

# Identificatie van Fractionele-Orde Systeemodynamica voor een Roterende Omgekeerde Slinger

Auteur: Yi Yang    Rapportdatum: 5<sup>th</sup> December 2024

**Abstract**—Dit cursusprojectverslag introduceert een nieuw fractioneel-orde model voor de Roterende Omgekeerde Pendulum (ROP), een klassiek vierde-orde niet-lineair dynamisch systeem gekenmerkt door twee vrijheidsgraden. Traditioneel worden de ROP-dynamica beschreven met behulp van een reeks niet-lineaire differentiaalvergelijkingen in gehele-orde vorm. In dit werk worden de systeemodynamica uitgebreid door de differentiatoren en integratoren te fractioneren, waarbij ze worden getransformeerd naar hun fractionele-orde tegenhangers. De parameters van het fractionele-orde ROP-model worden geïdentificeerd met behulp van een robuuste lineaire regressiemethodologie. Vergelijkende analyse toont aan dat het voorgestelde fractionele-orde model aanzienlijk verbeterde coherentie tussen experimentele responsgegevens en simulatieresultaten bereikt, waardoor een nauwkeurigere weergave van de systeemodynamica wordt geboden. Deze vooruitgang biedt een veelbelovend kader voor het verbeteren van de nauwkeurigheid van niet-lineaire dynamische modellen door middel van fractionele-orde formuleringen.

**Index Terms**—Fractionele-orde modellering, roterende omgekeerde pendulum (ROP), niet-lineaire dynamische systemen, parameteridentificatie, coherentie tussen simulatie en experiment



## 1 ACHTERGROND EN MOTIVATIE

DE dynamica van de Roterende Omgekeerde Pendulum (ROP) is al decennia lang uitgebreid bestudeerd, waardoor het een essentieel model is voor onderactuated en niet-minimumfase systemen die vaak voorkomen in robotica, biomedische techniek en ruimtevaarttoepassingen [?], [?], [1], [2], [3], [4]. Het ROP-systeem dient als een waardevol testbed voor het evalueren van geavanceerde niet-lineaire regelstrategieën [5].

Gehele-orde calculus, onafhankelijk ontwikkeld door Isaac Newton en Gottfried Leibniz in het midden van de 17e eeuw, is een hoeksteen van de modellering van dynamische systemen. De wiskundige fundamenteën en fysieke interpretaties zijn goed vastgesteld [6], [7], [8]. Echter, in de afgelopen jaren is fractionele-orde calculus naar voren gekomen als een krachtig alternatief, met name voor het vastleggen van overgangsgedrag, zoals schakeldynamica en andere ingewikkelde systeemkenmerken die conventionele gehele-orde benaderingen moeilijk kunnen vertegenwoordigen.

Bijvoorbeeld, de superieure nauwkeurigheid van fractionele-orde modellen is aangetoond in het beschrijven van ultra-condensator dynamica, waardoor een betere overeenkomst met experimentele gegevens wordt bereikt in vergelijking met gehele-orde modellen [9], [10], [11]. Evenzo zijn de precisie en compactheid van fractionele-orde modellen benadrukt in bio-engineering toepassingen, met name

bij het modelleren van complexe biologische weefseldynamica [12], [13], [14], [15]. Verdere studies, zoals [4], onthulden de inherente fractionele-orde aard van hydrologische systemen, waardoor de natuurlijke toepasbaarheid van fractionele calculus op dergelijke fenomenen werd benadrukt. Fractionele-orde modellen zijn ook toegepast op fundamentele mechanische en elektrische componenten, waaronder veren, dempers, condensatoren, weerstanden en spoelen [?], [12], [16], [17], [18]. Door rekening te houden met overgangsstaten tussen twee gehele-orde dynamica, bieden fractionele-orde modellen een meer uitgebreide beschrijving van systeemgedrag [19], [20], [21], [22]. Desalniettemin blijven de fysieke interpretaties van fractionele differentiatie en integratie ambigu, waardoor het uitdagend is om expliciete wiskundige principes voor natuurlijke verschijnselen vast te stellen met behulp van deze benadering [23], [24], [25], [26], [27].

In dit werk wordt een fractioneel-orde model voor het ROP-systeem ontwikkeld zonder restrictieve aannames of voorwaarden op te leggen. De gehele-orde niet-lineaire dynamica van het ROP-systeem worden systematisch gefractionaliseerd, waardoor een directe en natuurlijke overgang naar fractionele-orde representaties mogelijk is. Het voorgestelde model vergemakkelijkt parameteridentificatie door experimentele gegevens aan te passen aan de fractionele-orde systeemodynamica.

