



UNIVERSIDAD DE  
COSTA RICA

Universidad de Costa Rica  
Escuela de Ingeniería eléctrica

IE0435

Inteligencia Artificial Aplicada a la Ingeniería Eléctrica

Proyecto 2:

*Preguntas a LLM sobre  
Aplicación de conceptos sobre la Transformada Z*

Estudiante:

Yehohnathan Miranda Vigil C04879

Profesor:

PhD. Marvin Coto Jiménez

II - 2024

24 de septiembre del 2024

## Resumen

Este proyecto explora el uso de modelos de lenguaje grandes (LLM), específicamente Microsoft Copilot, para aplicar conceptos fundamentales de la Transformada Z en el análisis de sistemas discretos. Se seleccionaron preguntas y ejercicios clave relacionados con la Transformada Z, incluyendo su definición formal, propiedades y aplicaciones, los cuales fueron evaluados por Copilot. El objetivo fue determinar si estas herramientas pueden resolver problemas matemáticos complejos en el ámbito de la ingeniería eléctrica. Los resultados indican que los LLM como Copilot son capaces de hacerlo; sin embargo, siempre se requiere una revisión y verificación adicional por parte del usuario para garantizar la precisión. Es fundamental utilizar estas herramientas como un apoyo y no como un sustituto de las capacidades cognitivas del usuario.

***Palabras clave:*** Transformada Z, Copilot, LLM, Teoremas, Métodos, IA.

# Índice

1. Introducción	1
2. Procedimiento	1
2.1. Selección del tema y LLM para el proyecto	1
2.2. Selección de preguntas sobre Transformada Z	1
2.3. Selección de ejercicios sobre Transformada Z	2
2.4. Uso de Copilot como LLM	2
3. Análisis de Resultados	4
3.1. Respuestas de Copilot a las preguntas realizadas	4
3.1.1. ¿Qué es la Transformada Z? (Sección 7.2)	4
3.1.2. ¿Cuáles son las principales ventajas de utilizar la Transformada Z en el análisis de sistemas?	5
3.1.3. ¿Cómo se define una función discreta? (Sección 7.2)	6
3.1.4. ¿Cuáles son las notaciones comunes para representar funciones discretas? (Sección 7.2)	7
3.1.5. ¿Cuál es la definición formal de la Transformada Z de una secuencia $y(k)$ ?	8
3.1.6. ¿Qué relación tiene la variable compleja $z$ en la Transformada Z?	9
3.1.7. ¿Cómo se calcula la Transformada Z de la delta unitaria $\delta(k)$ ? (Sección 7.3)	10
3.1.8. ¿Cómo se calcula la Transformada Z del escalón unitario $u(k)$ ? (Sección 7.3)	11
3.1.9. ¿Cuál es la Transformada Z de una función exponencial discreta $\alpha^k u(k)$ ? (Sección 7.3)	12
3.1.10. ¿Qué es el teorema de linealidad de la Transformada Z? (Sección 7.4)	13
3.1.11. ¿Cómo se aplica el teorema de traslación en tiempo discreto en la Transformada Z?	14
3.1.12. ¿Qué implica el teorema de reflexión en tiempo discreto en la Transformada Z? (Sección 7.4)	15
3.1.13. ¿Cómo afecta la multiplicación por una exponencial a la Transformada Z de una secuencia? (Sección 7.4)	16
3.1.14. ¿Cómo se representa la derivación en tiempo discreto en la Transformada Z? (Sección 7.4)	17
3.1.15. ¿Qué implica el teorema de la convolución en tiempo discreto para la Transformada Z? (Sección 7.4)	18
3.1.16. ¿Cómo se aplica el teorema del valor inicial en la Transformada Z? (Sección 7.4)	19
3.1.17. ¿Cómo se modela un sistema discreto lineal e invariante en el tiempo utilizando ecuaciones en diferencias? (Sección 7.5)	20

3.1.18.	¿Cuál es la relación entre la Transformada Z y la convolución de señales en sistemas discretos? (Sección 7.5.2)	21
3.1.19.	¿Cómo se puede calcular la Transformada Z inversa de una función? (Sección 7.6)	22
3.1.20.	¿Qué es la función de transferencia en sistemas discretos y cómo se relaciona con la Transformada Z?	23
3.1.21.	¿Cómo se determina la estabilidad de un sistema discreto utilizando la Transformada Z? (Sección 7.7)	24
3.2.	Respuestas de Copilot a los ejercicios solicitados	25
3.2.1.	Determine:	25
3.2.2.	Muestre que:	27
3.2.3.	Determine los polos en el plano complejo, sin orden, y determine la estabilidad del sistema cuya función de transferencia es:	29
3.2.4.	Un sistema, ante una entrada escalón presenta una salida dada por:	30
3.3.	Preguntas de discusión	31
3.3.1.	¿Cuáles experiencias se han documentado sobre el uso de herramientas de Inteligencia Artificial en la literatura especializada?	31
3.3.2.	¿En qué situaciones el uso de herramientas basadas en Inteligencia Artificial puede ser perjudicial para el aprendizaje?	32
4.	Conclusiones	33

## 1. Introducción

La Transformada Z es una herramienta matemática esencial en el análisis de señales y sistemas de tiempo discreto, y otras aplicaciones, facilitando la representación de secuencias discretas en el dominio de la frecuencia compleja. Este proyecto se centra en evaluar la capacidad de modelos de lenguaje grandes (LLM) como Copilot para resolver preguntas y ejercicios relacionados con la Transformada Z, utilizando ejemplos prácticos extraídos del curso de Matemática Superior y Señales y Sistemas I. Permitiendo explorar cómo estas herramientas pueden ser aprovechadas por un estudiante en el contexto académico dentro de la carrera de ingeniería eléctrica, así como sus limitaciones.

## 2. Procedimiento

### 2.1. Selección del tema y LLM para el proyecto

En el espacio virtual destinado a los recursos de este curso, se presentaron 35 posibles opciones para poner a prueba los modelos de lenguaje (LLM) en el contexto de la Ingeniería Eléctrica. La motivación principal fue evaluar estas herramientas de Inteligencia Artificial (IA) como un apoyo académico tanto para estudiantes como para futuros ingenieros electricistas.

El tema seleccionado fue **Verificación de la Capacidad de los Modelos de Lenguaje (LLM) para Identificar y Explicar la Aplicación Práctica de la Transformada Z**. Esta elección se fundamenta en mi interés personal por los ejercicios relacionados con la Transformada Z, la cual es una herramienta matemática esencial en el procesamiento de señales y en la teoría de control, que permite convertir una señal en el dominio del tiempo discreto a una representación en el dominio de la frecuencia compleja [1].

Para esta verificación se utilizará Copilot, un modelo gratuito de Microsoft basado en ChatGPT-4.

Los recursos de consulta utilizados como referencia y para comparar la información proporcionada por el LLM sobre la Transformada Z incluyen el “Cuaderno del curso: IE0305 Matemática Superior” del profesor Marvin Coto [2]. Además, los ejercicios enviados a ChatGPT para verificar la exactitud de sus respuestas provienen del “Folleto de ejercicios resueltos” [3] del mismo autor, quien también es el profesor de este curso.

### 2.2. Selección de preguntas sobre Transformada Z

El contexto de las preguntas se basa en la perspectiva de un estudiante con conocimientos previos en Álgebra Lineal, Series y Secuencias, Transformada de Laplace, Ecuaciones Diferenciales, Números

Complejos y conceptos básicos de análisis y procesamiento de señales. Esto significa que el estudiante ha completado los cursos de matemáticas necesarios para comprender la Transformada Z.

