פרק 8: משפטי גבול (סיכום)

אי-שוויון מרקוב

אם X הוא משתנה מקרי אי-שלילי, אז לכל ערך חיובי a מתקיים:

$$P\{X \geq a\} \leq \frac{E[X]}{a}$$

אי-שוויון צ'בישב

אם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו μ ושונותו σ^2 סופיות, אז לכל ערך חיובי a מתקיים:

$$P\{|X-\mu| \geq a\} \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

החוק החלש של המספרים הגדולים

אם X_1, X_2, ... היא סדרה של משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות, שלכל אחד מהם תוחלת סופית μ, אז לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים:

$$P\{|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon\} \to 0 \qquad \text{כאשר} \qquad n \to \infty$$

משפט הגבול המרכזי

אם X_1, X_2, ... היא סדרה של משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות, שלכל אחד מהם תוחלת סופית μ ושונות סופית σ^2, אז:

$$P\left\{\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq a\right\} \to \Phi(a) \qquad \text{כאשר} \qquad n \to \infty$$

כלומר, כאשר n "גדול", למשתנה המקרי $Y_n = \dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ יש **בקירוב** התפלגות נורמלית סטנדרטית.

כמו כן, מתקיים השוויון:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

כאשר מחשבים קירוב להסתברות של סכום משתנים מקריים בדידים, <u>שערכיהם שלמים בלבד</u>, באמצעות התפלגות רציפה (ההתפלגות הנורמלית במקרה זה), נוהגים לבצע **תיקון רציפות**. דהיינו, במקרה כזה, קירובי ההסתברויות, לפי משפט הגבול המרכזי, יחושבו כך:

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i < a\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \leq a - 0.5\right\} \cong \Phi\left(\frac{a - 0.5 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \leq a\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \leq a + 0.5\right\} \cong \Phi\left(\frac{a + 0.5 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

(הסבר נוסף בנושא **תיקון הרציפות** אפשר למצוא במדריך הלמידה בעמוד 198 ובפתרונות לקובץ התרגילים לפרק 8 באתר הקורס).

הערה: אם X_1, X_2, ..., X_n הם משתנים מקריים נורמליים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת μ ושונות σ^2, אז:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2) \quad \text{ו-} \quad \overline{X}_n \sim N(\mu, \tfrac{\sigma^2}{n}) \,.$$