Het verslag is als volgt georganiseerd: Sectie II formuleert de gehele-orde niet-lineaire dynamica van het ROP-systeem en introduceert de fractionele-orde tegenhanger. Sectie III richt zich op parameteridentificatie, waarbij regressiegebaseerde methoden worden gebruikt om de systeemparameters te schatten. De continue dynamica worden gedigitaliseerd en de identificatiealgoritmen worden

• Y. Yang was verbonden aan de School of Engineering Technology tijdens het opstellen van het oorspronkelijke manuscript van dit rapport, E-mail: yeeyoung1993@gmail.com.

geïmplementeerd, waarbij gedetailleerde procedures worden uiteengezet. Sectie IV presenteert een uitgebreide vergelijking tussen de geïdentificeerde fractionele-orde dynamica en experimentele gegevens om de nauwkeurigheid van het model te evalueren. De bevindingen worden samengevat in Sectie V, waarbij de bijdragen en implicaties van dit onderzoek worden benadrukt.

Deze studie toont het potentieel van fractionele-orde modellering aan om de dynamische gedrag van complexe systemen zoals de ROP nauwkeurig vast te leggen, en biedt nieuwe inzichten en methodologieën voor het bevorderen van de analyse van niet-lineaire systemen.

## 2 MODELLERING VAN HET ROP-SYSTEEM EN DE FRACTIONALISATIE

Een Roterende Omgekeerde Pendulum (ROP) vertegenwoordigt een complex elektromechanisch systeem met aanzienlijke niet-lineaire dynamica. Fig. 1(a) illustreert de fysieke structuur van een typisch ROP-systeem, terwijl Fig. 1(b) het coördinatensysteem laat zien dat gebruikt wordt voor de analyse ervan. Het ROP-systeem beschikt over twee vrijheidsgraden: de hoekverplaatsing van de horizontale draaiarm, aangeduid als  $\theta$ , en de hoekverplaatsing van de pendelarm, aangeduid als  $\alpha$ . Het dynamische gedrag van het systeem wordt beheerst door de niet-lineaire bewegingsvergelijkingen gepresenteerd in Vergelijking (1).

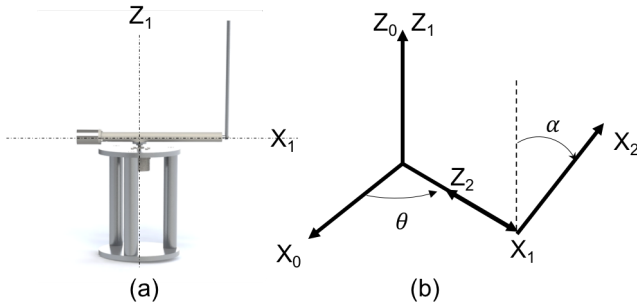


Figure 1. (a) Het fysieke model van het ROP-systeem. (b) Het coördinatensysteem van het ROP-systeem.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{1}{\det(M)(C_1\tau_m + a - b)} \\ \dot{\alpha} \\ \frac{1}{\det(M)}(-C_3 \cos \alpha \tau_m + c - d) \end{bmatrix} \quad (1)$$

waarbij aangesloten coëfficiënten als volgt worden samengevat,

$$C_1 = I_{2zz} + m_2 l_{2c}^2 \quad (2)$$

$$C_2 = I_{2yy} + m_2 l_{2c}^2 \quad (3)$$

$$C_3 = m_2 l_1 l_{2c} - l_{2xz} \quad (4)$$

$$C_4 = m_2 g l_{2c} \quad (5)$$

$$C_5 = J_r + m_1 l_{1c}^2 + I_{2xx} + m_2 l_1^2 \quad (6)$$

$$C_6 = C_2 - I_{2xx} \quad (7)$$

$$M = \begin{bmatrix} C_2 \sin^2 \alpha + C_5 + I_{2xx} \cos^2 \alpha & C_3 \cos \alpha \\ C_3 \cos \alpha & C_1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$a = C_1 \left( (-b_\theta - C_6 \sin 2\alpha \dot{\alpha}) \dot{\theta} + C_3 \sin \alpha \dot{\alpha}^2 + \tau_{C\theta} \right) \quad (9)$$

