Simulación movimiento planetario

Descripción: realización de laboratorio computacional para el estudio de las leyes de Kepler.

Objetivo principal

- Describir y analizar las leyes de Kepler.

Objetivos secundarios

- Entender el alcance y significado de la aplicación de las leyes de Newton en el movimiento planetario.
- Construir simulación en Python usando librerías estándar para dar cuenta de las trayectorias seguidas por los objetos en un problema de dos cuerpos.

1. Introducción

En este laboratorio de simulación aplicaremos las leyes de Newton al movimiento de dos planetas y exploraremos algunas consecuencias de estas leyes, los planetas interactúan por medio de la ley de gravitación universal de Newton. Esta ley rige el movimiento de cuerpos celestes tanto en nuestro sistema solar como fuera de nuestra galaxia.

La mayoría de nuestro conocimiento sobre la mecánica celeste está resumida en las tres leyes de Kepler, que se enuncian de la siguiente manera:

1. Cada planeta se mueve en una órbita elíptica con el sol localizado en uno de los focos de esta elipse.
2. La velocidad de un planeta aumenta a medida que su distancia al sol disminuye, tal que la línea que une al sol con el planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales.
3. El cociente T^2/a^3 es el mismo para todos los planetas que orbitan al sol, donde T es el periodo del planeta y a es el semieje mayor de su órbita elíptica.

Note que dentro de las leyes de Kepler las órbitas elípticas incluyen órbitas circulares. Es decir, si las condiciones cinemáticas iniciales del planeta son seleccionadas apropiadamente, es posible observar órbitas circulares estables en el movimiento planetario. En otras palabras, existe el movimiento circular uniforme en cuerpos celestes.

Para el desarrollo de este laboratorio, procederemos de la siguiente manera:

1. La mayoría de los problemas que enfrenta la ciencia y la ingeniería en la actualidad, involucran para su resolución el uso del computador, razón por la cual se han desarrollado métodos numéricos para resolver situaciones específicas que quizás de manera analítica no se puedan resolver debido a su complejidad.

   Uno de estos métodos es el algoritmo de Verlet, el cual permite la integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con valores iniciales conocidos; este método es apropiado en situaciones en la que la segunda derivada es función de una variable, sin tener en cuenta la primera derivada, aspecto que rige numerosos problemas en la dinámica de Newton, uno de ellos el movimiento planetario.

   El algoritmo de Verlet se usa para calcular posiciones y velocidades y está descrito por las ecuaciones

$$\vec{x}(t+\Delta t) = 2x(t) - \vec{x}(t-\Delta t) + \vec{a}(t)\Delta t^2 + O\Delta t^4 \rightarrow Verlet\ de\ posición$$

$$\vec{v}(t) = x(t+\Delta t) - \vec{x}(t-\Delta t)/2\Delta t \rightarrow Verlet\ de\ velocidades$$

Para este primer punto usted deberá obtener encontrar las ecuaciones de Verlet de posición y velocidad, para ello debe hacer uso de la definición de una serie de Taylor. **Ayuda:** Comience con el desarrollo de la serie para la ecuación de Verlet posición en $t+\Delta t$ y $t-\Delta t$, el procedimiento lo puede encontrar desarrollado en Wikipedia.

a) Encuentre las ecuaciones de Verlet para posición y velocidad mediante desarrollo de serie de Taylor.

2. Use las ecuaciones de movimiento de planetas descritas en el capítulo 5 del libro [1], para los incisos a) y b). Estas ecuaciones resultan de la aplicación de las leyes de Newton y la ley de gravitación universal:

a) Encuentre la ecuación de velocidad para una orbita circular, partiendo de la ecuación de aceleración en un movimiento circular uniforme, aplique de la segunda ley de Newton.
b) Encuentre la ecuación que muestra del periodo de una órbita circula en términos del radio de la órbita circular (semieje mayor de la elipse).

