

## פתרון הבחינה במתמטיקה

קיז תשע"ט, 2019, שאלון: 35581  
מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

למידה על פסיקומטרי  
בՅואל גבע ←

הzellנות לעתודה יש פעם בחום.  
אל חתפsher עליה.



1.

במאנפיה יש שתי מכונות לייצור עוגות: מכונה I ומכונה II .

כל אחת מן המכונות מייצרת עוגות בקצב קבוע משלה.

ביום ראשון זמן העבודה של שתי המכונות היה שווה.

ביום ראשון מכונה I ייצרה 80 עוגות יותר ממספר העוגות שייצרה מכונה II .

ביום שני ייצרה מכונה II את אותה מספר עוגות שייצרה מכונה I ביום ראשון, ומכונה I ייצרה את אותה מספר עוגות

שייצרה מכונה II ביום ראשון.

ביום שלישי היה זמן העבודה של מכונה II ארוך פי  $\frac{25}{9}$  מאשר הזמן של מכונה I באותו יום.

א. חשב כמה עוגות סך הכל ייצרו שתי המכונות ביום ראשון.

נסמן:  $T_1$  — הזמן הדרוש למכונה I לייצר עוגה אחת, $T_2$  — הזמן הדרוש למכונה II לייצר עוגה אחת.ב. חשב את היחס  $\frac{T_1}{T_2}$ . נמק.

ג. (1) בפרק זמן מסוים מכונה I ייצרה בדיק 47 עוגות.

כמה עוגות שלמות ייצרה מכונה II בפרק הזמן זהה? הסבר.

(2) ידוע שתשתי המכונותעבדו אותו פרק זמן, וכל אחת מהן ייצירה מספרשלם של עוגות.

אם ייתכן שבפרק הזמן הזה שתתי המכונות יחד ייצרו 26 עוגות? נמק.

לע' 3.6 :

מכונה I נזירת א פלאר גלאר

מכונה II נזירת ג פלאר

לע' הפקה ביום חמישי: פלאר.

| יום חמישי | יום רביעי       | יום שלישי | יום שני | יום ראשון |
|-----------|-----------------|-----------|---------|-----------|
| $x + t$   | $t$             | $x$       |         |           |
| $y + t$   | $t$             | $y$       |         |           |
| $y + t$   | $\frac{y+t}{x}$ | $x$       |         |           |
| $x + t$   | $\frac{x+t}{y}$ | $y$       |         |           |

הזהירות לעתודה יש פעם בחיים.

למידה על פסיקומטרו  
בוקא אבן ←

אל תתפסר עלייה.



הנה נסavr 1.

$$\text{I: } xt = yt + 80 \quad \text{: ינואר}$$

$$\text{II: } \frac{xt}{y} = \frac{25}{9} \cdot \frac{yt}{x} \quad | \cdot 9xy$$

$$\text{II: } 9x^2t = 25y^2t \quad | : t \neq 0$$

$$9x^2 = 25y^2 \quad | \sqrt{\phantom{x}}$$

$$3x = 5y \quad | \quad x, y > 0$$

$$x = \frac{5}{3}y$$

$$\text{II} \rightarrow \text{I: } \frac{5}{3}yt = yt + 80$$

$$\frac{2}{3}yt = 80$$

$$yt = 120$$

$$xt = 200$$

$$\boxed{xt + yt = 320}$$

וילג פלאייר חיים כהן:

$$T_1 = \frac{1}{x}$$

$$T_2 = \frac{1}{y}$$

$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}} = \frac{y}{x} = \frac{y}{\frac{5}{3}y} = \frac{3}{5}}$$



$\frac{47}{x}$  :  $x$  כ- 47 כ- 31 פ' I נספ' כ- 37 נספ' (1) כ- 37 נספ' II נספ' פ' כ- 30 נספ'

$$x = \frac{25}{3} y : 2 \cdot 3 \rfloor$$

$$y \cdot \frac{\frac{47}{5}y}{\frac{5}{3}y} = 28.2$$

11. 11/18 28 23° II 1101

•  $x + y = 26$

$$\frac{5}{3}yt + yt = 26 \quad x = \frac{5}{3}y \quad (2) \\$$

$$\frac{8}{3}yt = 26$$

$$yt = 9.75$$

## כמיהע על פסיכומטרי בוחאל גבע

**הזהרנות לעתודה יש פעם בחים.  
אל תתאפשר עלייה.**



.2.  $a_n$  היא סדרה הנדסית אינסופית שהמנה שללה היא  $q$ .  $|q| \neq 1$ .

$$\text{נתון: } a_3 \cdot a_7 = 1.$$

א. חשב את  $a_5$  (מצא את שתי האפשרויות).

$$\text{נתון: } a_5 > 0.$$

ב. (1) הבע את  $a$  באמצעות  $q$ .

$$(2) \text{ האם קיימים } q \text{ טבעי שקיימים } a_n = \frac{1}{a_1} ? \text{ אם כן — מצא אותו. אם לא — נמק.}$$

$$(3) \text{ האם קיימים } q \text{ טבעי שקיימים } a_n = \frac{1}{a_{13}} ? \text{ אם כן — מצא אותו. אם לא — נמק.}$$

ג. (1) הבע באמצעות  $q$  את 7 האיברים הראשונים של הסדרה  $a_n$ .

$$(2) \text{ נתון: } 1 = a_k \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{k-1} \text{ ( } k \text{ הוא מספר טבעי).}$$

מצא את הערך של  $k$ , והסביר מדוע הוא הערך האפשרי היחיד של  $k$ .

$$a_3 \cdot a_7 = 1$$

$$a_1 \cdot q^2 \cdot a_1 \cdot q^6 = 1$$

$$a_1^2 \cdot q^8 = 1$$

$$(a_1 \cdot q^4)^2 = 1$$

$$a_5^2 = 1$$

$$\begin{array}{c} \diagup \\ a_5 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagdown \\ a_5 = -1 \end{array}$$

$$18 \quad a_5 = 1 \text{ או } a_5 = -1$$

פתרונות:

$$\text{אם } a_5 = 1 \text{ אז } a_1 = \frac{1}{q^8} \text{ ו } a_7 = q^6 \text{ ו } a_3 = q^2 \text{ ו } a_1 = \frac{1}{q^2} \text{ ו } a_5 = 1 \text{ ו } a_7 = q^6 \text{ ו } a_3 = q^2.$$

