

Taller 3: La Proyección Estereográfica

Marzo 14 2021

Alejandra Campo Archbold

Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Universidad del Rosario

Bogotá, Colombia

alejandra.campo@urosario.edu.co

Santiago Linares

Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Universidad del Rosario

Bogotá, Colombia

santiago.linares@urosario.edu.co

Juan Pablo Sierra Useche

Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Universidad del Rosario

Bogotá, Colombia

juanpab.sierra@urosario.edu.co

Sebastián Caballero

Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Universidad del Rosario

Bogotá, Colombia

juans.caballero@urosario.edu.co

I. INTRODUCCIÓN

La proyección estereográfica del plano complejo, asocia cada punto z en el plano ecuatorial un punto único Z en la esfera. Para describir la proyección estereográfica, consideramos la esfera unitaria en tres dimensiones (x_1, x_2, x_3) cuya ecuación está dada por:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

Si identificamos el plano ecuatorial como el plano complejo, la esfera unitaria se llama esfera de Riemann.

La proyección estereográfica conserva los ángulos de intersección de estas curvas: los círculos centrados en el origen se intersecan con las líneas a través del origen en ángulos rectos en el plano z , y las longitudes se intersecan con las latitudes en ángulos rectos en la esfera.

Si $Z = (x_1, x_2, x_3)$ es la proyección en la esfera de Riemann en el punto $z = x + iy$ en el plano complejo, entonces para pasar del punto en el plano complejo a proyectar en la esfera de Riemann, es necesario definir las siguientes coordenadas:

$$x_1 = \frac{2\operatorname{Re}z}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2\operatorname{Im}z}{|z|^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

Por otro lado, a partir de las coordenadas de la esfera de Riemann, podemos encontrar las coordenadas trasladadas al plano z de esta manera:

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3}, \quad y = \frac{x_2}{1 - x_3}$$

En este proyecto buscamos implementar un programa que realice la proyección estereográfica de puntos en el plano complejo a puntos sobre la esfera de Riemann y diseñar la interfaz interactiva con los puntos en el plano z para ser mostrados en la esfera de Riemann en \mathbb{R}^3 . En primera instancia, explicamos el desarrollo de la solución en la sección II, luego el pseudocódigo de la solución en la sección III. Por último, en la sección IV mostramos las figuras y en la sección V las conclusiones.

II. DESARROLLO

La solución consiste en dibujar en un plano todos los puntos que se van a proyectar en la esfera de Riemann basados en las ecuaciones de las coordenadas. Para esta entrega, escogimos representar el Hipocicloide, Espiral, Lemniscata de Bernoulli y el Cicloide. Las figuras escogidas fueron contruidas en MATLAB así como su resultado. En la sección III, se encuentra el pseudocódigo de la solución de cada figura.

Por otro lado, se realizó una app en MATLAB que permite dibujar más de dos puntos en el plano complejo, para ser proyectado en la esfera de Riemann.

III. PSEUDOCÓDIGO

En esta sección se muestra en pseudocódigo cómo se construyen las gráficas en el plano complejo y sobre la esfera de Riemann. La idea del pseudocódigo es la misma para cada gráfica. Primero se crea las parejas X, Y de vectores que dibujan las formas en el plano complejo. Estos vectores tienen la misma cantidad de elementos, X es para las coordenadas en la parte real y Y para la parte imaginaria. Luego, se grafica por un lado cada pareja X, Y en el plano complejo. Por otro lado, con cada pareja X, Y se crea un nuevo vector $Z = X + iY$ y luego, se aplica a cada elemento de Z la función $f_complex_to_riemann(Z)$ para encontrar las coordenadas x_1, x_2 y x_3 de cada número complejo en Z sobre la esfera. Adicionalmente, se presenta el pseudocódigo de la función $f_complex_to_riemann(Z)$.

