高等数学

高中公式

三角函数公式

和差角公式

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$tg(\alpha\pm\beta)=\dfrac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\cdot tg\beta}$

$ctg(\alpha\pm\beta)=\dfrac{ctg\alpha\cdot ctg\beta\mp1}{ctg\beta\pm ctg\alpha}$

和差化积公式

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

和差化积二倍半
余弦同,正弦异
正加正前，减余前
余弦相减取负号

积化和差公式

$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

积化和差得和差
余弦在后要相加
异名函数取正弦
正弦相乘取负号

倍角公式

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

$tg2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}\quad ctg2\alpha=\dfrac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$

$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

$tg3\alpha=\dfrac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$

半角公式

$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}\quad \cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

$tg\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

$ctg\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

$V_{棱柱}=SH\quad V_{棱锥}=\dfrac{1}{3}SH\quad V_{棱台}=\dfrac{1}{3}H(S+\sqrt{SS'}+S')$

球的表面积：$4\pi R^2$ 球的体积：$\dfrac{4}{3}\pi R^3$ 椭圆面积：πab 椭球的体积：$\dfrac{4}{3}\pi abc$

第 1 章 极限与连续

1.1 集合、映射、函数

空集，子集，有限集，无限集，可列集，积集，区间，邻域，上界，下界，上有界集，下有界集，无界集，上确界，下确界

确界存在定理：凡有上(下)界的非空数集必有有限的上(下)确界。

映射，象，原象，定义域，值域，满映射，单映射，双射，函数，自变量，因变量，基本初等函数

1.2 数列的极限

性质：

1. （唯一性）收敛数列的极限必唯一。
2. （有界性）收敛数列必为有界数列。
3. （子列不变性）若数列收敛于 a，则其任何子列也收敛于 a。

   注1. 一个数列有若干子列收敛且收敛于一个数，仍不能保证原数列收敛。

   注2. 若数列$\{x_n\}$有两个子列$\{x_p\}$,$\{x_q\}$均收敛于 a，且这两个子列合起来就是原数列，则原数列也收敛于 a。

   注3. 性质 3 提供了证明了某数列发散的方法，即用其逆否命题：若能从该数列中选出两个具有不同极限的子列，则该数列必发散。
4. （对有限变动的不变性）若数列$\{x_n\}$收敛于 a，则改变$\{x_n\}$中的有限项所得到的新数列仍收敛于 a。
5. （保序性）若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，且 a<b，则存在 N，当 n>N 时，有 $x_n<y_n$。

判别法则：

1.夹逼法则：若∃N,当 n>N 时，$x_n\le y_n\le z_n$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=a$。

2.单调收敛原理：单调有界数列必收敛。

注：任何有界的数列必存在收敛的子数列。

3.柯西收敛准则：数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是：对于任意给定的正数 ε，都存在正整数 N，使得当 m，n>N 时，有$|x_m-x_n|<\varepsilon$。

1.3 函数的极限

性质：极限唯一性，局部有界性，局部保序性。

判别法则：

1.夹逼法则：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，且存在 x_0 的某一去心邻域 $\overset{o}{U}(x_0,\delta)$，使得$\forall x\in\overset{o}{U}(x_0,\delta)$，均有 $f(x)\le g(x)\le h(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$。

2.单调收敛原理：单调有界函数必收敛。

3. 柯西收敛准则：函数 f(x)收敛的充要条件是：∀ε>0, ∃>0, ∀x',x''∈ $\overset{o}{U}(x_0,\delta)$，有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

4.海涅(Heine)归结原则：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是：对于任何满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 的数列$\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

归结原则对于验证函数在某点没有极限是较方便的，例如可以挑选一个收敛于该点的自变量 x 的数列$\{x_n\}$，而相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$却不收敛；或者选出两个收敛于该点的数列$\{x_n\}$,$\{x'_n\}$，而相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$,$\{f(x_n)\}$却具有不同的极限。

1.4 无穷小与无穷大

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=l$，当 $l\begin{cases}=0\\ \ne0\\ =1\end{cases}$ 时，则称 $x\to x_0$ 时称 α(x) 是 β(x) 的

$$\begin{cases}\text{高阶无穷小，记作}\alpha(x)=o(\beta(x))\\ \text{同阶无穷小，记作}\alpha(x)=O(\beta(x))\\ \text{等阶无穷小，记作}\alpha(x)\sim\beta(x)\end{cases}$$

常用等价无穷小

$\sin x\ \tan x\ \arcsin x\ \arctan x\ e^x-1\ \ln(1+x)\sim x$

$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2\quad (1+x)^a-1\sim ax\quad a^x-1\sim x\ln a$

若 f(x=0), f'(0)≠0,则 $\int_0^x f(t)dt\sim\dfrac{1}{2}f'(0)x^2$

确定等价无穷小的方法：1.洛必达法则，2.泰勒公式

1.5 连续函数

极限存在⇔左右极限存在且相等。

连续⇔左右极限存在且相等，且等于该点函数值。

简断点：1.第一类间断点，左右极限不相等，或相等但不等于该点函数值；2.左右极限至少有一个不存在。

闭区间上连续函数的性质：有界性，最值性，介值性，零点存在定理。

1.6 常见题型

求极限的方法：1.四则运算；2.换元和两个重要极限；3.等价无穷小替换；4.泰勒公式；5.洛必达法则；6.利用函数极限求数列极限；7.放缩法；

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$,就要将数列 xn 放大与缩小成：$z_n\le x_n\le y_n$.

8.求递归数列的极限

(1)先证递归数列$\{a_n\}$收敛（常用单调收敛原理），然后设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，再对递归方程 $a_{n+1}=f(a_n)$ 取极限得 A=f(A), 最后解出 A 即可。

(2)先设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，对递归方程取极限后解得 A，再用某种方法证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$。

第 2 章 导数与微分

2.1 求导法则和求导公式

求导法则：

1.四则运算法则

$[\alpha u(x)+\beta v(x)]'=\alpha u'(x)+\beta v'(x)$　　$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

$$[\frac{u(x)}{v(x)}]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

2.复合函数求导

$$(f[\varphi(x)])'=f'[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

关键在于区分哪些是中间变量，哪些是自变量

3.反函数求导　$[f^{-1}(y)]'=\frac{1}{f'(x)}$

4.隐函数求导

5.参数式求导

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, \frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}, \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}$$

6.对数求导法

7.分段函数求导

(1)按求导法则求连接点处的左右导数

设 $f(x)=\begin{cases} g(x), x-\delta<x\le x_0 \\ h(x), x_0<x\le x+\delta \end{cases}$，若$g'_-(x_0)=h'_+(x_0)=A$，则$f'(x_0)=A$.

(2) 按定义求连接点处的左右导数

设 $f(x)=\begin{cases} g(x),\ x-\delta<x<x_0 \\ A,\quad x=x_0 \\ h(x),\ x_0<x\le x+\delta \end{cases}$，$g(x)$与$f(x)$在点$x_0$处无定义，可按定义求$g'_-(x_0)$与$h'_+(x_0)$

(3)对于 $f(x)=\begin{cases} g(x), x\ne x_0 \\ A,\ x=x_0 \end{cases}$，(1)$f'(x)$很复杂，按定义求，$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

(2)否则，先求出$f'(x)$，再求$\lim_{x\to x_0}f'(x)$

8.变限积分求导

$$y=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t)dt, \frac{dy}{dx}=f(\varphi(x))\varphi'(x)-f(\psi(x))\psi'(x)$$

求导公式：

$(C)'=0$

$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$

$(a^x)'=a^x\ln a$

$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\sec^2 x$

$(ctgx)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$

$(\csc x)'=-\csc x\cdot ctgx$

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$

$(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$

2.2 高阶导数和高阶微分

求高阶导数的方法：

1.莱布尼茨（Leibniz）公式：$(u(x)v(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$

2.常用公式

$$(e^{ax+b})^{(n)}=a^n e^{ax+b}$$

$$(\sin(ax+b))^{(n)}=a^n\sin(ax+b+\frac{n}{2}\pi)$$

$$(\cos(ax+b))^{(n)}=a^n\cos(ax+b+\frac{n}{2}\pi)$$

$$((ax+b)^\beta)^{(n)}=a^n\beta(\beta-1)...(\beta-n+1)(ax+b)^{\beta-n}$$

$$(\frac{1}{ax+b})^{(n)}=a^n\frac{(-1)^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$$

$$(\ln(ax+b))^{(n)}=a^n(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(ax+b)^n}$$

