线性代数与解析几何

第五章　特征值与特征向量

§ 5.3 实对称矩阵的对角化

- 本节主要讨论实对称矩阵的对角化问题.
- 在上一节中我们看到, 并不是所有的 n 阶矩阵都可以对角化,
- 但是对于本节我们将要讨论的实对称矩阵而言, 它们却必定是可对角化的.
- 实对称矩阵的对角化问题不仅可以用于解析几何中直角坐标系下二次曲线 (面) 的方程简化问题, 而且在很多领域的定量分析模型的分析和计算问题中也起着举足轻重的作用.

1. $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积

- 在第三章里，我们已经定义了的平面或空间的向量的内积. 对向量 α 和 β，令

$$\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta| \cos\langle \alpha, \beta \rangle,$$

其中 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 表示 α 与 β 的夹角，亦即 $\alpha \cdot \beta$ 为 α 和 β 的点乘或内积. 且满足第三章定理 2.1.

- 若在空间中建立了直角坐标系，而 α, β 分别以 (x_1, y_1, z_1),(x_2, y_2, z_2) 为坐标，那么

$$\alpha \cdot \beta = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

- 在平面的情形，α, β 的坐标形如 (x_1, y_1),(x_2, y_2). 相应地，

$$\alpha \cdot \beta = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

我们将此内积的概念推广到 $\mathbb{R}^n$ 上.

定义 3.1

设 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, 定义

$$(\alpha,\beta)=\alpha\beta^T=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,$$

称 (α,β) 为α,β 的内积.

注意, 若统一用列向量来表示 $\mathbb{R}^n$ 中的向量, 设

$$\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},$$

内积仍定义为 $(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$, 但若用矩阵的乘积来表示, 应写成 $(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta$.

对一切 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta \in \mathbb{R}^n$ 和一切实数 k, 内积满足下列运算规律:

- (1) $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$,
- (2) $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$,
- (3) $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = (\alpha_1, \beta) + (\alpha_2, \beta)$,
- (4) $(\alpha, \alpha) \geq 0$, 当且仅当 $\alpha = 0$ 时 $(\alpha, \alpha) = 0$.

定义 3.2

若 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$，实数 $|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$ 称为α 的长度, 即

$$|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.$$

- 这意味着向量的长度是非负实数.
- 长度为 1 的向量称为单位向量.
- 长度有下列性质:

性质 3.1

(1) $|\alpha| \geq 0$, 当且仅当 $\alpha = 0$ 时， $|\alpha| = 0$.

(2) $|k\alpha| = |k||\alpha|, \quad k \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^n$.

(3) 若 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$，则

$$|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha| \cdot |\beta|, \qquad \text{(柯西 -许瓦兹不等式)}$$

(4) 若 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$，则

$$|\alpha| + |\beta| \geq |\alpha + \beta|. \quad \text{(三角不等式)}$$

性质 3.1

(1) $|\alpha| \geq 0$, 当且仅当 $\alpha = 0$ 时， $|\alpha| = 0$.

(2) $|k\alpha| = |k||\alpha|, \quad k \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^n$.

(3) 若 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$，则

$$|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha| \cdot |\beta|, \qquad \text{(柯西 -许瓦兹不等式)}$$

(4) 若 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$，则

$$|\alpha| + |\beta| \geq |\alpha + \beta|. \quad \text{(三角不等式)}$$

证明 1) 和 2) 是明显的. 现证明 3). 取定 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$. 在 $\beta = 0$ 时结论显然成立. 今设 $\beta \neq 0$ 并设 t 为一个实数. 考虑 $\alpha + t\beta$ 和它自身的内积

$$(\alpha + t\beta, \alpha + t\beta) = (\alpha, \alpha) + 2t(\alpha, \beta) + t^2(\beta, \beta).$$

这是 t 的一个二次三项式. 由于它总是非负的，所以判别式小于等于 0,

即有

$$(2(\alpha,\beta))^2-4(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)\le 0,$$

于是

$$(\alpha,\beta)^2\le(\alpha,\alpha)(\beta,\beta).$$

两边开方得 $|(\alpha,\beta)|\le|\alpha|\cdot|\beta|$.

