שאלה 1 (25%)

הוכח כי בטרנספורם פורייה הרציף והדו-ממדי , סיבוב מישור התמונה בזווית θ_0 גורר סיבוב מישור התדר בזווית θ_0.

תשובה:

ע"פ ההגדרה של טרנספורם פורייה הדו-ממדי :

1.
$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-i2\pi(xu+yv)}dxdy$$

נעבור לקורדינטות פולאריות :

2.
$$x=r\cos(\theta) \quad y=r\sin(\theta) \quad u=\omega\cos(\phi) \quad v=\omega\sin(\phi)$$

נקבל :

3.
$$\hat{F}(\omega,\phi)=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}\hat{f}(r,\theta)e^{-i2\pi\omega r\cos(\theta-\phi)}rdrd\theta$$

כאשר $\hat{f}(r,\theta)$ היא הצגה בקורדינטות פולאריות של $f(x,y)$ וכדומה - F ו $\hat{F}$.

נסמן :

4.
$$\varphi=\theta_0 \qquad \hat{f}_1(r,\theta)=\hat{f}(r,\theta+\varphi)$$

נציב ב - 3 ונקבל :

5.
$$\hat{F}_1(\omega,\phi)=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}\hat{f}(r,\theta+\varphi)e^{-i2\pi\omega r\cos(\theta-\phi)}rd\theta dr$$

נסמן : $\xi=\theta+\varphi$, אזי נקבל:

6.
$$\hat{F}_1(\omega,\phi)=\int_{0}^{\infty}\int_{\varphi}^{2\pi+\varphi}\hat{f}(r,\xi)e^{-i2\pi\omega r\cos(\xi-\varphi-\phi)}rd\xi dr$$

$$=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}\hat{f}(r,\xi)e^{-i2\pi\omega r\cos(\xi-\varphi-\phi)}rd\xi dr=\hat{F}(\omega,\phi+\varphi)$$