תכנית לימודים - מתמטיקה 5 יח"ל

תוכן

רציונל

אוכלוסיית יעד

המסלול המדעי מיועד לתלמידים אשר מסוגלים לפתח חשיבה מתמטית-מדעית, מעוניינים להשקיע בלימודים למען עתידם, ורואים עצמם ממשיכים ללימודים אקדמיים במקצועות עתירי מתמטיקה (מדעים, הנדסה) או עוסקים במקצועות תחרותיים הדורשים הצטיינות יתרה במתמטיקה (רפואה, עריכת דין, ארכיטקטורה, וטרינריה ועוד).

מטרות-העל של התכנית

1. קידום יכולות החשיבה והעמקת הידע של התלמידים כדי שיוכלו להצליח בחייהם כאזרחים בעולם הטכנולוגי שאנו חיים בו. הכרת תפקידה של המתמטיקה בחיי היום-יום: במדע, בטכנולוגיה, בפרסום וצרכנות, במחשוב ובכלכלת הבית.
2. הענקת כלים שיאפשרו לתלמידים להצליח בלימודים אקדמיים במקצועות עתירי מתמטיקה.
3. הנחלת התפיסה שהמתמטיקה היא חלק מהתרבות האנושית, שפה אוניברסלית שבאמצעותה מתארים, מפשטים ומפתחים תובנות חדשות לגבי תהליכים מדעיים, טכנולוגיים, כלכליים וחברתיים.
4. הענקת כלים שישפרו את יכולת האבחנה והשיפוט של התלמידים באשר לאיכות המידע ולפרשנויות הנלוות לו.
5. השאיפה היא שהתכנית תסייע במיוחד בפיתוח המיומנויות האלה:
   - יכולת התמודדות עם שאלות סבוכות על ידי שימוש בכלים ובשפה המתמטית לניתוחן ופתרונן.
   - חשיבה מתמטית-לוגית הכוללת ביקורתיות ודיוק לצד בקרה על תהליך פתרון הבעיות.
   - יכולת לבחור את האמצעים הטכנולוגיים המתאימים לפתרון בעיות מתמטיות ולעשות בהם שימוש.
   - הקניית היכולות הטכניות הדרושות להבנה ולהטמעה של החומר הנלמד.

דגשים

נושאי הלימוד בתכנית זו, כפי שיפורט בהמשך, יהיו דומים לנושאים שנלמדו בעבר (במסלול 5 יח"ל) והדגשים יהיו כדלקמן:

1. פיתוח חשיבה מתמטית:
   - חשיבה לוגית, מדויקת, מדעית וביקורתית
   - חשיבה אלגוריתמית
   - הבנת מושגי בסיס כגון הגדרה, טענה, משפט, משפט הפוך, הוכחה (להבדיל מהסבר או דוגמה).
   - הוכחות מסוגים שונים במגוון תחומי תוכן: הוכחה ישירה, הוכחה קונסטרוקטיבית, הוכחה אינדוקטיבית, הוכחה בדרך השלילה.[1]

[1] ראו דיון במעמד ההוכחה בתכנית בנספח 2.

- מושג ההיפוך במגוון נושאים מתמטיים (פעולה הפוכה, פונקציה הפוכה, נגזרת-פונקציה קדומה).
- שימוש בדוגמאות, אי-דוגמאות ודוגמאות נגדיות.
- ריבוי ייצוגים ומעבר ביניהם.

2. פיתוח יכולות טכניות בסיסיות בתחומי האנליזה, האלגברה והגאומטריה בדגש על פיתוח טכניקה בתוך הקֶשר.
3. היכרות בסיסית ושימוש עם טכנולוגיות עזר לפתרון בעיות מתמטיות.
4. פיתוח אוריינות מתמטית: לימוד הרלוונטיות של המתמטיקה לתחומים שונים בהקשר המדעי, הטכנולוגי וההיסטורי. האוריינות כוללת מידול (יצירת מודלים) של תופעות בתחומי מדע שונים, כגון פיזיקה, ביולוגיה, רפואה, תמונה ממוחשבת ומדעי החברה, וכן הבנת התוצאות המתמטיות של המודל בהקשר הנתון (תוך הטמעת החשיבה הביקורתית בהקשר זה). האוריינות כוללת גם את היכולת להבין את משמעות התוצאות המתמטיות ללא קשר למודלים (למשל, הבנת ההשלכות של משפט בגאומטריה על מקרים פרטיים).
5. פיתוח קישוריות בין ענפי המתמטיקה השונים ובין תחומי מדע שונים דרך המתמטיקה.
6. פיתוח יצירתיות: יצירת מודלים, מציאת פתרונות שונים לאותה בעיה, העלאת השערות, יצירת הוכחות שונות לאותה טענה.
7. פיתוח מיומנויות של תקשורת מתמטית: קריאה וכתיבה של ביקורת על טיעון, הגנה על טיעון (ארגומנטציה) וכמובן תקשורת בע"פ תוך ניהול שיח מתמטי.
8. פיתוח מיומנויות ללימוד עצמי תוך תרגול ברמות קושי עולות ושימוש באמצעים טכנולוגיים.

התכנים בפרקי הלימוד

התכנים המתמטיים בתכנית החדשה מבוססים על הנושאים הנלמדים כיום במסלול 5 יח"ל. לתכנים אלה יתווספו דגשים על עקרונות מתמטיים, שילוב אמצעים טכנולוגיים בהוראה ובלמידה והוספת מידול ואוריינות מתמטית; בכל הנושאים הנלמדים ישולבו בעיות מחיי היום-יום. כחלק מהדגש על האוריינות המתמטית מוצע להוסיף נושאים בסטטיסטיקה. כדי לאפשר העמקה ועמידה במסגרת השעות המוקצבת, מוצע לגרוע פרקים מסוימים הכלולים היום בגאומטריית המישור, את הפרק המיוחד לבעיות מילוליות וכן חלקים מהתכנים הנלמדים במספרים מרוכבים. עוד מוצע לבחור באופן מובנה יותר נושאים בהנדסה אנליטית, להפחית את רמת המורכבות בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ולהשאיר בעינה את רמת המורכבות בזהויות טריגונומטריות.

התכנים המתמטיים כוללים שלושה תחומים עיקריים: אנליזה, גאומטריה וסטטיסטיקה והסתברות.

בחלק הראשון של מסמך זה מפורטים הנושאים שיילמדו בכל אחד משלושת התחומים על פי סדר למידה פנימי מובנה (כלומר סדר ותכנים בכל תחום בנפרד). עבור הנושאים שיילמדו בכיתה י (סדרות, מבוא לטריגונומטריה, אנליזה וגאומטריית המישור) התכנית מגובשת למדי ומוגשת ברמת פירוט המיועדת לכותבי ספרי הלימוד (ראו חלק II של המסמך). לעומת זאת **רשימת הנושאים וסדר הלמידה לכיתות**

י"א וי"ב עדיין לא גובשו, ונראה שיחולו בהם שינויים משמעותיים בשל מגבלת שעות הלימוד המוקצבות.

בסוף החלק הראשון של המסמך מצורפת טבלה המפרטת את חלוקת התכנים על פי שנות הלימוד ושעות הלימוד. המבנה משלב למידה של שני נושאים במקביל כדי להדגיש את הקישוריות בין הנושאים הנלמדים ולהטמיע את עקרון הספירליות – גם כאן תחת ההסתייגות כי התכנית לכיתות י"א וי"ב עדיין בתהליך התגבשות.

חלק ראשון – תכנית הלימוד כיתות י-י"ב (ראשי פרקים)

אנליזה

פרק האנליזה ייפתח בחזרה על מושג הפונקציה מחטיבת הביניים ובהבנה שאפשר להגדיר פונקציות בדידות ורציפות. נתחיל בחקירת סדרות, פונקציות בדידות, ונמשיך בחקירת פונקציות רציפות. סדר חדש זה מאפשר טיפול שיטתי יותר בנושא הגבול והעמקת הידע בנושא חזקות. נמשיך בלימוד ארבע קבוצות של פונקציות: פולינומיאליות, שורש ורציונליות, טריגונומטריות, מעריכיות ולוגריתמיות. בכל הנושאים מוצע לשלב ככל שניתן בעיות יישומיות, טכנולוגיה (למשל עבור הצגה גרפית), פעולות על פונקציות והוכחות.

סדרות – כיתה י'

פרק זה עוסק בסדרות מספריות עם חוקיות מוגדרת.

דגשים

1. פיתוח מושגי יסוד מתמטיים: פונקציות של משתנה בדיד ותכונותיהן (פונקציות עולות, יורדות, חיוביות/שליליות/עם סימן מתחלף וכד').
2. דיון במושג ההוכחה: טענות, דוגמאות, הוכחות והפרכת טענה בעזרת דוגמה נגדית. שימוש באלגברה להוכחות.
3. דיון בנושא הגבול
4. הצגת נושא הסדרות ככלי שימושי לתיאור בעיות מהחיים.
5. פיתוח מיומנויות מתמטיות: שימוש בכללי חזקות, אי-שוויון, ניתוח תכונות של סדרות חשבוניות/ הנדסיות/ כלליות.

בכיתה י יילמדו בעיקר (פרט למבוא) סדרות חשבוניות והנדסיות, בעוד שנושא הסדרות הכלליות יילמד (בצמצום) כחלק מפרק האינדוקציה בכיתה י"א.

תכנים

1. מבוא לסדרות כלליות: הפרק יעסוק רק בסדרות מספריות עם חוקיות. סדרות יוצגו מחד כפונקציות המוגדרות על משתנה בדיד, פונקציות לפי מקום האיבר (האינדקס); מאידך, סדרות יוגדרו גם על ידי כלל נסיגה המתאר איך איבר בסדרה משתנה על פי איברים הקודמים לו בסדרה (עם האינדקס-המספור). סדרות תוצגנה תוך שימוש ברב-ייצוג: ייצוג מילולי של סדרות, ייצוג סימבולי על ידי נוסחה לפי מקום או נוסחת נסיגה, ייצוג גרפי וייצוג על ידי טבלת ערכים. הסדרה יכולה להיות עולה, יורדת, מחזורית או אף אחת מאלו. היא יכולה להיות חיובית/ שלילית או עם סימן מתחלף. קצב הגידול או הדעיכה של הסדרה מעניין בשימושים רבים.
2. הסדרה החשבונית: הגדרה לפי מקום (כפונקציה) והגדרה לפי נוסחת נסיגה. מעבר מכלל לפי מקום לכלל נסיגה ולהיפך. כתיבה פורמלית של איבר כללי כפונקציה של מקום לדוגמה $a(n)=a_n=3-2n$.
הוכחת הנוסחה של סדרת הסכומים החלקיים (בדרכים שונות). הצגה גרפית של הסדרה כנקודות על

גרף של פונקציה לינארית. הצגה גרפית של סדרת הסכומים החלקיים של סדרה חשבונית כנקודות על גרף של פונקציה ריבועית.

3. הסדרה ההנדסית: הגדרה לפי מקום (כפונקציה) וגם הגדרה לפי נוסחת נסיגה. מעבר מכלל לפי מקום לכלל נסיגה ולהיפך. הרחבה של נושא החזקות: חוקי החזקות. חזקה עם מעריך שלם. חזקות עם מעריך שלילי. ייצוג גרפי של סדרות הנדסיות מסוגים שונים (עולה, יורדת, סימנים מתחלפים). אפיון סדרת הסכומים החלקיים. סכום של אינסוף איברים כאשר הסכום ההנדסי מתכנס תוך דיון בנושא הגבול. בפרק זה ישולבו בעיות יישומיות כגון הצגת ספירה בינארית, ריבית בנקאית ובעיות גדילה ודעיכה דיסקרטית של אוכלוסיות. שימוש במחשבונים, באקסל ובאמצעים טכנולוגיים להדגמת התכנסות הסדרה וסיכומה.

אינדוקציה – כיתה י"א

דגשים

האינדוקציה כשיטת הוכחה במתמטיקה, פיתוח חשיבה אינדוקטיבית מן הפרט אל הכלל. אינדוקציה וחישוב רקורסיבי - קישור לתִכנות ואלגוריתמים. הוכחה באינדוקציה לעומת טעויות בהסקה לפי מספר דוגמאות. יודגש כי יש בעיות פתוחות ועכשוויות שלא תמיד ניתן לפתור בצורה אנליטית. למשל, לא תמיד ניתן למצוא את הנוסחה לפי מקום סדרה המוגדרת על ידי כלל נסיגה, אך ניתן לחקור את תכונותיה. למשל, לקבל עבור סדרה חסמים או לחקור אותה באופן נומרי על המחשב, אחד מתחומי העיסוק במחקר המתמטי כיום.

תכנים

- שיטת ההוכחה באינדוקציה ודוגמאות פשוטות להדגמתה.
- סדרות כלליות המוגדרות לפי מקום ולפי נוסחת נסיגה, לא חשבוניות ולא הנדסיות. מימוש מעבר דו-כיווני בסדרות חשבוניות והנדסיות; לעומת זאת, הצגת הבעייתיות של מעבר מנוסחת נסיגה לנוסחה לפי מקום במקרה הכללי בלי לימוד טכניקות למציאת נוסחה לפי מקום כשנתונה נוסחת נסיגה. שימוש באינדוקציה להוכחת השערות לגבי נוסחאות לפי מקום.
- פתרון בעיות (למשל ממדעי המחשב) בעזרת אינדוקציה כגון מגדלי הנוי, לחיצות ידיים וכד'.
- רקורסיה ואינדוקציה – מה הקשר?
- שימוש בכלי האינדוקציה בנושאי לימוד נוספים (גאומטריה, הסתברות וכד').

מבוא להנדסה אנליטית – כיתה י

דגשים

חזרה על נושאי הפונקציה הלינארית והריבועית שנלמדו בחטה"ב והעמקה בהם, הכרת כלים אנליטיים שישמשו בהמשך בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, חיזוק הטכניקה האלגברית, היכרות עם המעגל כהכנה להוראת טריגונומטריה. קישוריות בין אלגברה, גאומטריה ופונקציות.

תכנים

1. מבוא היסטורי על אודות מקורות ההנדסה האנליטית ויישומיה.
2. חזרה והרחבה על הישר והפרבולה תוך קישור למושג הפונקציה וליישומיה.
3. משוואת הישר והפקת מידע גאומטרי ממנה, חיתוך של מספר עקומים וקישור למערכת משוואות.
4. אמצע קטע, ניצבות, נוסחת המרחק בין נקודות.
5. משוואת מעגל קנוני (שמרכזו בראשית הצירים) לצורך הוראת הטריגונומטריה.
6. משוואת מעגל כללית, הזזת המעגל הקנוני.
7. בעיות אורייניות (כמו בעיות תנועה) ופתרונן בעזרת הנדסה אנליטית.

מבוא לאנליזה של פונקציות – כיתה י

דגשים

העמקת ההבנה של מושג הפונקציה ופיתוח "החוש לפונקציות" - זיהוי וניתוח פונקציות באופן איכותני. במסגרת המבוא נחזור על הפונקציות הלינאריות והריבועיות שנלמדו בחטה"ב בהקשרים שונים, נכיר משפחות של פונקציות נוספות ברמה הבסיסית על תכונותיהן הייחודיות (בעיקר מבחינת הגרף) ונפגוש פעולות שונות על פונקציות. הרחבת מאגר הפונקציות והפעולות הנעשות עליהן ירחיב את אפשרויות השיח המתמטי על מושג הפונקציה ויניח תשתית לבניית מושגים באנליזה.

תכנים

1. חזרה על הפונקציה הקווית והפונקציה הריבועית והרחבתן לפונקציות פולינומיאליות.
2. פתרון משוואות ואי-שוויון באופן גרפי ואלגברי (בהיבט הפונקציות).
3. הצגת פונקציות נוספות באופן גרפי ואנליטי וחקירת תכונותיהן : פונקציית הערך המוחלט, פונקציות חזקה, פונקציות פולינומיאליות שמתקבלות ממכפלת גורמים לינאריים, פונקציית השורש , הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ ו- $f(x)=\frac{1}{x^2}$.
4. פעולות על פונקציות והשפעתן על הגרף והביטוי הסימבולי (שיקוף לציר ה-x ולציר ה-y, סכום והפרש, מכפלה ומנה, הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$, פונקציה הפוכה, הרכבת פונקציות, הזזה ומתיחה).
5. **חזרה וחיזוק** הטכניקה האלגברית תוך פתרון בעיות בהקשר, משימות אורייניות כגון בעיות תנועה והספק, שאלות בהנדסה אנליטית, סדרות או שאלות שהדגש בהן הוא על מושג הפונקציה ותכונותיה.

חשבון דיפרנציאלי – כיתות י-י"ב

דגשים

בנוסף לפיתוח הכישורים הטכניים הקשורים בניתוח פונקציות ומציאת הנגזרת שלהן, בפרק זה יינתן ביטוי לשילוב ייצוגים שונים לפונקציות ונגזרותיהן (גרפי, סימבולי, מספרי ומילולי), לשימוש בטכנולוגיה לחקירת ייצוגים אלה ולהטמעת בעיות אורייניות בהקשר היסטורי ועכשווי בעיקר באמצעות דוגמאות.

תכנים

חשבון דיפרנציאלי – כיתה י

בכיתה י יונח המסד לחשבון הדיפרנציאלי לצד היכרות עם המושגים באופן אינטואיטיבי ובניית ההגדרות וההוכחות באופן פורמלי. התלמידים יתוודעו לפונקציות הפולינומיאליות, ויכירו לראשונה את פונקציות השורש ואת הפונקציות הרציונליות הפשוטות. בכיתה י"א יעמיקו בנושאים אלה ויחקרו את הפונקציות הרציונליות, שורש והפונקציות הטריגונומטריות.

1. פיתוח מושג הנגזרת: קצב שינוי אחיד או משתנה, מדרגות ככלי לניתוח גרף הפונקציה, גרף השתנות הפונקציה ולבסוף הגדרת הנגזרת בנקודה, תוך הצגת ההקשר הפיזיקלי והפירוש הגאומטרי של הנגזרת. שימוש בתוכנה דינאמית להדגמה וחקירה.
2. נגזרת ככלי לניתוח גרף הפונקציה עבור פונקציות פולינומיאליות ויישומיה.
3. הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת ולהיפך בהיבט איכותני, תוך הגבלת הדיון לפונקציות "חלקות" (גזירות ברציפות).
4. במהלך הלימוד ישולב באופן רציף הסיפור ההיסטורי של האנליזה: הנגזרת כמהירות הרגעית מגרף המקום כפונקציה של הזמן, הנגזרת כתאוצה הרגעית מגרף המהירות. יודגש כי האנליזה מהווה כלי למידול ולפתרון בעיות בפיזיקה וייעשה שימוש בדוגמאות מפורטות (שיכללו הכוונה מלאה בנושא המידול).
5. נגזרות של סכום, הפרש, מכפלה, מנה, פונקציה מורכבת של כל הפונקציות. יושם דגש על הוכחת נוסחאות אלו על פי הגדרת הנגזרת, על הסבר איכותני שלהן בגרף ועל יישומן בגזירת פולינומים והקשר המתבקש עם חוקי החזקה.
6. פונקציות רציונליות מהצורה $\frac{1}{f(x)}$ ומציאת אסימפטוטות על ידי חישוב אינטואיטיבי של גבול.
7. פונקציית השורש הריבועי, ניתוחה, הצגתה כפונקציה הפוכה לפונקציה ריבועית תוך כדי כך הדגמת הקשר הגרפי בין הצגת הפרבולה ושורש בעזרת שיקוף ביחס לישר $y=x$ והקשר בין הנגזרות של פונקציות הפוכות.
8. חקירות בסיסיות של פונקציית מנה.
9. בעיות שיש בהן צורך במציאת שיפוע משיק או במציאת משוואת משיק לגרף בנקודה שעל גרף הפונקציה.
10. בעיות קיצון שימושיות בתחום פתוח ובתחום סגור.
11. לאור הבנת הצורך בחקירת פונקציות כפתרון לבעיות שימושיות, חקירת פונקציות הכוללת : תחום הגדרת הפונקציה, נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי עלייה וירידה, זוגיות ואי-זוגיות, מחזוריות, אסימפטוטות מקבילות לצירים. המשמעות האלגברית והגרפית של נקודות חיתוך של פונקציות, של $f(x) > g(x)$, $f(x) – g(x)$ וכד'. תרגול וקישור לפתרון מערכת משוואות ממעלה שנייה לכל היותר, למשוואות עם שני משתנים ולמשוואות הנפתרות על ידי הצגה (כמו משוואה דו-ריבועית).

חשבון דיפרנציאלי – כיתות י"א ו י"ב

1. משמעות הנגזרת שנייה. קעירות ($\cup$) וקמירות ($\cap$). נקודות פיתול. יושם דגש על הקשר בין הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$.
2. מעבר לאנליזה של פונקציות רציונליות (כולל תחום הגדרה שאינו רציף) ומציאת אסימפטוטות על ידי חישוב אינטואיטיבי של גבול. תרגול וניתוח משוואות אי-רציונליות (רק ברמה הנדרשת לצורך חקירת פונקציות). אי-שוויון רציונלי ללא פרמטרים – אי-שוויון שניתן להגיע ממנו לאי-שוויון מהצורה $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ כאשר f(x) או g(x) הם פולינומים ממעלה שנייה לכל היותר.
3. חזקות עם מעריך שבור כפונקציה הפוכה לפונקציית החזקה ושימושיהן בהרכבת פונקציות. הוכחת חוקי החזקות השונים (כולל הוכחות פשוטות באינדוקציה) וקישורן עם חוקי הנגזרת.
4. פתרון בעיות שיש בהן צורך במציאת שיפוע משיק או מציאת משוואת משיק לגרף בנקודה שעל גרף הפונקציה (העמקה והרחבה של מה שנלמד בכיתה י).
5. בעיות קיצון שימושיות בתחום פתוח ובתחום סגור – העמקה והרחבה של התוכן נלמד בכיתה י (כל סוגי הפונקציות שנלמדו, כולל בעיות נפח, שטח פנים ומעטפת של גופים פשוטים: קובייה, תיבה, מנסרה ישרה שבסיסה מצולע כלשהו, גליל ישר וחרוט ישר; כולל בעיות תנועה, כלכלה).
6. סיכום הנושא של חקירת פונקציה וסרטוט סקיצה של גרף הפונקציה. החקירה תכלול: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון (מקומי ומוחלט), נקודות פיתול, תחומי קמירות וקעירות, התנהגות בסביבת נקודת אי-הגדרה, אסימפטוטות מקבילות לצירים (בכל סוגי הפונקציות).

חשבון אינטגרלי – כיתות י"א וי"ב

דגשים

הבניית המושג הצטברות של פונקציות רציפות חיוביות ולא חיוביות באמצעות דוגמאות שימושיות וקישור מושג האינטגרל למושג הנגזרת.