$$b = C_3 \cos \alpha \left( \frac{C_6}{2} \sin 2\alpha \dot{\theta}^2 - b_\alpha \dot{\alpha} + C_4 \sin \alpha + \tau_{C\alpha} \right) \quad (10)$$

$$c = (C_5 + I_{2xx} \cos^2 \alpha + C_2 \sin^2 \alpha) \cdot (C_4 \sin \alpha + \frac{C_6}{2} \sin 2\alpha \dot{\theta}^2 - b_\alpha \dot{\alpha} + \tau_{C\alpha}) \quad (11)$$

$$d = C_3 \cos \alpha \left( (-b_\theta - C_6 \sin 2\alpha \dot{\alpha}) \dot{\theta} + C_3 \sin \alpha \dot{\alpha}^2 + \tau_{C\theta} \right) \quad (12)$$

De systeemdynamica die gepresenteerd wordt in Vergelijking (1) worden uitgedrukt met behulp van gehele-orde calculus, wat intrinsiek verbonden is met de gevestigde relatie tussen fysieke principes en hun wiskundige representaties. De fractionalisatie van het ROP-systeemmodel impliceert niet de introductie van nieuwe fysieke principes geworteld in fractionele calculus. In plaats daarvan betreft het vervangen van de gehele-orde differentiatoren en integratoren in de oorspronkelijke dynamica door hun fractionele-orde tegenhangers [28], [29], [30].

In deze context worden de gehele-orde derivaten, zoals  $\dot{\theta}$  en  $\dot{\alpha}$ , vervangen door de fractionele derivaten  $D^\lambda \theta$  en  $D^\mu \alpha$ , waar  $\lambda$  en  $\mu$  de fractionele orders van de operatoren  $D^\lambda$  en  $D^\mu$  respectievelijk vertegenwoordigen. Deze fractionele orders zullen worden geïdentificeerd in Sectie III van dit verslag. De resulterende fractionele-orde representatie van de ROP-dynamica wordt geformuleerd in Vergelijking (13).

$$\begin{bmatrix} D^\lambda \theta \\ D^{2\lambda} \theta \\ D^\mu \alpha \\ D^{2\mu} \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{D^\lambda \theta}{\det(M)(C_1\tau_m + a - b)} \\ \frac{1}{\det(M)}(-C_3 \cos \alpha \tau_m + c - d) \end{bmatrix} \quad (13)$$

In het veld van zuivere wiskunde bestaan er talrijke definities van fractionele-orde differentiatie, elk met unieke eigenschappen en toepassingen. Onder de meest opvallende zijn de Grunwald-Letnikov fractionele derivaten, Riemann-Liouville derivaten, Caputo fractionele derivaten, en Miller-Ross fractionele derivaten [31], [32]. Voor dit project adopteren we de Caputo fractionele derivaat, aangeduid als  $D^\lambda := {}^C D_t^\lambda$ .

De formele definitie van de Caputo fractionele derivaat wordt verstrekt in Vergelijking (14), waarbij  $\lambda$  de fractionele order is zodanig dat  $m < \lambda < m + 1$ , en  $m$  is een niet-negatief geheel getal. Deze definitie is bijzonder goed geschikt voor systemen met initiële voorwaarden uitgedrukt in termen van gehele-orde derivaten, waardoor het een

praktische keuze is voor het fractionele modelleren van dynamische systemen.

$${}_a^C D_t^\lambda f(t) = \frac{1}{\Gamma(m+1-\lambda)} \int_a^t \frac{f^{(m+1)}(\tau)}{(t-\tau)^{\lambda-m}} d\tau \quad (14)$$

Voor het fractionele-orde systeem beschreven in Vergelijking (13), is het essentieel om de fractionele orders te identificeren die de systeemdynamica karakteriseren. Dit betreft specifiek het bepalen van de fractionele-orde parameters  $\lambda$  en  $\mu$ , die hun gehele-orde tegenhangers in het systeemmodel gepresenteerd in Vergelijking (1) vervangen. Deze parameters omvatten de mate van differentiatie en integratie binnen het fractionele-orde kader, en bieden een meer algemene representatie van het systeemgedrag.

