线性代数与解析几何

第二章　矩阵

- 在数学上，**矩阵**是指纵横排列的数据表格，最早来自于方程组的系数所构成的方阵. 这一概念是 19 世纪英国数学家凯莱 (Cayley) 首先提出的.
- **矩阵**是线性代数中的一个重要部分，它自始至终的贯穿于线性代数中. 它联系着**行列式，线性方程组，二次型，向量空间和线性变换等**.
- **矩阵**(Matrix) 是线性代数中的一个重要概念，它贯穿于线性代数的各个部分，在数学科学，自然科学，工程技术和生产实践中都有很重要的作用.
- 本章主要介绍**矩阵的运算**和**一些基本性质**.

§ 2.1 矩阵与矩阵的运算

1. 矩阵的定义

- 例子：矩阵

  假设某种物资有 3 个产地 A_1, A_2, A_3, 有 4 个销售点 B_1, B_2, B_3, B_4, 那么一个调运方案就可以用矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

  来表示, 其中a_{ij} 表示由产地 A_i 运到销售点 B_j 的数量.

- 例子：解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_2+x_3=2 \\ x_1+x_2+2x_3=1 \end{cases} \xrightarrow[3\text{ 行 -1 行}]{1\text{ 行 -2 行}} \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2+x_3=2 \\ x_3=0 \end{cases} \xrightarrow{2\text{ 行 -3 行}} \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=2 \\ x_3=0 \end{cases}$$

- 例子：解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_2+x_3=2 \\ x_1+x_2+2x_3=1 \end{cases} \xrightarrow[3\text{ 行 -1 行}]{1\text{ 行 -2 行}} \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2+x_3=2 \\ x_3=0 \end{cases} \xrightarrow{2\text{ 行 -3 行}} \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=2 \\ x_3=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 引入矩阵记号为解线性方程组带来了很大方便.

定义 1.1

一个至少含有0, 1 的复数集合的子集合 F, 如果其中任意两个数的和、差、积、商(除数不为 0) 仍在 F 中, 那么 F 称为一个数域.

- 所有的有理数形成一个数域，称为有理数域, 用 $\mathbb{Q}$ 表示;
- 所有的实数形成实数域，用 $\mathbb{R}$ 表示;
- 所有的复数形成复数域, 用 $\mathbb{C}$ 表示.
- 但所有奇数不能构成数域，所有偶数也不构成数域.

例题 1.1

集合

$$F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

构成一个数域.

例题 1.1

集合

$$F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

构成一个数域.

证明 **首先注意，若** $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, **则必有** $a = c, b = d$. **特别地，当** $a + b\sqrt{2} = 0$ **时必有** $a = b = 0$.

因为 $\mathbb{Q} \subset F$, **所以** F **中有无穷多个元素．若有** $\alpha = a + b\sqrt{2}, \beta = c + d\sqrt{2} \in F$, **则**

$$\alpha \pm \beta = (a + b\sqrt{2}) \pm (c + d\sqrt{2}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{2},$$

$$\alpha \times \beta = (a + b\sqrt{2}) \times (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2},$$

因为当 a, b, c, d **为有理数时,**$a \pm c, b \pm d, ac + 2bd, ad + bc$ **也为有理数.** **所以** $\alpha \pm \beta, \alpha\beta \in F$.

设 $\beta = c + d\sqrt{2} \neq 0$ 则 c, d 不全为 0. 并且 $c^2 - 2d^2 \neq 0$. 于是

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})} = \frac{ac + 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2}.$$

由于 $\frac{ac+2bd}{c^2-2d^2}, \frac{bc-ad}{c^2-2d^2}$ 为有理数，所以 $\frac{\alpha}{\beta} \in F$. 依定义 F 为数域.

- 矩阵的定义： 矩阵是指由数域 F 中的 $m \times n$ 个数排成 m 行 (横的) n 列 (竖的) 的表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

我们称它为一个数域 F 上的 $m \times n$ 矩阵. 通常用大写英文字母表示矩阵, 上述矩阵可以简单的记作 A, 或 $A = (a_{ij})_{mn}$, A_{mn} 或 $A_{m \times n}$. 其中 $a_{ij}(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ 称为矩阵的第 i 行第 j 列上的元素, 简称(i, j)元素. 当所有的 a_{ij} 都是实数时, 我们就称矩阵(1)为实矩阵; 当所有的 a_{ij} 都是复数时, 我们就称矩阵(1)为复矩阵.

- 矩阵的定义： 矩阵是指由数域 F 中的 $m \times n$ 个数排成 m 行 (横的)n 列 (竖的)的表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

我们称它为一个数域 F 上的 $m \times n$ 矩阵. 通常用大写英文字母表示矩阵, 上述矩阵可以简单的记作 A, 或 $A = (a_{ij})_{mn}$, A_{mn} 或 $A_{m\times n}$. 其中 $a_{ij}(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ 称为矩阵的第 i 行第 j 列上的元素, 简称(i, j)元素. 当所有的 a_{ij} 都是实数时, 我们就称矩阵(1)为实矩阵; 当所有的 a_{ij} 都是复数时, 我们就称矩阵(1)为复矩阵.

- 在本章中, 如果没有特别说明都假定所讨论的矩阵是复数域 $\mathbb{C}$ 上的矩阵.

- 称 A, B 是同型的矩阵, 若两个矩阵的行和列的个数都分别相等.
- 称两个矩阵相等, 如果两个矩阵是同型的, 且在相同位置上的元素都相等; 即 $A=(a_{ij})_{st}=B=(b_{ij})_{mn}$ 当且仅当 $s=m, t=n; a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\ldots,s; j=1,2,\ldots,t)$.
- 如果 $m=1$, 那么矩阵(1) 为$1\times n$ 矩阵, 可以看成一个行向量:

$$A=(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}).$$

- 当 $n=1$ 时, 矩阵(1)为$m\times 1$ 矩阵, 可以看成一个列向量:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

- 当 $m = n$ 时，我们称它为$n \times n$ 矩阵或 n 阶方阵. 称 $a_{ii}(i = 1, 2, \ldots, n)$ 为方阵的主对角线元素，所有主对角线元素的和称为方阵的迹(trace), 记作

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

- 如果 n 阶方阵 A 满足 $a_{ij} = 0(i \neq j; i, j = 1, 2, \ldots, n)$ (即除主对角线元素之外的元素都是零）时, 我们称其为n 阶对角矩阵, 记作

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

可以将其简记为:

$$A = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}).$$

- 进一步地，如果对角矩阵中的对角线元素 $a_{ii} = 1 (i = 1, 2, \ldots, n)$ 那么它就称为单位矩阵，记作 E_n 或者 E，

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

- 当 $m = n = 1$ 时，矩阵 (a_{11}) 就是 $\mathbb{C}$ 上的一个数，即有 $(a_{11}) = a_{11}$；
- 当矩阵的所有的元素都是 0 时，我们称它为零矩阵，仍记为 0.

- 进一步地，如果对角矩阵中的对角线元素 $a_{ii} = 1 (i = 1, 2, \ldots, n)$ 那么它就称为单位矩阵，记作 E_n 或者 E，

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

- 当 $m = n = 1$ 时，矩阵 (a_{11}) 就是 $\mathbb{C}$ 上的一个数，即有 $(a_{11}) = a_{11}$；
- 当矩阵的所有的元素都是 0 时，我们称它为零矩阵，仍记为 0.
- 问题：

  单位矩阵是不是对角矩阵？

定义 1.2

设 $A=(a_{ij})_{mn}$, 称 $-A=(-a_{ij})_{mn}$ 是 A 的负矩阵. 其中

$$-A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. 矩阵的运算

(a) 矩阵的加法

定义 1.3

设 $A=(a_{ij}), B=(b_{kl})$ 是两个 $m\times n$ 的矩阵, 则

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{22} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

是它们的和.

