Análisis Real: Taller 3

Funciones Continuas

Juan Pablo Sierra Useche
28 de Octubre, 2021

Ejercicio 1

Una Función real de variable real se dice que ees un polinomio de grado $n \in \mathbb{Z}_+$ si tiene la forma

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{x-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k^k$$

donde se define $a_0 x^0 = a_0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ cualquiera, Q_n otra función polinómica de grado n y supongamos que $Q(d) \neq 0$. Demuestre, usando la definición $\epsilon - \delta$, que la función racional $\frac{P_n}{Q_n}$ es continua en d.

Demostración

Ejercicio 2

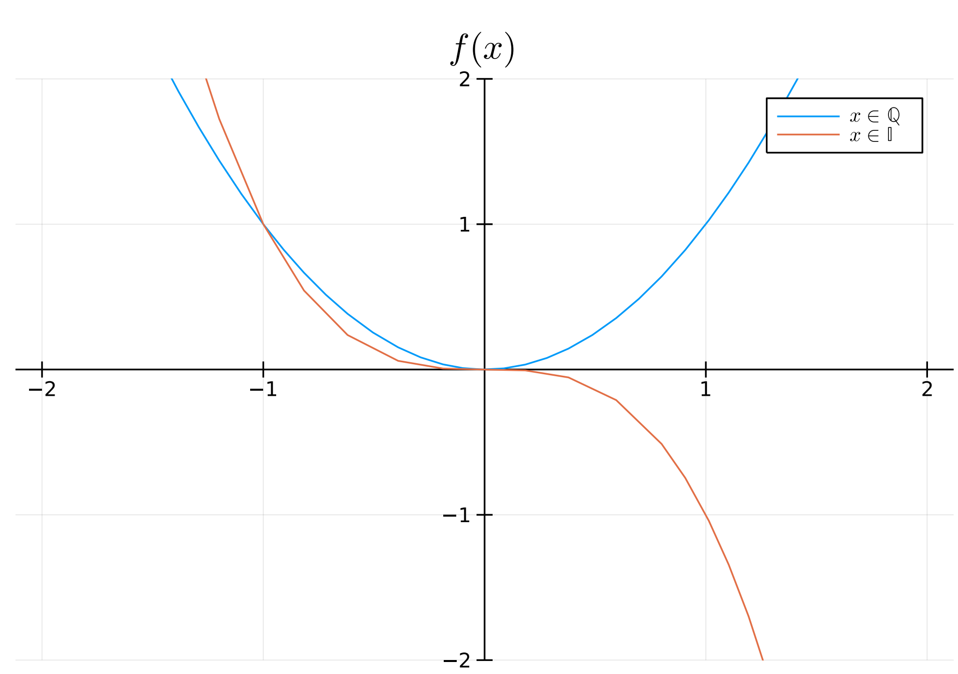
Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(A)$ =Rango(f)$\subseteq B$. Suponigamos que $a \in A'$, $b = f(a) \in B'$, que f es continua en $x_0 = a$ y g es continua en $y_0 = b = f(a)$.

1. Usando la caracterización secuencial de la continuidad, demuestre que la función composición $h = g \circ f : A \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0 = a$.
2. Establezca y explique un ejemplo de una función f continua en $x_0 = a$ y una función g discontinua en $y_0 = f(a)$; pero que la composición $h = g \circ f$ sea continua en $x_0 = a$.

Demostración

Ejercicio 3

Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuya ley de asignación es



$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ -x^3, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Demuestre que esta función es continua en $c = 0$; pero discontinua cuando $d \neq 0$.

Demostración

Para esta demostración, primero se va demostrar que si $d \neq 0$ entonces f no es continua en d.