תכנים

1. פיתוח מושג האינטגרל: הצטברות – המקרה הבדיד (קישור לסכום סדרות), קירוב, הצטברות – המקרה הרציף ולבסוף הגדרת פונקציית ההצטברות
2. המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי – פעולת ההצטברות כפעולה ההופכית לגזירה. מושג פונקציה קדומה. הקשר בין גרף הפונקציה, גרף הנגזרת וגרף האינטגרל.
3. מציאת הפונקציה הקדומה עבור פונקציות פשוטות: אינטגרלים של פונקציות פולינום, פונקציות טריגונומטריות (כולל שימוש בזהויות), אינטגרל של סכום פונקציות ושל כפל פונקציה בקבוע, אינטגרל של פונקציה מורכבת כאשר הפונקציה הפנימית היא לינארית.
4. יוצגו בעיות שימושיות שיש בהן צורך בחישוב שטחים או קצב הצטברות (למשל, של מים בברֵכה). פרק זה יכלול חישוב שטח בין גרף הפונקציה לציר x (הפונקציה יכולה להיות חיובית, שלילית או לשנות סימן), חישוב שטח בין גרפים של שתי פונקציות וחישוב שטחים מורכבים. נפח גופי סיבוב סביב ציר. בעיות ערך קיצון שיש בהן אינטגרל (מכל הסוגים). מבחינה טכנית יידרשו רק אינטגרלים של פונקציות אלמנטריות. יושם דגש על הבנה ללא מורכבות מיותרת.

פונקציות טריגונומטריות – כיתות י-י"ב

מבוא לפונקציות טריגונומטריות – כיתה י

תכנים

- הגדרה וגזירת תכונותיהן של הפונקציות הטריגונומטריות מתוך הגדרותיהן על מעגל היחידה ואפיון הפונקציות הטריגונומטריות כפונקציות מחזוריות.
- הצגת ייצוגים שונים של הפונקציות הטריגונומטריות על מעגל היחידה כגרף של פונקציה, כיחסים בין צלעות במשולש ישר זווית.
- הכרת תכונות הסימטריה של הפונקציות הטריגונומטריות.
- היכרות עם משוואות וזהויות טריגונומטריות בסיסיות; קישור ודגש על ההצגה הגרפית של המשוואות בייצוגים השונים וגזירת תכונות איכותניות של הפתרונות מתוכן.
- שימוש בדמיון משולשים להסקה על היחסים במשולש הטריגונומטרי ויישומים פשוטים של דמיון ושל הפונקציות הטריגונומטריות בגאומטריה.

שימושי הפונקציות הטריגונומטריות – כיתות י"א וי"ב

פתרון בעיות בגאומטריית המישור באמצעות פונקציות טריגונומטריות

1. שימוש בבעיות שניתן לעשות להן רדוקציה למשולשים ישרי זווית, כולל נוסחאות לחישוב שטח משולש ושטח מרובע.
2. משפט הסינוסים ומשפט הקוסינוסים, פתרון בעיות במשולשים כלליים.
3. יישומים טריגונומטריים במישור.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות – כיתה י"א

1. הנגזרות של הפונקציות הטריגונומטריות ושימושיהן (מציאת תכונות גרפיות, משוואות משיקים, פתרון בעיות ערך קיצון בכלל ופתרון בעיות קיצון מחיי היום-יום). דיון בנושא רדיאנים ומעלות : הקשר בין הפונקציות $\sin(\alpha^{\circ})$ ו- $\sin(\alpha_{rad})$.
2. הדגמת הפונקציות הטריגונומטריות כפתרון משוואות דיפרנציאליות דמויות משוואת גלים. שימוש בתכונה זו של הפונקציות הטריגונומטריות כדי להציג כפתרון לבעיות מידול מתחום הפיזיקה ($m\ddot{x}(t) = -kx(t)$ תנועה הרמונית פשוטה במקרה החד-ממדי) וכיו"ב. בדומה לקינמטיקה שנלמדה בכיתה י', הדגש יהיה על התגלית שהפונקציות הטריגונומטריות מקיימות את המשוואות הדיפרנציאליות האמורות, ולא על האופן הכללי בו פותרים משוואות שכאלה (הערה: הפניה לנושא הכללי של משוואות דיפרנציאליות רגילות כתחום ידע עצום שאינו נלמד בתיכון).
3. אינטגרלים של פונקציות טריגונומטריות.

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות – כיתה י"ב

1. הגדרת הפונקציה המעריכית למשתנה שלם, רציונלי וממשי.
2. חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות, תכונותיהן ותיאורן הגרפי.
3. הגדרת לוגריתמים כפונקציה הפוכה למעריכית והעמקת מושג הבסיס: לוגריתם בבסיס כלשהו, לוגריתם של מכפלה, מנה, חזקה ושורש. מעבר לוגריתם מבסיס לבסיס.
4. הפונקציות **הלוגריתמיות** – תכונותיהן ותיאורן הגרפי, קישור להיותן הפונקציות ההפוכות למעריכיות (שיקוף ביחס לישר y=x).
5. משוואות לוגריתמיות ואי-שוויון לוגריתמי כנדרש ביישומים של חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי או בבעיות גדילה ודעיכה. יישום משוואות מעריכיות לפתרון בעיות של גדילה ודעיכה בביולוגיה וכלכלה, כולל ההבנה כי הפונקציה המעריכית פותרת את המשוואה הדיפרנציאלית הרגילה שבה קצב הגידול של x הוא לינארי ב x כלומר: $\dot{x}(t) = kx(t)$. האלגברה של הפונקציות הללו, כולל משוואות ואי-שוויון פשוטים שיילמדו "תוך כדי". זמן מחצית חיים.
6. חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות (בהקשר זה יש לציין שבחקירת הפונקציות המעריכיות והלוגריתמיות ושילובן עם פונקציות נוספות, יש לדון בנושא האסימפטוטות האופקיות והאנכיות). שילובן של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות עם פונקציות אחרות באמצעות פעולות חשבון ו/או הרכבה. השילובים עם פונקציות פולינום, רציונליות ופונקציות טריגונומטריות מאפשרת הדגמה חוזרת לנושא זוגיות ואי-זוגיות, מחזוריות, נגזרות ואינטגרלים של פונקציות אלו.

מספרים מרוכבים – כיתה י"ב (?)

במידה שתתקבל תכנית עמוסה מדי, ייתכן שפרק זה ייכלל כהעשרה בלבד. עדיין לא התקבלה החלטה.

הגדרה, רקע היסטורי, קשר למושג "אין פתרון". שוויון, ארבע הפעולות. ערך מוחלט, מספרים צמודים, שורש שני. הצגת המספרים המרוכבים במישור גאוס. משפט דה-מואבר, שורשי יחידה, שורשים.
המשמעויות הגאומטריות של ארבע הפעולות, של הערך המוחלט ושל השורשים.

גאומטריה

דגשים

פיתוח הראייה הגאומטרית תוך הדגמה של השערת השערות, הצגת דוגמה נגדית, ניסוח מדויק של משפט ומשפט הפוך והצגת כלי הוכחה היסקיים ובכלל זה הוכחה על דרך השלילה. בהוראה יושם דגש על דיוק בניסוח תוך הבאת דוגמאות לכך שאי-דיוק עלול להוביל לטענה לא נכונה (על ידי מתן דוגמה נגדית).
הבאת הוכחות שונות לאותן טענות בכדי לפתח יצירתיות ולהציג את היופי שבמציאת דרכים שונות לפתרון אותה בעיה. דגש על מונחי יסוד: אקסיומות, הנחות, טענה (בהינתן הנחה A המסקנה היא B), טענה נגדית (לא ייתכן ששתיהן נכונות). מתן דוגמאות פשוטות לכל אחד מן המושגים תוך כדי ההוראה, והצגת שאלות איכותיות כדי לוודא שמושגי היסוד הובנו. מוצע לשלב אמצעים טכנולוגיים (למשל גיאוגברה) כדי לבחון השערות ולהדגים בנייה וכן מוצע לאתר שימושים ספציפיים לנושאים השונים ולכלול אותם בתכנית הלימודים (למשל היבטים של אמנות וסרטוט ארכיטקטוני).

גאומטריה אוקלידית – כיתה י

התכנית בגאומטריה אוקלידית היא תכנית המשך לתכנית הגאומטריה בחטיבת הביניים אשר עברה שינויים גדולים גם מבחינת התכנים וגם בהיבט הדגשים. בכיתה י יושם דגש על העמקת ההיכרות עם המערכת ההיסקית הנדרשת להוכחות בכתיבה פורמלית על פי העקרונות שנזכרו לעיל. כמו כן מוצע להשתמש בסביבות גאומטריות דינמיות המאפשרות חקר וגילוי קשרים גאומטריים. עוד מוצע, כהמשך לגישה הכוללנית מחטיבת הביניים, לשלב בעיות מרחביות שניתנות לפתרון באמצעות כלים מן הגאומטריה המישורית.

תכנים

1. מקומות גאומטריים ונקודות מיוחדות במשולש: מעגל, אנך אמצעי, חוצה זווית ועוד.
2. משפט חפיפה רביעי.
3. המעגל : הגדרתו כמקום גאומטרי, קשתות זוויות ומיתרים במעגל, משפטים הדנים ביחסים ביניהם, משיק למעגל ומשפטים הנוגעים לו, בניות (מרכז מעגל נתון, משיק למעגל מנקודה על המעגל ומנקודה שאינה על המעגל).
4. פרופורציה ודמיון משולשים : משפט תאלס, המשפט ההפוך לו והמשפטים הנובעים מהם, משפטי הדמיון של משולשים, בניות הקשורות בדמיון משולשים (למשל, חלוקת קטע ביחס נתון).

5. משפט חוצה הזווית הפנימית במשולש.
6. דמיון משולשים במעגל.

טריגונומטריה במישור – כיתה י"א

האפשרויות הגלומות בטריגונומטריה באות לידי ביטוי בפרק זה, המאפשר ניתוח של יישומים שונים וקישוריות לחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות מחד ולהנדסה אוקלידית מאידך.

יילמדו יישומי הפונקציות הטריגונומטריות במישור, כולל משפט הסינוסים הקוסינוסים ונוסחת שטח משולש $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$.

וקטורים – כיתות י"א-י"ב

נושא הווקטורים מהווה הזדמנות ראשונה להצגת נושא מתמטי אבסטרקטי מחד ובעל יישומיות מתמטית ופיסיקלית מאידך. מוצע להציג את שני האספקטים[2] בתכנית הלימודים תוך שימת דגש על הקשר לפיזיקה, כולל פתרון בעיות "אמִתיות", כגון מהירות יחסית, כוחות וכיו"ב (בהמשך נכלול יישומים ספציפיים בכל נושא).

1. הצגת וקטורים בגישה גאומטרית כחִצים במישור ובמרחב וחקירת תכונותיהם; כולל פעולות חיבור, חיסור, כפל בסקלר ומכפלה סקלרית ונגזרותיהן (חישובי זוויות במישור ובמרחב וחישובי אורכים). הגדרת המרחב הווקטורי הגאומטרי. הכרת השימושים בווקטורים לחישוב ולהוכחות במישור ובמרחב ולפתרון בעיות פיסיקליות.
2. הרחבת המרחב הדו-ממדי למרחב תלת-ממדי – השימוש בווקטורים להצגת מישור במרחב זוויות במרחב. משפטי היסוד של גאומטריית המרחב בגרסה הווקטורית.
3. מערכת צירים במרחב והחופש לבחור במערכת באופן הנוח ביותר בהקשר היישומי. קישור ראשון להנדסה אנליטית שתילמד בהמשך. הצגה אלגברית של וקטורים ופעולות אלגבריות בווקטורים (חיבור, חיסור, כפל בסקלר ומכפלה סקלרית) תוך קישור לווקטור הגאומטרי.
4. הצגות פרמטריות של ישרים ומישורים במרחב ושימוש בהם לחישובים ולאפיון מצבים הדדיים.

הנדסה אנליטית – כיתות י"א-י"ב

יילמד השימוש בכלים אלגבריים לפתרון בעיות גאומטריות כאמצעי נוסף ולעִתים אף משלים לגאומטריה אוקלידית, טריגונומטריה ווקטורים (בה כבר נעשה שימוש ראשון במערכת צירים). הדגשת היתרונות שיש לכל אחת מן השיטות בהתמודדות עם בעיות גאומטריות על ידי ניתוח בעיות ספציפיות בארבעת הכלים שנלמדו: אוקלידית, טריגו, וקטורית ואנליטית (למשל, להוכחת הטענה שבמשולש שווה שוקיים הגובה לבסיס הוא גם חוצה זווית הראש). נדגיש במיוחד שה"דו-כיווניות" של מקום גאומטרי נגזרת בקלות מן ההוכחה האלגברית.

[2] ראו למשל הספר *וקטורים* מאת אורי רימון ושמשון עמיצור, הוצאת המרכז להוראת המדעים, האוני' העברית בירושלים 1997.

גם כאן מוצע לחפש שימושים ספציפיים לנושאים השונים ולכלול אותם בתכנית הלימודים.
כגון שימושים באופטיקה, חוקי קפלר.

1. הגדרות הבסיס של הנדסה אנליטית: הצגת נקודות, קטעים וישרים באופן אנליטי וקישור לפונקציות קוויות, שיפוע הישר והמאונך לו והקשר לפונקציית הטנגנס, קישור לפתרון מערכת משוואות והקשר בין מספר הפתרונות לגאומטריה של הקווים.
2. הצגת משפטים והוכחות בעזרת כלים אלגבריים, כולל שימוש בסימטריה בהוכחות על ידי בחירה מושכלת של מערכת הצירים.
3. שימוש בכלים אלגבריים לאפיון מקומות גאומטריים, תחילה אלו שהוגדרו בהנדסה אוקלידית (קטע, ישר, מעגל) ולאחר מכן מקומות גאומטריים חדשים כגון פרבולה, אליפסה. יישומים, למשל לתכונות "אופטיות" של עקומים: תכונות זוויות ההחזרה מעקומים שונים ושימושן באופטיקה גאומטרית, גלי קול וכד'. קישור לנושא הפונקציות, למשל בנושא חשיבות הבחירה של כיוון הצירים. לדוגמה, בפרבולה ניתן לבחור את הצירים כך שהפרבולה תהיה פונקציה, ואילו באליפסה בחירה כזו לא קיימת.

טריגונומטריה במרחב – כיתות י"א-י"ב

בפרק זה ההסתכלות המרחבית תפותח תוך הגדרת זוויות ו/או פני שטח של צורות הנדסיות בעזרת חיתוך המרחב על ידי מישורים שונים לפי הצורך היישומי. יודגשו הראייה המרחבית ויישומיה לחיים (למשל בארכיטקטורה).

1. יילמדו יישומים במרחב הדורשים שימוש במשפטים בגאומטריה, בזהויות טריגונומטריות בסיסיות ובמשפטי הסינוס/קוסינוס לשם חישוב במרחב של זוויות, אורכי קטעים, שטחים (כמו מעטפת או שטח פנים) ונפחים.
2. תיבחן הצגתם של המושגים המרחביים (זוויות בין מישורים, היטלים וזוויות בין מישור לישר) בהצגה הווקטורית והטריגונומטרית.

גאומטריית המרחב – כיתה י"ב

היסודות לגאומטריית המרחב יוצגו לראשונה בלימוד וקטורים. השימוש בפונקציות טריגונומטריות לפתרון בעיות בגאומטריית המרחב נשען על יסודות אלו. יש להדגיש שהמושג "זווית" מוגדר במישור, ולכן בדיון על זוויות בין אובייקטים מרחביים עלינו להגדיר מראש מהו המישור שבו מוגדרת הבעיה.

1. צורות מרחביות שונות. פאונים, גלילים חרוטים כדורים. דיון איכותי שלאחריו יוגבל הדיון למנסרות ישרות, פירמידות ישרות, גלילים וחרוטים ישרים.
2. מושג ההיטל וזווית בין ישר למישור.
3. זווית בין מישורים.

הסתברות וסטטיסטיקה – כיתות י"א-י"ב

פרק זה עדיין לא גובש, ולכן הרשימה המובאת כאן חלקית ביותר. מוצע כי הוראת הסטטיסטיקה וההסתברות תיעשה תוך שימת דגש על יישומיות ועל הקשר בין שני הנושאים האלה ללוגיקה מתמטית.

1. הסתברות קלאסית והבסיס הלוגי שלה: אקראיות, מרחב הסתברות סופי, חוקי ההסתברות, מאורעות בלתי תלויים, מאורעות תלויים, הסתברות מותנית, נוסחת בייס, מרחב דו-שלבי ותלת-שלבי (טבלאות ועצים).
2. סטטיסטיקה: הקשר להסתברות, מדדים מרכזיים ומדדי פיזור, קורלציות לעומת היקשים, היסקים סטטיסטיים ויישומם (קשר לאינטגרלים וחישובי שטחים).
3. קבלת החלטות עם חוסר ודאות - שימוש בתכנים הלקוחים מספרים פופולריים (יישומים מספרי כהנמן, דן אריאלי וכיו"ב המדגימים טעויות נפוצות בהבנת מושג ההסתברות בחיי היום-יום).

סדר הלימוד המוצע

להלן הצעה לחלוקת התכנים לפי כיתה ושעות לימוד, תוך שילוב למידה של שני נושאים במקביל כדי לחזק את הקישוריות בין הנושאים הנלמדים ולהטמיע את עקרון הספירליות. **סדר הלימוד ותכנית הלימוד מבוססים על ההנחה שניתן יהיה לשנות את מבנה בחינות הבגרות בהתאם. עם גיבוש התכנית המפורטת לכיתות י"א וי"ב, חלוקת שעות הלימוד עשויה להשתנות.**

כיתה י			
נושא I	שעות	נושא II	שעות
מבוא להנדסה אנליטית	10	סדרות: מבוא, חשבונית, הנדסית	16
גאומטריה - מקומות גאומטריים והמשולש	10		
גאומטריה - המעגל	20	מבוא לאנליזה	15-20
גאומטריה - דמיון	20	חשבון דיפרנציאלי : מושגי יסוד, שימושים והיסטוריה, פונקציות פולינומיאליות ושורש	44-39
מבוא לפונקציות טריגונומטריות	15		
	75		75
סה"כ 150 שעות			

כיתה י"א			
נושא I	שעות	נושא II	שעות
טריגונומטריה במישור	25	אינדוקציה (כולל סדרות כלליות וקשר לחשיבה רקורסיבית)	15
		חשבון דיפרנציאלי: פונקציות רציונליות, חזקות, בעיות קיצון	25
סטטיסטיקה והסתברות	20	חשבון אינטגרלי	25
וקטורים א-ד	30	משוואות וחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות	10
			75
סה"כ 150 שעות			
כיתה י"ב			

נושא I	שעות	נושא II	שעות
וקטורים	10	חשבון דיפרנציאלי: סיכום, בעיות קיצון והקשר להנדסה אנליטית	25
מרוכבים (?)	15		
הנדסה אנליטית	30	פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות	35
טריגונומטריה במרחב	20	הסתברות וסטטיסטיקה	15
	75		75
סה"כ 150 שעות			

חלק שני: פירוט תכנית הלימוד לכיתה י

בכיתה י יילמדו שני נושאים עיקריים: אנליזה, וגאומטריה של המישור.

להלן פירוט התכנים, הדגשים והמיומנויות שברצונו לפתח בכל אחד מנושאים אלו. בנוסף יוצגו בנספח 1 מספר דוגמאות להמחשת סוג השאלות שאנו מציעים לכלול בכל פרק. חשוב לציין שנושאים ודוגמאות המוגדרים **כהעשרה** לא ייכללו כנושאי חובה בתכנית (בשל קוצר זמן ו/או אופיים המתקדם), אך המורים אמורים להכירם ולהפנות את התלמידים המתעניינים בהם לקריאה נוספת בספרי הלימוד ובמרשתת (עם הרחבה אפשרית נוספת בתכנית ה-5++).

נספח 2 כולל דיונים בנושא ההוכחה ובנושא פיתוח ה"חוש לפונקציות". דיונים אלה הם בבחינת הנחיה לרוח הדברים של התכנית החדשה.

אנליזה

מוצע להתחיל את פרק האנליזה בחזרה על מושג הפונקציה מחטה"ב ובהעמקת ההבנה שאפשר להגדיר פונקציות בדידות ורציפות. לפיכך נתחיל בחקירת סדרות – פונקציות בדידות, ונמשיך בחקירת פונקציות רציפות. סדר חדש זה מאפשר טיפול שיטתי יותר בנושא הגבול והעמקת הידע בנושא חזקות. נמשיך במבוא לנושא הפונקציות החלקות, בהגדרת מושג הנגזרת ובחקירת פונקציות פולינומיאליות ופונקציית השורש.

סדרות (16 שעות לימוד)

פרק זה עוסק בסדרות מספריות עם חוקיות מוגדרת.

מטרות-העל הן:

- פיתוח מושגי יסוד מתמטיים: פונקציות של משתנה בדיד ותכונותיהן (פונקציות עולות, יורדות, חיוביות/שליליות/עם סימן מתחלף וכד'). דיון במושג ההוכחה: טענות, דוגמאות, הוכחות והפרכת טענה בעזרת דוגמה נגדית, שימוש באלגברה להוכחות ודיון בנושא הגבול.
- הצגת נושא הסדרות ככלי שימושי לתיאור בעיות מהחיים.
- פיתוח מיומנויות מתמטיות: שימוש בכללי חזקות, אי-שוויון, ניתוח תכונות של סדרות חשבוניות/ הנדסיות/ כלליות.
- בכיתה י יילמדו בעיקר (פרט למבוא) סדרות חשבוניות והנדסיות.

1. מבוא לסדרות

- **תכנים :** הפרק יעסוק רק בסדרות מספריות עם חוקיות. סדרות יוצגו בשתי דרכים: האחת, כפונקציות המוגדרות על משתנה בדיד (מוגדרות על המספרים הטבעיים אל המספרים הממשיים, פונקציות שנידונו גם בחט"ב); השנייה, על ידי כלל נסיגה המתאר איך סדרה משתנה עם האינדקס-המספור. סדרות תוצגנה תוך שימוש ברב-ייצוג: ייצוג מילולי של סדרות, ייצוג סימבולי על ידי נוסחה לפי מקום או נוסחת נסיגה, ייצוג גרפי וייצוג על ידי טבלת ערכים.

הסדרה יכולה להיות עולה, יורדת, מחזורית או אף אחת מאלו. היא יכולה להיות חיובית/ שלילית או עם סימן מתחלף. קצב הגידול או הדעיכה של הסדרה מעניין בשימושים רבים.

- **דגשים:** הקשר לפונקציה – לכל מספר טבעי n מתאים בדיוק ערך אחד, ערך האיבר המתאים בסדרה. האינדקס n מיוצג על ידי מספר טבעי שמורֶה על מקום האיבר בסדרה (למרות שסדרת האינדקסים יכולה להיות כל סדרה של שלמים עוקבים, גם שליליים, בפרק זה יידונו רק סדרות שבהן האינדקס הוא מספר טבעי). לעומת האינדקס ערכי הסדרה מקבלים ערכים לאו דווקא טבעיים (למשל ממשיים).
- **מיומנויות:** זיהוי של מגוון חוקים המגדירים סדרות; זיהוי החוקיות וניסוחה באופנים שונים (מספרי, מילולי, סימבולי, גרפי).

מומלץ להשתמש בטכנולוגיה כדי להציג סדרות באופן מספרי וגרפי, ולחקור באופן דינאמי את השפעת הפרמטרים של הסדרה עליה

2. סדרה חשבונית

- **תכנים**

הגדרה לפי מקום (כפונקציה) והגדרה לפי נוסחת נסיגה. מעבר מכלל לפי מקום לכלל נסיגה ולהיפך. כתיבה פורמלית של איבר כללי כפונקציה של מקום לדוגמה $a(n)=a_n=3-2n$. הוכחת הנוסחה של סדרת הסכומים החלקיים (בכמה דרכים). הצגה גרפית של הסדרה כנקודות על גרף של פונקציה לינארית. הצגה גרפית של סדרת הסכומים החלקיים של סדרה חשבונית כנקודות על גרף של פונקציה ריבועית.