3.分解法

分解为上述初等函数之和

第 3 章 中值定理和泰勒公式

3.1 中值定理

费马定理：若是 x_0 是 f(x)的一个极值点，且 $f'(x_0)$存在，则必有 $f'(x_0)=0$(可微函数的极值点必为驻点),

1.罗尔定理：若函数 f(x)满足以下条件：(i)在闭区间[a,b]上连续；(ii)在开区间(a,b)内可导；(iii)f(a)=f(b)，则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

2.拉格朗日定理：若函数 f(x)满足以下条件：(i)在闭区间[a,b]上连续；(ii)在开区间(a,b)内可导，则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

3.柯西定理：若函数 f(x)和 g(x)满足以下条件：(i)在闭区间[a,b]上连续；(ii)在开区间(a,b)内可导；(iii) $\forall x\in(a,b), g'(x)\ne0$，则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

3.2 泰勒公式

求泰勒公式的方法：

1.泰勒公式（拉格朗日余项）：$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

2.常用麦克劳林公式（带拉格朗日余项）

指对函数一二三　正弦函数一三五

三角对数隔一换　正余指数有感叹

e 和 cos 前有"1"

arc、ln、tanx 无阶乘

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\theta x$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha=\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+...+(-1)^n x^n+(-1)^{n+1}x^{n+1}(1+\theta x)^{-1-(n+1)}$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+x^{n+1}(1+\theta x)^{-1-(n+1)}$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}x^k+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{n+1}(1+\theta x)^{\frac{1}{2}-(n+1)}$$

3.逐项求导或逐项积分

若 $f(x)=\varphi'(x)$或$f(x)=\int_{x_0}^{x}\varphi(t)dt$，φ(x)的泰勒公式可以比较方便的求出来，

然后对其逐项求导或逐项积分便可以得到 f(x)的泰勒公式。

例如：$\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x(1-t^2+t^4)dt+o(x^5)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+o(x^5)$

3.3 函数的极值、最值

驻点，导数不存在的点为极值可疑点。

驻点，导数不存在的点，端点为最值可疑点。

极值判别法则：

1.设点 x_0 为函数 f(x)的极值可疑点，f(x)在点 x_0 的邻域内连续，去心邻域内可微，如果在$(x_0-\delta,x_0)$内 $f'(x_0)\ge0$，在 $(x_0,x_0+\delta)$内 $f'(x_0)\le0$，则 x_0 必为 f(x)的极大值点。反之必为极小值点。

2.若点 x_0 是 f(x)的驻点且 $f''(x_0)$存在，则当 $f''(x_0)>0(<0)$时，x_0 必为 f(x)的极小(大)值点。

3.设函数 f(x)在点 x_0 处有 n 阶导数，且 $f'(x_0)=f'(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0$，但 $f^{(n)}(x_0)\ne0$，则(i)当 n 为偶数时，f(x)在点 x_0 处取极值，当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时取极小值，当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时取极大值；(ii)当 n 为奇数时 $f(x_0)$不是极值。

3.4 函数作图

定理：设函数 f(x)在闭区间[a,b]上连续，在开区间(a,b)内可导，则 f(x)在[a,b]上是凸（凹）函数的充要条件是：1.f'(x) 在开区间(a,b)内单调递减（增）。

2. $f(\lambda x_1)+(1-\lambda)x_2)<(>)\ \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2), \lambda\in(0,1)$.

3. $f''(x_0)\le(\ge)0$.

若函数 f(x)在点 x_0 处凹凸性相反，则点 x_0 称为 f(x)的拐点。

拐点的必要条件：$f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$不存在。

拐点的充要条件：$f''(x)$经过时变号。

渐近线：1.垂直渐近线：x=a 是垂直渐近线⇔ $\lim_{x\to a+0}=\infty$ 或 $\lim_{x\to a-0}=\infty$.

2.斜渐近线：f(x)=ax+b, $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}, b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$ 或

$a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}, b=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax)$（水平渐近线为其特例）。

函数作图的步骤：

1. 确定函数的定义域；
2. 观察函数的某些特性，奇偶性，周期性等；
3. 判断函数是否有渐近线，如有，求出渐近线；
4. 确定函数的单调区间，极值，凹凸区间，拐点，并列表；
5. 适当确定一些特殊点的函数值；
6. 根据上面提供的数据，作图。

第 4 章 积分

4.1 不定积分

4.1.1.基本积分表

$$\int x^\mu dx=\frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}+C \quad \int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C \quad \int a^x dx=\frac{1}{\ln a}a^x+C$$

逢sinx必加负号
secx对应tanx，cscx对应cotx
两个对一个，一个对两个
两对逆过程

$$\int\sin xdx=-\cos x+C \quad \int\cos xdx=\sin x+C$$

$$\int\tan xdx=-\ln|\cos x|+C \quad \int\cot xdx=\ln|\sin x|+C$$

$-\ln|\cos x|$
$\Downarrow$
$\tan x$
$\Downarrow 2$
$\sec x\tan x \Leftarrow \sec x \Leftarrow \ln|\sec x+\tan x|$

$$\int\sec xdx=\ln|\sec x+\tan x|+C$$

$$\int\csc xdx=-\ln|\csc x+\cot x|+C=\ln|\csc x-\cot x|+C=\ln|\tan\frac{x}{2}|+C$$

$$\int\sec^2 xdx=\tan x+C \quad \int\csc^2 xdx=-\cot x+C$$

$$\int\tan x\sec xdx=\sec x+C \quad \int\csc x\cot xdx=-\csc x+C$$

反三角函数

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C\text{或}-\arccos x+C$$

$$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C\text{或}-\operatorname{arc}\cot x+C$$

arcsin分母有根号　arctan无根号
未知数在前是对数
未知数在后是反三角函数
根号相加，无根号相除

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C \quad \int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C$$

对数函数

$$\int\frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\ln|\frac{a+x}{a-x}|+C \quad \int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$$

$$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}|+C \quad \int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$\int\sqrt{x^2-a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$$

$$\int\sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

$$\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C$$

$$\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C$$

不可积的几个初等函数：$e^{-x^2}\quad \dfrac{1}{\ln x}\quad \sin x^2\quad \cos x^2\quad \dfrac{\sin x}{x}\quad \dfrac{\cos x}{x}$

4.1.2.换元积分法和分部积分法

换元积分法：1.第一类换元积分法，即凑微分法，合并。
2.第二类换元积分法，拆分。

分部积分法：$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$

4.1.3.有理函数和可化为有理函数的积分

有理函数 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 的积分可以归结为下列四种简单分式的积分：

（1）$\int\dfrac{A}{x-a}dx$；（2）$\int\dfrac{A}{(x-a)^n}dx$；

（3）$\int\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$；（4）$\int\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}$$

三角函数有理式的积分一般用万能代换 $\tan\dfrac{x}{2}=t$，对于如下形式可以采用更灵活的代换：

对于积分 $\int R(\sin^2 x,\cos^2 x)dx$，可令 tanx=t；
对于积分 $\int R(\sin x)\cos xdx$，可令 sinx=t；
对于积分 $\int R(\cos x)\sin xdx$，可令 cosx=t，等等。

某些**可化为有理函数的积分**

1. $\int R(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}})dx$ 型积分，其中 n>1，其中 ad ≠bc。

这里的关键问题是消去根号，可令 $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}=t$。

2. $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c}dx$ 型积分，其中 $b^2-4ac\neq0$， a ≠0。由于 $ax^2+bx+c=a(x+\dfrac{b}{2a})^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}$，故此类型积分可以化为以下三种类型：

$\int R(u,\sqrt{k^2-u^2})dx$，可用三角替换 $u=k\sin t$；
$\int R(u,\sqrt{u^2-k^2})dx$，可用三角替换 $u=k\sec t$；
$\int R(u,\sqrt{u^2+k^2})dx$，可用三角替换 $u=k\tan t$。

$$I_n=\int\tan^n xdx=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}$$

倒代换：$\int\dfrac{1+x^2}{1+x^4}dx$，$\int\dfrac{1-x^2}{1+x^4}dx$，由此还可以求出 $\int\dfrac{1}{1+x^4}dx$，$\int\dfrac{x^2}{1+x^4}dx$

