פרק 6: התפלגות משותפת של משתנים מקריים (סיכום)

אם X ו- Y הם משתנים מקריים בדידים, אז **פונקציית ההסתברות המשותפת** שלהם מוגדרת, לכל x ו- y ממשיים, על-ידי $p_{X,Y}(x,y)=P\{X=x,Y=y\}$, כאשר $\sum_{x,y} p_{X,Y}(x,y)=1$.

את פונקציות ההסתברות השולית של X ושל Y, p_X ו- p_Y בהתאמה, אפשר לקבל מפונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y על-ידי:

$$p_X(x)=\sum_y P\{X=x,Y=y\}=\sum_y p_{X,Y}(x,y)$$

$$p_Y(y)=\sum_x P\{X=x,Y=y\}=\sum_x p_{X,Y}(x,y)$$

כאשר p_X ו- p_Y נקראות פונקציות ההסתברות השולית של X ושל Y, בהתאמה.

פונקציית ההתפלגות המצטברת המשותפת של משתנים מקריים X ו- Y מוגדרת, לכל a ו- b ממשיים, על-ידי:

$$F_{X,Y}(a,b)=P\{X\le a,Y\le b\}=\sum_{y:y\le b}\sum_{x:x\le a} p_{X,Y}(x,y)$$

כמו כן:

$$F_X(a)=P\{X\le a,Y<\infty\}=F_{X,Y}(a,\infty) \quad \text{ו-} \quad F_Y(b)=P\{X<\infty,Y\le b\}=F_{X,Y}(\infty,b)$$

כאשר F_X ו- F_Y נקראות פונקציות ההתפלגות המצטברת השולית של X ושל Y, בהתאמה.

את כל האמור לעיל אפשר להכליל ל**התפלגות משותפת של n משתנים מקריים**.

ההתפלגות המולטינומית: (התפלגות משותפת בדידה)

נאמר שלמשתנים המקריים הבדידים $X_1, X_2, \ldots, X_r$ יש התפלגות משותפת מולטינומית, אם פונקציית ההסתברות המשותפת שלהם היא:

$$P\{X_1=n_1,\ldots,X_r=n_r\} = \frac{n!}{n_1!\cdot\ldots\cdot n_r!}\cdot p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r}$$

כאשר, $p_1, p_2, \ldots, p_r$ מסמנים הסתברויות שסכומן 1, וכן $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$ עבור n שלם וחיובי.

ניסוי מקרי מולטינומי: ניסוי מקרי המורכב מ- n חזרות בלתי-תלויות על ניסוי, בעל r תוצאות אפשריות שונות, המתקבלות בהסתברויות $p_1, p_2, \ldots, p_r$.

המשתנה המקרי X_i, לכל $i = 1,...,r$, מוגדר כמספר החזרות בניסוי המולטינומי שבהן מתקבלת התוצאה i .

המאורע $\{X_1=n_1,\ldots,X_r=n_r\}$ מתאר את מספר הפעמים שכל אחת מ-r התוצאות מתקבלת בניסוי המולטינומי.

הערות:
1. אם לווקטור המשתנים המקריים $\underline{X}$ יש התפלגות מולטינומית, מסמנים $\underline{X} \sim Mult(n, \underline{p})$.
2. אם $r = 2$ ההתפלגות המולטינומית אינה אלא התפלגות בינומית עם הפרמטרים (n, p_1).
3. ההתפלגות השולית של כל X_i היא התפלגות בינומית עם הפרמטרים (n, p_i), כאשר $i = 1,...,r$.
4. ההתפלגות של כל סכום $X_i + X_j$ היא התפלגות בינומית עם הפרמטרים $(n, p_i + p_j)$, כאשר $i \ne j$.
5. המשתנים המקריים $X_1, X_2, \ldots, X_r$ תלויים זה בזה.
6. ההתפלגות המותנית של $X_i \mid X_j = k$, לכל $k = 0,...,n$, היא בינומית עם הפרמטרים $(n-k, \frac{p_i}{1-p_j})$.
7. לכל $i \ne j$ מתקיים $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -np_ip_j$. (פרק 7)

משתנים מקריים בלתי-תלויים

המשתנים המקריים הבדידים X ו-Y נקראים בלתי-תלויים אם לכל x ו- y ממשיים מתקיים :

$$p_{X,Y}(x,y)=p_X(x)\,p_Y(y)$$

ותנאי אי-תלות שקול הוא : $F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

המשתנים המקריים הבדידים $X_1\,,X_2\,,\ldots\,,X_n$ נקראים **בלתי-תלויים** אם לכל תת-קבוצה של r משתנים מקריים מתוכם $(r=2,\ldots,n)$ ולכל r מספרים ממשיים $x_1\,,x_2\,,\ldots\,,x_r$ מתקיים :

$$P\{X_{i_1}=x_1,\ldots,X_{i_r}=x_r\}\ =\ P\{X_{i_1}=x_1\}\cdot\ldots\cdot P\{X_{i_r}=x_r\}$$

ותנאי אי-תלות שקול הוא : $P\{X_{i_1}\le x_1,\ldots,X_{i_r}\le x_r\}=P\{X_{i_1}\le x_1\}\cdot\ldots\cdot P\{X_{i_r}\le x_r\}$

הערה: יחס האי-תלות הוא יחס סימטרי. כלומר, אם X בלתי-תלוי ב-Y, אז כמובן Y בלתי-תלוי ב-X .

