Tema 6

Transformada Z

6.1 EJERCICIOS

Cálculo de transformadas

1. A partir de la definición, determine la transformada Z de $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}, f(k) = k$.

2. Calcule

$$Z^{-1}\left\{\frac{\pi}{z(z+2)^2}\right\}$$

3. Determine

$$Z^{-1}\left\{\frac{z(z^2-z+1)}{(z-1)\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{2}{3}\right)}\right\}.$$

4. Muestre que

$$Z^{-1}\left\{\frac{z}{z^2+a^2}\right\} = a^{k-1}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right).$$

5. A partir de la definición, determine la transformada Z de $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}, f(k) = k^2$.

6. Muestre que

$$Z\left\{\frac{1}{k!}\right\} = e^{\frac{1}{z}}.$$

7. Muestre que

$$Z\left\{e^{jkt}\right\} = \frac{z}{z-e^{jt}}.$$

8. Calcule

$$Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\}.$$

9. Muestre que

$$Z\left\{\cosh(kt)\right\} = \frac{z(z-\cosh(t))}{z^2 - 2x\cosh(t) + 1}.$$

10. Si $Y(z) = \frac{z}{(z-a)(z-b)}$, determine $y(0)$ usando el Teorema del valor inicial.

11. Calcule

$$Z^{-1}\left\{\frac{2z^2 - z}{(z-1)(z-2)^2}\right\}.$$

12. Resuelva la ecuación en diferencias

$$y(k+1) + 3y(k) = k,$$

considerando $y(0) = 1$.

13. Resuelva la ecuación en diferencias

$$y(k+2) - y(k+1) - 6y(k) = 0,$$

considerando $y(0) = 0$, $y(1) = 3$.

14. Muestre que

$$Z\left\{k^3\right\} = \frac{z^3 + 4z^2 + z}{(z-1)^4}.$$

15. Calcule

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{(z-a)^2}\right\}.$$

16. Calcule

$$Z^{-1}\left\{\frac{z^3}{(z^2-1)(z-2)}\right\}.$$

17. Calcule

$$Z^{-1}\left\{\frac{z^2}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right\}.$$

18. Resuelva la ecuación en diferencias

$$y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 0,$$

considerando $y(0) = 0, y(1) = 2$.

19. Resuelva la ecuación en diferencias

$$y(k+1) + 2y(k) = k,$$

considerando $y(0) = 1$.

20. Resuelva la ecuación en diferencias

$$y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = 2^k,$$

considerando $y(0) = 1$, $y(1) = 0$.

21. Resuelva la ecuación en diferencias

$$y(k) - \frac{1}{6}y(k-1) - \frac{1}{6}y(k-2) = \left(\frac{1}{3}\right)^k u(k).$$

22. Use el Teorema del Valor inicial para evaluar $\lim_{k\to 0} y(k)$, si

$$Y(z) = \frac{z^2 - z}{(z-1)(z-2)^2}.$$

23. Sin pasar por el dominio del tiempo, determine $y(0)$, en un sistema cuya salida es modelada mediante:

$$Y(z) = \frac{2z-1}{z-1}.$$

24. Calcule $Z\left\{u(k)\operatorname{sen}^4(k)\right\}$.

25. Calcule $Z\left\{\cos^2(k)u(k)\right\}$.

26. Calcule $Z^{-1}\left\{\frac{z^2}{z^2+1}\right\}$.

6.2 EJERCICIOS

Aplicaciones de la Transformada Z

1. Considere un sistema discreto con función de transferencia $H(z) = \frac{z}{(z+1)(z-1)}$. Determina la salida de este sistema ante la entrada $\{-1, 1, 2, 0, 0, 0, \ldots\}$.

2. Ubique los polos en el plano complejo, su orden, y determine la estabilidad de un sistema cuya función de transferencia es

$$H(z) = \frac{z^2+1}{(z^2-3)^2}.$$

3. Ubique los polos en el plano complejo, su orden, y determine la estabilidad de un sistema cuya función de transferencia es

$$H(z) = \frac{(z^2+4)^2}{(2z+1)^4}.$$

4. Calcule la respuesta ante una entrada escalón de un sistema modelado mediante la función de transferencia

$$H(z) = \frac{z-2}{z^2+\frac{z}{6}-\frac{1}{6}}.$$

5. Un sistema, ante una entrada escalón presenta una salida dada por

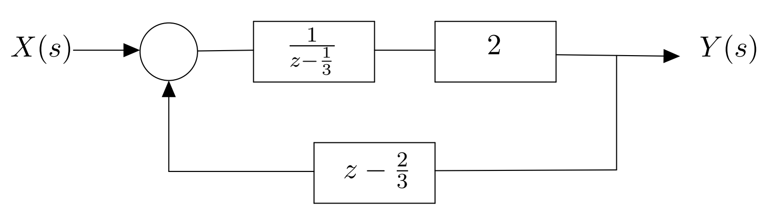
$$y(k) = \frac{6}{5}u(k) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k u(k) + \left(\frac{-1}{4}\right)^k u(k).$$

Determine la función de transferencia de dicho sistema.