Las preguntas que le vaya a realizar al LLM, en este caso Copilot, será desde una introducción a la Transformada Z hasta una posible explicación más profunda de todo lo que podría encontrarse en el Cuaderno del profesor Marvin Coto [2]. Algunas se encontrarán en la sección de Resultados junto con la respuesta de Copilot y su verificación, para optimizar el espacio del proyecto.

### **2.3. Selección de ejercicios sobre Transformada Z**

Dentro del Folleto de Ejercicios [3], se encuentran un total de 45 ejercicios proporcionados por el profesor relacionados a la Transformada Z, de los cuales solo se utilizarán ejercicios impares. Esto se debe a son más fáciles de verificar al contar con las respuestas, permitiendo evaluar si Copilot los puede resolver correctamente.

### **2.4. Uso de Copilot como LLM**

Para utilizar Copilot basta con buscar en cualquier navegador “Copilot IA Microsoft” o acceder al siguiente enlace <https://copilot.microsoft.com/?msocid=24df01d4ef6e6fdc3db91520ee216e84>.



Figura 1: Interfaz de Copilot, IA de Microsoft.

Se escribe la duda o pregunta en el recuadro blanco que dice “Pregúntame cualquier cosa” y presiona ENTER. De esta manera, recibirás una respuesta que, en algunas ocasiones, incluirá referencias a páginas web. Este modelo de LLM solo puede proporcionar 30 respuestas antes de que se cierre.

### 3. Análisis de Resultados

#### 3.1. Respuestas de Copilot a las preguntas realizadas

Para facilitar la verificación de las respuestas de Copilot, se crearon preguntas sobre la Transformada Z basadas en las secciones del Cuaderno del curso de Matemática Superior [2]. Cada pregunta indica la sección de la que fue tomada como base, con el objetivo de replicar la experiencia de un estudiante que, al comenzar a estudiar los conceptos de la Transformada Z y prepararse para un posible examen, utiliza Copilot como herramienta de apoyo.

Cada pregunta se hará una tras otra, debido a que solo se tienen 30 respuestas en Copilot, y al final se verificará si han sido correctas. Las respuestas serán mostradas dentro de un cuadro. Se señalará si la respuesta fue: **Buena respuesta** o **Mala Respuesta**.

##### 3.1.1. ¿Qué es la Transformada Z? (Sección 7.2)

La **Transformada Z** es una herramienta matemática utilizada principalmente en el procesamiento de señales y la teoría de control. Convierte una señal definida en el dominio del tiempo discreto en una representación en el dominio de la frecuencia compleja.

**Definición:** La Transformada Z de una secuencia  $x[n]$  se define como:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

donde  $z$  es un número complejo.

**Propiedades:** Algunas propiedades importantes de la Transformada Z incluyen:

- **Linealidad:** La Transformada Z de una suma de secuencias es la suma de sus transformadas.
- **Desplazamiento temporal:** Desplazar una secuencia en el tiempo afecta su Transformada Z de manera predecible.
- **Inversión temporal:** Invertir una secuencia en el tiempo también tiene un efecto específico en su Transformada Z.

**Aplicaciones:** La Transformada Z se utiliza para analizar y diseñar sistemas de tiempo discreto, como filtros digitales y sistemas de control. Es especialmente útil porque permite trabajar con ecuaciones en diferencias de manera más manejable.

En la sección 7.2 [2], se presenta la definición matemática de la transformada. Copilot no solo



proporciona esta definición, sino que también ofrece información adicional en respuesta a la pregunta sobre qué es la Transformada Z, explicándolo de manera precisa. Además, Copilot detalla las prioridades y aplicaciones de la Transformada Z en varias de sus respuestas. **Buena respuesta**

### 3.1.2. ¿Cuáles son las principales ventajas de utilizar la Transformada Z en el análisis de sistemas?

La **Transformada Z** ofrece varias ventajas significativas en el análisis de sistemas de tiempo discreto:

#### 1. Simplificación de Cálculos

Permite convertir ecuaciones en diferencias, que son comunes en sistemas discretos, en ecuaciones algebraicas más manejables. Esto facilita el análisis y diseño de sistemas.

#### 2. Análisis de Estabilidad

La Transformada Z ayuda a determinar la estabilidad de un sistema mediante el análisis de los polos de la función de transferencia en el plano Z. Un sistema es estable si todos los polos están dentro del círculo unitario.

#### 3. Respuesta en Frecuencia

Facilita el análisis de la respuesta en frecuencia de un sistema. La Transformada Z permite obtener la respuesta en frecuencia evaluando la función de transferencia en el círculo unitario ( $z = e^{j\omega}$ ).

#### 4. Manipulación de Señales

Permite realizar operaciones como el desplazamiento temporal, la convolución y la inversión temporal de manera más sencilla y sistemática.

#### 5. Diseño de Filtros Digitales

Es fundamental en el diseño y análisis de filtros digitales, permitiendo transformar especificaciones de diseño en el dominio del tiempo en especificaciones en el dominio Z.

#### 6. Análisis de Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI)

Facilita el análisis de sistemas LTI discretos, permitiendo obtener la respuesta del sistema a cualquier entrada dada su función de transferencia.

La respuesta a esta pregunta es bastante completa, considerando las aplicaciones que se suelen abordar en cursos como Matemática Superior o Sistemas de Señales I. Proporciona una solución a las dudas que pueden surgir en el ámbito educativo sobre las posibles aplicaciones de la Transformada Z. **Buena respuesta**

### 3.1.3. ¿Cómo se define una función discreta? (Sección 7.2)

Una **función discreta** es una función matemática cuyo dominio es un conjunto numerable o discreto. Esto significa que la función está definida solo para ciertos valores específicos y no para todos los valores dentro de un intervalo continuo.

#### Características de una Función Discreta

- **Valores Distintos y Separados:** Los valores de la función no están conectados entre sí. Por ejemplo, una función discreta puede tomar valores como 1, 2, 3, pero no valores intermedios como 1.5.
- **Gráfica:** La gráfica de una función discreta suele ser un conjunto de puntos aislados, a menudo representados como un diagrama de dispersión.

#### Ejemplos

- **Número de estudiantes en una clase:** Puede ser 20, 21, 22, etc., pero no 20.5.
- **Resultados de lanzar un dado:** Los posibles resultados son 1, 2, 3, 4, 5, o 6.

#### Aplicaciones

Las funciones discretas son comunes en áreas como la matemática discreta, la teoría de la computación y la estadística, especialmente en el manejo de datos finitos.

La definición presentada coincide en gran medida con el inicio de la sección 7.2 [2]. Además, se ilustran ejemplos de manera similar y se destacan diversas aplicaciones. **Buena respuesta.**

### 3.1.4. ¿Cuáles son las notaciones comunes para representar funciones discretas? (Sección 7.2)

Las funciones discretas se pueden representar de varias maneras, dependiendo del contexto y la preferencia del usuario. Aquí te presento algunas de las notaciones más comunes:

#### 1. Notación de Secuencia

Se utiliza para representar una función discreta como una secuencia de valores. Por ejemplo, una secuencia  $\{a_n\}$  donde  $n$  es un número entero que indica la posición en la secuencia:

$$\{a_n\} = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$$

#### 2. Notación de Función

Se representa una función discreta  $f$  con su variable independiente  $n$  y su valor correspondiente  $f(n)$ :

$$f(n) = a_n$$

Por ejemplo, si  $f(n) = 2n + 1$ , entonces  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 3$ ,  $f(2) = 5$ , etc.