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx,(a^2+b^2\neq0)$$

解：设 $a_1\sin x+b_1\cos x=A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x)$，为此应有

$\begin{cases}aA-bB=a_1\\ bA+aB=b_1\end{cases}$，解得 $A=\dfrac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}, B=\dfrac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}$，故

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx=A\int dx+B\int\frac{(a\sin x+b\cos x)'}{a\sin x+b\cos x}dx$$

$$=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}x+\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}\ln|a\sin x+b\cos x|+C$$

4.2 定积分

4.2.1.可积条件

可积的必要条件：若函数 f(x)在闭区间[a,b]上可积，则 f(x)在[a,b]上有界。
可积函数类：闭区间上的连续函数，单调函数，有界且只有有限个间断点。

4.2.2.定积分的计算

1.换元积分法 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dx$

从右到左，相当于不定积分的第一类换元积分法，从左到右，相当于第二类换元积分法。

2.分部积分法 $\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$

常见的积分和式

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(a+\frac{i(b-a)}{n})\frac{(b-a)}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(a+\frac{(i-1)(b-a)}{n})\frac{(b-a)}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx, I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

使用分部积分法的常见题型：

被积函数的形式	所用方法
$P_n(x)e^x, P_n(x)\sin x, P_n(x)\cos x$	进行 n 次分部积分，每次均取 $e^{\alpha x},\sin\alpha x,\cos\alpha x$ 为 $v'(x)$
$P_n(x)\ln x, P_n(x)\arcsin x, P_n(x)\arctan x$	取 $P_n(x)$ 为 $v'(x)$
$e^{\alpha x}\sin\beta x, e^{\alpha x}\cos\beta x$	取 $e^{\alpha x}$ 为 $v'(x)$，进行两次分部积分

4.2.3.定积分的应用

(1)平面图形的面积

$$dS=f(x)dx=\varphi(y)dy=\frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$$

(2)旋转体的体积

$$dV=\pi f^2(x)dx=\pi\varphi^2(y)dy=2\pi xf(x)dx$$

(3)弧长、曲率

弧微分公式：$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+f'^2(x)}dx=\sqrt{1+\varphi'^2(y)}dy$

$=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$

曲率：$K=|\frac{d\alpha}{ds}|=\frac{|y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)|}{[x'^2(t)+y'^2(t)]^{3/2}}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$

(4)静矩、转动惯量

mr, mr^2

(5) 引力 $F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$

①均匀细杆质量为 M，长度为 l，在杆的延长线上离右端为 a 处有一质量为 m 的质点，则质点与细杆之间的引力为 F=kMm/a(a+l).

②均匀圆环质量为 M，半径为 r，在圆心的正上方距离为 b 处有一质量为 m 的质点，则质点与均匀圆环之间的引力为 $F=\frac{kMmb}{(r^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$.

③均匀圆盘可以看作是无数个均匀圆环。

4.3 广义积分

广义积分审敛法

1.比较法 f(x)≤kg(x),k≥0

2.比较法的极限形式 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$

3.柯西收敛准则 $|\int_{A'}^{A''}f(x)dx|<\varepsilon$

几个常见的广义积分

1.$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p},a>0\begin{cases}收敛,p>1\\发散,p\le1\end{cases}$； 2.$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p},a>0\begin{cases}收敛,p<1\\发散,p\ge1\end{cases}$

3.$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^p x},a>1\begin{cases}收敛,p>1\\发散,p\le1\end{cases}$； 4.$\int_a^{+\infty}x^ke^{-\lambda x}dx,k\ge0\begin{cases}收敛,\lambda>0\\发散,\lambda\le0\end{cases}$

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx\xrightarrow{x=\frac{1}{t}}I=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

第 5 章 无穷级数

常数项级数敛散性的判定

1.若 $\lim_{n\to\infty}u_n\ne0$，级数发散，等于零，需进一步判定。

2.若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，根据一般项的特点选择相应判别法：

①一般项中含有 n!或 n 的乘积形式，采用比值判别法；
②一般项中含有以 n 为指数幂的因子，采用根值判别法；
③一般项中含有形如 n^α（α 不一定是整数）的因子，采用比较判别法；
④利用已知敛散性的结果，结合级数的性质，判别其敛散性；
⑤采用定义，部分和数列{S_n}有上界。

3. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为任意级数，若其为交错级数，采用莱布尼茨判别法，若不为交错级数或是交错级数但不满足莱布尼茨判别法的条件，采用比值判别法和根值判别法。

求函数项级数的收敛域：(1)比值法 $\lim_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}|<1$；(2)根值法 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n(x)}<1$。

求幂级数的收敛域：（1）比值法 $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\rho$或$\lim_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}|<1$；

（2）根值法 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$或$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n(x)}<1$。

常数项级数的求和：1.直接计算部分和 S_n，然后求极限；

2.利用相应的幂级数。

幂级数的求和：利用逐项求导，逐项积分，四则运算等手段，将其化为可求和形式（即前面的麦克劳林公式）。

求函数的幂级数展开式：就是求泰勒公式（前面有求泰勒公式的三个方法）。

傅立叶级数 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，$\begin{cases}a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\\b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\end{cases}$

狄利克雷充分条件 $S(x)=\begin{cases}f(x)，续点\\\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}，间断点\\\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]，x=\pm\pi\end{cases}$

几个重要的级数

1.几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}\begin{cases}当|q|<1时收敛\\当|q|\ge1时发散\end{cases}$ 2.p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}当p>1时收敛\\当p\le1时发散\end{cases}$

3. $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln^p n}\begin{cases}当p>1时收敛\\当p\le1时发散\end{cases}$ 4. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e$ 5. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

第 6 章 微分方程

1. 可分离变量方程 $\frac{dy}{dx}=g(x)h(y)$

2. 可化为可分离变量的方程 $\begin{cases}齐次方程 \frac{dy}{dx}=f(x,y)=\varphi(\frac{y}{x})\\可化为齐次方程的方程 \frac{dy}{dx}=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})\end{cases}$

3.一阶线性方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(y)$ $y=e^{-\int P(x)dx}(C+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx)$

4.伯努利方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}$ 令 $y=z^{1-\alpha}\Rightarrow\frac{dz}{dx}+(1-\alpha)P(x)z=(1-\alpha)Q(x)$

5.全微分方程　特殊路径法，凑微分法

6. 可降阶的高阶方程 $\begin{cases}\text{不含y}\ y''=f(x,y')\ \text{令}p=y',y''=\frac{dp}{dx}\\ \text{不含x}\ y''=f(y,y')\ \text{令}p=y',y''=y\frac{dp}{dy}\end{cases}$

7.

线性微分方程
$$\begin{cases}\text{二阶齐次}\ y''+p(x)y'+q(x)y=0\begin{cases}(1)\text{已知}y_1\\(2)\text{令}y_2=u(x)y_1,\text{代入求出}y_2\\(3)y=c_1y_1+c_2y_2\end{cases}\\ \text{二阶非齐次}\ y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)\begin{cases}(1)\text{求出对应齐次方程的}y_1,y_2\\(2)\text{令}y^*=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x),\text{求出}u_1,u_2\begin{cases}u_1'y_1+u_2'y_2=0\\u_1'y_1'+u_2'y_2'=f(x)\end{cases}\\(3)y=c_1y_1+c_2y_2+y^*\end{cases}\end{cases}$$

8.常系数线性微分方程

二阶齐次	特征方程的根	微分方程的线性无关解	微分方程的通解
$y''+p(x)y'+q(x)y=0$	互异实根 r_1,r_2	e^{r_1x},e^{r_2x}	$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$
	二重实根 $r_1=r_2=r$	e^{rx},xe^{rx}	$(c_1+c_2x)e^{rx}$
	共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$e^{\alpha x}\cos\beta x,e^{\alpha x}\sin\beta x$	$e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$

