

Identificatie van Fractionele-Orde Systeemdynamica voor een Roterende Omgekeerde Slinger

Auteur: Yi Yang Rapportdatum: 5th December 2024

Abstract—Dit rapport introduceert een nieuwe benadering voor het modelleren van de Rotary Inverted Pendulum (RIP) door fractie-orde calculus op te nemen in het wiskundige raamwerk. De RIP, een bekend niet-lineair dynamisch systeem van de vierde orde met twee vrijheidsgraden, wordt traditioneel beschreven met differentiaalvergelijkingen van gehele orde. In deze studie wordt het conventionele model uitgebreid door standaard differentieerders en integratoren te vervangen door hun fractie-orde equivalenten, wat zorgt voor een flexibeler weergave van de systeemdynamica. De parameters van het fractie-orde model worden geschat met behulp van een robuuste lineaire regressietechniek om nauwkeurigheid te garanderen. Een vergelijkende evaluatie toont aan dat de voorgestelde fractie-orde representatie de overeenstemming tussen gesimuleerde resultaten en experimentele gegevens aanzienlijk verbetert, wat leidt tot een nauwkeurigere beschrijving van het systeemgedrag. Dit onderzoek benadrukt het potentieel van fractie-orde modellering voor het verbeteren van de nauwkeurigheid van niet-lineaire dynamische systemen.

Index Terms—Fractie modellering, rotary inverted pendulum (RIP), niet-lineaire dynamische systemen, gehele-orde differentiaalvergelijkingen, lineaire regressietechniek



1 ACHTERGROND EN MOTIVATIE

HET Rotary Inverted Pendulum (RIP) is een veelbestudeerd systeem binnen de regeltheorie en dient als een fundamenteel referentiemodel voor de analyse van ondergeactueerde en niet-minimum fase systemen. Vanwege de brede toepasbaarheid wordt het veelvuldig gebruikt in verschillende technische domeinen, zoals robotica, lucht- en ruimtevaart en biomedische toepassingen [1], [2], [3], [4]. Bovendien biedt het RIP-systeem een praktisch testplatform voor het evalueren van geavanceerde niet-lineaire regelmethoden [5].

Eeuwenlang vormde de gehele-orde calculus, onafhankelijk ontwikkeld door Isaac Newton en Gottfried Leibniz in de 17e eeuw, de basis voor de modellering van dynamische systemen. Dit wiskundige raamwerk is goed onderbouwd en biedt nauwkeurige fysische interpretaties [6], [7], [8]. De afgelopen jaren heeft de fractie-orde calculus echter aan populariteit gewonnen als een flexibel alternatief, met name vanwege het vermogen om overgangsverschuiven, complexe schakeldynamica en andere ingewikkelde systeemkenmerken vast te leggen die met traditionele gehele-orde modellen moeilijk te beschrijven zijn.

De voordelen van fractie-orde modellering zijn aangetoond in diverse toepassingen. Zo blijken fractie-orde modellen beter in staat om de dynamica van ultracondensatoren te beschrijven, waardoor een sterkere overeenstemming tussen experimentele en theoretische resultaten

wordt bereikt dan met gehele-orde benaderingen [9], [10], [11]. Evenzo hebben dergelijke modellen in de biomedische techniek bewezen een nauwkeurigere en compactere representatie te bieden van biologische weefseldynamica [12], [13], [14], [15]. Studies zoals [4] suggereren bovendien dat hydrologische systemen van nature fractie-orde eigenschappen vertonen, wat de toepasselijkheid van fractie-orde calculus op dergelijke fenomenen onderstreept. Daarnaast zijn fractie-orde modellen onderzocht binnen mechanische en elektrische systemen, waaronder modellen voor veren, dempers, condensatoren, weerstanden en inductoren [12], [16], [17], [18]. Doordat fractie-orde calculus een brug slaat tussen dynamische gedragingen van verschillende gehele-orde systemen, biedt het een uitgebreidere beschrijving van overgangstoestanden [19], [20], [21], [22]. Ondanks deze voordelen blijft de exacte fysische interpretatie van fractie-orde differentiatie en integratie een punt van discussie, waardoor het uitdagend is om universeel geaccepteerde wiskundige principes vast te stellen voor natuurlijke fenomenen [23], [24], [25], [26], [27].