#### 3. Notación de Lista

Para funciones con un dominio finito, se puede usar una lista explícita de pares ordenados:

$$\{(n, f(n))\} = \{(0, 1), (1, 3), (2, 5), \dots\}$$

#### 4. Notación de Fórmula

Se puede definir una función discreta mediante una fórmula explícita para su término  $n$ -ésimo:

$$a_n = 2n + 1$$

#### 5. Notación de Relación de Recurrencia

Algunas funciones discretas se definen mediante relaciones de recurrencia, donde cada término se define en función de términos anteriores:

$$a_{n+1} = a_n + 2, \quad a_0 = 1$$

Estas notaciones permiten describir y trabajar con funciones discretas de manera clara y precisa.

La sección 7.2 y la respuesta de Copilot coinciden en las representaciones Secuenciales, Función y Lista. Sin embargo, únicamente la sección 7.2 menciona la representación gráfica, la cual es muy importante en distintas formas de brindar soluciones. Por otro lado, únicamente Copilot menciona la Fórmula y la Relación de Recurrencia, las cuales no había visto antes personalmente. Aunque no hay contenido que se compara, eso se puede arreglar pidiendo la gráfica. Por ende, es una **Buena respuesta**.

**3.1.5. ¿Cuál es la definición formal de la Transformada Z de una secuencia  $y(k)$ ?**

La **Transformada Z** de una secuencia discreta  $y(k)$  se define formalmente como:

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)z^{-k}$$

donde  $z$  es una variable compleja. Esta transformación convierte la secuencia  $y(k)$  en una función de la variable compleja  $z$ , permitiendo analizar y manipular la secuencia en el dominio de la frecuencia compleja.

**Ejemplo**

Si tienes una secuencia  $y(k) = \{1, 2, 3, 4\}$ , su Transformada Z sería:

$$Y(z) = 1 \cdot z^0 + 2 \cdot z^{-1} + 3 \cdot z^{-2} + 4 \cdot z^{-3}$$

**Buena respuesta.** Coincide con lo dicho previamente con la definición de la Transformada Z y es una ampliación de lo que puede encontrar en la sección 7.3 que el estudiante podría utilizar como una forma de entender mejor los conceptos.

### 3.1.6. ¿Qué relación tiene la variable compleja $z$ en la Transformada Z?

La variable compleja  $z$  en la Transformada Z juega un papel crucial en la representación y análisis de señales discretas. Aquí te explico su relación y significado:

#### 1. Representación en el Plano Complejo

La variable  $z$  se representa en el plano complejo como  $z = re^{j\theta}$ , donde  $r$  es el módulo y  $\theta$  es el argumento (fase) de  $z$ . Esto permite analizar la señal en términos de su magnitud y fase.

#### 2. Transformación de la Secuencia

En la Transformada Z, la secuencia discreta  $y(k)$  se transforma en una función de  $z$ :

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)z^{-k}$$

Aquí,  $z^{-k}$  actúa como un factor de ponderación que depende de la posición  $k$  en la secuencia.

#### 3. Relación con la Transformada de Fourier

Cuando  $z$  se evalúa en el círculo unitario ( $|z| = 1$ ), es decir,  $z = e^{j\omega}$ , la Transformada Z se convierte en la Transformada de Fourier de la secuencia discreta. Esto permite analizar la frecuencia de la señal:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)e^{-j\omega k}$$

#### 4. Región de Convergencia (ROC)

La variable  $z$  también determina la región de convergencia (ROC) de la Transformada Z, que es el conjunto de valores de  $z$  para los cuales la serie infinita converge. La ROC es esencial para determinar la estabilidad y la causalidad del sistema.

#### 5. Polos y Ceros

Los polos y ceros de la función  $Y(z)$  en el plano  $z$  proporcionan información sobre la respuesta en frecuencia y la estabilidad del sistema. Los polos son los valores de  $z$  que hacen que  $Y(z)$  se vuelva infinita, mientras que los ceros son los valores que hacen que  $Y(z)$  sea cero.

Esta pregunta complementa la anterior, proporcionando un contexto más amplio sobre la Transformada Z. La respuesta explica la relación de la Transformada Z en diferentes casos, incluyendo la Región de Convergencia, que no se menciona mucho en el Cuaderno del curso [2]. Un aspecto destacado, que se profundiza en cursos avanzados, es la relación entre los polos y ceros. En este contexto, (  $z$  ) representa los valores de los polos, los cuales son cruciales para la estabilidad del sistema. **Buena respuesta.**

**3.1.7. ¿Cómo se calcula la Transformada Z de la delta unitaria  $\delta(k)$ ? (Sección 7.3)**

La **Transformada Z** de la delta unitaria  $\delta(k)$  se calcula de manera directa utilizando la definición de la Transformada Z. La delta unitaria  $\delta(k)$  es una secuencia que vale 1 cuando  $k = 0$  y 0 en cualquier otro valor de  $k$ :

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

**Cálculo de la Transformada Z**

Aplicando la definición de la Transformada Z:

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k)z^{-k}$$

Dado que  $\delta(k)$  es 0 para todos los valores de  $k$  excepto cuando  $k = 0$ :

$$Y(z) = \delta(0)z^{-0} = 1$$

Por lo tanto, la Transformada Z de la delta unitaria  $\delta(k)$  es simplemente:

$$Y(z) = 1$$

Esto significa que la delta unitaria tiene una Transformada Z constante e igual a 1.

Explicación que coincide con la sección 7.3 [2] sobre como se calcula delta unitaria, brindando una secuencia paso a paso. **Buena respuesta.**

### 3.1.8. ¿Cómo se calcula la Transformada Z del escalón unitario $u(k)$ ? (Sección 7.3)

La **Transformada Z** del escalón unitario  $u(k)$  se calcula utilizando la definición de la Transformada Z. El escalón unitario  $u(k)$  es una secuencia que vale 1 para  $k \geq 0$  y 0 para  $k < 0$ :

$$u(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

#### Cálculo de la Transformada Z

Aplicando la definición de la Transformada Z:

$$U(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)z^{-k}$$

Dado que  $u(k) = 0$  para  $k < 0$ , la suma se reduce a:

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}$$

Esta es una serie geométrica infinita con razón  $z^{-1}$ . La suma de una serie geométrica infinita  $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k$  es  $\frac{a}{1-r}$  siempre que  $|r| < 1$ . En este caso,  $a = 1$  y  $r = z^{-1}$ :

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Simplificando, obtenemos:

$$U(z) = \frac{z}{z - 1}$$

Por lo tanto, la Transformada Z del escalón unitario  $u(k)$  es:

$$U(z) = \frac{z}{z - 1}$$

Esta expresión es válida para  $|z| > 1$ , que es la región de convergencia (ROC) de la Transformada Z del escalón unitario.

Explicación que coincide con la sección 7.3 [2] sobre como se calcula escalón unitario. Al igual que en la respuesta anterior, brinda una secuencia paso a paso y la restricciones de su calculo para la variable z. **Buena respuesta.**

### 3.1.9. ¿Cuál es la Transformada Z de una función exponencial discreta $\alpha^k u(k)$ ? (Sección 7.3)

La **Transformada Z** de una función exponencial discreta  $\alpha^k u(k)$ , donde  $\alpha$  es una constante y  $u(k)$  es el escalón unitario, se calcula utilizando la definición de la Transformada Z.

#### Definición

La secuencia  $\alpha^k u(k)$  es:

$$\alpha^k u(k) = \begin{cases} \alpha^k & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

#### Cálculo de la Transformada Z

Aplicando la definición de la Transformada Z:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u(k) z^{-k}$$

Dado que  $u(k) = 0$  para  $k < 0$ , la suma se reduce a:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k z^{-k}$$

Esta es una serie geométrica infinita con razón  $(\alpha z^{-1})$ . La suma de una serie geométrica infinita  $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k$  es  $\frac{a}{1-r}$  siempre que  $|r| < 1$ . En este caso,  $a = 1$  y  $r = \alpha z^{-1}$ :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^k = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

Simplificando, obtenemos:

$$X(z) = \frac{z}{z - \alpha}$$

Por lo tanto, la Transformada Z de la función exponencial discreta  $\alpha^k u(k)$  es:

$$X(z) = \frac{z}{z - \alpha}$$

Esta expresión es válida para  $|z| > |\alpha|$ , que es la región de convergencia (ROC) de la Transformada Z de esta secuencia.