二阶非齐次 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$

（1）求对应齐次方程的 y_1,y_2

（2） 令 $y^*=Q(x)e^{\lambda x}=x^k(A_0+A_1x+...+A_mx^m)e^{\lambda x}$

$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=p_m(x)$

（3） $y=c_1y_1+c_2y_2+y^*$

9.欧拉方程

$$x^ny^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+...+p_{n-1}xy'+p_ny=f(x)$$

$$\text{令}x=e^t,D^k=\frac{d^k}{dt^k},\text{则}x^ky^{(k)}=D(D-1)...(D-k+1)y$$

$$\therefore[D(D-1)...(D-n+1)+p_1D(D-1)...(D-n+2)+...+p_{n-1}D]y=f(e^t)$$

第 7 章　向量代数与空间解析几何

叉积 $a\times b=\begin{vmatrix}i&j&k\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$　混合积 $(a,b,c)=(a\times b)\bullet c=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$ （平行六面体的体积）

平面方程 $\begin{cases}\text{点法式}\ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\\ \text{三点式 混合积为零}\\ \text{截距式}\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\\ \text{一般式}\ Ax+By+Cz+D=0\end{cases}$

直线方程 $\begin{cases}\text{参数式}\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}\\ \text{对称式}\ \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\\ \text{一般式}\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}\end{cases}$

平面束方程 $\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

$\left.\begin{matrix}\text{两平面夹角}\\\text{两直线夹角}\end{matrix}\right\}\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}=\sin\varphi$（平面与直线的夹角）

点到直线的距离 $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$　点到直线的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{p_1p_0}\times s|}{|s|}$

常见二次曲线

柱面：椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ 抛物柱面 $x^2=2pz$

球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 椎面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

旋转面

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}\xrightarrow{\text{绕z轴旋转}}\begin{cases}x=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\cos\theta\\y=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\sin\theta\\z=z(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(x,z)\\y=0\end{cases}\xrightarrow{\text{绕z轴旋转}}f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0\begin{cases}\text{旋转椭园面}\ \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1\\ \text{旋转双曲面}\ \frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1(\text{单叶})\quad\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1(\text{双叶})\\ \text{旋转抛物面}\ x^2+y^2=2pz\end{cases}$$

椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm1\binom{\text{单}}{\text{双}}$ 抛物面 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\pm z(\text{椭圆})\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm z(\text{双曲})\end{cases}$

第 8 章　多元函数微分学

复合函数微分法，关键在于确定哪些是中间变量，哪些是自变量

隐函数微分法

由方程确定的隐函数 $F(x_1,x_2,...,x_n)\Rightarrow\frac{\partial y}{\partial x_i}=\frac{-Fx_i}{F_y}$

由方程组确定的隐函数

$$\begin{cases}\begin{cases}F(x,u,v)=0\\G(x,u,v)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{du}{dx}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}\\\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}\end{cases}\\ \begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\frac{du}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}\\\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)},\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}\end{cases}\end{cases}$$

曲线的切线和法平面 $(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$ $(1,y'(x_0),z'(x_0))$ $(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)})$

曲面的切平面和法线 $(F_x(P_0),F_y(P_0),F_z(P_0))$ $(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1)$ $(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})$

二元函数泰勒公式

$$f(x_0+h,y_0+l)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(h\frac{\partial}{\partial x}+l\frac{\partial}{\partial y})^{(k)}}{k!}f(x_0,y_0)+\frac{(h\frac{\partial}{\partial x}+l\frac{\partial}{\partial y})^{(n+1)}}{n!}f(x_0+\theta h,y_0+\theta l)$$

多元函数取极值的必要条件： $f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0$

多元函数取极值的充分条件 $\begin{cases}1.f_x'(x_0,y_0)=0,f_y'(x_0,y_0)=0\\2.(1)AC-B^2>0,A>0,\text{正定},\text{有极小值};A<0,\text{负定},\text{有极大值}\\\quad(2)AC-B^2<0,A>0,\text{不定},\text{无极值}\\\quad(3)AC-B^2=0,\text{不能确定}\end{cases}$

求条件极值，用拉格朗日数乘法

$$\begin{cases}\min(\text{或}\max)z=f(x,y)\\\varphi(x,y)=0\end{cases},\text{令}F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),\text{有}\begin{cases}F_x=0\\F_y=0\\\varphi(x,y)=0\end{cases}$$

方向导数：偏导数是函数在平行于坐标轴方向上的变化率，有时需要考虑函数沿某一指定方向的变化率，这种变化率就是方向导数。

方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial l}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$ 梯度 $(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z})$

第 9 章 多元函数积分学

9.1 二重积分

$$\begin{matrix}\text{二重积分}\\ I=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\end{matrix}\begin{cases}1.x-\text{型区域}I=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)dy\\ 2.\text{y}-\text{型区域}I=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)dx\\ 3.\text{换元法 令}\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}\Rightarrow I=\iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v))\,|J|\,dudv\\ (1)\text{平移变换 令}\begin{cases}x=u+a\\ y=v+b\end{cases}\Rightarrow I=\iint\limits_{D'}f(u+a,v+b)dudv\\ (2)\text{极坐标变换 令}\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow I=\iint\limits_{D'}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta\end{cases}$$

9.2 三重积分

$$\begin{matrix}\text{三重积分}\\ I=\iiint\limits_v f(x,y,z)dv\end{matrix}\begin{cases}1.\text{二套一，一套二}\\ 2.\begin{matrix}\text{换元}\\ \text{法}\end{matrix}\text{令}\begin{cases}x=x(u,v,w)\\ y=y(u,v,w)\Rightarrow I=\iiint\limits_{v'}f(x(u,v,w),y(...),z(...))\,|J|\,dudvdw\\ z=z(u,v,w)\end{cases}\\ (1)\begin{matrix}\text{平移}\\ \text{变换}\end{matrix}\text{令}\begin{cases}x=u+a\\ y=v+b\Rightarrow I=\iiint\limits_{v'}f(...)dudvdw\\ z=w+c\end{cases}\\ (2)\begin{matrix}\text{柱坐标}\\ \text{变换}\end{matrix}\text{令}\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\Rightarrow I=\iiint\limits_{v'}f(...)rdrd\theta dz\\ z=z\end{cases}\\ (3)\begin{matrix}\text{球坐标}\\ \text{变换}\end{matrix}\text{令}\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\Rightarrow I=\iiint\limits_{v'}f(...)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}\\ (4)\begin{matrix}\text{椭球}\\ \text{坐标}\\ \text{变换}\end{matrix}\text{令}\begin{cases}x=ar\sin\varphi\cos\theta\\ y=br\sin\varphi\sin\theta\Rightarrow I=\iiint\limits_{v'}f(...)abcr^2\sin\varphi drd\varphi d\theta\\ z=cr\cos\varphi\end{cases}\end{cases}$$

9.3 重积分的应用

$$\begin{cases}(1)\text{曲面面积 面积元素：}\dfrac{dxdy}{\cos(n,z)},\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}dxdy,\sqrt{EG-F^2}dudv\\ (2)\text{物体重心}\ \bar{x}=\dfrac{\iiint\limits_v x\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_v\rho(x,y,z)dv}\\ (3)\text{转动惯量}(mr^2)\text{对z轴}dJ_z=(x^2+y^2)\rho(x,y,z)dv\ \text{对}xy\text{平面}dJ_{xy}=z^2\rho(x,y,z)dv\end{cases}$$

9.4 曲线积分

$$\begin{cases}\text{第一类}(\int\limits_L f(x,y,z)ds)\ \text{代入弧微分公式}\\ \text{第二类}(\int\limits_{L(A,B)}Pdx+Qdy+Rdz)\xrightarrow{\text{代入参数方程}}\int_\alpha^\beta[P(...)x'(t)+Q(...)y'(t)+R(...)z'(t)]dt\end{cases}$$

9.5 曲面积分

$$\begin{cases}\text{第一类}(\iint\limits_S f(x,y,z)dS)\ \text{代入面积元素}\\ \text{第二类}(\iint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy)=\pm\iint\limits_{Dxy}[P(-\dfrac{\partial z}{\partial x})+Q(-\dfrac{\partial z}{\partial y})+R]dxdy\end{cases}$$