$$a_1 q^4 = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{q^4}$$



$$a_n = \frac{1}{a_1}$$

(2) ↗

$$a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{a_1}$$

$$\frac{1}{q^4} \cdot q^{n-1} = \frac{1}{\frac{1}{q^4}}$$

$$q^{n-1} = q^8$$

$$|q| \neq 1 \quad ! \quad \text{נוסף!}$$

$$\text{למי געוויך?}$$

$$n-1=8$$

$$\boxed{n=9}$$

$$\boxed{a_9 = \frac{1}{a_1} : (2) \text{ פונ}}$$

$$a_n = \frac{1}{a_{13}}$$

(3) ↗

$$a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{a_1 \cdot q^{12}}$$

$$\frac{1}{q^4} \cdot q^{n-1} = \frac{1}{\frac{1}{q^4} \cdot q^{12}}$$

$$q^{n-1} = q^{-4}$$

$$n-1=-4$$

$$n=-3$$

$$\boxed{\frac{1}{a_{13}} : (3) \text{ זיכר עפיה}}$$

**הזרמנות לעתודה יש פום בחיים.**
 לוחית על פסיקומטורי  
 בזיאק גבע ←
**אל תתפס עלייה.**

$$a_1 = \frac{1}{q^4}, a_2 = \frac{1}{q^3}, a_3 = \frac{1}{q^2}, a_4 = \frac{1}{q}, a_5 = 1 \quad (1)$$

$$a_6 = q, a_7 = q^2$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdots a_k = 1$$

$$\frac{1}{q^4} \cdot \frac{1}{q^3} \cdot \frac{1}{q^2} \cdots q^{k-5} = 1$$

$$q^{-4} \cdot q^{-3} \cdot q^{-2} \cdots q^{k-5} = 1$$

$$q^{-4+(-3)+(-2)+\cdots+(k-5)} = 1$$

: a גודל גודל גודל (2)

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$$

$$a_k = \frac{1}{q^4} \cdot q^{k-1}$$

$$a_k = q^{k-5}$$

רוכם נס ערך אפסי אפסי.

$$I/k = -4$$

$$0 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$$

$$1 \cdot 1 \cdots 1 = k$$

$$S_k = \frac{k(-4+k-5)}{2} = \frac{k(k-9)}{2}$$

$$q^{\frac{k(k-9)}{2}} = 1$$

$$\frac{k(k-9)}{2} = 0$$

$$k(k-9) = 0$$

$$k=0 \quad \boxed{k=9}$$

$$\boxed{a_1 \cdot a_2 \cdots a_9 = 1 : \text{זיהוי}}$$

לעתה נוכיח  $k=9$  היא אכן גיאומטרית.

הזרמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפסר עליה.



- folij 112a (2)

הוּא כִּי מִלְּבָד יְהוָה הוּא יְהוָה

$a_3 \quad f \quad " \quad " \quad a_7$

$$a_n \quad " \quad " \quad " \quad a_k$$

1983.07.14 City, NC הילטון

PK Pn. Q5=1 folys .1 eGPN IJK iRe

**[K=9]** .1. ה

- כוכב ו כוכבlein כוכבון (קמ' 1)

וְאֵלֶיךָ כִּי־בַּעֲמָדָה אַיִלָּה הַפְּנִים כְּבָשָׂר וְלֹא

10% (3) = 4.80 > 115 (year)

כלילם כוֹאָבָרְכָה וְיַעֲמֵד גַּלְעֵד.



גלי ונטע משחקים משחק ובו אפשר לקבוע את מספר הסיובים. בכל סיבוב אחת מהן זוכה והאחרת מפסידה.

.3

המנצחת במשחק כלו תהיה זו שתזכה ביותר בסיבובים מהברטה.

אם לשתיهن מספר שווה של זכיות בסיבובים, התוצאה המשחק כלו תהיה תיקו.

נתון: בכל סיבוב הסיכוי של נטע לזכות הוא  $\frac{1}{3}$ .

א. ביום ראשון שיחקו גלי ונטע 4 סיובים במשחק.

(1) מהי הסתברות שנטע ניצחה המשחק כלו?

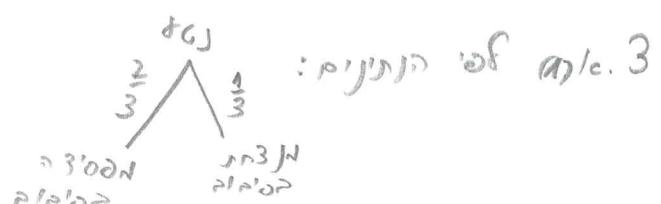
(2) מהי הסתברות לתוצאה תיקו המשחק כלו?

ב. גם ביום שני שיחקו גלי ונטע 4 סיובים במשחק. הפעם הם החליטו מראש שאם התוצאה המשחק של 4 הסיובים תהיה תיקו – הם ישחקו עוד 3 סיובים כדי להכריע את תוצאה המשחק, וממי שתזכה ביותר במשחק סיובים, תנצח המשחק כלו.

מהי הסתברות שנטע ניצח במשחק כלו?

ידוע שנטע ניצחה המשחק כלו בבדיקה אחד מימיים: ראשון או שני.

מהו הסיכוי שהוא ניצחה המשחק כלו ביום שני?



פתרון חלון גראפנאר דילאייר:

$$n=4$$

$$n=3,4$$

$$P = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{ניצח}) = P(3) + P(4) =$$

$$= \binom{4}{3} \frac{1}{3}^3 \cdot \frac{2}{3} + \binom{4}{4} \frac{1}{3}^4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{81} + \frac{1}{81} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

$$n=4$$

$$n=2$$

$$P = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{ניצח}) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \boxed{\frac{8}{27}}$$



$$P\left(\begin{array}{c} \text{הנץ} \\ \text{הנץ} \end{array}\right) = P\left(\begin{array}{c} \text{הנץ} \\ \text{הנץ} \end{array}\right) + P\left(\begin{array}{c} \text{הנץ} \\ \text{הנץ} \end{array}\right)$$

$$P\left(\begin{array}{c} \text{הנץ} \\ \text{הנץ} \end{array}\right) = \frac{1}{9} \quad (2), (1) \in \Omega$$

$$P\left(\begin{array}{c} \text{הנץ} \\ \text{הנץ} \end{array}\right) = \frac{8}{27} \cdot P\left(\begin{array}{c} \text{הנץ} \\ \text{הנץ} \end{array}\right)$$

$$P\left(\begin{array}{c} \text{הנץ} \\ \text{הנץ} \end{array}\right) = \frac{8}{27} \cdot \left( \binom{3}{2} \frac{1}{3}^2 \frac{2}{3}^1 + \binom{3}{3} \frac{1}{3}^3 \frac{2}{3}^0 \right)$$

