座位号________ 专业班级________ 学院________ 学号________ 姓名________
（密 封 线 内 不 答 题）

诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学本科生期末考试

《工科数学分析（二）》

2016-2017 学年第二学期期末考试试卷 B 卷

参考答案及评分标准

注意事项：

一、 开考前请将密封线内各项信息填写清楚；

二、 所有答案请直接答在试卷上；

三、 考试形式：闭卷；

四、 本试卷共 6 大题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
得 分							

一、 填空题：共 5 题，每题 2 分，共 10 分。

1. 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z=$ $\underline{\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y}$；

2. 设 Γ 为椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 取逆时针方向，则第二类曲线积分 $\oint_\Gamma x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=$ $\underline{12\pi}$；

3. 向量场 $x^2yz\boldsymbol{i}+xy^2z\boldsymbol{j}+xyz^2\boldsymbol{k}$ 在点 $(1,1,1)$ 的散度为 $\underline{6}$；

4. 初值问题 $\begin{cases} y'+\frac{3}{x}y=\frac{2}{x^3} \\ y|_{x=1}=1 \end{cases}$ 的解为 $\underline{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}$；

5. 设 $f(x)=\pi x+x^2, -\pi<x<\pi$ 的傅里叶 (Fourier) 级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，

   则其中系数 $b_2=$ $\underline{-\pi}$；

二、 单选题：共 5 题，每题 2 分，只有一个正确选项，共 10 分

1. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 处的两个偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ 存在，则（　　C　　）

   A. $f(x,y)$ 在点 (a,b) 处连续　　B. $f(x,y)$ 在点 (a,b) 处可微

   C. $\lim\limits_{x\to a} f(x,b)$ 和 $\lim\limits_{y\to b} f(a,y)$ 都存在　　D. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ 存在

2. 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z=1$，则 P 点的坐标是（　　C　　）

   A. $(1,-1,2)$　　B. $(-1,1,2)$　　C. $(1,1,2)$　　D. $(-1,-1,2)$

3. 一个均匀物体由曲面 $z=x^2+y^2$ 及 $z=1$ 围成，则该物体的质心坐标为（　　B　　）

   A. $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$　　B. $\left(0,0,\frac{2}{3}\right)$　　C. $(0,0,1)$　　D. $\left(\frac{2}{3},0,0\right)$.

4. 微分方程 $(y-\ln x)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$ 是（　　B　　）

   A. 可分离变量方程　　B. 一阶非齐次线性方程

   C. 一阶齐次线性方程　　D. 非线性方程

5. 下列级数条件收敛的是（　　D　　）

   A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

三、 计算题：共 4 题，每题 7 分，共 28 分

1. 设函数 $u(x,y)=yf\left(\frac{x}{y}\right)+xg\left(\frac{y}{x}\right)$，其中 f 和 g 具有连续的二阶导数，计算 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$。

解:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'\left(\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right),\cdots\cdots(3\text{ 分})$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=f\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)+g'\left(\frac{y}{x}\right).$$

因此，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)\\&=\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right),\cdots\cdots(2\text{ 分})\\\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}&=\frac{1}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)\\&=-\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right).\cdots\cdots(2\text{ 分})\end{aligned}$$

因此，

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0.$$

2. 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是区域 $x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$。

解：利用极坐标换元

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta,\qquad 0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

有

$$\begin{aligned}\iint\limits_D\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1-r^2}{1+r^2}r\mathrm{d}r\cdots\cdots(5\text{ 分})\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{2r}{1+r^2}-r\mathrm{d}r\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln 2-\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1).\cdots\cdots(2\text{ 分})\end{aligned}$$

3. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面围成的区域。

解：应用先重后单的方法，有

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{\substack{x+y\leqslant 1-z\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0}} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \cdots\cdots (3\text{ 分})\\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}z^2(1-z)^2\mathrm{d}z \cdots\cdots (2\text{ 分})\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)\\
&= \frac{1}{60}.\cdots\cdots (2\text{ 分})
\end{aligned}
$$

