Лабораторная работа №1

1.1. Вероятностное пространство, формула Байеса

Задача 1. Определить (с обоснованием), зависимы или независимы следующие события:

a) несовместные события;

b) события, образующие σ-алгебру Σ в пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$;

c) события, имеющие одинаковую вероятность.

Решение.

Напомним определение: события A и B называются *независимыми*, если

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

a) **Несовместные события.**

Несовместность означает

$$A \cap B = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(A \cap B) = 0.$$

Для независимости нужно $0 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, то есть произведение вероятностей равно нулю. Это возможно только если

$$\mathbb{P}(A) = 0 \quad \text{или} \quad \mathbb{P}(B) = 0.$$

Следовательно:

- если оба события имеют положительные вероятности, $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$, то они **зависимы**;
- несовместимые события могут быть независимыми *только* в тривиальных случаях, когда хотя бы одно из них имеет вероятность 0.

b) **События, образующие σ-алгебру.**

Рассмотрим вероятностное пространство, соответствующее двум броскам симметричной монеты. Множество элементарных исходов:

$$\Omega = \{\text{ОО}, \text{ОР}, \text{РО}, \text{РР}\},$$

где, например, ОР означает: на первом броске орёл, на втором решка.

В качестве σ-алгебры возьмём

$$\Sigma = 2^{\Omega},$$

то есть множество всех подмножеств Ω. Это действительно σ-алгебра, так как:

- $\Omega \in \Sigma$;
- вместе с $A \subset \Omega$ в Σ входит и его дополнение $A^c = \Omega \setminus A$;
- вместе с любой последовательностью $A_1, A_2, \dots \in \Sigma$ в Σ входит и их объединение $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Определим вероятность как равномерную:

$$P(\{\text{ОО}\}) = P(\{\text{ОР}\}) = P(\{\text{РО}\}) = P(\{\text{РР}\}) = \frac{1}{4}.$$

Рассмотрим два события:

$$A = \{\text{ОО}, \text{ОР}\} \quad \text{(на первом броске выпал орёл)},$$

$$B = \{\text{ОО}\} \quad \text{(оба броска дали орла)}.$$

Они, конечно, принадлежат σ-алгебре Σ, так как $\Sigma = 2^\Omega$.

Посчитаем их вероятности:

$$P(A) = P(\{\text{ОО}, \text{ОР}\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P(B) = P(\{\text{ОО}\}) = \frac{1}{4}.$$

Пересечение событий:

$$A \cap B = \{\text{ОО}\},$$

поэтому

$$P(A \cap B) = P(\{\text{ОО}\}) = \frac{1}{4}.$$

Проверим условие независимости:

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8},$$

но

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}.$$

Следовательно, события A и B *зависимы*, хотя они оба принадлежат одной и той же σ-алгебре Σ. Таким образом, сам по себе факт, что множество событий образует σ-алгебру, не гарантирует независимости событий внутри неё.

c) **События с одинаковой вероятностью.**

Рассмотрим два подбрасывания монеты. Множество элементарных исходов:

$$\Omega = \{\text{ОО}, \text{ОР}, \text{РО}, \text{РР}\},$$

где, например, ОР означает: на первом броске орёл, на втором решка.

Каждому исходу приписана вероятность

$$P(\{\text{ОО}\}) = P(\{\text{ОР}\}) = P(\{\text{РО}\}) = P(\{\text{РР}\}) = \frac{1}{4}.$$

Покажем, что равенство вероятностей $P(A) = P(B)$ само по себе ничего не говорит о независимости, на двух парах событий.

1. Независимые события с одинаковой вероятностью. Рассмотрим события

$$A = \{\text{OO}, \text{OP}\} \quad \text{(на первом броске выпал орёл)},$$

$$B = \{\text{OO}, \text{PO}\} \quad \text{(на втором броске выпал орёл)}.$$

Тогда

$$P(A) = P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Пересечение:

$$A \cap B = \{\text{OO}\}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Проверяем независимость:

$$P(A)\,P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A \cap B).$$

Следовательно, события A и B независимы, хотя их вероятности совпадают: $P(A) = P(B) = 1/2$.