- **注意：** 两个矩阵可以相加的条件是两个矩阵的行数和列数都分别相等.
- 有了矩阵的加法, 很容易定义矩阵的减法. 即矩阵

$$A - B = A + (-B).$$

- 矩阵加法的性质. 设 A, B, C 是三个 $m \times n$ 的矩阵, 那么他们满足:
  (1) 交换律：$A + B = B + A$;
  (2) 结合律：$A + (B + C) = (A + B) + C$;
  (3) $A + 0 = A$;
  (4) $A + (-A) = 0$;

(b) 矩阵的数乘

设 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵, k 是复数域 $\mathbb{C}$ 中的一个数. 矩阵

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 A 与 k 的数量乘积, 简称数乘, 记作 kA. 特别地, 称矩阵

$$kE = \begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix},$$

为数量矩阵.

例题 1.2

设

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

求 $A - 2B$.

例题 1.2

设

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

求 $A-2B$.

解 $2B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$$A-2B=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- 一个数乘以一个矩阵, 就是将矩阵的每个元素都乘以这个数, 在这里要注意与行列式的数乘的区别.
- 矩阵的数乘有以下性质. 设 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵; k, ℓ 是 $\mathbb{C}$ 中的两个数, 那么他们满足:

  (1) 结合律: $k(\ell A) = (k\ell)A$;

  (2) 分配律: $(k+\ell)A = kA + \ell A$; $k(A+B) = kA + kB$,

  (3) $1A = A$,

  (4) $kA = 0 \Leftrightarrow k = 0$ 或 $A = 0$.

(c) 矩阵的乘法

定义 1.4

设矩阵 $A = (a_{ij})_{sn}$, $B = (b_{kl})_{nm}$ 是两个矩阵, 矩阵

$$C = (c_{ij})_{sm} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{sm} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 与 B 的乘积, 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, s; j = 1, 2, \cdots, m)$$

记作 $C = AB$.

- (1) 要保证矩阵乘法有意义, 必须是第一个矩阵的列数和第二个矩阵的行数相等, 且乘积 C 的行数是第一个矩阵的行数，列数是第二个矩阵的列数.
- (2) 矩阵的乘法并不一定满足交换律, 即 $AB = BA$ 不一定成立.

- (1) 要保证矩阵乘法有意义, 必须是第一个矩阵的列数和第二个矩阵的行数相等, 且乘积 C 的行数是第一个矩阵的行数，列数是第二个矩阵的列数.
- (2) 矩阵的乘法并不一定满足交换律, 即 $AB = BA$ 不一定成立.

例题 1.3

已知 $A = (1, 4, 3), B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求 AB 和 BA.

例题 1.3 (重述)

已知 $A=(1,4,3), B=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$, 求 AB 和 BA.

例题 1.3 (重述)

已知 $A=(1,4,3), B=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$, 求 AB 和 BA.

解 $AB=(1,4,3)\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=17$, 但是

$$BA=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}(1,4,3)=\begin{pmatrix}2&8&6\\3&12&9\\1&4&3\end{pmatrix}.$$

例题 1.4

如果 $AB = BA$, 我们就称矩阵 A, B 可交换. 证明和对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 $a_{ii} \neq a_{jj} \, (i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 可交换的矩阵只能是对角矩阵.

例题 1.4

如果 $AB = BA$, 我们就称矩阵 A, B 可交换. 证明和对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 $a_{ii} \neq a_{jj} \, (i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 可交换的矩阵只能是对角矩阵.

证明 设矩阵 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ 可以和 A 交换,

那么有

$$
\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},
$$

即有

$$
\begin{pmatrix}
a_{11}b_{11} & a_{22}b_{12} & \cdots & a_{nn}b_{1n} \\
a_{11}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{nn}b_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{11}b_{n1} & a_{22}b_{n2} & \cdots & a_{nn}b_{nn}
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1n} \\
a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{22}b_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{nn}b_{n1} & a_{nn}b_{n2} & \cdots & a_{nn}b_{nn}
\end{pmatrix}.
$$

依次比较等式两边第一行, 第二行, $\cdots$, 第 n 行相应位置上的元素, 可以得到

$$b_{12} = b_{13} = \cdots = b_{1n} = 0,$$

$$b_{21} = b_{23} = \cdots = b_{2n} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_{n1} = b_{n2} = \cdots = b_{n,n-1} = 0.$$

故结论成立.

- 方阵的方幂: 设 A 是一个 m 阶方阵, 用 A^s 表示s 个 A 相乘, 即

$$A^s = \underbrace{AA\cdots A}_{s}.$$

令 $A^1 = A$, 对 $n > 1$, 归纳定义

$$A^n = A^{n-1}A.$$

特别地, 定义$A^0 = E$.

- 方阵的多项式: 设 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 为m 次的复系数多项式,A 为 n 阶方阵, 称

$$f(A) = a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E,$$

为方阵 A 的多项式.

设 A, B, C 分别是 $n\times m, m\times p, p\times q$ 矩阵. 关于矩阵的乘法, 有以下性质:

(1) 结合律: $A(BC)=(AB)C=ABC$;

(2) 分配律: $(A+B)C=AC+BC$; $A(B+C)=AB+AC$;

(3) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$, $k\in\mathbb{C}$,

(4) 若 A 是一个 n 阶方阵, $f(x), g(x)$ 为复系数的多项式, 则矩阵 A 的多项式 $f(A)$ 和 $g(A)$ 的乘法满足交换律, 即 $f(A)g(A)=g(A)f(A)$.

设 A, B, C 分别是 $n \times m, m \times p, p \times q$ 矩阵. 关于矩阵的乘法, 有以下性质:

(1) 结合律: $A(BC) = (AB)C = ABC$;

(2) 分配律: $(A+B)C = AC + BC$; $A(B+C) = AB + AC$;

(3) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, $k \in \mathbb{C}$,

(4) 若 A 是一个 n 阶方阵, $f(x), g(x)$ 为复系数的多项式, 则矩阵 A 的多项式 $f(A)$ 和 $g(A)$ 的乘法满足交换律, 即 $f(A)g(A) = g(A)f(A)$.

- 下面给出性质 (1) 和 (4) 的证明, 其余的自行证明.

证明: (1) 记 $A = (a_{ij})_{sn}$, $B = (b_{jk})_{nm}$, $C = (c_{k\ell})_{mt}$, 令 $U = BC = (u_{j\ell})_{nt}$, $V = AB = (v_{ik})_{sm}$, 则

$$u_{j\ell} = \sum_{k=1}^{m} b_{jk}c_{k\ell}, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \ell = 1, 2, \ldots, t,$$

$$v_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}, \quad i = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, t,$$

且 $A(BC)$ 和 $(AB)C$ 都是 $s \times t$ 矩阵. 由矩阵乘法定义可知:
$A(BC) = AU$ 的 (i, ℓ) 位置上的元素为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{j\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{m} b_{jk} c_{k\ell} \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ij} b_{jk} c_{k\ell};$$

而 $(AB)C = VC$ 的 (i, ℓ) 位置上的元素为

$$\sum_{k=1}^{m} v_{ik} c_{k\ell} = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) c_{k\ell} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{k\ell}.$$

而

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ij} b_{jk} c_{k\ell} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{k\ell},$$

即得 $A(BC) = AU$ 的 (i, ℓ) 位置上的元素和 $(AB)C = VC$ 的 (i, ℓ) 位置上的元素相等, 那么结论 (1) 成立.

(4) 设 $f(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0$,
$g(x) = b_q x^q + b_{q-1}x^{q-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ 分别为 p, q 次复系数多项式, 则

$$f(A) = a_p A^p + a_{p-1}A^{p-1} + \cdots + a_0 E = \sum_{j=0}^{p} a_j A^j,$$

$$g(A) = b_q A^q + b_{q-1}A^{q-1} + \cdots + b_0 E = \sum_{k=0}^{q} b_k A^k,$$

那么 $f(A)g(A)$ 是关于 A 的一个 $p+q$ 阶多项式,

且

$$\begin{aligned} f(A)g(A) &= \left(\sum_{j=0}^{p} a_j A^j\right)\left(\sum_{k=0}^{q} b_k A^k\right) \\ &= \sum_{j=0}^{p}\sum_{k=0}^{q} a_j b_k A^{j+k} \\ &= \sum_{i=0}^{p+q}\left(\sum_{j+k=i} a_j b_k\right) A^i. \end{aligned}$$

同样可以得到

$$g(A)f(A) = \sum_{i=0}^{p+q}\left(\sum_{j+k=i} a_j b_k\right) A^i.$$

所以 $f(A)g(A) = g(A)f(A)$.

