习题：2.3

2014年12月30日　　20:32

习题 2.3、A. P_1.

1. 略.
2. 略.
3. 求下列极限.

(1). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-\frac{2}{3})^n+1}{(-2)(-\frac{2}{3})^n+3}=\dfrac{1}{3}$ ($\because 0<q<1.\ q^n\to 0$).

(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n^2}=0$

× 四则运算只对有限项成立.

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[1+2+\cdots+n-1\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ \dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{1}{2}.$

(3). $\because\ \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$

$=1\cancel{-\frac{1}{2}}\cancel{+\frac{1}{2}}\cancel{-\frac{1}{3}}+\cdots\cancel{+\frac{1}{n}}-\dfrac{1}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1.$

(4). $\because\ \dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}$

$=1\cancel{-\frac{1}{2!}}\cancel{+\frac{1}{2!}}\cancel{-\frac{1}{3!}}+\cdots\cancel{+\frac{1}{n!}}-\dfrac{1}{(n+1)!}$

$=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$

$\lim\left(\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}\right)=\lim\left(1-\dfrac{1}{(n+1)!}\right)=1$

$(n+1)!$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)!}\right)=1.$

. 求下列极限.

习题 2.3. A. P2.

(1). $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}.$

(2). $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2+x}}{x}=-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{3x^2+x}{x^2}}=-\sqrt{3}.$

(3). $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x+1}}{3x}=\frac{2}{3}$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^2+x+3}}{6x}=-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^2+x+3}}{6\sqrt{x^2}}=-\frac{1}{2}.$

5. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=1$. 则

(1). $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+g(x))=1$. (2). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

(3). $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)g(x)=0$. (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\infty$.

6. 略. 7. 略.

8. 求下函数的渐近线.

(1). $y=\frac{x^2-2x-2}{x-1.}=\frac{(x-1)^2-3}{x-1}=x-1-\frac{3}{x-1}$

$\therefore y=\frac{\cdots}{x-1}=\frac{\cdots}{x-1}=x-1-\frac{\cdots}{x-1}$

$\because \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x-2}{x-1}=\infty$. $\therefore$ $x=1$ 为垂直渐近线.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-2}{x-1}=\infty$ $\therefore$ 无水平渐近线.

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-2}{x^2-x}=1$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-2x-2}{x-1}-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-2-x^2+x}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x+2}{x-1}=-1$

$\therefore y=x-1$ 为斜渐近线.

习题2.3. A. P_3.

(2). $y=\frac{2x^2}{(1-x)^2}$.

$\because \lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2}{(1-x)^2}=\infty$. $\therefore$ $x=1$ 为垂直渐近线.

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{(1-x)^2}=2$. $\therefore$ $y=2$ 为水平渐近线.

B.

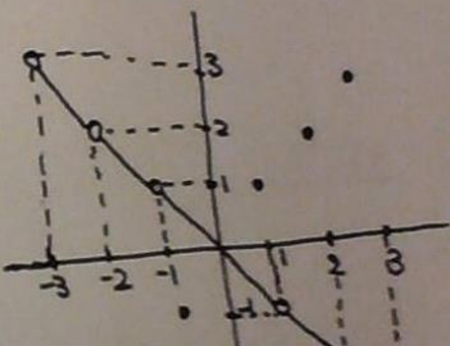
1. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$. 则

(1). $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)]=+\infty$.

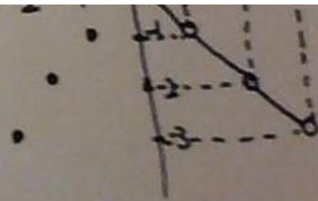
(2). $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]$ 不确定.

(3). $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)g(x)=+\infty$.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ 不确定.



2. 略 3. 略



2. 略. 3. 略.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Z}. \\ -x & x\notin\mathbb{Z}. \end{cases}$

(1). 画出$f(x)$的草图 (2). 讨论 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|$.

解: (1). 如图.

(2). $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在. $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|=+\infty$.

4. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$. 试确定a. b.

习题2.3. B. P4.

解: $\because \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$.

又 $\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b=\frac{x^2+1-ax^2-bx-ax-b}{x+1}$

$=\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-(b-1)}{x+1}$

$\therefore$ $1-a=0 \Rightarrow a=1$ 且 $a+b=0 \Rightarrow b=-1$. #.

5. 设 a. b. c 为常数. $a\neq 0$. 证明:

$y=\frac{ax^2+bx+c}{x+1}$ 有斜渐近线.

解: $\because \lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2+x}=a$.

$\lim\left(\frac{ax^2+bx+c}{\dots}-ax\right)=\lim\frac{ax^2+bx+c-ax^2-ax}{\dots}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2+bx+c}{x+1}-ax\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c-ax^2-ax}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(b-a)x+c}{x+1}=b-a.$$

$\therefore$ $y=ax+b-a$ 为斜渐近线.

6. 略.