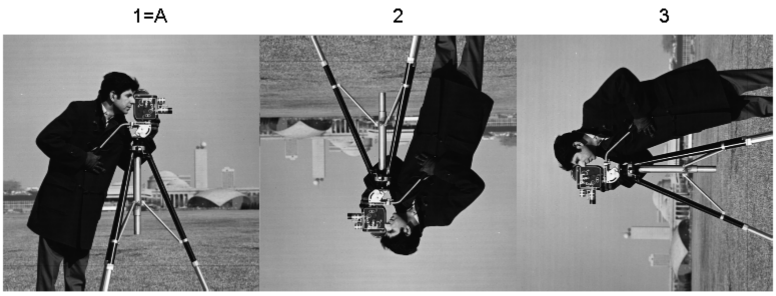
שאלה 3 (25%)

(5%) א. מפעילים את תוכנית MATLAB הבאה על תמונת רמות האפור cameraman.tif

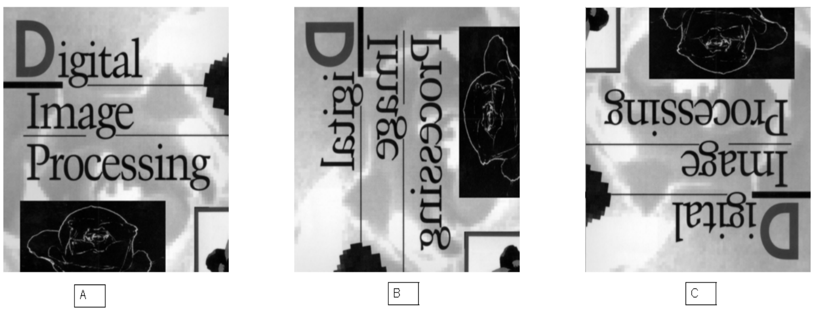
התקבלה התוצאה:

```
A=imread('cameraman.tif');
C=fft2(double(A));
D=conj(C');     % transpose.
E=conj(C);      % Complex conjugate
H=uint8(real(ifft2(D)));
G=uint8(real(ifft2(E)));
```



התאימו את כל אחת מהמטריצות G,H שבתכנית את התמונה המתאימה. הוכיחו את תשובותיכם.

(10%) ב. לפניכם שלש תמונות:



התמונה B ו C התקבלו בעזרת פעולות על מטריצת התמונה A במישור התדר. תארו את הפעולות הדרושות במישור התדר כדי לעבור מתמונה A לתמונה B ולתמונה C.

(10%) ג. תהא : $y = A(x - m_x)$ התמרת KLT. כידוע $C_y = AC_xA^T$ הוכיחו כי הערכים העצמיים של המטריצה C_y הינם הערכים העצמיים של - C_x .

תשובה לסעיף א'

מטריצה G מתאימה לתמונה 2 (שיקוף) ומטריצה H - החלפת שורה בעמודה לתמונה 3

בשאלה מופיעות שתי פעולות. פעולת complex conjugate ופעולת transpose.

מהגדרת התמרת פורייה ומהגדרת פונקצית הפזור נקבל:

$$\hat{x}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\exp\left(\frac{-i2\pi kn}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\exp\left(\frac{-i2\pi k(n-N)}{N}\right)$$

תכונות פעולת צמוד. הסדרה $x(n)$ ממשית לכן:

$$[\hat{x}(k)]^* = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\exp\left(\frac{-i2\pi kn}{N}\right)\right]^* = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\exp\left(\frac{-i2\pi k(N-n)}{N}\right)$$

הצבה

$$= \sum_{m=1}^{N} x(N-m)\exp\left(\frac{-i2\pi km}{N}\right) =$$

שוויון בין האיברים

$$x(N-N)\exp\left(\frac{-i2\pi kN}{N}\right) = x(0)\exp\left(\frac{-i2\pi k0}{N}\right)$$

קבלנו שהצמוד של התמרת פורייה שווה להתמרת פורייה של סדרת השיקוף.

$$\left[\hat{x}(k)\right]^* = \sum_{m=0}^{N-1} x(N-m)\exp\left(\frac{-i2\pi km}{N}\right)$$

לכן פעולת הצמוד (conjugate) יוצרת את תמונת השיקוף.

עבור תמונה ממימד $N \times N$

$$\hat{x}(u,v) = \sum_{m,n=0}^{N-1} x(m,n) \exp\left(\frac{-i2\pi(mu+nv)}{N}\right)$$

תהה תמונה y שהתמרת פורייה שלה מוגדרת

$$\hat{y}(v,u) = \sum_{m,n=0}^{N-1} y(m,n) \exp\left(\frac{-i2\pi(mv+nu)}{N}\right)$$

תמונה אחת היא תוצאה של החלפת שורה בעמודה – transpose של התמונה השניה.

$$y(m,n) = x(n,m)$$

נקבל

$$\hat{y}(v,u) = \sum_{m,n=0}^{N-1} y(m,n) \exp\left(\frac{-i2\pi(mv+nu)}{N}\right) = \sum_{m,n=0}^{N-1} x(n,m) \exp\left(\frac{-i2\pi(mv+nu)}{N}\right) = \hat{x}(u,v)$$

לכן transpose במישור התמונה מתאים ל- transpose במישור התדר.

נתאר את המשפטים בעזרת קוד matlab

```
A=imread('cameraman.tif');
C=fft2(double(A));
D=conj(C');        % Complex conjugate transpose.
H=uint8(real(ifft2(D)));
B=A';
figure; montage([A B H]); title('transpose');
```

```
E=conj(C);
G=uint8(real(ifft2(E)));
[m,n]=size(A);
F=zeros(m,n);
for k=1:m
    for j=1:n
        F(k,j)=A(m-k+1,n-j+1);
    end
end
figure; montage([A F G]); title('miror');
```

תשובה לסעיף ב'

מצב קוד שמבצע את הטרנספורמציות.

```
AF=fft2(A);

BF=transpose(AF);         %  transpose

CF=conj(AF);              %  conjugated

B=ifft2(BF);

B=uint8(real(B));

C=ifft2(CF);

C=uint8(real(C));
```

פעולת ה – transpose מחליפה שורה ועמודה לכו מתאימה לתמונה B

פעולת צמוד גורמת לשיקוף ולכן מתאימה לתמונה C

תשובה לסעיף ג'

$$C_y = AC_xA^T$$

C_y הינה מטריצה אלכסונית וכן : $A^T = A^{-1}$.

$$A^T C_y = A^T AC_x A^T$$

$$A^T C_y = C_x A^T$$

$$C_y = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix}$$

$$A^T C_y = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \lambda_3 v_3 & \cdots & \lambda_n v_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix} =$$
$$C_x \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x v_1 & C_x v_2 & C_x v_3 & \cdots & C_x v_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix}$$

קבלנו שעמודות A^T הם וקטורים עצמים המתאימים לערכים העצמים באלכסון של C_y