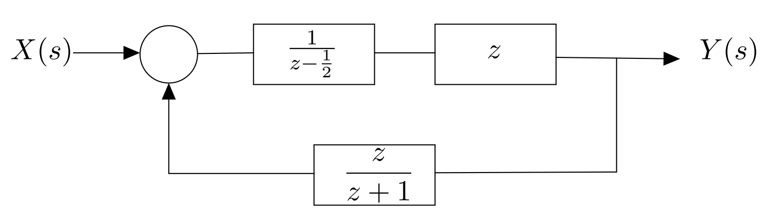
6. Determine la respuesta ante una entrada escalón de un sistema sistema modelado con la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(k+2) - 5y(k-1) + 6y(k) = x(k).$$

7. Determine la respuesta al impulso de un sistema modelado en bloques como se ilustra en la siguiente figura:



8. Determine la estabilidad de un sistema modelado en bloques como se ilustra en la siguiente figura:



9. Ante una entrada escalón, un sistema discreto presenta la salida: $\{0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 0, 0, \ldots\}$. Determine su función de transferencia y estabilidad.

Transformada Z

1. Si $\mathcal{Z}\{f(k)\} = \dfrac{z+1}{z^2+1}$, entonces $\mathcal{Z}\{kf(k)\}$ es

   (a) $z\dfrac{z+1}{z^2+1}$

   (b) $-z\dfrac{z+1}{z^2+1}$

   (c) $\dfrac{z^3+2z^2-z}{z^2+1}$

   (d) $\dfrac{z^3+2z^2-z}{(z^2+1)^2}$

   (e) Ninguna de las anteriores

2. Si $\mathcal{Z}\{f(k)\} = \dfrac{z+1}{z^2+1}$, entonces $\mathcal{Z}\{5f(k)\}$ es

   (a) $5\dfrac{z+1}{z^2+1}$

   (b) $-5\dfrac{z+1}{z^2+1}$

   (c) $\dfrac{5z^2+10z-5}{z^2+1}$

   (d) $\dfrac{5z^2+10z-5}{(z^2+1)^2}$

   (e) Ninguna de las anteriores

3. Si una señal discreta $y(k)$ tiene transformada Z dada por $\mathcal{Z}\{y(k)\} = \dfrac{z+1}{z^2+1}$, entonces $y(0)$ es

   (a) 0.

   (b) 1.

   (c) -1.

   (d) Indefinido.

   (e) No se puede calcular con esta información.

4. Si una señal discreta $y(k)$ tiene transformada Z dada por $\mathcal{Z}\{y(k)\} = \dfrac{z^2+2}{z^2+1}$, entonces $y(0)$ es

   (a) 0.

   (b) 1.

   (c) -1.

   (d) Indefinido.

   (e) No se puede calcular con esta información.

5. Considere las siguientes secuencias, descritas a partir de un valor inicial y la ecuación dada. ¿Cuál de estas opciones describe al conjunto de números pares?

   (a) $y(0) = 1; y(k) = y(k-1) + 2$.

   (b) $y(0) = 2; y(k) = y(k-1) + 2$.

   (c) $y(0) = 1; y(k) = y(k+1) + 2$

   (d) $y(0) = 2; y(k) = y(k+1) + 2$.