- **דגשים**

ההפרש הקבוע בין איברים סמוכים מוביל לגרף נקודות לינארי. כל איבר הוא ממוצע חשבוני של שני האיברים הצמודים משני צדדיו (מכאן השם "סדרה חשבונית"). יישום חשיבה מן הפרט אל הכלל: מתוך התבוננות באוסף מספרים מסיקים כלל נסיגה וכלל לאיבר כללי של סדרה (נוסחה לפי מקום). דיון בתפקיד ההוכחה (למשל, להבדיל מבדיקה במחשבון) וביכולת להפריך טענה בעזרת דוגמה נגדית אחת. אם מצאנו מקרה אחד שבו ההפרש בין שני זוגות איברים עוקבים בסדרה אינו זהה, הוכחנו שזוהי אינה סדרה חשבונית.

- **מיומנויות**

זיהוי סדרות חשבוניות ופתרון בעיות פשוטות מבחינה אלגברית (שתי משוואות, רק אחת מהן יכולה להיות ריבועית). גמישות בשימוש בייצוג סימבולי. למשל, שימוש בסימונים שונים c_k a_j a_n. התבוננות על הסדרה בדילוגים של מקום אחד (סדרות חלקיות במקומות הזוגיים או האי-זוגיים). זיהוי פעולות פשוטות על איברי הסדרה שמשמרות את תכונות הסדרה החשבונית. יכולת לבדוק מהו הייצוג הגרפי של הפעולות הפשוטות הללו תוך קישור לנושא טרנספורמציות על פונקציות שנלמדו בחטה"ב (ולהיפך, זיהוי פעולות פשוטות על הסדרה החשבונית שמקלקלות את תכונותיה והופכות אותה לסדרה שאיננה סדרה חשבונית). פתרון בעיות אורייניות בנושא סדרות חשבוניות.

3. סדרה הנדסית

- **תכנים**

הגדרה לפי מקום (כפונקציה) והגדרה לפי נוסחת נסיגה. מעבר מכלל לפי מקום לכלל נסיגה ולהיפך. הרחבה של נושא החזקות: חוקי החזקות. חזקה עם מעריך שלם חיובי וחזקה עם מעריך שלם שלילי. ייצוג גרפי של סדרות הנדסיות מסוגים שונים (עולה, יורדת, סימנים מתחלפים). התייחסות לסדרה הנדסית כפונקציה והסתכלות על קצב השינוי של סדרה הנדסית בהשוואה לסדרה חשבונית. אפיון סדרת הסכומים החלקיים. סכום של אינסוף איברים כאשר הסכום ההנדסי מתכנס תוך דיון ראשון בנושא הגבול. במסגרת פרק זה יינתנו בעיות יישומיות כגון הצגת ספירה בינארית, ריבית בנקאית ובעיות גדילה ודעיכה דיסקרטית של אוכלוסיות. שימוש במחשבונים, אקסל ואמצעים טכנולוגיים להדגמת התכנסות הסדרה וסיכומה.

- **דגשים**

דיוק מילולי בנושא גבולות: שאיפה לאפס של האיבר הכללי של סדרה הנדסית עם מנה שערכה המוחלט קטן מאחד. התכנסות סדרת הסכומים החלקיים במקרה זה. גדילה של סדרה הנדסית בהשוואה לסדרה חשבונית וחשיבות הנושא בחיי היום-יום. חיזוק מושג ההוכחות הכלליות מחד והדוגמאות הנגדיות להפרכת טענות מאידך.

- **מיומנויות**

זיהוי סדרות הנדסיות ועיסוק בבעיות שפתרונן מצריך שליטה בטכניקה אלגברית של חזקות, כולל פתרון משוואות מעריכיות על ידי ניסוי וטעייה במספרים טבעיים קטנים. דוגמאות ספציפיות של פעולות על איברי הסדרה שמשמרות את תכונות הסדרה ההנדסית (ולהיפך, זיהוי פעולות פשוטות על הסדרה שמקלקלות את תכונותיה והופכות אותה לסדרה שאיננה סדרה הנדסית). יכולת לבדוק מהו הייצוג הגרפי של הפעולות הפשוטות הללו. פתרון בעיות אורייניות בנושא סדרות הנדסיות והשוואתן לבעיות אורייניות בנושא סדרות חשבוניות. אבחנה בין "הוכחה של טענה כללית" ובין "דוגמה" ו"דוגמה נגדית".

- **הערות**

- חישובי הגבול יילמדו על ידי פיתוח האינטואיציה באמצעות דוגמאות וחישובים תוך שימוש בשפה מדויקת; מחד, ניתן לראות שהאיברים בסדרה הנדסית עם מנה קטנה מאחד, הולכים וקטנים על ידי חישוב פשוט. מאידך, יש להדגיש שכדי להוכיח שהגבול של האיבר הכללי בסדרה הנדסית עם מנה קטנה בערכה המוחלט מאחד הוא אפס, תידרש הוכחה שלכל מספר שנבחר, קטן כרצוננו, ניתן למצוא n כך שכל האיברים הבאים בסדרה (a_j עבור $j>n$) יהיו קטנים מהמספר הקטן שבחרתי. ניתן להוכיח זאת כהעשרה, ולהראות (גם כהעשרה) מקרים (לא של סדרה הנדסית) שהתבססות על חישוב ללא הוכחה פורמלית עלול להטעות אותנו.
- בשלב זה אין הכוונה לפתרון משוואות מעריכיות בעזרת פונקציה לוגריתמית. מציאת המקום בפתרון משוואות מעריכיות ייעשה על ידי ניסוי וטעייה.

מבוא לאנליזה של פונקציות בעלות תחום רציף ומבוא להנדסה אנליטית (30-25 שעות)

פרקי המבוא נועדו לפתח אצל התלמידים אינטואיציה מתמטית שתאפשר להם להתמודד עם הדרך הארוכה ורצופת הפרטים ההכרחית ללימוד האנליזה. ראו פירוט בנספח 2 -

דיון בנושא "החוש לפונקציות" וחשיבות פרק **המבוא**.

1. מבוא להנדסה אנליטית (10 שעות)

מטרות הפרק הן חזרה על נושא הפונקציה הלינארית והריבועית שנלמד בחט"ב והעמקה בו, הכרת כלים אנליטיים שישמשו בהמשך בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, חיזוק הטכניקה האלגברית, היכרות עם המעגל כהכנה להוראת טריגונומטריה, והכרת הקישוריות בין אלגברה, גאומטריה ופונקציות.

תכנים

א. מבוא היסטורי על מקורות ההנדסה האנליטית ויישומיה.
ב. חזרה על נושא הישר והפרבולה והרחבתו תוך קישור למושג הפונקציה ויישומיה. אבחנה בין גרף של פונקציה לבין קבוצת נקודות שאינה מייצגת גרף של פונקציה (למשל, $x=k$).
ג. מציאת משוואת ישר על פי שתי נקודות ועל פי שיפוע ונקודה, הקבלה, אמצע קטע, חיתוך וניצבות, מרחק בין שתי נקודות.
ד. קישור למערכת משוואות לינאריות והצגתה הגרפית כולל שימוש בפרמטרים. אבחנה בין משוואה מפורשת של קו ישר לעומת משוואה כללית (יתרונות וחסרונות).
ה. קישור למערכת של משוואה ריבועית ומשוואה לינארית.
ו. משוואת מעגל קנוני (שמרכזו בראשית הצירים) כהכנה להוראת טריגונומטריה. זוהי דוגמה נוספת לעקום שאינו גרף של פונקציה.
ז. משוואת מעגל כללי. הזזת המעגל - דוגמה נוספת לטרנספורמציות בנוסף לפרבולה.

2. מבוא לאנליזה של פונקציות (20-15 שעות)

מטרת המבוא לאנליזה להעמיק את מושג הפונקציה ולפתח את "החוש לפונקציות", לזהות ולנתח פונקציות באופן איכותני (ראו דיון בנספח 2). במסגרת המבוא יש לחזור על הפונקציות הלינאריות והריבועיות שנלמדו בחט"ב בהקשרים שונים, להתוודע למשפחות נוספות של פונקציות ברמה הבסיסית על תכונותיהן הייחודיות (בעיקר מבחינת הגרף) ולהכיר פעולות שונות על פונקציות. הרחבת מאגר הפונקציות והפעולות שנעשות עליהן ירחיב את אפשרויות השיח המתמטי על מושג הפונקציה ויהווה תשתית להבניית מושגים באנליזה.

תכנים

- חזרה על הפונקציה הקווית והפונקציה הריבועית והרחבתן לפונקציות פולינומיאליות.[3]
- היכרות עם פונקציות חזקה $f(x) = x^n$ ותכונותיהן כהכללה של הפונקציה הלינארית y=x ושל הפונקציה הריבועית $y=x^2$. הזזות ומתיחות ככלי ליצירת משפחות של פונקציות חזְקה.
- דיון ראשוני במושג קצב גידול (עבור מספרים גדולים פונקציות חזְקה ממעלות גבוהות גדלות מהר יותר מאשר פונקציות ממעלות נמוכות יותר) .
- אבחנה בין פונקציות חזְקה זוגיות ואי-זוגיות ותכונותיהן. ניתן להסיק כי לפונקציית פולינום ממעלה אי-זוגית יש לפחות שורש ממשי אחד, וכי לפולינום ממעלה זוגית אין בהכרח שורש ממשי.
- חקירה איכותנית של הפולינום כמכפלת גורמים לינאריים וריבועיים והבחנה בין שורש של פולינום מריבוי זוגי ומריבוי אי-זוגי והשפעתם על הגרף.
- זוגיות ואי-זוגיות של פונקציות בכלל ושל פונקציות פולינום בפרט.
- יודגש כי ניתוח איכותני של גרף הפולינום נותן סקיצה טובה למדי של חיוביות ושליליות הפונקציה על ההתנהגות באינסוף, **מרמז** על מספר נקודות הקיצון של הפונקציה אך לא אומר דבר על מיקומן. מכאן עולה הצורך בכלי נוסף שיסייע למצוא באופן מדויק את נקודת הקיצון בעזרת הנגזרת.
- יודגש שלא כל פולינום ניתן לפרק לגורמים לינאריים, ושלא תמיד ניתן בקלות למצוא את הפירוק, אם קיים. לכן עולה צורך בכלים אנליטיים נוספים. יש להימנע מפירוק לגורמים של פולינומים מסובכים מדי. דוגמאות לפירוקים אפשריים: x^3-2x^2+x, x^4-1.
- יודגש כי ניתוח איכותני של גרף הפולינום לפי שורשיו יהווה כלי שימושי לאורך הדרך, למשל קביעת תחומי עלייה וירידה על פי גרף הנגזרת, ובהמשך ניתוח איכותני של פונקציות רציונליות והאסימפטוטות שלהן (ראו **התנהגות הפונקציה סביב נקודות אי-הגדרה**).
- **העשרה בנושא שורשי פולינומים**
  - הרחבה על כך שפירוק לגורמים לינאריים וריבועיים נובע מהמשפט היסודי של האלגברה ונגיעה בנושא של מספרים מרוכבים.
  - הרחבה על גלואה ועל תורת גלואה המסבירה את הקושי במציאת שורשים לפולינומים ממעלה חמישית ומעלה.
- פתרון משוואות ואי-שוויון באופן גרפי ואלגברי (מהיבט הפונקציות).
  - פתרון משוואה ואי-שוויון דו-ריבועי.
  - פתרון אי-שוויון של פולינומים לפי פירוק לגורמים וסרטוט סקיצה לגרף ("שיטת הקטעים/התחומים").

---

[3] מהלך הוראה ודוגמאות ניתן למצוא בספר "ללמוד וללמד אנליזה" בפרק **רגע לפני הנגזרת**. דוגמאות לפעילויות אינטראקטיביות ראו ב-: **שורשים פשוטים של פולינום, ריבוי השורש של פולינום**.

- פתרון אי-שוויון רציונלי ללא פרמטרים – אי-שוויון שניתן להגיע ממנו לאי-שוויון מהצורה $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ כאשר f(x) או g(x) הם פולינומים ממעלה שנייה לכל היותר או פולינומים שפירוקם לגורמים נתון.
- הצגת פונקציות נוספות באופן גרפי ואנליטי וחקירה ראשונית של תכונותיהן: פונקציית הערך המוחלט, פונקציית השורש, הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ ו- $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

- **הערה:** נדון בעיקר בפונקציות רציפות. לשם כך נזדקק לפחות ל"הגדרה אינטואיטיבית" של רציפות שנסמכת בעיקר על חזות גרפים של פונקציות רציפות. על ידי מתן דוגמאות ואי-דוגמאות (דוגמאות גרפים של פונקציות שאינן רציפות) אנחנו יכולים לחדד את האפיונים החזותיים של תכונת הרציפות ואת קִשרהּ לנושא הגבול. כמו כן יש לעמוד על כך שהגדרת הפונקציה אינה גוררת רציפות.

פעולות על פונקציות והשפעתן על הגרף והביטוי הסימבולי:

- **פעולות שיקוף** לציר x ($g(x) = -f(x)$) ושיקוף לציר y של גרף הפונקציה ($g(x) = f(-x)$).
- הרחבה של הזזות הפרבולה בייצוג הקודקודי **להזזות ומתיחות** של פונקציות אחרות:

$$f(x) = a(x-p)^n + k, \quad f(x) = a\sqrt{x-p} + k, \quad f(x) = \frac{a}{x-p} + k.$$

- משמעות **הפעולות על פונקציות**: סכום והפרש פונקציות, מכפלה ומנה.
- הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$: הקשר בין הגרפים של g ו-f, תחומי ההגדרה, האפסים והאסימפטוטות.
- פונקציה **הפוכה** - דיון באיזה תנאים היא קיימת ובאיזה מקרים לא. פונקציית השורש הריבועי כהפוכה לפונקציה הריבועית, פונקציות הפוכות לפונקציות חְזקה זוגיות ואי-זוגיות . הסימטריה של פונקציות הפוכות לישר y=x. לדוגמה, חוברת לכיתה המדעית <u>הרחבת עולם הפונקציות - הזזות ומתיחות</u>, עמ' 19-24.

  הערה: במידה שפרק המבוא מתארך מִדַי מבחינת שעות הלימוד, ניתן לדחות את ההעמקה והדיון בנושא פונקציה הפוכה לאחר חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים. נתון לשיקול המורה.
- **הרכבת פונקציות** - ערך מוחלט של פונקציה, ריבוע של פונקציה, שורש של פונקציה.
- **חזרה והעמקה** של הטכניקה האלגברית לאורך כל פרק המבוא תוך פתרון בעיות בהקשר אורייני: שאלות בהנדסה אנליטית, פתרון בעיות תנועה והספק (עם הנחיה במידול) ושאלות שהדגש בהן על מושג הפונקציה ותכונותיה.

  בפרט, בפרק המבוא יתורגלו בהרחבה הנושאים האלה: פירוק לגורמים על ידי הוצאת גורם משותף ועל פי נוסחאות הכפל המקוצר; פירוק הטרינום על ידי פתרון המשוואה הריבועית המתאימה או על ידי השלמה לריבוע; שימושי הפירוק לגורמים לצורך פעולות

חשבון בשברים אלגבריים ופתרון משוואות ואי-שוויון; הוכחת נוסחת הריבועים; פתרון משוואות ואי-שוויון ממעלה ראשונה ושנייה, כולל פרמטרים, הבנה אנליטית וגרפית של מספר הפתרונות הקיימים ותלותם בפרמטרים (האפשרויות השונות של פתרון יחיד, מספר סופי של פתרונות, אינסוף פתרונות, אף פתרון) וכן הצגה גרפית של אי-שוויון. בשאלות שנושאיהן ניתנים ליישום בבעיות מחיי היום-יום, ניתן להדגיש את המוטיבציה להצגת פרמטרים בגוף השאלה. יש להקפיד על רמת מורכבות סבירה (ראו דוגמאות).

<u>הערות</u>

- שימוש בטכנולוגיה מאפשר הצגה גרפית של פונקציות וחקירת תכונותיהן כבדיקה וסיוע לחקירה האנליטית. הטכנולוגיה מאפשרת לחקור באופן דינאמי השפעה של פרמטרים על משפחות של פונקציות ולהמחיש פעולות על פונקציות ולהגיע להכללות. חשוב להדגיש את היתרון בהצגת הפתרון הגרפי כדרך נוספת לבדיקת הפאזל שנקרא חקירת פונקציה. יש להשתמש בכלים הגרפיים לשאילת שאלות איכותניות.
- לפי עקרון הספירליות הצגת הפונקציות והפעולות עליהן תיעשה ברמה בסיסית בלבד ובאופן איכותני. מטרתה להרחיב את הידע, להציג את המושגים באופן אינטואיטיבי, ולהטרים מושגים שילמדו הלאה. בהמשך יש לשלב נושאים אלו (ברמת קושי העולה בהדרגה) בכל מהלך הלימוד של אנליזה. ניתן לדחות להמשך חלק מההיכרות עם הפונקציות ו/או חלק מהפעולות שהוזכרו.
- נמליץ להשתמש בתרגול עצמי עם רמת קושי עולה.

חשבון דיפרנציאלי (40-45 שעות)

הגדרת הנגזרת כקצב השתנות

1. הפרק ייפתח בהצגת בעיות שימושיות הקשורות **לקצב שינוי אחיד או משתנה** תוך קישור לנלמד בחט"ב (למשל, <u>קצב אחיד וקצב משתנה</u>) ודגש על מקומו הטבעי של מושג זה בחיי היום-יום (ריצה, נסיעה ברכב, מילוי בְּרֵכות מים) ועל ההצגה הגאומטרית של ערכים המשתנים בזמן (או במקום). לאחר מכן דיון בכלליות ההצגה המתמטית ומכאן דיון אינטואיטיבי על קצב שינוי של פונקציה לא קווית דרך שימושים.

דוגמאות

<u>ריצת 200 מטר</u> - מקור: מט"ח, לראות מתמטיקה, <u>יישומון בגאוגברה</u>.

<u>צביעת צורות</u> - על פי משימת אוריינות של מילוי כלים.

<u>קו המים</u> - סימולציה למילוי כדים.

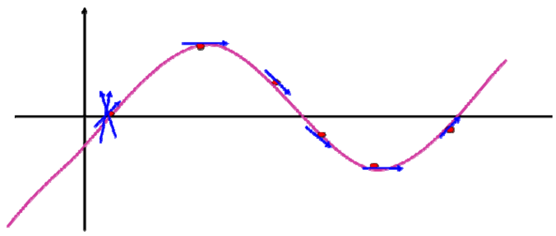
2. **מדרגות ככלי לניתוח גרף הפונקציה**

ניתוח השתנות הגובה של פונקציה באמצעות מדרגה עם רוחב קבוע, ניתוח השתנות היחס של גובה המדרגה לרוחבה ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$), הבחנה בין פונקציות עם שינוי בקצב אחיד או בקצב משתנה. תיאור

השתנות הפונקציה על ידי תיאור השתנות המדרגות: המדרגות עולות – הפונקציה עולה; המדרגות עולות אך גובהי המדרגות קטנים – הפונקציה עולה וקמורה, המדרגות יורדות ואחר כך עולות – לפונקציה יש נקודת מינימום. השתנות חיובית והשתנות שלילית כמתארות פונקציה עולה ויורדת בהתאמה. השתנות קבועה (כמו בסדרה החשבונית) והשתנות שאיננה קבועה (כמו למשל בסדרה ההנדסית).
שימוש במדרגות לניתוח איכותני של תופעות מתחומים שונים שרלוונטי לנתֵח בהם קצב השתנות: צריכת דלק במשך נסיעה מסוימת, מהירות במשך ריצה, מדד מסת הגוף, כמות תרופה ליחידת משקל בגוף בין שתי נטילות, מדד היוקר, צמיחה כלכלית, קצב בניית דירות חדשות, השתנות תל"ג לנפש.

ניתוח השתנות הפונקציה המוצגת על ידי טבלת ערכים וגרף.

3. בניית סקיצה ל**גרף השתנות הפונקציה** על בסיס ניתוח השתנות המדרגות לגרף הפונקציה (גרף הנגזרת). התאמה בין גרפים לגרף ההשתנות באופן איכותני (השתנות פונקציה ריבועית היא פונקציה לינארית וכו').
הצגת מושג **המשיק לפונקציה בנקודה** באופן אינטואיטיבי. כשמגדילים (zoom in) גרף של פונקציה בסביבת נקודה (שבה הפונקציה גזירה), גרף הפונקציה "נראה כמו" קו ישר עד כדי כך שלא ניתן להבחין בעין בינו לקו ישר. לכן נוכל להגדיר באופן אינטואיטיבי את המשיק כישר "הכי קרוב" לעקום הפונקציה בסביבת נקודה. המשיק מתאר את מגמת הפונקציה בנקודה. אם שיפוע המשיק חיובי/ שלילי הפונקציה עולה/ יורדת באותה נקודה.



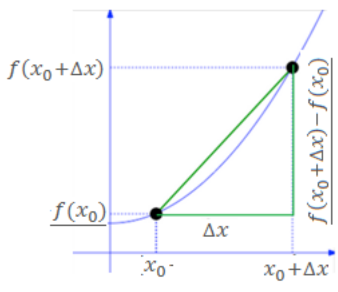
(הצגת המשיק באופן אינטואיטיבי מעלה את הצורך להגדירו באופן מדויק ולמצוא כלים אנליטיים לזיהויו.)

דוגמאות עם שימוש בטכנולוגיה

- יישומון <u>פונקציית הנגזרת כהשתנות של המשיקים</u> **(בארט גולש על הגל..)**
- **בנייה אינטראקטיבית של** <u>גרף הנגזרת באופן אינטואיטיבי</u> **(יישומון תרגול של קאהן)**

א. **הגדרת הנגזרת בנקודה** תוך כדי דיון בתפקידיהם של ניוטון ולייבניץ בהתפתחות המתמטיקה.

- **פירוש פיזיקלי** של מושג הנגזרת. מהירות ממוצעת ומהירות רגעית על פי ניוטון.
  קצב השתנות ממוצע בתחום מסוים כיחס בין גובה המדרגה לרוחבה:



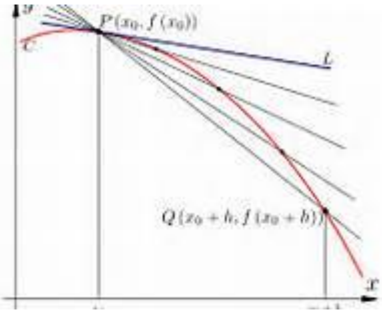
קצב השתנות בנקודה כגבול של קצב השתנות ממוצע: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

הסימון של לייבניץ לגבול זה: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. d היא האות הראשונה במילה differential שמשמעותה קשורה ל- difference (הפרש).

$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ המוגדר לעיל נקרא הנגזרת של $f(x)$ בנקודה x_0.