例题 1.5

$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 求 A 的 n 次幂 $A^n(n=2,3,\cdots)$.

例题 1.5

$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 求 A 的 n 次幂 $A^n(n=2,3,\cdots)$.

解法 1 $A^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2^2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2^2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2^3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

以此类推，$A^n=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&2^n&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 然后用数学归纳法证明.

解法 2

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=B+C.$$

由于 $BC=CB$ 且 $C^2=0$, 则

$$(B+C)^n=B^n+nB^{n-1}C+\cdots+C^n=B^n+nB^{n-1}C.$$

故$A^n=B^n+nB^{n-1}C$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&1\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^{n-1}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&1\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&2^n&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

矩阵乘法与数的乘法的不同之处：

- 矩阵乘法不满足交换律
- 当 $AB=0$ 时，不能推出 $A=0$ 或 $B=0$.

矩阵乘法与数的乘法的不同之处：

- 矩阵乘法不满足交换律
- 当 $AB=0$ 时，不能推出 $A=0$ 或 $B=0$.

例题 1.6

$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$AB=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 可见，$AB=0$, 但是 $A\neq 0$, $B\neq 0$.

矩阵乘法与数的乘法的不同之处:

- 矩阵乘法不满足交换律
- 当 $AB=0$ 时，不能推出 $A=0$ 或 $B=0$.

例题 1.6

$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$AB=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 可见，$AB=0$, 但是 $A\neq 0$, $B\neq 0$.

- 当 $AB=CB$ 且 $B\neq 0$ 时，也不能断定 $A=C$;
  当 $AB=AC$ 且 $A\neq 0$ 时，也不能断定 $B=C$.

例题 1.7

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$AB=\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, AC=\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},$$

$AB=AC$ 且 $A\neq 0$, 但是 $B\neq C$.

例题 1.7

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$AB=\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, AC=\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},$$

$AB=AC$ 且 $A\neq 0$, 但是 $B\neq C$.

矩阵乘法与数的乘法的相同之处:

- 结合律
- 分配律
- 关于数的结合律
- 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则 $E_mA=AE_n=A$.

(d) 矩阵的转置

定义 1.5

将矩阵 A 的行列互换得到的矩阵称为 A 的转置矩阵, 记作 A'. 即设 $A=(a_{ij})_{mn}$, 则

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ji})_{nm}.$$

A' 还可以用 A^T 来表示. 当 $A=A'$ 时，我们称 A 为对称矩阵. 显然有 $(A')'=A$; 若 $A=-A'$, 则称 A 为反对称矩阵.

矩阵的转置有下列性质:

(1) $(A')' = A$;

(2) $(A+B)' = A' + B'$;

(3) $(kA)' = kA'$;

(4) $(AB)' = B'A'$.

矩阵的转置有下列性质:

(1) $(A')' = A$;

(2) $(A+B)' = A' + B'$;

(3) $(kA)' = kA'$;

(4) $(AB)' = B'A'$.

性质 (1)-(3) 易证, 下面证明 (4).

设 $A = (a_{ij})_{sn}$, $B = (b_{jk})_{nm}$, 则 $(AB)'$ 和 $B'A'$ 都是 $s \times m$ 矩阵. 其次, $(AB)'$ 的 (i,j) 元素就是 AB 的 (j,i) 元素, 故等于

$$a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jn}b_{ni}.$$

而 $B'A'$ 的 (i,j) 元素等于 B' 的第 i 行的元素与 A' 的第 j 列的对应元素的乘积的和, 故等于 B 的第 i 列的元素与 A 的第 j 行的对应元素的乘积的和,

$$b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{ni}a_{jn}.$$

两式显然相等, 故$(AB)' = B'A'$.

例题 1.8

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $(AB)'$

例题 1.8

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $(AB)'$

解法 1 $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & -1 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

故 $(AB)' = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

例题 1.8

设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&1&3\\4&2&1\end{pmatrix}$, 求 $(AB)'$

解法 1 $AB=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&1&3\\4&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&2&-1\\8&0&1\end{pmatrix}$

故 $(AB)'=\begin{pmatrix}9&8\\2&0\\-1&1\end{pmatrix}$

解法 2 $(AB)'=B'A'=\begin{pmatrix}2&1&4\\-1&1&2\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&8\\2&0\\-1&1\end{pmatrix}$

(e) 矩阵的共轭

定义 1.6

设 $A=(a_{ij})_{mn}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的矩阵, 用 $\overline{a_{ij}}$ 表示 a_{ij} 的共轭复数, 称 $\overline{A}=(\overline{a_{ij}})_{mn}$ 是 A 的共轭矩阵, 其中

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{m1}} & \overline{a_{m2}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

定义 1.6

设 $A = (a_{ij})_{mn}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的矩阵, 用 $\overline{a_{ij}}$ 表示 a_{ij} 的共轭复数, 称 $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{mn}$ 是 A 的共轭矩阵, 其中

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{m1}} & \overline{a_{m2}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

- 由定义可知，$(\overline{A})' = \overline{A'}$;
- 复矩阵 A 是实矩阵当且仅当 $\overline{A} = A$.
- 共轭矩阵有下列性质: (1) $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$.
  (2) $\overline{kA} = \overline{k}\,\overline{A}$;
  (3) $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$.

§ 2.2 矩阵的分块

- 对于行数和列数较大的矩阵，为了计算简单，常采用的一种方法就是矩阵分块，即把一个较大的矩阵分块成为若干个小的矩阵，把每个子块看成一个“元素”时，他们依然构成一个矩阵.
- 像这样的将矩阵 A 用若干条水平线和竖直线划分成一些小矩阵，每个小矩阵称为矩阵 A 的一个子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.
- 注意，分块时同行的子块要求行数一样，同列的子块要求列数一样.

例如矩阵

$$A=\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} W & X \\ Y & Z \end{pmatrix},$$

其中,

$$W=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

即按照上述水平线和垂直线分块后, 就得到一个 2×2 的分块矩阵.

- 一般来说,分块表示方法是把一个 $m \times n$ 矩阵 A用水平线和竖直线分割成若干个小矩阵.
- 例如, 水平线把 m 行分成 s 组, 各组依次有 $m_1, m_2, \cdots, m_s$ 行, 竖直线把 n 列分成 t 组, 各组有 $n_1, n_2, \cdots, n_t$ 列.
- 于是矩阵 A 就变成

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \cdots A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} \cdots A_{2t} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{s1} & A_{s2} \cdots A_{st} \end{pmatrix}$$

  的形状.
- 此时 A 由小矩阵 A_{ij} 组成，A_{ij} 为 $m_i \times n_j$ 矩阵.