3. Antes de realizar la simulación es buena idea usar un sistema de unidades conveniente, recuerde que las magnitudes espaciales son números bastante grandes, para ello tenga en cuenta las siguientes unidades:

- Unidad de tiempo es un año: $Tperiodo \rightarrow 1año \rightarrow 3{,}15 \times 10^7 seg$, en otras palabras todos los tiempos son medidos en términos del año terrícola,
- Unidad de masa en términos de la masa solar: $1MA \rightarrow 2 \times 10^{30} Kg$, en otras palabras todas las masas son medidas en términos de la masa del sol.
- Unidad de distancia en términos de una 1UA: $1UA \rightarrow 1{,}496 \times 10^{11} m$, todas las distancias son medidas en términos de la distancia media de la tierra al sol.

Tenga en cuenta esto para la constante gravitacional, recuerde que está debe quedar en unidades astronómicas, antes de realizar la simulación realice la conversión.

a) Realice la conversión de la constante G a unidades astronómicas.

4. Use la ecuación de la velocidad hallada para especificar la condición inicial $v_y(t=0) = ?$, y la ecuación hallada para el periodo T para calcular el periodo de cada orbita, para este punto utilice la siguiente tabla:

Planeta	distancia(a) UA	Masa (Kg)	Velocidad (v) UA/Años	Periodo (T) Años
Mercurio	0,387	$3{,}3 \times 10^{23}$		
Venus	0,723	$4{,}8 \times 10^{24}$		
Tierra	1	$5{,}9 \times 10^{24}$		
Marte	1,523	$6{,}4 \times 10^{23}$		
Júpiter	5,202	$1{,}9 \times 10^{27}$		
Saturno	9,539	$5{,}6 \times 10^{26}$		
Urano	19,18	$8{,}6 \times 10^{25}$		
Neptuno	30,06	$1{,}0 \times 10^{26}$		
Plutón	39,44	$1{,}5 \times 10^{22}$		

5. Por medio de una simulación verifique la existencia de orbitas circulares, seleccione en unidades astronómicas, AU) utilice las siguientes condiciones iniciales $y(t = 0) = 0, v_x(t = 0) = 0$,

   a) Utilice las distancias dadas y velocidades halladas como condiciones iniciales en la simulación, que tan pequeño debe ser dt para que se obtenga una orbita circular, realice el ejercicio para cada planeta
   $$v_y(t = 0) = ?\ x(t = 0) = ?$$
   b) Cuál debe ser el número de pasos para graficar una orbita circular, construya una tabla con los dt y n para cada orbita planetaria (Que puede decir de esto).
   c) Grafique las orbitas circulares para cada planeta.

6. Escriba una función que calcule la energía mecánica total del sistema en cada paso, luego calcule la energía como función del tiempo, que puede usted decir del resultado obtenido, como se puede interpretar, ¿Es posible escoger un valor de dt de forma que la energía total se conserve de forma exacta?

7. A partir de los datos obtenidos de distancia y periodo, obtenga una función potencial de la forma $T = kR^b$, donde k y b son constantes, verifique el resultado con la tercera ley de Kepler, utilice mínimos cuadrados.

   - Linealice la función potencial con Log.
   - Determine la pendiente y el punto de corte.
   - Determine las incertidumbres.
   - Exprese la ecuación de la recta con sus respectivas incertidumbres.
   - Verifique la ley de Kepler, es decir $T\alpha R^{3/2}$.
   - Construya la tabla de datos encontrada por mínimos cuadrados (**Nota:** consulte un libro de métodos numéricos).
   - Agregue las gráficas respectivas de $T\ vs\ distancia$.

Nota:
- Este laboratorio se deberá entregar en formato pdf, utilizando el formato IEEE que se encuentra en formato latex, el cual puede encontrar en https://es.overleaf.com/gallery/tagged/ieee o en formato docx el cual puede encontrar en el aula virtual del curso, usted puede generar el pdf de la manera que más se habitué a su forma de trabajo.
- Para la generación de la bibliografía debe usar el software mendeley.

Bibliografía:

[1] An Introduction to Computer Simulation Methods (3rd ed.); H. Gould, J. Tobochnik, W. Christian. Addison-Wesley (2007).