### 3 DIGITALISERING VAN MODEL DYNAMICA EN FORMULERING VAN IDENTIFICATIEALGORITMEN

De systeemdynamica in Vergelijking (13) is een uitgebreide fractionele-orde toestandsvergelijking, die een equivalente vorm heeft uitgedrukt in Vergelijking (15).

$$\begin{bmatrix} D^\lambda x_1 \\ D^\lambda x_2 \\ D^\mu x_3 \\ D^\mu x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_1(t, x_1, x_2, x_3, x_4) \\ x_4 \\ f_2(t, x_1, x_2, x_3, x_4) \end{bmatrix} \quad (15)$$

Hierbij worden de variabelen gedefinieerd als  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = D^\lambda \theta$ ,  $x_3 = \alpha$ , en  $x_4 = D^\mu \alpha$ . De termen  $f_1(t, x_1, x_2, x_3, x_4)$  en  $f_2(t, x_1, x_2, x_3, x_4)$  komen overeen met de tweede en vierde termen aan de rechterkant van de vectorrepresentatie in Vergelijking (13), respectievelijk.

In deze studie wordt de Caputo-definitie van fractionele-orde derivaten gebruikt om de systeemdynamica te modelleren. Echter, onder de veronderstelling van nul initiële voorwaarden, dat wil zeggen  $\theta_0 = \dot{\theta}_0 = \dots = \theta_0^{(m+1)} = 0$  en  $\alpha_0 = \dot{\alpha}_0 = \dots = \alpha_0^{(n+1)} = 0$ , waarbij  $m < \lambda < m+1$  en  $n < \mu < n+1$ , wordt de Caputo-definitie gelijk aan de Grunwald-Letnikov-definitie. Deze gelijkwaardigheid maakt het mogelijk om de Grunwald-Letnikov-definitie te gebruiken om de gereduceerde vorm van Vergelijking (15) te digitaliseren. De wiskundige formulering van de Grunwald-Letnikov fractionele derivaat wordt gegeven in Vergelijking (16).

$${}_a^{GL} D_t^\lambda f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\lambda} \sum_{k=0}^{[(t-a)/h]} (-1)^k \binom{\lambda}{k} f(t-kh) \quad (16)$$

Onder nul initiële voorwaarden kunnen zowel Caputo's fractionele derivaten als Grunwald-Letnikov fractionele derivaten worden benaderd door een partiële som van de oneindige reeks beschreven in Vergelijking (16). De nauwkeurigheid van deze benadering verbetert aanzienlijk naarmate de gekozen tijdsspanne  $h$  voldoende klein wordt. De discrete benadering van de fractionele operatoren wordt uitgedrukt in Vergelijking (17), waarbij  $a$  de begintijd vertegenwoordigt en  $T$  de eindtijd van belang aangeeft. Deze benadering biedt een praktische benadering voor het numeriek evalueren van fractionele derivaten over een eindig interval.

$${}_a^C D_t^\lambda f(t) \approx \frac{1}{h^\lambda} \sum_{k=0}^{[(T-a)/h]} (-1)^k \binom{\lambda}{k} f(t-kh) \quad (17)$$

De coëfficiënten binnen de som van Vergelijking (17) worden hieronder gegeven en kunnen iteratief worden berekend voor efficiënte evaluatie.

$$w_k^{(\lambda)} = (-1)^k \binom{\lambda}{k} \quad (18)$$

$$w_0^{(\lambda)} = 1, \quad w_{k+1}^{(\lambda)} = \left(1 - \frac{\lambda+1}{k+1}\right) w_k^{(\lambda)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (19)$$

Het substitueren van Vergelijking (17) in Vergelijking (15) geeft de discrete vorm van de systeemdynamica. Bijvoorbeeld,  $D^\lambda x_2 = f_1(t, x_1, x_2, x_3, x_4)$  wordt gedigitaliseerd als volgt:

$$\frac{1}{h^\lambda} \sum_{k=0}^N w_k^{(\lambda)} x_2^{l-k} = f_1(t_k, x_1^k, x_2^k, x_3^k, x_4^k) \quad (20)$$

waarbij  $N = \text{plafond}((t_l - a)/h) + 1$ ,  $t_k = a + kh$ ,  $x_1^k = x_1(t_k)$ ,  $x_2^k = x_2(t_k)$ ,  $x_3^k = x_3(t_k)$  en  $x_4^k = x_4(t_k)$ .