- 形象地说，给定一个矩阵 A，在行间作从左到右的若干水平线，在列间作从上到下的若干垂直线，从而把矩阵化为若干个级数小的矩阵.
- 对于一个方阵 A，如果$s = t$，且当 $i \neq j$ 时 $A_{ij} = 0$，那么就称矩阵 A 为准对角矩阵，即 A 有如下形式

$$\begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss} \end{pmatrix}.$$

又如, 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & A_1 \\ O & E_2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & B_1 \\ O & E_2 \end{pmatrix}.$$

又如, 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & A_1 \\ O & E_2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & B_1 \\ O & E_2 \end{pmatrix}.$$

直接计算得 $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3-7 & 2-8 \\ 0 & 1 & 4+6 & 5-4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & A_1 + B_1 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}.$

- 分块后的矩阵运算和一般的矩阵运算一样. 在对矩阵进行分块时一定要注意分块后运算有意义.
- 用于两个矩阵相乘时, 第一个矩阵的列的分法和第二个矩阵行的分法要一致. 这样在把小矩阵当矩阵元素相乘时才有意义.
- 也就是说如果矩阵分块后求 $A_{sn}B_{nm}$, 那么分块后他们的形式应该是:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1\ell} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2\ell} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{t\ell} \end{pmatrix},$$

其中 A_{ij} 是 $s_i \times n_j$ 矩阵, $s_1 + s_2 + \cdots + s_\ell = s$, $n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n$;

$$B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{\ell 1} & B_{\ell 2} & \cdots & B_{\ell r} \end{pmatrix},$$

其中 B_{ij} 是 $n_i \times m_j$ 矩阵, $n_1+n_2+\cdots+n_t=n, m_1+m_2+\cdots+m_r=m.$

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{t1} & C_{t2} & \cdots & C_{tr} \end{pmatrix}.$$

其中 $C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{i\ell}B_{\ell j}=\sum_{k=1}^{\ell}A_{ik}B_{kj}$

$(i=1,2,\ldots,t; j=1,2,\ldots,r).$

- 对于分块矩阵的加法, 两个相加的矩阵必须在分块后对应位置上的矩阵大小要相同, 使得矩阵加法有意义. 我们就不写出具体形式了.
- 分块矩阵的转置: 设矩阵 A 的分块如上所示, 则有

$$A' = \begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{21} & \cdots & A'_{t1} \\ A'_{12} & A'_{22} & \cdots & A'_{t2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A'_{1\ell} & A'_{2\ell} & \cdots & A'_{t\ell} \end{pmatrix},$$

也就是说，先要将分块矩阵作转置，再将每个小块也要做转置, 就得到 A 的转置 A'.

例题 2.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

利用分块矩阵求 $A + B$ 和 AB.

解 将 A, B 分块成

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} E & 0 \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix},$$

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 & E \\ 0 & B_2 \end{pmatrix},$$

其中 $A_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$

$$B_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

则 $A+B=\begin{pmatrix} E+B_1 & E \\ A_1 & A_2+B_2 \end{pmatrix}$

而 $E+B_1=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2+B_2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

故

$$A+B=\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

$$AB = \begin{pmatrix} E & 0 \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & E \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & E \\ A_1 B_1 & A_1 + A_2 B_2 \end{pmatrix}$$

而 $A_1 B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 和

$$A_1 + A_2 B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

故

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- 设 $A = (a_{ij})$ 是一个 n 阶方阵, 称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为方阵 A 的行列式, 记为 $|A|$ 或 $det(A)$.

- 设 $A = (a_{ij})$ 是一个 n 阶方阵, 称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为方阵 A 的行列式, 记为 $|A|$ 或 $det(A)$.

- 例如, 矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 5 & -5 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ 的行列式就是 $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 5 & -5 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -71.$

- 注意n 阶方阵和 n 阶行列式是两个不同的概念, 前者是 n^2 个数按一定方式排成的一个数表, 而后者是这个数表按一定的运算法则所确定的一个数;
- 由于行列式是 n 行 n 列的, 所以若矩阵 A 不是方阵, 就不能对它取行列式.
- 方阵 A 的行列式有下列性质:

  (1) $|A'| = |A|$, 即方阵 A 的转置矩阵的行列式等于 A 的行列式.

  (2) $|kA| = k^n|A|$. (3) $|\overline{A}| = \overline{|A|}$.

定理 2.1

矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积. 也就是说如果 A, B 是两个同阶的方阵，那么

$$|AB| = |A||B|.$$

证明 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

$$C=AB=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}(i=1,2,\ldots,n;j=1,2,\ldots,n)$. 作分块矩阵

$$D=\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix}$$

由行列式的拉普拉斯展开定理知:

$$|D| = |A||B|.$$

现对 D 作初等列变换: 将第 1 列的 b_{11} 倍, 将第 2 列的 b_{21} 倍,..., 将第 n 列的 b_{n1} 倍加到第 $n+1$ 列; 再将第 1 列的 b_{12} 倍, 将第 2 列的 b_{22} 倍,..., 将第 n 列的 b_{n2} 倍加到第 $n+2$ 列;...; 第 1 列的 b_{1n} 倍, 将第 2 列的 b_{2n} 倍,..., 将第 n 列的 b_{nn} 倍加到第 $2n$ 列. 这样, 就把矩阵 D 变成了矩阵

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

首先，我们由行列式的性质知道，$|D| = |D_1|$. 又由行列式的拉普拉斯展开定理知,$|D_1| = (-1)^{2n^2+n}|C||-E| = (-1)^n \cdot |C| \cdot (-1)^n = |C|$. 因此 $|AB| = |C| = |D_1| = |D| = |A||B|$. 结论成立.

§ 2.3 矩阵的秩

- 这一节主要介绍矩阵秩的定义，以及矩阵秩的求法.
- 设 F 是一个数域.
- 首先，我们讨论矩阵的初等变换.

定义 3.1

对矩阵施行的下列三种变换称为初等行变换：

I. 交换矩阵中的两行；

II. 用一个非零的数 $k(k \in F)$ 去乘矩阵某行的各元素；

III. 把矩阵某行各元素的 $k(k \in F)$ 倍加到另一行的对应元素上去.

上边的三种变换分别叫做第 I 种，第 II 种，第 III 种初等行变换. 把其中的“行”字改为“列”字，相应的变换称为初等列变换. 矩阵的初等行变换和初等列变换通称为矩阵的初等变换.

为了书写的方便, 引进记号:

I. 若交换矩阵的 i, j 行 (列), 记为: $r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$;

II. 若用一个非零的数 $k \in F$ 去乘矩阵第 i 行 (列), 记为: $k \times r_i$ $(k \times c_i)$;

III. 若将把矩阵第 j 行 (列) 的 k 倍加到第 i 行 (列), 记为: $r_i + kr_j (c_i + kc_j)$.

为了书写的方便，引进记号:

I. 若交换矩阵的 i, j 行 (列)，记为: $r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$;

II. 若用一个非零的数 $k \in F$ 去乘矩阵第 i 行 (列)，记为: $k \times r_i$ $(k \times c_i)$;

III. 若将把矩阵第 j 行 (列) 的 k 倍加到第 i 行 (列)，记为: $r_i + kr_j (c_i + kc_j)$.

两件事实是显然的: 若 $m \times n$ 矩阵 A 经一次初等变换变成矩阵 B, 那么,

- 第一, B 也是 $m \times n$ 矩阵;
- 第二, B 也可经一次初等变换变成 A.

定义 3.2

矩阵 A 经一系列初等变换化成矩阵 B, 则称A 等价于 B. 换句话说，A 等价于 B 是指有一个由矩阵组成的序列

$$A = A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_s = B, \qquad s \geq 1$$

其中每个 A_{i+1}, $i = 1, 2, \cdots, s-1$, 可由 A_i 经一次初等变换得到.

定义 3.2

矩阵 A 经一系列初等变换化成矩阵 B, 则称A 等价于 B. 换句话说，A 等价于 B 是指有一个由矩阵组成的序列

$$A = A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_s = B, \qquad s \geq 1$$

其中每个 A_{i+1}, $i = 1, 2, \cdots, s-1$, 可由 A_i 经一次初等变换得到.

“A 等价于 B” 是两个矩阵之间的关系. 它满足以下三条:

1. 反身性: 即 A 等价于 A;
2. 对称性: 若 A 等价于 B, 则 B 等价于 A;
3. 传递性: 若 A 等价于 B, B 等价于 C, 则 A 等价于 C.

定义 3.2

矩阵 A 经一系列初等变换化成矩阵 B, 则称A 等价于 B. 换句话说，A 等价于 B 是指有一个由矩阵组成的序列

$$A = A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_s = B, \qquad s \geq 1$$

其中每个 A_{i+1}, $i = 1, 2, \cdots, s-1$, 可由 A_i 经一次初等变换得到.

"A 等价于 B" 是两个矩阵之间的关系. 它满足以下三条:

1. 反身性: 即 A 等价于 A;
2. 对称性: 若 A 等价于 B, 则 B 等价于 A;
3. 传递性: 若 A 等价于 B, B 等价于 C, 则 A 等价于 C.

