Lección 7

Transformada Z

7.1. Sinopsis de la lección

Las técnicas de transformación de funciones a dominios distintos (como en otras transformaciones integrales) representa una ventaja en el análisis de sistemas, además de simplificar operaciones importantes como la convolución y la simplificación de sistemas representados en bloques. En la presente lección se desarrolla el tema de la Transformada Z, y su utilización en diversas aplicaciones relacionadas con señales discretas, para obtener ventajas semejantes a las tranformaciones anteriores de señales continuas.

Los conocimientos más importantes son:

- Introducción a las funciones discretas
- Definición de Transformada Z
- Transformada de funciones elementales
- Propiedades
- Aplicaciones de la Transformada Z.

7.2. Funciones discretas

A diferencia de una señal continua (modelada como una función continua en el tiempo), las señales discretas están definidas solamente en instantes de tiempo que pueden relacionarse con números enteros, por lo que se pueden modelar mediante secuencias.

Se asumirá que todas las funciones discretas están definidas para todo valor de $k \in]-\infty, \infty[$ (instantes discretos de tiempo).

Existen varias notaciones para representar funciones discretas:

1. Representación funcional: Asumiendo que la función tiene dominio $\mathbb{Z}$, con las excepciones previstas en casos particulares, puede utilizarse una notación como $y(k) = f(k)$.

2. Representación tabular: Con el uso de una tabla, se pueden consignar valores de interés en un subdominio particular, o aquellos que permitan deducir las propiedades de la secuencia:

k	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$y(k)$	$\cdots$	$y(-3)$	$y(-2)$	$y(-1)$	$y(0)$	$y(1)$	$y(2)$	$y(3)$	$\cdots$

3. Representación en secuencia: Los valores pueden representarse utilizando notación usual de conjunto:

$$y(k) = \{\ldots, y(-3), y(-2), y(-1), y(0), y(1), y(2), y(3), \ldots\}$$

4. Representación gráfica: En un plano, cada punto de la secuencia puede representarse mediante un par ordenado $k, y(k)$.

Observaciones:

Para analizar esto tipo de señales, con las ventajas mostradas por la transformada de Laplace, se introduce el concepto de Transformada Z:

Definición 40. La Transformada Z de $y(k)$ se define como

$$\mathcal{Z}\{y(k)\} = Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k}, \tag{7.1}$$

donde $z = re^{j\omega}$ es una variable compleja.

7.3. Transformada Z de funciones elementales

La definición de transformada Z se aplica a una secuencia $y(k)$, como se muestra a continuación:

En los siguientes ejemplos se obtienen algunas transformadas de funciones elementales, las cuales están definidas para todo $k \in \mathbb{Z}$:

Delta unitaria:

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0 \\ 0, & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

Se representa en la Figura 7.1.
Su transformada Z se calcula:

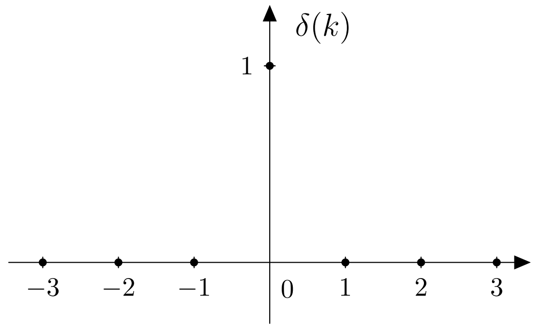

Figura 7.1: Esbozo de la gráfica de la función delta unitaria.

Escalón unitario:

$$u(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k \geq 0 \\ 0, & \text{si } k < 0 \end{cases} \tag{7.2}$$

Se representa en la Figura 7.2.
Su transformada Z se calcula:

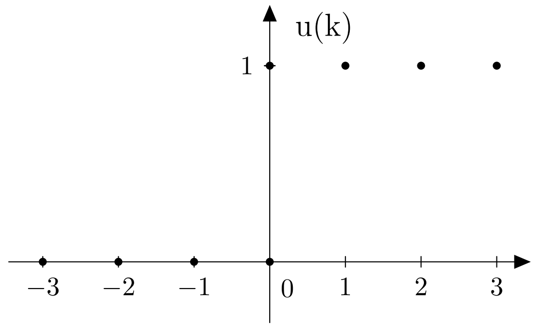

Figura 7.2: Esbozo de la gráfica de la función escalón unitario.