In deze studie wordt een fractie-orde model ontwikkeld voor het RIP-systeem, zonder restrictieve aannames of beperkingen op te leggen. De overgang van de klassieke gehele-orde formulering naar een fractie-orde representatie wordt systematisch uitgevoerd, zodat de dynamica van het systeem op een natuurlijke manier wordt uitgebreid. Daarnaast wordt een data-gedreven aanpak toegepast om de systeemparameters te identificeren door experimentele gegevens te laten aansluiten op het fractie-orde model.

De rest van dit rapport is als volgt opgebouwd: Sectie II behandelt de formulering van de conventionele gehele-orde vergelijkingen die het RIP-systeem beschrijven en introduceert de fractie-orde tegenhanger. In Sec-

- Y. Yang was verbonden aan de School of Engineering Technology tijdens het opstellen van het oorspronkelijke manuscript van dit rapport, E-mail: yeeyoung1993@gmail.com.

tie III wordt de parameteridentificatie besproken, waarbij regressiegebaseerde schattingsmethoden worden toegepast. De dynamische vergelijkingen worden gediscetiseerd en de identificatie-algoritmen worden uitvoerig beschreven. Sectie IV biedt een vergelijkende analyse tussen het geïdentificeerde fractie-orde model en experimentele data om de nauwkeurigheid en prestaties te evalueren. Tot slot worden in Sectie V de belangrijkste bevindingen samengevat en de bredere implicaties van fractie-orde modellering voor niet-lineaire dynamische systemen besproken.

Door gebruik te maken van fractie-orde technieken verbetert dit onderzoek de nauwkeurigheid van de modellering van het RIP-systeem en toont het aan dat deze aanpak waardevolle inzichten en methodologieën biedt voor de verdere ontwikkeling van niet-lineaire systeemanalyses.

2 MODELLERING VAN HET ROP-SYSTEEM EN DE FRACTIONALISATIE

Een Roterende Omgekeerde Pendulum (ROP) vertegenwoordigt een complex elektromechanisch systeem met aanzienlijke niet-lineaire dynamica. Fig. 1(a) illustreert de fysieke structuur van een typisch ROP-systeem, terwijl Fig. 1(b) het coördinatensysteem laat zien dat gebruikt wordt voor de analyse ervan. Het ROP-systeem beschikt over twee vrijheidsgraden: de hoekverplaatsing van de horizontale draaiarm, aangeduid als θ , en de hoekverplaatsing van de pendelarm, aangeduid als α . Het dynamische gedrag van het systeem wordt beheerst door de niet-lineaire bewegingsvergelijkingen gepresenteerd in Vergelijking (1).

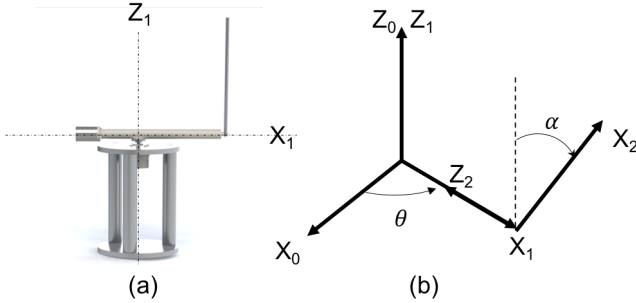


Figure 1. (a) Het fysieke model van het ROP-systeem. (b) Het coördinatensysteem van het ROP-systeem.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{1}{\det(M)(C_1\tau_m + a - b)} \\ \dot{\alpha} \\ \frac{1}{\det(M)}(-C_3 \cos \alpha \tau_m + c - d) \end{bmatrix} \quad (1)$$

waarbij aangesloten coëfficiënten als volgt worden samengevat,

$$C_1 = I_{2zz} + m_2 l_{2c}^2 \quad (2)$$

$$C_2 = I_{2yy} + m_2 l_{2c}^2 \quad (3)$$

$$C_3 = m_2 l_1 l_{2c} - l_{2xz} \quad (4)$$

$$C_4 = m_2 g l_{2c} \quad (5)$$

$$C_5 = J_r + m_1 l_{1c}^2 + I_{2xx} + m_2 l_1^2 \quad (6)$$

$$C_6 = C_2 - I_{2xx} \quad (7)$$

$$M = \begin{bmatrix} C_2 \sin^2 \alpha + C_5 + I_{2xx} \cos^2 \alpha & C_3 \cos \alpha \\ C_3 \cos \alpha & C_1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$a = C_1 \left((-b_\theta - C_6 \sin 2\alpha \dot{\alpha}) \dot{\theta} + C_3 \sin \alpha \dot{\alpha}^2 + \tau_{C\theta} \right) \quad (9)$$