- 其中反身性是显然的，传递性也不难证明.
- 当 A_i 经一次初等变换变成 A_{i+1} 时, A_i 也可由 A_{i+1} 经一次初等变换得到, 故对称性成立.
- 因为有对称性, 我们可把 "A 等价于 B" 表述成 "A, B 等价".

定义 3.3

一个 $m \times n$ 矩阵 (a_{ij}) 称为**阶梯形矩阵**，如果

1) 若某行中每个元素都为 0, 那么位于该行下面各行元素也全为 0.

2) 若有非零元素且非零元素出现于前 r 行，而对 $i = 1, 2, \cdots, r$, 第 i 行中左起第 1 个非零元为 a_{ij_i}, 则 $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$. 也就是说, 各个非零行的左起第一个非零元素的列指标由上至下是严格递增的.

定义 3.3

一个 $m \times n$ 矩阵 (a_{ij}) 称为阶梯形矩阵，如果

1) 若某行中每个元素都为 0, 那么位于该行下面各行元素也全为 0.

2) 若有非零元素且非零元素出现于前 r 行，而对 $i = 1, 2, \cdots, r$, 第 i 行中左起第 1 个非零元为 a_{ij_i}, 则 $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$. 也就是说, 各个非零行的左起第一个非零元素的列指标由上至下是严格递增的.

阶梯形矩阵的形状为 (a_{1j_1}, $a_{2j_2}, \cdots$, a_{rj_r} 均不为零)

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_2-1} & a_{1j_2} & \cdots & \cdots & a_{1j_r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2j_2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{rj_r} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

例如，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

都是阶梯形矩阵.

例如，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

都是阶梯形矩阵.

定理 3.1

任意一个矩阵都可经一系列初等行变换化成为阶梯形矩阵.

例如，

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

都是阶梯形矩阵.

定理 3.1

任意一个矩阵都可经一系列初等行变换化成为阶梯形矩阵.

证明　这里，只允许做初等行变换. 设已给 $m \times n$ 矩阵 (a_{ij})，并记作 A.

若所有的 a_{ij} 均为零, 则 A 已是阶梯形的了.

若 A 有非零元素. 设 A 的第 $1, 2, \cdots, j_1 - 1$ 列的元素均为 0, 而第 j_1 列有非零元. 通过两行互换，可把该非零元换到第 1 行上去.

然后从第 2 行起, 每行都加上第 1 行的适当倍数可使第 j_1 列中除第 1 行的元素外全为 0. 于是矩阵化成

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a'_{1j_1} & a'_{1j_1+1} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a'_{2j_1+1} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a'_{3j_1+1} & \cdots & a'_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a'_{mj_1+1} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix},$$

其中 $a'_{1j_1} \neq 0$.

若此时后 $m-1$ 行全为 0, A_1 就是阶梯形的了. 如果 A_1 除第 1 行外还有非零元，设在后 $m-1$ 行中第 1, $2, \cdots, \cdots$, j_2-1 列全为 0, 而 j_2 列中有非零元. 显然 $j_2 > j_1$. 像上边一样经初等行变换可使 $(2, j_2)$ 位置的元素不为 0, 并且当 $i > 2$ 时，(i, j_2) 位置元素全为 0. 继续这一过程，最后即得到阶梯形矩阵.

- 下面给出一个例子. 以后我们用 "$A \longrightarrow B$" 表示 A 经一次 (或几次) 初等变换化成 B.

例题 3.1

把

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

化成阶梯形矩阵.

解　把第 1 行的 -2 倍加到第 2 行上, 把第 1 行的 -1 倍加到第 3 行上, 把第 1 行的 -2 倍加到第 4 行上, 得

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 9 & -4 \end{pmatrix} = A_1.$$

解　把第 1 行的 -2 倍加到第 2 行上, 把第 1 行的 -1 倍加到第 3 行上, 把第 1 行的 -2 倍加到第 4 行上, 得

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 9 & -4 \end{pmatrix} = A_1.$$

然后把第 2 行的 -1 倍加到第 3 行上, 把第 2 行的 3 倍加到第 4 行上, 得

$$A_1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

最后一步做的是把第 3 行的 -2 倍加到第 4 行上去. 这就得到了阶梯形矩阵.

如果不局限于初等行变换, 定理 3.1 可加强为

定理 3.2

任何一个 $m \times n$ 矩阵 A 都与一个形如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

的矩阵等价. 在这个矩阵中$(1,1)$, $(2,2)$ $\cdots$, (r,r) 位置的元素为 1, 其余为 0. 显然 $r=0$ 时，上述矩阵为零矩阵.

定理 3.2 断言每个 $m \times n$ 矩阵都可经一系列的初等变换化成为(2)的形状.

证明　前面定理已经证明 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 可经一系列的初等行变换化成为阶梯形矩阵: 设其中 $a'_{1j_1}, a'_{2j_2}, \cdots, a'_{rj_r}$ 为所在行的第 1 个不为零的元素, 且有 $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$. 同时后 $m-r$ 行元素全为零. 依次作第 1, j_1 两列互换, 第 2, j_2 两列互换,$\cdots$, 第 r, j_r 两列互换, 就把这些非零元素换到主对角线上, 成为所在各行的第 1 个非零元素. 用适当的非零元素去乘各行可使主对角线上前 r 个元素成为 1. 然后各列加上第 1 列的适当倍数可使第 1 行中除 $(1,1)$ 位置上的 "1" 以外全化成 "0". 再把各列加上第 2 列的适当倍数可使第 2 行中除对角线上的 "1" 以外也全化成 "0". 继续这一过程，最后化成(2)的形状.

定理 3.2 断言每个 $m \times n$ 矩阵都可经一系列的初等变换化成为(2)的形状.

证明　前面定理已经证明 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 可经一系列的初等行变换化成为阶梯形矩阵: 设其中 $a'_{1j_1}, a'_{2j_2}, \cdots, a'_{rj_r}$ 为所在行的第 1 个不为零的元素, 且有 $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$. 同时后 $m - r$ 行元素全为零. 依次作第 1, j_1 两列互换, 第 2, j_2 两列互换,$\cdots$, 第 r, j_r 两列互换, 就把这些非零元素换到主对角线上, 成为所在各行的第 1 个非零元素. 用适当的非零元素去乘各行可使主对角线上前 r 个元素成为 1. 然后各列加上第 1 列的适当倍数可使第 1 行中除 $(1, 1)$ 位置上的 "1" 以外全化成 "0". 再把各列加上第 2 列的适当倍数可使第 2 行中除对角线上的 "1" 以外也全化成 "0". 继续这一过程，最后化成(2)的形状.

- 该定理的证明是建立在之前定理的基础上的, 即先把 A 化成阶梯形, 然后化成(2)的形状. 但实际计算时不必先化成阶梯形, 而是根据需要选择行变换和列变换的顺序.

- 若 A 与(2)中矩阵等价，则后者称为 A 的等价标准形. 等价标准形中“1” 的个数是一个重要的数据.
- 下面引入矩阵的秩的概念. 为此, 我们可以像在行列式中一样定义 k 阶子式:

定义 3.4

如果 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 的矩阵，任意取 k 行 k 列, 位于这些选定行和列的交叉点上的 k^2 个元素按原来的顺序组成的一个 k 阶行列式, 这个行列式就是 A 的一个 k 阶子式.

- 由定义可以知道 $k\leq min(m,n)$, 即不大于 m,n 的最小值.
- k 阶子式总共有 $C_m^k\cdot C_n^k$ 个.

例题 3.2

取例题 3.1 中的矩阵 A，即

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

A 的 1,2,4 行和 1,3,5 列得到的一个 3 阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix}.$$

例题 3.3

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. 问 A 有多少个 3 阶子式?

例题 3.3

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. 问 A 有多少个 3 阶子式?

定义矩阵的子式后, 我们给出研究矩阵论中的一个重要概念:矩阵的秩.