- ניוטון ולייבניץ חשבו למשל על תיאור מיקום גופים כפונקציה של הזמן. למשל, בהינתן ש y(t) היא הפונקציה המתארת את גובהו של גוף מסוים בזמן t, הנגזרת בנקודה t מתארת את מהירותו האנכית הרגעית של הגוף בזמן זה, ונגזרת המהירות מתארת את התאוצה האנכית ברגע זה.
- יש להדגיש שניתן לסמן את הפונקציה ואת המשתנה הבלתי-תלוי באותיות שונות, וצריך שיהיה מובן מי המשתנה הבלתי תלוי ומהי הפונקציה.
- זוהי הזדמנות נוספת לדון בנושא הגבול. התלמידים נדרשים לחשב גבולות מהצורה $\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{\mathrm{f(x+h)-f(x)}}{\mathrm{h}}$. ברור שלא תיתכן כאן הצבה של h=0 שהרי אפס הוא מחוץ לתחום ההגדרה של הביטוי. זה נראה זמן מוצלח למעט אריתמטיקה של גבולות: אם $h\to 0$, מהם הגבולות של 3h, h2 , h2+3h וכד'. יש לציין כי חישובי הגבולות האינטואיטיביים יילמדו לפי הצורך תוך שימוש בשפה מדויקת. למשל, כדי להוכיח שגבול הביטוי שלנו הוא אחד כאשר x שואף לאפס, יש להראות ש-: לכל מספר שאבחר, קרוב כרצוני לאחד, נוכל למצוא x כזה שהצבת כל האיקסים הקרובים יותר ממנו לאפס בביטוי, תניב ערכים קרובים יותר לאחד מהמספר שבחרתי. במקרים פשוטים ניתן להוכיח זאת באופן ישיר. אם אציב כמה דוגמאות של x במחשבון, אוכל לאשש או להפריך את ההשערה שלי לגבי הגבול, אך כדי לוודא שלא בחרתי במקרה ערכים נוחים יש צורך בהוכחה. יש לציין שאנחנו מבקשים להטמיע כאן את ההכרות עם השפה המתמטית שקושרת בין הנגזרת להגדרתה כגבול אך לא מצפים מהתלמידים לבצע פרוצדורות לחישוב גבולות מסובכים.
- **פירוש גאומטרי של נגזרת**

כאשר ניתן לצייר משיק לגרף בנקודה כלשהי, שיפוע המשיק לגרף בנקודה זו הוא הנגזרת. במקרה זה המשיק מהווה גבול של המיתרים בתהליך התקרבות לנקודה:



שיפוע המיתר המחבר את הנקודות $(x_0,f(x_0))$ ו $(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$ הוא:

$$m(x_0+\Delta x)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

לכן, שיפוע המשיק בנקודה מתקבל כגבול של שיפועי המיתרים:

$$m(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

זהו כמובן אותו גבול שהוגדר על ידי לייבניץ כ**נגזרת של הפונקציה f(x) בנקודה x_0, ומסומן לעִתים גם כ $f'(x_0)$.**

הערה: התפיסה הגאומטרית של הנגזרת כמשיק מוגבלת למקרים שבהם הפונקציה גזירה ברציפות. יש להוסיף את הדיון האיכותני בנושא זה (כלומר מתי המשיק לא קיים אך הנגזרת מוגדרת, נושא הגבול מימין ומשמאל וכד') כ**הערה בלבד** בספרי הלימוד, אך **מומלץ לא לדון** בכך בכיתה בשלב זה של הטמעת המושגים הבסיסיים.

המחשה בעזרת טכנולוגיה

- **הגדרת הנגזרת כגבול שיפוע החותכים**
- לראות את הנגזרת

חוקי הנגזרת

ב. חוקי הנגזרת של כפל בקבוע, סכום והפרש פונקציות, מכפלה ומנה של פונקציות, פונקציה מורכבת – הוכחתם על פי הגדרת הנגזרת והסבר איכותני בגרף. יש להדגיש כי ברוח התכנית יש לכלול הוכחות לנוסחאות אלו (כולל ניסוח מדויק של הנתונים וההיסקים הלוגיים), ולהדגיש כי אלו הוכחות מתמטיות המאפשרות לנו קיצור דרך גדול ביישומים (במקום לחשב את הגבול לכל דוגמה ודוגמה נשתמש בחוקים אלה). כמו כן יש לקשר בין הנוסחאות, אפשר גם כתרגילי בית, ולהראות שהן עקביות זו לזו.
לדוגמה: השפעת כפל בקבוע g(x)=af(x) על גרף הפונקציה היא מתיחה/כיווץ אנכית: מתיחה/כיווץ פי a של ציר ה-y והגדלה/ הקטנת השיפועים בהתאם, ולכן g′(x)=af′(x).
בדומה, ניתן להשפיע על הנגזרת בעזרת מתיחה/כיווץ אופקית (כלומר של ציר ה-x): אם g(x)= f(ax) שוב נקבל ש-g′(x)=af′(ax) אבל כאן אנו מותחים/ מכווצים את ציר ה-x בלי להשפיע על ערכי הפונקציה.

חקירת פונקציות ככלל ופונקציות פולינומיאליות בפרט

ג. **נגזרת ככלי לניתוח גרף הפונקציה**. חקירת פונקציות פולינומיאליות כולל חקירת תחום סגור, מציאת משוואת משיק בנקודה שעל הגרף ופתרון בעיות ערך קיצון).

ד. הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת ולהיפך באופן איכותני.
דוגמאות עם שימוש בטכנולוגיה:
- לדמיין נגזרות (תרגול אינטראקטיבי מאתגר של קאהן)
- התאמה של גרף הנגזרת לגרף הפונקציה

ה. תוך כדי הלימוד ישולבו באופן רציף ההיסטוריה של האנליזה במקביל להתפתחות המכניקה הניוטונית. כמו כן יוצג החשבון הדיפרנציאלי ככלי שימושי בתחומי דעת אחרים, במיוחד בפיזיקה. בתחום הקינמטיקה ניתן להגדיר את המהירות הרגעית כנגזרת של פונקציית המקום בנקודה

מסוימת בזמן; התאוצה הרגעית תוגדר כנגזרת של פונקציית המהירות בנקודה מסוימת בזמן. יוצג החוק השני של ניוטון (תאוצה*מסה = כוח) ויקושר חוק ניוטון לגבי משוואות התנועה עבור כוח קבוע לקינמטיקה (זוהי הזדמנות נוספת לחקירת פרבולות, אי-שוויון ממעלה ראשונה ואי-שוויון ממעלה שנייה עם ובלי פרמטר). כך, תנועת גוף תחת כוח קבוע (נפילה חופשית) תוצג כדוגמה ראשונה של משוואות דיפרנציאליות רגילות. הקישור המושגי המוצג לעיל מאפשר הצגת האנליזה ככלי למידול ולפתרון בעיות בפיזיקה. יש לתת את הדעת על כך שלשימוש בכלים המתמטיים בתחום הפיזיקה יש השתמעויות (השלכות)אופרטיביות, כמו הצורך להציג ממדים ופרמטרים כגדלים פיזיקליים, מה שמוסיף מערכת שיקולים בפתרון בעיות. לפי התכנית תוצגנה דוגמאות של מידול במכניקה, והתלמידים יצטרכו לפתור בעיות דומות (ראו דוגמאות בנספח 1).

חקירת פונקציית השורש

ו. פונקציית השורש הריבועי. הצגת השורש הריבועי כפונקציה הפוכה לפונקציה ריבועית. הרחבת מושג המעריך למעריך רציונלי כפונקציה הפוכה לחזקה שלמה, תוך שימור חוקי החזקות. קישור בין חוקי החזקות לשורשים. קישור גרפי של פרבולה ושורש בעזרת שיקוף לישר y=x. הקשר בין הנגזרות של פונקציות הפוכות ושימוש בשיקוף להוכחת הקשר בין הנגזרות.

דגש על כך ש: $\sqrt{x^2} = |x|$

פתרון משוואות אי-רציונליות פשוטות. יש להדגיש את הצורך בבדיקת הערכים שמתקבלים בתהליך האלגברי של הפתרון על ידי הצבה במשוואה המקורית (ראו http://highmath.haifa.ac.il/data/alle39-10.pdf ודוגמאות כמו הרחבת עולם הפונקציות - הזזות ומתיחות, פונקציית ערך מוחלט וכדומה.

רמת המורכבות של פונקציות שמתחת לסימן השורש תוגבל בשלב זה לפונקציות לינאריות, להזזות ולמתיחות שלהן (ותורחב לפונקציות ריבועיות במידה ונותר זמן לכך). בכיתה י"א, לאחר חקירת פונקציות רציונליות, נחזור באופן ספירלי לחקירת פונקציות מורכבות יותר בהן השורש מעורב.

ז. מתוך הבנת הצורך בחקירת פונקציות כפתרון לבעיות שימושיות, הצגה של חקירת פונקציות כנושא מתמטי. בכך ייכללו: נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי עלייה וירידה, זוגיות ואי-זוגיות. המשמעות האלגברית והגרפית של נקודות חיתוך של פונקציות, של $f(x) > g(x)$,$f(x) – g(x)$ וכד'. תרגול וקישור לפתרון מערכת משוואות ממעלה שנייה עם שני משתנים ולמשוואות הנפתרות על ידי הצבה (כמו משוואה דו-ריבועית).

פונקציות טריגונומטריות (15 שעות)

מבוא

מטרת פרק זה היא להציג משפחה חדשה של פונקציות שלא מוגדרות על ידי מניפולציה אלגברית (לקחת מספר ממשי ולהפעיל עליו פעולות חשבון כלשהן) אלא על ידי מניפולציה גאומטרית. התכונה העיקרית של פונקציות חדשות אלה היא המחזוריות שלהן. מחזוריות היא תכונה הנצפית בתופעות טבע רבות.

התיאור המתמטי של פונקציות מחזוריות מאפשר מידול תופעות אלו וכן הבנה טובה יותר שלהן ושל תכונותיהן והשלכותיהן.

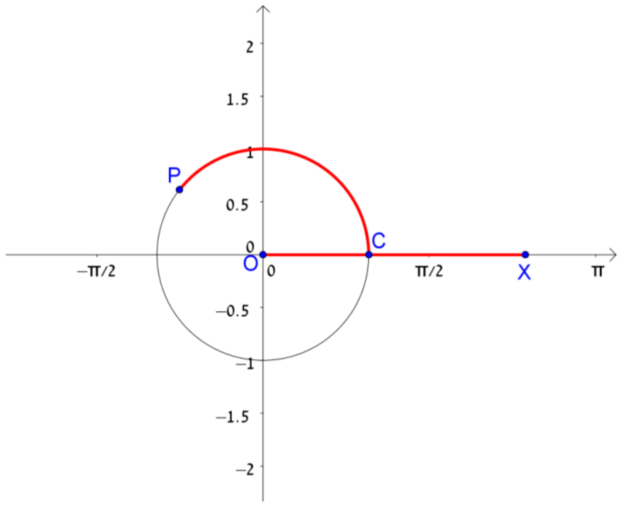
בפרק המבוא נלמד תכונות בסיסיות של פונקציות אלה, ובפרקים הבאים (שיילמדו בכיתות י"א-י"ב) נלמד את התכונות הדיפרנציאליות והאינטגרליות שלהן. בנוסף נלמד נושאים רבים ושונים שמשתמשים בהם בפונקציות טריגונומטריות (למשל בגאומטריית המישור והמרחב ובמספרים מורכבים).

דגשים

- גזירת תכונותיהן של הפונקציות הטריגונומטריות מתוך הגדרותיהן על מעגל היחידה.[4]
- אפיון הפונקציות הטריגונומטריות כפונקציות מחזוריות.
- הצגת הבעייתיות החישובית למציאת ערכי הפונקציות הטריגונומטריות.
- מעבר בין ייצוגים שונים של הפונקציות הטריגונומטריות (על מעגל היחידה, גרף של פונקציה, יחסים במשולש ישר זווית).
- תכונות סימטריה של הפונקציות הטריגונומטריות והאינווריאנטיות שלהן ביחס לטרנספורמציות מסוימות.
- שימוש בכלי המתמטי החדש:
  - פתרון בעיות בגאומטריית המישור.
  - מידול תופעות מחזוריות.

תכנים

נגדיר את הפונקציות הטריגונומטריות הבסיסיות (קודם $\cos(x)$, $\sin(x)$ ואח"כ $\tan(x)$) על מעגל היחידה באופן אופֶּרציונלי. במילים אחרות, כאשר ניתן מספר ממשי, נגדיר באופן גאומטרי את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבורו.[5] דרך אחרת היא להגדיר את הפונקציות הטריגונומטריות באופן דינמי כמתארות את תכונותיה של נקודה הנעה על מעגל היחידה. פונקציית הסינוס מתארת את השתנות גובה הנקודה מעל ציר ה-x. במסמך זה כלולה כרגע רק הדרך הראשונה.



א. הגדרת נקודות על מעגל היחידה

i. שלב ראשון הוא התאמה בין מספר ממשי לנקודה על מעגל היחידה. לכל מספר ממשי מתאימה נקודה על מעגל היחידה שמתקבלת באופן הבא: אם המספר הממשי חיובי, מלפפים על מעגל היחידה נגד כיוון השעון קשת שאורכה כמידת המספר הממשי החל בנקודה (1,0). אם המספר הממשי שלילי, עושים את אותה פעולה אלא שהפעם הליפוף הוא עם כיוון השעון. יש לבסס את ההגדרה באמצעות תרגול מתאים (ראו לדוגמה "פונקציות טריגונומטריות" מאת אורי רימון, חנה פרל וסטלה שגב עמ' 1-10).

מומלץ להשתמש באורך קשת על מעגל לפי החלק היחסי בלי שימוש במעלות ובלי לציין את

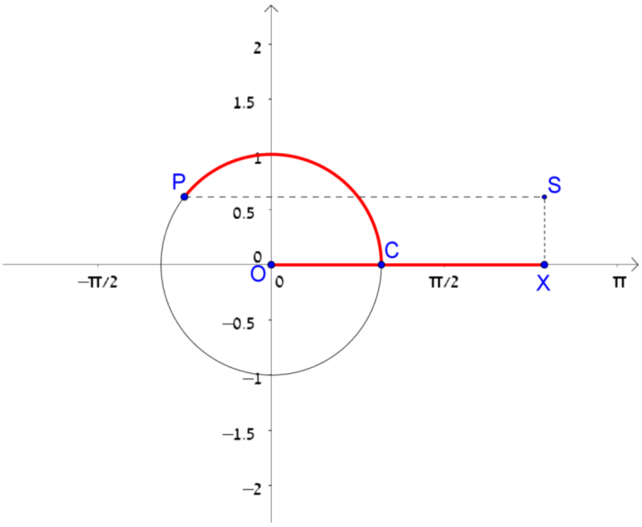
---

[4] לחילופין, ניתן גם להשתמש בהגדרת הפונקציות במשולש ישר זווית והרחבת ההגדרה לזוויות שאינן חדות, ולאחר מכן להגיע מכך לנושא המחזוריות. זוהי השיטה היותר נפוצה כיום ולכן לא נפרטה כאן. הדעות חלוקות גם בקרב הועדה לגבי השיטה העדיפה מבחינה דידקטית, אך כן נעמוד על כך שבכל מקרה בסוף כיתה י' התלמידים יבינו את נושא המחזוריות ככלל ושל פונקציות טריגונומטריות בפרט.

[5] ראו למשל *אנליזה 4 ו-5 יח"ל*, כרך ראשון מאת אנה ספרד, חנה פרל, פרופ' שמשון עמיצור ופרופ' מיכאל משלר, הוצאת המרכז הישראלי להוראת המדעים, האוני' העברית בירושלים, פרקים 10-11.

המילה "רדיאן" כדי לא ליצור בלבול בשלב מוקדם זה. ידוע כי היקף מעגל היחידה הוא 2π וקשת שמתאימה לרבע מעגל היא רבע של 2π.

ii. לכל מספר ממשי מתאימה נקודה יחידה על מעגל היחידה. לעומת זאת, לכל נקודה על מעגל היחידה יש אינסוף מספרים ממשיים שנקודה זו מתאימה להם. אם הנקודה P מתאימה למספר ממשי X, אזי היא מתאימה לכל מספר ממשי מהצורה X+ 2kπ לכל k שלם.

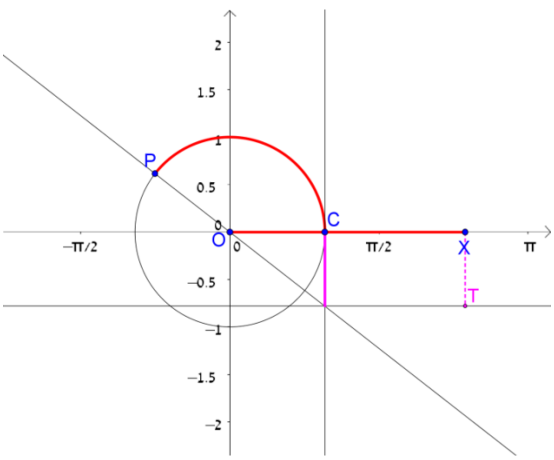


ב. נגדיר את הפונקציה $\sin(x)$ כפונקציה שמתאימה לכל מספר ממשי את שיעור ה- Y של הנקודה P על מעגל היחידה שהוגדרה לעיל.
נסיק ישירות מתוך ההגדרה באמצעות כלים גאומטריים את תכונות המחזוריות והסימטריה של פונקציית הסינוס. לדוגמה $-\sin(x) = \sin(-x)$ וכו'.

ג. באותו אופן נגדיר את $\cos(x)$ כפונקציה שמתאימה לכל מספר ממשי את שיעור ה-X של הנקודה P על מעגל היחידה שהוגדרה לעיל. גם כאן נסיק ישירות מההגדרה את תכונות המחזוריות והסימטריה של פונקציית הקוסינוס.

ד. נציג באופן גרפי את שתי הפונקציות $\sin(x)$ ו- $\cos(x)$ ונראה את הקשרים ביניהן, כולל הזזות מתיחות וכיו"ב (ראו דוגמאות).
הסקה של הזהויות

$sin^2x + co$



ה. נגדיר את הפונקציה $\tan(x)$ באמצעות הישר המשיק למעגל היחידה בנקודה (1,0). נלמד את תכונות הפונקציה וייצוג הגרפי.
הערה: הגדרת פונקציית הtan(x) היא הזדמנות נוספת לדון בנושא הגבול ובנושא של פונקציות המוגדרות על קבוצות חלקיות לישר הממשי. כאן ניתן לדון בהצגת גבולות אינסופיים, גבול מימין ומשמאל וכהעשרה להבחין בין אי-קיום גבול (למשל בפונקציות מחזוריות כאשר x שואף לאינסוף) לקיום של גבול אינסופי.

ו. נוכיח בעזרת דמיון משולשים את הקשר $\tan(\mathrm{x}) = \frac{\sin(\mathrm{x})}{\mathrm{con}(\mathrm{x})}$ (השימוש בדמיון מהווה הכנה לסעיף *שימושים של הפונקציות הטריגונומטריות בפתרון בעיות בגאומטריית המישור*).

ז. נלמד איך מחשבים את הערכים של הפונקציות הטריגונומטריות, מה מספר לנו המחשבון.

ח. נזכיר כי יש פונקציות מחזוריות שאינן פונקציות טריגונומטריות פשוטות תוך שימת דגש על תופעות מחזוריות בחיי היום-יום: למשל, תנועת כדור הארץ, הירח, כוכבי הלכת, זרם חילופין בחשמל, שעון מטוטלת, ריצה באצטדיון או במסלול מֵרוצים שיש להקיפו מספר פעמים ועוד, ראו גם תרגילים בנספח 1 (ניתן להקדים את הפרק הזה להגדרת הפונקציות הטריגונומטריות)

הערה: ניתן לכתוב פונקציות מחזוריות כלליות כסכום (לעִתים עם אינסוף איברים) של פונקציות טריגונומטריות בסיסיות - סכום זה נקרא טור פורייה. הפיתוחים המתמטיים בתחום זה מהווים אבן בסיס לעיבוד אותות ועיבוד תמונה – כולנו משתמשים בכך בחיי היום-יום! ניתן להפנות תלמידים המתעניינים בכך לקרוא על שימושים ועל ההיסטוריה בתחום זה בוויקיפדיה.

ט. נלמד משוואות וזהויות טריגונומטריות בסיסיות:

i. ערכים של הפונקציות הטריגונומטריות במספרים ממשיים מיוחדים ($\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$).

ii. אפיון קבוצת התמונות של הפונקציות הטריגונומטריות (התנאים לקיום פתרון במשוואות מהסוג $\sin(x) = a$, $\cos(x) = b$, $\tan(x) = c$).

פתרון משוואות מהצורה $A \cdot sin(a \cdot x + b) + B = 0$, $C \cdot cos(c \cdot x + d) + D = 0$) וכן $E \cdot \tan(e \cdot x + f) + F = 0$.

פתרון המשוואות שצוינו לעיל. פתרון כללי ופתרון בתחום חלקי לישר הממשי וקישור להצגתן הגרפי של פונקציות אלה.

iii. הוכחת זהויות טריגונומטריות באופן אלגברי וגאומטרי (סינוס סכום והפרש, קוסינוס סכום והפרש) ופתרון משוואות מתאימות. הזהויות תילמדנה בעיקר כדי ליצור תשתית תאורטית להוכחת הנגזרת של פונקציית הסינוס. מטרת הלימוד אינה שיפור המיומנויות הטכניות של התלמידים להוכיח זהויות ולפתור משוואות מסוג זה.

iv. פתרון משוואות פשוטות בעזרת הזהויות המקשרות בין סינוס וקוסינוס.

גאומטריה אוקלידית (50 שעות)

מבוא

לימוד הגאומטריה מאפשר לחדד מספר נושאים דידקטיים שהוזכרו בין המטרות הכלליות של התכנית ושיש להדגיש במהלך לימוד הפרקים השונים בגאומטריה.

- הכרת מערכת היסקית ולימוד מיומנויות היסק ובכלל זה:
  - הבנה שהוכחות בגאומטריה מתבססות **רק** על הגדרות, מושגי יסוד, אקסיומות ותוצאות שהוכחו בעבר.
  - הבנת התשתית הלוגית של המתמטיקה: כמתים כגון לכל וקיים, גרירה לוגית, תנאי מספיק, תנאי הכרחי ודוגמה נגדית.
  - הבחנה בין משפט למשפט הפוך.
  - חשיבה היסקית: יכולת להבין הוכחה נתונה ולהוכיח משפט באופן עצמאי.
  - כתיבה פורמלית: כל טענה מנומקת היטב.
- חינוך לספקנות ולחשיבה ביקורתית באמצעות הוכחה מחד ובדיקת היתכנות מאידך.
- העלאת שאלות החושפות תופעות מפתיעות ובעלות השלכות על תכונות כלליות של צורות גאומטריות. שאלות כאלה אף מסייעות לפיתוח יצירתיות במתמטיקה שכן הן מעודדות יצירת פתרונות שונים לאותה בעיה, העלאת השערות שונות וניסוח הוכחות שונות לאותה טענה.
- חשיפת תופעות שאינן מובנות מאליהן ולכן מחזקות את התובנה שיש צורך בהוכחה.
- הקדמת תכנון לביצוע, הן בתכנון בניות גאומטריות והן בתכנון הוכחות שיש להן שלבים אחדים: הכרת דרכים שונות, ישירות ועקיפות, להוכחה והפרכה, בחינה סכמטית של מספר דרכי ההוכחה ובחירה באלגנטית/ הקצרה שבהן.
- הבחנה בין שימוש בדוגמאות, אי-דוגמאות ודוגמאות נגדיות להוכחות כלליות.
- פיתוח קישוריות: בתוך הגאומטריה (למשל, על ידי הוכחות בדרכים שונות) ובין הגאומטריה לבין נושאים אחרים (למשל שימוש באלגברה בשרות הגאומטריה ולהיפך, עיסוק בממוצעים דרך נושאי לימוד שונים).
- היכרות בסיסית עם סביבות גאומטריות דינמיות המאפשרות חקר וגילוי קשרים גאומטריים. היכרות עם טכנולוגיות עזר לפתרון בעיות מתמטיות.
- פרק הגאומטריה משמש בסיס לנושאים נוספים בתכנית הלימודים: גאומטריה אנליטית, טריגונומטריה, גאומטריית המרחב, וקטורים ולנושאים שונים מחוץ למתמטיקה (למשל אופטיקה, אומנות, ארכיטקטורה).