   (e) Ninguna de las otras opciones es correcta

6. Si $\mathcal{Z}\{f(k)\} = \dfrac{1}{z-1}$, entonces $\mathcal{Z}\{f(-k)\}$ es

(a) $\dfrac{z}{1-z}$

(b) $\dfrac{z}{z+1}$

(c) $\dfrac{1}{z+1}$

(d) $\dfrac{-1}{z-1}$

(e) $\dfrac{-1}{z-1}$

7. Si $\mathcal{Z}\{f(k)\} = \dfrac{1}{z+1}$, entonces $\mathcal{Z}\{f(-k)\}$ es

   (a) $\dfrac{z}{1+z}$

   (b) $\dfrac{z}{z-1}$

   (c) $\dfrac{1}{z-1}$

   (d) $\dfrac{-1}{z-1}$

   (e) $\dfrac{-1}{z-1}$

8. Si $\mathcal{Z}\{f(k)\} = \dfrac{1}{z+1}$, entonces $\mathcal{Z}\{-f(k)\}$ es

   (a) $\dfrac{-1}{z+1}$

   (b) $\dfrac{z}{z-1}$

   (c) $\dfrac{-1}{z-1}$

   (d) $\dfrac{1}{z-1}$

   (e) $\dfrac{-z}{z-1}$

9. La transformada Z inversa de $F(z) = \dfrac{z}{z-\frac{1}{16}}$ es

   (a) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^k$

   (b) $\left(\dfrac{1}{6}\right)^k$

   (c) $\left(\dfrac{-1}{4}\right)^k$

   (d) $\left(\dfrac{-1}{16}\right)^k$

   (e) Ninguna de las anteriores

10. La transformada Z inversa de $F(z) = \dfrac{z}{\left(z-\frac{1}{16}\right)^2}$ es

    (a) $k\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}$

    (b) $k\left(\dfrac{1}{6}\right)^{k-1}$

    (c) $k\left(\dfrac{-1}{4}\right)^{k-1}$

    (d) $k\left(\dfrac{-1}{16}\right)^{k-1}$

    (e) Ninguna de las anteriores

Transformada Z

5.1 Soluciones

1. Dado que

$$\mathcal{Z}\left\{1^k\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} 1^k z^{-k} = \frac{z}{z-1},$$

derivando esta expresión con respecto a z:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\sum_{k=1}^{\infty} 1^k z^{-k} &= \frac{d}{dz}\frac{z}{z-1} \\
\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} -kz^{-k-1} &= \frac{-1}{(z-1)^2} \\
\Leftrightarrow -z^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} kz^{-k} &= \frac{-1}{(z-1)^2} \\
\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} kz^{-k} &= \frac{z}{(z-1)^2},
\end{aligned}$$

de donde

$$\mathcal{Z}\left\{k\right\} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

3. Dado que la expresión tiene tres polos simples, se utilizan residuos:

- Res($z = 1$):

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z(z^2-z+1)}{(z-1)\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{2}{3}\right)}z^{k-1} &= \lim_{z\to 1}\frac{z(z^2-z+1)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{2}{3}\right)}z^{k-1} \\
&= \frac{9(1)^k}{2}.
\end{aligned}$$

- Res($z = \frac{1}{3}$):

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to \frac{1}{3}}\left(z-\frac{1}{3}\right)\frac{z(z^2-z+1)}{(z-1)\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{2}{3}\right)}z^{k-1} &= \lim_{z\to \frac{1}{3}}\frac{z(z^2-z+1)}{(z-1)\left(z-\frac{2}{3}\right)}z^{k-1} \\
&= \frac{7(1)^k}{6}.
\end{aligned}$$

- $\text{Res}(z = \frac{2}{3})$:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\frac{2}{3}} \left(z - \frac{2}{3}\right) \frac{z(z^2 - z + 1)}{(z-1)\left(z - \frac{1}{3}\right)\left(z - \frac{2}{3}\right)} z^{k-1} &= \lim_{z\to\frac{2}{3}} \frac{z(z^2 - z + 1)}{(z-1)\left(z - \frac{1}{3}\right)} z^{k-1} \\
&= \frac{-14(1)^k}{3}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z(z^2 - z + 2)}{(z-1)\left(z - \frac{1}{3}\right)\left(z - \frac{2}{3}\right)}\right\} = \frac{9(1)^k}{2} + \frac{7(1)^k}{6} + \frac{-14(1)^k}{3}$$

5. En el Ejercicio 1 se obtuvo $\mathcal{Z}\{k\} = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{-k} = \frac{z}{(z-1)^2}$.