$$b = C_3 \cos \alpha \left(\frac{C_6}{2} \sin 2\alpha \dot{\theta}^2 - b_\alpha \dot{\alpha} + C_4 \sin \alpha + \tau_{C\alpha} \right) \quad (10)$$

$$c = (C_5 + I_{2xx} \cos^2 \alpha + C_2 \sin^2 \alpha) \cdot (C_4 \sin \alpha + \frac{C_6}{2} \sin 2\alpha \dot{\theta}^2 - b_\alpha \dot{\alpha} + \tau_{C\alpha}) \quad (11)$$

$$d = C_3 \cos \alpha \left((-b_\theta - C_6 \sin 2\alpha \dot{\alpha}) \dot{\theta} + C_3 \sin \alpha \dot{\alpha}^2 + \tau_{C\theta} \right) \quad (12)$$

De systeemdynamica die gepresenteerd wordt in Vergelijking (1) worden uitgedrukt met behulp van gehele-orde calculus, wat intrinsiek verbonden is met de gevestigde relatie tussen fysieke principes en hun wiskundige representaties. De fractionalisatie van het ROP-systeemmodel impliceert niet de introductie van nieuwe fysieke principes geworteld in fractionele calculus. In plaats daarvan betreft het vervangen van de gehele-orde differentiatoren en integratoren in de oorspronkelijke dynamica door hun fractionele-orde tegenhangers [28], [29], [30].

In deze context worden de gehele-orde derivaten, zoals $\dot{\theta}$ en $\dot{\alpha}$, vervangen door de fractionele derivaten $D^\lambda \theta$ en $D^\mu \alpha$, waar λ en μ de fractionele orders van de operatoren D^λ en D^μ respectievelijk vertegenwoordigen. Deze fractionele orders zullen worden geïdentificeerd in Sectie III van dit verslag. De resulterende fractionele-orde representatie van de ROP-dynamica wordt geformuleerd in Vergelijking (13).

$$\begin{bmatrix} D^\lambda \theta \\ D^{2\lambda} \theta \\ D^\mu \alpha \\ D^{2\mu} \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{D^\lambda \theta}{\det(M)(C_1\tau_m + a - b)} \\ \frac{1}{\det(M)}(-C_3 \cos \alpha \tau_m + c - d) \end{bmatrix} \quad (13)$$

In het veld van zuivere wiskunde bestaan er talrijke definities van fractionele-orde differentiatie, elk met unieke eigenschappen en toepassingen. Onder de meest opvallende zijn de Grunwald-Letnikov fractionele derivaten, Riemann-Liouville derivaten, Caputo fractionele derivaten, en Miller-Ross fractionele derivaten [31], [32]. Voor dit project adopteren we de Caputo fractionele derivaat, aangeduid als $D^\lambda := {}^C D_t^\lambda$.

De formele definitie van de Caputo fractionele derivaat wordt verstrekt in Vergelijking (14), waarbij λ de fractionele order is zodanig dat $m < \lambda < m + 1$, en m is een

niet-negatief geheel getal. Deze definitie is bijzonder goed geschikt voor systemen met initiële voorwaarden uitgedrukt in termen van gehele-orde derivaten, waardoor het een praktische keuze is voor het fractionele modelleren van dynamische systemen.

$${}_a^C D_t^\lambda f(t) = \frac{1}{\Gamma(m+1-\lambda)} \int_a^t \frac{f^{(m+1)}(\tau)}{(t-\tau)^{\lambda-m}} d\tau \quad (14)$$

Voor het fractionele-orde systeem beschreven in Vergelijking (13), is het essentieel om de fractionele orders te identificeren die de systeemdynamica karakteriseren. Dit betreft specifiek het bepalen van de fractionele-orde parameters λ en μ , die hun gehele-orde tegenhangers in het systeemmodel gepresenteerd in Vergelijking (1) vervangen. Deze parameters omvatten de mate van differentiatie en integratie binnen het fractionele-orde kader, en bieden een meer algemene representatie van het systeemgedrag.

