שאלה :

א. (15%) הוכיחו כי התמרת פורייה של מסנן מסוג גאוסיאן היא פונקצית גאוסיאן. ז"א הוכיחו את הטענה הבאה :

אם : $\hat{f}(u,v) = \exp\left(-\left(u^2 + v^2\right)/2\sigma^2\right)$

אז : $f(x,y) = 2\pi\sigma^2 \exp\left(-2\pi^2\sigma^2\left(x^2 + y^2\right)\right)$

רמז : התפלגות נורמאלית מקיימת : $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-(t-\mu)^2/2\sigma^2\right) dt = \sigma\sqrt{2\pi}$

ב. (10%) נסמן את פונקצית הגאוסיאן : $h(t,z,A,\sigma) = A2\pi\sigma^2 \exp\left(-2\pi^2\sigma^2\left(t^2+z^2\right)\right)$.

חשבו את הקונוולוציה : $h(t,z,A_1,\sigma_1) * h(t,z,A_2,\sigma_2)$.

רמז : התמרת פוריה של $h(t,z,\sigma) = A2\pi\sigma^2 \exp\left(-2\pi^2\sigma^2\left(t^2+z^2\right)\right)$

הינה : $H_\sigma(\mu,\nu) = A\exp\left(-\frac{\left(\mu^2+\nu^2\right)}{2\sigma^2}\right)$.

תשובה לסעיף א :

נתון : $\hat{f}(u,v)=\exp\left(-\left(u^2+v^2\right)/2\sigma^2\right)$.

הצבה בהגדרת התמרת פורייה תיתן :

$$f(x,y)=\iint\exp\left(-\left(u^2+v^2\right)/2\sigma^2\right)\exp\left(j2\pi\left(xu+yv\right)\right)dudv$$

$$f(x,y)=\int\exp\left(-\left(u^2-j2\pi xu2\sigma^2\right)/2\sigma^2\right)du\cdot\int\exp\left(-\left(v^2-j2\pi yv2\sigma^2\right)/2\sigma^2\right)dv$$

(הערה :כל האינטגרלים בתשובה בגבולות $(-\infty,\infty)$)

נבדוק את אחד האיברים במכפלה :

$$\int\exp\left(-\left(u^2-j2\pi xu2\sigma^2\right)/2\sigma^2\right)du=$$
$$\int\exp\left(-\left(u^2-j2\pi xu2\sigma^2-4\pi^2x^2\sigma^4+4\pi^2x^2\sigma^4\right)/2\sigma^2\right)du=$$
$$\int\exp\left(-\left(u^2-j2\pi xu2\sigma-4\pi^2x^2\sigma^4\right)/2\sigma^2\right)\exp\left(-\left(4\pi^2x^2\sigma^4\right)/2\sigma^2\right)du=$$
$$\exp\left(-\left(2\pi x\sigma^2\right)^2/2\sigma^2\right)\cdot\int\exp\left(-\left(u-j2\pi x2\sigma^2\right)^2/2\sigma^2\right)du$$

התפלגות נורמאלית

$$\int\exp\left(-\left(u+j2\pi x2\sigma^2\right)^2/2\sigma^2\right)du=\sigma\sqrt{2\pi}$$

$$\int\exp\left(-\left(u^2+j2\pi xu2\sigma^2\right)/2\sigma^2\right)du=$$
$$\sigma\sqrt{2\pi}\exp\left(-\left(2\pi x\sigma^2\right)^2/2\sigma^2\right)=\sigma\sqrt{2\pi}\exp\left(-2\left(\pi x\sigma\right)^2\right)$$

לכן קבלנו:

$$f(x,y)=\sigma\sqrt{2\pi}\exp\left(-2(\pi u\sigma)^2\right)\sigma\sqrt{2\pi}\exp\left(-2(\pi u\sigma)^2\right)=$$
$$2\pi\sigma^2\exp\left(-2\left(x^2+y^2\right)(4\pi\sigma)^2\right)=2\pi\sigma^2\exp\left(-2\pi^2\sigma^2\left(u^2+v^2\right)\right)$$

תשובה סעיף ב'

$$\Im\left(h\left(t,z,A_1,\sigma_1\right)*h\left(t,z,A_2,\sigma_2\right)\right)=\Im\left(h\left(t,z,A_1,\sigma_2\right)\right)\cdot\Im\left(h\left(t,z,A_2,\sigma_2\right)\right)$$

$$A_1\exp\left(-\frac{\left(\mu^2+\nu^2\right)}{2\sigma_1{}^2}\right)A_2\exp\left(-\frac{\left(\mu^2+\nu^2\right)}{2\sigma_2{}^2}\right)=$$

$$A_1A_2\exp\left(-\frac{\left(\mu^2+\nu^2\right)\left(\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2\right)}{2\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2}\right)$$

נגדיר $\sigma^2=\dfrac{\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2}{\left(\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2\right)}$ $A=A_1A_2$ לכן:

$$\Im\left[h\left(t,z,A_1,\sigma_1\right)*h\left(t,z,A_2,\sigma_2\right)\right]=A\exp\left(-\frac{\left(\mu^2+\nu^2\right)}{2\sigma^2}\right)$$