הרצאה 3

1 מבוא לשיטה ההסתברותית

שימוש בכלים הסתברותיים כדי להוכיח טענות דטרמיניסטיות. לדוגמה: אם נרצה להוכיח שקיים אובייקט עם תכונה מסוימת, נוכל לספור את כל האובייקטים, לספור את האובייקטים ה"רעים" ולהראות שיש פחות רעים מאשר אובייקטים בכלל. בשיטה ההסתברותית, נחשב מה ההסתברות לבחור אובייקט טוב ונראה שההסתברות חיובית.

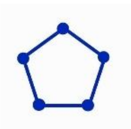
כלים שנשתמש בהם הם: לינאריות התוחלת, והעובדה שתמיד קיים ω כך ש $X(\omega) \le \mathbb{E}(X)$, וגם ω כך ש $X(\omega) \ge \mathbb{E}(X)$. (אם הכל קטן ממש מהתוחלת, התוחלת הייתה קטנה יותר).

1.1 חסם תחתון למספרי רמזי:

עבור שני טבעיים k, ℓ, **מספר רמזי** $R(k,\ell)$ הוא הטבעי n הקטן ביותר כך שלכל גרף על n קודקודים יש קליקה בגודל k או קבוצה בת"ל בגודל ℓ. כלומר, $R(k,\ell) > n$ אם **קיים** גרף על n קודקודים שאין בו קליקה בגודל k או קבוצה בת"ל בגודל ℓ.

(אינטואיציה: אם אין לי הרבה צלעות, תהיה לי קבוצה בת"ל בגודל ℓ. ואם נוסיף מספיק צלעות כדי שלא תהיה קבוצה בת"ל בגודל הזה, תהיה קליקה בגודל k. עבור כל שני מספרים כאלה, אם ניקח n מספיק גדול אז זה יתקיים לכל גרף).

דוגמאות עבור מספרי רמזי "אלכסוניים" – כאשר $k = \ell$.



$R(1,1) = 1$ – עם קודקוד אחד יש גרף יחיד. אז "לכל" גרף יש קליקה או קבוצה בת"ל בגודל 1.
$R(2,2) = 2$ – עם שני קודקודים, יש שני גרפים: מלא או ריק. בכל אחד יש את אחת הדרישות.
$R(3,3) = 6$ – נדגים שזה חייב להיות יותר מ-5: בגרף בתמונה אין אף קליקה או קבוצה בת"ל בגודל 3.
$R(4,4) = 18$ – הסיפור של הניסוי הסוציולוגי: בכל קבוצה של לפחות 18 אנשים, יהיו 4 אנשים שכולם מכירים את כולם או 4 אנשים שאף אחד לא מכיר את השני. זו בעצם תופעה מתמטית ולא סוציולוגית.
$R(5,5) = ?$ – לא ידוע. המספרים פשוט גדולים מדי.
באופן כללי, $R(t,t) \le 4^t$.

משפט 1.1: אם $\binom{n}{t} 2^{1-\binom{t}{2}} < 1$, אז $R(t,t) > n$.

כלומר, בהינתן t, נוכל לקבל חסם תחתון עבור n.

הוכחה: נקרא לגרף גרף **טוב** אם אין בו קליקה או קבוצה בת"ל בגודל t. גרף שיש בו אחד מהם ייקרא **רע**.
עבור n נתון, נבנה גרף G על $[n]$ בצורה הבאה: לכל $1 \le i < j \le n$ (כל זוג קודקודים שונים), נטיל מטבע הוגן שייקבע אם יש ביניהם צלע. כל ההטלות בת"ל.
נראה שההסתברות שהגרף המתקבל הוא טוב היא חיובית ממש,
וזה יוכיח שקיים גרף טוב על n קודקודים, כלומר $R(t,t) > n$.
יהיו $S_1 \dots S_{\binom{n}{t}}$ כל תתי הקבוצות של $[n]$ בגודל t.
לכל $1 \le i \le \binom{n}{t}$ נגדיר את המאורע A_i: 'הקבוצה $G[S_i]$ היא קליקה או קבוצה בת"ל'.
כלומר כל ההטלות יצאו עץ או כולם פלי. מתקיים לכל $1 \le i \le \binom{n}{t}$: $\mathbb{P}(A_i) = 2 \cdot 2^{-\binom{t}{2}}$.
צריך שנקבל עץ או פלי (לכן כפול 2), באופן עקבי $\binom{t}{2}$ פעמים. כל פעם הסתברות חצי. ולכן:

$$\mathbb{P}(G \text{ is bad}) \overset{\text{א}}{=} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\binom{n}{t}} A_i\right) \overset{\text{ב}}{\le} \sum_{i=1}^{\binom{n}{t}} \mathbb{P}(A_i) \overset{\text{ג}}{=} \binom{n}{t} 2^{1-\binom{t}{2}} \overset{\text{ד}}{<} 1$$

א – מספיק שאחת הקבוצות מקיימת את התנאי.
ב – חסם איחוד.
ג – לפי החישוב לעיל.
ד – הנחת הטענה.