定义 3.5

称非零的 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为正整数 r, 如果 A 有非零的 r 阶子式, 而没有非零的 $r+1$ 阶子式. 零矩阵的秩规定为 0. A 的秩记作 $r(A)$. 对于 n 阶矩阵 A, 如果 $r(A) = n$, 则称矩阵 A 为满秩的 (或非奇异的, 非退化的), 这时它的行列式不等于 0; 反之, 则称其为降秩的 (或奇异的, 退化的), 且行列式等于 0.

- 以例 3.1 中的矩阵 A 为例, 它有 60 个 2 阶子式,40 个 3 阶子式和 5 个 4 阶子式. 其中 2 阶子式

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 4,$$

3 阶子式

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & 9 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 18,$$

均不为 0. 而所有的 4 阶子式都等于 0. 依定义, $r(A) = 3$.

- 在以上定义中, A"没有非零的 $r+1$ 阶子式"概括了两种情形: 或$r = min\{m, n\}$, 因而 A 没有 $r+1$ 阶子式; 或A 虽有 $r+1$ 阶子式但全等于 0. 由行列式按一行展开定理, 在后一情形下, A 若有 $r+2$ 阶或更高阶子式, 也必然全为 0. 于是r 是 A 中不为 0 的子式的阶数的最大者.

- 根据定义, (2)中矩阵的秩就是主对角线上 “1” 的个数r.

定理 3.3

初等变换不改变矩阵的秩.

证明 矩阵的初等变换有三种, 这里只考虑上述的第三种情况, 其余作为习题. 即将某一行 (列) 的 c 倍加到另一行 (列) 上. 由于行变换和列变换的证明思路一样, 所以不妨假设 $m \times n$ 矩阵 A 按列分块后为

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots \alpha_n)$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n$ 是矩阵的列. 再经过初等列变换后变为

$$B = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i + c\alpha_j, \cdots \alpha_j, \cdots, \alpha_n),$$

即将矩阵的第 j 列的 c 倍加到第 i 列上.

设 $r(A)=r$, 现取矩阵 B 的任意一个 $k(k>r)$ 阶子式 D, 记 α_i', α_j' 是 D 中分别对应于 α_i, α_j 的列. 则有三种可能性:

(1) D 中不含 B 的第 i 列, 这时 D 就是 A 的子式, 那么 $D=0$.

(2) D 中含 B 的第 i 列, 但不含 B 的第 j 列, 这时

$$D=det(\cdots, \alpha_i'+c\alpha_j', \cdots)=det(\cdots, \alpha_i', \cdots)+det(\cdots, c\alpha_j', \cdots)=0.$$

这是因为这两个式子都是 A 的 k 级子式.

(3) D 中同时含 B 的第 i 列和第 j 列, 这时

$$\begin{aligned} D&=det(\cdots, \alpha_i'+c\alpha_j', \cdots, \alpha_j', \cdots, \alpha_n) \\ &=det(\cdots, \alpha_i', \cdots, \alpha_j', \cdots, \alpha_n)+det(\cdots, c\alpha_j', \cdots, \alpha_j', \cdots, \alpha_n)=0. \end{aligned}$$

这是因为第一个式子就是 A 的 k 级子式, 第二个中含有相同的列. 故 B 中高于 r 阶的子式都为 0, 所以 $r(B)\le r=r(A)$. 同理可得 $r(A)\le r(B)$ (因为将矩阵 B 的第 j 列的 $-c$ 倍加到它的第 i 列上就变成了矩阵 A). 所以, $r(B)=r(A)$, 即矩阵经过上述的第 III 种初等变换, 秩不变.

命题 3.1

两个 $m \times n$ 矩阵 A, B等价当且仅当它们有相同的秩.

命题 3.1

两个 $m \times n$ 矩阵 A, B等价当且仅当它们有相同的秩.

证明　设 $r(A) = r(B) = r$, 则 A, B 的等价标准形都是主对角线上恰有 r 个 1 的形如(2)的矩阵 C. 于是 A, C 等价, B, C 等价. 由传递性知 A, B 等价. 至于等价的矩阵有相同的秩则是定理的直接推论.

命题 3.2

阶梯形矩阵的秩等于它非零行的数目.

命题 3.2

阶梯形矩阵的秩等于它非零行的数目.

证明　在阶梯形矩阵为 (3.2) 中, 有前 $1, 2, \cdots, r$ 行和第 $j_1, j_2, \cdots, j_r$ 列构成的 r 阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{1j_1} & * & * & \cdots & * \\ & a_{2j_2} & * & \cdots & * \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & a_{rj_r} \end{vmatrix} = a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{rj_r} \neq 0,$$

而所有阶大于等于 $r+1$ 的子式全为 0. 故其秩为非零行的个数 r.

命题 3.2

阶梯形矩阵的秩等于它非零行的数目.

证明　在阶梯形矩阵为 (3.2) 中, 有前 $1, 2, \cdots, r$ 行和第 $j_1, j_2, \cdots, j_r$ 列构成的 r 阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{1j_1} & * & * & \cdots & * \\ & a_{2j_2} & * & \cdots & * \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & a_{rj_r} \end{vmatrix} = a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{rj_r} \neq 0,$$

而所有阶大于等于 $r+1$ 的子式全为 0. 故其秩为非零行的个数 r.

根据上述性质, 且由于任何矩阵都可以经初等变换化为阶梯形矩阵, 那么我们就可以把矩阵作初等变换化为阶梯矩阵, 而阶梯矩阵的秩就等于非零行的数目, 这样, 就很容易的求得矩阵的秩.

例题 3.4

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 13 & 19 \end{pmatrix}$ 的秩.

例题 3.4

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 13 & 19 \end{pmatrix}$ 的秩.

解　对矩阵作如下初等变换:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 13 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 13 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 13 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+\frac{5}{2}r_2}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} & \frac{19}{2} \\ 0 & 0 & 13 & 19 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_4-2r_3}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} & \frac{19}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

那么可以看出 $r(A) = 3$.

§ 2.4 矩阵的逆

- 数域 F 中任一个非零的数 a, 均有一个数 $a^{-1} \in F$, 满足 $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. 这里 a^{-1} 也是a 的倒数, 称为 a 的逆.
- 那么矩阵是否和数域中的数一样, 存在逆呢?
- 在这一节, 将介绍矩阵的逆矩阵的定义, 性质和求法.

定义 4.1

设 $A = (a_{ij})$ 是一个 $n \times n$ 的矩阵, 如果存在矩阵 B 使得

$$AB = BA = E,$$

则称 A 存在逆矩阵 B, 将A 的逆矩阵记作 A^{-1}. A, B 称为互逆矩阵.

注意 逆矩阵只是对方阵而言的, 没有定义不是方阵的矩阵的逆.

例题 4.1

(1) 已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

(2) 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 求其逆矩阵.

例题 4.1

(1) 已知 $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$ 则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

(2) 设 $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}$ 求其逆矩阵.

解 设 $B=\begin{pmatrix}b_1&b_2\\b_3&b_4\end{pmatrix}$ 是 A 的逆矩阵, 则

$$\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&b_2\\b_3&b_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.\text{那么}\begin{cases}2b_1+b_3=1,\\2b_2+b_4=0,\\3b_3=0,\\3b_4=1.\end{cases}$$

解得 $b_1=\frac{1}{2}, b_2=-\frac{1}{6}, b_3=0, b_4=\frac{1}{3}$, 即 $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

对于矩阵的逆而言, 有以下性质:

(1) 若矩阵 A 可逆, 则其逆矩阵是唯一确定的.

(2) A 可逆时, A^{-1} 也可逆, 且$(A^{-1})^{-1} = A$.

(3) A, B 可逆时, AB 也可逆, 且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(4) A 可逆时, 其转置A' 也可逆, 并且$(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

对于矩阵的逆而言，有以下性质:

(1) 若矩阵 A 可逆，则其逆矩阵是唯一确定的.

(2) A 可逆时，A^{-1} 也可逆，且$(A^{-1})^{-1} = A$.

