CHAPITRE 11

VECTEURS DE L'ESPACE

11.1 Égalité de deux vecteurs - Somme de deux vecteurs :

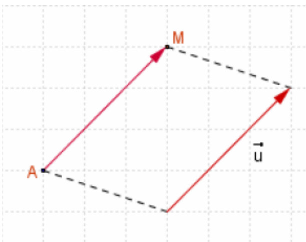
11.1.1 Éléments caractéristiques d'un vecteur :

Soit A et B deux points différents de l'espace. Si on pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ alors :

- ▷ La direction du vecteur $\overrightarrow{u}$ est la droite (AB).
- ▷ Le sens du vecteur $\overrightarrow{u}$ est celui de A vers B.
- ▷ La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ est la distance AB, et on écrit : $\|\overrightarrow{u}\| = AB$.

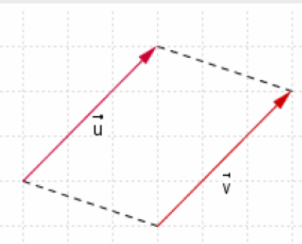
Remarque :

- ▷ Pour tout point A de l'espace, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ n'a pas de direction et sa norme est nulle ; $\overrightarrow{AA}$ est appelé vecteur nul, et on écrit : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.
- ▷ Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et tout point A de l'espace,



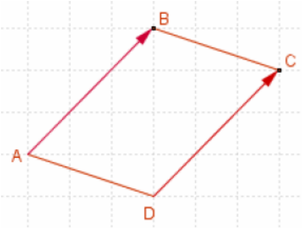
il existe un et un seul point M de l'espace tel que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}$

Définition 11.1
On dit que deux vecteurs sont égaux, s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.



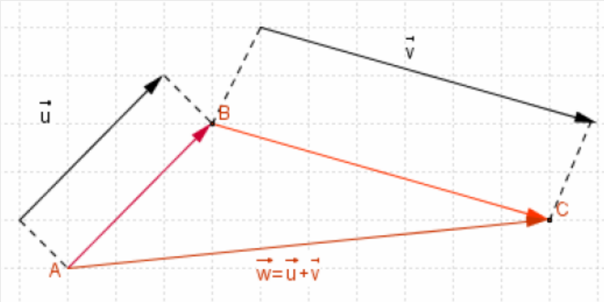
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$

Proprieté 27
Soit ABCD un quadrilatère dans l'espace on a :
ABCD parallélogramme si et seulement si : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$



11.1.2 Somme de deux vecteurs :

Définition 11.2
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.
La somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{w}$ tel que :
Si on pose : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$ alors : $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC}$ et on écrit : $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.



Relation de Chasles :

Pour tous points A, B et C de l'espace, on a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

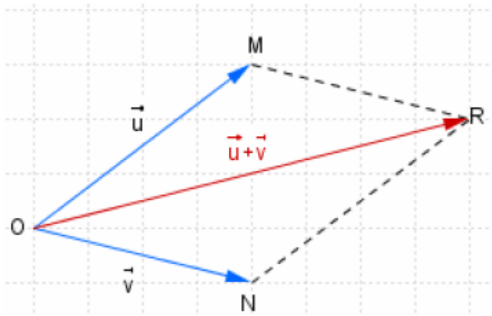
Opposé d'un vecteur :

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace :

- ▷ L'opposé du vecteur $\overrightarrow{u}$ et le vecteur qui a la même direction, et la même norme que le vecteur $\overrightarrow{u}$, mais il est de sens contraire au vecteur $\overrightarrow{u}$.
- ▷ L'opposé du vecteur $\overrightarrow{u}$ est noté $-\overrightarrow{u}$.
- ▷ Pour tout points A et B on a : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Remarque :

Soient O ; M ; N et R quatre points de l'espace :



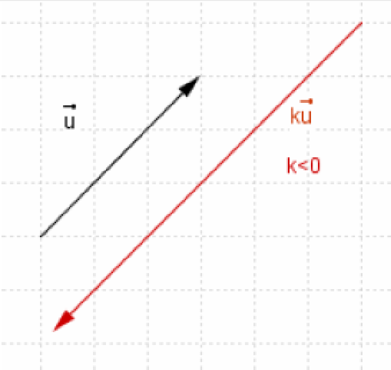
$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OR}$ si et seulement si $OMNR$ est un parallélogramme.

