שאלות על קונוולוציה

(10%) א. חשבו את התמרת פורייה של תוצאת הפעלת מסנן : $h(x,\mathrm{y}) = \mathrm{sinc}(x)\cdot\mathrm{sinc}(y)$

על התמונה : $f(x,\mathrm{y}) = \begin{cases} 1 & 0 \le |x|,|y| < 0.5 \\ 0 & otherwise \end{cases}$.

(10%) ב. תהה $\{x(n)\}$ סדרה כך ש $(n<0 \,||\, n \ge N) \to x(n) = 0$.

תהה התמרת פורייה הבדידה: $X(f) = \sum_{u=0}^{N-1} x(n)\exp(-j2\pi fn/N)$.

הוכיחו כי התמרת פורייה הבדידה מחזורית והוכיחו כי ההתמרה:

$x(m) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{f=0}^{N-1} X(f)\exp(j2\pi fm/N)$ הופכית.

(10%) ג. הסבירו מדוע צריך לרפד את שתי הסדרות באפסים כאשר מחשבים את הקונוולוציה שלהן בעזרת משפט הקונוולוציה ?

(10%) ד. הוכיחו את משפט הקונוולוציה : התמרת פורייה של קונוולוציה של שתי סדרות שווה למכפלת התמרות פורייה של הסדרות. מדוע צריך לרפד את שתי הסדרות באפסים כאשר מחשבים את הקונוולוציה במישור התדר בעזרת משפט הקונוולוציה ?

תשובה לסעיף א'

$$f(x,\mathrm{y}) = \begin{cases} 1 & 0 \le |x|,|y| < 0.5 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\hat{f}(\mathrm{u},\mathrm{v}) = \iint_R \exp(-\mathrm{i}\,2\pi(ux+vy))\,dxdy$$

$$R = \{x,y : 0 \le |x|,|y| < 0.5\}$$

$$\hat{f}(\mathrm{u},\mathrm{v}) = \int_{-0.5}^{0.5} \exp(-\mathrm{i}\,2\pi ux)\,dx \cdot \int_{-0.5}^{0.5} \exp(-\mathrm{i}\,2\pi vy)\,dy$$

$$\int_{-0.5}^{0.5} \exp(-\mathrm{i}\,2\pi ux)\,dx = \left.\frac{\exp(-\mathrm{i}\,2\pi ux)}{-\mathrm{i}\,2\pi u}\right|_{-0.5}^{0.5}$$

$$= \frac{i}{2\pi u}\left(\exp(-\mathrm{i}\,\pi u) - \exp(\mathrm{i}\,\pi u)\right) =$$

$$\frac{i}{2\pi u}\left(-2\cdot\mathrm{i}\cdot\sin(\pi u)\right) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} = \mathrm{sinc}(u)$$

$$\hat{f}(\mathrm{u},\mathrm{v}) = \mathrm{sinc}(u)\cdot\mathrm{sinc}(v)$$

ההתמרה ההפוכה (נראה את משפט הדואליות עבור המקרה הפרטי)

$$f(x,\mathrm{y}) = \Im^{-1}\left(\mathrm{sinc(u)}\cdot \mathrm{sinc}(v)\right)$$

לפי הגדרה של התמרת פורייה

$$f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \iint \mathrm{sinc}(u)\,\mathrm{sinc}(v)\exp\left(\mathrm{i}\,2\pi(ux+vy)\right)dudv$$

שינוי משתנה

$$f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \iint \mathrm{sinc}(-u)\,\mathrm{sinc}(-v)\exp\left(-\mathrm{i}\,2\pi(ux+vy)\right)dudv$$

משיקולי סימטריה של $\mathrm{sinc}(\cdot)$

$$f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \iint \mathrm{sinc}(u)\,\mathrm{sinc}(v)\exp\left(-\mathrm{i}\,2\pi(ux+vy)\right)dudv$$

$$f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \Im\left(\mathrm{sinc}(u)\,\mathrm{sinc}(v)\right)$$

$$f(\mathrm{u},\mathrm{v}) = \Im\left(\mathrm{sinc}(x)\,\mathrm{sinc}(y)\right)$$

ממשפט הקונוולוציה נקבל את תוצאת המסנן על התמונה במישור התדר:

$$\mathrm{sinc}(u)\cdot\mathrm{sinc}(v)\cdot f(u,v)$$

תשובה לסעיף ב'

$$X(f)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\exp(-j2\pi fn/N)$$

$$X(f+kN)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\exp(-j2\pi(f+kN)n/N)=$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\exp(-j2\pi(f)n/N)\exp(-j2\pi kn)=$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\exp(-j2\pi(f)n/N)=X(f)$$