Explicación que coincide con la sección 7.3 [2] sobre como se calcula la función experiencia discreta.



Además brinda un dato sobre la región de convergencia, que no se menciona. **Buena respuesta.**

### 3.1.10. ¿Qué es el teorema de linealidad de la Transformada Z? (Sección 7.4)

El **teorema de linealidad** de la Transformada Z establece que la Transformada Z de una combinación lineal de dos secuencias es igual a la combinación lineal de las Transformadas Z de esas secuencias. En términos matemáticos, si tenemos dos secuencias  $x_1(k)$  y  $x_2(k)$  con sus respectivas Transformadas Z  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$ , entonces para cualquier par de constantes  $a$  y  $b$ :

$$ax_1(k) + bx_2(k) \xrightarrow{Z} aX_1(z) + bX_2(z)$$

#### Ejemplo

Si  $x_1(k)$  y  $x_2(k)$  tienen las siguientes Transformadas Z:

$$x_1(k) \xrightarrow{Z} X_1(z)$$

$$x_2(k) \xrightarrow{Z} X_2(z)$$

Entonces, la Transformada Z de  $ax_1(k) + bx_2(k)$  es:

$$\mathcal{Z}\{ax_1(k) + bx_2(k)\} = a\mathcal{Z}\{x_1(k)\} + b\mathcal{Z}\{x_2(k)\} = aX_1(z) + bX_2(z)$$

#### Importancia

Esta propiedad es fundamental porque permite descomponer problemas complejos en partes más simples, facilitando el análisis y diseño de sistemas discretos.

Brinda una explicación adicional a la demostración por ejercicio de la sección 7.4, mostrando incluso un ejemplo. Además habla sobre la importancia del teorema de linealidad. Al final muestra propiedad. **Buena respuesta.**

### 3.1.11. ¿Cómo se aplica el teorema de traslación en tiempo discreto en la Transformada Z?

El **teorema de traslación en tiempo discreto** en la Transformada Z describe cómo se modifica la Transformada Z de una secuencia cuando esta se desplaza en el tiempo. Este teorema es útil para analizar y diseñar sistemas discretos.

#### **Teorema de Traslación en Tiempo Discreto**

Si  $x(k)$  tiene una Transformada Z  $X(z)$ , entonces la Transformada Z de la secuencia desplazada  $x(k - k_0)$  es:

$$\mathcal{Z}\{x(k - k_0)\} = z^{-k_0} X(z)$$

donde  $k_0$  es el número de muestras por el cual se desplaza la secuencia.

#### **Ejemplo**

Supongamos que tenemos una secuencia  $x(k)$  con Transformada Z  $X(z)$ . Si desplazamos esta secuencia 3 unidades hacia la derecha, obtenemos  $x(k - 3)$ . La Transformada Z de esta secuencia desplazada es:

$$\mathcal{Z}\{x(k - 3)\} = z^{-3} X(z)$$

#### **Aplicaciones**

Este teorema es especialmente útil en el análisis de sistemas de tiempo discreto, ya que permite determinar cómo se comporta un sistema cuando su entrada se desplaza en el tiempo. También es fundamental en el diseño de filtros digitales y en la resolución de ecuaciones en diferencias.

De la misma forma, da una explicación adicional a la demostración por ejercicio de la sección 7.4 sobre el teorema de traslación, incluyendo ejemplo, importancia y propiedad. **Buena respuesta.**

### 3.1.12. ¿Qué implica el teorema de reflexión en tiempo discreto en la Transformada Z? (Sección 7.4)

El **teorema de reflexión en tiempo discreto** en la Transformada Z describe cómo se modifica la Transformada Z de una secuencia cuando esta se invierte en el tiempo. Este teorema es útil para analizar y diseñar sistemas discretos que involucran secuencias reflejadas.

#### Teorema de Reflexión en Tiempo Discreto

Si  $x(k)$  tiene una Transformada Z  $X(z)$ , entonces la Transformada Z de la secuencia reflejada  $x(-k)$  es:

$$\mathcal{Z}\{x(-k)\} = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

#### Ejemplo

Supongamos que tenemos una secuencia  $x(k)$  con Transformada Z  $X(z)$ . Si reflejamos esta secuencia en el tiempo, obtenemos  $x(-k)$ . La Transformada Z de esta secuencia reflejada es:

$$\mathcal{Z}\{x(-k)\} = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

#### Aplicaciones

Este teorema es especialmente útil en el análisis de sistemas de tiempo discreto, ya que permite determinar cómo se comporta un sistema cuando su entrada se invierte en el tiempo. También es fundamental en el diseño de filtros digitales y en la resolución de ecuaciones en diferencias.

Explicación sobre el teorema de reflexión, incluyendo ejemplo, importancia y propiedad. Más de lo mencionado en la sección 7.4. **Buena respuesta.**

### 3.1.13. ¿Cómo afecta la multiplicación por una exponencial a la Transformada Z de una secuencia? (Sección 7.4)

La multiplicación de una secuencia  $x(k)$  por una exponencial  $\alpha^k$  afecta su Transformada Z de una manera específica. Este efecto se describe mediante el **teorema de escalado en el dominio del tiempo**.

#### Teorema de Escalado en el Dominio del Tiempo

Si  $x(k)$  tiene una Transformada Z  $X(z)$ , entonces la Transformada Z de la secuencia  $\alpha^k x(k)$  es:

$$\mathcal{Z}\{\alpha^k x(k)\} = X\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

#### Ejemplo

Supongamos que tenemos una secuencia  $x(k)$  con Transformada Z  $X(z)$ . Si multiplicamos esta secuencia por  $\alpha^k$ , obtenemos  $\alpha^k x(k)$ . La Transformada Z de esta nueva secuencia es:

$$\mathcal{Z}\{\alpha^k x(k)\} = X\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

#### Interpretación

- **Escalado de la Variable  $z$ :** La multiplicación por  $\alpha^k$  en el dominio del tiempo se traduce en un escalado de la variable  $z$  en el dominio de la Transformada Z. Esto significa que la función de transferencia se evalúa en  $\frac{z}{\alpha}$  en lugar de  $z$ .
- **Región de Convergencia (ROC):** La región de convergencia de la nueva Transformada Z se ajusta en función de  $\alpha$ . Si la ROC original de  $X(z)$  es  $|z| > r$ , la nueva ROC será  $|z| > |\alpha r|$ .

#### Aplicaciones

Este teorema es útil en el análisis y diseño de sistemas discretos, especialmente cuando se trabaja con señales moduladas o cuando se necesita ajustar la frecuencia de una señal.

Explicación sobre la multiplicación, incluyendo ejemplo, importancia y propiedad. Más de lo mencionado en la sección 7.4. **Buena respuesta.**

### 3.1.14. ¿Cómo se representa la derivación en tiempo discreto en la Transformada Z? (Sección 7.4)

La derivación en tiempo discreto, también conocida como diferencia hacia adelante, se puede representar en la Transformada Z mediante el **teorema de la diferencia hacia adelante**.