   Derivando esta expresión con respecto a z:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\sum_{k=1}^{\infty} kz^{-k} &= \frac{d}{dz}\frac{z}{(z-1)^2} \\
\Leftrightarrow -\sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^{-k-1} &= \frac{-z-1}{(z-1)^3} \\
\Leftrightarrow -z^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^{-k} &= \frac{-z-1}{(z-1)^3} \\
\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^{-k} &= \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}
\end{aligned}$$

   Por lo tanto

$$\mathcal{Z}\left\{k^2\right\} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

7. Usando la definición:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{e^{jkt}\right\} &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{jkt} z^{-k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (ze^{-jt})^{-k} \\
&= \frac{1}{1-(ze^{-jt})^{-1}} \\
&= \frac{z}{z-e^{jt}}.
\end{aligned}
$$

asumiendo la convergencia de la serie.

9. Usando la definición de Transformada Z y la equivalencia de coseno hiperbólico:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{\cosh(kt)\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{kt}+e^{-kt}}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathcal{Z}\left\{e^{kt}\right\} + \mathcal{Z}\left\{e^{-kt}\right\}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-e^{t}} + \frac{z}{z-e^{-t}}\right].
\end{aligned}
$$

11. Dado que la expresión tiene un polo simple en $z = 1$ y un polo doble en $z = 2$, se utilizan residuos:

- $\mathrm{Res}(z = 1)$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{2z^2-z}{(z-1)(z-2)^2} z^{k-1} &= \lim_{z\to 1}\frac{2z^2-z}{(z-2)^2} z^{k-1} \\
&= (1)^k.
\end{aligned}
$$

- $\mathrm{Res}(z = 2)$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\to 2}(z-2)\frac{d}{dz}\left[(z-2)^2\frac{2z^2-z}{(z-1)(z-2)^2} z^{k-1}\right] &= \lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\left[\frac{2z^2-z}{(z-1)} z^{k-1}\right] \\
&= \frac{(2(k+1)z^k - kz^{k-1})(z-1) - (2z^{k+1}-z^k)}{(z-1)^2}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{2z^2-z}{(z-1)(z-2)^2}\right\} = (1)^k + \frac{(2(k+1)z^k - kz^{k-1})(z-1) - (2z^{k+1} - z^k)}{(z-1)^2}.$$

13. Aplicando transformada Z a la ecuación en diferencias, y considerando las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} z^2Y(z) - z^2y(0) - z^1y(1) - zY(z) - zy(0) - 6Y(z) &= 0 \\ \Leftrightarrow z^2Y(z) - 3z - zY(z) - 6Y(z) &= 0 \\ \Leftrightarrow Y(z)(z^2 - z - 6) &= 3z \\ \Leftrightarrow Y(z) &= \frac{3z}{(z+2)(z-3)} \end{aligned}$$

De donde $y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{3z}{(z+2)(z-3)}\right\}$. Usando residuos para calcular esta transformada inversa:

- Res($z = 3$):

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 3}(z-3)\frac{3z}{(z+2)(z-3)}z^{k-1} &= \lim_{z\to 3}\frac{3z}{z+2}z^{k-1} \\ &= \frac{9(3)^{k-1}}{5}. \end{aligned}$$

- Res($z = -2$):

$$\begin{aligned} \lim_{z\to -2}(z+2)\frac{3z}{(z+2)(z-3)}z^{k-1} &= \lim_{z\to -2}\frac{3z}{z-3}z^{k-1} \\ &= \frac{6(-2)^{k-1}}{5}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $y(k) = \frac{9(3)^{k-1}}{5} + \frac{6(-2)^{k-1}}{5}$.

15. Usando residuos, considerando $a \in \mathbb{R}$, la expresión tiene un polo de orden 2 en $z = a$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{(z-a)^2}\right\} &= \lim_{z\to a}\frac{d}{dz}\left[(z-a)^2\frac{z^{k-1}}{(z-a)^2}\right]\\
&= \lim_{z\to a}\frac{d}{dz}z^{k-1}\\
&= \lim_{z\to a}(k-1)z^{k-2}\\
&= (k-1)a^{k-2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{(z-a)^2}\right\} = (k-1)a^{k-2}$$

17. Usando residuos, dado que la expresión tiene polos simples en $z=1$ y $z=\frac{1}{2}$:

- $\text{Res}(z=1)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z^2}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}z^{k-1} &= \lim_{z\to 1}\frac{z^2 z^{k-1}}{z-\frac{1}{2}}\\
&= 2(1)^k
\end{aligned}$$

- $\text{Res}\big(z=\frac{1}{2}\big)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\frac{1}{2}}(z-\frac{1}{2})\frac{z^2}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}z^{k-1} &= \lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{z^2 z^{k-1}}{z-1}\\
&= \frac{-1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}\right\} = 2(1)^k + \frac{-1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

19. Aplicando Transformada Z a la ecuación en diferencias:

$$zY(z) - zy(0) + 2Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$ [2]

[2] Ver Ejercicio 1.

$$\Leftrightarrow zY(z) - z + 2Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow Y(z)(z+2) = z + \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow Y(z) = \frac{z(z^2-2z+2)}{(z+2)(z-1)^2}$$

Para calcular la Transformada Z inversa, se usan residuos, ya que la expresión tiene un polo simple en $z = -2$ y un polo de orden 2 en $z = 1$.