2. Зависимые события с такой же вероятностью. Теперь рассмотрим другие события на том же пространстве:

$$C = \{\text{OO}, \text{PP}\} \quad \text{(выпали одинаковые результаты)},$$

$$D = \{\text{OP}, \text{PO}\} \quad \text{(выпали разные результаты)}.$$

У них также

$$P(C) = P(D) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Однако

$$C \cap D = \varnothing, \quad P(C \cap D) = 0.$$

Если бы события C и D были независимы, то должно было бы выполняться

$$P(C \cap D) = P(C)\,P(D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

но на самом деле $P(C \cap D) = 0 \neq \frac{1}{4}$. Значит, C и D зависимы (на самом деле, они взаимоисключающие).

Таким образом, в одном и том же вероятностном пространстве мы видим:

- пару событий с одинаковыми вероятностями, которые независимы (A, B);
- пару событий с такими же вероятностями, которые зависимы (C, D).

Следовательно, из равенства $P(A) = P(B)$ само по себе невозможно сделать вывод ни о независимости, ни о зависимости событий.

Задача 2. Подбрасываются две независимые симметричные монеты. Заданы события:

- A — герб на первой монете;
- B — решка на первой монете;
- C — герб на второй монете;
- D — решка на второй монете;
- E — хотя бы один герб;
- F — хотя бы одна решка;
- G — один герб и одна решка;
- H — ни одного герба;
- K — два герба.

Найти, каким событиям равносильны:

(a) $A + C$ (b) AC (c) EF
(d) $G + E$ (e) GE (f) BD
(g) $E + K$.

Решение.

Пространство элементарных исходов:

$$\Omega = \{\text{OO}, \text{OP}, \text{PO}, \text{PP}\},$$

где O — орёл, P — решка, первый символ — первая монета.

Перепишем события через исходы:

$$\begin{array}{ll} A = \{\text{OO}, \text{OP}\}, & B = \{\text{PO}, \text{PP}\}, \\ C = \{\text{OO}, \text{PO}\}, & D = \{\text{OP}, \text{PP}\}, \\ E = \{\text{OO}, \text{OP}, \text{PO}\}, & F = \{\text{OP}, \text{PO}, \text{PP}\}, \\ G = \{\text{OP}, \text{PO}\}, & H = \{\text{PP}\}, \\ K = \{\text{OO}\}. & \end{array}$$

Далее используем $+$ как объединение, а конкатенацию AC как пересечение $A \cap C$.

a) $A + C = A \cup C = \{\text{OO}, \text{OP}, \text{PO}\} = E$.

b) $AC = A \cap C = \{\text{OO}\} = K$.

c) $EF = E \cap F = \{\text{OP}, \text{PO}\} = G$.

d) $G + E = G \cup E = E$ (так как $G \subset E$).

e) $GE = G \cap E = G$.

f) $BD = B \cap D = \{\text{PP}\} = H$.

g) $E + K = E \cup K = E$ (так как $K \subset E$).

Задача 3. По вращающейся круговой мишени производится выстрел, в мишени закрашены два непересекающихся сектора по 20° каждый. Найти вероятность попадания в закрашенную область.

Решение.

По условию точка попадания равновероятно распределена по углу; полный круг соответствует 360°. Суммарный угол закрашенных секторов:

$$\alpha = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ.$$

Тогда вероятность

$$\mathbb{P}(\text{попадание в закрашенную область}) = \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{40}{360} = \frac{1}{9}.$$

Задача 4. Два парохода независимо и равновозможно подходят к одному причалу в течение суток. Время стоянки первого парохода — 1 час, второго — 2 часа. Найти вероятность того, что одному из пароходов придётся ждать освобождения причала.

Решение.