F_COMPLEX_TO_RIEMANN(Z):

Require: Z : vector de números complejos

Initialization: X_1, X_2, X_3 : vectores con N elementos

for $i = 1, \dots, N$ **do**

$$X_1[i] \leftarrow \frac{2Re(z_i)}{|z_i|^2+1}$$

$$X_2[i] \leftarrow \frac{2Im(z_i)}{|z_i|^2+1}$$

$$X_3[i] \leftarrow \frac{|z_i|^2-1}{|z_i|^2+1}$$

end for

return X_1, X_2, X_3

PSEUDOCODIGO PARA HIPOCICLOIDE:

Require: None

Initialization: X, Y , listas con N elementos

$$R \leftarrow 2.4$$

$$r \leftarrow 0.26$$

$$d \leftarrow 2.5$$

$$\theta \leftarrow [-2\pi, -2\pi + 0.1, -2\pi + 0.2, \dots, 3\pi] \text{ (arreglo con } N \text{ elementos)}$$

for $i = 1, \dots, N$ **do**

$$X[i] \leftarrow (R - r)\cos(\theta_i) + d\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta_i\right)$$

$$Y[i] \leftarrow (R - r)\sin(\theta_i) + d\sin\left(\frac{R-r}{r}\theta_i\right)$$

end for

$$Z \leftarrow X + iY$$

$$X_1, X_2, X_3 \leftarrow f_complex_to_riemann(Z)$$

Graficar X, Y en el plano complejo

Graficar X_1, X_2, X_3 sobre la esfera

PSEUDOCODIGO PARA ESPIRAL:

Require: None

Initialization: $X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3, X_4, Y_4$, listas con N elementos

$$\theta \leftarrow [-2\pi, -2\pi + 0.1, -2\pi + 0.2, \dots, 3\pi] \text{ (arreglo con } N \text{ elementos)}$$

$$A \leftarrow 1.27$$

$$B \leftarrow 0.35$$

for $i = 1, \dots, N$ **do**

$$X_1[i] = A\exp(B\theta_i)\cos(\theta_i)$$

$$Y_1[i] = A\exp(B\theta_i)\sin(\theta_i)$$

$$X_2[i] = A\exp(B\theta_i)\cos(\theta_i)$$

$$Y_2[i] = -A\exp(B\theta_i)\sin(\theta_i)$$

$$X_3[i] = -A\exp(B\theta_i)\cos(\theta_i)$$

$$Y_3[i] = A \exp(B\theta_i) \sin(\theta_i)$$

$$X_4[i] = -A \exp(B\theta_i) \cos(\theta_i)$$

$$Y_4[i] = -A \exp(B\theta_i) \sin(\theta_i)$$

end for

$$Z_1 \leftarrow X_1 + iY_1$$

$$X_1^1, X_1^2, X_1^3 \leftarrow f_complex_to_riemann(Z_1)$$

$$Z_2 \leftarrow X_2 + iY_2$$

$$X_2^1, X_2^2, X_2^3 \leftarrow f_complex_to_riemann(Z_2)$$

$$Z_3 \leftarrow X_3 + iY_3$$

$$X_3^1, X_3^2, X_3^3 \leftarrow f_complex_to_riemann(Z_3)$$

$$Z_4 \leftarrow X_4 + iY_4$$

$$X_4^1, X_4^2, X_4^3 \leftarrow f_complex_to_riemann(Z_4)$$

Graficar X_j, Y_j para todo $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ en el plano complejo.

Graficar X_j^1, X_j^2, X_j^3 sobre la esfera para todo $j \in \{1, 2, 3, 4\}$

PSEUDOCODIGO PARA LEMNISCATA DE BERNOULLI:

Require: None

Initialization: $X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3, X_4, Y_4$, listas con N elementos

$\theta \leftarrow [-2\pi, -2\pi + 0.01, -2\pi + 0.02, \dots, 3\pi]$ (arreglo con N elementos)