Vergelijking (20) wordt herschikt om iteratief te worden berekend zoals getoond in Vergelijking (21) en (22), dat wil zeggen, de niet-lineaire fractionele differentiaalvergelijking kan iteratief worden opgelost voor  $l = 1, 2, \dots, N$ . Evenzo wordt de digitalisering van het tweede gedeelte van Vergelijking (15) gegeven in Vergelijking (23) en (24).

$$x_1^l = h^\lambda x_2^k - \sum_{k=1}^N w_k^{(\lambda)} x_1^{l-k} \quad (21)$$

$$x_2^l = h^\lambda f_1(t_k, x_1^k, x_2^k, x_3^k, x_4^k) - \sum_{k=1}^N w_k^{(\lambda)} x_2^{l-k} \quad (22)$$

$$x_3^l = h^\mu x_4^k - \sum_{k=1}^N w_k^{(\mu)} x_3^{l-k} \quad (23)$$

$$x_4^l = h^\mu f_2(t_k, x_1^k, x_2^k, x_3^k, x_4^k) - \sum_{k=1}^N w_k^{(\mu)} x_4^{l-k} \quad (24)$$

De systeemresponsgegevens worden geregistreerd door lineaire optische encoders. Om de waarden van de twee fractionele orders te benaderen, wordt een optimalisatieprobleem geformuleerd als volgt:

$$\hat{\lambda}, \hat{\mu} = \arg \min_{\lambda, \mu} \mathcal{L}(\lambda, \mu) \quad (25)$$

De kostenfunctie voor dit optimalisatieprobleem wordt gedefinieerd als de integraal van de tijdgewogen absolute fout van de  $\alpha$  hoek. Specifiek wordt de kostenfunctie uitgedrukt in Vergelijking (26), waarbij  $\alpha(t)$  de iteratief gesimuleerde waarden vertegenwoordigt verkregen uit Vergelijkingen (21) tot (24), en  $\tilde{\alpha}(t)$  de gemeten realtime  $\alpha$  hoek vertegenwoordigt vastgelegd door de encoders. Deze formulering zorgt ervoor dat het optimalisatieproces de

afwijking tussen de gesimuleerde en gemeten responsen in de tijd minimaliseert.

$$\mathcal{L}(\lambda, \mu) = \int_0^T t |\alpha(t) - \tilde{\alpha}(t)| dt \quad (26)$$

Om de optimale waarden van  $\lambda$  en  $\mu$  te schatten, kunnen verschillende wereldwijde optimalisatiealgoritmen worden gebruikt. In dit project wordt het genetisch algoritme (GA) gebruikt. GA is een stochastische zoekmethode geïnspireerd door biologische evolutionaire theorie, die principes zoals selectie, crossover en mutatie toepast op numerieke optimalisatieproblemen. De parameters van het genetisch algoritme worden empirisch bepaald, en hun specifieke waarden worden in de onderstaande tabel gegeven. Deze aanpak zorgt voor een robuuste en efficiënte zoektocht naar de optimale fractionele-orde parameters.

Populatiegrootte = 20	Crossover rate = 0.5
Mutatiesnelheid = 0.01	Aantal generaties = 25

#### 4 IDENTIFICATIERESULTATEN EN EVALUATIE

De optimale parameters worden bepaald door het optimalisatieprobleem op te lossen, resulterend in  $\hat{\lambda} = 0.8623$  en  $\hat{\mu} = 0.9146$ . De experimentele gegevens werden verkregen door de pendelarm vrij te laten vanaf een initiële hoek van  $\alpha_0 = 10^\circ$  en de pendelhoeken,  $\alpha(t)$ , op te nemen met een bemonsteringsfrequentie van 1000 Hz. De opname duurde 20 seconden om ervoor te zorgen dat het systeem volledig was gestabiliseerd van de initiële oscillaties.

De simulatieresultaten gegenereerd met behulp van de geïdentificeerde parameters worden getoond in Figuur (2), waarbij de mogelijkheid van het model om het dynamische gedrag van het systeem nauwkeurig vast te leggen wordt geïllustreerd.

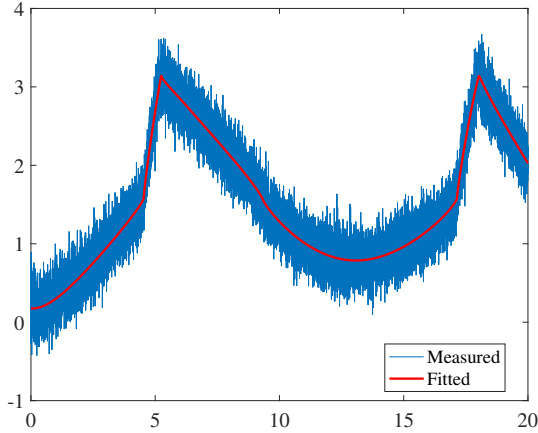


Figure 2. Gemeten systeemresponsen en de passingswaarde van het geïdentificeerde model.