9.6 格林公式

$$\begin{cases}\oint\limits_L Pdx+Qdy=\iint\limits_D(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})dxdy\Leftarrow\begin{cases}\iint\limits_D\dfrac{\partial Q}{\partial x}dxdy=\oint\limits_L Qdy\\ \iint\limits_D\dfrac{\partial P}{\partial y}dxdy=-\oint\limits_L Pdx\end{cases}\\ (i)\oint\limits_L Pdx+Qdy=0\Rightarrow(ii)\text{与路径无关}\Rightarrow(iii)du=Pdx+Qdy\Rightarrow(iv)\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}\Rightarrow(i)\\ \text{求}Pdx+Qdy\text{的原函数}\begin{cases}(1)\text{不定积分法}\\ (2)\text{若}\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y},\text{特殊路径法}\\ (3)\text{凑微分法}\end{cases}\end{cases}$$

9.7 高斯公式

$$\oiint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_v(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z})dv\begin{cases}\iiint\limits_v\dfrac{\partial P}{\partial x}dv=\oiint\limits_S Pdydz\\ \iiint\limits_v\dfrac{\partial Q}{\partial y}dv=\oiint\limits_S Qdzdx\\ \iiint\limits_v\dfrac{\partial R}{\partial z}dv=\oiint\limits_S Pdxdy\end{cases}$$

9.8 斯托克公式

$$\begin{cases}\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\begin{vmatrix}dydz&dzdx&dxdy\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}\Leftarrow\begin{cases}\oint\limits_L Pdx=\iint\limits_S\dfrac{\partial P}{\partial z}dzdx-\dfrac{\partial P}{\partial y}dydx)\\ \oint\limits_L\mathrm{Q}dx=\iint\limits_S\dfrac{\partial Q}{\partial x}dxdy-\dfrac{\partial Q}{\partial z}dzdy)\\ \oint\limits_L\mathrm{R}dz=\iint\limits_S\dfrac{\partial R}{\partial y}dydz-\dfrac{\partial R}{\partial x}dxdz)\end{cases}\\ (i)\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=0\Rightarrow(ii)\text{与路径无关}\Rightarrow(iii)du=Pdx+Qdy+Rdz\Rightarrow\\ \qquad(iv)\dfrac{\partial R}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial z},\dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x},\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}\Rightarrow(i)\end{cases}$$

9.9 如何简化计算

1. 选择积分顺序（二重积分，三重积分）
2. 选择投影方向（第 II 类曲面积分）
3. 利用对称性与奇偶性
4. 换元
5. 曲线和曲面积分，利用已有方程
6. 利用几何或物理意义
7. 利用三个公式

线性代数

第 1 章 行列式

$$\overset{\text{上三角行列式}}{\begin{vmatrix}a_{11}&&*\\ &a_{22}&\\ &&\ddots&\\ 0&&&a_{nn}\end{vmatrix}}=\overset{\text{下三角行列式}}{\begin{vmatrix}a_{11}&&0\\ &a_{22}&\\ &&\ddots&\\ *&&&a_{nn}\end{vmatrix}}=a_{11}a_{22}...a_{nn}$$

$$\overset{\text{次三角行列式}}{\begin{vmatrix}*&&a_n\\ &\cdot^{\cdot^{\cdot}}&\\ a_2&&\\ a_1&&0\end{vmatrix}}=\begin{vmatrix}0&&a_n\\ &\cdot^{\cdot^{\cdot}}&\\ a_2&&\\ a_1&&*\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2...a_n$$

$$\begin{matrix}\text{两种特殊的}\\ \text{拉普拉斯(}\\ Laplace\text{)展开式}\end{matrix}\begin{cases}\begin{vmatrix}A&*\\ 0&B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&0\\ *&B\end{vmatrix}=|A||B|\\ \begin{vmatrix}*&A\\ B&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&A\\ B&0\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|\end{cases}$$

行列式的性质：行列不变；行行变反；倍加行不变。

范德蒙行列式　　　　三对角行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j) \quad \begin{vmatrix} a & b & & & & & 0 \\ c & a & b & & & & \\ & c & a & b & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & c & a & b & \\ & & & & c & a & b \\ 0 & & & & & c & a \end{vmatrix} \mathrm{D}_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$$

重要公式：$|AB| = |A||B|$ $|A^*| = |A|^{n-1}$ $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ $|A^k| = |A|^k$

Cramer 法则：$x_j = D_j / D$

第 2 章 矩阵

2.1 基本概念

奇异矩阵，非奇异矩阵，零矩阵，同型矩阵，单位矩阵，数量矩阵，对角矩阵，对角块矩阵，对称矩阵，反对称矩阵，逆矩阵，伴随矩阵，正交矩阵

2.2 矩阵的运算

加法，数量乘法，乘法，转置，逆，伴随

$(AB)^T = B^T A^T$

$A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$ $AA^* = A^*A = |A|I$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ $(A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$

$(AB)^* = B^*A^*$ $(A^*)^T = (A^T)^*$ $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$

$$r(A^*) = \begin{cases} n, r(A) = n \\ 1, r(A) = n-1 \\ 0, r(A) \le n-2 \end{cases}$$

2 阶矩阵的伴随矩阵：主对角线互换，副对角线变号

2.3 初等变换

$E_i(c)$ $E_{ij}(c)$ E_{ij} 左乘是行变换，右乘是列变换

$E_i(\frac{1}{c})E_i(c) = I$ $E_{ij}(-c)E_{ij}(c) = I$ $E_{ij}E_{ij} = I$

2.4 分块矩阵

同型对角块矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathrm{C}_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{C}_1 D_1 & & & \\ & C_2 D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_n D_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & \mathrm{A}_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_n & & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & & A_n^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ \mathrm{A}_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{B} & 0 \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CB^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

2.5 常见题型

求方阵的幂：1.r(A)=1；2.A=B+C；3.相似对角化，$A^n = P^{-1}\Lambda^n P$
求逆矩阵：公式法，分块矩阵法，初等变换法

第 3 章 线性方程组

3.1 n 维向量

线性组合，线性表出，向量组等价，线性相关，线性无关，向量组的秩，极大线性无关组

3.2 矩阵的秩

1. 矩阵的秩=矩阵的行秩=矩阵的列秩=矩阵的非零主子式的最高阶数
2. 初等变换不改变矩阵的秩

$r(A+B) \le r(A) + r(B)$ $r(AB) \le \min(r(A), r(B))$

A 是 m×n 矩阵，若 AB=0，则 $r(A) + r(B) \le n$

标准相抵型 $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

同型等秩⇔相抵

3.3 齐次方程组 Ax=0

判定：有非零解⇔r(A)<n
解的结构：有 n-r 个基础解系。对 A 作初等行变换化为阶梯形矩阵，每个非零行中第一个非零系数所在列代表的未知数是基本未知量（有 r 个），剩余的是自由未知量，对自由未知量按阶梯形赋值后，再代入求解就可以得到基础解系。

3.4 非齐次方程组 Ax=b

设 A 是 m×n 矩阵，方程组 Ax=b，则
（1） 有唯一解⇔r(A)=r(A,b)=n；
（2） 有无穷解⇔r(A)=r(A,b)<n；
（3） 无解⇔r(A)+1=r(A,b)。

解的结构：$x = x_0 + \bar{x}$

3.5 常见题型

1.线性无关的证明，常用思路是是设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_n\alpha_n = 0$，两边同乘作恒等变形。

2.Ax=0 和 A^TAx=0 同解。

3.基础解系的证明：是解，线性无关，n-r

第 4 章 向量空间与线性变换

4.1 基本概念

自然基，标准基，标准正交基，基，维数，坐标，过度矩阵，向量的内积，欧氏空间，线性空间

4.2 坐标变换

基变换：$B_1A=B_2$ 坐标变换：x=Ay

旋转变换 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

4.3 施密特正交化

$\beta_1 = \alpha_1$

$\beta_j = \alpha_j + \sum_{i=j-1}^{1} k_{ij}\beta_i, k_{ij} = -\dfrac{(\alpha_j, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)}$

4.5 正交矩阵

正交矩阵 $A^TA=I$⇔列向量组是标准正交基
设 A,B 是正交矩阵,则 A^T, A^{-1}, AB 也是正交矩阵.

Ax,Ay 的长度,夹角和内积保持不变.