$d \leftarrow 2$

for $i = 1, \dots, N$ **do**

$$X_1[i] = \frac{-d + \sqrt{2} \cos(\theta_i + \pi)}{\sin(\theta_i + \pi)^2 - 5}$$

$$Y_1[i] = \frac{(-d + \sqrt{2} \cos(\theta_i + \pi)) \sin(\theta_i + \pi)}{\sin(\theta_i + \pi)^2 - 5}$$

$$X_2[i] = \frac{d + \sqrt{2} \cos(\theta_i + \pi)}{\sin(\theta_i + \pi)^2 - 5}$$

$$Y_2[i] = \frac{(d + \sqrt{2} \cos(\theta_i + \pi)) \sin(\theta_i + \pi)}{\sin(\theta_i + \pi)^2 - 5}$$

$$X_3[i] = \frac{-d + \sqrt{2} \cos(\theta_i + \pi)}{\sin(\theta_i + \pi)^2 - 5}$$

$$Y_3[i] = \frac{(d + \sqrt{2} \cos(\theta_i + \pi)) \sin(\theta_i + \pi)}{\sin(\theta_i + \pi)^2 - 5}$$

$$X_4[i] = \frac{d + \sqrt{2} \cos(\theta_i + \pi)}{\sin(\theta_i + \pi)^2 - 5}$$

$$Y_4[i] = \frac{(-d + \sqrt{2} \cos(\theta_i + \pi)) \sin(\theta_i + \pi)}{\sin(\theta_i + \pi)^2 - 5}$$

end for

$$Z_1 \leftarrow X_1 + iY_1$$

$$X_1^1, X_1^2, X_1^3 \leftarrow f_complex_to_riemann(Z_1)$$

$$Z_2 \leftarrow X_2 + iY_2$$

$$X_2^1, X_2^2, X_2^3 \leftarrow f_complex_to_riemann(Z_2)$$

$$Z_3 \leftarrow X_3 + iY_3$$

$$X_3^1, X_3^2, X_3^3 \leftarrow f_complex_to_riemann(Z_3)$$

$$Z_4 \leftarrow X_4 + iY_4$$

$$X_4^1, X_4^2, X_4^3 \leftarrow f_complex_to_riemann(Z_4)$$

Graficar X_j, Y_j para todo $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ en el plano complejo.

Graficar X_j^1, X_j^2, X_j^3 sobre la esfera para todo $j \in \{1, 2, 3, 4\}$

PROYECCIÓN PARA CICLOIDE

Require: None

Initialization: X_1, Y_1, X_2, Y_2 vectores de N elementos.

$\theta \leftarrow [-20\pi, -2\pi + 0.01, -2\pi + 0.02, \dots, 20\pi]$ (arreglo con N elementos)