11.2 Colinéarité de deux vecteurs - Définition vectorielle d'une droite :

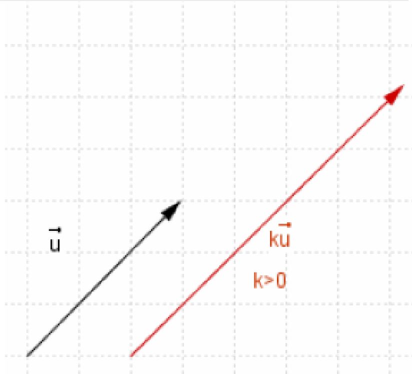
11.2.1 Multiplication d'un vecteur par un réel :

Définition 11.3
Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et k un nombre réel non nul.
Le produit du vecteur $\overrightarrow{u}$ par le réel k est le vecteur noté $k \cdot \overrightarrow{u}$, ou simplement $k\overrightarrow{u}$, qui vérifier les condition suivants :

- ▷ $k\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}$ ont la même direction.
- ▷ $\|k\overrightarrow{u}\| = |k| \times \|\overrightarrow{u}\|$
  - $k\overrightarrow{u}$ a le même sens que celui de $\overrightarrow{u}$ si $k > 0$
  - $k\overrightarrow{u}$ a de sens contraire que celui de $\overrightarrow{u}$ si $k > 0$



$k \prec 0$



$k \succ 0$

▷ Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et tout réel k on pose : $0 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $k \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$

Proprieté 28
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et pour tous réels k et k' on a :
▷ $(k+k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$ ▷ $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$ ▷ $1 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
▷ $k(k' \cdot \overrightarrow{u}) = (kk')\overrightarrow{u}$ ▷ $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow k = 0 \; ou \; \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

11.2.2 Colinéarité de deux vecteurs - alignement de trois points :

Définition 11.4
On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre réel k tel que : $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.

Remarque : Le vecteur nul est colinéaire avec tous les vecteurs de l'espace.

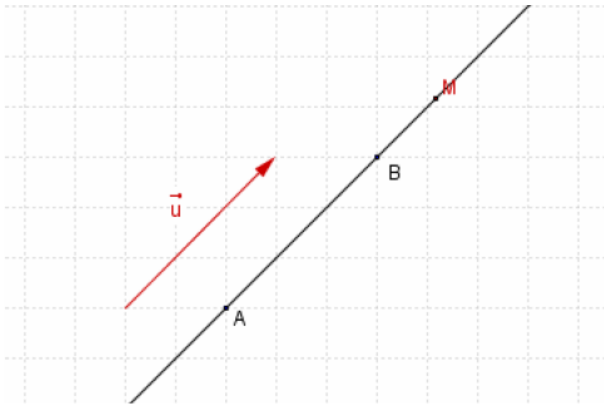
Conséquences :

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

- ► ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaire) $\Leftrightarrow$ (A ; B et C sont alignés).
- ► ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaire) $\Leftrightarrow (AB) // (CD)$

11.2.3 Définition vectorielle d'une droite de l'espace :

Définition 11.5
Soient A et B deux ponts distincts de l'espace.
Tout vecteur non nul colinéaire avec le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé vecteur directeur de (AB).



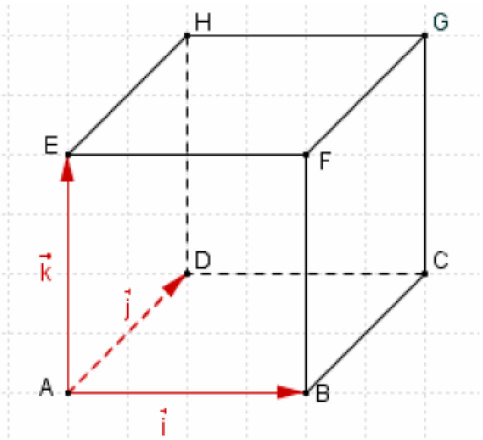
Proprieté 29
Soit A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u}$ où $k \in \mathbb{R}$, est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, cette droite est notée $D(A;\overrightarrow{u})$.
On a : $D(A;\overrightarrow{u}) = \left\{M \in (\mathcal{E}) \ / \ \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u} \ ; \ k \in \mathbb{R}\right\}$. (où $(\mathcal{E})$ = l'espace)

Exercice :

Soient $ABCDEFGH$ un cube posons $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = \vec{k}$ et $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$. et soit I le milieu de $[HG]$

1) Montrer que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AI)
2) Soit (Δ) la droite passant par G et parallèle à (AI) et M un point de l'espace tel que :
$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BG}$; Montrer que $M \in (\Delta)$.

Solution :



1) Montrons que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AI), il suffit de montrer que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaire.
On a : I est le milieu de $[HG]$ alors : $\overrightarrow{HI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$. On a :
$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$ et comme $ABCDEFGH$ est un cube alors :
$\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB} = \vec{i}$ donc : $\overrightarrow{AI} = \vec{k} + \vec{j} + \frac{1}{2}\vec{i} = \frac{1}{2}\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right) = \frac{1}{2}\vec{u}$
alors : $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaire et donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AI).
2) Montrons que $M \in (\Delta)$.
On a (Δ) est la droite passant par G et parallèle à (AI) donc $(\Delta) = D(G;\vec{u})$
Donc il suffit de montrer que $\overrightarrow{GM} = \alpha\vec{u}$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CG}$$

بما أن $ABCDEFGH$ مكعب فان $\overrightarrow{GF} = -\overrightarrow{AD} = -\vec{j}$ و $\overrightarrow{FB} = -\overrightarrow{AE} = -\vec{k}$ و $\overrightarrow{CG} = \vec{k}$ و $\overrightarrow{BC} = \vec{j}$

