

הסקה סטטיסטית שיעור 8

מצגת שיעור 8

הרצאה

תרגיל כיתה

אספנו דאטא בניסוי ועשינו מבחן z שמאלי עם מובהקות 0.1. מצאנו שהערך z הוא 1.8. אזי, הערך הקריטי של תחום הדחייה מחושב על ידי: $\text{qnorm}(0.1, 0, 1)$. ערך p -מחושב על ידי $\text{pnorm}(1.8, 0, 1)$. ולא נדחה את H_0 , כי קיבלנו דאטא פחות קיצונית מתחום הדחייה.

טעויות, רמת מובהקות, עוצמה

תרגיל כיתה:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$H_0 : p(x \theta = 0.5)$.001	.010	.044	.117	.205	.246	.205	.117	.044	.010	.001
$H_A : p(x \theta = 0.6)$.000	.002	.011	.042	.111	.201	.251	.215	.121	.040	.006
$H_A : p(x \theta = 0.7)$.000	.0001	.001	.009	.037	.103	.200	.267	.233	.121	.028

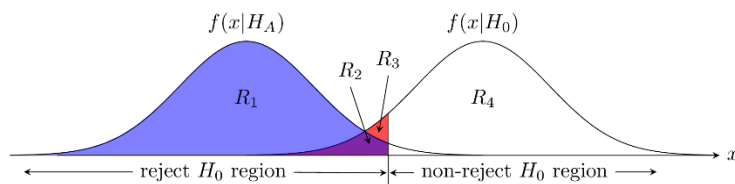
רמת המובהקות של הניסוי: ההסתברות לטעות מסוג 1, או $false$ $positive$ (שנדחה את H_0 בטעות). זה סכום ההסתברויות בתחום הדחייה, בהינתן H_0 . כלומר:

$$P(x \in \{0,1,2,8,9,10\}|\theta = 0.5) = 2 \cdot (0.001 + 0.01 + 0.044) = 0.11$$

עוצמת הניסוי: ההסתברות ל- $true positive$ (שדחה את H_0 בצדק). סכום ההסתברויות בתחום הדחייה בהינתן H_A :

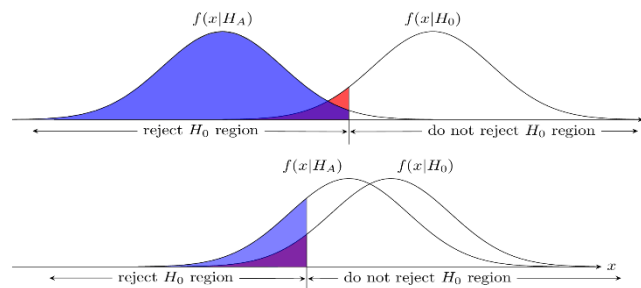
$$P(x \in \{0,1,2,8,9,10\}|\theta = 0.6) = 0.000 + 0.002 + 0.011 + 0.121 + 0.04 + 0.006 = 0.18$$

$$P(x \in \{0,1,2,8,9,10\}|\theta = 0.7) = 0.000 + 0.0001 + 0.001 + 0.233 + 0.121 + 0.028 = 0.383$$



דוגמאות:

העוצמה היא השטח: $R_1 + R_2$.



לגרף העליון יש עוצמה הרבה יותר גבוהה. העוצמה היא השטח מתחת ל $f(x|H_A)$ שנמצא בתחום הדחייה. וכאן אפשר לראות שזה כמעט כל השטח מתחת ל $f(x|H_A)$, שזה 1.

תרגיל: התפלגות האפס עבור סטטיסטי מבחן x היא $N(4, 8^2)$. תחום הדחייה הוא $x \geq 20$.

נשים לב ש-20 זה בדיוק 2 סטיות תקן מעל התוחלת, כלומר $P(x \geq 20|H_0) \approx 0.025$. זה המובהקות. העוצמה לא ידועה כי היא תלויה בהשערה אלטרנטיבית.

מבחן t למדגם יחיד

בניח דאטא נורמלית: $x_1, \dots, x_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, עם פרמטרים לא ידועים. $H_0 := \mu = \mu_0$. סטטיסטי המבחן: $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$. כאשר:

$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$. כאן t הוא ה $Studentized mean$, ו- s^2 הוא שונות המדגם. התפלגות האפס $f(t|H_0)$ היא PDF של $T \sim t(n-1)$. ערך p דו צדדי: $p = P(|T| > |t|)$.