(3) A, B 可逆时，AB 也可逆，且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(4) A 可逆时，其转置A' 也可逆，并且$(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

证明 (1) 若 B, C 都是 A 的逆. 则 $AB = BA = E$, $AC = CA = E$. 故 $B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$. 今后把 A 的逆矩阵记作 A^{-1}.

(2) 若矩阵 A 可逆，则存在矩阵 B 使得 $AB = BA = E$, 那么按照定义 $A^{-1} = B$ 也可逆，且它的逆矩阵就是 A，即 $(A^{-1})^{-1} = A$.

(3) 若 A, B 可逆，则 $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E$, 同理，$(B^{-1}A^{-1})(AB) = E$, 故 AB 也可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(4) 若矩阵 A 可逆，则 $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, 两边同时求转置得 $(A^{-1})'A' = A'(A^{-1})' = E$, 由定义知 $(A')^{-1} = (A^{-1})'$. 可以归纳证明: 如果 $A_1, A_2, \ldots, A_s$ 是同阶的可逆矩阵，那么 $(A_1 \cdots A_s)^{-1} = A_s^{-1} \cdots A_1^{-1}$.

- 那么在所有的矩阵中,是否存在矩阵是没有逆矩阵的呢?
- 更进一步, 如果矩阵存在逆, 又怎么求逆呢?

- 那么在所有的矩阵中,是否存在矩阵是没有逆矩阵的呢?
- 更进一步, 如果矩阵存在逆, 又怎么求逆呢?

例题 4.2

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, 那么 A 存在逆矩阵吗?

- 那么在所有的矩阵中,是否存在矩阵是没有逆矩阵的呢?
- 更进一步, 如果矩阵存在逆, 又怎么求逆呢?

例题 4.2

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, 那么 A 存在逆矩阵吗?

解 假设存在逆矩阵 $B=\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}$, 那么有

$\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. 而

$\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3b_3 & 3b_4\\ 4b_3 & 4b_4\end{pmatrix}$, 不可能是单位矩阵, 故矩阵 A 没有逆矩阵.

为了计算的简单, 我们定义矩阵的伴随矩阵:

定义 4.2

设矩阵 $A=(a_{ij})_{nn}$, 称矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为矩阵 A 的伴随矩阵, 其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式.

设 $|A|=d$, 由于 a_{ij} 和其代数余子式 A_{ij} 有关系:

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} d, & i=j, \\ 0 & i\neq j. \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases} d, & i=j,\\ 0 & j\neq k.\end{cases}$$

所以,

$$\begin{aligned} AA^* &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d & & & \\ & d & & \\ & & \ddots & \\ & & & d \end{pmatrix} = dE \\ &= A^*A. \end{aligned}$$

定理 4.1

n 阶矩阵A 可逆, 当且仅当其行列式$|A|$ 不等于零.

定理 4.1

n 阶矩阵A 可逆, 当且仅当其行列式$|A|$ 不等于零.

证明 (1) 必要性, 假设 $AB = BA = E$, 对它取行列式得 $|A||B| = 1$, 于是 $|A| \neq 0$.

(2) 充分性, 假设 $|A| = d \neq 0$, 那么由上述关系有 $AA^* = A^*A = dE$, 从而有

$$A(\frac{1}{d}A^*) = (\frac{1}{d}A^*)A = E.$$

由矩阵可逆的定义知, $A^{-1} = \frac{1}{d}A^*$, 即矩阵可逆.

- 由于行列式不为零等价于矩阵为满秩的, 故上述定理也可以叙述为: 矩阵可逆当且仅当矩阵为满秩的.
- 在证明上述命题的过程中, 给出了求矩阵逆矩阵的一个方法: 即求矩阵的伴随矩阵和行列式.

例题 4.3

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

的逆矩阵.

例题 4.3

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

的逆矩阵.

解 首先，$|A| = 52$. 并且

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 10, A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 9, A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -23,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2, A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 7, A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 11,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6, A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7,$$

于是

$$A^{-1} = \frac{1}{52}\begin{pmatrix} 10 & 2 & 6 \\ 9 & 7 & -5 \\ -23 & 11 & 7 \end{pmatrix}.$$

直接验算可知确有 $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

例题 4.4

设有关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

如果 A 可逆, 证明线性方程组有唯一解.

证明:记 $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)'$, $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)'$. 那么方程组就可以写成 $AX=b$ 的形式.

(1) 存在性: 由于 A 可逆, 那么 $A^{-1}AX=A^{-1}b$, 于是 $X=A^{-1}b$. 将 $X=A^{-1}b$ 代入原方程组, 可知它确实是方程组的一个解.

(2) 唯一性: 假设 $X=X_0$ 是方程组的另一个解, 那么 $AX_0=b$, 而 A 可逆, 那么 $X_0=A^{-1}b$. 综上所述, 原方程组存在唯一的解.

- 分块矩阵在求矩阵的逆的时候也起到了非常重要的作用:

例题 4.5

设

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ B_1 & C_1 \end{pmatrix},$$

其中 A_1 为 $r\times r$ 可逆矩阵,C_1 为 $t\times t$ 可逆矩阵, 求 A 的逆.

例题 4.5

设

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ B_1 & C_1 \end{pmatrix},$$

其中 A_1 为 $r\times r$ 可逆矩阵,C_1 为 $t\times t$ 可逆矩阵, 求 A 的逆.

解　由于 $|A|=|A_1|\cdot|C_1|$, 而 A_1 和 C_1 可逆, 故 A 可逆. 设 A 的逆 A^{-1} 有分块形式

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}.$$

其中，X 为 $r\times r$ 矩阵,Y 为 $r\times t$ 矩阵,Z 为 $t\times r$ 矩阵,T 为 $t\times t$ 矩阵. 此时 A, A^{-1} 的分块形式可作分块乘法.

设

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_1 & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1X & A_1Y \\ B_1X + C_1Z & B_1Y + C_1T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & E_t \end{pmatrix}.$$

那么应有矩阵等式

$$\begin{cases} A_1X = E_r, \\ A_1Y = 0, \\ B_1X + C_1Z = 0, \\ B_1Y + C_1T = E_t. \end{cases}$$

因为 A_1 可逆, 我们知 $X = A_1^{-1}, Y = 0$. 由上边第 3 式知

$$C_1 Z = -B_1 X = -B_1 A_1^{-1}.$$

所以 $Z = -C_1^{-1} B_1 A_1^{-1}$. 因 $Y = 0$, 上边第 4 式成为 $C_1 T = E_t$, 即 $T = C_1^{-1}$. 于是

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ -C_1^{-1} B_1 A_1^{-1} & C_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

§ 2.5 初等矩阵

- 在本章的第二节中, 我们介绍了矩阵的初等变换,
- 本节中, 我们将初等变换和矩阵联系起来, 介绍初等变换的矩阵表现形式.
- 对应于给出的三种初等变换, 我们给出三种初等矩阵.

(第 I 种类型的初等矩阵) 将 n 阶单位矩阵 E 的第 i 行, 第 j 行互换$(i > j)$, 得到的矩阵

$$
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 &&&& 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 &&&& 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ (i) \\ \\ \\ \\ (j) \\ \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

称为第 I 种类型的初等矩阵, 记为 $P(i, j)$.

- 对于一个矩阵 $A=(a_{ij})_{mn}$, 将矩阵 A左乘m 阶的 $P(i,j)$ 得到:

$$P(i,j)A=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix}\end{array}$$

- 对矩阵 A 作第I 种初等行变换, 交换矩阵的第 i 行、第 j 行, 相当于对矩阵 A 左乘 $P(i,j)$.
- 交换矩阵 $A=(a_{ij})_{mn}$ 的第 i 列, 第 j 列; 相当于右乘 n 阶的 $P(i,j)$.

(第 II 种类型的初等矩阵) 将 n 阶单位矩阵 E 的第 i 行乘以一个非零数 k, 得到的矩阵称为第 II 种类型的初等矩阵,记为 $P(i(k))$:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ (i) \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

- 对于一个矩阵 $A = (a_{ij})_{mn}$,将矩阵 A 左乘 m 阶的 $P(i(k))$, 相当于对矩阵 A 的第 i 行乘以一个非零数 k;
- 而右乘 n 阶的 $P(i(k))$, 相当于对矩阵 A 的第 i 列乘以一个非零数 k.