Рассмотрим геометрическую модель. Моменты прихода пароходов t_1, t_2 равномерно и независимо распределены на $[0, T]$, где $T = 24$ (часа). Каждому исходу (t_1, t_2) соответствует точка в квадрате

$$[0, T] \times [0, T].$$

Интервалы стоянки:

$$I_1 = [t_1, t_1 + 1], \qquad I_2 = [t_2, t_2 + 2].$$

Ждать придётся, если интервалы пересекаются:

$$I_1 \cap I_2 \neq \varnothing.$$

Эквивалентное условие *отсутствия* ожидания:

$$I_1 \cap I_2 = \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad t_1 + 1 \leq t_2 \ \text{ или } \ t_2 + 2 \leq t_1.$$

То есть:

$$t_2 \geq t_1 + 1 \quad \text{или} \quad t_2 \leq t_1 - 2.$$

Изобразим это на графике.

Все пары (t_1, t_2) равновероятны, поэтому вероятность равна отношению площадей.

1. Область без ожидания.

Нет ожидания в двух случаях:

- R_1: первый пароход пришёл раньше и уже ушёл к приходу второго:

  $$t_1 + 1 \leq t_2.$$

  Это верхний треугольник над прямой $t_2 = t_1 + 1$ внутри квадрата.

  Его вершины: $(0, 1)$, $(0, T)$, $(T - 1, T)$. Это прямоугольный треугольник с катетами длины $(T - 1)$, поэтому

  $$\text{Area}(R_1) = \frac{(T-1)^2}{2}.$$

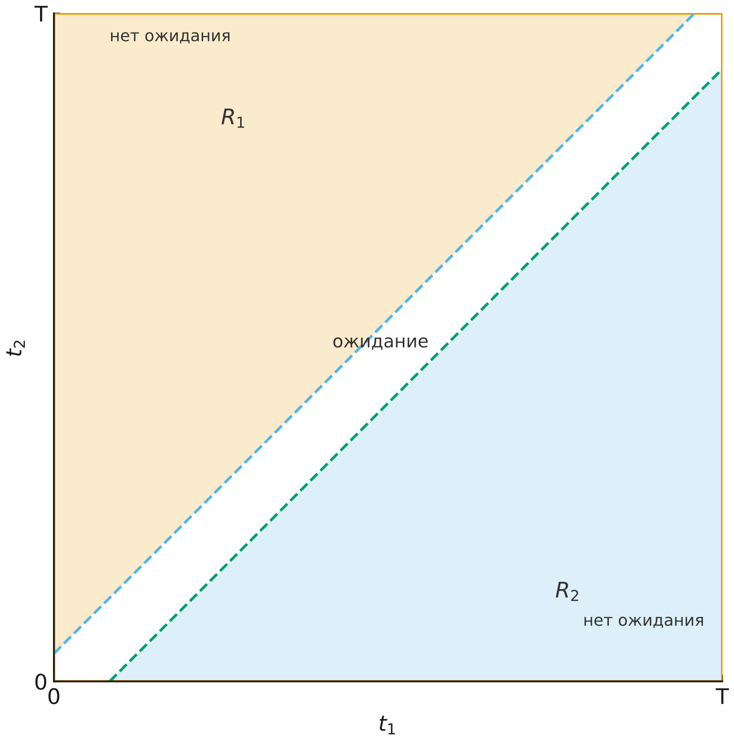

Рис. 1: Области с ожиданием и без ожидания на плоскости (t_1, t_2).

- R_2: второй пароход пришёл раньше и уже ушёл к приходу первого:

$$t_2 + 2 \le t_1 \quad \Longleftrightarrow \quad t_2 \le t_1 - 2.$$

  Это нижний треугольник под прямой $t_2 = t_1 - 2$ внутри квадрата.

  Его вершины: $(2, 0)$, $(T, 0)$, $(T, T-2)$. Катеты длины $(T - 2)$, значит

$$\text{Area}(R_2) = \frac{(T-2)^2}{2}.$$

Области R_1 и R_2 не пересекаются, поэтому

$$\text{Area}(\text{нет ожидания}) = \text{Area}(R_1) + \text{Area}(R_2) = \frac{(T-1)^2}{2} + \frac{(T-2)^2}{2} = \frac{(T-1)^2 + (T-2)^2}{2}.$$

Полная площадь квадрата:

$$\text{Area}(\text{всего}) = T^2.$$

Отсюда

$$P(\text{нет ожидания}) = \frac{\text{Area}(\text{нет ожидания})}{\text{Area}(\text{всего})} = \frac{(T-1)^2 + (T-2)^2}{2T^2}.$$