- $\mathrm{Res}(z = -2)$:

$$\begin{aligned} \lim_{z\to -2}(z+2)\frac{z(z^2-2z+2)z^{k-1}}{(z+2)(z-1)^2} &= \lim_{z\to -2}\frac{z(z^2-2z+2)z^{k-1}}{(z-1)^2} \\ &= \frac{-20(-2)^{k-1}}{9}. \end{aligned}$$

- $\mathrm{Res}(z = 1)$:

$$\begin{aligned} &\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{z(z^2-2z+2)z^{k-1}}{(z+2)(z-1)^2}\right] \\ &= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z(z^2-2z+2)z^{k-1}}{z+2}\right] \\ &= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^{k+2}-2z^{k+1}+2z^k}{z+2}\right] \\ &= \lim_{z\to 1}\frac{((k+2)z^{k+1}-2(k+1)z^k+2kz^{k-1})(z+2)-(z^{k+2}-2z^{k+1}+2z^k)}{(z+2)^2} \\ &= \frac{((k+2)(1)^{k+1}-2(k+1)(1)^k+2k(1)^{k-1})(3)-((1)^{k+2}-2(1)^{k+1}+2(1)^k)}{9} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$y(k) = \frac{-20(-2)^{k-1}}{9} + \frac{((k+2)(1)^{k+1}-2(k+1)(1)^k+2k(1)^{k-1})(3)-((1)^{k+2}-2(1)^{k+1}+2(1)^k)}{9}.$$

21. Aplicando Transformada Z a la ecuación en diferencias y despejando:

$$Y(z) - \frac{z^{-1}}{6}Y(z) - \frac{z^{-2}}{6}Y(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow Y(z)[1 - \frac{z^{-1}}{6} - \frac{z^{-2}}{6}] = \frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow Y(z)[1 - \frac{1}{6z} - \frac{1}{6z^2}] = \frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow Y(z)[\frac{6z^2 - z - 1}{6z^2}] = \frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow Y(z) = \frac{18z^3}{(2z-1)(3z-1)(3z+1)}$$

Para calcular la Transformada Z inversa se usa residuos, ya que la expresión tiene polos simples en $z = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{3}$ y $z = \frac{-1}{2}$.

- $\text{Res}\big(z = \frac{1}{2}\big)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2}\right) \frac{18z^3}{(2z-1)(3z-1)(3z+1)} z^{k-1} &= \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{9z^3 z^{k-1}}{(3z-1)(3z+1)} \\
&= \frac{9\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{8\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)} \\
&= \frac{9\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{10}.
\end{aligned}$$

- $\text{Res}\big(z = \frac{1}{3}\big)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\frac{1}{3}} \left(z - \frac{1}{3}\right) \frac{18z^3}{(2z-1)(3z-1)(3z+1)} z^{k-1} &= \lim_{z\to\frac{1}{3}} \frac{18z^3 z^{k-1}}{(2z-1)(3z+1)} \\
&= \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}}{9\left(\frac{1}{3}\right)(2)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}}{3}.
\end{aligned}$$

- $\text{Res}\big(z = \frac{-1}{3}\big)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\frac{-1}{3}} \left(z+\frac{1}{3}\right)\frac{18z^3}{(2z-1)(3z-1)(3z+1)}z^{k-1} &= \lim_{z\to\frac{-1}{3}} \frac{18z^3z^{k-1}}{(2z-1)(3z-1)} \\
&= \frac{2\left(\frac{-1}{3}\right)^{k-1}}{9\left(\frac{-5}{3}\right)(-2)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}}{15}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $y(k) = \frac{9\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{10} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}}{15}$.

