le x)=\mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=\mathbb{P}\left(Y\le\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

כלומר, מספיק לעבוד עם ה-PDF הסטנדרטי.

דוגמה 1: יהי $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. נרצה לחשב ערך של a שעבורו $\mathbb{P}(X\le a)\approx 0.99$. מתקיים:

$$0.99\approx\mathbb{P}(X\le a)=\mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{a-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

לפי טבלת ההתפלגות הסטנדרטית, נראה ש $\Phi(2.33)\approx 0.9901$. פתרון מקורב יהיה $\frac{a-\mu}{\sigma}=2.33$ או $\frac{a-\mu}{\sigma}=2.33\sigma+\mu$.

נחשב את התוחלת ושונות של $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. יהי $Y=(X-\mu)/\sigma$, אז:

$$\mathbb{E}(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_Y(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2/2}dx=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}|_{-\infty}^{\infty}=0-0=0$$

לפי לינאריות התוחלת, נקבל:

$$\mathbb{E}(X)=^{\text{א}}\mathbb{E}(\sigma Y+\mu)=\sigma\mathbb{E}(Y)+\mu=\mu$$

א – כי $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$ אז $X=\sigma y+\mu$.

כדי לחשב את השונות של X צריך לחשב את $\mathbb{E}(Y^2)$. נעשה אינטגרציה בחלקים עם $u=x,v'=xe^{-x^2/2}$ ונקבל:

$$\mathbb{E}(Y^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_Y(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-x^2/2}dx}_{\int uv\prime}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\underbrace{-xe^{-x^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{uv}-\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}-e^{-x^2/2}dx}_{\int u\prime v}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[(0-0)-\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}-e^{-x^2/2}dx}_{\int u\prime v}\right]=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}dx}_{\text{PDF}}=1$$

ולכן, $Var(Y)=\mathbb{E}(Y^2)-\big(\mathbb{E}(Y)\big)^2=1-0=1$.

ונקבל: $Var(X)=Var(\sigma Y+\mu)=\sigma^2Var(Y)=\sigma^2$.

דוגמה 2: יהי $X\sim N(0,1)$, ותהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה שמקיימת: (1)

$$\lim_{x\to\infty}g(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to-\infty}g(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}=0$$

א) נוכיח ש $\mathbb{E}\big(g'(X)\big)=\mathbb{E}\big(X\cdot g(X)\big)$:

נעשה אינטגרציה בחלקים עם $u=g(x), v'=xe^{-x^2/2}$, ועם (1) נקבל:

$$\mathbb{E}\big(X\cdot g(X)\big)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot g(x)\cdot e^{\frac{-x^2}{2}}dx}_{\int uv\prime}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\underbrace{g(x)\cdot e^{\frac{-x^2}{2}}}_{uv}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}-g'^{(x)}\cdot e^{\frac{-x^2}{2}}dx}_{\int u\prime v}$$

$$=0-0+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g'^{(x)}\cdot e^{\frac{-x^2}{2}}dx=\mathbb{E}\big(g'(X)\big)$$

ב) נוכיח ש $\mathbb{E}(X^{n+1})=n\cdot\mathbb{E}(X^{n-1})$

נקבע שלם חיובי n כלשהו, ונגדיר את g: $g(x)=x^n$. אז לפי (א) נקבל:

$$\mathbb{E}(X^{n+1})=\mathbb{E}(X\cdot X^n)=\mathbb{E}\big(X\cdot g(x)\big)=\mathbb{E}\big(g'(x)\big)=\mathbb{E}(n\cdot X^{n-1})=n\mathbb{E}(X^{n-1})$$

ג) נחשב את $\mathbb{E}(X^4)$:

בגלל ש $X\sim N(0,1)$, נקבל לפי (ב):

$$\mathbb{E}(X^4)=3\cdot\mathbb{E}(X^2)=3\cdot\mathbb{E}(X^0)=3\cdot\mathbb{E}(1)=3\cdot1=3$$