שאלה 1 (25%)

א. (15%) תהינה $f(x,y)$ ו- $g(x,y)$, שתי תמונות ברזולוציה $N \times N$.

נתון כי $c \in \{0,1,2,\cdots,N-1\}$, $g(x,y)=\begin{cases}1 & y=c\\ 0 & y\neq c\end{cases}$.

($g(x,y)$ היא תמונה של קו אופקי)

נסמן את טרנספורם פורייה הבדיד של $f(x,y)$ ע״י : $F(u,v)$.

נסמן את טרנספורם פורייה הבדיד של $f(x,y)+g(x,y)$ ע״י : $B(u,v)$.

הוכח כי אם $u \in \{1,2,\cdots,N-1\}$ אז $F(u,v)=B(u,v)$.

ב. (10%) יהא $\underline{F}=P(\underline{f}-\underline{\mu})$ טרנספורם DKLT . הוכח כי זוגות של מקדמים בווקטור הפלט של הטרנספורם הם בלתי מתואמים (ז״א אם $\underline{F}=(f_0, f_1,\cdots f_{n-1})$ אז $E(F_i F_j)=\delta_{i,j}$) .

תשובה לסעיף א

נסמן את טרנספורם פורייה הבדיד של $g(x,y)$ ע״י : $G(u,v)$.

טרנספורם פורייה ליניארי לכן, מספיק להראות ש : $u \in \{1,2,\cdots,N-1\}$, $G(u,v)=0$.

$$G(u,v)=\frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{n-1} g(x,y)\exp\left(-j2\pi\frac{ux+yv}{N}\right)=$$

$$\frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\exp\left(-j2\pi\frac{ux+cv}{N}\right)=\frac{\exp\left(-j2\pi\frac{cv}{N}\right)}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\exp\left(-j2\pi\frac{ux}{N}\right)=$$

עבור $u=0$ הביטוי $\sum_{x=0}^{N-1}\exp\left(-j2\pi\frac{ux}{N}\right)=N$

כאשר $u\neq 0$ נקבל:

$$\frac{1-\exp\left(-j2\pi\frac{xuN}{N}\right)}{1-\exp\left(-j2\pi\frac{u}{N}\right)}=\frac{1-1}{1-\exp\left(-j2\pi\frac{u}{N}\right)}=0$$

קבלנו :
$$G(u,v)=\begin{cases} 0 & u\neq 0 \\ \dfrac{\exp\left(-j2\pi\dfrac{cv}{N}\right)}{N} & u=0 \end{cases}$$

מ.ש.ל

תשובה לסעיף ב׳

$$\begin{aligned} E(\underline{F}\cdot\underline{F}) &= E\left(P\left(\underline{f}-\underline{\mu}\right)\cdot\left(\underline{f}^T-\underline{\mu}^T\right)P^T\right) \\ &= PE\left(\left(\underline{f}-\underline{\mu}\right)\cdot\left(\underline{f}^T-\underline{\mu}^T\right)\right)P^T \\ &= PCP^T=\Delta \end{aligned}$$

כאשר Δ מתארת את מטריצת הערכים העצמיים של המטריצה C שהיא מטריצת השונויות המשותפות ו P מטריצת הוקטורים העצמים שלה ע״פ הגדרת טרנספורם DKLT.