דגשים בהקשר לנלמד בחט"ב

התכנית בגאומטריה נלמדת כהמשך לתכנית הגאומטריה בחטיבת הביניים שתכניה והדגשים שבה עברו שינוי. בתכנית חט"ב הוכנסו תכנים חדשים כמו הוכחות בדרך השלילה ובניות גאומטריות בסרגל ובמחוגה. לצד התכנים החדשים הושם דגש על כמתים כגון לכל וקיים, על הבחנה בין משפט למשפט הפוך, על דרכי הוכחה והפרכה. לעומת זאת, תכנים שהיה נהוג ללמד בחט"ב נדחו לחטיבה העליונה (מעגל ודמיון משולשים בגישה היסקית). לתשומת לב מיוחדת ראויה העובדה שהתלמידים עסקו בדמיון משולשים כבר בכיתה ח, כאשר הגישה ללימודי הגאומטריה עדיין לא הייתה היסקית. למעשה הם מסיקים דמיון בין משולשים על סמך שוויון בין זוויות מתאימות, למרות שלא הוכיחו אף משפט של דמיון משולשים. בכתיבת התכנית הבאנו בחשבון את התכנים החדשים בתכנית הגאומטריה של חט"ב כנזכר לעיל, תכנים בגאומטריית המרחב ועוד. כדי לשמר תכנים אלה ישולבו בהוראה פעילויות העוסקות בבנייה, בכמתים ובגופים מרחביים (מדובר בפעילויות שאינן דורשות שימוש במשפטים של גאומטריית המרחב שיילמדו רק בכיתה י"ב). דוגמה לשאלות כאלה מופיעה בפרק דמיון משולשים.

תכנים

יילמדו שלושה נושאים עיקריים: מקומות גאומטריים ונקודות מיוחדות במשולש, המעגל ודמיון משולשים (ניתן גם להחליף את הסדר וללמד את פרק דמיון משולשים לפני פרק המעגל).

בפרק הדוגמאות שבנספח 1 מוצגים ניתוח והרחבה של שאלות בחינת בגרות משנים קודמות בדגש על תכנים רצויים בשאלות אלה או בשינויים המוצעים; בשאלות משולבות דוגמאות של בעיות תלת-ממדיות שניתן לפתור בעזרת גאומטריית המישור.

בנספח 3 מוצגת רשימת המשפטים הנוכחית בגאומטריה מאתר המפמ"ר בציון המשפטים הנלמדים בחט"ב, משפטים הנלמדים בתכנית החדשה (בכיתה/כשיעורי בית) ומשפטים שהוצאו מן התכנית.

מקומות גאומטריים, נקודות מיוחדות במשולש ומשפט חפיפה רביעי (10 שעות)

- מעגל הוא אוסף הנקודות שמרחקיהן מנקודה נתונה שווים לגודל נתון.
- אנך אמצעי לקטע הוא אוסף הנקודות שמרחקיהן מקצות הקטע שווים זה לזה.
- חוצה זווית הוא אוסף הנקודות שמרחקיהן משתי שוקי הזווית שווים זה לזה.
- ישרים מקבילים כמקום גאומטרי.
- שלושת האנכים האמצעיים במשולש נפגשים בנקודה אחת. נקודה זו היא מרכז המעגל החוסם את המשולש.
- שלושת חוצי הזוויות במשולש נפגשים בנקודה אחת. נקודה זו היא מרכז המעגל החסום במשולש.
- שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת. נקודה זו מחלקת כל תיכון לשני חלקים שהיחס ביניהם 2:1 כשהחלק הגדול ליד הקדקוד והוא "מרכז הכובד" של המשולש.
- שלושת הגבהים במשולש נפגשים בנקודה אחת.
- לכל משולש אפשר לבנות מעגל שעובר דרך קדקודיו (מעגל חוסם).
- בכל משולש אפשר לבנות מעגל שמשיק לצלעותיו (מעגל חסום).
- תרגול מציאתו של מרכז מעגל חוסם ומרכז מעגל חסום באמצעות סרגל ומחוגה ו/או תוכנה דינמית.

- **הערות**

בכל המקרים יודגש שלצורך הוכחה שקבוצת נקודות היא מקום גאומטרי, יש להוכיח את שני הכיוונים:

1. כל נקודה במקום הגאומטרי מקיימת את התכונה.
2. כל נקודה שמקיימת את התכונה שייכת למקום הגאומטרי.

- מדובר בפרק ראשון בגאומטריה בכיתה י, ולכן יש להדגיש מיומנויות של כתיבת הוכחה.
- יש לציין את ההבחנה בין משפט למשפט הפוך.

משפט חפיפה רביעי

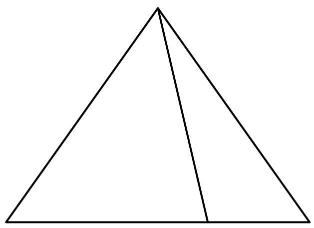
אם בשני משולשים שתי צלעות שוות בהתאמה, והזוויות מול הצלעות **הגדולות** מבין השתיים שוות – **אזי המשולשים חופפים**.

לעומת זאת, אם בשני משולשים שתי צלעות שוות בהתאמה, והזוויות מול הצלעות **הקטנות** מבין השתיים שוות – **אזי לא ניתן להסיק שהמשולשים חופפים**.

זו דוגמה יפה לצורך בדיוק במשפט ובהוכחה – האינטואיציה שפיתחנו ממשפטי החפיפה הקודמים אינה מספיקה כאן ועלולה להכשיל.

חשוב להכיר דוגמה פשוטה:

במשולש שווה שוקיים כל קטע מקדקוד הראש לנקודה פנימית בבסיס שאינה אמצע הבסיס, מחלקת את המשולש לשני משולשים לא חופפים השווים בשתי צלעות ובזווית שמול הצלע הקטנה ביניהן.



אם בשני משולשים שתי צלעות שוות בהתאמה, והזוויות מול הצלעות הקטנות מבין השתיים שוות – קיימות שתי אפשרויות: או שהמשולשים חופפים או שהמשולשים אינם חופפים, והזוויות שמול הצלעות הגדולות מבין השתיים משלימות ל-$180°$.

הערה: משפט החפיפה הרביעי כלול בתוכנית הלימודים לחטיבת הביניים, אך הנושא לא טופל בהעמקה. בפרט חשוב לחזור אל משפט החפיפה הרביעי ואל המצב שבו לא מתקיימת חפיפה בעת למידת משפט הסינוסים ומשפט הקוסינוסים בכיתה י"א.

מיומנויות: לבנות משולש לפי שתי צלעות וזווית מול הצלע הגדולה ולפי שתי צלעות וזווית מול הצלע הקטנה.

המשפט ההפוך למשפט פיתגורס

משולש בו סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית הוא ישר זווית.

המעגל (20 שעות)

1. קשתות, זוויות ומיתרים במעגל

הגדרות

- **מעגל**: קבוצת כל הנקודות שמרחקן מנקודה מסוימת שווה לאורך מסוים קבוע, נקראת מעגל. הנקודה היא מרכז המעגל, והאורך הקבוע הוא אורך הרדיוס.

- **רדיוס המעגל**: קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה על המעגל.
- **מיתר**: קטע המחבר שתי נקודות על המעגל.
- **קוטר המעגל**: מיתר העובר דרך מרכז המעגל.
- **קשת**: חלק מהמעגל המוגבל על ידי שתי נקודות (שתי נקודות **שעל** מעגל מחלקות אותו לשתי קשתות).
- **זווית מרכזית**: זווית שקדקודה במרכז המעגל ושוקיה רדיוסים.
- **זווית היקפית:** זווית שקדקודה על היקף המעגל ושוקיה חותכים את המעגל.

משפטים

- במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו **רק אם** הקשתות הנשענות עליהן שוות.
- במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו **רק אם** המיתרים הנשענים עליהן שווים.
- האנך שיורד ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית המתאימה למיתר וחוצה את הקשת המתאימה למיתר.
- ככל שמיתר במעגל גדול יותר, מרחקו מהמרכז קטן יותר.
- זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית המונחת על אותה קשת.

מסקנות

- לזוויות היקפיות שוות במעגל קשתות שוות ומיתרים שווים.
- לקשתות שוות מתאימות במעגל זוויות היקפיות שוות.
- זווית היקפית שנשענת על קוטר היא זווית ישרה.
- במרובע החסום במעגל סכום כל שתי זוויות נגדיות הוא $180°$.
- להסיק משפט הפוך: מרובע שסכום כל זוג זוויות נגדיות בו הוא $180°$, ניתן לחסום במעגל.

2. משיק למעגל

הגדרה: משיק למעגל הוא ישר שיש לו נקודה משותפת אחת עם המעגל.

משפטים

- המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.
- ישר שמאונך לרדיוס בקצהו משיק למעגל.
- שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה, שווים זה לזה.
  - מסקנה: במרובע שחוסם מעגל סכום כל שתי צלעות נגדיות שווה לסכום הצלעות הנגדיות האחרות.
- זווית הכלואה בין משיק ומיתר היוצאים מנקודה אחת שעל המעגל שווה לזווית ההיקפית הנשענת על הקשת הכלואה בין המשיק למיתר.

בניות

- למצוא מרכז של מעגל נתון.
- להעביר משיק למעגל מנקודה על המעגל.
- להעביר משיק למעגל מנקודה שאינה על המעגל.

הערות

- ניתן היה להגדיר את המשיק למעגל כישר שמאונך לרדיוס בקצהו, ולהוכיח שלמשיק יש רק נקודה משותפת אחת עם המעגל. זו הזדמנות לדון בהגדרות שקולות ובמבנה הלוגי של הגאומטריה.
- המשפטים על הניצבות של המשיק לרדיוס מזמנים שימוש בהוכחות בדרך השלילה. הוכחות אלו דורשות הסבר לוגי שאינו פשוט להטמעה והבנה, אך הן מהוות נדבך חשוב ביכולת ההוכחה בגאומטריה.

פרופורציה ודמיון משולשים (20 שעות)

משפטים

- משפט תאלס, המשפט ההפוך לו והמשפטים הנובעים משניהם.
- ארבעת משפטי הדמיון של משולשים.
  - היחס במשולשים דומים בין היקפים, תיכונים, חוצי זווית, גבהים ורדיוסי מעגלים חוסמים ומעגלים חסומים.
  - היחס בין היקפים והיחס בין שטחים במצולעים דומים.
- משפט חוצה הזווית הפנימית במשולש.
- יש להכיר תכונות של קטעים פרופורציוניים, ולדעת לקבל יחסים חדשים מתוך יחסים נתונים. למשל, כשנתון היחס a/b= c/d לדעת להסיק בדרך אלגברית (a+b)/b = (c+d)/d.
- יש לזהות משולשים דומים ולזהות מהם החלקים הדומים, הוכחת הדמיון, מציאת יחס הדמיון, הסקת מסקנות חישוביות מתוך הדמיון.
- יש לפתח מיומנויות שימוש בדמיון משולשים בהוכחות.
- פרופורציות במשולש ישר זווית ובמעגלים יילמדו במסגרת התרגול.

בניות

- חלוקת קטע ל-n חלקים שווים.
- חלוקת קטע ביחס נתון.

דמיון משולשים במעגל

- יש לזהות משולשים דומים על סמך יחסים בין זוויות במעגל.
- ככלל, מסקנות מדמיון משולשים לא יילמדו כמשפטים שעליהם ניתן לבסס תרגילים אחרים, אלא ייחשפו במסגרת התרגול. משפטים שכדאי לחשוף במסגרת התרגול:
  - משפט על מיתרים נחתכים במעגל.
  - משפט על משיק וחותך שיוצאים מאותה נקודה.
  - משפט על שני חותכים שיוצאים מאותה נקודה.

דגשים

- כאן נחזור ונדגיש שלמרות שהתלמידים מכירים את משפט הדמיון "זווית-זווית" יש להביא בחשבון שהמשפט לא נלמד בגישה היסקית, ולכן לא ניתן לבסס עליו הוכחות של משפטים. **בפרט** אין לבסס את ההוכחה של משפט תאלס על משפטי דמיון משולשים, כיוון שמשפט זה

הוא הבסיס להוכחות של משפטי הדמיון.

- דמיון בין צורות הוא מושג שימושי, למשל בתכנון ובנייה של מודלים בתעשייה ובארכיטקטורה, בציור, בפיסול ועוד. יש לכלול דוגמאות שכאלה בתרגילים ובפרויקטים.

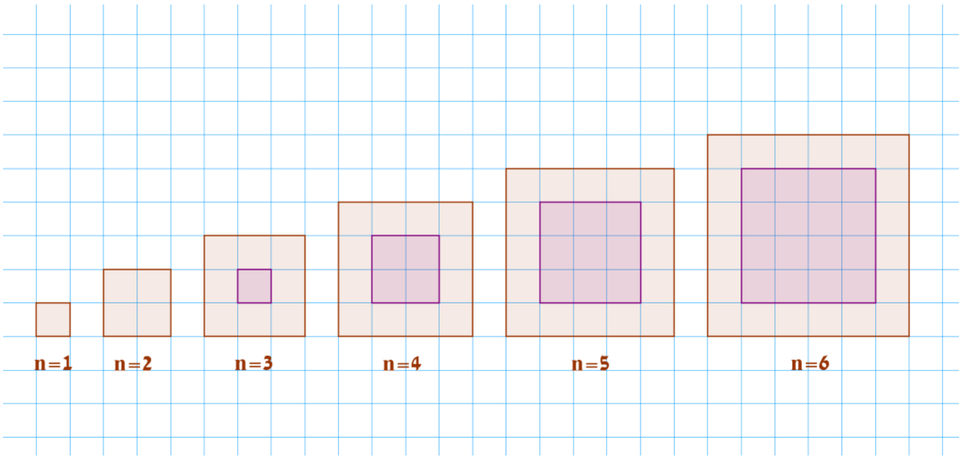
נספח 1: דוגמאות לשאלות על פי נושאי הלימוד

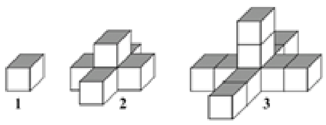
רוב הדוגמאות המובאות מרחיבות את אוסף הדוגמאות המוכרות מספרי הלימוד הקיימים. הן מסמנות יעדים ומדגימות פעילויות שתואמות את הדגשים בתכנית החדשה ואת הערך המוסף שלה.

שוב נדגיש כי דוגמאות ו/או נושאים המצוינים **כהעשרה** לא ייכללו כנושאי חובה בתכנית, אך מצופה מהמורים להכירם ולהפנות את התלמידים המתעניינים לקריאה עליהם בספרי הלימוד (עם הרחבה נוספת בתכנית ה-5++).

כהעשרה מתמטית, תרבותית ומדעית, כמצוין בכמה דוגמאות, כדאי להפנות את התלמידים לקריאה על דמויות מרכזיות בפיתוח המתמטיקה הנלמדת, על התחומים שפיתחו וחשיבותם. רשימת המתמטיקאים/המדענים שכדאי שיכירו את תרומתם: אוקלידס, דקארט, ניוטון, לייבניץ, הילברט, גדל, גלואה, פוינקרה, ברנולי, גאוס, פון-ניומן, פורייה, פרמה, ווילס, סמייל ועוד.

חשוב לציין שבנוסף לתרגילים המוצעים ברוח התכנית, יש לכלול תרגילים רגילים שיתרמו להבנה ולשליטה בחומר ויפתחו את היכולות הטכניות של התלמידים בהדרגה. בדרך זו הם יוכלו להתמודד עם רמת המורכבות בדוגמאות הנתונות (אין צורך לכלול תרגילים מאוד טכניים ברמת מורכבות גבוהה באופן משמעותי מהדוגמאות המובאות).



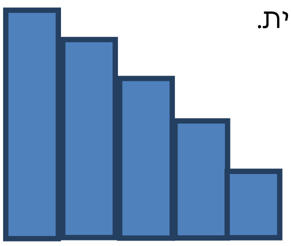
- השאלות מתייחסות לאיור לעיל.
  כמה משבצות a_n יש לצבוע במסגרת הריבוע שאורכו n משבצות?
  כמה משבצות b_n (כפונקציה של n) יש לצבוע אם צובעים רק את פנים הריבוע?
  כִּתבו עבור כל סדרה נוסחה לפי מקום (רצוי לפתח כל נוסחה בכמה דרכים).
  ערכו טבלה לערכי הסדרות עבור עשרת הערכים הראשונים (כדאי להשתמש בגיליון אלקטרוני).
  הציגו את ערכי הסדרות כגרף של a_n לעומת n.
  האם הסדרות עולות/ יורדות/ משתנות? (אתגר: מה קצב העלייה?)
- השאלות מתייחסות לאיור שלהלן.
  

  כמה קוביות נוספו במעבר מהערמה הראשונה לשנייה?
  כמה קוביות נוספו במעבר מהערמה השנייה לשלישית?
  ציירו את הערמה הרביעית. מהו כלל הנסיגה? מהי הנוסחה לפי מקום?
  כמה קוביות יש בערמה שנמצאת במקום ה-23? (רצוי להשתמש בגיליון אלקטרוני לחישוב)
  האם קיימת ערמה שיש בה 16 קוביות? אם כן, מה המיקום שלה?
- שאלות לגבי נוסחת מקום או כלל הנסיגה עבור דוגמאות נוספות, למשל אלו המוצגות בקישורים:
  - <u>מאגר תבניות בתמונות</u>
  - <u>המלך מתיא</u>
- דוגמה יישומית: גרף המייצג נתונים של ריכוז חיידקים במשטח גרון עם מדידות בכל שעה מהווה סדרה שיודעים להגדיר את החוקיות שלה בקירוב (נדון בכך בהמשך). התחזית מתי הריכוז עובר את סף המינימום לגילוי במכשיר המעבדה של קופת חולים מגדירה מתי יימסרו לכם תוצאות המעבדה.

- **הערשה** - הצגת דוגמאות ואי-דוגמאות לחידוד הנושא של הגדרת סדרה וההבדל (העדין!) בין אי-ידיעת החוקיות הדטרמניסטית לבין סדרות אקראיות:
  - אי-דוגמה: גרף המייצג נתונים של ריכוז החיידקים במשטח גרון עם מדידות בכל שעה של **מספר חולים יחד**, ייתן בדרך כלל מספר ריכוזים בכל שעה. אם כל הנתונים מוצגים יחד, הרי אין זו סדרה (לכל n יש כמה ריכוזים אפשריים).
  - דוגמאות לסדרות שהחוקיות בהן לא דטרמיניסטית (ולכן לא יידונו בתכנית): אדם בוחר בכל יום n כמה קילומטרים ירוץ a_n על פי הטלת קובייה. מכאן שאין קשר בין הערך a_n לערך a_{n+1} או לערך של n : הסדרה המתקבלת היא סדרה אקראית, סדרה שאיבריה נקבעים על פי חוקים הסתברותיים.
  - נבחר מספר ממשי בקטע [0,1], נכתוב אותו בייצוג העשרוני, ונגדיר את הסדרה a_n להיות הספרה ה- n לאחר הנקודה. מתקבלת סדרה עם חוקיות "אינסופית": כאשר ניתן המספר במדויק (כל ספרותיו), ניתן לחשב כל איבר בסדרה.
    האם ניתן למצוא חוקיות "פשוטה" של הספרה ה-a_n, למשל כפונקציה של n? או כחוק רקורסיבי?
    חִשבו: באילו מקרים (עבור איזה סוג של מספרים) אנו יודעים להציג בקלות את חוקיות הסִדרה?

סדרות חשבוניות

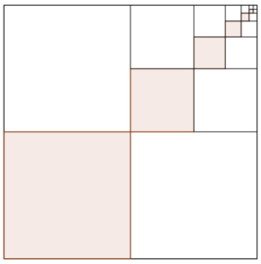
- בכל שורה באולם קולנוע יש חמישה מושבים יותר מאשר בשורה הקודמת. בשורה הראשונה יש עשרים מושבים. כמה שורות יש באולם אם נתון שהקיבולת המרבית שלו היא 1,125 אנשים?
- **בעיית מכלי הדלק וואריאציות עליה.**
- בעיות שכר/השקעה למיניהן (גם כהכנה להשוואה עם סדרות הנדסיות): הציעו לך משכורת התחלתית של 4,000 ₪ לחודש, והבטיחו שכל חודש יעלו את המשכורת ב-20 ₪ (0.5% מהמשכורת ההתחלתית). כעבור כמה חודשים תגיע המשכורת החודשית ל-5,000 ₪?
- כעבור כמה חודשים המשכורת תהיה כפולה מהמשכורת ההתחלתית? כמה תרוויחו בשנת עבודה? (רצוי שימוש באקסל).
- מהו סכום המספרים הזוגיים שבין 1 ל-100? מהו סכום המספרים באותו תחום שמתחלקים ל-3 ושאלות דומות. קראו על התלמיד גאוס בוויקיפדיה /באינציקלופדיה. מי היה גאוס? באיזו מאה חי? מה היו תרומותיו החשובות למדע ולמתמטיקה?
- מדרגות למיניהן: קבלן בנה גרם מדרגות שגובה כל מדרגה בו (לפי חוקי הבנייה) 17.5 ס"מ ועומקה 26 ס"מ. יש לצבוע את הקיר התומך בגרם המדרגות (ראו איור), ולשם כך יש לחשב את שטחו: מהו שטח הקיר התומך אם בגרם המדרגות יש 5 מדרגות? 15 מדרגות? מה הקשר לנוסחת הסכום של הסדרה? הציגו את הסדרה כגרף והציגו את התוצאה בצורה גרפית.

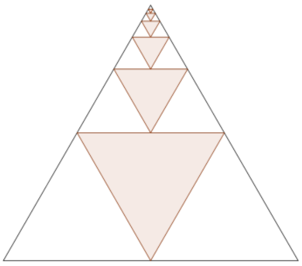


- נסמן ב-a_n איבר כללי של סדרה חשבונית. שערו האם הסדרות $3a_n$, a_{2n}, $a_n + 4$, $(a_n + 4)^2$ הן גם סדרות חשבוניות? הוכיחו את השערתכם (כאן המקום להסביר שכדי להוכיח שהסדרה חשבונית, יש להראות שההפרש בין כל שני איברים עוקבים קבוע, בעוד שעבור ההוכחה שהסדרה אינה חשבונית מספיק להראות ששני הפרשים מסוימים אינם שווים; ראו דגשים). בחרו דוגמה פרטית לסדרה a_n והציגו את הסדרות השונות עבור $n=1,..10$ בצורה גרפית וכטבלה (רצוי בגיליון אלקטרוני).

סדרות הנדסיות

- שטח משולשים וריבועים צבועים (דוגמה לחישוב ויזואלי של סכום אינסופי של סדרה הנדסית).
- ראו גם הפיצוח: **סדרה הנדסית מתכנסת**
- ראו גם הפיצוח: **תמונות**
  - **מספרות על סכום** - הוכחות ויזואליות של סכום סדרה חשבונית וסדרה הנדסית.