2. Вероятность ожидания.
Тогда

$$P(\text{ожидание}) = 1 - P(\text{нет ожидания}) = 1 - \frac{(T-1)^2 + (T-2)^2}{2T^2}.$$

Подставляя $T = 24$:

$$P(\text{ожидание}) = 1 - \frac{23^2 + 22^2}{2 \cdot 24^2} = 1 - \frac{529 + 484}{1152} = 1 - \frac{1013}{1152} = \frac{139}{1152} \approx 0.121.$$

Задача 5. Самолёт состоит из трёх частей:

a) кабина и двигатель;

b) топливные баки;

c) планер.

Самолёт поражён, если:

- хотя бы одно попадание в первую часть;
- или два и более попаданий во вторую;
- или три и более попаданий в третью.

Каждый снаряд попадает в части независимо друг от друга:

$$\mathbb{P}(\text{часть } 1) = p_1, \quad \mathbb{P}(\text{часть } 2) = p_2, \quad \mathbb{P}(\text{часть } 3) = p_3, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Известно, что в самолёт попало m снарядов. Найти $\mathbb{P}(A \mid m)$, где A — событие «самолёт поражён», для $m = 1, 2, 3, 4$.

Решение.

Обозначим числа попаданий в части:

$$X_1, X_2, X_3, \qquad X_1 + X_2 + X_3 = m.$$

Совместное распределение (X_1, X_2, X_3) при фиксированном m:

$$\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k) = \frac{m!}{i!\, j!\, k!}\, p_1^i p_2^j p_3^k, \quad i + j + k = m.$$

Условие поражения:

$$A = \{X_1 \geq 1\} \cup \{X_2 \geq 2\} \cup \{X_3 \geq 3\}.$$

Удобнее считать вероятность дополнения A^c:

$$A^c = \{X_1 = 0,\ X_2 \leq 1,\ X_3 \leq 2\}.$$

Случай $m = 1$. Возможны наборы (X_1, X_2, X_3):

$$(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1).$$

Поражение происходит только при $(1, 0, 0)$ (есть попадание в первую часть).

$$\mathbb{P}(A \mid m = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = p_1.$$

Случай $m = 2$. Все варианты:

$$(2, 0, 0),\ (1, 1, 0),\ (1, 0, 1),$$
$$(0, 2, 0),\ (0, 1, 1),\ (0, 0, 2).$$

Поражение не происходит только в случаях:

$$(0, 1, 1), \quad (0, 0, 2),$$

так как там $X_1 = 0$, $X_2 \leq 1$, $X_3 \leq 2$.

Их вероятности:

$$\mathbb{P}(0, 1, 1) = \frac{2!}{0!\, 1!\, 1!} p_2 p_3 = 2p_2 p_3, \qquad \mathbb{P}(0, 0, 2) = \frac{2!}{0!\, 0!\, 2!} p_3^2 = p_3^2.$$

Поэтому

$$\mathbb{P}(A^c \mid m = 2) = 2p_2 p_3 + p_3^2, \quad \mathbb{P}(A \mid m = 2) = 1 - (2p_2 p_3 + p_3^2).$$

Случай $m = 3$**.** Ищем наборы с $X_1 = 0$, $X_2 \le 1$, $X_3 \le 2$, $X_2 + X_3 = 3$. Единственно возможный вариант:

$$(0, 1, 2),$$

так как остальные либо дают $X_2 \ge 2$, либо $X_3 \ge 3$.

Вероятность:

$$\mathbb{P}(0, 1, 2) = \frac{3!}{0!\,1!\,2!} p_2 p_3^2 = 3p_2 p_3^2.$$

Следовательно,

$$\mathbb{P}(A^c \mid m = 3) = 3p_2 p_3^2, \quad \mathbb{P}(A \mid m = 3) = 1 - 3p_2 p_3^2.$$

Случай $m = 4$**.** Нужно найти решения

$$X_1 = 0, \quad X_2 \le 1, \quad X_3 \le 2, \quad X_2 + X_3 = 4.$$

Но при $X_2 \le 1$, $X_3 \le 2$ имеем $X_2 + X_3 \le 3 < 4$, то есть таких наборов нет.