הנחנו ש $\binom{n}{t}2^{1-\binom{t}{2}} < 1$, וחישבנו (בלי קשר) את ההסתברות לגרף רע. וראינו שזה יוצא אותו דבר. כלומר אם ההנחה מתקיימת, אז יש הסתברות פחות מ-1 לקבל גרף רע, כלומר הסתברות חיובית לקבל גרף טוב. כלומר צריך יותר מ- n קודקודים כדי שלא יהיה גרף טוב – או במילים אחרות, $R(t,t) > n$.

מסקנה 1.2: לכל $t > 4$ מתקיים $R(t,t) > \lfloor 2^{t/2} \rfloor$. הוכחה: יהי $n = \lfloor 2^{t/2} \rfloor$. ע"פ משפט 1.1, מספיק להוכיח שמתקיים $\binom{n}{t}2^{1-\binom{t}{2}} < 1$. ואכן מתקיים:

$$\binom{n}{t}2^{1-\binom{t}{2}} =^{א} \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-t+1)}{t!}2^{1-\frac{t(t-1)}{2}}$$

$$\leq^{ב} \frac{n^t}{t!}2^{1-\frac{t^2-t}{2}} \leq^{ג} \frac{\left(2^{\frac{t}{2}}\right)^t \cdot 2^{1-\frac{t^2}{2}+\frac{t}{2}}}{t!}$$

$$=^{ד} \frac{2^{\frac{t^2}{2}+1-\frac{t^2}{2}+\frac{t}{2}}}{t!} =^{ה} \frac{2^{1+\frac{t}{2}}}{t!} \leq^{ז} \frac{2^{t-1}}{t!}$$

$$=^{ח} \prod_{i=2}^{t}\frac{2}{i} <^{ט} 1$$

א – פתיחת הchoose

ב – במונה יש t פעמים משהו שקטן או שווה n

ג – הצד הימני במונה זה המשך פתיחה של השבר. הצד השמאלי זה הצבה של הערך שהגדרנו ל-n.

ד – פתיחת סוגריים.

ה – צמצום.

ז – כי $1 + \frac{t}{2} \leq t - 1$, מתקיים לכל $t \geq 4$.

ח – במכנה כתוב בעצם: $2 \cdot \ldots \cdot (t-1)t$.

ט – כי כל מכנה הוא לפחות 2.

1.2 טורניר ותכונת S_k

טורניר על n קודקודים הוא הגרף השלם על n קודקודים, שלכל צלע נתנו כיוון.

כיוון צלע $v \to u$ מתאר "ניצחון" של u על v. יהי $T = (V,E)$ טורניר, תהי $A \subseteq V$, ויהי $u \in V \setminus A$.

נאמר ש u **שולטת** על A אם לכל $v \in A$, כיוון הצלע uv הוא $u \to v$. נסמן: $\overrightarrow{uv} \in E$.

בהינתן k טבעי, נאמר ש T מקיים את S_k אם לכל $A \subseteq V$ בגודל k יש קודקוד $u \in V \setminus A$ ששולט על A.

כלומר לכל קבוצה בגודל k שנבחר, יש קודקוד אחר ששולט עליהם.

טענה 1.3: אם $\binom{n}{k}\left(1-2^{-k}\right)^{n-k} < 1$, אז יש טורניר על n קודקודים שמקיים את S_k.

הוכחה: יהי $T = (V,E)$ טורניר אקראי על $V = \{1,2,\ldots,n\}$,

ולכל $1 \leq u < v \leq n$ נטיל מטבע הוגן (כל ההטלות בת"ל). אם יצא עץ, הכיוון יהיה $\overrightarrow{uv}$ ואחרת בכיוון השני.

כלומר $\overrightarrow{uv} \in E$ מתקיים בהסתברות 1/2.