#### Teorema de la Diferencia Hacia Adelante

Si  $x(k)$  tiene una Transformada Z  $X(z)$ , entonces la Transformada Z de su derivada discreta  $x(k) - x(k-1)$  es:

$$\mathcal{Z}\{x(k) - x(k-1)\} = (1 - z^{-1})X(z)$$

#### Derivación en Tiempo Discreto

La derivada discreta de una secuencia  $x(k)$  se define como:

$$\Delta x(k) = x(k) - x(k-1)$$

#### Transformada Z de la Derivada Discreta

Aplicando la Transformada Z a la derivada discreta:

$$\mathcal{Z}\{\Delta x(k)\} = \mathcal{Z}\{x(k) - x(k-1)\}$$

Utilizando la linealidad de la Transformada Z y las propiedades de desplazamiento temporal:

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = X(z)$$

$$\mathcal{Z}\{x(k-1)\} = z^{-1}X(z)$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{Z}\{x(k) - x(k-1)\} = X(z) - z^{-1}X(z) = (1 - z^{-1})X(z)$$

#### Interpretación

Este resultado muestra que la Transformada Z de la derivada discreta de una secuencia es el producto de  $(1 - z^{-1})$  y la Transformada Z de la secuencia original.

Explicación sobre la derivación, incluyendo ejemplo, importancia y propiedad. Más de lo mencionado en la sección 7.4. **Buena respuesta.**

### 3.1.15. ¿Qué implica el teorema de la convolución en tiempo discreto para la Transformada Z? (Sección 7.4)

El **teorema de la convolución** en tiempo discreto para la Transformada Z establece que la Transformada Z de la convolución de dos secuencias es igual al producto de sus Transformadas Z individuales. Este teorema es fundamental en el análisis y diseño de sistemas discretos.

#### Teorema de la Convolución

Si  $x_1(k)$  y  $x_2(k)$  tienen Transformadas Z  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$  respectivamente, entonces la Transformada Z de la convolución de  $x_1(k)$  y  $x_2(k)$ , denotada como  $x_1(k) * x_2(k)$ , es:

$$\mathcal{Z}\{x_1(k) * x_2(k)\} = X_1(z) \cdot X_2(z)$$

#### Definición de Convolución

La convolución de dos secuencias  $x_1(k)$  y  $x_2(k)$  se define como:

$$(x_1 * x_2)(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(k-n)$$

#### Ejemplo

Supongamos que tenemos dos secuencias  $x_1(k)$  y  $x_2(k)$  con sus respectivas Transformadas Z  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$ . La Transformada Z de su convolución es:

$$\mathcal{Z}\{(x_1 * x_2)(k)\} = X_1(z) \cdot X_2(z)$$

#### Aplicaciones

Este teorema es especialmente útil en el diseño de filtros digitales y en la resolución de ecuaciones en diferencias. Permite simplificar el análisis de sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) al convertir la operación de convolución en una simple multiplicación en el dominio Z.

Explicación sobre la convolución, incluyendo ejemplo, importancia y propiedad. Más de lo mencionado en la sección 7.4. **Buena respuesta.**

**3.1.16. ¿Cómo se aplica el teorema del valor inicial en la Transformada Z? (Sección 7.4)**

El **teorema del valor inicial** en la Transformada Z permite determinar el valor inicial de una secuencia discreta directamente desde su Transformada Z, sin necesidad de realizar la transformada inversa. Este teorema es especialmente útil para analizar sistemas y señales en el dominio Z.

**Teorema del Valor Inicial**

Para una secuencia causal  $x(k)$  con Transformada Z  $X(z)$ , el teorema del valor inicial establece que:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

**Aplicación**

Supongamos que tenemos una secuencia  $x(k)$  cuya Transformada Z es  $X(z)$ . Para encontrar el valor inicial  $x(0)$ , simplemente evaluamos el límite de  $X(z)$  cuando  $z$  tiende a infinito.

**Ejemplo**

Consideremos una secuencia  $x(k)$  con Transformada Z:

$$X(z) = \frac{2z}{z - 0,5}$$

Para encontrar  $x(0)$ :

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z}{z - 0,5} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z}{z(1 - 0,5/z)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2}{1 - 0,5/z} = 2$$

Por lo tanto, el valor inicial de la secuencia  $x(k)$  es  $x(0) = 2$ .

**Importancia**

Este teorema es útil para determinar las condiciones iniciales de un sistema, lo cual es crucial en el análisis y diseño de sistemas de control y procesamiento de señales.

Explicación sobre el teorema del valor inicial, incluyendo ejemplo, importancia y propiedad. Más de lo mencionado en la sección 7.4. **Buena respuesta.**

**3.1.17. ¿Cómo se modela un sistema discreto lineal e invariante en el tiempo utilizando ecuaciones en diferencias? (Sección 7.5)**

Para modelar un sistema discreto lineal e invariante en el tiempo (LTI) utilizando ecuaciones en diferencias, se sigue un enfoque sistemático que permite describir la relación entre la entrada y la salida del sistema en términos de diferencias finitas. Aquí te explico los pasos y conceptos clave:

**1. Definición del Sistema**

Un sistema discreto LTI puede ser descrito por una ecuación en diferencias de la forma:

$$y(k) + a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + \dots + a_ny(k-n) = b_0x(k) + b_1x(k-1) + \dots + b_mx(k-m)$$

donde:

- $y(k)$  es la salida del sistema en el instante  $k$ .
- $x(k)$  es la entrada del sistema en el instante  $k$ .
- $a_i$  y  $b_j$  son coeficientes constantes que definen el comportamiento del sistema.
- $n$  y  $m$  son los órdenes de la ecuación en diferencias.

**2. Ejemplo de Ecuación en Diferencias**

Consideremos un sistema descrito por la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden:

$$y(k) - 0,5y(k-1) + 0,25y(k-2) = x(k) + 0,5x(k-1)$$

**3. Transformada Z**

Para analizar y resolver esta ecuación en diferencias, se puede aplicar la Transformada Z. La Transformada Z de la ecuación anterior es:

$$Y(z) - 0,5z^{-1}Y(z) + 0,25z^{-2}Y(z) = X(z) + 0,5z^{-1}X(z)$$

**Aplicaciones**

Este enfoque es fundamental en el diseño y análisis de filtros digitales, sistemas de control, y en cualquier aplicación que involucre señales discretas.

**Buena respuesta.**



### 3.1.18. ¿Cuál es la relación entre la Transformada Z y la convolución de señales en sistemas discretos? (Sección 7.5.2)

La relación entre la **Transformada Z** y la **convolución de señales** en sistemas discretos es fundamental para el análisis y diseño de sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI). Esta relación se describe mediante el **teorema de la convolución** en el dominio Z.

#### Teorema de la Convolución

El teorema de la convolución establece que la Transformada Z de la convolución de dos secuencias es igual al producto de sus Transformadas Z individuales. Matemáticamente, si  $x_1(k)$  y  $x_2(k)$  tienen Transformadas Z  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$  respectivamente, entonces:

$$\mathcal{Z}\{x_1(k) * x_2(k)\} = X_1(z) \cdot X_2(z)$$

#### Definición de Convolución

La convolución de dos secuencias  $x_1(k)$  y  $x_2(k)$  se define como:

$$(x_1 * x_2)(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(k-n)$$

#### Ejemplo

Supongamos que tenemos dos secuencias  $x_1(k)$  y  $x_2(k)$  con sus respectivas Transformadas Z  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$ . La Transformada Z de su convolución es:

$$\mathcal{Z}\{(x_1 * x_2)(k)\} = X_1(z) \cdot X_2(z)$$

#### Aplicaciones

Esta relación es especialmente útil en el diseño de filtros digitales y en la resolución de ecuaciones en diferencias. Permite simplificar el análisis de sistemas LTI al convertir la operación de convolución en una simple multiplicación en el dominio Z.