Exponencial:

$$y(k) = \alpha^k u(k) \tag{7.3}$$

Se representa en la Figura 7.3, para el caso $\alpha > 1$.
Su transformada Z se calcula:

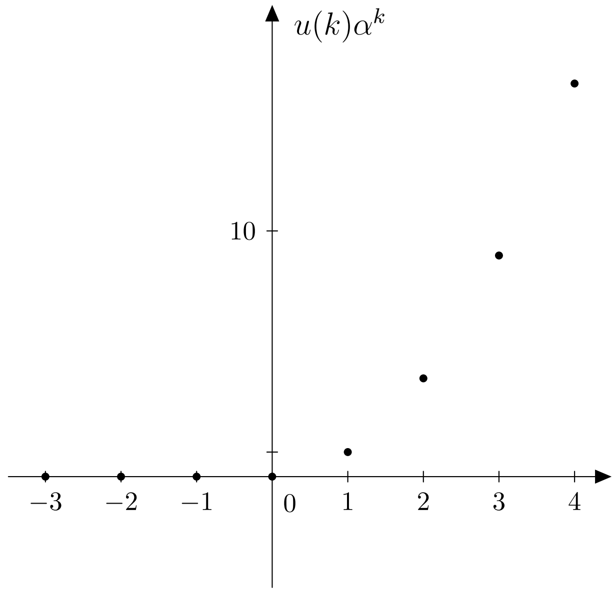

Figura 7.3: Esbozo de la gráfica de la función exponencial discreta.

<u>Coseno discreto:</u>

$$y(k) = \cos(\omega_0 k)u(k) \tag{7.4}$$

Se representa en la Figura 7.4.
Su transformada Z se calcula:

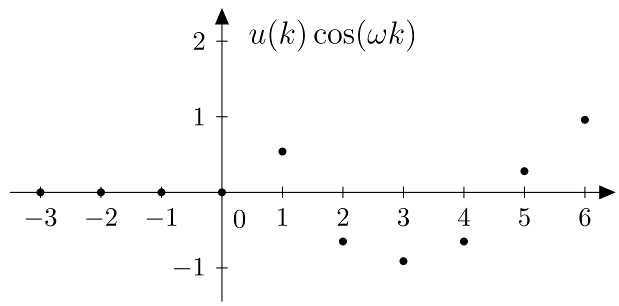

Figura 7.4: Esbozo de la gráfica de la función coseno discreto.

Con un procedimiento semejante al anterior puede obtenerse la trasformada de seno discreto, la cual solamente se enuncia a continuación:

Seno discreto:

$$y(k) = \operatorname{sen}(\omega_0 k)u(k) \tag{7.5}$$

Se representa en la Figura 7.5.
Su transformada Z corresponda a: (Ejercicio)

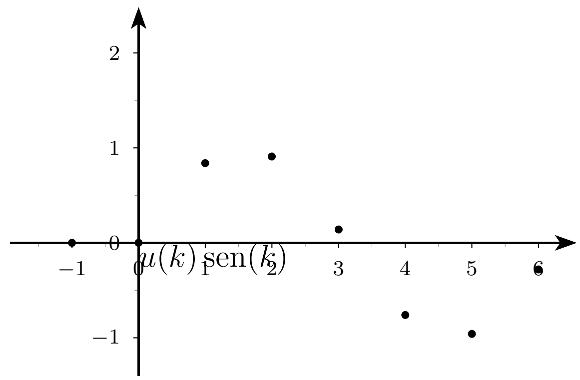

Figura 7.5: Esbozo de la gráfica de la función seno discreto.

7.4. Teoremas especiales

Tal como se ha realizado para las otras transformaciones del curso, es de gran importancia contar con propiedades adicionales que permitan obtener transformadas de un número mayor de funciones.

