שאלה : הוכח כי אם $h(x,y)=e^{-\left(x^2+y^2\right)/2\sigma^2}$ אז $\hat{h}(u,v)=2\pi\sigma^2\cdot e^{\frac{-(2\pi)^2\left(u^2+v^2\right)\sigma^2}{2}}$.

פתרון :

ראשית נפתור עבור מימד אחד.

נניח $h(w)=e^{-w^2/2\sigma^2}$

נחשב את התמרת פורייה של $h(w)$:

$$\hat{h}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}h(w)e^{-j2\pi wf}\,dw=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-w^2/2\sigma^2}e^{-j2\pi wf}\,dw=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(w^2+j4\pi wf\sigma^2)}dw$$

נשתמש בזהות :

$$e^{\frac{-(2\pi)^2f^2\sigma^2}{2}}\cdot e^{\frac{(2\pi)^2f^2\sigma^2}{2}}=1$$

ונציב אותה ב- $\hat{h}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(w^2+j4\pi wf\sigma^2)}dw$

$$\hat{h}(f)=e^{\frac{-(2\pi)^2f^2\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\left(w^2+j4\pi\sigma^2wf-(2\pi)^2\sigma^4f^2\right)}dw=$$

$$e^{\frac{-(2\pi)^2f^2\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(w+j2\pi\sigma^2f)^2}dw$$

נגדיר : $r=w+j2\pi\sigma^2f$ ונקבל:

$$\hat{h}(f)=e^{\frac{-(2\pi)^2f^2\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}}dr$$

נכפיל ונחלק ב- $\sqrt{2\pi}\sigma$.

ידוע ש- $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}}dr=1$.

נציב ונקבל:

$$\hat{h}(f)=\sqrt{2\pi}\sigma\cdot e^{\frac{-(2\pi)^2f^2\sigma^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}}dr=\sqrt{2\pi}\sigma\cdot e^{\frac{-(2\pi)^2f^2\sigma^2}{2}}$$

עתה נחזור לבעיה הכללית.

$$\hat{h}(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)e^{j2\pi(ux+vy)}dxdy=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^{2)}/2\sigma^2}e^{j2\pi(ux+vy)}dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2}e^{j2\pi ux}dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^{2)}/2\sigma^2}e^{j2\pi vy}dy=2\pi\sigma^2\cdot e^{\frac{-(2\pi)^2\left(u^2+v^2\right)\sigma^2}{2}}$$

הוכחנו את הדרוש.