第 5 章 特征值和特征向量

5.1 特征值和特征向量

概念：特征值，特征向量，特征矩阵，特征多项式，特征方程
定义：Ax=λx
性质：
1. 不同特征值的特征向量是线性无关的
2. $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}; \prod_{i=1}^{n}\lambda_i = \det A$
3. kλ, λ+k, λ^m, λ^{-1}
4. A 和 A^T，AB 和 BA 的特征值相同。

5.2 相似矩阵

定义：若存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，就称 A 相似于 B，记作 A~B。
性质：１.若 A~B，则 A+kI~B+kI,A^m~B^m;
２.相似矩阵的特征值相同。

5.3 可对角化的条件

(1)有 n 个线性无关的特征向量；或(2)每个特征值的重数等于对应特征向量子

空间的维数。

5.4 实对称矩阵

性质：
1. 实对称矩阵一定是可对角化的；
2. 实对称矩阵的特征值全是实数，特征向量全是实向量，不同特征值的特征向量是正交的；
3. 存在正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT=diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$

求 T：先求得特征向量，再正交化。

第 6 章 二次型

6.1 二次型的定义和矩阵表示

二次型：二次型就是二次齐次多项式（即每项都是二次的）
矩阵表示：x^TAx

合同矩阵：若存在存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC=B$，就称 A 合同于 B，记作 $A\simeq B$。

6.2 化二次型为标准型

1. 正交变换法
2. 配方法
3. 初等变换法

6.3 惯性定理和二次型的规范性

惯性定理：对于一个 n 元二次型，不论做怎样的坐标变换使之化为标准型，其中正平方项的项数和负平方项的项数都是唯一的。
规范型：设 A 为 n 阶实对称矩阵，若 A 的正、负惯性指数分别为 p 和 q，则

$$A\simeq diag(1,\ldots,1,-1,\ldots,-1,0,\ldots,0)$$

其中 1 有 p 个，-1 有 q 个。
或者说对于二次型 x^TAx，存在坐标变换 x=Cy，使得

$$x^TAx=y_1^2+\ldots+y_p^2-y_{p+1}^2-\ldots-y_{p+q}^2$$

把右端的二次型称为 x^TAx 的规范型，把上面的对角矩阵称为 A 的合同规范型。
合同的充要条件： A、B 有相同的正惯性指数和负惯性指数。
合同的充分条件：A~B。（二者的前提是，A, B 是实对称矩阵）
合同的必要条件：r(A)=r(B)

6.4 正定二次型和正定矩阵

定义：如果对于任意的非零向量 x=(x1,x2,…,xn)T 都有 $x^TAx>0$，就称 x^TAx 为正定二次型，称 A 为正定矩阵。
二次型正定的充要条件：
1. x^TAx 是正定二次型；
2. A 的正惯性指数为 n，即 $A\simeq I$；
3. 存在可逆矩阵 P，使得 $A=P^TP$；
4. A 的特征值全大于 0；
5. A 的顺序主子式全大于 0.

必要条件：1.$a_{ii}>0$；2.$|A|>0$。

概率论与数理统计

第 1 章 概率论的基本概念

1.1 基本概念

随机试验：1.可以重复；2.总体明确；3.单个未知。
样本空间，样本点，随机事件，事件发生，基本事件，必然事件，不可能事件，差事件，不相容事件，对立事件，逆事件

1.2 频率和概率

在相同条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为 A 发生的频数，比值 n_A/n 称为 A 发生的$\boxed{\text{频率}}$，并记成 $f_n(A)$。

对随机试验 E 的每一事件 A 都赋予一个实数，记为 P(A)，称为时间 A 的概率。集合函数 P(.)满足下列条件：①非负性：P(A) ≥0；②规范性：P(Ω) =1；③可列可加性：$P(A_1\cup A_2\cup\ldots)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots$。

当 n→∞时频率 $f_n(A)$在一定意义下接近于概率 P(A)。

$$\text{加法公式}\begin{cases}\text{若}A_1,A_2,\ldots,A_n\text{互不相容,则}P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)\\ \text{广义的},P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(\overline{A}B)=P(B)+P(\overline{B}A)\\ P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\ P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1A_2\ldots A_n)\end{cases}$$

$$\text{减法公式}\begin{cases}\text{若}B\subset A,P(A-B)=P(A)-P(B)\\ \text{任意的},P(A-B)=P(A)-P(AB)\end{cases}$$

1.3 等可能概型

1. 样本空间包含有限个元素。
2. 每个基本事件发生的可能性相同。

具有以上两个特点的试验称为等可能概型，也叫古典概型。

1.4 条件概率

设 A、B 是两个事件，且 P(A)>0，称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的$\boxed{\text{条件概率}}$。

乘法公式 P(ABC)=P(C|AB)P(B|A)P(A)
全概率公式 $P(A)=P(A|B_1)+P(A|B_2)+\ldots+P(A|B_n)$

贝叶斯公式

$$P(B_i|A)=\frac{P(A\mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)}$$

1.5 独立性

设 A、B 是两个事件，如果满足等式 P(AB)=P(A)P(B)，则称事件 A、B $\boxed{\text{相互独立}}$，简称 A、B 独立。

A 与 B 相互独立⇔A 与 $\overline{B}$ 相互独立⇔$\overline{A}$ 与 B 相互独立⇔$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立⇔P(A|B)=P(A|$\overline{B}$)=P(A) ⇔P(B|A)=P(B|$\overline{A}$)=P(B)

第 2 章 随机变量及其分布

2.1 随机变量

设随机试验 E 的样本空间为 S={e}，X=X(e)是定义在样本空间 S 上的实值单值函数，称 X=X(e)为随机变量。

随机变量的取值随随机试验的结果而定，在试验之前不能预知它取什么值，且它的取值有一定的概率。这些性质显示了随机变量与普通函数有着本质的差异。

2.2 离散型随机变量及其分布律

如果随机变量 X 全部可能的取值是有限个或可列无限个，则称 X 为离散型随机变量。

$P(X=x_k)=p_k$ 为 X 的$\boxed{\text{分布律}}$。

几个常见分布：
1. 0-1 分布 $P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k},k=1,2$
2. 二项分布 $P(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{1-k},k=0,1,2,\ldots,n$
3. 泊松分布 $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2,\ldots$
4. 几何分布 $P(X=k)=pq^{k-1},k=1,2,\ldots$
5. 超几何分布 $P(X=k)=\dfrac{C_{N_1}^kC_{N_2}^{n-k}}{C_{N_1+N_2}^n},k=0,1,2,\ldots n$

2.3 随机变量的分布函数

设 X 是一个随机变量，x 是任意实数，函数 F(x)=P(X≤x)称为 X 的$\boxed{\text{分布函数}}$。

分布函数 F(x)具有以下性质：
1. F(x)是一个不减函数
2. 0≤F(x)≤1，且 F(-∞)=0, F(+∞)=1
3. F(x+0)= F(x)，即 F(x)是右连续的

2.4 连续型随机变量及其概率密度

如果对于随机变量 X 的分布函数 F(x)，存在非负函数 f(x)，使得对于任意实数 x，均有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$$

则称 X 为连续型随机变量，其中函数 f(x)称为 X 的概率密度函数，简称$\boxed{\text{概率密度}}$。

概率密度 f(x)具有以下性质：
1. f(x) ≥0;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$；
3. $P\{x_1\le X\le x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx$；
4. 若 f(x)在点 x 处连续，则有 $F'(x)=f(x)$。

几个常见分布：
1. 均匀分布 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a},a<x<b\\ 0,\text{其他}\end{cases},F(x)=\begin{cases}0,x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a},a\le x<b\\ 1,x\ge b\end{cases}$,

记为 X~U(a,b)

2． 指数分布 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0,其他\end{cases}, F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, x>0\\ 0,其他\end{cases}$

指数分布和几何分布具有"无记忆性"

3． 正态分布 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}x^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，记为 X~N(μ,σ²)。特别地，当 μ=0, σ=1 时，称 X 服从$\boxed{\text{标准正态分布}}$。正态分布具有以下性质

(1) 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

(2) $F(x)=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

(3) Φ(-x)= 1-Φ(x)