תהי $A \subseteq V$ כלשהי מגודל k, ויהי קודקוד $x \in V \setminus A$ כלשהו.

ההסתברות ש $\overrightarrow{xa} \in E$ לכל $a \in A$ היא 2^{-k}. כלומר ההסתברות שזה לא מתקיים היא $1 - 2^{-k}$.

ההסתברות שאין אף קודקוד $x \in V \setminus A$ ששולט על A היא $\left(1-2^{-k}\right)^{n-k}$.

(כי צריך שההטלה תצא פלי לכל אחד מהקודקודים שלא בA – יש $n-k$ כאלה. וכל ההטלות בת"ל).

אנחנו רוצים לדעת מה קורה עם **כל** הקבוצות בגודל k. יש $\binom{n}{k}$ כאלה.

נבצע חסם איחוד ונקבל שההסתברות שT לא מקיים את S_k היא לכל היותר $\binom{n}{k}\left(1-2^{-k}\right)^{n-k}$.
כלומר אם זה קטן ממש מ1, אז ההסתברות שT כן מקיים את S_k היא חיובית ממש, כנדרש.

1.3 קבוצות שלטות קטנות בגרפים:

יהי גרף $G=(V,E)$. תת קבוצה $S\subseteq V$ נקראת קבוצה **שלטת** בגרף אם לכל קודקוד שלא בS קיים שכן אחד לפחות בS. (V עצמה שלטת באופן ריק). המטרה שלנו היא להוכיח את קיומה של קבוצה שלטת קטנה.

משפט 1.4: יהי $G=(V,E)$ גרף על n קודקודים, עם דרגה מינימלית $\delta>1$.
אז קיימת בG קבוצה שלטת עם לכל היותר $n\frac{1+\ln(\delta+1)}{\delta+1}$ קודקודים.

הוכחה: יהי $p=\frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}$. נבנה קבוצה אקראית X בצורה הבאה:
נתחיל עם $X=\emptyset$, ולכל $u\in V$ נוסיף את u ל-X בהסתברות p, כאשר כל הבחירות בת"ל.
נשים לב שמתקיים $|X|\sim Bin(n,p)$ ובפרט, $\mathbb{E}(|X|)=np$.
תהי $Y\subseteq V\setminus X$ קבוצת הקודקודים שאין להם שכן בX. לכל $v\in V$, יהי Y_v האינדיקטור למאורע $v\in Y$. אזי:

$$\mathbb{E}(Y_v)=\mathbb{P}(Y_v=1)=\mathbb{P}(\text{niether v nor its neighbors are in X})=(1-p)^{\deg_G(v)+1}\le(1-p)^{\delta+1}$$

כי צריך **לא לצרף** את הקודקוד לX מספר הפעמים של הדרגה של v, ועוד 1.
יהי $S=X\cup Y$. בבירור, S שלטת על G. (כי הוספנו לקבוצה את כל הקודקודים שלא היה להם שכן בX. אז עכשיו כל קודקוד, או שהוא נמצא בS או שיש לו שכן בX). ומתקיים:

$$\mathbb{E}(|S|)\overset{\text{א}}{=}\mathbb{E}(|X|)+\mathbb{E}(|Y|)\overset{\text{ב}}{=}np+\sum_{v\in V}\mathbb{E}(Y_v)\overset{\text{ג}}{\le}np+n(1-p)^{\delta+1}\overset{\text{ד}}{\le}$$
$$np+ne^{-p(\delta+1)}\overset{\text{ה}}{=}n\left(\frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}+e^{-\ln(\delta+1)}\right)\overset{\text{ו}}{=}\frac{\ln(\delta+1)+1}{\delta+1}n$$

א – איחוד זר.
ב – לינאריות התוחלת של Y, והגדרת התוחלת של X.
ג – החסם בחישוב לעיל, כפול מספר הקודקודים בV.
ד – $1-p\le e^{-p}$.
ה – נוציא n החוצה, ונציב את הערך שהגדרנו ל p. בחזקה של e זה מצטמצם.
ז – e בחזקת מינוס לן זה 1 חלקי e בחזקת לן, זה מצטמצם ונשאר רק הדלתא ועוד 1.

בסה"כ הוכחנו שזה התוחלת של S. בוודאות יש קבוצה S אחת שהגודל שלה הוא לכל היותר התוחלת (הדוגמה של הממוצע מתחילת השיעור) אז קיימת קבוצה S (שהיא שלטת) בגודל לכל היותר מה שיצא. כנדרש.