$$P\left(\begin{array}{c} \text{הנץ} \\ \text{הנץ} \end{array}\right) = \frac{8}{27} \cdot \left( \frac{2}{9} + \frac{1}{27} \right) = \frac{56}{729}$$

$$\left| P\left(\begin{array}{c} \text{הנץ} \\ \text{הנץ} \end{array}\right) = \frac{1}{9} + \frac{56}{729} = \frac{137}{729} \right|$$

$$P\left(\begin{array}{c} \text{הנץ} \\ \text{הנץ} \end{array}\right) =$$

$$= P\left(\begin{array}{c} \text{הנץ} \\ \text{הנץ} \end{array}\right) = \frac{P\left(\begin{array}{c} \text{הנץ} \\ \text{הנץ} \end{array}\right) P\left(\begin{array}{c} \text{הנץ} \\ \text{הנץ} \end{array}\right)}{P\left(\begin{array}{c} \text{הנץ} \\ \text{הנץ} \end{array}\right) + P\left(\begin{array}{c} \text{הנץ} \\ \text{הנץ} \end{array}\right)}$$

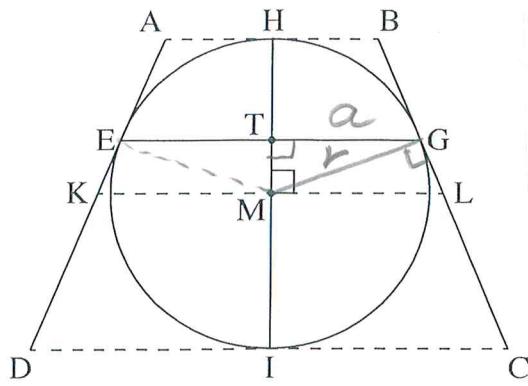


3. הינה הינה

$$\begin{aligned}
 P \left( \begin{array}{c} 80 \\ 72 \\ 12 \\ 15 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 80 \\ 72 \\ 13 \\ 12 \\ 10 \end{array} \right) &= \frac{\left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \frac{13!}{729}}{\frac{1}{9} \cdot \left(1 - \frac{13!}{729}\right) + \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(\frac{13!}{729}\right)} = \frac{\frac{8}{9} \cdot \frac{13!}{729}}{\frac{5}{9} \cdot \frac{13!}{729} + \frac{10}{9} \cdot \frac{13!}{729}} \\
 &= \boxed{\frac{13!}{211}}
 \end{aligned}$$







ת'ר'ג'ן  
 ס.א. נ.ת.מ.ב. כ.י. י.א.ם.  
 ו.ב.ג.מ. א.ל.ס.ו.ס.ו.  
 ג.כ. 2

$$\angle GML = \angle TGM \quad (8)$$

$$\angle MTG = 90^\circ \quad (9)$$

ג.כ. 5.5.5.11.5.5. ג.כ.  
 9.8.+

$$\triangle GTM \sim \triangle MGL \quad (10)$$

$$\frac{ML}{MG} = \frac{MG}{TG} = \frac{LG}{TM} \quad (11)$$

$$TG \cdot ML = MG^2 \quad (12)$$

$$a \cdot ML = r^2 \quad (13)$$

$$ML = \frac{r^2}{a} \quad (14)$$

$$TE = TG \quad (15)$$

$$TE = \sqrt{r^2 + (a - r)^2} \quad (16)$$





כמ"גטבנטוכ

שאלה 1. סולוור (גלאז) 10.1.1.1  
 מילוי כביש ותשתית.

$$\angle BHI = \angle CIH = 90^\circ$$

(27)



המ"ג לא (ט. יט' כיר)  
 מילוי כביש ותשתית.  
 (80 - כביש)  
 3. מילוי כביש ותשתית.

$$AB \parallel CD \parallel CG$$

(28)



28. מ.

$$HB \parallel CI$$

(29)

מילוי כביש (ט. יט' כיר)  
 מילוי כביש (ט. יט' כיר)  
 מילוי כביש (ט. יט' כיר)

$$ABC \parallel$$

(30)



5. מילוי כביש  
 מילוי כביש  
 90° ~ מילוי ~ 90°

$$\angle BCD \neq 90^\circ$$

(31)

31, 27. מ.

$$HI \parallel CR$$

(32)

32, 29. מ.

$$HBCI \text{ גלאז}$$

(33)

מילוי כביש (ט. יט' כיר)  
 מילוי כביש (ט. יט' כיר)  
 מילוי כביש (ט. יט' כיר)

$$10\text{ מטרים} > 5\text{ מטר}$$

(34)

KLQ, 8, 18, 8, 28  
 מילוי כביש (ט. יט' כיר)

$$nL = \frac{HB + CI}{2}$$

מילוי כביש (ט. יט' כיר)  
 מילוי כביש (ט. יט' כיר)



$$\begin{array}{c} \text{ל'נ'ג} \\ 25 \quad 125 \end{array}$$

$$\text{ולג}$$

$$KL = HB + CI$$

ולג

(36)

לגרס פורם מה שונן  
הממשתמש בפונקציית  
טראנספורמציה

$$\begin{cases} HB = BG \\ CI = CG \end{cases}$$

(37)

ל'

$$17,36 \quad \text{ל'ג} = \text{ל'ג}$$

$$KL = RG + CG$$

(38)

$$70,17,8,16,7,12,0 \quad \text{ל'ג} = \text{ל'ג}$$

$$KL = BC$$

(39)

(1)  $\Rightarrow$  ל'ג ...

לגרס פורם מה שונן  
הממשתמש בפונקציית  
טראנספורמציה  
 $BC = CD$   
ל'ג ...

$$AN + BC = AB + CD$$

(40)

ל'ג

$$AD = BC$$

(41)

$$41,39,26 \quad \text{ל'ג} \cdot$$

$$AD = BC = \frac{2\pi r^2}{a}$$

(42)

$$42,40 \quad \text{ל'ג} \cdot$$

$$P_{ABCD} = \frac{8\pi r^2}{a}$$

(43)

(2)  $\Rightarrow$  ל'ג ...