- סיפור המלך והאורז על לוח השחמט (ראו למשל קישור לפיצוח עם יישום של גליון אלקטרוני: אגדה של פונקציה).
- חידת הזבוב ופיתרונו של פון-ניומן. מי היה פון-ניומן? באיזו מאה הוא חי? מה היו תרומותיו החשובות למדע ולמתמטיקה?
- שאלות בנושא אינפלציה וריבית דריבית (ראו למשל **עלייה במחירי הדירות**.)
- בעיות שכר/השקעה למיניהן (השוואה עם סדרות חשבוניות): הציעו לך משכורת התחלתית של 4,000 ₪ לחודש, והבטיחו שכל חודש יעלו את המשכורת ב-0.25% . מה תהיה תוספת השכר בחודש השני, השלישי, הרביעי? כעבור כמה חודשים תגיע המשכורת החודשית ל-5,000 ₪? כעבור כמה חודשים תהיה המשכורת כפולה מהמשכורת ההתחלתית? כמה תרוויח בשנת עבודה? איזו הצעה עדיפה: העלאת שכר חשבונית של 20 ₪ בחודש או העלאה הנדסית של 0.25%? (השוואה למשל לדוגמה למעלה, דיון על פרק הזמן הנידון).
- גידול אוכלוסיות: למשל, משטח הגרון שהוזכר בפרק הראשון; **אני ואתה נשנה את העולם** הכולל יישום של גיליון אלקטרוני; **מרוב עצים לא רואים את היער.**
- "השירה היא האמנות לקרוא לאותו עצם בשמות שונים. המתמטיקה היא האמנות לקרוא לעצמים רבים באותו השם" (פוינקרה). תן דוגמה לשתי בעיות שונות שאותה סדרה ואותה מתמטיקה יכולה לשמש לייצוגן. מי היה פוינקרה? באיזו מאה חי ומה היו תרומותיו העיקריות למדע ולמתמטיקה?

- a_n הוא איבר כללי של סדרה הנדסית. שערו האם הסדרות $3a_n$, a_{2n}, $a_n + 4$, $(a_n)^3$, $(a_n)^2$, $(a_n + 4)^2$ הן גם הן סדרות הנדסיות.
הוכיחו את השערתכם (כאן המקום להסביר שכדי להוכיח שהסדרה הנדסית יש להראות שהמנה של כל שני איברים עוקבים קבועה, בעוד שעבור ההוכחה שהסדרה לא הנדסית מספיק להראות ששתי מנות מסוימות אינן שוות; ראו דגשים).
בחרו דוגמה והציגו את הסדרות השונות עבור $n=1,..10$ בצורה גרפית וכטבלה (רצוי בגיליון אלקטרוני).
- **הערה:** ההצגה העשרונית - הצגה של מספרים כסכום של סדרה סופית או אינסופית, שבמקרים מסוימים ניתן לכתוב כסכום של סדרות הנדסיות. התכנסות הסדרה מבטיחה שההצגה העשרונית הגיונית.
דוגמה א: המספר 11.111 או המספר ...11.11111 או ...11.111222222 (נגביל לייצוג עשרוני שבו סדרת הספרות שחוזרת על עצמה לא עולה על שלוש ספרות). שאלות אתגר/קריאה על הקשר בין מספרים רציונליים וייצוגם כסדרות הנדסיות.
- **הערה:** ההצגה הבינארית של מספרים כהכללה. שימושים במדעי המחשב ובייצוג תמונות דיגיטלי, למשל:
  - הצבע בכל פיקסל במסך המחשב/טלוויזיה/טלפון נייד שבשימושך מוצג בזיכרון כסכום העוצמות של הצבעים RGB: (Red,Green,Blue) לכל צבע יש 8 ביטים x_n (ספרות של 0 או 1) המייצגות את עוצמת הסדרה:
  $$2^0\,x_1+2^1\,x_2+2^2\,x_3+2^3\,x_4+2^4\,x_5+2^5\,x_6+2^6\,x_7+2^7\,x_8$$
  כך שהסדרה 00000000 נותנת את העוצמה הנמוכה ביותר (0). מהי העוצמה הגבוהה ביותר? מהן העוצמות שניתן להציג בעזרת סדרה הנדסית בודדת? בעזרת סכום של שתי סדרות הנדסיות? (אתגר: הכלילו ושערו איך ניתן להשתמש בכך לדחיסת מידע).
- ניתוח של שאלות מהבגרויות:

נושא + מקור	השאלה המקורית	הצעות שינוי
שאלון 806 קיץ תשע"ד מועד א	2. בסדרה חשבונית יש $3n$ איברים. סכום n האיברים האחרונים גדול פי 2 מסכום n האיברים הקודמים להם. א. הוכח שסכום n האיברים הראשונים הוא 0. ב. נתון גם שסכום האיברים החמישי והשביעי הוא 0. סכום כל איברי הסדרה הוא 726. מצא את הפרש הסדרה.	אפשר לפתור (באופן עקרוני) בשתי דרכים: האחת (brute force) לרשום את הנתונים באמצעות שני משתנים a_1 ו- d, ולזהות את התבנית שמתקבלת בסופו של דבר כ- $S_n=0$. האפשרות השנייה היא להסתמך על כך שבסדרה בת 3n איברים סכום n האיברים שבאמצע הוא הממוצע החשבוני של הסכומים של n האיברים הראשונים והאחרונים (טענה שאם רוצים להשתמש בה צריך להוכיחה). זה מסוג התרגילים שאפשר לדון בהם ולהרחיבם במסגרת כיתתית

		אך לא במסגרת של בחינה.
שאלון 806 קיץ תשע"ד מועד ב	2. נתונה סדרה חשבונית: $a_1 , a_2 , a_3 , ...$ שלושה איברים עוקבים בסדרה, a_n , a_{n+1} , a_{n+2} מקיימים: $a_{n+2}^2 - a_n^2 = 216$ $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 54$ א. מצא את האיבר a_n. ב. לקחו חלק מהאיברים בסדרה הנתונה ובנו סדרה חשבונית חדשה: $a_5 , a_9 , a_{13} , ... , a_{4k+1}$ סכום כל האיברים בסדרה החדשה הוא 450. האיבר הראשון בסדרה הנתונה בפתיח הוא $a_1 = -21$. מצא את הערך של k.	ניתן לשנות את השאלה באופן זה: נתונה סדרה חשבונית: $a_1 , a_2 , a_3 , ...$ שלושה איברים עוקבים בסדרה, a_n , a_{n+1} , a_{n+2} מקיימים: $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 54$ **א.** האם ניתן לחשב על פי הנתון את האיבר הראשון מבין השלושה? האם אפשר לחשב על פי הנתון את האיבר השני? נמקו. **ב.** בנוסף נתון $a_{n+2}^2 - a_n^2 = 216$ מצאו את שלושת האיברים בסדרה. הקושי העיקרי בחלק השלישי עבור תלמידים המיועדים ללמוד במסלול 5 יח"ל הוא לגלות שבסדרה המבוקשת יש k איברים, ולכן אפשר להוסיף "סעיף מדרגה" ששואל במפורש כמה איברים יש בסדרה. אח"כ אפשר להשלים את השאלה לפי המקור.
שאלון 806 קיץ תשע"ד מועד ג	נתונה סדרה חשבונית שיש בה n איברים $(n > 2)$: $a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_{n-1} , a_n$ הפרש הסדרה הנתונה הוא d. מהסדרה הנתונה בנו סדרה חדשה של הפרשי ריבועים: $a_2^2 - a_1^2 , a_3^2 - a_2^2 , ... , a_n^2 - a_{n-1}^2$ א. הוכח כי הסדרה החדשה היא סדרה חשבונית שההפרש שלה הוא $2d^2$. ב. נתון: $a_2^2 - a_1^2 = 64$ הבע את האיבר האחרון בסדרה החדשה באמצעות n ו־ d. ג. נתון גם: $a_n^2 - a_{n-1}^2 = 192$, $d^2 > 1$ מצא את תחום הערכים של n.	ניתן להגדיר את הסדרה החדשה תוך שימוש בסימון מגדיר. מהסדרה הנתונה בנו סדרה חדשה של הפרשי ריבועים: ואז בסעיף ב נשאל : הבע את b_n באמצעות n ו- d. הסעיף האחרון לא מאיר אף נקודה משמעותית מתוך הנושא "סדרות". הערך העיקרי בו הוא טכני (פתרון אי-שוויון), ולכן אפשר לוותר עליו.

מבוא להנדסה אנליטית

1. נתונה התבנית: $kx + (1-k^2)y = k^3 - k$.

עבור אילו ערכים של k (אם קיימים ערכים כאלה; אם לא, נמקו) מייצגת התבנית:

- קו ישר שעובר דרך ראשית הצירים.
- קו יש שמקביל לציר ה-x.
- קו ישר שמקביל לציר ה-y.
- קו ישר שמאונך לישר y=2x+5.
- קו ישר שחותך את ציר ה- y בנקודה (0,7).

- במידה שלא קיימים ערכים מתאימים באחד הסעיפים, הציעו דרך לשנות את התבנית כך שניתן יהיה למצוא ערכים מתאימים.

2. מעגל קנוני – נתון ריבוע חסום במעגל קנוני. אחד מקודקודי הריבוע הוא (3,4).
מצאו את משוואת המעגל ואת שאר קודקודי הריבוע.

3. פרבולה וישר: מתוך הפיצוח פרבולה לי, לו ולה (הפתרונות ללא שיקולי חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי)

2. היה או לא היה?

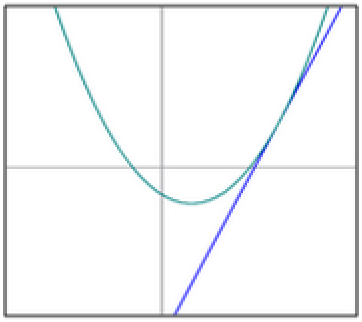
תום סרטט סקיצה לפרבולה:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a,b \neq 0)$$

ומשיק לפרבולה:

$$y = 2ax + b$$

תמר טענה שהאיור של תום לא יתכן.



מה דעתכם? האם ניתן ליצור פרבולה ומשיק אלו?
אם כן, עבור אילו ערכים של a, b ו- c .

אם לא, הסבירו מדוע.

מבוא לאנליזה של פונקציות

i. דוגמאות בספר "ללמוד וללמד אנליזה" בפרק פונקציות ממשיות (עמ' 30 -58).

ii. לדפי עבודה עם שימוש בטכנולוגיה:

משפחות של פונקציה חזקה הזזות ומתיחות (בצורה הקודקודית)

זוגיות ואי-זוגיות של פונקציה

השורש של פונקציית הישר והריבועית

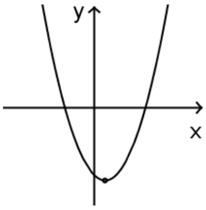
ההופכית לפונקציה לינארית

פונקציה הופכית לפונקציה ריבועית

פונקציה הפוכה

חשבון דיפרנציאלי

דוגמאות **לשאלות איכותניות** על פונקציה מורכבת (מתוך "ללמוד וללמד אנליזה"):.

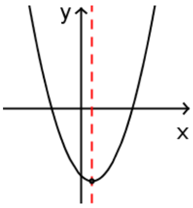


בסרטוט המצורף נתון גרף הפונקציה $f(x)=x^2-x-3$.

1. סרטטו באופן סכמתי את הגרפים של הפונקציות הבאות ללא טבלת ערכים:

א. $y=\sqrt{f(x)}$ ב. $y=2f(x)$. ג. $y=\left(f(x)\right)^3$.

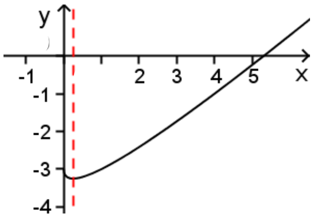
2. גרף הפונקציה f סימטרי ביחס לישר $x=0.5$. האם תכונה זו נשמרת גם בשלוש הפונקציות האחרות של סעיף 1? הסבירו.



(מה כולל הסבר לשאלה מסוג זה? האם העובדה שבתחום שסרטטנו או בתחום המשתקף על צג המחשב גרף הפונקציה סימטרי ביחס לישר $x=0.5$ היא הצדקה מספיקה?)

3. האם הגרף של כל פונקציה מורכבת שהפונקציה הפנימית שלה היא $f(x)=x^2-x-3$ סימטרי ביחס לישר 0.5 ? הסבירו.

4. נהפוך את כיוון ההרכבה כך שהפעם הפונקציה $f(x)=x^2-x-3$ היא חיצונית.



האיור המצורף מציג את גרף הפונקציה $k(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2-\sqrt{x}-3$.

מצאו, ללא שימוש בנגזרת, את שיעורי נקודת הקיצון.

הסבירו כיצד קבעתם את שיעור ה- x וכיצד קבעתם את שיעור ה- y .

דוגמאות לשאלות יישומיות המשלבות **הרחבת הידע המדעי וניתוח איכותני**, למשל דוגמאות מתוך הקורס בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של התכנית האמריקאית להסללה אקדמית AP:

(:http://media.collegeboard.com/digitalServices/pdf/ap/ap-calculus-course-description.pdf

1. על פי חוקי התנועה של ניוטון ידוע כי גובהו של כדור (המסומן להלן ב-y) כפונקציה של הזמן (מסומן להלן ב-t) שנבעט מהקרקע במהירות אנכית התחלתית (חיובית) v, נתון בנוסחה $y(t)=vt-0.5*gt^2$; g מסמל את תאוצת כוח הכבידה של כדור הארץ (g שווה בערך 9.8 [m/s^2]). ציירו את גובהו של הכדור כפונקציה של הזמן עד שהוא נוחת על הקרקע. מתי הכדור נוחת? מהו הגובה המקסימלי שהכדור יגיע אליו? מתי מגיע הכדור לגובה המקסימלי? מהו גרף המהירות האנכית שלו כפונקציה של הזמן? (רמז: המהירות האנכית נתונה על ידי קצב השינוי של הגובה); מהו גרף התאוצה האנכית שלו, a, כפונקציה של הזמן (רמז: התאוצה היא קצב השינוי של

המהירות).

הסיקו: מהו הכוח האנכי F הפועל על הכדור (נזכיר כי ma=F)? מה קורה אם נכפיל את מהירותו ההתחלתית האנכית של הכדור?

ניתן להמשיך ולפתח שאלות דומות עם חפצים נוספים שנזרקים ומתנגשים, כוחות שאינם קבועים (להדגמת מושג חיתוך פונקציות ולקבלת פונקציות יותר מעניינות), השוואה לתנועה על הירח, שאלות היסטוריות על ניוטון, לייבניץ וכד' - להרחבת הידע המדעי הכללי וההקשר המתמטי שבו פותח החשבון הדיפרנציאלי.

2. נפט דולף מצינור המונח בתוך אגם ויוצר כתם נפט שנפחו גדל בקצב קבוע של 2,000 סנטימטר מעוקב בדקה.[6] לכתם הנפט צורה של גליל ישר שרדיוס הבסיס וגם הגובה שלו משתנים בזמן (שימו לב: הנפח V של גליל ישר בעל רדיוס r וגובה h נתון על ידי V=πr2h).

א. ברגע שבו רדיוס כתם הנפט 100 ס"מ והגובה 0.5 ס"מ, הרדיוס גדל בקצב של 2.5 ס"מ לדקה. ברגע זה – מהו קצב השינוי של גובה כתם הנפט ביחידות של ס"מ לדקה?

ב. מתקן שאיבה מובל למקום האירוע ומתחיל לשאוב נפט. קצב השאיבה נתון על ידי $R(t) = 400\sqrt{t}$ סנטימטר מעוקב לדקה, כאשר t הוא הזמן בדקות מרגע התחלת השאיבה. הנפט ממשיך לדלוף בקצב של 2,000 סמ"ק בדקה. מצאו את הזמן t שכתם הנפט מגיע לנפחו המקסימלי. הסבירו את טענתכם.

ג. ברגע שמשאבת הנפט התחילה לעבוד, נפח כתם הנפט היה 60,000 סמ"ק. הביעו באמצעות אינטגרל את נפחו של כתם הנפט בזמן שחושב בסעיף 2.

3.

T (שעות)	0	1	3	4	7	8	9
L(t) (אנשים)	120	156	176	126	150	80	0

מכירת כרטיסים לקונצרט החלה בדיוק ב-12:00 בצהריים (t=0), וכל הכרטיסים נמכרו כעבור תשע שעות. נניח כי הפונקציה שמתארת את מספר האנשים שמחכים בתור לקניית כרטיסים בזמן נתון היא L(t), גזירה פעמיים המוגדרת עבור 0≤t≤9. ערכים של L(t) בזמנים שונים נתונים בטבלה לעיל.

א. השתמשו בנתונים שבטבלה כדי להעריך את קצב השינוי של מספר האנשים שמחכים בתור בשעה 5:30 אחה"צ (t=5.5). הראו את החישובים שהובילו לתשובה והקפידו על יחידות מידה מתאימות.

ב. השתמשו בסכום שטחי טרפזים בשלושה אינטרוולים כדי להעריך את המספר הממוצע של האנשים המחכים בתור ברגע נתון במשך ארבע השעות הראשונות שבהן נמכרו כרטיסים.

ג. בתחום 0≤t≤9 - מהו המספר המינימלי של הפעמים שבהן L'(t) חייב להתאפס? נמקו את טענתכם.

[6] שאלות 2 ו-3 מתורגמות משאלות ה-AP.

יש לתת את הדעת כי בדוגמה מובאת פונקציה בדידה, אך השימוש בכלי של מנת ההפרשים נותן אומדן על קצב השינוי של הפונקציה, וזהו ייצוג נוח ושימושי גם אם לא מדויק.
מבחינה היסטורית רבים מן הכלים המתמטיים פותחו כדי לתת לבעיות פיסיקליות תשובות בעלות תוצאות קרובות , ויש להדגיש פן זה.

דוגמאות לשאלות **בסגנון "האם נכון ש...?"** (מתוך "[ללמוד וללמד אנליזה]")

האם נכון ש...?

אם כן – הסבירו מדוע.

אם לא – הביאו דוגמה נגדית.

א. פונקציה $|f(x)|$ היא תמיד פונקציה זוגית.

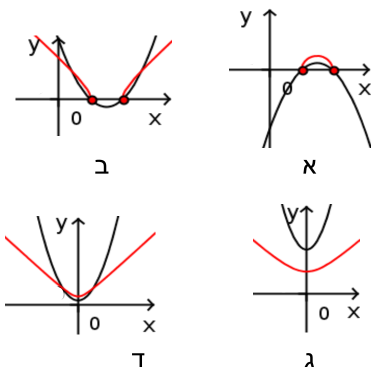
ב. פונקציה $f(|x|)$ היא תמיד פונקציה זוגית.

ג. הגרף $y=|f(x)|$ עובר תמיד דרך ראשית הצירים.

ד. הגרף $y=f(|x|)$ עובר תמיד דרך ראשית הצירים.

ה. כל ערכי הפונקציה $|f(x)|$ הם אי-שליליים.

ו. כל ערכי הפונקציה $f(|x|)$ הם אי-שליליים.



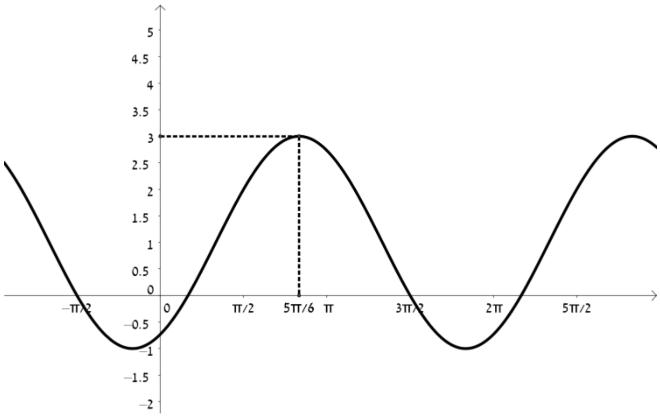
דוגמאות לשאלות בסגנון **"הביאו דוגמה"** (מתוך "[ללמוד וללמד אנליזה]")

ז. לפניכם גרפים של זוגות של פונקציות שורש מורכבות (באדום) עם הפונקציות הפנימיות שלהן (בשחור). סרטטו במחשב זוגות של פונקציות המתאימים לכל אחד מן האיורים. תארו כיצד בחרתם את הפונקציה הפנימית בכל אחד מן המקרים.

פונקציות טריגונומטריות

דוגמה 1

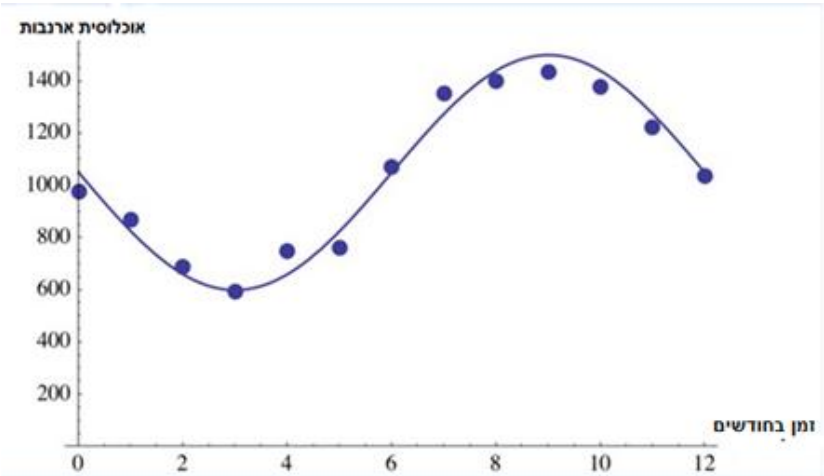
נתון גרף של פונקציה טריגונומטרית בסיסית (מהצורה $A \cdot sin(a \cdot x + b) + B$ או $C \cdot cos(c \cdot x + d) + D$). רשמו שתי פונקציות טריגונומטריות, האחת טרנספורמציה של פונקציית סינוס והשנייה טרנספורמציה של פונקציית קוסינוס, שהגרף הנתון מתאים להן.



דוגמה 2

נתון גרף נקודות המתאר את אוכלוסיית הארנבות בשמורת טבע בצפון הולנד כפי שנמדדה על ידי פקחי השמורה החל מ-1.1.2000.

גרף הנקודות מתואר בקירוב על ידי גרף של פונקציה טריגונומטרית f(x).

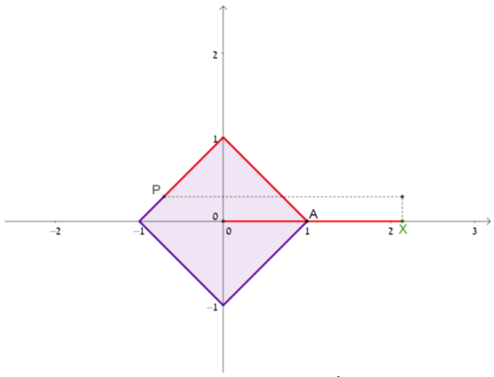


א. רשמו את הפונקציה f(x) בהנחה שהיא מהצורה הטריגונומטרית הבסיסית.

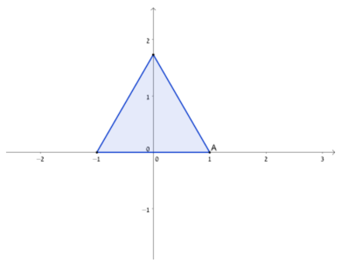
ב. בהנחה שהשתנות אוכלוסיית הארנבות בשמורה היא אכן תופעה מחזורית הנוהגת לפי הפונקציה שמצאתם f(x), באיזה חודש בשנת 2002 תגיע אוכלוסיית הארנבות בשמורה בקירוב ל-1,200 פרטים?