3 DIGITALISERING VAN MODEL DYNAMICA EN FORMULERING VAN IDENTIFICATIEALGORITMEN

De systeemdynamica in Vergelijking (13) is een uitgebreide fractionele-orde toestandsvergelijking, die een equivalente vorm heeft uitgedrukt in Vergelijking (15).

$$\begin{bmatrix} D^\lambda x_1 \\ D^\lambda x_2 \\ D^\mu x_3 \\ D^\mu x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_1(t, x_1, x_2, x_3, x_4) \\ x_4 \\ f_2(t, x_1, x_2, x_3, x_4) \end{bmatrix} \quad (15)$$

Hierbij worden de variabelen gedefinieerd als $x_1 = \theta$, $x_2 = D^\lambda \theta$, $x_3 = \alpha$, en $x_4 = D^\mu \alpha$. De termen $f_1(t, x_1, x_2, x_3, x_4)$ en $f_2(t, x_1, x_2, x_3, x_4)$ komen overeen met de tweede en vierde termen aan de rechterkant van de vectorrepresentatie in Vergelijking (13), respectievelijk.

In deze studie wordt de Caputo-definitie van fractionele-orde derivaten gebruikt om de systeemdynamica te modelleren. Echter, onder de veronderstelling van nul initiële voorwaarden, dat wil zeggen $\theta_0 = \dot{\theta}_0 = \dots = \theta_0^{(m+1)} = 0$ en $\alpha_0 = \dot{\alpha}_0 = \dots = \alpha_0^{(n+1)} = 0$, waarbij $m < \lambda < m+1$ en $n < \mu < n+1$, wordt de Caputo-definitie gelijk aan de Grunwald-Letnikov-definitie. Deze gelijkwaardigheid maakt het mogelijk om de gereduceerde vorm van Vergelijking (15) te digitaliseren. De wiskundige formulering van de Grunwald-Letnikov fractionele derivaat wordt gegeven in Vergelijking (16).

$${}_a^{GL} D_t^\lambda f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\lambda} \sum_{k=0}^{[(t-a)/h]} (-1)^k \binom{\lambda}{k} f(t-kh) \quad (16)$$

Onder nul initiële voorwaarden kunnen zowel Caputo's fractionele derivaten als Grunwald-Letnikov fractionele derivaten worden benaderd door een partiële som van de oneindige reeks beschreven in Vergelijking (16). De nauwkeurigheid van deze benadering verbetert aanzienlijk naarmate de gekozen tijdsspanne h voldoende klein wordt. De discrete benadering van de fractionele operatoren wordt uitgedrukt in Vergelijking (17), waarbij a de begintijd vertegenwoordigt en T de eindtijd van belang aangeeft. Deze

benadering biedt een praktische benadering voor het numeriek evalueren van fractionele derivaten over een eindig interval.

$${}_a^C D_t^\lambda f(t) \approx \frac{1}{h^\lambda} \sum_{k=0}^{[(T-a)/h]} (-1)^k \binom{\lambda}{k} f(t-kh) \quad (17)$$

De coëfficiënten binnen de som van Vergelijking (17) worden hieronder gegeven en kunnen iteratief worden berekend voor efficiënte evaluatie.

$$w_k^{(\lambda)} = (-1)^k \binom{\lambda}{k} \quad (18)$$

$$w_0^{(\lambda)} = 1, \quad w_{k+1}^{(\lambda)} = \left(1 - \frac{\lambda+1}{k+1}\right) w_k^{(\lambda)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (19)$$

Het substitueren van Vergelijking (17) in Vergelijking (15) geeft de discrete vorm van de systeemdynamica. Bijvoorbeeld, $D^\lambda x_2 = f_1(t, x_1, x_2, x_3, x_4)$ wordt gedigitaliseerd als volgt:

$$\frac{1}{h^\lambda} \sum_{k=0}^N w_k^{(\lambda)} x_2^{l-k} = f_1(t_k, x_1^k, x_2^k, x_3^k, x_4^k) \quad (20)$$

waarbij $N = \text{plafond}((t_l - a)/h) + 1$, $t_k = a + kh$, $x_1^k = x_1(t_k)$, $x_2^k = x_2(t_k)$, $x_3^k = x_3(t_k)$ en $x_4^k = x_4(t_k)$.