Следовательно,

$$\mathbb{P}(A^c \mid m = 4) = 0, \qquad \mathbb{P}(A \mid m = 4) = 1.$$

1.2. Случайный вектор и числовые характеристики

Задача 1. Пусть

$$f_\xi(x, y) = \frac{e^{-2|y|}}{\pi(1 + x^2)}.$$

Является ли эта функция плотностью распределения случайного вектора?

Решение.

Плотность должна быть неотрицательной и интегрироваться в 1:

$$f_\xi(x, y) \ge 0, \quad \iint_{\mathbb{R}^2} f_\xi(x, y)\, dx\, dy = 1.$$

Очевидно, $f_\xi(x, y) \ge 0$.

Рассмотрим интеграл:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_\xi(x, y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2|y|}}{\pi(1 + x^2)}\, dx\, dy.$$

Интеграл раскладывается в произведение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\pi(1 + x^2)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|y|}\, dy.$$

- Первый интеграл — это стандартная плотность Коши:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\pi(1 + x^2)} = 1.$$

- Второй интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|y|}\, dy = 2 \int_0^{\infty} e^{-2y}\, dy = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Итак,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_\xi(x, y)\, dx\, dy = 1 \cdot 1 = 1.$$

Следовательно, $f_\xi(x, y)$ является корректной плотностью распределения случайного вектора.

Задача 2. Совместное распределение случайных величин ξ и η задано таблицей:

	$\eta=-1$	$\eta=0$	$\eta=1$
$\xi=-1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{24}$
$\xi=1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0

a) Найти маргинальные распределения ξ и η.

b) Вычислить $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{E}\eta$, ковариационную и корреляционную матрицы вектора (ξ,η).

c) Исследовать ξ и η на независимость и некоррелированность.

Решение.

(a) Маргинальные распределения.
Для ξ суммируем по столбцам:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi=-1)&=\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{7}{24}=\frac{3}{24}+\frac{2}{24}+\frac{7}{24}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2},\\ \mathbb{P}(\xi=1)&=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+0=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Для η суммируем по строкам:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\eta=-1)&=\frac{1}{8}+\frac{1}{3}=\frac{3}{24}+\frac{8}{24}=\frac{11}{24},\\ \mathbb{P}(\eta=0)&=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{2}{24}+\frac{4}{24}=\frac{1}{4},\\ \mathbb{P}(\eta=1)&=\frac{7}{24}+0=\frac{7}{24}.\end{aligned}$$

(b) Математические ожидания и ковариационная матрица.
Математические ожидания:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\xi=(-1)\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=0,\\ &\mathbb{E}\eta=(-1)\cdot\frac{11}{24}+0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{7}{24}=\frac{-11+7}{24}=-\frac{1}{6}.\\ &\mathbb{E}\xi^2=1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=1,\\ &\mathbb{E}\eta^2=(-1)^2\cdot\frac{11}{24}+0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{7}{24}=\frac{11+7}{24}=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Дисперсии:

$$\begin{aligned}&D(\xi)=\mathbb{E}\xi^2-(\mathbb{E}\xi)^2=1-0=1,\\ &D(\eta)=\mathbb{E}\eta^2-(\mathbb{E}\eta)^2=\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{3}{4}-\frac{1}{36}=\frac{27-1}{36}=\frac{13}{18}.\end{aligned}$$

Смешанное мат. ожидание:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi\eta)&=(-1)(-1)\cdot\frac{1}{8}+(-1)\cdot 0\cdot\frac{1}{12}+(-1)\cdot 1\cdot\frac{7}{24}\\ &\quad+1\cdot(-1)\cdot\frac{1}{3}+1\cdot 0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot 1\cdot 0\\ &=\frac{1}{8}-\frac{7}{24}-\frac{1}{3}=\frac{3}{24}-\frac{7}{24}-\frac{8}{24}=-\frac{12}{24}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ковариация:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi\,\mathbb{E}\eta = -\frac{1}{2} - 0 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Ковариационная матрица:

$$\Sigma_{\xi,\eta} = \begin{pmatrix} D(\xi) & \operatorname{cov}(\xi,\eta) \\ \operatorname{cov}(\xi,\eta) & D(\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{13}{18} \end{pmatrix}.$$

