פרק 7: תכונות של תוחלת (סיכום)

טענות:

1. תוחלת של פונקציה של X ו- Y. נניח כי $g(x,y)$ היא פונקציה ממשית של x ו- y.

אם ל-X ו-Y יש פונקציית הסתברות משותפת $p_{X,Y}$, אז: $$E[g(X,Y)]=\sum_y\sum_x g(x,y)\,p_{X,Y}(x,y)$$

2. תוחלת של סכום משתנים מקריים

אם $E[X_i]$ סופית לכל $i=1,2,...,n$ אז: $$E[X_1+X_2+...+X_n]=E[X_1]+E[X_2]+\ ...\ +E[X_n]$$

הערה: הטענה במקרה האינסופי תקפה, אם כל ה-X_i-ים הם משתנים מקריים אי-שליליים, או אם $\sum_{i=1}^{\infty}E[|X_i|]<\infty$.

השונות המשותפת של X ו-Y מוגדרת על-ידי:
$$\begin{aligned}\text{Cov}(X,Y)&=E[(X-E[X])(Y-E[Y])]\\&=E[XY]-E[X]E[Y]\end{aligned}$$

אם $\text{Cov}(X,Y)=0$ אז X ו-Y נקראים **בלתי-מתואמים**.

תכונות השונות המשותפת:

1. $\text{Cov}(X,Y)=\text{Cov}(Y,X)$
2. $\text{Cov}(X,X)=\text{Var}(X)$
3. $\text{Cov}(aX,Y)=a\text{Cov}(X,Y)$
4. $\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{j=1}^{m}Y_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\text{Cov}(X_i,Y_j)$

טענות: **1.** אם X ו-Y משתנים מקריים בלתי-תלויים, אז לכל שתי פונקציות ממשיות g ו-h מתקיים:
$$E[g(X)h(Y)]=E[g(X)]E[h(Y)]$$

2. אם X ו-Y בלתי-תלויים זה בזה, אז הם בלתי-מתואמים (אך לא בהכרח להיפך).

3. אם $\underline{X}\sim Mult(n,\underline{p})$ אז לכל $i\neq j$ מתקיים $\text{Cov}(X_i,X_j)=-np_ip_j$.

שונות של סכום סופי של משתנים מקריים

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\text{Var}(X_i)+2\sum_{i<j}\text{Cov}(X_i,X_j)=\sum_{i=1}^{n}\text{Var}(X_i)+\sum_{i\neq j}\text{Cov}(X_i,X_j)$$

שונות של סכום סופי של משתנים מקריים בלתי-תלויים
$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\text{Var}(X_i)$$

מקדם המתאם של X ו-Y מוגדר על-ידי:
$$\rho(X,Y)=\frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

טענות: **1.** לכל X ו-Y מתקיים $-1\le\rho(X,Y)\le 1$.

2. אם $Y=aX+b$ אז $\rho(X,Y)=\begin{cases}1 & , \ a>0\\ -1 & , \ a<0\end{cases}$.

אינדיקטור הוא משתנה מקרי שמקבל את הערכים 1 ו-0 בהסתברויות p $(0 < p < 1)$ ו- $1-p$, בהתאמה.

לכל אינדיקטור, שנסמנו ב-X, מתקיים: $E[X] = p \quad ; \quad E[X^2] = p \quad ; \quad \text{Var}(X) = p(1-p)$

ולכל שני אינדיקטורים, שנסמנם ב-X_1 וב-X_2, מתקיים: $E[X_1X_2] = P\{X_1 = 1, X_2 = 1\}$

ולכן: $\text{Cov}(X_1, X_2) = P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} - P\{X_1 = 1\}P\{X_2 = 1\}$

תוחלת מותנית

אם ל-X ו-Y יש פונקציית הסתברות משותפת אז **התוחלת המותנית של X בהינתן $Y = y$** מוגדרת,

לכל y המקיים $P\{Y = y\} > 0$, על-ידי: $E[X \mid Y = y] = \sum_x xP\{X = x \mid Y = y\} = \sum_x x \dfrac{P\{X = x, Y = y\}}{P\{Y = y\}}$

הערה: התוחלת המותנית של X בהינתן $Y = y$ היא פונקציה של הערך y.

תוחלת של תוחלת מותנית: $E[X] = E[E[X \mid Y]]$

כלומר, אם Y משתנה מקרי בדיד אז – $E[X] = \sum_y E[X \mid Y = y]P\{Y = y\}$

אפשר להשתמש בטענה זו, כדי לחשב הסתברויות של מאורעות על-ידי התניה במשתנה מקרי.

