17. 回答下列问题.

(1). √ (2) √ (3) √

(4) 连续性 和一致连续性的区别和联系.

答: 一致连续比连续性更强, 在有界闭区间上二者等价.

(5). 若 $f(x)\in C[a,b]$, $c,d\in[a,b]$, 则 $f(x)$ 是否可取到介于 $f(c)$ 和 $f(d)$ 之间的任何值? 证明之. (可以)

Pf: 任何 η 介于 $f(c)$、$f(d)$ 之间 令 $g(x)=f(x)-\eta$

则 $g(c)=f(c)-\eta$, $g(d)=f(d)-\eta$ 异号.

$\therefore\ \exists\,\xi\in(c,d)$, s.t. $g(\xi)=f(\xi)-\eta=0$. 即 $f(\xi)=\eta$ #.

2>. 确定下列函数的连续区间

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-x^2-2x}$; 区间为 $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,2)$, $(2,+\infty)$.

(2). $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x^3}$; 区间为: $(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(1,+\infty)$

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ 区间为 $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$

(4) $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin x)=\begin{cases}1 & x\in(2k\pi,2k\pi+\pi)\\ 0 & x=2k\pi\\ -1 & x\in(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)\end{cases}$.

3>. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{\ln x}\overset{1-x=t}{=\!=}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=1$.

(2). $\lim\limits_{x\to1}\cos\dfrac{x^2-1}{x-1}=\cos\lim\limits_{x\to1}(x+1)=\cos 2$

(3) $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{x-a}{\sqrt{x^2-a}\,(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{x-a}{\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{x+a}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=0$

(4). $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2\cos^2\frac{x}{2})^{3\sec x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{3}{\cos x}}=e^3$

(5). $\lim\limits_{x\to1}(\frac{1+x}{2+x})^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}}=1$ $(\because \lim\limits_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}=0)$

(6). $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan x)^{\cos\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}(\arctan x)^{\lim\limits_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}}=\frac{\pi}{2}$

(7). $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{1+x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{x})^x}=\frac{1}{e}$

(8). $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x+1})^{\frac{3}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{[(1+x)^{\frac{1}{x}}]^3}=\frac{1}{e^3}$

(9). $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\ln(\cos^2x+\sqrt{1-x^2})}{e^x+\sin x}+(1+x)^x\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos^2x+\sqrt{1-x^2})}{e^x+\sin x}+\lim\limits_{x\to0}(1+x)^x$

$=\frac{\ln(1+1)}{e^0}+1=\frac{\ln2}{e^0}+1=\ln2+1$.

4). 用介值定理证明：每个正数有一个平方根. 即：若$\alpha>0$. 则有x s.t.

$x^2=\alpha$.

Pf：令 $f(x)=x^2$. $\forall\alpha>0$. 取区间 $[\frac{\sqrt{\alpha}}{2},\sqrt{\alpha+1}]$ 则 $f(x)\in C[\frac{\sqrt{\alpha}}{2},\sqrt{\alpha+1}]$

且 $f(\frac{\alpha}{2})=\frac{\alpha}{4}<\alpha$, $f(\sqrt{\alpha+1})=\alpha+1>\alpha$.

$\therefore$ 由介值定理 $\exists x\in[\frac{\sqrt{\alpha}}{2},\sqrt{\alpha+1}]$. s.t. $f(x)=\alpha$ #

5). 证明下面方程在给定区间上至少有一根.

(1). $x2^x=1$ $x\in[0,1]$. (2). $x^3+px-q=0$. $x\in\mathbb{R}$.

Pf: (1) 令 $f(x)=x2^x-1$. 则 $f(x)\in C[0,1]$

又 $f(0)=-1<0$. $f(1)=2-1>0$. $\therefore$ 由零值定理. $\exists x_0\in[0,1]$

s.t $f(x_0)=0$.

(2). 略（见讲义）. #

6>. 设 $f(x) \in C[0,1]$，并且 $\forall x \in [0,1]$，$0 < f(x) < 1$，则 $\exists x_0 \in (0,1)$，s.t

$f(x_0) = x_0$（即 $f(x)$ 有不动点）

Pf：令 $g(x) = f(x) - 1$．则 $g(x) \in C[0,1]$

又 $g(0) = f(0) - 0 > 0$　$g(1) = f(1) - 1 < 0$．∴ $\exists x_0 \in (0,1)$

s.t　$g(x_0) = 0$　即　$f(x_0) = 0$ #

7>. 设 $f(x), g(x) \in C[a,b]$ 且 $f(a) < g(a)$，$f(b) > g(b)$

证明：$\exists c \in (a,b)$　s.t　$f(c) = g(c)$．

Pf：令 $h(x) = f(x) - g(x)$．　则 $h(x) \in C[a,b]$

且 $h(a) = f(a) - g(a) < 0$，$h(b) = f(b) - g(b) > 0$

∴ $\exists c \in (a,b)$，s.t　$h(c) = 0$　即 $f(c) = g(c)$ #

B 组．

1>. 闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 的值域也是一个闭区间吗？

Pf：∵ $f(x) \in C[a,b]$，∴ $\exists c, d \in [a,b]$ 及 M、$m \in \mathbb{R}$，s.t

$f(c) = M$ 为最大．$f(d) = m$ 为最小，则区间 $[m, M]$ 为值域．

事实上．任何 $\eta \in [m, M]$ 由介值定理存在 $\xi \in [a,b]$．s.t．

$f(\xi) = \eta$ #

2>. 证明：若 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$，且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 有界．

Pf：由已知可令 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = B$．

则　$\exists X_1$．s.t．$x > X_1$ 时．$|f(x)| < |A| + 1$．

$\exists X_2$．s.t　$x < X_2$ 时　$|f(x)| < |B| + 1$

又 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$．∴ $f(x) \in C[X_2, X_1]$　则 $f(x)$ 在 $[X_2, X_1]$ 上有界

即 $\exists C>0$. s.t. $|f(x)|\leq C$. 令 $M=\max(|A|+1, |B|+1, C)$

则 $|f(x)|\leq M$. $\forall x\in\mathbb{R}$ ※

3>. 设 $f(x)\in C(a,b)$. 且 $f(a^+)$, $f(b^-)$ 均存在. 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

Pf: 令 $f(a^+)=A$. $f(b^-)=b$.

令 $g(x)=\begin{cases} A & x=a \\ f(x) & x\in(a,b) \\ B & x=b. \end{cases}$

则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 从而一致连续. 特别的 $g(x)$ 在 (a,b) 上一致连续. 即 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续 ※

注: 该结论反之也成立.

4>. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足李普希兹条件:

$$|f(x)-f(y)|\leq L|x-y| \quad \forall x, y\in[a,b]$$

其中 L 为常数. 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

Pf: $\forall \varepsilon>0$. 令 $\delta_\varepsilon=\frac{1}{L}\varepsilon$. 则 $\forall x, y\in[a,b]$ 满足 $|x-y|<\delta_\varepsilon$

则 $|f(x)-f(y)|\leq L|x-y|<L\cdot\delta_\varepsilon=L\cdot\frac{1}{L}\varepsilon=\varepsilon$ ※