23. De acuerdo con el Teorema del valor inicial:

$$\begin{aligned}
y(0) &= \lim_{z\to\infty} \frac{2z-1}{z-1} \\
&= \lim_{z\to\infty} \frac{z}{z}\left(\frac{2-\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}\right) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

25. Dado que $\cos(k) = \frac{e^{-jk}+e^{jk}}{2}$, entonces

$$\cos^2(k) = \left(\frac{e^{-jk}+e^{jk}}{2}\right)^2 = \frac{e^{-2jk}}{4} + \frac{e^{2jk}}{4} + \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{\cos^2(k)\right\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{-2jk}}{4} + \frac{e^{2jk}}{4} + \frac{1}{2}u(k)\right\} \\
&= \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{-2jk}}{4}\right\} + \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{2jk}}{4}\right\} + \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{z}{z-e^{-2j}} + \frac{1}{4}\frac{z}{z-e^{2j}} + \frac{1}{2}\frac{z}{z-1}.
\end{aligned}$$

5.2 Soluciones

1. La entrada del sistema se puede escribir como

$$X(k) = -\delta k + \delta k - 1 + 2\delta k - 2.$$

Aplicando Transformada Z:

$$X(z) = -1 + z^{-1} + 2z^{-2} = \frac{-z^2 + z + 2}{z^2}$$

Por lo tanto la salida corresponde a:

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{z}{(z+1)(z-1)} \cdot \frac{-z^2 + z + 2}{z^2} \\
&= \frac{z}{(z+1)(z-1)} \cdot \frac{-(z+1)(z-2)}{z^2} \\
&= \frac{-(z-2)}{z(z-1)}.
\end{aligned}$$

Para calcular la transformada inversa, usando residuos, ya que $Y(z)$ tiene polos simples en $z = 0$ y en $z = 1$:

- Res$(z = 0)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to 0} z \frac{-(z-2)}{z(z-1)} z^{k-1} &= \lim_{z \to 0} \frac{-(z-2)}{(z-1)} z^{k-1} \\
&= -2u(k).
\end{aligned}$$

- Res$(z = 1)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to 1} (z-1) \frac{-(z-2)}{z(z-1)} z^{k-1} &= \lim_{z \to 1} \frac{-(z-2)}{z} z^{k-1} \\
&= (1)^k.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $y(k) = -2u(k) + (1)^k$, lo cual equivale a $-u(k)$.

3. La función de transferencia tiene un polo en $z = \frac{-1}{2}$, de orden 4. Dado que este polo se encuentra dentro de la circunferencia unitaria, el sistema es estable.

5. Aplicando Transformada Z:

$$Y(z) = \frac{6}{5}\frac{z}{z-1} - \frac{1}{3}\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{z}{z+\frac{1}{4}}.$$

Dado que $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$, y que en este caso $X(z) = \frac{z}{z-1}$[3], entonces

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\frac{6}{5}\frac{z}{z-1} - \frac{1}{3}\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{z}{z+\frac{1}{4}}}{\frac{z}{z-1}} \\ &= \frac{224z^2 - 186z + 52}{120z^2 - 30z - 15}. \end{aligned}$$

7. Haciendo el álgebra de bloques (primero los bloques en cascada, luego la realimentación), la función de transferencia del sistema equivalente es:

$$H(z) = \frac{6}{9z-5}.$$

9. En el sistema descrito, la entrada es $X(z) = \frac{z}{z-1}$. La salida se puede escribir como:

$$y(k) = \delta(k-2) + \delta(k-3) + 2\delta(k-4) + 2\delta(k-5) + 2\delta(k-6) + \delta(k-7).$$

Aplicando Transformada Z:

$$Y(z) = z^{-2} + z^{-3} + 2z^{-4} + 2z^{-5} + 2z^{-6} + z^{-7}.$$

Entonces

$$H(z) = \frac{z^{-2} + z^{-3} + 2z^{-4} + 2z^{-5} + 2z^{-6} + z^{-7}}{\frac{z}{z-1}} = \frac{z^6 + z^4 - z - 1}{z^8}.$$

[3]Por ser una entrada escalón

Respuestas a las preguntas de respuesta breve

Variable compleja

1. V
2. F
3. F
4. V
5. d
6. a
7. c
8. e
9. b
10. e

Funciones de variable compleja

1. b
2. e
3. a
4. a
5. c
6. a
7. e
8. a
9. e
10. b
11. c
12. a
13. c
14. a
15. e

Transformada Z

1. d
2. a
3. a
4. b
5. b
6. a
7. a
8. a
9. e
10. e

Transformada de Laplace

1. c
2. c
3. a
4. c
5. a
6. e
7. a
8. c
9. c
10. d
11. a
12. e
13. a
14. b
15. b