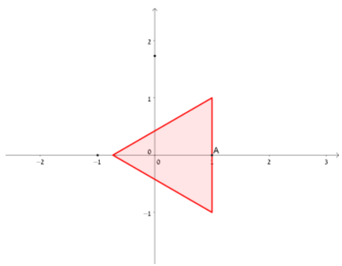
פונקציות מחזוריות כלליות

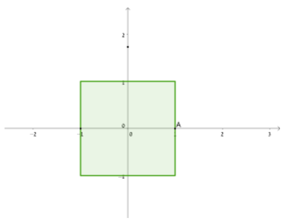
דוגמה 3 (העשרה)



הדגמה ותרגול של פונקציות המוגדרות באופן דומה על צורות שונות ממעגל היחידה. למשל (ראו איור) התאמה בין מספר ממשי X לשיעור ה- y של נקודה P המתקבלת על ידי ליפוף קטע שאורכו |X| (נגד כיוון השעון אם X חיובי ועם כיוון השעון אם X שלילי) – החל בנקודה (1,0) על הריבוע שמשוכן במערכת צירים כמודגם באיור. אפשר כמובן להגדיר פונקציות על בסיס צורות כרצוננו ולבחון את מחזוריותן (ראו איור).







ראו למשל דוגמאות נוספות בקישורים אלה:

השחיינים כולל יישומון

שלט חוצות

מגדלור

גאומטריה

חלק א: דוגמאות לשאלות בגאומטריה 5 יח"ל על בסיס שאלות ממבחני בגרות.

רוב השאלות המוצגות כאן לקוחות מתוך שאלון 005 כיוון שהיה שאלון משותף לתלמידי 4 ו-5 יח"ל. בחלק מהשאלות מוצע להפחית סעיפי מדרגה או להוסיף סעיפים חדשים (כדאי לבדוק גם שאלונים המיועדים ל-5 יח"ל ולעבד משם שאלות. בטבלה זו יש דוגמה אחת בסוף).

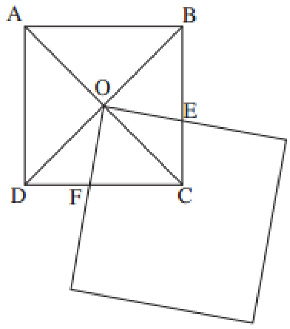
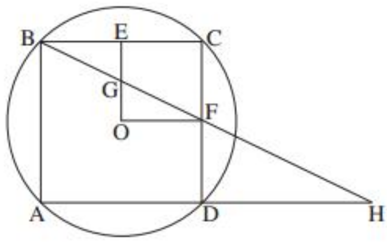
המטרות

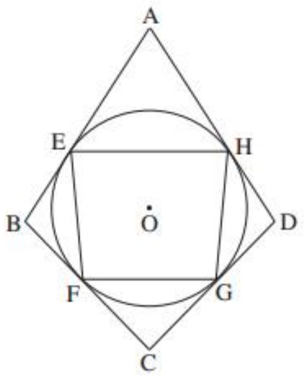
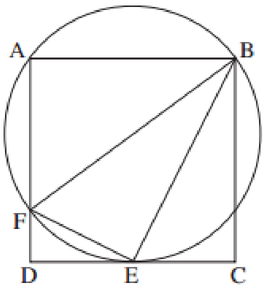
א. להראות שניתן לערוך שינויים קלים בשאלות באופן שיאפשר להעריך מיומנויות נוספות של תלמידים.

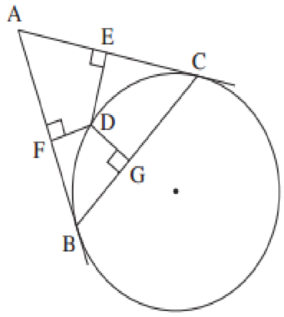
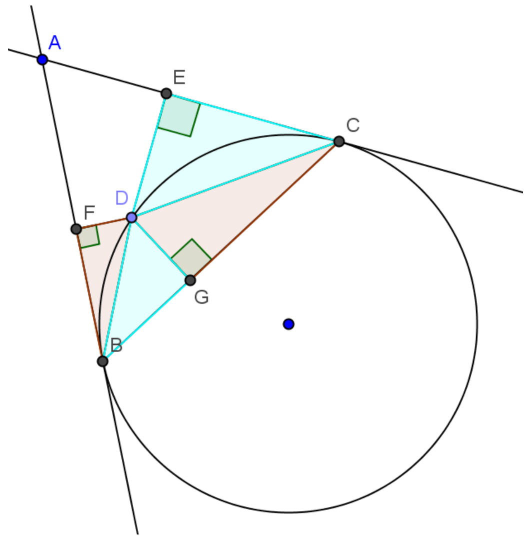
ב. להדגים אפשרויות לעסוק בחקר בשגרת ההוראה מבלי לוותר על הכנת התלמידים לבחינות.

ג. לשמר מיומנויות וידע שהתפתחו אצל תלמידים(הוכחות והפרכות/ כמתים/ בניות, כולל מיומנות הקדמת תכנון לביצוע).

ד. להגיש בעיות מתמטיות באופן שמאפשר יצירתיות, מיומנויות של העלאת השערות ובדיקתן.

נושא + מקור	**השאלה המקורית**	**הצעות שינוי**	**מה הדוגמה מדגימה**
חפיפה, שטחים 005 קיץ תשע"ב	4. נתון ריבוע $ABCD$. אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה O. בנקודה O נמצא קדקוד של ריבוע אחר. שתי צלעות סמוכות של הריבוע האחר חותכות את הצלעות BC ו־DC בנקודות E ו־F בהתאמה (ראה ציור). א. הוכח כי $\Delta OEC \cong \Delta OFD$. ב. נתון כי שטח הריבוע $ABCD$ הוא 100 סמ"ר. חשב את שטח המרובע $OFCE$.  	להוסיף סעיף (לשקול אם במקום סעיף א): הוכיחו ששטח המרובע OECF אינו תלוי במיקומן של הנקודות E ו-F. להוסיף סעיף: האם הנתונים מאפשרים לחשב את שטח הריבוע השני? הסבירו.	זהו עיבוד לשאלת חקר יפה בבגרות שחושפת תופעה מפתיעה. הדגש כאן לא על השטח המספרי, אלא על כך ששטח המרובע OECF אינו תלוי במיקומן של הנקודות E ו-F.
מעגל 005 חורף תשע"ד	מתמטיקה, חורף תשע"ד, מס' 035005 + נספח - 4 - 4. ריבוע $ABCD$ חסום במעגל שמרכזו O. נקודה F נמצאת על הצלע CD ונקודה E נמצאת על הצלע BC כך ש־ $OF \perp CD$ ו־ $OE \perp BC$ (ראה ציור). א. הוכח כי המרובע $ECFO$ הוא ריבוע. ב. הישר BF חותך את OE בנקודה G (ראה ציור). הוכח כי $EG = GO$. ג. המשך AD נפגש עם המשך BF בנקודה H (ראה ציור). (1) הוכח כי $\Delta BCF \cong \Delta HDF$. (2) מצא את היחס $\frac{EG}{DH}$.  	במקום "הוכח" בסעיף ב לתת מספר שאלות מסוג הוכח או הפרך (ללא שימוש בטריגונומטריה) א. GO=EG ב. OC מאונך ל- EF לבקש יחס נוסף ?EF:FD	הוכיחו או הפריכו תשובה מסוג **לא ייתכן**.

משיק למעגל חורף תשע"ב	4. הצלעות של הדלתון ABCD ‏($AB = AD$) משיקות למעגל שמרכזו O בנקודות E , F , G , H (ראה ציור). הוכח: א. $EF = GH$. ב. $EH \parallel FG$. 	להחליף את הדרישה ב- הוכיחו שהמרובע EHGF הוא טרפז שווה שוקיים או מלבן. אפשר להתחיל עם בעיית בנייה: נתון דלתון. האם ניתן לחסום בדלתון מעגל. אם כן, בנו את המעגל. אם לא, הסבירו מדוע. אפשר הפוך: לבנות דלתון שצלעותיו משיקות למעגל ואז הסרטוט דינמי.	אפשרות לחקר בגאוגברה התייחסות להגדרה: יש להבין שהפתרון צריך לכלול הסבר מדוע המרובע לא יכול להיות מקבילית. בניות?
משיק למעגל 005 מועד ב 2013	3. נתון ריבוע ABCD ונתון מעגל. הקדקודים A ו־ B של הריבוע נמצאים על המעגל. הצלע DC משיקה למעגל בנקודה E . הצלע AD חותכת את המעגל בנקודה F (ראה ציור). א. הוכח: $\Delta EDF \sim \Delta BEF$. ב. נתון: האורך של רדיוס המעגל הוא 5 ס"מ $FD = 2$ ס"מ חשב את האורך של EF . ג. חשב את האורך של צלע הריבוע הנתון. 		הבחנה בין משפט למשפט ההפוך לו (במקרה זה, המשפט על זווית שנשענת על קוטר) על ידי שימוש בשניהם בפתרון אותה שאלה.

משיק למעגל חורף 2012	3. מנקודה A שמחוץ למעגל יוצאים שני ישרים המשיקים למעגל בנקודות B ו- C. מנקודה D, שעל הקשת הקטנה BC, מורידים אנכים ל- AC, ל- AB ול- BC. האנכים חותכים את AC, את AB ואת BC בנקודות E, F ו- G בהתאמה (ראה ציור). א. הוכח כי $\Delta DFB \sim \Delta DGC$. ב. הוכח כי $DF \cdot DE = DG^2$.   	במקום (או בנוסף) לסעיף ב של השאלה, להלן 5 סעיפי המשך אחרים לסעיף א שלה: ג. הוכיחו $\measuredangle BDG=\measuredangle EDC$. ד. האם מהסעיף הקודם נובע שהזוויות $\measuredangle EDC$ ו- $\measuredangle BDG$ קדקודיות? תשובה: לא. (קל לייצר דוגמה נגדית) ה. הוכיחו: $\frac{S_{\Delta BDG}}{S_{\Delta CDE}} = \frac{S_{\Delta DFB}}{S_{\Delta DGC}}$ ו. האם ייתכן שארבעת שטחי המשולשים שווים זה לזה? (תשובה: כן, במקרה שהנקודה D באמצע הקשת BDC). ה. האם ייתכן ש- DG ממוצע גאומטרי של הקטעים שהוא מקצה על הבסיס (תשובה: לא ייתכן). אילו DG היה ממוצע גאומטרי של הקטעים BG ו- GC אז $\measuredangle BDC$ היתה ישרה. מכאן היה נובע ש- BC קוטר במעגל. זה לא ייתכן כי המשיקים בקצות קוטר מקבילים, ובמשולש הנתון המשיקים הנ"ל נפגשים ב- A.)	מתאים להדגים את הסעיפים א-ה באמצעות תוכנה דינמית. השאלה עוסקת בממוצע גאומטרי בהקשר לא מוכר. סעיף ד מחדד הבחנה בין המשפט על שוויון זוויות קדקודיות לבין טענה הפוכה שאיננה נכונה. סעיפים ד, ו, ז מדגימים שאלות מסוג: האם ניתן להסיק...? האם ייתכן...? באיזה תנאי...? ועיסוק בשאלה "מה היה מתקיים אילו...?"
			זהירות

<table>
<tr>
<td>דמיון תיכון ליתר, קטע אמצעים

005
קיץ
2013</td>
<td>

4. במשולש שווה־שוקיים AMK $(AM = AK)$ KD הוא תיכון לשוק AM, ו־ ME הוא גובה לשוק AK (ראה ציור).

א. הוכח כי $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DEA$.

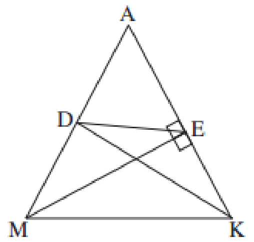
ב. אם נתון גם כי $MK = 2 \cdot DE$:

(1) מהו הגודל של $\sphericalangle MAK$? נמק.

(2) הוכח כי $DE \parallel MK$.

(3) ME ו־ DK נחתכים בנקודה P.

מצא פי כמה גדול היקף המשולש MPK מהיקף המשולש EPD.



</td>
<td></td>
<td>בשרשרת ההסקה: מפתח להשתמש במשפט קטע האמצעים על בסיס המידע ש- MK=2DE, אבל בהתחלה אין מספיק נתונים.</td>
</tr>
<tr>
<td>משפט חוצה הזווית
005
קיץ
תשע"ב</td>
<td>

<u>הנדסת המישור</u>

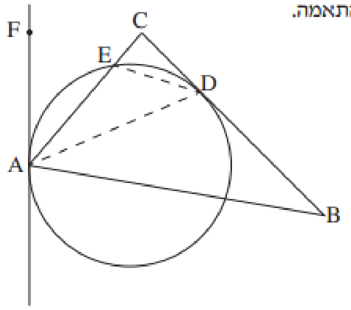
3. BC ו־ AF משיקים למעגל בנקודות D ו־ A בהתאמה. AC חותך את המעגל בנקודה E (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle FAC = \sphericalangle ABC = \alpha$

א. הוכח כי $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ABC$.

ב. הוכח כי AD חוצה־זווית BAC.

ג. הוכח כי $AD^2 = AE \cdot AB$.



</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>מועד ב
תשע"ד
806</td>
<td>

4. AC הוא קוטר במעגל שמרכזו O_1.

BD הוא קוטר במעגל שמרכזו O_2.

ישר משיק למעגלים O_1 ו־ O_2 בנקודות A ו־ B בהתאמה.

המשיק חותך את קטע המרכזים O_1O_2 בנקודה E (ראה ציור).

נתון: רדיוס המעגל O_1 הוא 30 ס"מ

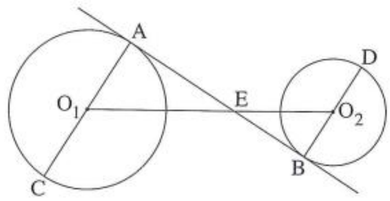
רדיוס המעגל O_2 הוא 20 ס"מ

אורך קטע המרכזים O_1O_2 הוא 90 ס"מ

א. (1) מצא את היחס $\frac{O_1E}{O_1C}$. נמק.

(2) הוכח כי $\Delta EO_1C \sim \Delta EO_2D$.

ב. הוכח כי הנקודה E נמצאת על הישר CD.



</td>
<td>

במקום הנתונים המספריים:

נתון כי רדיוס המעגל O_1 גדול פי 1.5 מרדיוס המעגל O_2.

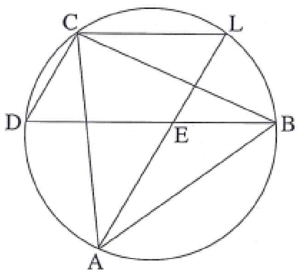
א. מצאו את היחס O_1E/EO_2 (יותר פשוט וגם מדרגה).

ב. בנו את המשיק המשותף לשני המעגלים.

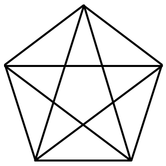
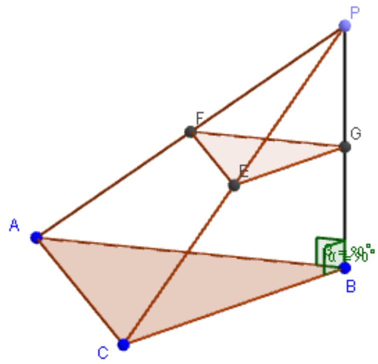
ג. כמו א(2) בשאלה המקורית.

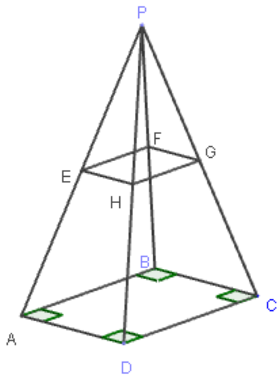
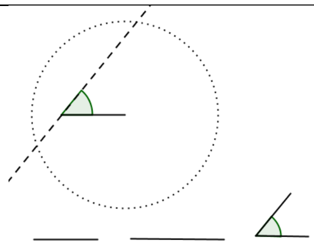
ד. הסבירו מדוע לא

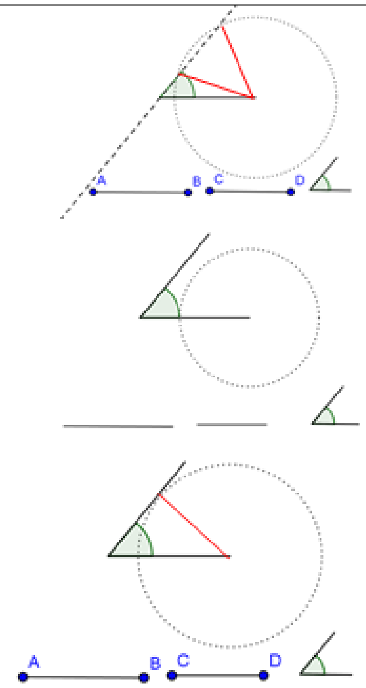
</td>
<td>שילוב בנייה עם צורך בתכנון מוקדם: למצוא את יחס החלוקה ש- E מחלק את קטע המרכזים. לחלק קטע ביחס נתון. לבנות משיק למעגל מחוץ לישר.</td>
</tr>
</table>

		ייתכן ש $O_1E/EO_2=O_1A/AO_2$ (בפעילות חקר על בסיס שאלה זו כדאי לשאול אם היחס נכון תמיד, לפעמים, אף פעם לא).	
חורף תשע"ד 806	- 4 - מתמטיקה, חורף תשע"ד, מס' 035806, 316 + נספח **פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור** ($33\frac{1}{3}$ נקודות) ענה על שתיים מהשאלות 6-4 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות). **שים לב!** אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.  4. משולש שווה־צלעות ABC חסום במעגל. נקודות D ו־ L נמצאות על המעגל כך ש־ $BD \parallel LC$. המיתרים AL ו־ BD נחתכים בנקודה E (ראה ציור). א. הוכח כי המרובע LEDC הוא מקבילית. ב. (1) הוכח כי $\triangle ADE$ הוא משולש שווה־צלעות. (2) הוכח כי $LC + LB = LA$.	לסרטט כך שגם משולש CDE ייראה שווה צלעות במקום (?) סעיף ב2 : אילו מן התוצאות שלהלן ניתן להסיק בוודאות מהנתונים: א. המשולש ADE שווה צלעות. ב. המשולש CDE שווה צלעות. לחילופין: אם במקום משולש שווה צלעות, היה נתון משולש שווה שוקיים - האם ניתן להסיק שהמשולש ADE שווה שוקיים? שהמרובע LEDC מקבילית?	לא להתבסס על מראה עיניים שילוב חקר . לא ידוע מראש אם הטענה נכונה.

חלק ב: שאלות נוספות

נושא	דוגמה	מה הדוגמה מראה והערות נוספות
דמיון משולשים	נתון משולש ישר זווית ABC (זווית A ישרה). AD הגובה ליתר. הוכיחו: $AD^2=BD\cdot DC$	א. שאלה שנתונה ללא סרטוט. תוצאת התרגיל קשורה לפרופורציות במשולש ישר זווית. לכן התרגיל מדגיש את העובדה שפרופורציות במשולש ישר זווית אינן נושא בתכנית הלימודים, אם כי מומלץ לעסוק בהן במסגרת התרגילים ולא כנושא שמבססים עליו תרגילים אחרים.
דמיון משולשים	נתון מחומש משוכלל עם כל האלכסונים. מצאו בסרטוט זוגות של משולשים דומים שאינם חופפים. מצאו זוגות נוספים של משולשים דומים שאינם דומים למשולשים הקודמים שמצאתם. מצאו את יחס הדמיון בין המשולשים. רשמו את כל המידות של זוויות בסרטוט. מה המשותף לכל המידות? (כולן כפולות של $36°$) 	בעיה פתוחה, חושפת את היופי של הגאומטריה. מובילה לדיון ביחס הזהב ובמשולש זהב (ומונעת טעות נפוצה של כינוי משולש אחר בשם משולש זהב). שילוב של אלגברה וגאומטריה.
דמיון משולשים	ABCP פירמידה משולשת. הנקודות D, E, ו-F הן בהתאמה אמצעי המקצועות הצדדיים PA, PB ו- PC. המקצוע PB הוא גובה הפירמידה. א. הוכיחו כי $\sphericalangle ABC=\sphericalangle DEF$. ב. מהו היחס בין שטחי המשולשים ΔABC ו-ΔDEF? ג. מה היחס בין הנפחים של הפירמידות ABCP ו-ADEF? 	שימור הידע של התלמידים בגאומטריה של המרחב בבעיות שלא דורשות משפטים ייחודיים למרחב, כי כל שיקול נעשה בתוך צורה מישורית. ניתן להרחיב את השאלה לחקר בגישת "מה אם לא...?" אחת מאפשרויות ההרחבה היא להמיר את הנתון: "הנקודות D, E, ו-F הן בהתאמה אמצעי המקצועות הצדדיים PA, PB ו- PC." בנתון: "הנקודות D, E, ו-F מחלקות את המקצועות הצדדיים PA, PB ו- PC ביחס 1:2 כשהחלק הגדול ליד הקדקוד" אפשרות נוספת מוצגת בדוגמה הבאה.
דמיון משולשים	ABCDM פירמידה שבסיסה מלבן. הנקודות E, F, G ו-H הן בהתאמה אמצעי המקצועות הצדדיים PA, PB, PC ו-PD. גובה הפירמידה נפגש עם בסיס הפירמידה במפגש	שימור הידע של התלמידים בגאומטריה של המרחב בבעיות שלא דורשות משפטים ייחודיים למרחב, כי כל שיקול נעשה בתוך

	האלכסונים. נתון: BC=4 ס"מ ; AB= 3ס"מ; גובה הפירמידה שווה ל- 8 ס"מ. א. מהו נפח הפירמידה? ב. האם המרובע EFGH גם הוא מלבן? הסבירו. ג. מה שטח המרובע EFGH? ד. איזה סוג מרובע יהיה EFGH אם גובה הפירמידה ייפגש עם בסיס הפירמידה בנקודה A? ה. כיצד ישתנה נפח הפירמידה אם נכפיל את גובה הפירמידה פי שניים? ו. כיצד ישתנה שטח המרובע DEFG אם נכפיל את גובה הפירמידה פי שניים? פי מאתיים?		צורה מישורית. חקר. תוצאה מפתיעה. שימוש ביישומון דינמי לבדיקת השערות. הערה: כדי ליישם את מה שעשינו עם הפירמידה המשולשת דרושה בניית עזר: אלכסוני המרובעים.
משפט חפיפה רביעי	א. בנו משולש על פי שתי צלעות וזווית מול הצלע הגדולה שבהן. ב. כמה משולשים כאלה אפשר לבנות? ג. האם כל צירוף של נתונים "כאלה" מאפשר בניית משולש?		בעיית בנייה עם דיון בשאלות מסוג "האם הנתונים מאפשרים את הבנייה?" ובשאלת יחידות הבנייה.
משפט חפיפה רביעי	בנו משולש על פי שתי צלעות וזווית מול הצלע הקטנה שבהן. a. כמה משולשים כאלה אפשר לבנות?		השאלה מחדדת את התנאים בהם מתקיים משפט החפיפה הרביעי, באמצעות מקרה בו לא חל המשפט.

	b. האם כל צירוף של נתונים "כאלה" מאפשר בניית משולש? ז. הראו שאם נתוני הבנייה מאפשרים לבנות שני משולשים, אז הזוויות מול הצלעות הגדולות משלימות זו את זו ל- 180 מעלות.		

