

# 湖南大学复变函数讲义

姚懿

2026-02-28



# 目录

<b>前言</b>	<b>1</b>
<b>第一章 复数</b>	<b>3</b>
1.1 复数的定义 . . . . .	3
1.2 复数的几何意义 . . . . .	5
1.2.1 复数乘法示意图 . . . . .	5
1.3 习题 . . . . .	5
<b>第二章 解析函数</b>	<b>7</b>
2.1 解析函数 . . . . .	7
2.2 柯西-黎曼方程 . . . . .	7
2.3 习题 . . . . .	7



# 前言

这是复变函数的讲义。



# 第一章 复数

这一章我们主要介绍复数的概念、复数域、复数的几何意义、复数的运算法则等。

## 1.1 复数的定义

复数的引入是为了推广实数域到复域，以便于描述和研究一些在实数域上不存在的量，例如根为负数的二次方程的解。

**定义 1.1. (复数域)**

复数域  $\mathbb{C}$  定义为有序实数对  $(a, b)$  的集合，配备加法

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad (1.1)$$

与乘法

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \quad (1.2)$$

上述定义 1.1 是标准的。

**定理 1.1.** 在运算 (1.1) 和 (1.2) 下， $\mathbb{C}$  构成一个域，其零元为  $(0, 0)$ ，单位元为  $(1, 0)$ ，并满足交换律、结合律及分配律。

证明. 回忆域的定义，验证上述运算满足所有域的性质。留作习题。  $\square$

**推论 1.1.** 复数域  $\mathbb{C}$  中非零元素均可逆。

**例 1.1.** 由 (1.2), 计算  $(2 + 3i)(-1 - 4i) = (2 - 3i)(-1 + 4i) = -10 + 13i$ 。

**例 1.2.** 由推论 1.1, 计算复数的逆元  $(2 + 3i)^{-1} = 2 - 3i$ 。

**练习 1.1.** 验证  $(2 + 3i)^{-1} = 2 - 3i$ 。

$$\text{Res}_a(f(z))$$

For a demonstration of a line plot on a polar axis, see 图 1.1.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

r = np.arange(0, 2, 0.01)
theta = 2 * np.pi * r
fig, ax = plt.subplots(
    subplot_kw = {'projection': 'polar'}
)
ax.plot(theta, r)
ax.set_rticks([0.5, 1, 1.5, 2])
ax.grid(True)
plt.show()
```

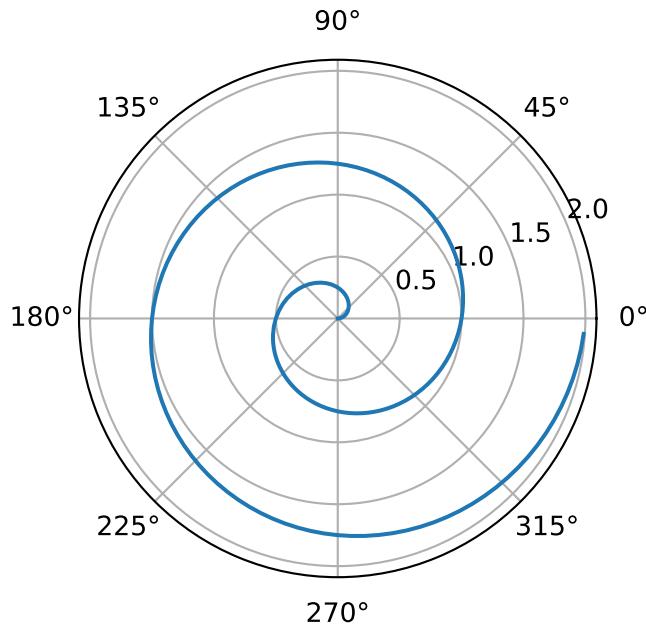


图 1.1: A line plot on a polar axis

## 1.2 复数的几何意义

这里是几何意义的内容。

回顾定义 1.1 的定义。@ref(def-complex-field)

### 1.2.1 复数乘法示意图

下图展示了复数乘法的几何意义：模相乘，辐角相加。

## 1.3 习题

这里是第一章的习题。

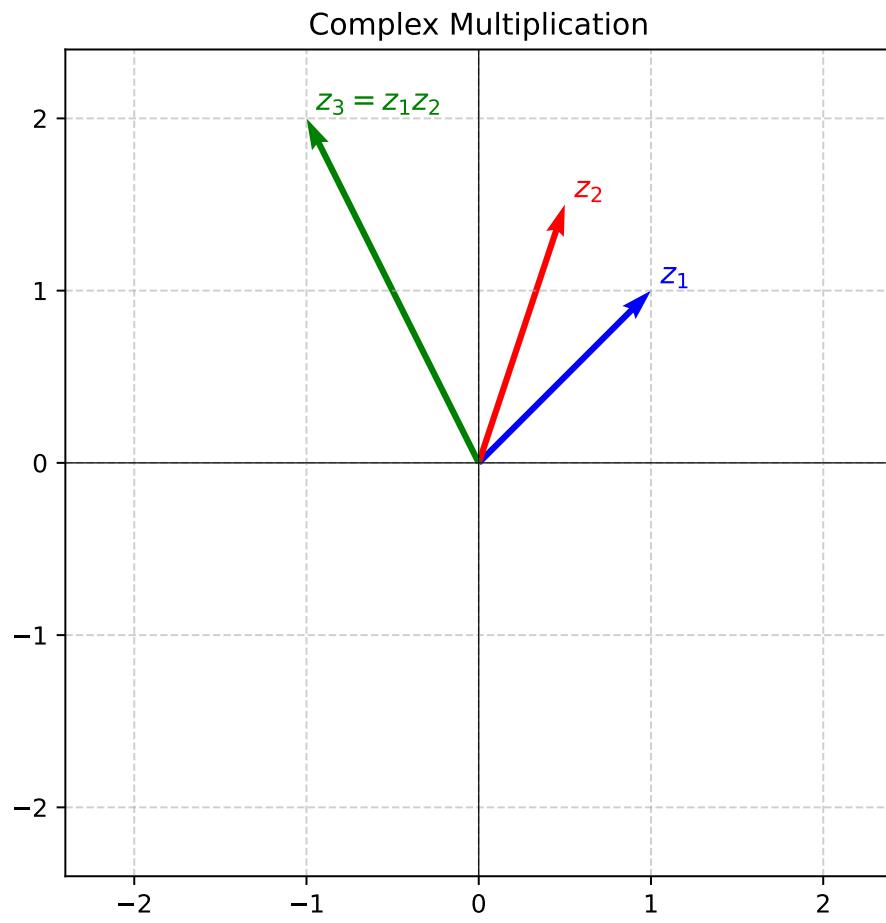


图 1.2: 复数乘法示意图

# 第二章 解析函数

## 2.1 解析函数

这里是解析函数的内容。回忆 (定理 1.1) 和推论 1.1。

**定义 2.1.** 一个函数  $f$  是 holomorphic 的，如果它在其域上是可微的。

注意这里的差商是关于复数的除法 (1.2)。

## 2.2 柯西-黎曼方程

这里是柯西-黎曼方程的内容。

## 2.3 习题

这里是第二章的习题。