לגרס פורם מה שונן

$$P_{AB} = 2\pi r$$

(44)



正月七日

$$\text{DPL} > 10 \cdot n$$

ed

ס' ס

45

ליברמן וילס גרא  
glp = -69 wj MGL  
. וילס = glp  
7, 5, 4 125

$a < y$

46

125.218.0

סאנס פיזיון ונוון (47)

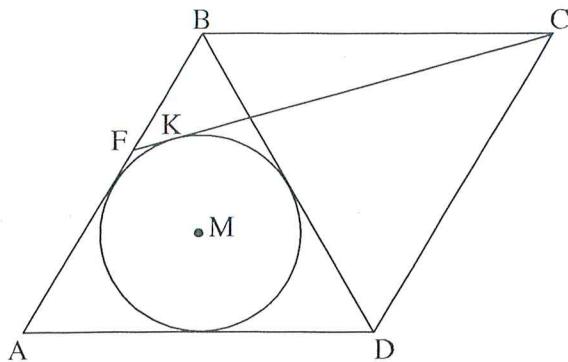
46, 45

19. 1. 1975

$$\cdot \frac{4}{\pi} \sim 16F \sim 75$$

12 Feb.





.5.  $ABCD$  הוא מעוין שאורך צלעו הוא  $a$ .

נתון:  $\angle BAD = 60^\circ$ .

במשולש  $ABD$  חסום מעגל שמרכזו  $M$ .

מן הקודקוד  $C$  העבירו משיק למעגל

שהמשכו חותך את הצלע  $AB$  בנקודה  $F$

והוא משיק למעגל בנקודה  $K$  (ראה ציור).

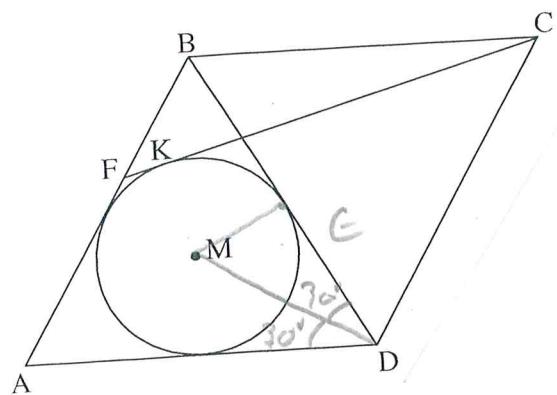
א. הבע באמצעות  $a$  את רדיוס המעגל.

ב. (1) הסבר מדוע הנקודה  $M$  נמצאת על אלכסון המעוין  $AC$ .

(2) חשב את גודל הזווית  $ACF$ .

ג. הבע באמצעות  $a$  את שטח המשולש  $ACF$ .

4. פתרון לתרגיל 5 ו-6:



ל. (5 ו-6) ב- $\triangle ABD$  ו- $\triangle BDC$

$\angle BDA = \angle BDC$ ,  $E \rightarrow$  מרכז, יראן

$MD = 1, ME = 0$

$$\angle BAD = 60^\circ \quad \therefore / 180^\circ$$

$$(5\angle ABD -> 180^\circ - 60^\circ) + \angle DBA = \angle ABD = 60^\circ$$

$$\angle ADM = \angle BDM = 30^\circ \quad \text{לפניהם, } \angle ADB = 120^\circ \quad \text{ולפניהם}$$

$$\angle AED = 15^\circ \quad \angle AED = 90^\circ \quad \text{ולפניהם}$$

לפניהם

$$\angle AED = 90^\circ \quad \text{ולפניהם} \quad MD = 2 \cdot r$$

ולפניהם  $BM = 2r$



במ' = DM = 2r (גזרה שווה)  
 (MD) גזירה גזירה



:BDM עיגול = 180°

$$BD = AD = AB = a$$

$$\angle BMD = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$$

:/ $\delta$

$$\frac{a}{\sin 120^\circ} = \frac{2r}{\sin 30^\circ} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}a}{6}$$

BAD ~ ISMB = 80° AC проекcia (1) . 2

כטבוי?

BAD ~ ISMB ~ 80° AM

כטבוי סימן חסוך באנט

. עיגול ~ 150° 30°

AC проекcia  $\sqrt{3}a$  ~ 100

למידה על פסיקומטי  
ביוואל גבע

הΖΎΜΝΩΤΑ ΛΕΤΟΔΗ ΙΣΗ ΠΑΙΔΑ ΒΗΧΙΩΝ

ΑΛ ΤΗΓΑΦΙΑΡ ΟΛΙΑΙΑ.



: $CDE$  Edreza CE  $\rightarrow$  פונקציית  $(x)$ .

$$\frac{CE}{a} = \sin 60^\circ \Rightarrow CE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

או גז. ח. איזר ז. ג. ג.:

$$MC = CEF + EM = \frac{\sqrt{3}a}{6} + \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$MC = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

$MKC$  בפער  $\angle MKC$  או  $30^\circ$

$$KM = r = \frac{\sqrt{3}a}{6}$$

$\angle KACF = 30^\circ$   $\angle KCF = 60^\circ$   $\angle ACF = 90^\circ$

$$MC = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

$$\sin \angle ACF = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{6}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}a} = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\angle ACF = 14.478^\circ}$$

מבחן על פסיקומטר  
בזיאן גבע ←

הוזמן לעתודה יש פום בחים.

אל תתפסר עלייה.



: ACF lever . d



$\angle ACF = 14.478^\circ$   
 $\angle CAF = 30^\circ$

( $180^\circ - 120^\circ$ )  $\angle AFC = 135.522^\circ$



$$\frac{AF}{\sin 14.478^\circ} = \frac{\sqrt{3}a}{\sin 135.522^\circ}$$



$$AF = 0.618a$$

$$S_{AFC} = \frac{AF \cdot AC \cdot \sin C^\circ}{2} = \boxed{0.267a^2}$$



6. נתונה משפטת הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{2x - a}$ .  $a$  הוא פרמטר המקיים  $-4 < a < 2$ .

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  
 (2) הסבר מדוע לפונקציה  $f(x)$  אין אסימפטוטה מקבילה לציר  $x$ .  
 (3) מצא את מושאות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המקבילות לציר  $x$ .  
 (4) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים?  
 (5) מצא את תחומי הchipיות והשליליות של הפונקציה  $f(x)$ .

- ב. (1) הביע באמצעות  $a$  את שיעורי  $x$  שבעבורם  $f'(x) = 0$  (אם יש כאלה).  
 (2) מצא את הערך של  $a$  שבעבורו  $f'(x) \neq 0$  לכל  $x$  בתחום ההגדרה.

הצב  $1 - a$  במשוואת הפונקציה  $f(x)$  וענה על הסעיפים ג-ד.

- ג. (1) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה)?  
 (2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

7. חשב את  $\int_3^4 \frac{1}{f(x)} dx$ . תוכל להשאיר שורש בתשובה.