תרגיל: נשתמש ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$. הדאטא 2, 4, 4, 10, נדגמה מתוך $N(\mu, \sigma^2)$. נניח $H_0 := \mu = 0$, $H_A := \mu \neq 0$. המבחן הוא דו צדדי (כי לא אכפת לנו אם הממוצע מעל או מתחת ל-0, העיקר שהוא שונה). אם נניח ש $\sigma^2 = 16$, אז:

$$\bar{x} = \frac{2 + 4 + 4 + 10}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$z = \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{5}{2}$$

תחום הדחייה הוא הזנבות בשני הצדדים כך שהשטח בהם הוא 0.05, כלומר בכל צד זה ההסתברות ש z יותר קיצוני מ 0.025. אז הערך הקריטי הוא ± 1.96 . אנחנו בתחום הדחייה אז נדחה את H_0 .

כנ"ל עם ה p -value: $p = P(|Z| \geq 2.5 | H_0) = 0.012 < \alpha$, אז נדחה את H_0 . אם נניח ש σ לא ידוע, אז:

$$s^2 = \frac{1}{4-1} \sum_{i=1}^4 (x_i - 5)^2 = \frac{1}{3} [(2-5)^2 + (4-5)^2 + (4-5)^2 + (10-5)^2] = \frac{1}{3} [3^2 + 1^2 + 1^2 + 5^2] =$$

$$= \frac{1}{3} [9 + 1 + 1 + 25] = \frac{1}{3} (36) = 12$$

$$t = \frac{5-0}{s/\sqrt{4}} = \frac{5}{\sqrt{12}/\sqrt{4}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

אז ה p -value:

$$p = P\left(|T| \geq \frac{5}{\sqrt{3}} | H_0\right) = 0.06318$$

מכיוון ש $p > \alpha$, לא נדחה את H_0 .

מבחן t לשני מדגמים עם שונות זהה

נניח דאטא $x_1, \dots, x_n \sim N(\mu_x, \sigma^2)$, $y_1, \dots, y_m \sim N(\mu_y, \sigma^2)$. השערת האפס: $\mu_x = \mu_y$. שונות כוללת: $s_p^2 = \frac{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}{n+m-2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$. $t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_p}$. התפלגות האפס: $f(t|H_0)$ היא ה PDF של $T \sim t(n+m-2)$. באופן כללי מתקיים: $\frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{s_p} \sim t(n+m-2)$. דוגמה – בסוף החומר קריאה.

שאלת כיתה – טעויות סוג 1

נניח שכתב עת מדעי מפרסם רק מאמרים עם רמת מובהקות סטטיסטית 0.05. באיזה אחוז מהמאמרים שלו יש טעות סוג 1? אנחנו לא יכולים לדעת! נמחיש בעזרת דוגמאות:

נניח שמדען א' בוחן את האפקטיביות של הרבה תרופות. כל ניסוי נראה כך:

יש קבוצת ניסוי וקבוצת ביקורת. הביקורת מקבלת פלצבו. השערת האפס היא שהתרופה לא יותר אפקטיבית מהפלצבו. רמת המובהקות היא 0.05. אם ה p -value קטן מ-0.05, הוא מסיק שהתרופה אפקטיבית ומפרסם את המאמר.

נניח שאף אחת מהתרופות לא אפקטיביות. עדיין, הוא יפרסם בערך 5% מהמאמרים (מובהקות זה ההסתברות לדחות את השערת האפס כשהיא נכונה. אם השערת האפס תמיד נכונה, אז המובהקות זה בדיוק הסיכוי לדחות את השערת האפס). בגלל שכל התרופות לא אפקטיביות, ב-100% מהמאמרים שלו יש טעות סוג 1.

מדענית ב' עושה את אותו ניסוי, אבל הפעם נניח שכל התרופות אפקטיביות. אין לנו איך לדעת במדויק כמה אחוז מהמאמרים שלה יפורסמו – זה תלוי עד כמה התרופות אפקטיביות. אם הם רק קצת יותר אפקטיביות מהפלצבו (כלומר בתוצאות נראה שהם כמעט אותו דבר) אז רק 5% מהמאמרים יפורסמו. אם הם הרבה יותר אפקטיביים מהפלצבו (הכי קיצוני זה אם הפלצבו אפקטיבי ב-0% והתרופה אפקטיבית ב-100%) אז כמעט 100% מהמאמרים יפורסמו. מכיוון שכל התרופות אפקטיביות, באף אחד מהמאמרים אין טעות סוג 1.

אם שניהם מפרסמים מאמרים בכתב העת, מהנתונים אי אפשר לדעת מה אחוז הטעויות סוג 1 בכתב העת.