כלומר, אם E מסמן מאורע כלשהו ואם Y משתנה מקרי בדיד אז: $P(E) = \sum_y P(E \mid Y = y)P\{Y = y\}$

טענה (תרגיל ת26): $E[g(Y)X \mid Y] = g(Y)E[X \mid Y]$

נוסחת השונות המותנית: $\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X \mid Y)] + \text{Var}(E[X \mid Y])$

סכום מקרי

אם N הוא משתנה מקרי בדיד שערכיו שלמים אי-שליליים, ואם X_1, X_2, ... הם משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים זה בזה וב-N, אז:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X_1]$$

[כאשר $N = 0$, סכום המשתנים שווה גם הוא ל- 0]

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\text{Var}(X_1) + (E[X_1])^2\text{Var}(N)$$

הפונקציה יוצרת המומנטים של משתנה מקרי X מוגדרת, לכל t ממשי, על-ידי: $M_X(t) = E[e^{tX}]$

המומנט מסדר r של משתנה מקרי X מוגדר על-ידי: $E[X^r]$

המומנט מסדר r של משתנה מקרי X מתקבל מהנגזרת ה-r-ית (לפי t) של $M_X(t)$ בנקודה $t = 0$, אם הנגזרת קיימת בסביבת נקודה זו. כלומר, מתקיים השוויון: $M_X^{(r)}(t)\big|_{t=0} = E[X^r]$

פונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי של מ"מ ב"ת ש"ה $\boldsymbol{Y = \sum_{i=1}^{N} X_i}$**:** $M_Y(t) = E\left[\left(M_{X_1}(t)\right)^N\right]$

פונקציות יוצרות מומנטים של התפלגויות מיוחדות

משתנה מקרי בינומי: $X \sim B(n, p)$, $M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n$, לכל t

משתנה מקרי פואסוני: $X \sim Po(\lambda)$, $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$, לכל t

משתנה מקרי גיאומטרי: $X \sim Geo(p)$, $M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$, $t < -\ln(1-p)$

משתנה מקרי בינומי שלילי: $X \sim NB(r, p)$, $M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$, $t < -\ln(1-p)$

משתנה מקרי אחיד: $X \sim U(a, b)$, $M_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}$, לכל $t \neq 0$

משתנה מקרי מעריכי: $X \sim Exp(\lambda)$, $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$, $t < \lambda$

משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי: $X \sim N(0,1)$, $M_X(t) = e^{t^2/2}$, לכל t

משתנה מקרי נורמלי: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$, לכל t

טענות: **1.** אם $Y = aX + b$, אז: $M_Y(t) = M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$

2. אם $X_1, X_2, \ldots, X_n$ הם משתנים מקריים בלתי-תלויים, אז: $M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$

3. קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין הפונקציות יוצרות המומנטים לפונקציות ההתפלגות המצטברת. כלומר, אם הפונקציה יוצרת המומנטים של משתנה מקרי X קיימת וסופית בסביבה כלשהי של $t = 0$, אז ההתפלגות של X נקבעת באופן יחיד.

תוצאות: **1.** סכום של n משתנים מקריים בינומיים בלתי-תלויים עם הפרמטרים n_i ו- p, לכל $i = 1,\ldots,n$, הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים Σn_i ו- p.

2. סכום של n משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_i, לכל $i = 1,\ldots,n$, הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $\Sigma\lambda_i$.

3. סכום של n משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים שלכולם הפרמטר p, הוא משתנה מקרי בינומי שלילי עם הפרמטרים n ו- p.

4. סכום של n משתנים מקריים נורמליים בלתי-תלויים עם הפרמטרים μ_i ו- σ_i^2, הוא משתנה מקרי נורמלי עם הפרמטרים $\Sigma\mu_i$ ו- $\Sigma\sigma_i^2$.

יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכולם התפלגות F בעלת תוחלת μ ושונות σ^2.

נהוג לומר, שהמשתנים המקריים $X_1, X_2, \ldots, X_n$ הם **מדגם מקרי** מהתפלגות F.

ממוצע המדגם הוא $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, ומתקיים: $E[\bar{X}] = \mu$ ו- $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$

שונות המדגם היא $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, ומתקיים: $E[S^2] = \sigma^2$