习题3.4

2014年12月1日 21:05

A

17. 回答下列问题.

(1). 函数 $f(x)$ 在 x_0 处的微分如何定义?

答: $\exists A$ 与 h 无关. s.t $f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+o(h)$.

则称 $f(x)$ 在 x_0 处可微. 记为 $df(x_0)=Ah$. $(h=dx)$

(2). 局部线性化的含义是什么?

答: 若 $f(x)$ 在 x_0 处可微. 则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

$\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ $(x\to x_0)$ 即为局部线性化.

(3). 函数可微与可导是一回事吗?

答: 是、二者等价、只考虑的角度不同.

(4). 什么叫一阶微分形式的不变性?

答: 令 $y=f(u)$, $u=u(t)$. 则 $y=f\circ u(t)$

$\because$ $dy=f'(u)\cdot u'(t)dt$. 且 $du=u'(t)dt$

即 $dy=\begin{cases}\dfrac{dy}{du}du\\ \dfrac{dy}{dt}dt\end{cases}$ 为一阶微分形式的不变性.

(5). 什么叫作测量一个量的绝对误差和相对误差.

答: 令 x 为真实值, x_0 为测量值. 而 $\Delta x=x-x_0$

则 $|\Delta x|$ 的上界称为 x 的绝对误差. 记为 δ_x

而 $\delta_x/|x_0|$ 为 x 的相对误差.

2）求下列各题

解：(1) $d(x^2e^x)=(2xe^x+x^2e^x)dx$

(2). $d(\sin x-x\cos x)=(\cos x-\cos x+x\sin x)dx$

$$=x\sin x dx$$

(3) $d(\frac{1}{x^2})=d(x^{-2})=-2\frac{1}{x^3}dx$

(4) $d(\sqrt{a^2+x^2})=\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}dx=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$

(5). $d(\ln(1-x^2))=\frac{1}{1-x^2}(-2x)dx=-\frac{2x}{1-x^2}dx$

(6). $d(\frac{\ln x}{\sqrt{x}})=\frac{1}{x}(\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}})dx$

$$=\frac{1-\ln\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$$

3）在下列等式括号中填上适当的数.

(1). $d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$

(2) $d(e^x)=e^x dx$

(3) $d(\sin x)=\cos x dx$

(4) $d(-\cos x)=\sin x dx$

(5). $d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx$

(6). $d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(7). $d(\frac{2}{3}x\sqrt{x})=\sqrt{x}dx$

(8)、 $d(\ln\sqrt{x}) = \frac{1}{2x}dx$

(9)、 $d(x^4) = 4x^3dx$

(10)、 $d(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}dx$

4、求下列函数的微分

解：(1)、 $y = x\ln x - x$

$\therefore dy = (x\ln x - x)'dx = (\ln x + 1 - 1)dx = \ln x\,dx$

(2)、 $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$

令 $t = \sqrt{1-x^2}$ $\therefore y = \arcsin t$. $\therefore dy = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

又 $dt = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$\therefore dy = \frac{1}{|x|}\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = -\frac{\operatorname{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

(3) $y = x^2\cos 2x$

$\therefore dy = (2x\cos 2x - 2x^2\sin 2x)dx = 2x(\cos 2x - x\sin 2x)dx.$

(4)、 $y = 5^x + \frac{1}{2}$

$\therefore dy = 5^x\ln 5\,dx$

5、利用一阶微分形式的不变性求微分

解：(1) $y = \arctan e^x$

$\therefore dy = \frac{dy}{de^x}de^x = \frac{1}{1+e^{2x}}de^x = \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

(2)、 $y = e^{\sin x}$

$\therefore dy=\frac{dy}{d\sin x}d\sin x=e^{\sin x}d\sin x=\cos x e^{\sin x}dx$

6、求下列近似值、

解：(1) $\sin 29^\circ$

$\because \sin x=\sin x_0+\cos x_0(x-x_0)+o(x-x_0)$

$\approx \sin x_0+\cos x_0(x-x_0)$

又 $29^\circ=30^\circ-1^\circ=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}$

$\therefore \sin 29^\circ\approx\sin\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{6}$

$=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{180}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.5-0.01744\times 0.866$

$=0.5-0.01510304$

$=0.48489696$.

(2) $\sqrt[3]{1.02}$

$\because \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x_0^2}}(x-x_0)+o(x-x_0)$

$\approx\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x_0^2}}(x-x_0)$

$\therefore \sqrt[3]{x}\approx\sqrt[3]{x_0}+\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x_0^2}}(x-x_0)$

令 $x=1.02$、 $x_0=1$. 则 $x-x_0=0.02$

$\therefore \sqrt[3]{1.02}\approx 1+\frac{1}{3}\times 0.02=1+0.0067\approx 1.0067$.

7、有一个立方体的铁箱，其边长为 $(70\pm 0.1)cm$、求出它的体积，并估计绝对误差和相对误差.

解：$\because V=x^3$ 其中 x 为边长.

由定义 $\delta_V = |70.1^3 - 70^3| \approx 1470\, cm^3$ 为绝对误差.

而相对误差：$\frac{\delta_V}{V} = \left|\frac{3x^2}{x^3}\right| \delta_x = \left|\frac{3}{x}\right| \delta_x = \frac{3}{70} \times 0.1 = 0.0043$
$= 0.43\%$. ※

B

17. 求下列函数的二阶导数

(1) $y = \sqrt{1+x^2}$ (2) $y = \frac{\ln x}{x}$

解：(1) $\because y = \sqrt{1+x^2}$ $\therefore y' = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\therefore y'' = \frac{1}{1+x^2}\left[\sqrt{1+x^2} - x\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}\right] = \frac{1}{1+x^2} \frac{1+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

$\therefore d^2y = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx^2$

(2). $\because y = \frac{\ln x}{x}$ $\therefore y' = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x) = x^{-2} - x^{-2}\ln x$

$y'' = -2x^{-3} + 2x^{-3}\ln x - x^{-2}\frac{1}{x}$

$= \frac{2\ln x - 3}{x^3}$

$\therefore d^2y = \frac{2\ln x - 3}{x^3} dx^2$ ※

27. 计算球的体积时，要求精度在2%以内，则测量直径D的相对误差不能超过多少？

解：$\because$ 球的体积 $V = \frac{\pi}{6}D^3$

$\therefore dV = \frac{3}{6}\pi D^2 dD = V \cdot \frac{3dD}{D}$

$\Rightarrow \frac{dV}{V} = 3\frac{dD}{D}$ 即 $\frac{\delta_V}{V} = 3\frac{\delta_D}{D}$

$\therefore \frac{\Delta D}{D} \leq \frac{1}{3}\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{3} \times 0.02 \approx 0.667\%$ #