Het meetproces introduceert ruis in het systeem, wat de prestaties van het model verslechtert, zoals afgebeeld in Fig. 2. De restanten worden gedefinieerd als de verschillen tussen de gemeten uitgangen en de gemodelleerde uitgangswaarden van het model. Voor de geldigheid van

het model wordt aangenomen dat de meetfouten een normale verdeling volgen met constante variantie. De restplot, getoond in Fig. 3, biedt een benadering om deze aannames van normaliteit en constante variantie te verifiëren. Door de restanten visueel te inspecteren, kan men de adequaatheid van het model en de geldigheid van deze onderliggende aannames beoordelen.

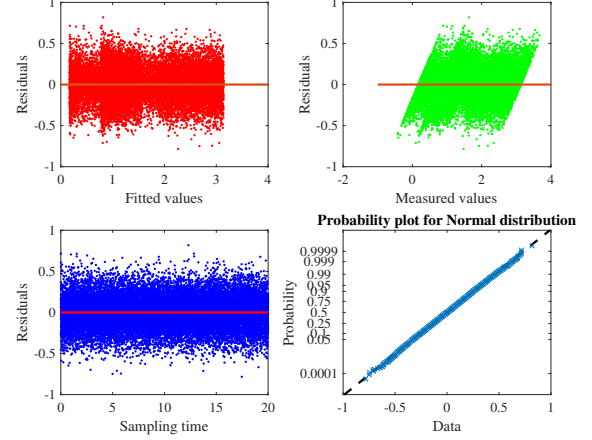


Figure 3. Restplot en de normaalwaarschijnlijkheidsplot voor de gemeten restanten.

Zoals te zien is in Fig. 3, vertonen de restanten van de gemeten gegevens een bijna perfecte uitlijning met een normale verdeling, waarbij de aannames van het regressiemodel met de geïdentificeerde optimale parameters worden gevalideerd.

Uit de voorgaande analyse worden de optimale fractionele orders voor de voorgestelde roterende omgekeerde pendulum (ROP) dynamica bepaald als  $\hat{\lambda} = 0.8623$  en  $\hat{\mu} = 0.9146$ . De gemeten fouten worden verondersteld normaal verdeeld te zijn, een hypothese die wordt bevestigd door residu- en waarschijnlijkheidsplots. Echter, er zijn verschillende kritieke punten die verdere bespreking vereisen. De modelparameters kunnen variëren als een alternatieve kostenfunctie wordt geselecteerd voor het systeemidentificatieproces. De keuze van de kostenfunctie in deze studie wordt gerechtvaardigd door de kenmerken van de gemeten ruisgegevens, zoals blijkt uit de restplots in Fig. 3. Specifiek, de ruisverdeling is in wezen normaal, wat de geldigheid van onze aanpak versterkt.

Verder wordt het model gevalideerd door simulaties die verschillende niveaus van ruis bevatten. De modelorders,  $\lambda$  en  $\mu$ , worden gekozen uit de volledige set van reële getallen. De optimale waarden voor deze orders worden verkregen door de voorgestelde kostenfunctie te minimaliseren. De structuur van het model wordt gegeneraliseerd door de derivaat- en integraalorders in de oorspronkelijke starre-lichaam dynamische vergelijkingen uit te breiden, waardoor de systeemdynamica nauwkeuriger kan worden weergegeven met behulp van fractionele calculus.

#### 5 CONCLUSIE

In deze studie wordt het fractionele-orde dynamische model van het roterende omgekeerde pendulum (ROP) systeem

geïdentificeerd met behulp van experimentele gegevens. De metingen van de hoek van de roterende arm  $\theta$  en de pendelarmhoek  $\alpha$  worden verondersteld te worden beïnvloed door witte ruis met constante variantie. De fractionele orders van de ROP-dynamica,  $\lambda$  en  $\mu$ , worden geschat door een optimalisatieprobleem op te lossen, waarbij een voorgeschreven kostenfunctie wordt geminimaliseerd met behulp van een genetisch algoritme. De geïdentificeerde optimale fractionele orders worden vervolgens opgenomen in het systeemmodel. Vervolgens wordt de gesimuleerde uitvoer van het aangepaste model vergeleken met de experimenteel gemeten uitvoer.