(4) 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$

2.5 随机变量函数的分布

求随机变量函数的分布：

1． 离散型随机变量函数的分布
   列举法：逐点求出 Y 的值，概率不变，相同值合并
2． 连续型随机变量函数的分布
   (1) 分布函数法

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P(g(X)\le y)=\int_{g(x)\le y} f(x)dx$$

   (2) 公式法
   如果 y=g(x)处处可导且恒有 g'(x)>0(g'(x)<0)，则 Y=g(X)也是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]\,|h'(y)|, y\in R_g\\ 0,其他\end{cases}$$

   其中 x=h(y)是 y=g(x)的反函数。

第 3 章 多维随机变量及其分布

3.1 二维随机变量

设随机试验 E 的样本空间为 S={e}，X=X(e)和 Y=Y(e)是定义在样本空间 S 上的两个随机变量，由它们构成的一个向量(X,Y)，叫做二维随机向量或$\boxed{\text{二维随机变量}}$。

设(X,Y)是一个二维随机变量，x,y 是任意实数，函数

$$F(x,y)=P\{X\le x\cap Y\le y\}\xrightarrow{\text{记成}}P\{X\le x,Y\le y\}$$

称为二维随机变量(X,Y)的分布函数，或称为随机变量 X 和 Y 的联合分布函数。

分布函数 F(x,y)具有以下性质：

1． F(x,y)是变量 x 和 y 的不减函数。
2． 0≤F(x,y) ≤1，且 F(-∞,y)= F(x,-∞)= F(-∞, -∞)=0，F(+∞, +∞)=1。
3． F(x,y)关于 x 右连续，关于 y 也右连续。
4． 对于任意的 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),x_1<x_2,y_1<y_2$，有 $F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\ge 0$。

如果二维随机变量(X,Y)全部可能取到的值是有限个或可列无限个，则称(X,Y)为离散型二维随机变量。$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$ 是(X,Y)的$\boxed{\text{分布律}}$

如果对于二维随机变量(X,Y)的分布函数 F(x,y)，存在非负函数 f(x,y)，使得对于任意实数 x，y，均有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(x,y)dxdy$$

则称(X,Y)为连续型二维随机变量，其中函数 f(x,y)称为(X,Y)的$\boxed{\text{概率密度}}$，或称为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度。

概率密度 f(x,y)具有以下性质：

1． f(x,y) ≥0.
2． $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$.
3． $P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)dxdy$.
4． 若 f(x,y)在点(x,y)处连续，则有 $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$.

3.2 边缘分布

边缘分布函数：$F_X(x)=F(x,+\infty), F_Y(y)=F(+\infty,y)$

边缘分布律：$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}, P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij}=p_{\cdot j}$

边缘概率密度：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy, f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

3.3 条件分布

条件分布率：$P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$

条件概率密度：$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

3.4 相互独立的随机变量

X 和 Y 相互独立⇔$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$(连续型)$\Leftrightarrow P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$(离散型)

3.5 二维随机变量函数的分布

1． 离散型二维随机变量
   列举法
2． 连续型二维随机变量
   (1) 分布函数法

$$F(z)=P\{Z\le z\}=P(g(X,Y)\le z)=\iint_{g(x,y)\le z}f(x,y)dxdy$$

   (2) 公式法
   ①Z=X+Y

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx\underline{\underline{X,Y对称}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy$$

   当 X 和 Y 相互独立时，有卷积公式

$$f_Z(z)=f_X*f_Y=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

   ②Z=max(X,Y)和 Z= min(X,Y)

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z)\ F_{\min}(z)=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))$$

第 4 章 随机变量的数字特征

4.1 数学期望

离散型 $E(X)=\sum_{k=1}^{n}x_k p_k$ 连续型 $E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

$$E(g(X))=\begin{cases}\sum_{k=1}^{n}g(x_k)p_k,离散型\\ \int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx,连续型\end{cases}$$

$$E(Z)=E(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

性质：

1.E(C)=C

2.E(CX)=CE(X)

3.E(X+Y)=E(X)+E(Y)

4.当 X，Y 相互独立时，E(XY)=E(X)E(Y)

4.2 方差

$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}=E(X^2)-E(X)^2$

性质：

1.D(C)=0

2.$D(CX)=C^2D(X)$

3.D(X±Y)=D(X)±2Cov(X,Y)+D(Y)=D(X)±2E{[X-E(X)][Y-E(Y)]}+D(Y)= D(X)±2[E(XY)-E(X)E(Y)]+D(Y)

4.D(X)=0⇔P{X=C}=1

常见分布的数字特征：

离散型：

1.0-1 分布 E(X)=p,D(X)=pq

2.二项分布 E(X)=np,D(X)=npq

3.泊松分布 E(X)=D(X)=λ

4.几何分布 E(X)=1/p,D(X)=q/p^2

5.超几何分布 E(X)=$n\bullet N_1/N$,D(X)=$n\bullet N_1/N\bullet N_2/N\bullet(N-n)/(N-1)$

连续型：

1.均匀分布 E(X)=(b+a)/2,D(X)=$(b-a)^2/12$

2.指数分布 E(X)=1/λ,D(X)1/λ^2

3.正态分布 E(X)=μ,D(X)=σ^2

4.3 协方差及相关系数

协方差 Cov(X,Y)= E{[X-E(X)][Y-E(Y)]}= E(XY)-E(X)E(Y)

性质：

1. Cov(aX,bY)=ab Cov(X,Y)
2. Cov(X_1+X_2,Y)= Cov(X_1,Y)+ Cov(X_2,Y)

相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

性质：1.$|\rho_{XY}|\le 1$

2.$|\rho_{XY}|=1 \Leftrightarrow P\{Y=ax+b\}$，且当 a>0 时 $\rho_{XY}=1$，当 a<0 时 $\rho_{XY}=-1$。

独立一定不相关，不相关不一定独立。
对于二维正态分布，独立与不相关等价。

4.4 矩、协方差矩阵

$E(X^k)$,k 阶原点矩

$E\{[X-E(X)]^k\}$，k 阶中心矩

$E(X^kY^l)$，k+l 阶混合矩

$E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\}$，k+l 阶混合中心矩

$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$，协方差矩阵

第 5 章 大数定律和中心极限定理

5.1 大数定律

1. 切比雪夫(Chebyshev)大数定律
   设随机变量 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 相互独立，期望和方差都存在，且它们的方差有公共上界，则对于任意实数 ε>0，有

   $$\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)|<\varepsilon\}=1.$$

   切比雪夫不等式 $P\{|X-\mu|\ge\varepsilon\}\le\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

2. 伯努力大数定律
   设随机变量 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 相互独立且都服从参数为 p 的 0-1 分布，则对于任意实数 ε>0，有

   $$\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-p|<\varepsilon\}=1,\ 即\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{n_A}{n}-p|<\varepsilon\}=1$$

3. 辛钦大数定律
   设随机变量 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 相互独立,服从统一分布，且具有共同的数学期望，则对于任意实数 ε>0，有

   $$\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\varepsilon\}=1,\ 即\overline{X}\xrightarrow{P}\mu$$

5.2 中心极限定理

1. 列维-林德伯格定理（独立同分布的中心极限定理）
   设随机变量 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 相互独立，服从同一分布，且具有共同的期望和方差，则

   $$\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\overset{近似地}{\sim}N(0,1),\ 即\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\overset{近似地}{\sim}N(0,1)$$

2. 李雅普诺夫(Liapunov)定理
   设随机变量 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 相互独立，他们具有数学期望和方差：

   $$E(X_k)=\mu_k,D(X_k)=\sigma_k^2,k=1,2,\ldots,n,$$

   $$记B_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2，若存在正数\delta，使得当n\to\infty时，$$

   $$\frac{1}{B_n^{2+\delta}}E\{|X_k-\mu_k|^{2+\delta}\}\to 0,\ 则\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-\sum_{k=1}^{n}\mu_k}{B_n}\overset{近似地}{\sim}N(0,1)$$

3. 棣莫弗-拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理（二项分布以正态分布为极限）

   $$\lim_{n\to\infty}P\{\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\le x\}=\Phi(x)$$

第 6 章 数理统计的基本概念

6.1 随机样本

随机试验全部可能的观察值称为总体。
每一个可能观察值称为个体。
一个总体对应于一个随机变量 X，一般不区分总体与相应随机变量，笼统称为总体 X。
被抽取的部分个体叫做总体的一个样本。
来自总体 X 的 n 个相互独立且与总体同分布的随机变量称为简单随机变量。

6.2 抽样分布

设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，$g(X_1,X_2,\ldots,X_n)$是一个连续函数，若 g 中不含未知参数，则称 $g(X_1,X_2,\ldots,X_n)$是一个统计量。
常用的统计量：

样本均值 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 样本方差 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

样本 k 阶原点矩 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ 样本 k 阶中心矩 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$

经验分布函数 $F_n(x)=\dfrac{1}{n}S(x)$，S(x)表示值小于 x 的随机变量的个数。

$F_n(x)\xrightarrow{P}F(x)$

来自正态总体的几个常用抽样分布：

1. χ^2 分布
   设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自总体 N(0,1)的样本，则称统计量
   $\chi^2=X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2$
   服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记为 $\chi^2\sim\chi^2(n)$.

