שאלה 3 (25%)

תהא $f(x,y)=4\cos(4\pi x)\cos(6\pi y)$ תמונה. דוגמים את התמונה עם שריג:

$\Delta x=\Delta y=0.5$. כדי לשחזר את התמונה משתמשים בפלטר שחזור אידיאלי בתדרים

המתאימים $\left(\frac{1}{2\Delta x},\frac{1}{2\Delta y}\right)$. תארו בנוסחה את תוצאת השחזור.

פתרון:

$$f(x,y)=4\cos(4\pi x)\cos(6\pi y)$$

מנוסחת אוילר

$$\cos(\alpha)=\frac{\exp(i\alpha)+\exp(-i\alpha)}{2}$$

נקבל:

$$f(x,y)=(\exp(i4\pi x)+\exp(-i4\pi x))\cdot(\exp(i6\pi y)+\exp(-i6\pi y))$$

$$f(x,y)=\exp(i2\pi(2x+3y))+\exp(i2\pi(2x-3y))+\exp(i2\pi(-2x+3y))+\exp(i2\pi(-2x-3y))$$

התמרת פורייה של הלם:

$$\Im[\delta(x-m,y-n)]=\iint_{x,y}\delta(x-m,y-n)\exp(-i2\pi(ux+vy))dxdy=\exp(-i2\pi(um+vn))$$

מעיקרון הדואליות:

$$\Im[\exp(i2\pi(mx+ny))]=\hat{\delta}(u-m,v-n)$$

נקבל:

$$\hat{f}(u,v)=\delta(u-2,v-3)+\delta(u-2,v+3)+\delta(u-2,v+3)+\delta(u+2,v+3)$$

Sampling

נתאר דגימה בעזרת "מסרק" הלמים.

$$s_{\Delta x,\Delta y}(x,y)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-m\cdot\Delta x,x-n\cdot\Delta y)$$

התמרת פורייה של "מסרק" הדגימה

$$\Im[s_{\Delta x,\Delta y}(x,y)]=\frac{1}{\Delta x}\frac{1}{\Delta y}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(u-k/\Delta x,v-l/\Delta y)$$

תאור הדגימה ככפל בין מסרק הדגימה והפונציה הנדגמת:

$$\tilde{f}(x,y)=f(x,y)\cdot s_{\Delta x,\Delta y}(x,y)$$

לפי משפט הקונוולוציה:

$$\Im[\tilde{f}(x,y)]=\hat{f}(u,v)*\frac{1}{\Delta x}\frac{1}{\Delta y}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(u-k/\Delta x,v-l/\Delta y)$$

נקבל:

$$\Im\left[\tilde{f}(x,y)\right]=\frac{1}{\Delta x}\frac{1}{\Delta y}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(u-k/\Delta x,v-l/\Delta y\right)=$$

$$\frac{1}{\Delta x}\frac{1}{\Delta y}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta\left(u\pm 2-k/\Delta x,v\pm 3-l/\Delta y\right)$$

מסנן שחזור אידאלי עבור דגימה במרווחים : $\Delta x,\Delta y$

$$H(u,v)=\begin{cases}\Delta x\Delta y & |u|\le 1/(2\Delta x),|v|\le 1/(2\Delta y)\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$\frac{1}{2\Delta x}=1 \quad , \quad \frac{1}{2\Delta y}=1$$

קבלנו את מסנן השחזור האידיאלי:

$$H(u,v)=\begin{cases}0.25 & |u|\le 1,|v|\le 1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

עבור $\Delta x=\Delta y=0.5$ נפשט את הביטוי ע״י מציאת הרכיבים שנמצאים בתוך תחום העברה של המסנן

$$H(u,v)\cdot\Im\left[\tilde{f}(x,y)\right]=H(u,v)\cdot\frac{1}{\Delta x\Delta y}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta\left(u\pm 2-k/\Delta x,v\pm 3-l/\Delta y\right)$$

$$=H(u,v)\cdot\frac{1}{\Delta x\Delta y}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta\left(u\pm 2-2k,v\pm 3-2l\right)$$