La respuesta no está mal del todo, solo que no se aborda de la misma forma que en la sección 7.5.2 sobre Suma Convolución y puede que sea más un hecho de la forma en que se le formuló al respuesta a Copilot. Al no decir lo mismo, se tomará como **Mala respuesta**.

### 3.1.19. ¿Cómo se puede calcular la Transformada Z inversa de una función? (Sección 7.6)

Calcular la **Transformada Z inversa** de una función implica encontrar la secuencia de tiempo discreto  $x(k)$  a partir de su representación en el dominio Z  $X(z)$ . Existen varios métodos para realizar este cálculo, cada uno adecuado para diferentes tipos de funciones  $X(z)$ . Aquí te presento los métodos más comunes:

**1. Método de Inspección** Este método consiste en comparar  $X(z)$  con una tabla de pares de Transformada Z conocidas y encontrar la secuencia correspondiente  $x(k)$ . Es útil cuando  $X(z)$  tiene una forma que coincide con una entrada en la tabla.

**2. Expansión en Fracciones Parciales** Este método se utiliza cuando  $X(z)$  es una fracción racional. Se descompone  $X(z)$  en una suma de fracciones parciales, cada una de las cuales tiene una Transformada Z inversa conocida. Los pasos son:

1. Factorizar el denominador de  $X(z)$ .
2. Escribir  $X(z)$  como una suma de fracciones parciales.
3. Encontrar la Transformada Z inversa de cada término utilizando una tabla de Transformadas Z.

**3. Expansión en Series de Potencias** Este método implica expandir  $X(z)$  en una serie de potencias de  $z^{-1}$  y luego identificar los coeficientes de la serie como los valores de la secuencia  $x(k)$ . Es útil cuando  $X(z)$  puede ser expresado fácilmente como una serie de potencias.

**4. Método de Residuos** Este método se basa en la teoría de funciones complejas y utiliza la integración de contornos para encontrar la Transformada Z inversa. Es más avanzado y se utiliza principalmente en casos donde otros métodos no son aplicables.

**Ejemplo: Expansión en Fracciones Parciales** Supongamos que tenemos  $X(z) = \frac{2z}{z-0,5}$ . Para encontrar la Transformada Z inversa:

1. Factorizamos el denominador (en este caso, ya está factorizado).
2. Escribimos  $X(z)$  como una fracción parcial:

$$X(z) = \frac{2z}{z-0,5}$$

3. Utilizamos una tabla de Transformadas Z para encontrar la Transformada Z inversa:

$$x(k) = 2 \cdot (0,5)^k u(k)$$

Esta respuesta coincide con la sección 7.6, con la diferencia que Copilot menciona un método más:

Expansión en Series de Potencias. **Buena respuesta.**

### 3.1.20. ¿Qué es la función de transferencia en sistemas discretos y cómo se relaciona con la Transformada Z?

La **función de transferencia** en sistemas discretos es una herramienta fundamental para analizar y diseñar sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI). Se define como la relación entre la Transformada Z de la salida y la Transformada Z de la entrada del sistema, bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero.

#### Definición de la Función de Transferencia

Para un sistema discreto LTI, la función de transferencia  $H(z)$  se define como:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

donde:

- $Y(z)$  es la Transformada Z de la salida  $y(k)$ .
- $X(z)$  es la Transformada Z de la entrada  $x(k)$ .

#### Relación con la Transformada Z

La Transformada Z permite convertir ecuaciones en diferencias, que describen el comportamiento de sistemas discretos, en ecuaciones algebraicas en el dominio Z. Esto simplifica el análisis y diseño de sistemas, ya que las operaciones de convolución en el dominio del tiempo se convierten en multiplicaciones en el dominio Z.

#### Ejemplo

Consideremos un sistema descrito por la ecuación en diferencias:

$$y(k) - 0,5y(k-1) = x(k)$$

Aplicando la Transformada Z a ambos lados de la ecuación:

$$Y(z) - 0,5z^{-1}Y(z) = X(z)$$

Reorganizando para obtener la función de transferencia:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}}$$

Explicación de repaso sobre la qué es la función de transferencia para su próximo uso en Transformada Z. **Buena respuesta.**

### 3.1.21. ¿Cómo se determina la estabilidad de un sistema discreto utilizando la Transformada Z? (Sección 7.7)

La **estabilidad** de un sistema discreto lineal e invariante en el tiempo (LTI) se puede determinar utilizando la Transformada Z mediante el análisis de los polos de la función de transferencia del sistema. Aquí te explico el proceso:

#### 1. Función de Transferencia

Primero, se obtiene la función de transferencia  $H(z)$  del sistema, que es la relación entre la Transformada Z de la salida  $Y(z)$  y la Transformada Z de la entrada  $X(z)$ :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

#### 2. Polos de la Función de Transferencia

Los polos de la función de transferencia son los valores de  $z$  que hacen que el denominador de  $H(z)$  sea cero. Matemáticamente, si  $H(z)$  se expresa como:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

donde  $N(z)$  y  $D(z)$  son polinomios en  $z$ , los polos son las raíces del polinomio  $D(z)$ .

#### 3. Criterio de Estabilidad

Un sistema discreto es **estable** si y solo si todos los polos de su función de transferencia están dentro del círculo unitario en el plano complejo. Esto significa que para cada polo  $z_p$ :

$$|z_p| < 1$$

#### Ejemplo

Consideremos un sistema con la siguiente función de transferencia:

$$H(z) = \frac{z}{z^2 - 0,5z + 0,25}$$

Para determinar la estabilidad, encontramos los polos resolviendo  $D(z) = 0$ :

$$z^2 - 0,5z + 0,25 = 0$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, obtenemos los polos:

$$z = 0,25 \quad (\text{doble raíz})$$

Dado que  $|0,25| < 1$ , ambos polos están dentro del círculo unitario, por lo tanto, el sistema es estable.

Lo único que se menciona en el cuaderno relacionado con la estabilidad es el Criterio de Estabilidad. Por lo tanto, esta es una expansión adicional sobre temas de estabilidad que se abordan en cursos posteriores y en relación con el análisis de sistemas. **Buena respuesta.**

### 3.2. Respuestas de Copilot a los ejercicios solicitados

Para poner a prueba a Copilot en la resolución de problemas relacionados con la Transformada Z, se seleccionaron solo 4 ejercicios de forma aleatoria. La selección de solo 4 ejercicios se debe a que se presupone que Copilot se utilizará como una herramienta de aprendizaje y no como un sustituto del estudiante en el trabajo de análisis y resolución de problemas dados.

Expuesto lo anterior, la finalidad de esta sección es plantear un ejercicio y solicitar una explicación paso a paso. Luego, se comparará su solución con la proporcionada por el profesor en el Folleto [3].