טענה (2.1): המשתנים המקריים הבדידים X ו- Y בלתי-תלויים אם ורק אם ניתן לרשום את פונקציית ההסתברות המשותפת שלהם $p_{X,Y}$ בצורה –

$$p_{X,Y}(x,y)=h(x)\,g(y)\qquad,\qquad \text{לכל } x \text{ ו- } y \text{ ממשיים}$$

טענה (דוגמה 2ב): אם מספר המופעים שמתרחשים במרווח-זמן נתון הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ, ואם תכונה מסוימת מתקיימת בכל אחד מהמופעים המתרחשים בהסתברות p , אז –
מספר המופעים שמתקיימת בהם התכונה במרווח-הזמן הנתון הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λp ;
מספר המופעים שלא מתקיימת בהם התכונה במרווח-זמן זה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $\lambda(1-p)$;
ושני המשתנים המקריים הפואסוניים האלו בלתי-תלויים זה בזה.

סכום של משתנים מקריים בדידים

יהיו X ו-Y משתנים מקריים בדידים. ההתפלגות של המשתנה המקרי $X+Y$ מתקבלת מאחת מן המשוואות $P\{X+Y=a\}=\sum_x P\{X=x\,,Y=a-x\}$ או $P\{X+Y=a\}=\sum_y P\{X=a-y\,,Y=y\}$, לכל a ממשי.

ואם X ו- Y בלתי-תלויים מקבלים כי $P\{X+Y=a\}=\sum_x P\{X=x\}P\{Y=a-x\}=\sum_y P\{X=a-y\}P\{Y=y\}$
לכל a ממשי.

<u>**טענות**</u> (סכום של משתנים מקריים בלתי-תלויים)

1. **דוגמה 3א:** אם X_i הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ_i לכל $i=1,2,\ldots,n$, ואם $X_1\,,X_2\,,\ldots\,,X_n$ בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^n X_i$ הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $\sum_{i=1}^n \lambda_i$.
(את המקרה הכללי, ל-n משתנים מקריים, מוכיחים באינדוקציה.)

2. **דוגמה 3ב:** אם X_i הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים (n_i,p) לכל $i=1,2,\ldots,n$, ואם $X_1\,,X_2\,,\ldots\,,X_n$ בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^n X_i$ הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים $\left(\sum_{i=1}^n n_i\,,p\right)$.
(את המקרה הכללי, ל-n משתנים מקריים, מוכיחים באינדוקציה.)

3. אם X_i הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p לכל $i = 1,2,...,n$, ואם X_1 , X_2 , ... , X_n בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^{n} X_i$ הוא משתנה מקרי בינומי שלילי עם הפרמטרים (n,p).
(מוכיחים ישירות ל- $n = 2$, ואת המקרה הכללי מוכיחים באינדוקציה.)

התפלגויות מותנות

אם X ו- Y הם משתנים מקריים בדידים, **פונקציית ההסתברות המותנית של X בתנאי $Y = y$** מוגדרת לכל y שעבורו $P\{Y = y\} > 0$ ולכל x ממשי על-ידי :

$$p_{X|Y}(x\,|\,y) = P\{X = x\,|\,Y = y\} = \frac{P\{X = x, Y = y\}}{P\{Y = y\}} \qquad ; \qquad \sum_x p_{X|Y}(x\,|\,y) = 1$$

הערה: אם X ו-Y בלתי-תלויים זה בזה מקבלים כי :

$$P\{X = x\,|\,Y = y\} = P\{X = x\}$$
$$P\{Y = y\,|\,X = x\} = P\{Y = y\}$$

כלומר, ההתפלגות המותנית של X בהינתן $Y = y$ אינה תלויה ב- y ושווה להתפלגות השולית של X (ולהיפך). ובמילים אחרות, לערך הידוע של משתנה מקרי אחד אין השפעה על ההתפלגות של המשתנה המקרי השני.

פונקציית ההתפלגות המצטברת של X בתנאי $Y = y$ היא :

$$F_{X|Y}(a\,|\,y) = P\{X \le a\,|\,Y = y\} = \sum_{x:\, x \le a} P\{X = x\,|\,Y = y\}$$

טענה (דוגמה 4ב): אם X ו- Y הם משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_1 ו-λ_2, בהתאמה, אז ההתפלגות של המשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X + Y = n$ היא בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.

הכללת הטענה האחרונה: אם X_1 , X_2 ו- X_3 הם משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_1, λ_2 ו- λ_3, בהתאמה, אז ההתפלגות המשותפת המותנית של המשתנים המקריים X_1 , X_2 ו- X_3 בהינתן $\sum_{i=1}^{3} X_i = n$ היא מולטינומית עם הפרמטרים n ו- $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}, \frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right)$.

טענה: אם X ו- Y הם משתנים מקריים בינומיים בלתי-תלויים עם הפרמטרים (n_X, p) ו- (n_Y, p) , בהתאמה, אז ההתפלגות של המשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X + Y = n$ היא היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $N = n_X + n_Y$, $m = n_X$ ו- $n = n$.