Vergelijking (20) wordt herschikt om iteratief te worden berekend zoals getoond in Vergelijking (21) en (22), dat wil zeggen, de niet-lineaire fractionele differentiaalvergelijking kan iteratief worden opgelost voor $l = 1, 2, \dots, N$. Evenzo wordt de digitalisering van het tweede gedeelte van Vergelijking (15) gegeven in Vergelijking (23) en (24).

$$x_1^l = h^\lambda x_2^k - \sum_{k=1}^N w_k^{(\lambda)} x_1^{l-k} \quad (21)$$

$$x_2^l = h^\lambda f_1(t_k, x_1^k, x_2^k, x_3^k, x_4^k) - \sum_{k=1}^N w_k^{(\lambda)} x_2^{l-k} \quad (22)$$

$$x_3^l = h^\mu x_4^k - \sum_{k=1}^N w_k^{(\mu)} x_3^{l-k} \quad (23)$$

$$x_4^l = h^\mu f_2(t_k, x_1^k, x_2^k, x_3^k, x_4^k) - \sum_{k=1}^N w_k^{(\mu)} x_4^{l-k} \quad (24)$$

De systeemresponsgegevens worden geregistreerd door lineaire optische encoders. Om de waarden van de twee fractionele orders te benaderen, wordt een optimalisatieprobleem geformuleerd als volgt:

$$\hat{\lambda}, \hat{\mu} = \arg \min_{\lambda, \mu} \mathcal{L}(\lambda, \mu) \quad (25)$$

De kostenfunctie voor dit optimalisatieprobleem wordt gedefinieerd als de integraal van de tijdgewogen absolute fout van de α hoek. Specifiek wordt de kostenfunctie uitgedrukt in Vergelijking (26), waarbij $\alpha(t)$ de iteratief gesimuleerde waarden vertegenwoordigt verkregen uit

Vergelijkingen (21) tot (24), en $\tilde{\alpha}(t)$ de gemeten realtime α hoek vertegenwoordigt vastgelegd door de encoders. Deze formulering zorgt ervoor dat het optimalisatieproces de afwijking tussen de gesimuleerde en gemeten responsen in de tijd minimaliseert.

$$\mathcal{L}(\lambda, \mu) = \int_0^T t |\alpha(t) - \tilde{\alpha}(t)| dt \quad (26)$$

Om de optimale waarden van λ en μ te schatten, kunnen verschillende wereldwijde optimalisatiealgoritmen worden gebruikt. In dit project wordt het genetisch algoritme (GA) gebruikt. GA is een stochastische zoekmethode geïnspireerd door biologische evolutionaire theorie, die principes zoals selectie, crossover en mutatie toepast op numerieke optimalisatieproblemen. De parameters van het genetisch algoritme worden empirisch bepaald, en hun specifieke waarden worden in de onderstaande tabel gegeven. Deze aanpak zorgt voor een robuuste en efficiënte zoektocht naar de optimale fractionele-orde parameters.

Populatiegrootte = 20	Crossover rate = 0.5
Mutatiesnelheid = 0.01	Aantal generaties = 25

4 IDENTIFICATIERESULTATEN EN EVALUATIE

De optimale parameters worden bepaald door het optimalisatieprobleem op te lossen, resulterend in $\hat{\lambda} = 0.8623$ en $\hat{\mu} = 0.9146$. De experimentele gegevens werden verkregen door de pendelarm vrij te laten vanaf een initiële hoek van $\alpha_0 = 10^\circ$ en de pendelhoeken, $\alpha(t)$, op te nemen met een bemonsteringsfrequentie van 1000 Hz. De opname duurde 20 seconden om ervoor te zorgen dat het systeem volledig was gestabiliseerd van de initiële oscillaties.

De simulatieresultaten gegenereerd met behulp van de geïdentificeerde parameters worden getoond in Figuur (2), waarbij de mogelijkheid van het model om het dynamische gedrag van het systeem nauwkeurig vast te leggen wordt geïllustreerd.