Корреляционный коэффициент:

$$\rho_{\xi,\eta} = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D(\xi)D(\eta)}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1 \cdot \frac{13}{18}}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{18}{13}} = -\frac{\sqrt{18/13}}{2}.$$

Соответственно, корреляционная матрица:

$$R_{\xi,\eta} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{\xi,\eta} \\ \rho_{\xi,\eta} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{18}{13}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{18}{13}} & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Независимость и некоррелированность.
Проверим независимость, сравнив $\mathbb{P}(\xi = x, \eta = y)$ с $\mathbb{P}(\xi = x)\mathbb{P}(\eta = y)$.
Например:

$$\mathbb{P}(\xi = -1, \eta = -1) = \frac{1}{8}, \quad \mathbb{P}(\xi = -1)\mathbb{P}(\eta = -1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{24} = \frac{11}{48}.$$

Так как $\frac{1}{8} \neq \frac{11}{48}$, величины ξ и η **не независимы**.

Ковариация $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = -1/2 \neq 0$, значит ξ и η **не некоррелированы** (то есть коррелированы).

Задача 3. Два одинаковых тетраэдра с гранями, пронумерованными числами $1, 2, 3, 4$. Подкидываем оба и получаем значения ξ_1 и ξ_2.

Определим случайные величины:

$$\varphi_1 = \xi_1 + \xi_2, \qquad \varphi_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_1 \mid \xi_2 \text{ или } \xi_2 \mid \xi_1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

то есть φ_2 — индикатор события, что одно из выпавших чисел делится на другое.

Пусть теперь $\xi = \varphi_1$, $\eta = \varphi_2$.

a) Составить таблицу совместного распределения (ξ, η).

b) Найти маргинальные распределения ξ и η.

c) Вычислить $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{E}\eta$, ковариационную и корреляционную матрицы вектора (ξ, η).

d) Исследовать ξ и η на независимость и некоррелированность.

Решение.

Всего исходов $4 \cdot 4 = 16$, все равновероятны с вероятностью $1/16$.

(a) Совместное распределение.

Выпишем все пары (ξ_1, ξ_2), их суммы и значение $\eta = \varphi_2$:

(ξ_1, ξ_2)	$\xi = \xi_1 + \xi_2$	$\eta = \varphi_2$
$(1, 1)$	2	1
$(1, 2)$	3	1
$(1, 3)$	4	1
$(1, 4)$	5	1
$(2, 1)$	3	1
$(2, 2)$	4	1
$(2, 3)$	5	0
$(2, 4)$	6	1
$(3, 1)$	4	1
$(3, 2)$	5	0
$(3, 3)$	6	1
$(3, 4)$	7	0
$(4, 1)$	5	1
$(4, 2)$	6	1
$(4, 3)$	7	0
$(4, 4)$	8	1

Группируя по (ξ, η), получаем:

	$\eta = 0$	$\eta = 1$
$\xi = 2$	0	$\frac{1}{16}$
$\xi = 3$	0	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$
$\xi = 4$	0	$\frac{3}{16}$
$\xi = 5$	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$
$\xi = 6$	0	$\frac{3}{16}$
$\xi = 7$	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$	0
$\xi = 8$	0	$\frac{1}{16}$

(b) Маргинальные распределения.