4. 计算第一类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $y+z=5$ 被柱面 $x^2+y^2=25$ 所截得的部分。

解：曲面 Σ 有显示方程 $z=5-y$，因此，曲面面积微元为

$$
\mathrm{d}S = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{1+0^2+(-1)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S &= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}(x+y+5-y)\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \cdots\cdots (4\text{ 分})\\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^5(r\cos\theta+5)r\mathrm{d}r\\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{125}{3}\cos\theta+\frac{125}{2}\mathrm{d}\theta\\
&= 125\sqrt{2}\pi.\cdots\cdots (3\text{ 分})
\end{aligned}
$$

四、 解答题：共 4 题，每题 8 分，共 32 分。

1. 求方程 $y''+4y'+3y=0$ 的一个解 $y=y(x)$，使其在点 $(0,2)$ 处与直线 $x-y+2=0$ 相切。

解：方程 $y''+4y'+3y=0$ 是一个二阶常系数齐次微分方程，其特征方程为

$$\lambda^2+4\lambda+3=0.$$

特征方程有两个实数根 $\lambda_1=-3$ 和 $\lambda_2=-1$。因此微分方程的通解为

$$y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-x}.\cdots\cdots(5\text{ 分})$$

积分曲线在点 $(0,2)$ 处与直线 $x-y+2=0$ 相切，因此

$$y(0)=2,\qquad y'(0)=1.\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

即，

$$\begin{cases}y(0)=C_1+C_2=2.\\ y'(0)=-3C_1-C_2=1.\end{cases}$$

由此解得，

$$C_1=-\frac{3}{2},\qquad C_2=\frac{7}{2}.$$

所求解为

$$y=-\frac{3}{2}e^{-3x}+\frac{7}{2}e^{-x}.\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

2. 求圆柱面 $x^2+y^2=4, x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 介于 xOy 平面和曲面 $z=xy$ 之间的部分的面积。

解：由微元法，可知所求面积可表示为第一类曲线积分

$$S=\int\limits_{\Gamma}xy\mathrm{d}s\cdots\cdots(5\text{ 分})$$

其中 Γ 为四分之一圆弧 $x^2+y^2=4, x\geqslant 0, y\geqslant 0$.

曲线 Γ 有参数方程

$$x=2\cos t\qquad y=2\sin t,\qquad 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

因此，其弧长微元为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t=2\mathrm{d}t.$$

所以，

$$\begin{aligned}S&=\int\limits_{\Gamma}xy\mathrm{d}s\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos t\sin t\cdot 2\mathrm{d}t\\&=4.\cdots\cdots(3\text{ 分})\end{aligned}$$

3. 设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=0$ 及 $z=1$ 截下的部分的下侧，

计算第二类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

解：记 Σ_1 为平面 $z=1$ 被锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 截下的部分的上侧，则 Σ 和 Σ_1 围成闭区域

$$\Omega=\{(x,y,z):x^2+y^2\leqslant z^2,0\leqslant z\leqslant 1\}.$$

由 Gauss 公式

$$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega} 2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\cdots\cdots(4\text{ 分})$$

先计算右端的三重积分，

$$\iiint\limits_{\Omega} 2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant z^2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\pi z^3\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\pi.\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

在曲面 Σ_1 上，

$$\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} -1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi.\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

因此，

$$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\pi.$$

4. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域，并在收敛域上求其和函数。

解：先求幂级数的收敛半径

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

因此，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛半径为 1。当 $x=1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散。当 $x=-1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 是一个交错级数，由 Lebniz 判别法知其收敛。因此，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域为 $[-1,1)$.$\cdots\cdots$(3 分)

记其和函数为 $f(x):=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\qquad x\in[-1,1)$. 则

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},\quad x\in(-1,1).\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

