שאלה 3 (25%)

(5%) א. הוכיחו כי פעולת ה erosion מקיימת : $A\Theta B = \bigcap_{b\in B}(A)_{-b}$

(10%) ב. הוכח כי $A \bullet B \supseteq A$ ( פעולת closing )

(5%) ג. הציעו אלגוריתם לסימון גבולות של דמויות גדולות ונפרדות בעזרת מסננים צורנים. הגבול צריך להפריד בין פנים הדמות לחוץ הדמות. ההפרדה תהיה כזאת שלא תהיה קשירות מסוג 8 בין הקבוצה הפנימית והחיצונית.

(5%) ד. הוכח כי $A \circ B \subseteq A$ ( פעולת opening )

תשובה לסעיף א'

הוכיחו הגדרה אחרת לפעולת ה- erosion : $A\Theta B = \bigcap_{b\in B}(A)_{-b}$

$$x \in A\Theta B \Leftrightarrow x \in \{z : (B)_z \subseteq A\} \Rightarrow \forall_b\ b \in B : b + z \in A \Rightarrow$$
$$\exists\, a_b \in A : b + z = a_b \Rightarrow z = a_b - b \Rightarrow \forall_b\ b \in B : z \in (A)_{-b} \Rightarrow$$
$$z \in \bigcap_{b\in B}(A)_{-b}$$

אפשר לקרא את ההוכחה בכיוון הפוך ונקבל את השקילות בהגדרות.

תשובה לסעיף ב'

הוכח כי $A \bullet B \supseteq A$

נניח כי $x \in A$ . לכל $b \in B$ , נסמן : $z_b = x + b$ .

לכן $x = b + z_b -$ ולכן לפי הגדרת ה – dilation $z_b \in A \oplus B$

נניח בשלילה ש $x \notin (A \oplus B)\theta B$ .

לכן קיים $b \in B$ , $x + b \notin (A \oplus B)$ . אבל ראינו שלכל לכל $b \in B$ : $z_b = x + b$ כאשר

$z_b \in A \oplus B$ . קבלנו סתירה להנחה $x \notin (A \oplus B)\theta B$ .

תשובה לסעיף ג'

בעזרת structure element מהצורה : $se = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$

נחשב את ה erosion. קבוצת הגבול תהיה החיתוך של התשלים של קבוצת ה – erosion והתמונה המקורית. פנים הדמות זאת קבוצת ה – erosion. אם קיימת קשירות מסוג 8 של פנים הדמות ( הדמות ללא הגבול) עם חוץ הדמות ( המשלים של הדמות ) אז קיים איבר $x$ בפנים ו $y$ בחוץ כך ש $x \in N_8(y)$ . אבל זאת סתירה לכך ש $x \in Obj\ \theta\ se$ .

תשובה לסעיף ד'

הוכח כי $A \circ B \subseteq A$

נניח כי $x \in A \circ B = (A\theta B) \oplus B$

נסמן: $C = A\theta B$ אז $x \in C \oplus B$ .

לכן בעזרת הגדרת ה – dilation: קיימים $c_x \in C, \mathrm{b}_x \in B$ כך ש- $-b_x + x = c_x$ .

מהגדרת הקבוצה $C = A\theta B$ : $c_x \in C \leftarrow (\forall b \in B : \exists a \in A \to b + c_x = a)$

לכן בפרט עבור $\mathrm{b}_x$ : $b_x + c_x = a \in A$ .

אבל $c_x = x + b_x-$ ז"א $x = b_x + c_x$ . לכן $x = a \in A$