Teorema 37. La transformada Z es lineal:

$$\mathcal{Z}\left\{ax(k)+y(k)\right\} = a\mathcal{Z}\left\{x(k)\right\} + \mathcal{Z}\left\{y(k)\right\}. \tag{7.6}$$

Demostración. Ejercicio. □

Teorema 38. Traslación en el tiempo discreto:

$$\mathcal{Z}\left\{x(k-r)\right\} = z^{-r}\mathcal{Z}\left\{x(k)\right\}. \tag{7.7}$$

Demostración. Ejercicio. □

Teorema 39. Reflexión en el tiempo discreto:

$$\mathcal{Z}\left\{x(-k)\right\} = X\left(\frac{1}{z}\right). \tag{7.8}$$

Demostración. Ejercicio. □

Teorema 40. Multiplicación por exponencial:

$$\mathcal{Z}\left\{\alpha^k x(k)\right\} = X\left(\frac{z}{a}\right). \tag{7.9}$$

Demostración. Ejercicio. □

Teorema 41. Derivación en tiempo discreto:

$$\mathcal{Z}\left\{kx(k)\right\} = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\left\{x(k)\right\}. \tag{7.10}$$

Teorema 42. Transformada de una función multiplicada por k^r:

$$\mathcal{Z}\left\{k^r x(k)\right\} = -z\frac{d}{dz}\left(\cdots - z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}X(z)\right)\right), r \text{ veces.} \tag{7.11}$$

Demostración. Ejercicio. □

Teorema 43. Convolución en tiempo discreto:

$$\mathcal{Z}\left\{y(k) * x(k)\right\} = \mathcal{Z}\left\{y(k)\right\}\mathcal{Z}\left\{x(k)\right\}. \tag{7.12}$$

Teorema 44. Teorema del valor inicial:

$$y(0) = \lim_{z\to\infty} \mathcal{Z}\left\{y(k)\right\}. \tag{7.13}$$

Ejemplo:

7.5. Sistemas discretos lineales invariantes con el tiempo

Un sistema discreto es un dispositivo cuyas entradas con señales discretas, y las salidas generadas son también discretas.

El sistema se puede caracterizar por una respuesta al impulso.

Gráficamente:

Un sistema discreto es lineal si la salida presente se puede representar como una combinación lineal de entradas presentes y pasadas, y salidas pasadas. Es decir:

$$y(k) = b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \cdots + b_p x(k-p) - a_1 y(k-1) - \cdots - a_q y(k-q). \tag{7.14}$$

donde b_n, a_n son constantes, y p, q enteros positivos.

La ecuación anterior es un ejemplo de ecuación en diferencias.

Ejemplo:

Sistemas no lineales, sistemas variantes con el tiempo:

7.5.1. Ecuaciones en diferencias

En el estudio de sistemas discretos es de gran importancia el modelado utilizando ecuaciones en diferencias, las cuales relacionan distintas iteraciones (o instantes pasados) de las secuencias que constituyen las variables en un sistema lineal. Estas ecuaciones son a los sistemas de tiempo discreto, lo que las ecuaciones diferenciales a sistemas de tiempo continuo.

Un primer ejemplo de este tipo de ecuaciones es aquella que tiene como solución el conjunto de números impares. Esta se puede enunciar

$$y(k) = y(k-1) + 2, \qquad y(1) = 1. \tag{7.15}$$

En ésta, $y(1) = 1$ es la condición inicial, necesaria para evaluar el resto de la secuencia.

Se observa que $y(2) = y(1) + 2 = 1 + 2 = 3$, $y(3) = y(2) + 2 = 3 + 2 = 5$, etc.

7.5.2. Suma convolución

Cuando la salida de un sistema discreto se puede expresar como combinación lineal de la entrada presente y entradas pasadas (no dependiendo de salidas pasadas), se puede modelar mediante una suma convolución, es decir

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)x(k-i) \tag{7.16}$$

donde $h(0), h(1), \ldots$ recibe el nombre de secuencia de pesos.

Esta suma convolución es el equivalente a la respuesta el impulso de los sistemas continuos.