#### 3.2.1. Determine:

$$Z^{-1} \left\{ \frac{z(z^2 - z + 1)}{(z - 1)(z - \frac{1}{3})(z - \frac{2}{3})} \right\}$$

Para resolver la transformada Z inversa usando el método de residuos, primero descompondremos la función dada en fracciones parciales. La función es:

$$X(z) = \frac{z(z^2 - z + 1)}{(z - 1)(z - \frac{1}{3})(z - \frac{2}{3})}$$

Descomponemos  $X(z)$  en fracciones parciales:

$$X(z) = \frac{A}{z - 1} + \frac{B}{z - \frac{1}{3}} + \frac{C}{z - \frac{2}{3}}$$

Para encontrar los valores de  $A$ ,  $B$  y  $C$ , multiplicamos ambos lados por el denominador común  $(z - 1)(z - \frac{1}{3})(z - \frac{2}{3})$ :

$$z(z^2 - z + 1) = A(z - \frac{1}{3})(z - \frac{2}{3}) + B(z - 1)(z - \frac{2}{3}) + C(z - 1)(z - \frac{1}{3})$$

Ahora evaluamos en los valores de  $z$  que anulan cada denominador:

1. Para  $z = 1$ :

$$1(1^2 - 1 + 1) = A(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{2}{3})$$

$$1 = A(\frac{2}{3})(\frac{1}{3})$$

$$A = \frac{1}{\frac{2}{9}} = \frac{9}{2}$$

2. Para  $z = \frac{1}{3}$ :

$$\frac{1}{3}((\frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3} + 1) = B(\frac{1}{3} - 1)(\frac{1}{3} - \frac{2}{3})$$

$$\frac{1}{3}(\frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1) = B(-\frac{2}{3})(-\frac{1}{3})$$

$$\frac{1}{3}(\frac{1}{9} - \frac{3}{9} + \frac{9}{9}) = B(\frac{2}{9})$$

$$\frac{1}{3}(\frac{7}{9}) = B(\frac{2}{9})$$

$$B = \frac{\frac{7}{27}}{\frac{2}{9}} = \frac{7}{27} \cdot \frac{9}{2} = \frac{7}{6}$$

3. Para  $z = \frac{2}{3}$ :

$$\frac{2}{3}((\frac{2}{3})^2 - \frac{2}{3} + 1) = C(\frac{2}{3} - 1)(\frac{2}{3} - \frac{1}{3})$$

$$\frac{2}{3}(\frac{4}{9} - \frac{2}{3} + 1) = C(-\frac{1}{3})(\frac{1}{3})$$

$$\frac{2}{3}(\frac{4}{9} - \frac{6}{9} + \frac{9}{9}) = C(-\frac{1}{9})$$

$$\frac{2}{3}(\frac{7}{9}) = C(-\frac{1}{9})$$

$$C = \frac{\frac{14}{27}}{-\frac{1}{9}} = \frac{14}{27} \cdot -9 = -\frac{14}{3}$$

Entonces, la descomposición en fracciones parciales es:

$$X(z) = \frac{\frac{9}{2}}{z-1} + \frac{\frac{7}{6}}{z-\frac{1}{3}} - \frac{\frac{14}{3}}{z-\frac{2}{3}}$$

Ahora, aplicamos la transformada Z inversa a cada término:

$$x[n] = \frac{9}{2}\delta[n-1] + \frac{7}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \frac{14}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n]$$

Donde  $\delta[n-1]$  es la función delta de Dirac desplazada y  $u[n]$  es la función escalón unitario.

Esta respuesta es consistente con la obtenida en el folleto, aunque se expresa de manera ligeramente diferente. Sin embargo, sigue siendo válida al aplicar métodos conocidos, como el método del residuo, y proporciona una explicación detallada paso a paso. **Buena respuesta.**

### 3.2.2. Muestre que:

$$Z\{\cosh(kt)\} = \frac{z(z - \cosh(h))}{z^2 - 2x \cosh(h) + 1}$$

Para demostrar que:

$$Z\{\cosh(kt)\} = \frac{z(z - \cosh(h))}{z^2 - 2x \cosh(h) + 1}$$

seguimos estos pasos:

1. **Definición de la secuencia:** Consideramos la secuencia  $x[n] = \cosh(kn)u[n]$ , donde  $u[n]$  es la función escalón unitario.

2. **Expansión de la función hiperbólica:** Utilizamos la definición de la función hiperbólica:

$$\cosh(kt) = \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2}$$

Entonces, la secuencia se puede escribir como:

$$x[n] = \frac{e^{kn} + e^{-kn}}{2} u[n]$$

3. **Transformada Z:** Aplicamos la transformada Z a  $x[n]$ :

$$X(z) = Z \left\{ \frac{e^{kn} + e^{-kn}}{2} u[n] \right\}$$

Utilizando la linealidad de la transformada Z:

$$X(z) = \frac{1}{2} (Z\{e^{kn}u[n]\} + Z\{e^{-kn}u[n]\})$$

4. **Transformadas Z individuales:** Calculamos las transformadas Z de  $e^{kn}u[n]$  y  $e^{-kn}u[n]$ :

$$Z\{e^{kn}u[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{kn} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^k z^{-1})^n = \frac{1}{1 - e^k z^{-1}}, \quad \text{para } |e^k z^{-1}| < 1$$

$$Z\{e^{-kn}u[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-kn} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-k} z^{-1})^n = \frac{1}{1 - e^{-k} z^{-1}}, \quad \text{para } |e^{-k} z^{-1}| < 1$$

5. **Combinación de resultados:** Sumamos las dos transformadas Z:

$$X(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - e^k z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-k} z^{-1}} \right)$$

6. **Simplificación:** Simplificamos la expresión combinada:

$$X(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - e^{-k} z^{-1} + 1 - e^k z^{-1}}{(1 - e^k z^{-1})(1 - e^{-k} z^{-1})} \right)$$

$$X(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{2 - (e^k + e^{-k})z^{-1}}{1 - (e^k + e^{-k})z^{-1} + z^{-2}} \right)$$

Utilizando la identidad  $\cosh(h) = \frac{e^h + e^{-h}}{2}$ :

$$X(z) = \frac{1 - \cosh(k)z^{-1}}{z^{-2} - 2\cosh(k)z^{-1} + 1}$$

Multiplicamos numerador y denominador por  $z^2$ :

$$X(z) = \frac{z(z - \cosh(k))}{z^2 - 2z \cosh(k) + 1}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$Z\{\cosh(kt)\} = \frac{z(z - \cosh(h))}{z^2 - 2z \cosh(h) + 1}$$



Es una excelente respuesta paso a paso que coincide con lo obtenido en el Folleto, que incluso narra un poco más de las estrategias utilizadas. **Buena Respuesta.**

**3.2.3. Determine los polos en el plano complejo, sin orden, y determine la estabilidad del sistema cuya función de transferencia es:**

$$H(z) = \frac{(z^2 + 4)^2}{(2z^2 + 1)^4}$$

Para determinar los polos en el plano complejo y la estabilidad del sistema cuya función de transferencia es:

$$H(z) = \frac{(z^2 + 4)^2}{(2z^2 + 1)^4}$$

seguimos estos pasos:

1. **Encontrar los polos:** Los polos de la función de transferencia se encuentran al resolver el denominador igualado a cero. El denominador es  $(2z^2 + 1)^4$ , por lo que resolvemos:

$$2z^2 + 1 = 0$$

Esto nos da:

$$z^2 = -\frac{1}{2} \implies z = \pm j \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dado que el denominador es  $(2z^2 + 1)^4$ , cada polo  $z = \pm j \frac{1}{\sqrt{2}}$  tiene una multiplicidad de 4. Por lo tanto, los polos son:

$$z = j \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z = -j \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{cada uno con multiplicidad 4})$$

2. **Estabilidad del sistema:** Para determinar la estabilidad del sistema, observamos la ubicación de los polos en el plano complejo. Un sistema es estable si todos los polos están dentro del círculo unitario en el plano  $z$ .

En este caso, los polos  $z = \pm j \frac{1}{\sqrt{2}}$  están en el eje imaginario, pero dentro del círculo unitario ya que  $\left| j \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ . Esto indica que el sistema es estable, ya que todos los polos están dentro del círculo unitario.

La respuesta, sobre que la estabilidad del sistema, es la misma, pero siempre mostrando una explicación más extensa paso por paso de los cálculos Copilot. **Buena respuesta.**

**3.2.4. Un sistema, ante una entrada escalón presenta una salida dada por:**

$$y(k) = \frac{6}{5}u(k) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^k u(k) + \left(-\frac{1}{4}\right)^k u(k).$$

**Determine la función de transferencia de dicho sistema.**

Para determinar la función de transferencia del sistema dado, primero tomamos la transformada Z de la salida  $y(k)$ . La entrada es un escalón unitario  $u(k)$ , cuya transformada Z es  $\frac{1}{1-z^{-1}}$ .