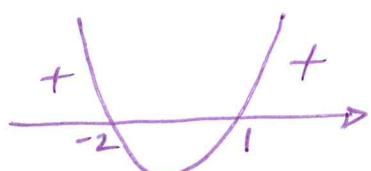
$$-4 < a < 2 \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{2x - a}$$

(k) (1) הדריך כוכב

$$x^2 + x - 2 \geq 0 \quad , \quad 2x - a \neq 0$$

$$(x+2)(x-1) \geq 0 \quad x \neq \frac{a}{2}$$

$$x = -2 \quad x = 1$$



$$x \leq -2, x \geq 1$$

$-2 < \frac{a}{2} < 1$  לכן,  $-4 < a < 2$  נס'ל

בנוסף,  $x \in \mathbb{N}$ .  $x \neq \frac{a}{2}$  נס'ל

בנוסף,  $|x-2| > 0$  נס'ל

בנוסף,  $x \geq 1$  נס'ל

בנוסף,  $x \leq -2$  נס'ל

למידה על פסיקומטיה

בזואל גנוב

הzellנות לעתודה יש פעם בחיים.

אל תתפסר עלייה.



(ה)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  ו-  $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{x^2} dx$

הטענה נכונה.

(2) העתקה של קבוצה

כגון בהוכחה 1(i), אם  $f$  היא פונקציית העתקה  
 אז  $f(A)$  היא קבוצה. יהי  $A \subseteq \mathbb{R}$  קבוצה.  
 $f(A)$  קבוצה.



(3)

נ. 1/ חישוב מינימום

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x-a} = \frac{1}{2}, \quad \boxed{y = \frac{1}{2}, x > 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x-a} = -\frac{1}{2}, \quad \boxed{y = -\frac{1}{2}, x < 0}$$

(4)

נ. 2/ חישוב מינימום

$$\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x-a} = 0 \quad | \cdot 2x-a$$

$$\sqrt{x^2+x-2} = 0 \quad |^2$$

$$x^2+x-2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x = -2 \quad x = 1$$

$$\begin{cases} (-2, 0) \\ (1, 0) \end{cases}$$



הנתקה מינימום ומקסימום

לפנינו מוגדרת פונקציית  $x=0$  כהגדרה.

(5)



כדי ש  $f(x) \leq 0$   
 $f(x) \geq 0$

$$2 \cdot (-3) - a = -6 - a < 0$$

$$2 \cdot 2 - a = 4 - a > 0$$

↓

|          |            |
|----------|------------|
| $x < -2$ | $f(x) < 0$ |
| $x > 1$  | $f(x) > 0$ |



(2) (1)

$$f'(x) = \frac{\frac{(2x+1)(2x-a)}{2\sqrt{x^2+x-2}} - 2\sqrt{x^2+x-2}}{(2x-a)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{(2x+1)(2x-a) - 4(x^2+x-2)}{2\sqrt{x^2+x-2}}}{(2x-a)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{4x^2+2x-2ax-a-4x^2-4x+8}{2(2x-a)^2\sqrt{x^2+x-2}}}{2(2x-a)^2\sqrt{x^2+x-2}}$$

$$f'(x) = \frac{-2ax-2x-a+8}{2(2x-a)^2\sqrt{x^2+x-2}} = 0$$

$$-2ax-2x-a+8=0$$

$$x(2a+2) = 8-a$$

$$x = \frac{8-a}{2a+2}$$



(2)

$$f'(x) \neq 0$$

אנו נזכיר

$$2a + 2 = 0 \quad \text{או} \quad a = -1$$

$$2a = -2$$

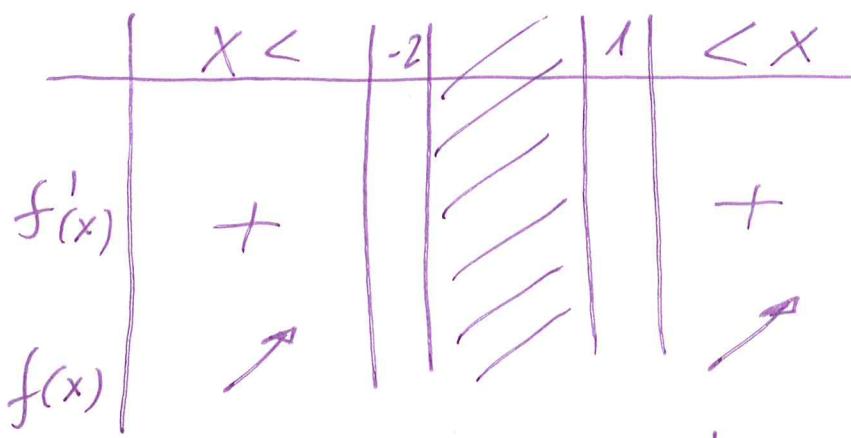
$$\boxed{a = -1}$$

(c)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{2x + 1}$$

$$(1) \quad f'(a) \neq 0 \quad a = -1 \quad \text{כוון}$$

נוכיח  $f'(x) > 0$  בקטע  $x \in (-\infty, -1)$ .



$$f'(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(2x+1)^2 \sqrt{x^2 + x - 2}}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.