$A \leftarrow 0.5$

$B \leftarrow 0.5$

for $i = 1, \dots, N$ **do**

$X_1[i] \leftarrow \theta_i - B \sin(\frac{\theta_i}{A})$

$Y_1[i] \leftarrow B - B \cos(\frac{\theta_i}{A})$

$X_2[i] \leftarrow -\theta_i + B \sin(\frac{\theta_i}{A})$

$Y_2[i] \leftarrow -B + B \cos(\frac{\theta_i}{A})$

end for

$Z_1 \leftarrow X_1 + iY_1$

$X_1^1, X_1^2, X_1^3 \leftarrow f_complex_to_riemann(Z_1)$

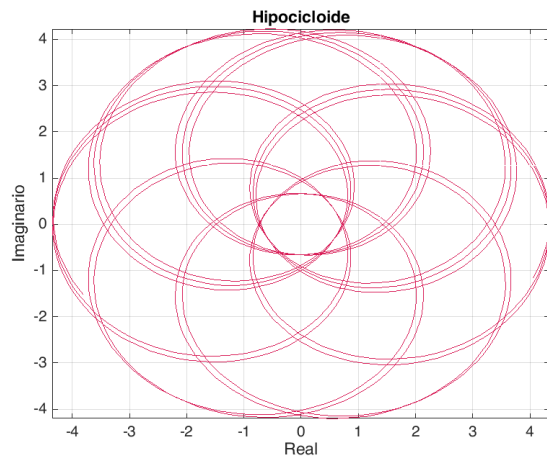
$Z_2 \leftarrow X_2 + iY_2$

$X_2^1, X_2^2, X_2^3 \leftarrow f_complex_to_riemann(Z_2)$

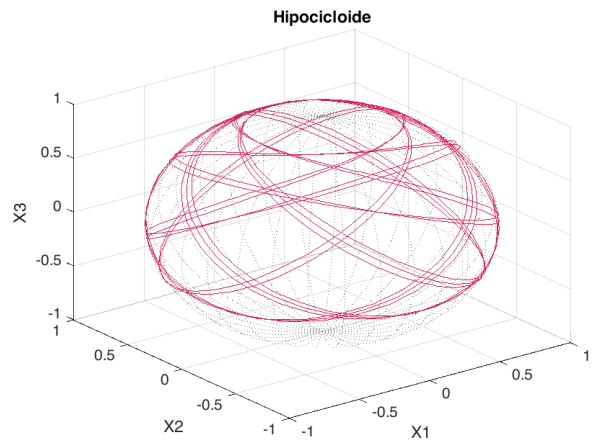
Graficar X_j, Y_j para todo $j \in \{1, 2\}$ en el plano complejo.

Graficar X_j^1, X_j^2, X_j^3 sobre la esfera para todo $j \in \{1, 2\}$

IV. FIGURAS

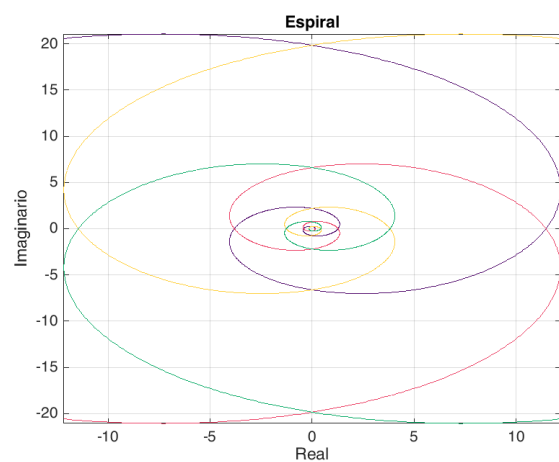


(a)

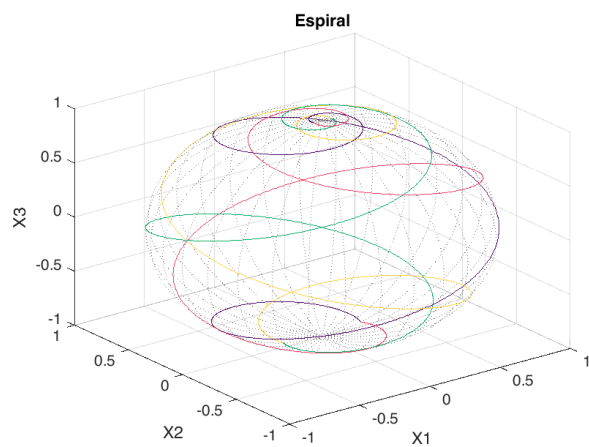


(b)

Figure 1: Hipocicloide

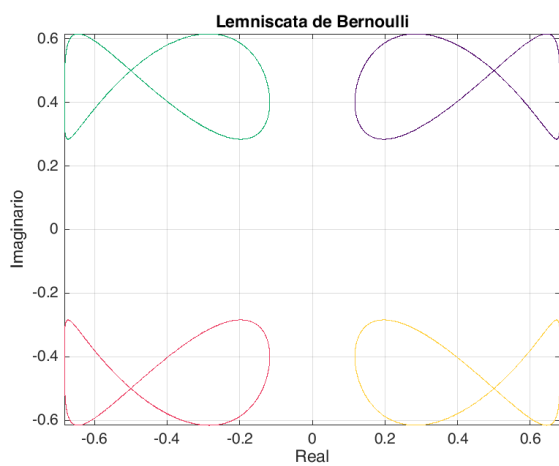


(a)