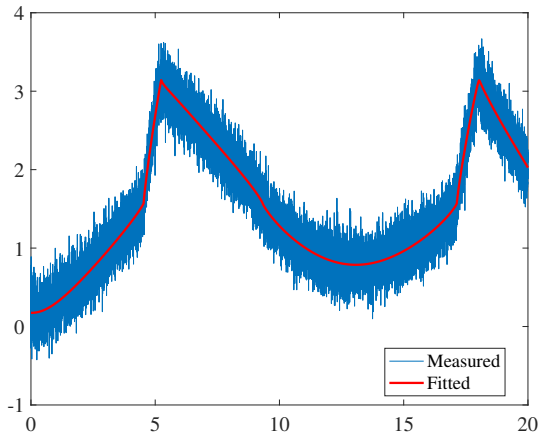


Figure 2. Gemeten systeemresponsen en de passingswaarde van het geïdentificeerde model.

Het meetproces introduceert ruis in het systeem, wat de prestaties van het model verslechtert, zoals afgebeeld

in Fig. 2. De restanten worden gedefinieerd als de verschillen tussen de gemeten uitgangen en de gemodelleerde uitgangswaarden van het model. Voor de geldigheid van het model wordt aangenomen dat de meetfouten een normale verdeling volgen met constante variantie. De restplot, getoond in Fig. 3, biedt een benadering om deze aannames van normaliteit en constante variantie te verifiëren. Door de restanten visueel te inspecteren, kan men de adequaatheid van het model en de geldigheid van deze onderliggende aannames beoordelen.

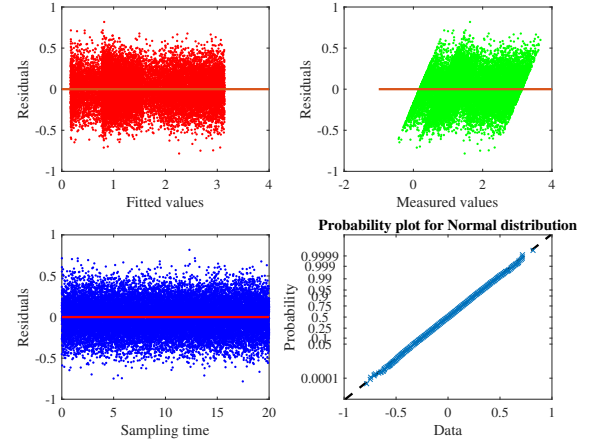


Figure 3. Restplot en de normaalwaarschijnlijkheidsplot voor de gemeten restanten.

Zoals te zien is in Fig. 3, vertonen de restanten van de gemeten gegevens een bijna perfecte uitlijning met een normale verdeling, waarbij de aannames van het regressiemodel met de geïdentificeerde optimale parameters worden gevalideerd.

Uit de voorgaande analyse worden de optimale fracionele orders voor de voorgestelde roterende omgekeerde pendulum (ROP) dynamica bepaald als $\hat{\lambda} = 0.8623$ en $\hat{\mu} = 0.9146$. De gemeten fouten worden verondersteld normaal verdeeld te zijn, een hypothese die wordt bevestigd door residu- en waarschijnlijkheidsplots. Echter, er zijn verschillende kritieke punten die verdere bespreking vereisen. De modelparameters kunnen variëren als een alternatieve kostenfunctie wordt geselecteerd voor het systeemidentificatieproces. De keuze van de kostenfunctie in deze studie wordt gerechtvaardigd door de kenmerken van de gemeten ruisgegevens, zoals blijkt uit de restplots in Fig. 3. Specifiek, de ruisverdeling is in wezen normaal, wat de geldigheid van onze aanpak versterkt.

Verder wordt het model gevalideerd door simulaties die verschillende niveaus van ruis bevatten. De modelorders, λ en μ , worden gekozen uit de volledige set van reële getallen. De optimale waarden voor deze orders worden verkregen door de voorgestelde kostenfunctie te minimaliseren. De structuur van het model wordt gegeneraliseerd door de derivaat- en integraalorders in de oorspronkelijke starre-lichaam dynamische vergelijkingen uit te breiden, waardoor de systeemdynamica nauwkeuriger kan worden weergegeven met behulp van fracionele calculus.