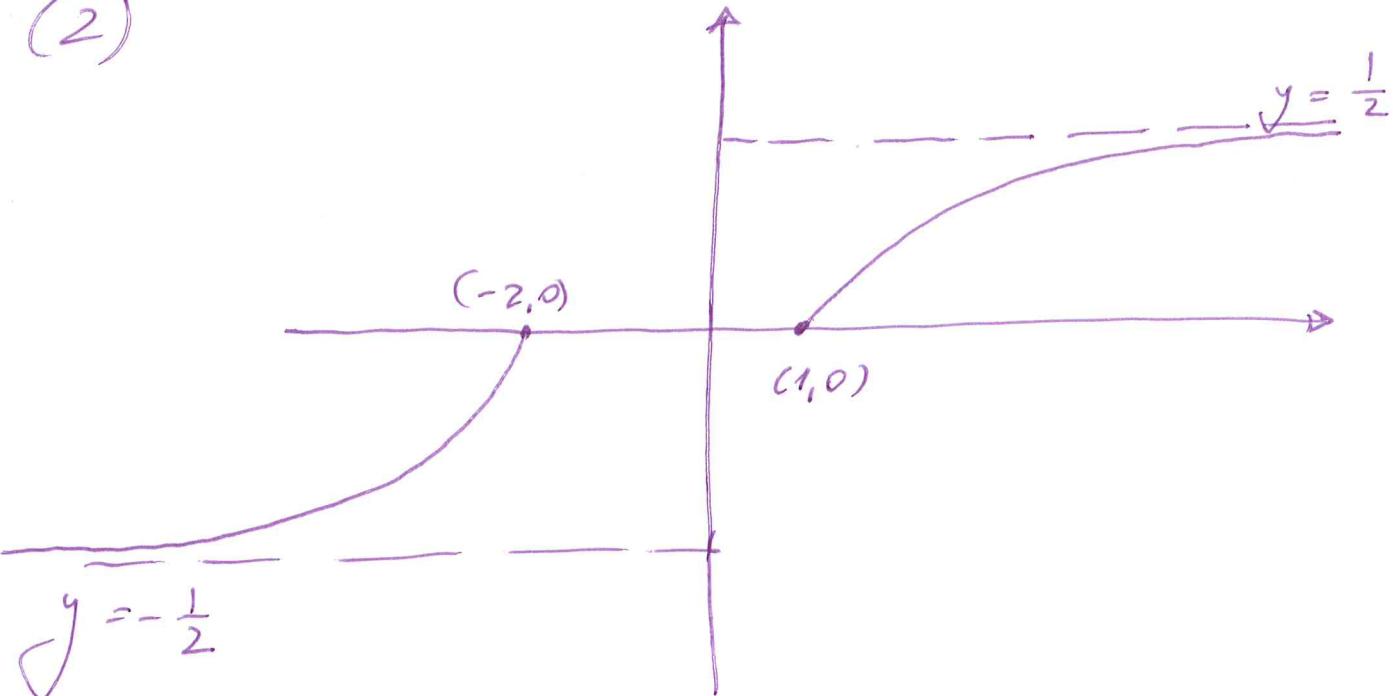
כמידע לך פסיבומטרי  
בזיאק אבע ←

אל תתחפש עלייה.



איך גזיר  $f(x)$  נסugar כריבוב

(2)



③

$$\int_3^4 \frac{1}{f(x)} dx = \int_3^4 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-2}} dx$$

לแกן:

$$u = x^2 + x - 2$$

$$du = (2x+1) dx$$

$$dx = \frac{du}{2x+1}$$



$$\begin{aligned}
 & \int_3^4 \frac{2x+1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{2x+1} = \int_3^4 \frac{2}{2\sqrt{u}} du = \\
 & = 2\sqrt{u} \Big|_3^4 = 2\sqrt{x^2+x-2} \Big|_3^4 = \\
 & = 2\sqrt{4^2+4-2} - 2\sqrt{3^2+3-2} = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{10} = \\
 & = 2\sqrt{2} \cdot 16
 \end{aligned}$$



נתונה הפונקציה  $x \sin^3 x$  המוגדרת בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .  $f(x) = x^3 \sin x$

- א. (1) קבע אם הפונקציה  $f(x)$  היא זוגית או אי-זוגית או לא-זוגית ולא-אי-זוגית. נמק.  
 (2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון.  
 (3) הסבר מדוע הפונקציה  $f(x)$  היא א-ישילilit בתחום הנתון.  
 (4) קבע אם פונקציית הנגזרת,  $(f'(x))'$ , היא זוגית או אי-זוגית או לא-זוגית ולא-אי-זוגית. נמק.

ב. (1) הראה ששיעורי ה- $x$  שעבורם  $f(x) = 0$  מקיימים  $\tan x = -\frac{1}{3}x$

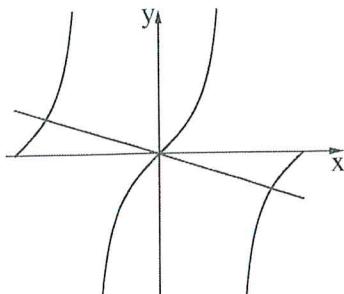
(2) בציור שלפניך מתחברים הגרפים של הפונקציות

$$g(x) = \tan x \quad h(x) = -\frac{1}{3}x$$

בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

היעזר בציור,

וקבע כמה נקודות בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$  מקיימות  $f'(x) = 0$ .



נתון: שיעור ה- $x$  של אחות מנוקדות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  הוא 2.46 בקירוב.

ענה על הטעיפים ג-ד בעבורו התחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

ג. (1) מה הם שיעורי ה- $x$  של כל נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  בתחום? נמק וקבע את סוגן.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום.

ד. (1) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת,  $(f'(x))'$ , בתחום.

(2) כמה נקודות פיתול לכל הפחות יש לפונקציה  $f(x)$  בתחום? נמק.

$\sin(-x) = -\sin(x)$       ב. ערך יazyim : (1) / C

$f(-x) = (-x)^3 \sin(-x) = -x^3 \cdot (-\sin x) = x^3 \sin x = f(x)$

எனவே  $f(x) = x^3$  : இது என்றால்  $f'(x) = 3x^2$

$f'(x) = 3x^2$  என்றால்  $f'(0) = 0$

ஏனென்றால்  $f'(x) = 0$  என்றால் கூடும்.

$0 = x^3 \sin x$  : x மிலக முறை : (2) C

$x^3 = 0$        $\sin(x) = 0$

$x = 0$        $x = 0 + \pi k$

$x = \pi, 0, -\pi$

$(\pi, 0), (0, 0), (-\pi, 0)$





(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^3}$  קמינה?

ר' סעיף 5.1.1.

$$f(x) = 3x^2 \sin(x) + x^3 \cos(x) = x^2(3\sin x + x \cos x)$$

(נ'  $\sin(-x) = -\sin(x)$  ו-  $\cos(-x) = \cos(x)$  ב- 813)

$$f(-x) = (-x)^2(3\sin(-x) + (-x)\cos(-x)) = x^2(-3\sin(x) - x \cos x)$$

$$= -x^2(3\sin x + x \cos x) = -f(x)$$

$f'(x) \in \mathbb{R}$  ו-  $f'(-x) = -f'(x)$  נ' (2) סעיף 5.1.1.

$$f'(x) = x^2(3\sin x + x \cos x) = 0$$

$$x^2 = 0 \quad \text{ר' } 5.1.1 \quad 3\sin x + x \cos x = 0 \quad | :3 \quad | : \cos x$$

$$x = 0$$

$$\tan x + \frac{x}{3} = 0$$

$$\tan(0) = 0 \quad x = 0 \quad \text{ר' } 5.1.1$$

$$\text{ר' } 5.1.1 \quad -\frac{1}{3} \cdot 0 = 0 \quad 1 \text{ זיהוי}$$

$$\boxed{\tan x = -\frac{x}{3}}$$

$$\tan x = -\frac{x}{3} \quad x = 0 \quad \text{ר' } 5.1.1$$

$$x = 2.46$$

ר' 5.1.1

$$x = 0$$

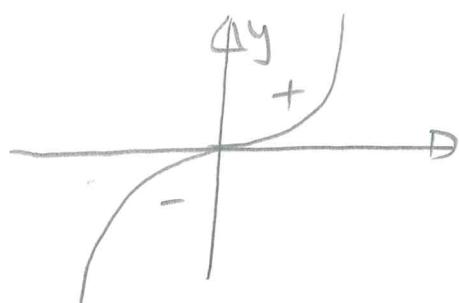
$$x = -2.46$$

בזהב: נזקן ונקור  $f'(x)$  ב- 5.1.1? נ' (2) סעיף 5.1.1.