Для ξ (сумма двух тетраэдров):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi = 2) &= \frac{1}{16}, \\
\mathbb{P}(\xi = 3) &= \frac{2}{16} = \frac{1}{8}, \\
\mathbb{P}(\xi = 4) &= \frac{3}{16}, \\
\mathbb{P}(\xi = 5) &= \frac{4}{16} = \frac{1}{4}, \\
\mathbb{P}(\xi = 6) &= \frac{3}{16}, \\
\mathbb{P}(\xi = 7) &= \frac{2}{16} = \frac{1}{8}, \\
\mathbb{P}(\xi = 8) &= \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Для η:

$$\mathbb{P}(\eta = 1) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4},$$
$$\mathbb{P}(\eta = 0) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

(c) Математические ожидания и ковариационная матрица.
Математические ожидания:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\xi &= \sum_{k=2}^{8} k\,\mathbb{P}(\xi = k)\\ &= 2\cdot\frac{1}{16} + 3\cdot\frac{1}{8} + 4\cdot\frac{3}{16} + 5\cdot\frac{1}{4} + 6\cdot\frac{3}{16} + 7\cdot\frac{1}{8} + 8\cdot\frac{1}{16}\\ &= 5.\end{aligned}$$

(Это совпадает с известным результатом: ожидание суммы двух тетраэдров среднее $2\cdot\frac{1+2+3+4}{4} = 5$.)

$$\mathbb{E}\eta = 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\xi^2 &= 2^2\cdot\frac{1}{16} + 3^2\cdot\frac{1}{8} + 4^2\cdot\frac{3}{16} + 5^2\cdot\frac{1}{4} + 6^2\cdot\frac{3}{16} + 7^2\cdot\frac{1}{8} + 8^2\cdot\frac{1}{16}\\ &= \frac{80}{16} = 5\cdot\frac{8}{16} = \frac{40}{8} = 10,\\ \Rightarrow\ D(\xi) &= \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = 10 - 25 = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

(Можно также получить $D(\xi) = 2D(\text{тетраэдра})$.)

Для η:

$$\mathbb{E}\eta^2 = 0^2\cdot\frac{1}{4} + 1^2\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4},$$

поэтому

$$D(\eta) = \mathbb{E}\eta^2 - (\mathbb{E}\eta)^2 = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{9}{16} = \frac{12-9}{16} = \frac{3}{16}.$$

Смешанное мат. ожидание:

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = \sum_{k,\ell} k\ell\,\mathbb{P}(\xi = k, \eta = \ell) = \sum_{k} k\cdot 1\cdot\mathbb{P}(\xi = k, \eta = 1),$$

так как при $\eta = 0$ вклад нулевой.

Из таблицы:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi\eta) &= 2\cdot\frac{1}{16} + 3\cdot\frac{1}{8} + 4\cdot\frac{3}{16} + 5\cdot\frac{1}{8} + 6\cdot\frac{3}{16} + 8\cdot\frac{1}{16}\\ &= \frac{40}{16} = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi\,\mathbb{E}\eta = \frac{5}{2} - 5\cdot\frac{3}{4} = \frac{5}{2} - \frac{15}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Ковариационная матрица:

$$\Sigma_{\xi,\eta} = \begin{pmatrix} D(\xi) & \operatorname{cov}(\xi,\eta)\\ \operatorname{cov}(\xi,\eta) & D(\eta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{16}\end{pmatrix}.$$

Корреляционный коэффициент:

$$\rho_{\xi,\eta} = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D(\xi)D(\eta)}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{16}}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{15/2}} = -\sqrt{\frac{2}{15}}.$$

Корреляционная матрица:

$$R_{\xi,\eta} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{\frac{2}{15}} \\ -\sqrt{\frac{2}{15}} & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Независимость и некоррелированность.

Проверка независимости: например,

$$\mathbb{P}(\xi = 2, \eta = 1) = \frac{1}{16}, \quad \mathbb{P}(\xi = 2)\mathbb{P}(\eta = 1) = \frac{1}{16}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{64} \neq \frac{1}{16}.$$

Значит, ξ и η **не независимы**.

Так как $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = -1/4 \neq 0$, то ξ и η **не некоррелированы** (то есть коррелированы).

Задача 4. Пусть $\xi \sim \mathcal{U}(-\pi,\pi)$, а

$$\eta_1 = \cos\xi, \qquad \eta_2 = \sin\xi.$$

a) Вычислить математическое ожидание, ковариационную и корреляционную матрицы вектора (η_1,η_2).

b) Исследовать η_1 и η_2 на независимость и некоррелированность.

Решение.