5 CONCLUSIE

In deze studie wordt het fractionele-orde dynamische model van het roterende omgekeerde pendulum (ROP) systeem geïdentificeerd met behulp van experimentele gegevens. De metingen van de hoek van de roterende arm θ en de pendelarmhoek α worden verondersteld te worden beïnvloed door witte ruis met constante variantie. De fractionele orders van de ROP-dynamica, λ en μ , worden geschat door een optimalisatieprobleem op te lossen, waarbij een voorgeschreven kostenfunctie wordt geminimaliseerd met behulp van een genetisch algoritme. De geïdentificeerde optimale fractionele orders worden vervolgens opgenomen in het systeemmodel. Vervolgens wordt de gesimuleerde uitvoer van het aangepaste model vergeleken met de experimenteel gemeten uitvoer.

Residu- en waarschijnlijkheidsplots worden gegenereerd na de oplossing van het aangepaste model, en de resultaten bevestigen dat de aanname van normaal verdeelde meetfouten met constante variantie waar is. Dit validatieproces versterkt de robuustheid en nauwkeurigheid van het geïdentificeerde fractionele-orde model bij het vastleggen van de dynamica van het ROP-systeem.

REFERENCES

- [1] Y. Yang and H. H. Zhang, "Stability study of lqr and pole-placement genetic algorithm synthesized input-output feedback linearization controllers for a rotary inverted pendulum system," *International Journal of Engineering Innovations and Research*, vol. 7, no. 1, pp. 62–68, 2018.
- [2] A. M. Lopes and L. Chen, "Fractional order systems and their applications," *Fractal and Fractional*, vol. 6, no. 7, pp. 389–389, Jul. 2022, publisher: Multidisciplinary Digital Publishing Institute. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/2504-3110/6/7/389/html>
- [3] Y. Yang, H. H. Zhang, and R. M. Voyles, "Rotary inverted pendulum system tracking and stability control based on input-output feedback linearization and pso-optimized fractional order pid controller," in *Automatic Control, Mechatronics and Industrial Engineering*. CRC Press, 2019, pp. 79–84.
- [4] D. A. Benson, M. M. Meerschaert, and J. Revielle, "Fractional calculus in hydrologic modeling: A numerical perspective," *Advances in Water Resources*, vol. 51, pp. 479–497, 2013. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2012.04.005>
- [5] Y. Yang, H. H. Zhang, and R. M. Voyles, "Optimal fractional-order proportional-integral-derivative control enabling full actuation of decomposed rotary inverted pendulum system," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 45, no. 10, pp. 1986–1998, 2023.
- [6] J. Francisco Gómez-Aguilar, H. Yépez-Martínez, C. Calderón-Ramón, I. Cruz-Orduña, R. Fabricio Escobar-Jiménez, V. H. Olivares-Peregrino, J. A. T. Machado, and A. M. Lopes, "Modeling of a Mass-Spring-Damper System by Fractional Derivatives with and without a Singular Kernel," *Entropy*, vol. 17, pp. 6289–6303, 2015. [Online]. Available: www.mdpi.com/journal/entropy/article
- [7] Y. Yang and H. H. Zhang, *Fractional calculus with its applications in engineering and technology*. Morgan & Claypool Publishers, 2019.
- [8] A. Choudhary, D. Kumar, and J. Singh, "A fractional model of fluid flow through porous media with mean capillary pressure," *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, vol. 21, pp. 59–63, 2016. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.jaubas.2015.01.002>
- [9] A. Dzieliński, G. Sarwas, and D. Sierociuk, "Comparison and validation of integer and fractional order ultracapacitor models," *Advances in Difference Equations*, 2011. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2011-11>
- [10] V. Martynyuk and M. Ortigueira, "Fractional model of an electrochemical capacitor," *Signal Processing*, vol. 107, pp. 355–360, 2015, publisher: Elsevier B.V.
- [11] Y. Yang and H. H. Zhang, "Fractional-order controller design," in *Fractional Calculus with its Applications in Engineering and Technology*. Cham: Springer International Publishing, 2019, pp. 43–65.
- [12] R. L. Magin, *Fractional calculus in bioengineering*. Begell House Publishers, 2006.
- [13] Y. Yang and H. H. Zhang, "Control applications in engineering and technology," in *Fractional Calculus with its Applications in Engineering and Technology*. Cham: Springer International Publishing, 2019, pp. 67–89.
- [14] R. L. Magin, "Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues," *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 59, no. 5, pp. 1586–1593, 2010. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.08.039>