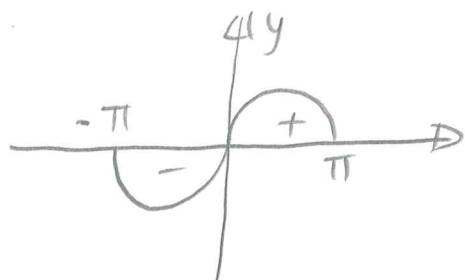
איך ניתן  $x$  מ-  $0 = x$  (ר' 5.1.1)?



כ) (3) על ייצרים פונקציית  $y < x < 0$  כז' ( $x \neq 0$ ) ו' אג'ר  
 אג'ר כז'  $x^3 = y$  חיקר על נסחים חיקריים  
 חמום זה. והוכיח ( $f(x)$  קייר לין גיאומטרית) חיקריים  
 הם חמום  $0 < x < \pi$ . עתה  $x=0, -\pi$  כז'  $\pi/6, \pi/3$   
 לכן נסחיקת הוכיח ( $f(x)$  קייר לין גיאומטרית) חיקריים.  
 סוכך רגע: כז'  $y = x^3$  פונקציית



כ) (4)  $y = \sin x$  פונקציית



על נסחים חיקריים.



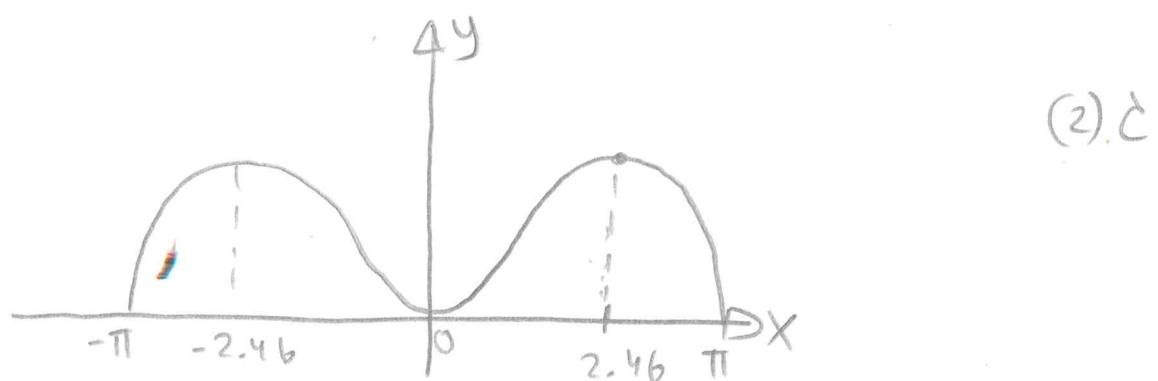
עליך כוכיה בלילה (3, ג'ו) ?  
 $f'(2.46) = -f'(-2.46)$  ? נורא וNEGATIVE ASYMETRY

$$f'(2.46) = 0 \quad ? \quad f'(1.8) /$$

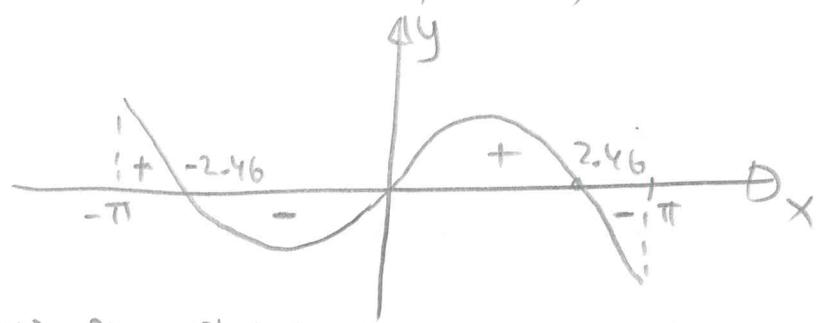
כז, פולען צב:  $\sin(x)$   $|_{[-\pi, 0]} \cup |_{(0, \pi]}$

| $x$     | $-\pi < x < -2.46$   | $-2.46 < x < 0$  | $0 < x < 2.46$      | $2.46 < x < \pi$   |
|---------|----------------------|------------------|---------------------|--------------------|
| $f'(x)$ | +                    | 0                | -                   | 0                  |
| $f(x)$  | min<br>$\sin(-2.46)$ | max<br>$\sin(0)$ | min<br>$\sin(2.46)$ | max<br>$\sin(\pi)$ |

分明:  $\pi = x$  שורשיהם של  $\sin(x) = 0$   
 $x = -\pi, x = 0, x = 2\pi, x = -2\pi$



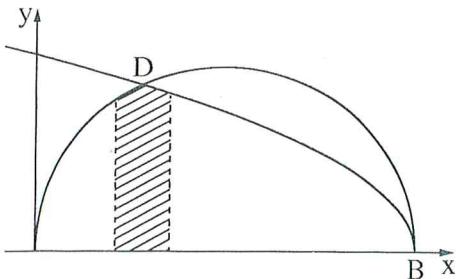
3 (1) א' ב' יחוון היכר את  $f(x) = \sin(x)$  כנוכחות  
 נסגרה  $f'(x) = \cos(x)$  רכונה כה:



2 (2) נסגרה בכתוב בכתום נחוג אונדיזראט 2 (ג'ו) בפנאי גפהו.



בציר שלפניך מתווררים הגרפים של הפונקציות  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 7x}$  ו-  $g(x) = \sqrt{14 - 2x}$ . גраф הפונקציה  $f(x)$  חותך את ציר ה-  $x$  בראשית הצירים ובנקודה  $B$ , ואת גраф הפונקציה  $g(x)$  הוא חותך בנקודות  $B$  ו-  $D$ , כמפורט בציור.



א. (1) מצא את תחומי ההגדרה של הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$ .

(2) מצא את שיעורי ה-  $x$  של הנקודות  $B$  ו-  $D$ .