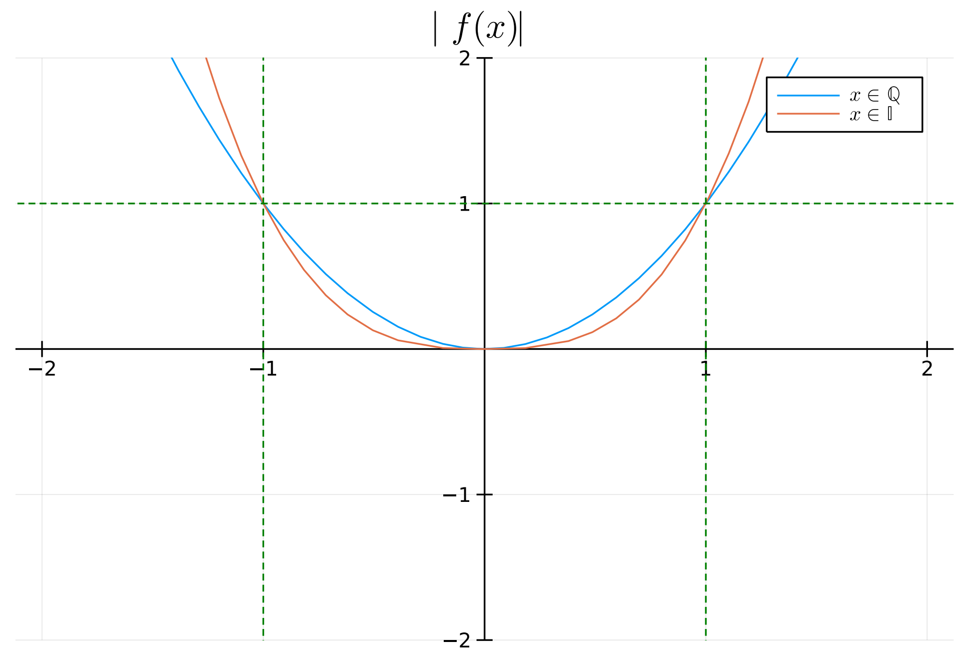
Como $d \in \mathbb{R}$, existe una sucesión de racionales $\{T_n\}$ tal que $T_n \to d$. Por lo tanto:

$$f(T_n) = T_n^2 \to \lim_{n\to\infty} f(T_n) = \lim_{n\to\infty} T_n^2 = d^2$$

Además también existe una sucesión de irracionales $\{X_n\}$, donde $X_n \to d$. De esta forma:

$$f(X_n) = -X_n^3 \to \lim_{n\to\infty} f(X_n) = \lim_{n\to\infty} -X_n^3 = -d^3$$

Luego, por el criterio secuencial el $\lim_{n\to\infty} f(x)$ no existe y f no es continua en $x = d$.



Es necesario revisar el caso en que $x = 0$, como $0 \in \mathbb{Q}$:

$$f(0) = 0^2 = 0$$

Ahora, partiendo de $|f(x) - f(0)|$ (utilizando la definición de límites de funciones) existen 2 situaciones, si $x \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &= |f(x) - 0| \\ &= |f(x)| \\ &= \left|x^2\right| \\ &= x^2 \end{aligned}$$

Y si $x \in \mathbb{I}$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &= |f(x) - 0| \\ &= |f(x)| \\ &= \left|-x^3\right| \\ &= \left|x^3\right| \end{aligned}$$

Como se está tratando el caso $x \to c = x \to 0$, x^2 acota superiormente a $\left|x^3\right|$ en el intervalo $[0, 1]$ del codominio (con $\epsilon \in [0, 1]$), de esta forma si definimos $\delta = 1 > 0$, de tal forma que $I_\delta(0) = (-1, 1)$ se encuentra que:

$$|f(x) - f(0)| < \delta = \epsilon = 1$$

Luego para todo punto intervalo $I_\epsilon(0) = (-1, 1)$, existe por lo menos un elemento el el dominio que lo tenga como imagen.

Ejercicio 4

Usando el Teorema de Localización de las Raíces, demuestre que la función:

$$f(x) = e^x - x\sin(x)$$

con $x \in [-2, 1]$ tiene al menos una raíz $c \in (-2, 1)$. Use la sucesión de los puntos "puntos medios" $\{p_k\}$ definida en la demstración de este teorema para hallar una aproximación p_{k_0} de c con un error menor que 10^{-3}. Explique como calcular el número de iteraciones necesarias para obtener tal aproximación y adjunte un código donde se obtenga tal aproximación. La salida debe ser la tabla

k	a_k	b_k	p_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(p_k)$

y la aproximación de la raíz c; así como el valor $f(c)$.

Demostración

Ejercicio 5

Usando el Teorema de Localización de Raíces (divide y vencerá), provea un algoritmo para aproximar el valor c donde la imagen de la función:

$$f(x) = \ln(x) - \cos(x)$$

con $x \in [1, 4]$ sea igual a 2. Explique y provea un código con salida una tabla de los resultados en cada iteración y la aproximación de c. Provea gráficos de la situación programada.

Demostración