Плотность ξ:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}, \quad x \in (-\pi,\pi).$$

(a) Математические ожидания и ковариационные характеристики.

$$\mathbb{E}\eta_1 = \mathbb{E}(\cos\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx = \frac{1}{2\pi}[\sin x]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$$\mathbb{E}\eta_2 = \mathbb{E}(\sin\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx = \frac{1}{2\pi}[-\cos x]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$$\mathbb{E}\eta_1^2 = \mathbb{E}(\cos^2\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx.$$

Используем тождество $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\cos^2\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx \\ &= \frac{1}{4\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}1\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\,dx\right] \\ &= \frac{1}{4\pi}\big(2\pi + 0\big) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Аналогично для $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$:

$$\mathbb{E}(\sin^2 \xi) = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$D(\eta_1) = \mathbb{E}\eta_1^2 - (\mathbb{E}\eta_1)^2 = \frac{1}{2}, \qquad D(\eta_2) = \frac{1}{2}.$$

Ковариация:

$$\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) = \mathbb{E}(\eta_1 \eta_2) - \mathbb{E}\eta_1 \, \mathbb{E}\eta_2 = \mathbb{E}(\cos\xi \sin\xi).$$

При этом

$$\cos\xi \sin\xi = \frac{1}{2}\sin 2\xi,$$

поэтому

$$\mathbb{E}(\cos\xi \sin\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\sin 2x \, dx = \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) = 0.$$

Ковариационная матрица:

$$\Sigma_{\eta_1,\eta_2} = \begin{pmatrix} D(\eta_1) & \operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) \\ \operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) & D(\eta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Корреляционный коэффициент:

$$\rho_{\eta_1,\eta_2} = \frac{\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2)}{\sqrt{D(\eta_1)D(\eta_2)}} = 0.$$

Корреляционная матрица:

$$R_{\eta_1,\eta_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Независимость и некоррелированность.

Мы получили $\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) = 0$, то есть η_1 и η_2 **некоррелированы**.

Однако они **не независимы**, так как между ними существует функциональная связь

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 = \cos^2\xi + \sin^2\xi = 1$$

(то есть вектор (η_1, η_2) всегда лежит на единичной окружности). Если бы η_1 и η_2 были независимы, их совместное распределение не было бы сосредоточено на одной кривой. Следовательно, независимости нет.

Задача 5. Найти плотность распределения суммы двух независимых случайных величин ξ и η, если

$$\xi \sim \operatorname{Exp}(2), \qquad \eta \sim \mathcal{U}(0, 1).$$

Решение.

Плотности:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad f_\eta(y) = \begin{cases} 1, & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $Z = \xi + \eta$. Плотность f_Z — свёртка:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(z-y) f_\eta(y)\, dy.$$

Так как $f_\eta(y) \ne 0$ только при $y \in [0,1]$, а $f_\xi(z-y) \ne 0$ только при $z-y \ge 0$ (то есть $y \le z$), область интегрирования — $y \in [0, \min(1,z)]$.

Рассмотрим случаи.

1) $z < 0$**.** Тогда интегральная область пуста, поэтому

$$f_Z(z) = 0, \quad z < 0.$$

2) $0 \le z \le 1$**.** Тогда $\min(1,z) = z$, и

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^z 2e^{-2(z-y)}\, dy = 2e^{-2z} \int_0^z e^{2y}\, dy \\ &= 2e^{-2z} \left[\frac{e^{2y}}{2} \right]_0^z = e^{-2z}(e^{2z} - 1) = 1 - e^{-2z}. \end{aligned}$$

3) $z > 1$**.** Тогда $\min(1,z) = 1$, и

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^1 2e^{-2(z-y)}\, dy = 2e^{-2z} \int_0^1 e^{2y}\, dy \\ &= 2e^{-2z} \left[\frac{e^{2y}}{2} \right]_0^1 = e^{-2z}(e^2 - 1) = (e^2 - 1)e^{-2z}. \end{aligned}$$

Итого, плотность суммы:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1 - e^{-2z}, & 0 \le z \le 1, \\ (e^2 - 1)e^{-2z}, & z > 1. \end{cases}$$

Легко проверить, что f_Z непрерывна в точке $z = 1$ и $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)\, dz = 1$.