因此，

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x),\quad x\in(-1,1).$$

注意到 $f(0)=0$，我们有

$$f(x)=-\ln(1-x),\quad x\in(-1,1).$$

当 $x=-1$ 时，由幂级数的性质知 $f(x)$ 在 $x=-1$ 连续。而函数 $-\ln(1-x)$ 也在 $x=-1$ 连续。因此，

$$f(x)=-\ln(1-x),\qquad x\in[-1,1).\cdots\cdots(3\text{ 分})$$

五、 证明题：共 2 题，每题 6 分，共 12 分。

1. 证明：曲面 $z = xe^{\frac{y}{x}}$ 上所有点处的切平面都过一定点。

证明：设 (x_0, y_0, z_0) 为曲面 $z = xe^{\frac{y}{x}}$ 上任意一点，曲面在点 (x_0, y_0, z_0) 处的法向量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n} &= \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right)\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)} \\ &= \left(-\left(1-\frac{y}{x}\right)e^{\frac{y}{x}}, -e^{\frac{y}{x}}, 1\right)\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)} \\ &= \left(-\left(1-\frac{y_0}{x_0}\right)e^{\frac{y_0}{x_0}}, -e^{\frac{y_0}{x_0}}, 1\right) \cdots\cdots (2\text{ 分})\end{aligned}$$

因此，曲面在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程为

$$-\left(1-\frac{y_0}{x_0}\right)e^{\frac{y_0}{x_0}}(x-x_0) - e^{\frac{y_0}{x_0}}(y-y_0) + (z-z_0) = 0. \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因为点 (x_0, y_0, z_0) 在曲面上，$z_0 = x_0e^{\frac{y_0}{x_0}}$。因此，

$$\left(1-\frac{y_0}{x_0}\right)x_0e^{\frac{y_0}{x_0}} + y_0e^{\frac{y_0}{x_0}} - z_0 = x_0e^{\frac{y_0}{x_0}} - z_0 = 0. \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

即，点 $(0, 0, 0)$ 总落在曲面过 (x_0, y_0, z_0) 的切平面上。

2. 证明：函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $(0, 1)$ 点态收敛，但不一致收敛。

证明：函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 的前 n 项和为

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

对于任意给定的 $x \in (0, 1)$，

$$\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0.$$

因此，

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

即，函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 在区间 $(0, 1)$ 上点态收敛于 $S(x) := \frac{1}{1-x}$. $\cdots\cdots$(4 分)

但是，可以取到区间 $(0, 1)$ 中的数列 $\left\{x_n = 1 - \frac{1}{n} \in (0, 1), n = 1, 2, \ldots\right\}$ 使得

$$\lim_{n\to+\infty} |S_n(x_n) - S(x_n)| = \lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} = +\infty \neq 0.$$

因此，函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 不一致收敛。$\cdots\cdots$(2 分)

六、 应用题：共 1 题，共 8 分。

从斜边长为 l 的直角三角形中，求周长最大的直角三角形。

解：设直角三角形的两个直角边长分别为 x 和 y。则其周长为

$$f(x,y)=x+y+l,\quad 0<x<l, 0<y<l.$$

且它们满足勾股定理

$$x^2+y^2=l^2.$$

这是在约束条件 $x^2+y^2=l^2$ 之下求目标函数 $f(x,y)$ 的最大值的问题。

设 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda)=x+y+l-\lambda(x^2+y^2-l^2).\cdots\cdots(4\text{ 分})$$

则最大值点应满足方程

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=1-2\lambda x=0, \\ \frac{\partial L}{\partial y}=1-2\lambda y=0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=-(x^2+y^2-l^2)=0. \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

解此方程组，得

$$(x,y,\lambda)=\left(\frac{l}{\sqrt{2}},\frac{l}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}l}\right) \text{ 或 } \left(-\frac{l}{\sqrt{2}},-\frac{l}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}l}\right)\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

注意到直角边的长度 $x>0, y>0$。所以，当两直角边长度都为 $\frac{l}{\sqrt{2}}$ 时，直角三角形周长最大，最大周长为 $(1+\sqrt{2})l$.