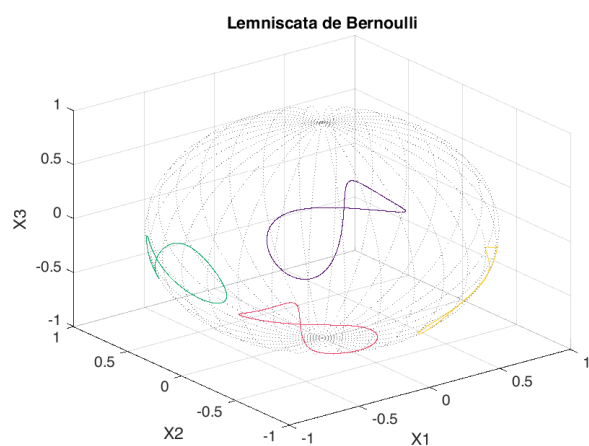


(b)

Figure 2: Espiral

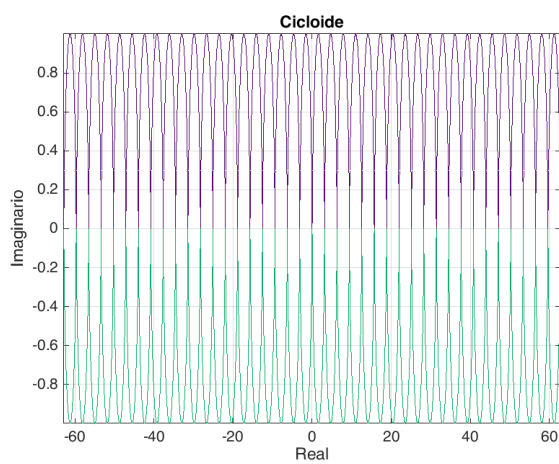


(a)

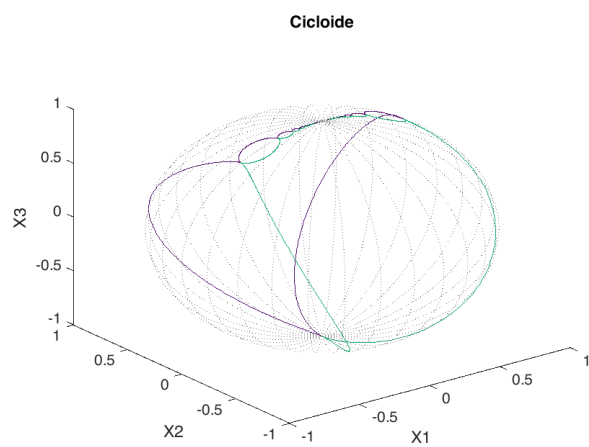


(b)

Figure 3: Lemniscata de Bernoulli



(a)



(b)

Figure 4: Cicloide

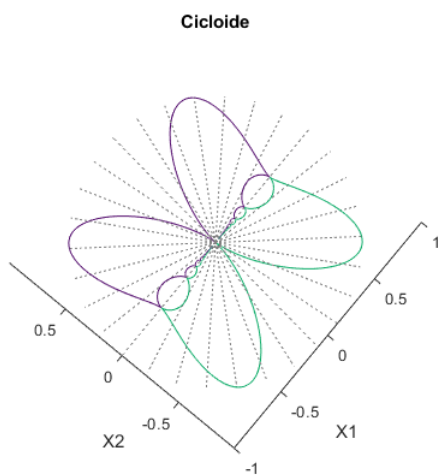


Figure 5: Proyección del Cicloide desde otro ángulo.

V. CONCLUSIONES

En conclusión, la proyección estereográfica del plano complejo de cada una de las figuras, asocia un punto z en la esfera de Riemann, mostrando análisis interesantes y construcciones teóricas en los complejos.