

湖南大学复变函数讲义

姚懿

2026-02-28

目录

前言	1
第一章 复数	3
1.1 复数的定义	3
1.2 复数的几何意义	5
1.2.1 复数乘法示意图	5
1.3 习题	5
第二章 解析函数	7
2.1 解析函数	7
2.2 柯西-黎曼方程	7
2.3 习题	7

前言

这是复变函数的讲义。

第一章 复数

这一章我们主要介绍复数的概念、复数域、复数的几何意义、复数的运算法则等。

1.1 复数的定义

复数的引入是为了推广实数域到复域，以便于描述和研究一些在实数域上不存在的量，例如根为负数的二次方程的解。

定义 1.1. (复数域)

复数域 \mathbb{C} 定义为有序实数对 (a, b) 的集合，配备加法

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad (1.1)$$

与乘法

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \quad (1.2)$$

上述定义 1.1 是标准的。

定理 1.1. 在运算 (1.1) 和 (1.2) 下， \mathbb{C} 构成一个域，其零元为 $(0, 0)$ ，单位元为 $(1, 0)$ ，并满足交换律、结合律及分配律。

证明. 回忆域的定义，验证上述运算满足所有域的性质。留作习题。 \square

推论 1.1. 复数域 \mathbb{C} 中非零元素均可逆。

例 1.1. 由 (1.2), 计算 $(2 + 3i)(-1 - 4i) = (2 - 3i)(-1 + 4i) = -10 + 13i$ 。

例 1.2. 由推论 1.1, 计算复数的逆元 $(2 + 3i)^{-1} = 2 - 3i$ 。

练习 1.1. 验证 $(2 + 3i)^{-1} = 2 - 3i$ 。

$$\text{Res}_a(f(z))$$

For a demonstration of a line plot on a polar axis, see 图 1.1.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

r = np.arange(0, 2, 0.01)
theta = 2 * np.pi * r
fig, ax = plt.subplots(
    subplot_kw = {'projection': 'polar'}
)
ax.plot(theta, r)
ax.set_rticks([0.5, 1, 1.5, 2])
ax.grid(True)
plt.show()
```

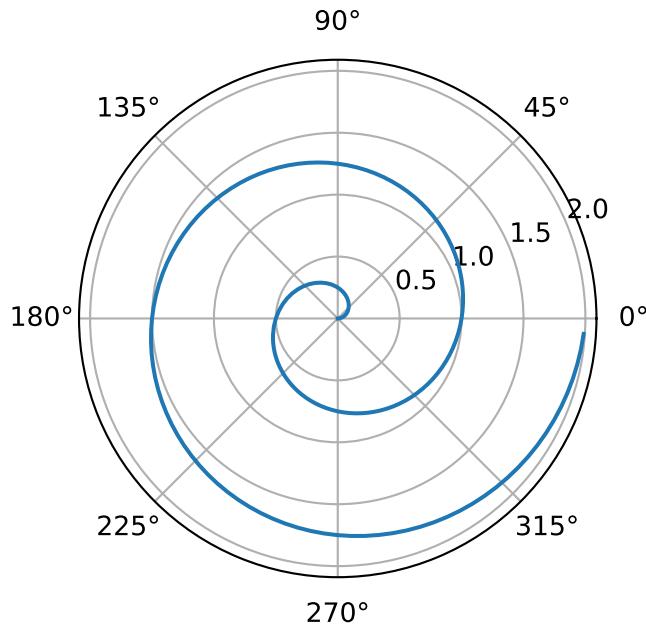


图 1.1: A line plot on a polar axis

1.2 复数的几何意义

这里是几何意义的内容。

回顾定义 1.1 的定义。@ref(def-complex-field)

1.2.1 复数乘法示意图

下图展示了复数乘法的几何意义：模相乘，辐角相加。

1.3 习题

这里是第一章的习题。

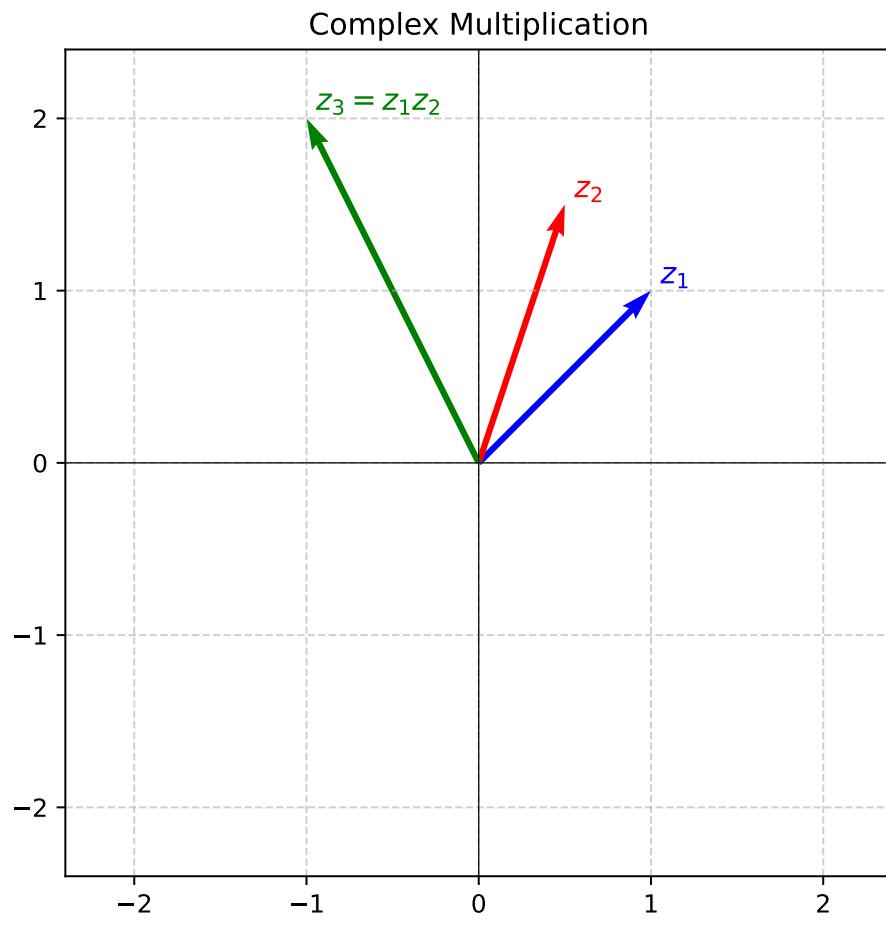


图 1.2: 复数乘法示意图

第二章 解析函数

2.1 解析函数

这里是解析函数的内容。回忆 (定理 1.1) 和推论 1.1。

定义 2.1. 一个函数 f 是 holomorphic 的，如果它在其域上是可微的。

注意这里的差商是关于复数的除法 (1.2)。

2.2 柯西-黎曼方程

这里是柯西-黎曼方程的内容。

2.3 习题

这里是第二章的习题。