נתונה ההתמרה ההפוכה. נוכיח:

$$x(m)\overset{def}{=}\frac{1}{N}\sum_{f=0}^{N-1}X(f)\exp(j2\pi fm/N)=$$

$$\frac{1}{N}\sum_{f=0}^{N-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\exp(-j2\pi fn/N)\right]\exp(j2\pi fm/N)=$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left[\sum_{f=0}^{N-1}\exp(-j2\pi f(n-m)/N)\right]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)N\delta(n-m)=x(m)$$

תשובה לסעיף ג'

כאשר מכפילים את התמרות פורייה של הסדרות למעשה מבצעים קונוולוציה של סדרות מחזוריות. (כי התוצאה של ההתמרה ההפוכה מחזורית) וכדי שחלקים של מחזורים שונים לא יכללו בפעולת הקונוולוציה יש להרחיק את המחזורים זה מזה ע"י ריפוד באפסים.

תשובה לסעיף ד

הוכיחו את משפט הקונוולוציה : התמרת פורייה של קונוולוציה של שתי סדרות שווה למכפלת התמרות פורייה של הסדרות. מדוע צריך לרפד את שתי הסדרות באפסים כאשר מחשבים את הקונוולוציה במישור התדר בעזרת משפט הקונוולוציה ?

$$X(f)\overset{def}{=}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\exp(-j2\pi fn/N)$$

$$Y(f)\overset{def}{=}\sum_{n=0}^{N-1}y(n)\exp(-j2\pi fn/N)$$

$$Z(f)\overset{def}{=}\sum_{n=0}^{N-1}(x(n)*y(n))\exp(-j2\pi fn/N)$$

$$Z(f)=\sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\cdot y(n-k)\right)\exp(-j2\pi fn/N)$$

תכונות פונקצית האקספוננט

$$Z(f)=\sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\cdot y(n-k)\right)\exp(-j2\pi fk/N)\exp\left(-j2\pi f(n-k)/N\right)$$

$$Z(f)=\sum_{k=\infty}^{\infty}x(k)\cdot\exp(-j2\pi fk/N)\sum_{n=0}^{N-1}y(k-n)\cdot\exp\left(-j2\pi f(n-k)/N\right)$$

הסדרה סופית: $\{x(n)\}$ סדרה כך ש $(n<0 \,||\, n\geq N)\rightarrow x(n)=0$.

$$Z(f)=\sum_{k=0}^{N-1}x(k)\cdot\exp(-j2\pi fk/N)\sum_{n=0}^{N-1}y(n-k)\cdot\exp\left(-j2\pi f(n-k)/N\right)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}y(n-k)\cdot\exp\left(-j2\pi f(n-k)/N\right)=$$

$$\sum_{n=0}^{k-1}y(n-k)\cdot\exp\left(-j2\pi f(n-k)/N\right)+\sum_{n=k}^{N-1}y(n-k)\cdot\exp\left(-j2\pi f(n-k)/N\right)$$

נחשב את הטור הימני

$$\sum_{n=k}^{N-1}y(n-k)\cdot\exp\left(-j2\pi f(n-k)/N\right)=\sum_{m=0}^{N-k-1}y(m)\cdot\exp(-j2\pi fm/N)$$

נחשב את הטור השמאלי

$$\sum_{n=0}^{k-1}y(n-k)\cdot\exp\left(-j2\pi f(n-k)/N\right)=$$

$$\sum_{n=0}^{k-1}y(n-k+jN)\cdot\exp\left(-j2\pi f(n-k+jN)/N\right)=$$

$$\sum_{m=jN-k}^{JN-1}y(m)\cdot\exp(-j2\pi fm/N)=\sum_{m=N-k}^{N-1}y(m)\cdot\exp(-j2\pi fm/N)$$

נציב את שני הטורים שחישבנו

$$\sum_{n=0}^{N-1}y(n-k)\cdot\exp\left(-j2\pi f(n-k)/N\right)=$$

$$\left(\sum_{m=N-k}^{N-1}y(m)\cdot\exp(-j2\pi fm/N)+\sum_{m=0}^{N-k-1}y(m)\cdot\exp(-j2\pi fm/N)\right)=$$

$$\sum_{m=0}^{N-1}y(m)\cdot\exp(-j2\pi fm/N)$$

קבלנו:

$$Z(f)=X(f)y(f)$$