La salida del sistema es:

$$y(k) = \frac{6}{5}u(k) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^k u(k) + \left(-\frac{1}{4}\right)^k u(k)$$

Aplicamos la transformada Z a cada término:

1. Para  $\frac{6}{5}u(k)$ :

$$Z \left\{ \frac{6}{5}u(k) \right\} = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{6}{5} \cdot \frac{z}{z-1}$$

2. Para  $-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^k u(k)$ :

$$Z \left\{ -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^k u(k) \right\} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right) z^{-1}} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

3. Para  $\left(-\frac{1}{4}\right)^k u(k)$ :

$$Z \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^k u(k) \right\} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right) z^{-1}} = \frac{z}{z + \frac{1}{4}}$$

Sumamos las transformadas Z de cada término para obtener  $Y(z)$ :

$$Y(z) = \frac{6}{5} \cdot \frac{z}{z-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{z}{z + \frac{1}{4}}$$

La función de transferencia  $H(z)$  es la relación entre la salida  $Y(z)$  y la entrada  $U(z)$ :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Dado que  $U(z) = \frac{z}{z-1}$  para una entrada escalón, tenemos:

$$H(z) = \frac{\frac{6}{5} \cdot \frac{z}{z-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{z}{z+\frac{1}{4}}}{\frac{z}{z-1}}$$

La respuesta es correcta, con la única diferencia de que en el folleto está un paso más simplificada. Esto se podría solucionar solicitándole a Copilot la simplificación. **Buena respuesta.**

### 3.3. Preguntas de discusión

En las secciones anteriores, dedicadas a la verificación de las respuestas a las preguntas y ejercicios en torno a la Transformada Z, se ha demostrado de forma satisfactoria que Copilot puede ser una gran herramienta de ayuda para aquellos estudiantes que quieran profundizar, estudiar o entender de mejor manera temas tan complejos como los abordados en este proyecto.

Las preguntas que se plantearán a continuación buscan ofrecer una perspectiva diferente para el estudiante en el uso de esta herramienta para distintos temas o investigaciones más profundas. Además, se invita a reflexionar sobre si realmente es beneficioso el uso de esta herramienta, considerando la posibilidad de replantearse el concepto de plagio o hacer trampa, y si esto puede estar relacionado con un modelo de inteligencia artificial cuyas respuestas son generadas de forma única.

#### 3.3.1. ¿Cuáles experiencias se han documentado sobre el uso de herramientas de Inteligencia Artificial en la literatura especializada?

La Inteligencia Artificial, en particular los modelos de lenguaje grande (LLM) como ChatGPT, experimentó un aumento drástico en 2020. La literatura especializada ha comenzado a abordar este fenómeno. Un ejemplo de ello, aunque pueda parecer informal, es su uso en páginas de noticias serias, cuya redacción se ha vuelto “similar” debido a la automatización de noticias mediante estas herramientas. Desde mi punto de vista como lector, esto ha empobrecido la calidad, mostrando una falta de atención a la seriedad y al análisis de los acontecimientos. A menudo, se recurre a titulares como “¿Cómo se vería tu personaje favorito de anime en la vida real?”.

Por otra parte, el uso de la IA en otras literaturas como la investigación y la educación han empezado a ser documentadas. Según Segovia y Baumgartner (2024) [4], las aplicaciones como ChatGPT, Scite y

Litmaps han sido implementadas en diversas áreas, destacándose sus beneficios en la aceleración de la escritura científica, análisis de datos, y representación de redes de citas. Sin embargo, advierten sobre la necesidad de utilizar estas herramientas con precaución, dado que pueden generar respuestas sesgadas o incorrectas debido a la calidad de las bases de datos subyacentes. Además, subrayan la importancia de que nosotros los humanos con conocimiento de los temas investigados revisen los resultados para asegurar su precisión y originalidad. También se resalta la utilidad de ChatGPT en el campo de la educación, donde puede ofrecer apoyo personalizado y facilitar la comprensión de conceptos complejos, hecho que quedó demostrado con las respuestas de Copilot respecto a la Transformada Z.

### **3.3.2. ¿En qué situaciones el uso de herramientas basadas en Inteligencia Artificial puede ser perjudicial para el aprendizaje?**

El uso de LLM como Copilot puede ser perjudicial para el aprendizaje en diversas situaciones, especialmente cuando estas herramientas son utilizadas como sustitutos del proceso cognitivo propio de los estudiantes, lo que afecta negativamente la capacidad de desarrollo del pensamiento crítico y la comprensión profunda de los conceptos. Según Ubal et al. (2023) [5], las inteligencias artificiales generativas pueden obstaculizar el desarrollo de capacidades cognitivas al permitir que los estudiantes resuelvan problemas sin realizar los necesarios ejercicios de reflexión e interacción que fomentan el aprendizaje autónomo. El riesgo radica en que los estudiantes se conviertan en meros receptores de información, reduciendo su capacidad para sintetizar, analizar y comprender el conocimiento [5].

En el caso de un estudiante de ingeniería eléctrica que utiliza la IA para resolver ejercicios relacionados con la Transformada Z (caso del proyecto), su aprendizaje puede verse afectado porque deja de practicar los pasos necesarios para internalizar el concepto. Más si el estudiante empieza a observar el buen desempeño que tiene la herramienta en conceptos que lo envuelven en sus estudios, por lo que es importante considerar charlas sobre uso de IA en la educación y sus implicaciones.

## 4. Conclusiones

- Copilot, como LLM, demuestra una capacidad para proporcionar respuestas teóricas correctas sobre la Transformada Z, facilitando la comprensión de conceptos matemáticos complejos a posibles estudiantes que lleven cursos con esta temática.
- La IA puede disminuir el tiempo que los estudiantes dedican a buscar y organizar recursos de aprendizaje. Con información bien explicada y clara.
- El uso excesivo de IA en la resolución de problemas podría fomentar una dependencia que impacta el proceso de aprendizaje autodidacta, disminuyendo la capacidad del estudiante para resolver problemas por su cuenta.
- Incorporación de estas herramientas debería ser acompañada por estrategias pedagógicas que fomenten la crítica y verificación de las respuestas generadas por la IA. Sería la introducción a la ética sobre la IA en cursos de la carrera y proyectos que impliquen su uso, más allá de cursos del cual nace este proyecto.

## Referencias

- [1] StudySmarter, “Transformada z,” 2024, accedido: 20 de septiembre de 2024. [Online]. Available: <https://www.studysmarter.es/resumenes/ingenieria/matematicas-de-la-ingenieria/transformada-z/>
- [2] M. C. Jiménez, Cuaderno del curso: IE0305 Matemática Superior. Universidad de Costa Rica, Escuela de Ingeniería Eléctrica, 2022.
- [3] —, Folleto de Ejercicios Resueltos. Universidad de Costa Rica, Escuela de Ingeniería Eléctrica, 2021.
- [4] A. de Revisión, P. J. S. Juárez, R. Baumgartner, and S. Baumgartner, “The use of artificial intelligence applications for education and scientific research,” Hatun Yachay Wasi, 2023.
- [5] M. Ubal Camacho, P. Tambasco, S. Martínez, and M. García Correa, “El impacto de la inteligencia artificial en la educación. riesgos y potencialidades de la ia en el aula,” RiiTE Revista interuniversitaria de investigación en Tecnología Educativa, vol. 15, pp. 41–57, 2023.