פרק 5: משתנים מקריים רציפים (סיכום)

משתנה מקרי רציף: משתנה מקרי שקבוצת ערכיו האפשריים אינה בת-מניה.
ברוב המקרים קבוצה זו היא קטע של מספרים ממשיים (או מספר סופי של קטעים).

פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי רציף: אם X הוא משתנה מקרי רציף, אז פונקציית הצפיפות שלו היא פונקציה ממשית $f(x)$ המוגדרת לכל x ומקיימת:

א. $f(x) \geq 0$ לכל x.

ב. לכל מאורע B מתקיים $P\{X \in B\} = \int_B f(x)\,dx$. כלומר, לכל $a < b$ ממשיים: $P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)\,dx$.
לפיכך, $P\{a \leq X \leq b\}$ היא השטח שמתחת לעקומת הצפיפות $f(x)$, המשתרע מהנקודה a ועד לנקודה b.

ג. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$; כלומר, השטח שמתחת לעקומת הצפיפות $f(x)$ (ומעל לציר x) שווה ל-1.

<u>הערות</u>: 1. אם X הוא משתנה מקרי רציף אז לכל a ממשי $P\{X = a\} = 0$, ולכן $P\{X \leq a\} = P\{X < a\}$.

2. פונקציית הצפיפות אינה חייבת להיות חסומה מלעיל, כל עוד השטח הכלוא תחתיה מתכנס ל-1.

פונקציית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי רציף: $F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ לכל x.

הקשר בין פונקציית ההתפלגות המצטברת לפונקציית הצפיפות: $\boxed{f(x) = \frac{d}{dx}F(x)}$ לכל x.

תוחלת: התוחלת של X מסומנת ב- $E[X]$, ומוגדרת על-ידי $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$.

אם X הוא משתנה מקרי אי-שלילי, כלומר $P\{X \geq 0\} = 1$, אז $E[X] = \int_0^{\infty} P\{X > x\}\,dx$.

תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי:

אם $g(x)$ היא פונקציה ממשית המוגדרת לכל הערכים האפשריים של משתנה מקרי X,
אז $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx$.
לכן, התוחלת מקיימת את השוויון $E[aX + b] = aE[X] + b$.

שונות: השונות של X מסומנת ב- $\mathrm{Var}(X)$, ומוגדרת על-ידי $\mathrm{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f(x)\,dx$.

אפשר להראות שמתקיים $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - (E[X])^2$.

השונות מקיימת את השוויון $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$.

סטיית-תקן: סטיית התקן של X היא השורש החיובי של שונותו. סימון: $\mathrm{SD}(X)$ או σ_X.
סטיית התקן מקיימת את השוויון $\mathrm{SD}(aX + b) = |a|\,\mathrm{SD}(X)$.

התפלגות של פונקציה של משתנה מקרי: יהי X משתנה מקרי רציף, ויהי $Y = g(X)$ פונקציה של X.

אם g היא פונקציה מונוטונית עולה, אז $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = P\{X \leq g^{-1}(y)\} = F_X(g^{-1}(y))$;

ואם g היא פונקציה מונוטונית יורדת, אז $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = P\{X \geq g^{-1}(y)\} = 1 - F_X(g^{-1}(y))$.

מ- F_Y אפשר לקבל את f_Y על-ידי גזירה.

משתנים מקריים מיוחדים

משתנה מקרי אחיד: a ו- b ממשיים ו- $a<b$ $\qquad X \sim U(a,b)$

$a \le x \le b \qquad f(x)=\dfrac{1}{b-a} \;\; ; \;\; F(x)=\dfrac{x-a}{b-a}$

$\mathrm{Var}(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12} \qquad E[X]=\dfrac{a+b}{2}$

שימו לב: לא תיתכן התפלגות אחידה על קטע אינסופי.

משתנה מקרי מעריכי: $\lambda>0 \qquad X \sim Exp(\lambda)$

$x>0 \qquad f(x)=\lambda e^{-\lambda x} \;\; ; \;\; F(x)=1-e^{-\lambda x}$

$E[X]=\dfrac{1}{\lambda} \qquad \mathrm{Var}(X)=\dfrac{1}{\lambda^2} \quad \Rightarrow \quad E[X^2]=\int\limits_0^\infty x^2 f(x)dx=\dfrac{1}{\lambda^2}+\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^2=\dfrac{2}{\lambda^2}$

תכונת חוסר-הזיכרון:

משתנה מקרי X נקרא חסר-זיכרון אם לכל s ו- t אי-שליליים מתקיים $P\{X>s+t \mid X>t\}=P\{X>s\}$.

המשתנה המקרי המעריכי הוא המשתנה היחיד שמקיים את תכונת חוסר-הזיכרון.

הערה: המשתנה המקרי הגיאומטרי מקיים את תכונת חוסר-הזיכרון, אך רק עבור s ו- t **שלמים** אי-שליליים. (לכן, אינו נקרא חסר-זיכרון.)

טענה: אם המופעים, המתרחשים במרווח-זמן כלשהו, מקיימים את שלושת ההנחות של תהליך פואסון עם קצב λ, אז הזמן החולף (מתחילת מרווח-הזמן) עד להתרחשות המופע הראשון הוא משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר λ.

משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי: $Z \sim N(0,1)$

z ממשי $\qquad f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} \;\; ; \;\; F(z)=\Phi(z)=\int\limits_{-\infty}^{z}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

$E[Z]=0 \qquad \mathrm{Var}(Z)=1$

הערה: $f(z)$ סימטרית סביב 0, לכן מתקיים $P\{Z\le -z\}=P\{Z\ge z\}$, כלומר, $\Phi(-z)=1-\Phi(z)$.

משתנה מקרי נורמלי: μ ממשי ו- $\sigma^2>0$ $\qquad X \sim N(\mu,\sigma^2)$

x ממשי $\qquad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \;\; ; \;\; F(x)=\Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$E[X]=\mu \qquad \mathrm{Var}(X)=\sigma^2$

טענה: אם $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ אז $aX+b \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$.

תוצאה: אם $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ אז $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ ולכן:

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\left\{\tfrac{X-\mu}{\sigma}\le\tfrac{x-\mu}{\sigma}\right\}=P\left\{Z\le\tfrac{x-\mu}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\tfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z)=P\{Z\le z\}=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt \qquad ; \qquad \Phi(-z)=1-\Phi(z) \qquad ; \qquad Z\sim N(0,1)$$

נוסחת האינטרפולציה: $\Phi(z)\approx\Phi(z_1)+\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}[\Phi(z_2)-\Phi(z_1)]$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326