דוגמאות לעיבוד שאלות בגרות לפעילויות עם יישומים דינמיים באתר המרכז הארצי

806 קיץ, שאלה 5

005 חורף, שאלה 4

806 מועד ב', שאלה 5

005 חורף, שאלה 3

005 מועד ב, שאלה 3

נספח 2:

דיון בנושא "החוש לפונקציות" וחשיבות פרק המבוא

(מבוסס על "הרחבת עולם הפונקציות "- כיתה המדעית)

אחת המטרות העיקריות בלימוד אנליזה בבית הספר העל-יסודי היא להציג בפני התלמידים את מושג הפונקציה, כך שיוכלו לפעול בכל הנוגע לפונקציות באופן חופשי ואינטואיטיבי וישתמשו במושג הפונקציה בתחומי דעת שונים במתמטיקה ומחוצה לה. אייזנברג ודרייפוס (Eisenberg & Dreyfus, 1994)[7] מכנים את האינטואיציות והתובנות לגבי תכונות הפונקציות והפעולות עליהן "חוש לפונקציות". לטענתם צריך וניתן לטפח "חוש לפונקציות" אצל תלמידים, מה שיכול להביא לידי ביטוי מספר מיומנויות או כשרים (proficiencies):

- הבחנה בין משתנים תלויים ובלתי-תלויים.
- זיהוי השתנות (Variation) והשתנות הדדית של שני משתנים (Covariation).
- זיהוי השתנות של השתנות (קצב גדילה).
- הכרת ומשמעויות וייצוגים שונים של מגוון פעולות על פונקציות.

ניתן להציג פונקציות בדרכים שונות כגון טבלת ערכים, התבנית האלגברית והגרף. התלמיד צריך להיות מסוגל לעבור מייצוג לייצוג, ולבחור את הייצוג המתאים לבעיה. "חוש לפונקציות" משמעו גם היכולת "לראות" ייצוג אחד כאשר עובדים עם אחר, ובפרט היכולת לדמיין את הגרף ולהפעיל עליו פעולות באופן ויזואלי, כמו גם יכולת להסתכל על ביטוי אלגברי ב"מבט על" ולזהות בו מבנים. טרנספורמציות הן כלי מתמטי ליצירת משפחה של פונקציות. הן מעודדות להסתכל על הפונקציה כדוגמה או כפרט במשפחה, ומהוות כלי לנוע בין הפונקציות בתוך המשפחה.

פיתוח החוש לפונקציות והחוש הסימבולי משחרר את התלמיד מעבודה טכנית גרידא ומאפשר לו להתבונן ממבט-על על בעיות, לחקור אותן מתוך הבנת המשמעות של הפעולות שבוצעו על הפונקציה, וליזום באופן יצירתי פעולות נוספות עליה כדי לפתור את הבעיה.

"חוש לפונקציות" כולל את היכולת לשייך פונקציה למשפחה שלה, לזהות את התכונות המשותפות למשפחה (Confrey, 1994) והטרנספורמציות הן כלי לנוע בין הפונקציות בתוך המשפחה.

פיאז'ה טען כי "כדי לדעת (להבין) אובייקט יש לפעול עליו", ולכן פעילויות עם ועל פונקציות מקדמות את ההבנה של מושג הפונקציה.

[7] Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1994). On understanding how students learn to visualize function transformations. In: E. Dubinsky, A. Schoenfeld,&J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education,* 1, pp. 45–68. Providence, RI: American Mathematical Society.

על התלמידים לרכוש מאגר ידע של פונקציות בסיסיות (מפורטות להלן) ולדעת את הנוסחה האלגברית שלהן ואת צורת הגרף המתאימה. התלמידים צריכים לרכוש מיומנות להפעיל סדרת פעולות על פונקציית הבסיס כדי ליצור פונקציה חדשה (Eisenberg & Dreyfus, 1994).

עליהם להיות מסוגלים לנתח כל פונקציה, מורכבת ככל שתהיה, לזהות בה את פונקציית הבסיס שעליה הופעלה סדרת הפעולות וכך לשחזר את תהליך בנייתה. תלמיד שפיתח יכולת להבין ולדמיין פעולות על פונקציות בייצוגן הגרפי והאלגברי ולזהות פונקציה כשייכת למשפחה, יוכל לעשות ביכולת זו שימוש כמעט בכל נושא הנוגע לפונקציות, כמו היכרות עם משפחות שונות של פונקציות, נגזרות, חישובי גבולות, מניפולציות אלגבריות ועוד.

בתכנית הלימוד ננסה להקנות וליישם עקרונות אלה.

דיון במעמד ההוכחה בתכנית

ברציונל תכנית 5 יח"ל נמנים העקרונות האלה:

1. פיתוח חשיבה מתמטית-לוגית הכוללת ביקורתיות, דיוק, ובקרה על תהליך פתרון בעיות.
2. הוכחות מכל מיני סוגים בתחומי תוכן שונים: ישירה, קונסטרוקטיבית, אינדוקציה, דרך השלילה.
3. שימוש בדוגמאות, אי-דוגמאות, דוגמאות נגדיות.
4. פיתוח מיומנויות תקשורת מתמטית: קריאה וכתיבת ביקורת על טיעון, הגנה על טיעון (ארגומנטציה) וכמובן גם תקשורת בע"פ.

אלה הן המיומנויות החשובות בהבנת הצורך בהוכחה ובהבנת טִבעהּ.

כרקע לדיון על מעמד ההוכחה בתכנית הלימודים כדאי להיות מודעים לכך ש-:

- ברמת הלימוד של תכנית 5 יח"ל המטרה היא ליצור מודעות בקרב התלמידים לכך ש-:
  - המתמטיקה היא מבנה מחשבתי שטענה מתקבלת בו כנכונה רק אם יש לה הוכחה.
  - יש מערכת טיעונים הנחשבת כהוכחה ויש כזו שלא.
  - מעמדה של טענה משתנה בכל שלב, כלומר האם היא בגדר השערה או משפט.
- יחד עם זאת, ברמת הלימוד בתיכון לא ניתן "להוכיח הכול", ויש להעדיף הוכחה שמסבירה למה הטענה נכונה.[8]
- יש להסביר איך נושא ההוכחה מתקשר ללוגיקה: אין צורך להציג את הלוגיקה האבסטרקטית ביותר, אך יש להציג את כללי הבסיס שמושג ההוכחה נגזר מהם (כולל אם א גורר ב וב גורר ג אז א גורר ג ולהראות את האפשרויות: אם "א" אז "ב" ואם "לא ב" אז "לא א"). באופן דומה יש להציג

[8] יש מחקרים (למשל Thompson, Senk & Johnson, 2012) המראים כי ספרי הלימוד בארה"ב מצדיקים כ-60% מהטענות וכי חצי מהן מבוססות על מקרים פרטיים. היות ואין דיון על מעמד ההוכחה, לתלמידים לא ברור שאפשר להוכיח הכול אך זה נעשה רק בחלק של המקרים. בנוסף, רק כ-5% ממשימות התלמידים דורשים הצדקה, ולכן מועבר לתלמידים מסר ש"זה לא חשוב". בועז זילברמן עורך מחקר בנושא זה בהנחיית פרופ. רוחמה אבן במחלקה להוראת המדעים מכון ויצמן למדע.
Dolev, S. (2011). *Justifications and Explanations in Israeli 7th Grade Math Textbooks.* Rehovot: MSc thesis - Weizmann Institute of Science.
Thompson, D. R., Senk, S. L., & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(3), pp. 253-295.

את הבסיס הלוגי להוכחה על דרך השלילה, ומכאן גם את חשיבותן של דוגמאות נגדיות. כללי הלוגיקה האלה יוצגו במסגרת ההקשר שהצורך בהם עולה בו ולא כיחידה נפרדת.

על סמך הנאמר לעיל ועל בסיס מחקרים רבים שנעשו בנושא, בהוראת תכנית של 5 יח"ל ובכל נושא מתמטי מוצע להדגיש את ההיבטים הבאים:

1. הבנת הטענה, למשל על ידי הצגתה בדוגמאות (גם דוגמאות שהתלמידים יוצרים בעצמם) או ניסוחה במילים של התלמיד.
2. הבנת תפקיד הדוגמאות: דוגמה תומכת, דוגמה סותרת, דוגמה גנרית, דוגמה לא רלוונטית, כולל דוגמאות שתלמידים יוצרים ודוגמאות מוכנות שהם מנתחים. יש לדון גם במקרה הפרטי שבו הטענה היא טענה לגבי מספר סופי של מקרים בלבד.[9]
3. מעמד הטענה: האם אנו כבר יודעים שהטענה נכונה/לא נכונה? האם הוכחנו או רק שיערנו? הבנת המעמד של טענה: האם הטענה הוכחה באופן כללי, כלומר היא נכונה לכל המקרים הרלוונטיים, או שהיא נכונה רק לגבי חלק (אפילו גדול) של המקרים?
4. הבנת המעמד של ארגומנטציה:

א. אם מצאנו דוגמה נגדית – הוכחנו שהטענה לא מתקיימת.

ב. אם מצאנו דוגמאות תומכות רבות למשפט שטוען טענה כללית (להרבה/אינסוף מקרים), יכול להיות שהטענה מתקיימת (עבור משפטי קיום מספיקה דוגמא אחת להוכחת הטענה). במקרה של טענה כללית יש השערה שצריך לחפש דרכים לבדוק אם היא נכונה (תמיד, לכל המקרים) ולמה. עדיין יש להדגיש שבמקרה זה מציאת הרבה דוגמאות איננה הוכחה: יכול מאוד להיות שכל הדוגמאות מוטות בשל חוסר ידע של המציע (דוגמה פשוטה לכך: טענה: כל המספרים בעולם הם רציונליים. יש אינסוף דוגמאות התומכות בטענה זו. ואכן רבים האמינו בה! כדאי להפנות להיסטוריה של המתמטיקה).
אפשר להזכיר מחקרים עכשויים של כהנמן, אריאלי וכד' המראים איך אנו נוטים לשכנע את עצמנו מהיכרות עם דוגמאות מסביבתנו, ולא פעם אנו טועים בשל כך (למשל, האם יש יותר מדינות ששמן מתחיל באות י או באות א).

ג. אם מצאנו ראיות לכך שטענתנו כנראה נכונה, כלומר אם חלקים שונים בפאזל מתאימים, אנו נוטים להאמין שהטענה נכונה (למשל, אם בניתי פונקציה שאמורה להיות משיקה לקו הישר הנתון, ובדקתי ערכים של שניהם בסביבה קרובה וסמוכה לנקודת ההשקה, יש לי ראייה שאינה

9

Orly Buchbinder, Orit Zaslavsky: Examples and Proof, Universal statement via existential statement. The roles of examples in proving and refuting mathematical statements - A Holistic Approach for Designing Tasks that Capture and Enhance Mathematical Understanding of a Particular Topic: The Case of the Interplay between Examples and Proof.

Type of statement (universal or existential); 2. Type of example (confirming, contradicting, irrelevant) 3. The truth-value of the statement (true/false); 4. Number of relevant examples that exist for each statement (e.g., no example, a single example or a finite number, an infinite number of examples of a particular type).

הוכחה אך כן מהווה ארגומנטציה). שוב, חשיבות התהליך צריכה להיות מודגשת: אם הפאזל לא מתאים, הטענה לא נכונה. ואם מתאים, עדיין חסרה ההוכחה.

ד. לגבי טענות שהוחלט לא להוכיחן בכיתה, יש להדגיש בכל פעם שאמנם קיימת הוכחה אך לא עוסקים בה אלא מקבלים אותה כמשפט. רצוי גם להסביר מדוע לא הוצגה ההוכחה (עקב דמיון להוכחות קודמות או לחילופין שוני מהותי מהן). רצוי להפנות לספר שההוכחה מופיעה בו.

5. הבנת הוכחה שמוצגת על ידי אחרים.[10]
6. כתיבת הוכחה על ידי התלמידים.

גם כאן יכולים להיות שלבים; למשל, התלמיד יקרא הוכחה שמוצגת בספר הלימוד ויתבקש להוכיח מקרה דומה (כמו שלעתים מופיע בנושא האינדוקציה המתמטית). נשאף לכך שאחוז נכבד של המשימות לתלמידים, כולל במבחנים, ידרשו הצדקה או הוכחה. (ראו גם הערת שוליים 8 לעיל).

7. רצוי להוכיח טענות בדרכים שונות במקרים שניתן ולהדגים בכך שאפשר ללמוד על מגוון שיקולים מהוכחות שונות. יש לעודד תלמידים לחפש הוכחות אחרות ולהוסיף הוכחות שנעשה בהן שימוש בסימטריה – שיקוף ו/או סיבוב.
8. רצוי להזכיר כהעשרה וכן להפנות תלמידים מתעניינים לספרות בנושא מקומה של ההוכחה מתמטיקה מודרנית: בתחילת המאה ה-20 הילברט (Hilbert) סבר שניתן להוכיח או להפריך כל טענה וטענה במתמטיקה, אולם גדל (Gödel) הראה שאין זה כך. יש להדגיש את העובדה שהמתמטיקה היא תחום הממשיך להתפתח כל העת.

הערה לגבי דרכי הוכחה מיוחדות

הוכחות בדרך של אינדוקציה מתמטית ובדרך השלילה הן כלים מתמטיים חשובים אך לא אינטואיטיביים. הטמעת כלים אלה בהלך החשיבה של התלמידים דורשת זמן ומאמץ. בנושא של אנדוקציה מתמטית כדאי שהנושא ייפתח ביחידת מבוא שעוסקת ברעיון ומציגה דוגמאות והתנסות, ולדאוג שצורת הוכחה זו תופיע בהמשך בתחומים רבים ככל שניתן. נושא ההוכחה באינדוקציה יידון בהרחבה בתוכנית הלימודים של כיתה י"א. הוכחה בדרך השלילה כבר הוצגה בחטיבת הביניים, אולם יש לזכור כי הרעיון אינו אינטואיטיבי, ויש לחזור על הלוגיקה שמאחורי הוכחה זו בכל פעם שנעשה בה שימוש.

---

[10] **ראו** מאמר הכולל עצות מעשיות מוצלחות:

An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics Juan Pablo Mejia-Ramos, Evan Fuller, Keith Weber, Kathryn Rhoads, & Aron Samkoff, *Educ Stud. Math* (2012) 79: 3-18.

Proof comprehension. A multidimensional model for assessing proof comprehension at the undergraduate level.

נספח 3: רשימת משפטים בגאומטריה (מאתר המפמ"ר) עם התייחסות ללימודם/השמטתם מהתכנית החדשה

1. זוויות צמודות משלימות זו את זו ל- $180°$. חט"ב
2. זוויות קדקודיות שוות זו לזו. חט"ב
3. במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות. חט"ב
4. במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות. חט"ב
5. סכום כל שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית. חט"ב
6. במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים. חט"ב
7. אם במשולש חוצה זווית הוא גובה, אז המשולש הוא שווה שוקיים. חט"ב
8. אם במשולש חוצה זווית הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה שוקיים. חט"ב
9. אם במשולש גובה הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה שוקיים. חט"ב
10. במשולש (שאינו שווה צלעות) מול הצלע הגדולה יותר מונחת זווית גדולה יותר. חט"ב
11. במשולש (שאינו שווה זוויות) מול הזווית הגדולה יותר מונחת צלע גדולה יותר.
12. סכום הזוויות של משולש הוא $180°$. חט"ב
13. זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה. חט"ב
14. קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה. חט"ב
15. ישר החוצה צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שנייה, חוצה את הצלע השלישית. חט"ב
16. קטע שקצותיו על שתי צלעות משולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים. חט"ב
17. משפט חפיפה צ.ז.צ. חט"ב
18. משפט חפיפה ז.צ.ז. חט"ב
19. משפט חפיפה צ.צ.צ. חט"ב
20. משפט חפיפה שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מבין השתיים. חט"ע
21. האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זווית הראש, חוצה את האלכסון השני ומאונך לו. חט"ב
22. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתאימות שוות, אז הישרים מקבילים. חט"ב
23. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתחלפות שוות, אז הישרים מקבילים. חט"ב
24. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם סכום זוג זוויות חד-צדדיות הוא $180°$ אז שני הישרים מקבילים. חט"ע (לא חובה ללמד בחט"ב)
25. אם שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישר שלישי אז:
    א. כל שתי זוויות מתאימות שוות. חט"ב
    ב. כל שתי זוויות מתחלפות שוות. חט"ב
    ג. סכום כל זוג זוויות חד-צדדיות הוא $180°$. חט"ע
26. במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות. חט"ב
27. במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות. חט"ב
28. במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה. חט"ב

29. מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית. חט"ב
30. מרובע שבו כל שתי צלעות נגדיות שוות הוא מקבילית. חט"ב
31. מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ושוות הוא מקבילית. חט"ב
32. מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית. חט"ב
33. במעוין האלכסונים חוצים את הזוויות. חט"ב
34. מקבילית שבה אלכסון הוא חוצה זווית היא מעוין.
35. במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה. חט"ב
36. מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין. חט"ב
37. אלכסוני המלבן שווים זה לזה. חט"ב
38. מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן. חט"ב
39. בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות. חט"ב
40. טרפז שבו הזוויות שליד אותו בסיס שוות הוא טרפז שווה שוקיים. חט"ב
41. בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה. חט"ב
42. טרפז בו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים. חט"ב
43. קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם. חט"ב
44. בטרפז, ישר החוצה שוק אחת ומקביל לבסיסים חוצה את השוק השנייה. חט"ב
45. שלושת התיכונים במשולש נחתכים בנקודה אחת. חט"ע
46. נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס של 2:1. חט"ב
(החלק הקרוב לקדקוד הוא פי שניים מהחלק האחר).
47. כל נקודה על חוצה זווית נמצאת במרחקים שווים משוקי זווית זו. חט"ע
48. אם נקודה נמצאת במרחקים שווים משני שוקי זווית, אז היא נמצאת על חוצה הזווית. חט"ע
49. שלושת חוצי הזוויות של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש. חט"ע
50. בכל משולש אפשר לחסום מעגל. חט"ע
51. כל נקודה הנמצאת על האנך האמצעי של קטע, נמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע. חט"ע
52. כל נקודה הנמצאת במרחקים שווים מקצות קטע, נמצאת על האנך האמצעי לקטע. חט"ע
53. כל משולש ניתן לחסום במעגל. חט"ע
54. במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש. חט"ע
55. שלושת הגבהים במשולש נחתכים בנקודה אחת. חט"ע (הוכחה כהעשרה)
56. ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם הסכום של זוג זוויות נגדיות שווה ל- $180°$. חט"ע
57. מרובע קמור חוסם מעגל אם ורק אם סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות. חט"ע
58. כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל. חט"ע-במסגרת שיעורי הטריגונומטריה
59. בכל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל. חט"ע-במסגרת שיעורי הטריגונומטריה
60. דרך כל שלוש נקודות שאינן על ישר אחד עובר מעגל אחד ויחיד. חט"ע
61. במעגל שתי זוויות מרכזיות שוות רק אם שתי הקשתות המתאימות להן שוות. חט"ע

62. במעגל שתי זוויות מרכזיות שוות רק אם שני המיתרים המתאימים להן שווים. חט"ע
63. במעגל מיתרים שווים רק אם שתי הקשתות המתאימות להם שוות. חט"ע (עכשיו מנסחים: "...אם ורק אם יש להם קשתות מתאימות שוות", כי הרי לכל מיתר שתי קשתות)
64. מיתרים שווים נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל. חט"ע
65. מיתרים במעגל אחד הנמצאים במרחקים שווים ממרכזו שווים זה לזה. חט"ע
66. במעגל, אם מרחקו של מיתר ממרכז המעגל קטן ממרחקו של מיתר אחר, אז מיתר זה ארוך מהמיתר האחר. חט"ע במסגרת התרגול
67. האנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית המתאימה למיתר וחוצה את הקשת המתאימה למיתר. חט"ע
68. קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר. חט"ע
69. במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת. חט"ע
70. במעגל, לזוויות היקפיות שוות קשתות שוות ומיתרים שווים. חט"ע
71. במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות. חט"ע
72. במעגל, כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על המיתר מאותו צד שוות. חט"ע
73. זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה ($90°$).חט"ע
74. זווית היקפית של $90°$ נשענת על קוטר. חט"ע
75. במעגל, זווית פנימית שווה למחצית סכום שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן. לא בתכנית
76. במעגל, זווית חיצונית שווה למחצית הפרש שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן. לא בתכנית
77. המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה. חט"ע
78. ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל. חט"ע
79. זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מִצדו השני. חט"ע
80. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים. חט"ע
81. קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה שממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים. חט"ע
82. קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים, חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו. לא בתכנית
83. נקודת ההשקה של שני מעגלים המשיקים זה לזה, נמצאת על קטע המרכזים או על המשכו. לא בתכנית
84. משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר. חט"ב
85. משפט פיתגורס ההפוך: משולש בו סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית הוא ישר זווית. חט"ע
86. במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר. חט"ב
87. משולש שבו התיכון שווה למחצית הצלע שהוא חוצה הוא משולש ישר זווית. חט"ב
88. אם במשולש ישר זווית זווית חדה של $30°$, אז הניצב מול זווית זו שווה למחצית היתר. חט"ב
89. אם במשולש ישר זווית ניצב שווה למחצית היתר, אז מול ניצב זה זווית של $30°$. חט"ב

90. משפט תאלס: שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית, מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים. חט"ע
91. משפט תאלס המורחב: ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש חותך את שתי הצלעות האחרות או את המשכיהן בקטעים פרופורציוניים. חט"ע
92. משפט הפוך למשפט תאלס: שני ישרים המקצים על שוקי זווית ארבעה קטעים פרופורציוניים, הם ישרים מקבילים. חט"ע
93. חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים שהיחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה. חט"ע
94. ישר העובר דרך קדקוד משולש ומחלק את הצלע שמול הקדקוד חלוקה פנימית ביחס של שתי הצלעות האחרות (בהתאמה), חוצה את זווית המשולש שדרך קודקודה הוא עובר . חט"ע
95. משפט דמיון צ.ז.צ. חט"ע (הוכחה כהעשרה)
96. משפט דמיון ז.ז. חט"ב
97. משפט דמיון צ.צ.צ. חט"ע (הוכחה כהעשרה)
98. במשולשים דומים:
    א. יחס גבהים מתאימים שווה ליחס הדמיון. חט"ע
    ב. יחס חוצי זוויות מתאימות שווה ליחס הדמיון. חט"ע
    ג. יחס תיכונים מתאימים שווה ליחס הדמיון. חט"ע
    ד. יחס ההיקפים שווה ליחס הדמיון. חט"ע
    ה. יחס הרדיוסים של המעגלים החוסמים שווה ליחס הדמיון. חט"ע
    ו. יחס הרדיוסים של המעגלים החסומים שווה ליחס הדמיון. חט"ע
    ז. יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון. חט"ע
99. אם במעגל שני מיתרים נחתכים, אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני. חט"ע – במסגרת התרגילים
100. אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים שני חותכים, אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני. חט"ע – במסגרת התרגול
101. אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק. חט"ע – במסגרת התרגול
102. במשולש ישר זווית, הניצב הוא ממוצע הנדסי של היתר והיטל ניצב זה על היתר. חט"ע – במסגרת התרגול
103. הגובה ליתר במשולש ישר זווית הוא ממוצע הנדסי של היטלי הניצבים על היתר. חט"ע – במסגרת התרגול
104. סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור הוא $180°(n-2)$. חט"ב