Residu- en waarschijnlijkheidsplots worden gegenereerd na de oplossing van het aangepaste model, en de resultaten bevestigen dat de aanname van normaal verdeelde meetfouten met constante variantie waar is. Dit validatieproces versterkt de robuustheid en nauwkeurigheid van het geïdentificeerde fractionele-orde model bij het vastleggen van de dynamica van het ROP-systeem.

## REFERENCES

- [1] Y. Yang and H. H. Zhang, "Stability study of lqr and pole-placement genetic algorithm synthesized input-output feedback linearization controllers for a rotary inverted pendulum system," *International Journal of Engineering Innovations and Research*, vol. 7, no. 1, pp. 62–68, 2018.
- [2] A. M. Lopes and L. Chen, "Fractional order systems and their applications," *Fractal and Fractional*, vol. 6, no. 7, pp. 389–389, Jul. 2022, publisher: Multidisciplinary Digital Publishing Institute. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/2504-3110/6/7/389/html>
- [3] Y. Yang, H. H. Zhang, and R. M. Voyles, "Rotary inverted pendulum system tracking and stability control based on input-output feedback linearization and pso-optimized fractional order pid controller," in *Automatic Control, Mechatronics and Industrial Engineering*. CRC Press, 2019, pp. 79–84.
- [4] D. A. Benson, M. M. Meerschaert, and J. Revielle, "Fractional calculus in hydrologic modeling: A numerical perspective," *Advances in Water Resources*, vol. 51, pp. 479–497, 2013. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2012.04.005>
- [5] Y. Yang, H. H. Zhang, and R. M. Voyles, "Optimal fractional-order proportional-integral-derivative control enabling full actuation of decomposed rotary inverted pendulum system," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 45, no. 10, pp. 1986–1998, 2023.
- [6] J. Francisco Gómez-Aguilar, H. Yépez-Martínez, C. Calderón-Ramón, I. Cruz-Orduña, R. Fabricio Escobar-Jiménez, V. H. Olivares-Peregrino, J. A. T. Machado, and A. M. Lopes, "Modeling of a Mass-Spring-Damper System by Fractional Derivatives with and without a Singular Kernel," *Entropy*, vol. 17, pp. 6289–6303, 2015. [Online]. Available: [www.mdpi.com/journal/entropy/article](http://www.mdpi.com/journal/entropy/article)
- [7] Y. Yang and H. H. Zhang, *Fractional calculus with its applications in engineering and technology*. Morgan & Claypool Publishers, 2019.
- [8] A. Choudhary, D. Kumar, and J. Singh, "A fractional model of fluid flow through porous media with mean capillary pressure," *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, vol. 21, pp. 59–63, 2016. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.jaubas.2015.01.002>
- [9] A. Dzieliński, G. Sarwas, and D. Sierociuk, "Comparison and validation of integer and fractional order ultracapacitor models," *Advances in Difference Equations*, 2011. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2011-11>
- [10] V. Martynyuk and M. Ortigueira, "Fractional model of an electrochemical capacitor," *Signal Processing*, vol. 107, pp. 355–360, 2015, publisher: Elsevier B.V.
- [11] Y. Yang and H. H. Zhang, "Fractional-order controller design," in *Fractional Calculus with its Applications in Engineering and Technology*. Cham: Springer International Publishing, 2019, pp. 43–65.
- [12] R. L. Magin, *Fractional calculus in bioengineering*. Begell House Publishers, 2006.
- [13] Y. Yang and H. H. Zhang, "Control applications in engineering and technology," in *Fractional Calculus with its Applications in Engineering and Technology*. Cham: Springer International Publishing, 2019, pp. 67–89.
- [14] R. L. Magin, "Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues," *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 59, no. 5, pp. 1586–1593, 2010. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.08.039>
- [15] Y. Yang and H. H. Zhang, "Preliminary tools of fractional calculus," in *Fractional Calculus with its Applications in Engineering and Technology*. Cham: Springer International Publishing, 2019, pp. 3–42.
- [16] Y. Yang, H. H. Zhang, W. Yu, and L. Tan, "Optimal design of discrete-time fractional-order pid controller for idle speed control of an ic engine," *International Journal of Powertrains*, vol. 9, no. 1-2, pp. 79–97, 2020.