   现 $X_i\sim N(0,1)$,由定义 $X_i^2\sim\chi^2(1)$，即 $X_i^2\sim\Gamma(\frac{1}{2},1)$，再由分布的可加性知

   $$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\Gamma(\frac{n}{2},1)$$

   $E(\chi^2)=n$, $D(\chi^2)=2n$

2. t 分布
   设 X~N(0,1),Y~χ^2 (n),且 X,Y 相互独立，则称随机变量 $t=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布，记为 t~t(n).
   当 n 足够大时，t 分布近似于 N(0,1)分布。
   T 分布的上 α 分位点记为 $t_\alpha(n)$，由其概率密度的对称性知 $t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$.

3. F 分布
   设 $U\sim\chi^2(n_1)$,$V\sim\chi^2(n_2)$，且 U,V 相互独立，则称随机变量 $F=\dfrac{U/n_1}{V/n_2}$ 服从自由度为的 F 分布，记为 $F\sim F(n_1,n_2)$.
   F 分布的性质：
   (1) 若 $F\sim F(n_1,n_2)$,则 $1/F\sim F(n_2,n_1)$.
   (2) 若 t~t(n),则 $t^2\sim F(1,n)$.
   F 分布的上 α 分位点记为 $F_\alpha(n)$，$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\dfrac{1}{F_\alpha(n_1,n_2)}$

正态总体样本均值与样本方差的抽样分布：

首选，不论 X 服从什么分布，总有 $E(\overline{X})=\mu,D(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n},E(S^2)=\sigma^2$.

1. $\overline{X}\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$

2. $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$,且$\overline{X}$与$S^2$相互独立

3. $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

4. $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$,若 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma$,则

   $$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2),s_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

第 7 章 参数估计

7.1 点估计

设总体 X 的分布函数的形式为已知，但它的一个或多个参数未知，借助于总体 X 的一个样本来估计未知参数的值称为参数的点估计。

1. 矩估计法
   用样本原点矩 $a_k=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ 来估计总体的原点矩 $a_k=E(X^k)$,用样本的

中心矩 $b_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$ 来估计总体的中心矩 $b_k=E[(X-E(X))^k]$。

2． 最大似然估计法

(1) 写出似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)(\text{或}L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i,\theta))$.

(2) 求出使 L(θ)达到最大值的 θ .
L(θ)是 n 个乘积的形式，而且 L(θ)与 ln L(θ)在同一 θ 处取极值，因此的 θ 最大似然估计量 θ 可以从 $\frac{dln(\theta)}{d\theta}=0$ （对数似然方程）求得。

(3) 用 θ 作为 θ 的估计量。

7.2 估计量的评价标准

1． 无偏性 E(θ)=θ

2． 有效性 D(θ_1)≤D(θ_2)

3． 相合性 $\theta \xrightarrow{P} \theta$

7.3 区间估计

设总体 X 的分布函数 F(x; θ)含有一个未知参数 θ，对于给定值 α(0<α<1)，若由来自 X 的样本 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 确定的两个统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\ldots X_n)$ 和 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\ldots X_n)$，对于任意 θ 满足 $P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}\geq 1-\alpha$，则称随机区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 是的置信水平为的 1-α 置信区间。

置信水平为的 1-α 置信区间不是唯一的。
区间越小表示估计的精度越高。

7.4 正态总体期望与方差的区间估计

待估参数		抽样分布	置信区间
μ	σ^2 已知	$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}$
	σ^2 未知	$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\overline{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)$
σ^2	μ 已知	$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$	$(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)})$
	μ 未知	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2，σ_2^2 已知	$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\overline{X}-\overline{Y}\pm\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}z_{\alpha/2}$
	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，但 σ^2 未知	$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-1)$， $s_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$	$\overline{X}-\overline{Y}\pm s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$		$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)})$

第 8 章 假设检验

8.1 假设检验

拒绝域：当检验统计量落入其中时，则否定原假设。
小概率事件原理：小概率事件在一次试验中实际上不会发生，若在一次试验中发生了，就认为不合理，小概率的值常根据实际问题的要求，规定一个可以接受的充分小的数 α(0<α<1)，当一个事件的概率不大于 α 时，就认为它是小概率事件。α 称为显著性水平。
统计推断有两类错误，弃真和存伪，只对犯第一类错误的概率加以控制，而不考虑第二类错误的检验称为显著性检验。Α 就是允许犯第一类错误的概率的最大允许值。
假设检验的基本步骤：

1． 根据实际问题的要求，提出原假设 H_0 和备择假设 H_1；
2． 给定显著性水平 α 和样本容量 n；
3． 确定检验统计量以及拒绝域的形式；
4． 按 P{H_0 为真拒绝 H_0}<α 求出拒绝域；
5． 取样，根据样本观察值做出决策，是接受 H_0 还是拒绝 H_0。

8.2 正态总体样本均值与样本方差的假设检验

原假设 H_0	检验统计量	备择假设 H_1	拒绝域
$\mu\leq\mu_0$ $\mu\geq\mu_0$ $\mu=\mu_0$ (σ^2 已知)	$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\mu<\mu_0$ $\mu>\mu_0$ $\mu\neq\mu_0$	$z\geq z_\alpha$ $z\leq -z_\alpha$ $\|z\|\geq z_{\alpha/2}$
$\mu\leq\mu_0$ $\mu\geq\mu_0$ $\mu=\mu_0$ (σ^2 未知)	$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\mu<\mu_0$ $\mu>\mu_0$ $\mu\neq\mu_0$	$t\geq t_\alpha(n-1)$ $t\leq -t_\alpha(n-1)$ $\|t\|\geq t_{\alpha/2}(n-1)$
$\mu_1-\mu_2\leq\delta$ $\mu_1-\mu_2\geq\delta$ $\mu_1-\mu_2=\delta$ (σ_1^2,σ_2^2 已知)	$Z=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\mu_1-\mu_2>\delta$ $\mu_1-\mu_2<\delta$ $\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$z\geq z_\alpha$ $z\leq -z_\alpha$ $\|z\|\geq z_{\alpha/2}$
$\mu_1-\mu_2\leq\delta$ $\mu_1-\mu_2\geq\delta$ $\mu_1-\mu_2=\delta$ ($\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，但 σ^2 未知)	$t=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$	$\mu_1-\mu_2>\delta$ $\mu_1-\mu_2<\delta$ $\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$t\geq t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $t\leq -t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $\|t\|\geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$
$\sigma^2\leq\sigma_0^2$ $\sigma^2\geq\sigma_0^2$ $\sigma^2=\sigma_0^2$ (μ 已知)	$\chi^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$ $\sigma^2<\sigma_0^2$ $\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2\geq\chi^2_\alpha(n)$ $\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha}(n)$ $\chi^2\geq\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$
$\sigma^2\leq\sigma_0^2$ $\sigma^2\geq\sigma_0^2$ $\sigma^2=\sigma_0^2$ (μ 未知)	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$\sigma^2>\sigma_0^2$ $\sigma^2<\sigma_0^2$ $\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2\geq\chi^2_\alpha(n-1)$ $\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ $\chi^2\geq\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$
$\sigma_1^2\leq\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\geq\sigma_2^2$ $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ (μ_1,μ_2 未知)	$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$ $\sigma_1^2<\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F\geq F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$ $F\leq F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$ $F\geq F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$ $F\geq F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$