Cuadro 7.1: Tabla de transformadas Z

$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$	$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$
$ax(k) + y(k)$	$aX(z) + Y(z)$
$\delta(k-r)$	z^{-r}
$u(k-r)$	$\dfrac{1}{z^{r-1}(z-1)}$
a^k	$\dfrac{z}{z-a}$
ka^{k-1}	$\dfrac{z}{(z-a)^2}$
$e^{-ka}\operatorname{sen}(kb)$	$\dfrac{ze^{-a}\operatorname{sen}(b)}{z^2 - 2ze^{-a}\cos(b) + e^{-2a}}$
$e^{-ka}\cos(kb)$	$\dfrac{z(z - e^{-a}\cos(b))}{z^2 - 2ze^{-a}\cos(b) + e^{-2a}}$
$k^r x(k)$	$-z\dfrac{d}{dz}\left(\cdots - z\dfrac{d}{dz}\left(-z\dfrac{d}{dz}X(z)\right)\right)$, r veces
$x(k+r)$	$z^r X(z) - z^r x(0) - z^{r-1}x(1) - \cdots - zx(r-1)$
$x(k-r)$	$z^{-r}X(z)$
$x(k) * y(k)$	$X(z)Y(z)$
$x(k) = x(k+p)$	$\dfrac{1}{1-z^{-p}} \sum_{r=0}^{p-1} x(r)z^{-r}$
$x(ak)$	$X(a^{\frac{1}{a}})$
$a^k x(k)$	$X\left(\dfrac{z}{a}\right)$
$\sum_{r=0}^{k} x(r)$	$\dfrac{z}{z-1}X(z)$

7.6. Transformada Z inversa

Debido a que es usual aplicar transformaciones para el análisis de sistemas, es de utilidad contar con la respuesta en el tiempo de estos sistemas.

Para el caso de transformadas integrales a otros dominios, la transformada inversa obtenien una función en el tiempo continuo. En el caso de Transformada Z, la inversa será una función en el tiempo discreto.

Se usará la notación $\mathcal{Z}^{-1}\left\{F(z)\right\}$ para denotar la transformada inversa de $F(z)$.

En los siguientes ejemplos se muestran las técnicas principales utilizadas para obtener transformadas Z inversa:

1. Método de inspección

   A partir de la información contenida en las transformaciones básicas y propiedades fundamentales, se pueden resolver casos como el siguiente:

   Ejemplo:

2. Expansión en fracciones parciales

Ejemplo:

3. Usando residuos. Se basa en el siguiente teorema:

Teorema 45.

$$Z^{-1}\left\{Y(z)\right\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C Y(z)z^{k-1}dz = \sum Res(Y(z)z^{k-1}). \tag{7.17}$$

Es decir, para calcular la transformada Z inversa de $Y(z)$, se pueden calcular los residuos de $Y(z)z^{k-1}$. Este procedimiento se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

7.7. Aplicaciones para el cálculo de la respuesta en el tiempo de sistemas

Los sistemas en tiempo discreto también pueden ser modelados por medio de funciones de transferencia, diagramas de bloques y otras herramientas mostradas en las lecciones precedentes para sistemas continuos. Los sistemas en tiemo discreto encuentran muchas aplicaciones en sistemas digitales modernos aplicados en industria y en áreas como el procesamiento digital de señales.

Los sistemas lineales invariantes con el tiempo son modelados como la convolución de la entrada con la secuencia de pesos del sistema:

$$y(k) = x(k) * h(k) \tag{7.18}$$

En bloques:

Apicando transformada Z:

$$Z\left\{y(k)\right\} = Z\left\{x(k) * h(k)\right\}$$

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

de donde

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

$H(z)$ es la función de transferencia del tiempo discreto. La secuencia de pesos del sistema es la respuesta al impulso del mismo.

Se ha estudiado la transformada Z como la herramienta para modelar sistemas discretos, tanto aquellos modelados como ecuaciones en diferencias, o bien como funciones en el tiempo discreto, reducidas por álgebra de bloques o procedimientos semejantes.

Si el sistema es modelado por ecuaciones en diferencias, es de utilidad aplicar el método de transformada Z a la ecuación en diferencias, como se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo:

Criterio de estabilidad: Un sistema discreto es estable sin los polos de su función de transferencia se encuentran dentro del círculo unitario centrado en el origen del plano complejo.

Ejemplo:

En los siguientes ejemplos se ilustran aplicaciones en sistemas discretos.

Ejemplo:

Ejemplo: