Simulación de Tiro Parabólico

Primer reporte de laboratorio, Elementos de la física

Rodrigo Castillo Camargoo
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación
Universidad del Rosario
Bogotá, Colombia
rodrigo.castillo@urosario.edu.co

Juan Pablo Sierra Useche
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación
Universidad del Rosario
Bogotá, Colombia
juanpab.sierra@urosario.edu.co

I. Introducción

El tiro parabólico es un excelente ejemplo del fenómeno denominado aceleración, ya que se muestra de dos tipos. Aceleración 0, en el eje x, ya que la velocidad es constante y la gravedad como aceleración negativa en el eje y, provocando que el objeto caiga.

Teniendo estas dos propiedades, se puede ver como en conjunto modifican la distancia recorrida, el tiempo de vuelo, la altura máxima y el tiempo requerido para llegar a esta. Por lo tanto en este documento se a análizar este fenómeno.

II. Tiempos para Alcanzar la Altura Máxima

El punto en el que se obtienen la altura máxima en un lanzamiento parabólico, es cuando la velocidad en y v_y toma valor 0, por lo tanto teniendo la ecuación de v_y se puede calcular el tiempo que un objeto toma en llegar a tal estado, luego:

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 \sin\theta - gt \\ 0 &= v_0 \sin\theta - gt \\ t &= \frac{v_0 \sin\theta}{g} \end{aligned}$$

Teniendo eso en cuenta y sabiendo que la gravedad se toma como una constante (no cambia), es necesario analizar en lo que está aportando al crecimiento de esta función la velocidad inicial v_0 y el ángulo de lanzamiento θ. Como al realizar un experimento la velocidad inicial será definida y por lo tanto constante se puede decir que el incremento de tiempo es proporcional a la velocidad inicial, lo más interesante se encuentra en $\sin\theta$ ya que $\sin$ es una función cíclica y con un rango $[-1, 1]$, esto generando un efecto de partición en lo que la velocidad puede aportar a la función, es decir si el el ángulo es $\theta = 0$ entonces $t = 0$ y si el ángulo es $\theta = \frac{\pi}{2}$ entonces $t = \frac{v_0}{g}$ asegurando el mayor tiempo hasta llegar a la altura máxima.

III. Tiempo de Vuelo

El tiempo de vuelo es un factor que se decide cuando el proyectil ya ha retornado al suelo, por lo tanto $y = 0$, así si utilizamos la ecuación de distancia en y, es posible encontrar el tiempo que toma en retornar al suelo:

$$\begin{aligned} y &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ 0 &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ 0 &= v_{0y} - \frac{1}{2}gt \\ t &= \frac{2v_{0y}}{g} \\ t &= \frac{2v_0 \sin\theta}{g} \end{aligned}$$

Como la función también está en términos de $\sin$ se puede utilizar la misma propiedad, garantizando que el mayor tiempo de vuelo se obtiene cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$.

IV. Altura Máxima

Para calcular la altura máxima podemos aprovechar aquellas ecuación que ya hemos obtenido. En este caso utilizaremos el tiempo que toma el proyectil en llegar a la altura máxima:

$$
\begin{aligned}
y &= v_0 \sin\theta t - gt \\
&= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \\
&= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}
\end{aligned}
$$

Al igual que las dos propiedades anteriores, esta función tambien tiene $\sin$ en el númerador determinado la proporción del crecimiento de la función por lo tanto la altura máxima se encuentra cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$.

V. Alcance Horizontal

Para calcular esta instancia uno puede apoyarse de las propiedades que ya se han mencionado bajo la ecuación de la distancia horizontal:

$$
\begin{aligned}
x &= v_{0x} t \\
&= v_0 \cos\theta \frac{2v_0 \sin\theta}{g} \\
&= \frac{2v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g} \\
&= \frac{v_0^2 \left(2\cos\theta \sin\theta\right)}{g}
\end{aligned}
$$

Ahora teniendo en cuenta la identidad trigonométrica $2\cos\theta \sin\theta = \sin 2\theta$ [1], la distancia máxima se puede dejar como:

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

En esté caso acontece una pequeña diferencia con respecto a las funciones encontradas anteriormente, pues ahora $\sin$ no fluctua con respecto a θ sino con respecto a 2θ, por lo tanto sea $\alpha = 2\theta$ entonces $\sin\alpha = 1$ cuando $\alpha = \frac{\pi}{2}$ por lo tanto el alcance horizontal máximo se obtien cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$.

VI. Conclusión

- Adicionalmente a lo mencionado anteriormente partiendo del análisis de la simulación se puede llegar a que la distancia máxima de un proyectil lanzado a una velocidad v_0 y con $\theta = \frac{5}{12}\pi$ es igual a la de un proyectil lanzado a una velocidad v_0 y con $\theta = \frac{1}{12}\pi$.
- Según el análisis de la simulación también se puede concluir que la distancia máxima de un proyectil lanzado a una velocidad v_0 y con $\theta = \frac{1}{3}\pi$ es igual a la de un proyectil lanzado a una velocidad v_0 y con $\theta = \frac{1}{6}\pi$.

Referencias

[1] Eric W. Weisstein. «Double-Angle Formulas». En: *MathWorld* (). URL: https://mathworld.wolfram.com/Double-AngleFormulas.html.