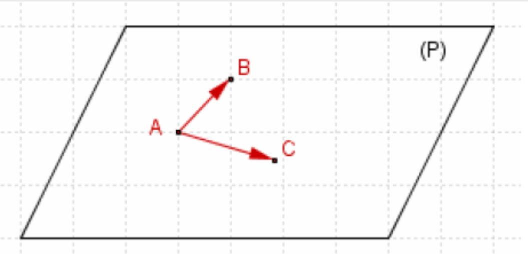
$$\overrightarrow{GM} = -\vec{j} - \vec{k} + \frac{1}{2}i + 2\vec{j} + 2\vec{k} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \frac{1}{2}\left(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\right) = \frac{1}{2}\vec{u}$$

و بالتالي $M \in D(G;\vec{u})$ إذن $M \in (\Delta)$

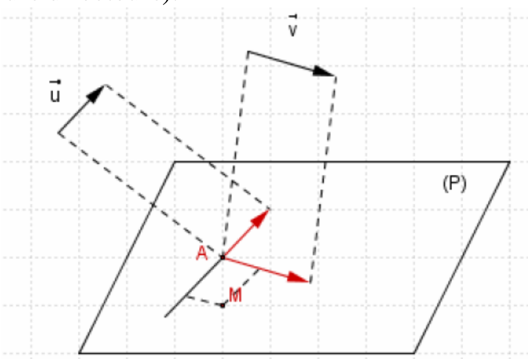
11.3 Définition vectorielle d'un plan - Les vecteurs coplanaires :

11.3.1 Définition vectorielle d'un plan :

Définition 11.6
Soit (P) un plan de l'espace et A ; B et C trois points non alignés du plan (P).
On dit que (P) est le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.



Remarque : $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont aussi des vecteurs directeurs du plan (P)
Conséquences :
Deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un point A définissent un plan unique noté : (P), (ce plan passant par A et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs).

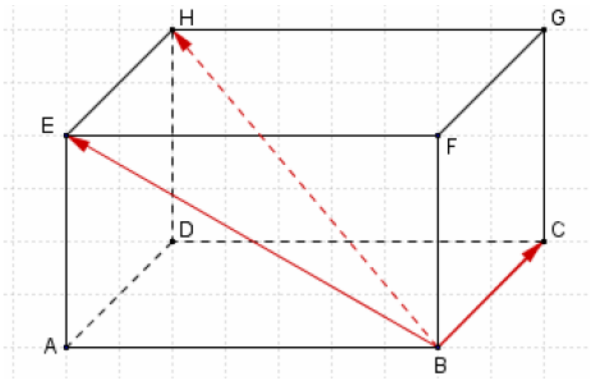


On écrit $(P) = P(A;\vec{u};\vec{v})$.

11.3.2 Vecteurs coplanaires :

Définition 11.7
Soit $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
On dit que les vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** , s'il existe quatre points **coplanaires** A ; B ; C et D tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

Exemples :
Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle.
On a les vecteurs $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont coplanaires car les points B ; C ; E et H sont coplanaires.
$\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas coplanaires car $BDEH$ est un tétraèdre.



Proprieté 30
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non alignés et $\vec{w}$ un vecteur de l'espace.
les vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si, il existe deux nombres réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Conséquences

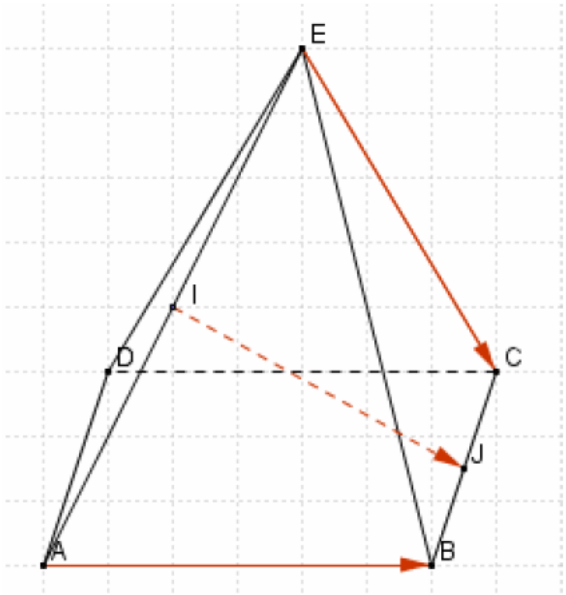
Soient A ; B ; C et M des points de l'espace.
S'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ alors, les points A ; B ; C et M sont coplanaires.

Exercice :

Soit $EABCD$ un pyramide de base rectangle $ABCD$; I et J sont respectivement les milieux des segments $[AE]$ et $[BC]$.
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont coplanaires.

Solution :

On a : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$ et comme I et J sont les milieux des segments $[AE]$ et $[BC]$. alors :



$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \text{ و } \overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Alors les vecteurs
$\overrightarrow{IJ}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{EC}$
Sont coplanaires