- [15] Y. Yang and H. H. Zhang, "Preliminary tools of fractional calculus," in *Fractional Calculus with its Applications in Engineering and Technology*. Cham: Springer International Publishing, 2019, pp. 3–42.
- [16] Y. Yang, H. H. Zhang, W. Yu, and L. Tan, "Optimal design of discrete-time fractional-order pid controller for idle speed control of an ic engine," *International Journal of Powertrains*, vol. 9, no. 1-2, pp. 79–97, 2020.
- [17] A. S. Elwakil, "Fractional-order circuits and systems: An emerging interdisciplinary research area," *IEEE Circuits and Systems Magazine*, vol. 10, no. 4, pp. 40–50, 2010. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1109/MCAS.2010.938637>
- [18] Y. Yang, "Electromechanical characterization of organic field-effect transistors with generalized solid-state and fractional drift-diffusion models," Ph.D. dissertation, Purdue University, 2021.
- [19] Z. Li, *Fractional Order Modeling and Control of Multi-Input-Output Processes*, 2015. [Online]. Available: <https://escholarship.org/uc/item/49x9x167>
- [20] M. A. Aba Oud, A. Ali, H. Alrabaiah, S. Ullah, M. A. Khan, and S. Islam, "A fractional order mathematical model for covid-19 dynamics with quarantine, isolation, and environmental viral load," *Advances in Difference Equations*, vol. 2021, no. 1, pp. 1–19, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1186/S13662-021-03265-4/FIGURES/9>
- [21] K. Y. Choo, S. V. Muniandy, K. L. Woon, M. T. Gan, and D. S. Ong, "Modeling anomalous charge carrier transport in disordered organic semiconductors using the fractional drift-diffusion equation," *Organic Electronics*, vol. 41, pp. 157–165, Feb. 2017, publisher: Elsevier B.V.
- [22] Y. Yang, "Prediction of hotel price with regression models," School of Public Health, University of Michigan, USA, Technical report, 2023, presented at a Machine Learning and Biostatistics Online Course, April 2023. [Online]. Available: https://yeeyoung.github.io/assets/regression_english.pdf
- [23] R. Caponetto, J. A. Tenreiro Machado, and J. J. Trujillo, "Theory and applications of fractional order systems," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2014, pp. 1–11, 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1155/2014/596195>
- [24] F. Bu, Y. Cai, and Y. Yang, "Multiple object tracking based on faster-rcnn detector and kcf tracker," Technical Report [Online], 2016. [Online]. Available: <https://pdfs.semanticscholar.org>
- [25] M. Ivanescu, N. Popescu, D. Popescu, A. Channa, and M. Poboroniuc, "Exoskeleton hand control by fractional order models," *Sensors*, vol. 19, no. 21, p. 4608, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390/S19214608>
- [26] D. Xue, C. Zhao, and Y. Q. Chen, "A modified approximation method of fractional order system," in *2006 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, 2006, pp. 1043–1048. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1109/ICMA.2006.257769>
- [27] Y. Yang, "Voorspelling van hotelprijzen met regressiemodellen," School of Public Health, Universiteit van Michigan, VS, Technisch rapport, 2023, gepresenteerd tijdens een online cursus Machine Learning en Biostatistiek, april 2023. [Online]. Available: https://yeeyoung.github.io/assets/regression_dutch.pdf
- [28] J. J. Quintana, A. Ramos, and I. Nuez, "Identification of the fractional impedance of ultracapacitors," *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, vol. 2, no. PART 1, pp. 432–436, 2006. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3182/20060719-3-pt-4902-00073>
- [29] Y. Yang and H. H. Zhang, "Neural network-based adaptive fractional-order backstepping control of uncertain quadrotors with unknown input delays," *Fractal and Fractional*, vol. 7, no. 3, p. 232, 2023.

- [30] A. P. Singh, D. Deb, H. Agrawal, and V. E. Balas, "Fractional modeling of robotic systems," in *Intelligent Systems Reference Library*. Springer Science and Business Media Deutschland GmbH, 2021, vol. 194, pp. 19–43. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/978-3-030-58247-0_2/COVER
- [31] Y. Yang and H. H. Zhang, "Optimal model reference adaptive fractional-order proportional integral derivative control of idle speed system under varying disturbances," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, p. 09596518241266670, 2024.
- [32] C. A. Monje, Y. Q. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue, and V. Feliu, *Fractional-order Systems and Controls. Fundamentals and Applications*. Springer, 2010. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/978-1-84996-335-0>