- [17] A. S. Elwakil, "Fractional-order circuits and systems: An emerging interdisciplinary research area," *IEEE Circuits and Systems Magazine*, vol. 10, no. 4, pp. 40–50, 2010. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1109/MCAS.2010.938637>
- [18] Y. Yang, "Electromechanical characterization of organic field-effect transistors with generalized solid-state and fractional drift-diffusion models," Ph.D. dissertation, Purdue University, 2021.
- [19] Z. Li, *Fractional Order Modeling and Control of Multi-Input-Output Processes*, 2015. [Online]. Available: <https://escholarship.org/uc/item/49x9x167>
- [20] M. A. Aba Oud, A. Ali, H. Alrabaiah, S. Ullah, M. A. Khan, and S. Islam, "A fractional order mathematical model for covid-19 dynamics with quarantine, isolation, and environmental viral load," *Advances in Difference Equations*, vol. 2021, no. 1, pp. 1–19, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1186/S13662-021-03265-4/FIGURES/9>
- [21] K. Y. Choo, S. V. Muniandy, K. L. Woon, M. T. Gan, and D. S. Ong, "Modeling anomalous charge carrier transport in disordered organic semiconductors using the fractional drift-diffusion equation," *Organic Electronics*, vol. 41, pp. 157–165, Feb. 2017, publisher: Elsevier B.V.
- [22] Y. Yang, "Prediction of hotel price with regression models," School of Public Health, University of Michigan, USA, Technical report, 2023, presented at a Machine Learning and Biostatistics Online Course, April 2023. [Online]. Available: [https://yeeyoung.github.io/assets/hotel\\_pr\\_eng.pdf](https://yeeyoung.github.io/assets/hotel_pr_eng.pdf)
- [23] R. Caponetto, J. A. Tenreiro Machado, and J. J. Trujillo, "Theory and applications of fractional order systems," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2014, pp. 1–11, 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1155/2014/596195>
- [24] F. Bu, Y. Cai, and Y. Yang, "Multiple object tracking based on faster-rcnn detector and kcf tracker," Technical Report [Online], 2016. [Online]. Available: <https://pdfs.semanticscholar.org>
- [25] M. Ivanescu, N. Popescu, D. Popescu, A. Channa, and M. Ponoroniuc, "Exoskeleton hand control by fractional order models," *Sensors*, vol. 19, no. 21, p. 4608, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390/S19214608>
- [26] D. Xue, C. Zhao, and Y. Q. Chen, "A modified approximation method of fractional order system," in *2006 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, 2006, pp. 1043–1048. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1109/ICMA.2006.257769>
- [27] Y. Yang, "Voorspelling van hotelprijzen met regressiemodellen," School of Public Health, Universiteit van Michigan, VS, Technisch rapport, 2023, gepresenteerd tijdens een online cursus Machine Learning en Biostatistiek, april 2023. [Online]. Available: [https://yeeyoung.github.io/assets/hotel\\_pr\\_dutch.pdf](https://yeeyoung.github.io/assets/hotel_pr_dutch.pdf)
- [28] J. J. Quintana, A. Ramos, and I. Nuez, "Identification of the fractional impedance of ultracapacitors," *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, vol. 2, no. PART 1, pp. 432–436, 2006. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3182/20060719-3-pt-4902.00073>
- [29] Y. Yang and H. H. Zhang, "Neural network-based adaptive fractional-order backstepping control of uncertain quadrotors with unknown input delays," *Fractal and Fractional*, vol. 7, no. 3, p. 232, 2023.
- [30] A. P. Singh, D. Deb, H. Agrawal, and V. E. Balas, "Fractional modeling of robotic systems," in *Intelligent Systems Reference Library*. Springer Science and Business Media Deutschland GmbH, 2021, vol. 194, pp. 19–43. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-58247-0\\_2/COVER](https://doi.org/10.1007/978-3-030-58247-0_2/COVER)

- [31] Y. Yang and H. H. Zhang, "Optimal model reference adaptive fractional-order proportional integral derivative control of idle speed system under varying disturbances," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, p. 09596518241266670, 2024.
- [32] C. A. Monje, Y. Q. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue, and V. Feliu, *Fractional-order Systems and Controls. Fundamentals and Applications*. Springer, 2010. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/978-1-84996-335-0>