$a$  הוא פרמטר המקיים  $1 \leq a \leq 2$ .

השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$ , על ידי האנכים  $x = a$  ו-  $x = a + 1$  ועל ידי ציר ה-  $x$ , מסתובב סביב ציר ה-  $x$ .

ב. (1) חשב את  $a$  שבבעורו נפח גוף הסיבוב המתתקבל הוא המקסימלי.

(2) מצא את  $a$  שבבעורו נפח גוף הסיבוב המתתקבל הוא המינימלי.

אם צריך, השאר בתשובותך שתי ספרות אחרי הנקודה העשורתית.

$$-x^2 + 7x \geq 0$$

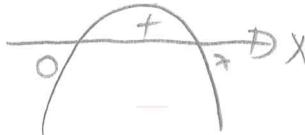
$$-x^2 + 7x = 0$$

$$x(7-x) = 0$$

$$x=0 \quad x=7$$

$$[0 \leq x \leq 7]$$

$$14 - 2x \geq 0$$



:  $f(x) \cap g(x) \text{ (1) } k$

:  $g(x) \cap h(x) \text{ (2) }$

$$14 \geq 2x$$

$$7 \geq x$$

$$\sqrt{14-2x} = \sqrt{-x^2+7x} \quad |(\cdot)^2 \quad (2) \text{ (1)}$$

$$14-2x = -x^2+7x$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

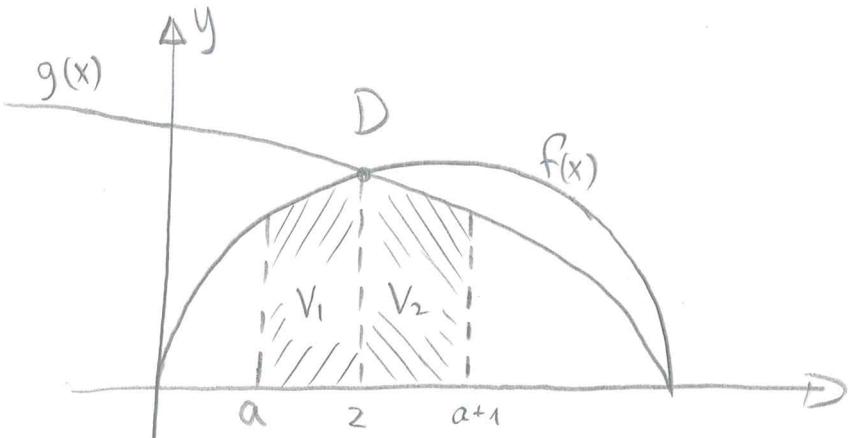
$$(x-7)(x-2) = 0$$

$$x_1 = 7$$

$$x_2 = 2$$

\* 2.10.3 רענגן פסימני גיאומטרי (ללא קרייזט-יאן) בפערם כפערם.





ב) כשלר רלווין נר חסוך 8'. א. סולר נסכל  
 (1)  $f(x) = 7x + 14$  נסכל נסכל נסכל (חישוב אמצעי)  
 (2)  $g(x) = \sqrt{-x^2 + 7x}$  נסכל נסכל נסכל

$$V_1 = \pi \int_a^2 (f(x))^2 dx = \pi \int_a^2 (\sqrt{-x^2 + 7x})^2 dx = \pi \int_a^2 (-x^2 + 7x) dx$$

$$= \pi \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} \right]_a^2 = \pi \left[ \left( -\frac{2^3}{3} + \frac{7 \cdot 2^2}{2} \right) - \left( -\frac{a^3}{3} + \frac{7a^2}{2} \right) \right]$$

$$= \pi \left[ 14 - \frac{8}{3} + \frac{a^3}{3} - \frac{7a^2}{2} \right] = \pi \left[ \frac{34}{3} + \frac{a^3}{3} - \frac{7a^2}{2} \right]$$

$$V_2 = \pi \int_2^{a+1} (g(x))^2 dx = \pi \int_2^{a+1} (\sqrt{14-2x})^2 dx = \pi \int_2^{a+1} (14-2x) dx =$$

$$= \pi \left[ 14x - \frac{2x^2}{2} \right]_2^{a+1} = \pi \left[ (14(a+1) - (a+1)^2) - (14 \cdot 2 - 2^2) \right]$$

$$= \pi \left[ (a+1)(14 - (a+1)) - 24 \right] = \pi \left[ (a+1)(13-a) - 24 \right]$$



$$V_2 = \pi \left[ 13a - a^2 + 13 - a - 24 \right] = \pi \left[ -a^2 + 12a - 11 \right]$$

$$(f_1) V = V_1 + V_2 = \pi \left[ \frac{34}{3} + \frac{a^3}{3} - \frac{3a^2}{2} \right] + \pi \left[ -a^2 + 12a - 11 \right]$$

$$(f_2) V = \pi \left[ \frac{34}{3} + \frac{a^3}{3} - \frac{3a^2}{2} - a^2 + 12a - 11 \right] =$$

$$(f_3) V = \pi \left[ \frac{a^3}{3} - \frac{9a^2}{2} + 12a + \frac{1}{3} \right]$$

כבר פירשו גורם כל אחד בודק

$1 \leq a \leq 2$  אז  $a$  מושך ו'

$$V'(a) = \pi \left[ \frac{3a^2}{3} - \frac{9 \cdot 2a}{2} + 12 \right] =$$

$$V'(a) = \pi \left[ a^2 - 9a + 12 \right] = 0$$

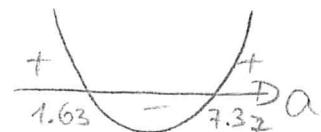
$$a_1 = \frac{9 + \sqrt{33}}{2} \approx 7.37 \quad \text{ו} \quad a_2 = \frac{9 - \sqrt{33}}{2} \approx 1.63$$

ר. נס  $\sqrt{2}$  נס  $\sqrt{33}$

7.37 נס

|         |     |                |                |   |
|---------|-----|----------------|----------------|---|
| $a$     | 1   | $1 < a < 1.63$ | $1.63 < a < 2$ |   |
| $V'(a)$ | +   | 0              | -              |   |
| $V(a)$  | min | ↗              | max ↘          | ↗ |

$a^2 - 9a + 12$  נס  $1.63$  ו'  $7.37$  נס  
 $V(a)$  מינימום מינימום מינימום



$$V(1) = \frac{49}{6}\pi$$

$$V(1.63) = 9.38\pi$$

$$V(2) = 9\pi$$

ונס  $a=1.63$

ונס  $a=1$

ונס  $a=7.37$