(第 III 种类型的初等矩阵) 将 n 阶单位矩阵 E 的第 j 行乘以一个数 k, 再加到第 i 行, 得到的矩阵:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & k & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

称为第 III 种类型的初等矩阵, 记为 $P(i,j(k))$.

- 对于一个矩阵 $A=(a_{ij})_{mn}$, 将矩阵 A左乘 m 阶的 $P(i,j(k))$, 相当于对矩阵 A 的第 j 行乘以一个 k 后, 再加到第 i 行;
- 而右乘 n 阶的 $P(i,j(k))$, 相当于对矩阵 A 的第 j 列乘以一个数 k 后, 再加到第 i 列.

定理 5.1

用 m 阶初等矩阵左乘一个 $m \times n$矩阵 A相当于对矩阵 A 作一次相应的初等行变换; 用 n 阶初等矩阵右乘一个 $m \times n$矩阵A 相当于对矩阵 A 作一次相应的初等列变换.

定理 5.1

用 m 阶初等矩阵左乘一个 $m \times n$矩阵 A相当于对矩阵 A 作一次相应的初等行变换; 用 n 阶初等矩阵右乘一个 $m \times n$矩阵A 相当于对矩阵 A 作一次相应的初等列变换.

例题 5.1

已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $P(3,1(2))A, AP(2,3), P(3(3))A$.

解　因为左乘 3 阶的 $P(3,1(2))$, 相当于对矩阵 A 的第 1 行乘以 2 后, 再加到第 3 行, 故

$$P(3,1(2))A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\4&2&5\end{pmatrix};$$

而右乘 $P(2,3)$, 相当于交换矩阵的第 2 列、第 3 列, 故

$$AP(2,3)=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\2&1&-2\end{pmatrix};$$

同样的左乘 $P(3(3))$, 相当于对矩阵 A 的第 3 行乘以 3, 故

$$P(3(3))A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\6&-6&2\end{pmatrix}.$$

- 经过简单的计算可以发现以下性质:

  (1) $P(i,j)^{-1} = P(i,j)$,

  (2) $P(i(k))^{-1} = P(i(k^{-1}))$,

  (3) $P(i,j(k))^{-1} = P(i,j(-k))$.
- 任何初等矩阵的逆矩阵还是初等矩阵.
- 初等矩阵在矩阵中的作用很大, 矩阵之间的很多关系都用初等矩阵来解释.
- 在第 3 节里，我们已经给出了矩阵等价的定义: 如果两个矩阵可以经过一系列的初等变换相互转换, 那么就称这两个矩阵是等价的.
- 由于任何一个矩阵经过初等变换都可以化成阶梯形矩阵,
- 任何一个矩阵都与一个阶梯形矩阵等价.
- 更进一步地有, 任意一个 $m \times n$ 矩阵 A, 若 $rank(A) = r$, 那么 A 等价于与其标准形

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

有了初等矩阵以及上面的讨论，定理 3.2 可以改写为;

定理 5.2

设 A 为 $m \times n$ 矩阵，若 $r(A) = r$，则存在m 阶初等矩阵$P_1, P_2, \cdots, P_s$ 和n 阶初等矩阵$Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$，使

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

推论 5.1

若矩阵 A 为 n 阶可逆矩阵，那么存在 n 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 使得

$$P_m \cdots P_2 P_1 A = E,$$

从而$A^{-1} = P_m \cdots P_2 P_1$.

证明

由上面定理知存在初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s; Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$, 使

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = E.$$

那么等式两边同时左乘 $Q_1 \cdots Q_{t-1} Q_t$ 右乘 $Q_t^{-1} Q_{t-1}^{-1} \cdots Q_1^{-1}$ 得到

$$Q_1 \cdots Q_{t-1} Q_t P_s \cdots P_2 P_1 A = E,$$

故结论成立.

证明

由上面定理知存在初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s; Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$, 使

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = E.$$

那么等式两边同时左乘 $Q_1 \cdots Q_{t-1} Q_t$ 右乘 $Q_t^{-1} Q_{t-1}^{-1} \cdots Q_1^{-1}$ 得到

$$Q_1 \cdots Q_{t-1} Q_t P_s \cdots P_2 P_1 A = E,$$

故结论成立. 相同的方法可以证明:

推论 5.2

若矩阵 A 为 n 阶可逆矩阵, 那么存在 n 阶初等矩阵 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_m$ 使得

$$A Q_1 Q_2 \cdots Q_m = E,$$

从而 $A^{-1} = Q_1 Q_2 \cdots Q_m$.

推论 5.3

A 是任意矩阵, 那么有$r(A')=r(A)$.

- 因为这两个推论, 我们可以得到两个用初等变换求逆矩阵的方法. 设矩阵 A 为 n 阶可逆矩阵.
- (1) 将 E 添到 A 的右侧, 作分块矩阵 (A, E),
- 然后对这个 $n\times 2n$ 矩阵做初等行变换使得它变为(E, B)的形式,
- 那么 $A^{-1}=B$.
- 这是因为存在初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 使得 $P_m\cdots P_2P_1A=E$, 那么

$$P_m\cdots P_2P_1(A, E)=(E, P_m\cdots P_2P_1).$$

- (2) 将 E 添到 A 的下面, 作分块矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ E_n \end{pmatrix}$,
- 然后对这个 $2n \times n$ 矩阵做初等列变换使得它变为 $\begin{pmatrix} E \\ B \end{pmatrix}$ 的形式,
- 那么 $A^{-1} = B$.
- 这是因为存在初等矩阵 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_m$ 使得

$$AQ_1Q_2\cdots Q_m = E,$$

那么 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} Q_1Q_2\cdots Q_m = \begin{pmatrix} E \\ B \end{pmatrix}$.

例题 5.2

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆.

例题 5.2

求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆.

解 方法 (1). 对矩阵 (A, E_3) 作初等行变换:

$$(A, E_3)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -23 & -9 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-3r_2}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-4r_3]{r_1+2r_3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 14 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -29 & 13 & -6 & -4 \\ 0 & -2 & 6 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+2r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 14 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -29 & 13 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -52 & 23 & -11 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{52}r_3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 14 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -29 & 13 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{23}{52} & \frac{11}{52} & \frac{7}{52} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-14r_3]{r_2+29r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{52} & \frac{2}{52} & \frac{6}{52} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{52} & \frac{7}{52} & -\frac{5}{52} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{23}{52} & \frac{11}{52} & \frac{7}{52} \end{pmatrix},$$

故 $A^{-1} = \frac{1}{52} \begin{pmatrix} 10 & 2 & 6 \\ 9 & 7 & -5 \\ -23 & 11 & 7 \end{pmatrix}.$

方法 (2). 对矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ E_3 \end{pmatrix}$ 作初等列变换:

$$\begin{pmatrix} A \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3+c_1]{c_2-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 6 \\ -3 & 11 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3+c_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\4&-1&6\\-3&9&-2\\0&1&6\\1&-1&-5\\0&1&7\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{52}c_3]{-c_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\4&1&0\\-3&-9&1\\0&-1&\frac{6}{52}\\0&1&-\frac{5}{52}\\0&-1&\frac{7}{52}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_2+9c_3]{c_1-4c_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\33&0&1\\4&\frac{2}{52}&\frac{6}{52}\\-3&\frac{7}{52}&-\frac{5}{52}\\4&\frac{11}{52}&\frac{7}{52}\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1-33c_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\frac{10}{52}&\frac{2}{52}&\frac{6}{52}\\\frac{9}{52}&\frac{7}{52}&-\frac{5}{52}\\-\frac{23}{52}&\frac{11}{52}&\frac{7}{52}\end{pmatrix}.$$

所以,$A^{-1} = \frac{1}{52}\begin{pmatrix} 10 & 2 & 6 \\ 9 & 7 & -5 \\ -23 & 11 & 7 \end{pmatrix}$.