לאחר מסנן השחזור נקבל רק את המרכיבים שמתאימים ל- $k=1,-1,\quad l=1,-1$ כי רק הם נמצאים בתוך תחום ההעברה של מסנן השחזור.

$$H(u,v)\cdot\Im\left[\tilde{f}(x,y)\right]=\delta\left(u\pm 2\mp 2,v\pm 3\mp 2\right)=\delta(u,v+1)+\delta(u,v-1)+\delta(u,v+1)+\delta(u,v-1)$$

קבלנו: $H(u,v)\cdot\Im\left[\tilde{f}(x,y)\right]=2\left(\delta(u,v+1)+\delta(u,v-1)\right)$ (Aliasing)

המשך:

נניח עכשיו שהיינו דוגמים את האות בעזרת שריג דגימה הצפוף יותר מהדרוש.
נחשב את השריג הדרוש לפי משפט הדגימה. השריג לא חייב להיות של ריבועים אבל לצורך פשטות נבחר שריג ששיעוריי ה- Δx ושיעוריי ה Δy שווים.

התדר המקסימאלי הוא 3 . לכן מהמתחייב לפי משפט הדגימה $2\cdot 3=6$ (ז״א $\Delta x=\frac{1}{6},\Delta y=\frac{1}{6}$).

נבחר תדר דגימה גדול יותר.

נבחר שריג דגימה: $\Delta x=\frac{1}{16},\Delta y=\frac{1}{16}$.

אז נקבל:

$$H(u,v)\cdot\Im\left[\tilde{f}(x,y)\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(u\pm 2-k/\Delta x, v\pm 3-l/\Delta y)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(u\pm 2-16k, v\pm 3-16l)$$

נחשב את תדרי הסף של מסנן השחזור האידיאלי ונקבל:

$$\frac{1}{2\Delta x}=8 \quad , \quad \frac{1}{2\Delta y}=8$$

$$H(u,v)=\begin{cases}16^{-2} & |u|\le 8,|v|\le 8\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

עבור $k=0, \quad l=0$

נקבל::

$$H(u,v)\cdot\Im\left[\tilde{f}(x,y)\right]=\left(\delta(u\pm 2-16k, v\pm 3-16l\right)=\delta(u\pm 2, v\pm 3))=\hat{f}(u,v)$$

ז"א קבלנו שחזור מדויק של הפונקציה הנדגמת.

המשך:

עכשיו נניח שהינו דוגמים רק בקואורדינטה אחת לפי משפט הדגימה: $\Delta x=\frac{1}{5},\Delta y=\frac{1}{5}$ (כי התדר המקסימאלי הוא 3 ולכן תדר הדגימה צריך להיות לפחות פעמיים, ז"א 6).

נקבל

$$H(u,v)\cdot\Im\left[\tilde{f}(x,y)\right]=H(u,v)\cdot\frac{1}{\Delta x\Delta y}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(u\pm 2-k/\Delta x, v\pm 3-l/\Delta y)$$

$$=H(u,v)\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(u\pm 2-5k, v\pm 6-5l)$$

מסנן השחזור יקיים:

$$\frac{1}{2\Delta x}=2.5 \quad , \quad \frac{1}{2\Delta y}=2.5$$

$$H(u,v)=\begin{cases}5^{-2} & |u|\le 2.5,|v|\le 2.5\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$H(u,v)\cdot\Im\left[\tilde{f}(x,y)\right]=\left(\delta(u\pm 2-5k, v\pm 3-5l)\right)$$

ולכן הרכיב שיעבור במסנן מתאים ל - $k=0, \quad l=1,-1$
קבלנו:

$$H(u,v)\cdot\Im\left[\tilde{f}(x,y)\right]=\delta(u+2,v-2)+\delta(u+2,v+2)+\delta(u-2,v-2)+\delta(u-2,v+2)$$

ז"א קבלנו דוגמא של תופעת Aliasing , ז"א הופיע תדר 2 במקום 3.