4) 若 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$，则

$$|\alpha+\beta|^2=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta),$$

而

$$(\alpha,\alpha)=|\alpha|^2,\ (\beta,\beta)=|\beta|^2,\ (\alpha,\beta)\le|\alpha|\cdot|\beta|,$$

所以

$$\begin{aligned}|\alpha+\beta|^2 &\le |\alpha|^2+2|\alpha|\cdot|\beta|+|\beta|^2\\ &= (|\alpha|+|\beta|)^2.\end{aligned}$$

两边开方即得所要的结论.

- 当 $\alpha \neq 0$ 时,

$$|\frac{1}{|\alpha|}\alpha| = \frac{1}{|\alpha|}|\alpha| = 1,$$

即 $\beta = \frac{1}{|\alpha|}\alpha$ 是单位向量, 将 α 变为 $\beta = \frac{1}{|\alpha|}\alpha$ 称为将 α 单位化.

- 由内积和长度, 我们可定义两个向量的" 夹角":

定义 3.3

设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$, 规定 α, β 的夹角为满足条件

$$\cos\theta = \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha| \cdot |\beta|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

的角度 θ, 向量 α, β 的夹角记做 $\langle \alpha, \beta \rangle$.

- 因为我们已证明 $|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha| \cdot |\beta|$, 故

$$-1 \leq \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha| \cdot |\beta|} \leq 1,$$

这说明定义 3.3 所定义的 θ 是存在的并且只有一个.

定义 3.4

若 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$，而 $\langle\alpha, \beta\rangle = \frac{\pi}{2}$, 则说 α, β 为垂直的或正交的. 零向量与任何向量正交.

于是有下面的命题：

性质 3.2

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$，则 α, β 正交当且仅当$(\alpha, \beta) = 0$.

2. 正交向量组

定义 3.5

称两两正交的一组非零向量构成的向量组为正交向量组.

定理 3.1

向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 正交向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 必线性无关.

2. 正交向量组

定义 3.5

称两两正交的一组非零向量构成的向量组为正交向量组.

定理 3.1

向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 正交向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 必线性无关.

证明 设有实数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$ 成立, 用 α_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 对上式作内积得到

$$k_1(\alpha_i, \alpha_1) + k_2(\alpha_i, \alpha_2) + \cdots + k_i(\alpha_i, \alpha_i) + \cdots + k_m(\alpha_i, \alpha_m) = 0.$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 两两正交, 所以 $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$, 对 $i \neq j$, 故 $k_i(\alpha_i, \alpha_i) = 0$, 因 $\alpha_i \neq 0$, 故 $k_i = 0 (i = 1, 2, ..., m)$. 这样 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

- 由此定理知道，在 $\mathbb{R}^n$ 中 n 个两两正交的非零向量组一定线性无关，从而是一组基.

定义 3.6

设在内积向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中，若 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为正交向量组，则他们构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基称为一组正交基. 若正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 中各 α_i 均为单位向量，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 称为标准正交基.

- 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为标准正交基当且仅当

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

成立.

- 比如，在 3 维空间中，$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 就是一组标准正交基. 在 $\mathbb{R}^n$ 中，
- $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, \varepsilon_n = (0, 0, \cdots, 0, 1)$ 是一组标准正交基.

例题 3.1

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的任一组标准正交基, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$, 证明: $k_i = (\alpha_i, \alpha)$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

证明 用 α_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 与 α 作内积, 由于 $(\alpha_i, \alpha_j) = 0 (i \neq j)$, $(\alpha_i, \alpha_i) = 1$, 得到

$$\begin{aligned}(\alpha_i, \alpha) &= (\alpha_i, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n) \\ &= (\alpha_i, k_i\alpha_i) = k_i(\alpha_i, \alpha_i) \\ &= k_i.\end{aligned}$$

- 此例题表明, 在标准正交基下, 向量的坐标容易依下式算出来:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha)\alpha_1 + (\alpha_2, \alpha)\alpha_2 + \cdots + (\alpha_n, \alpha)\alpha_n.$$

- 而且向量的内积，长度表达式变得简单.

性质 3.3

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ 在这组基下的坐标分别为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，则

(1) $(\alpha, \beta) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$,

(2) $|\alpha|^2 = (\alpha, \alpha) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$.

- 下面我们讨论，如何从已知的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,构造出一组标准正交基$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 来. 这个问题等价于下面的两个问题.
- 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 n 维内积空间的一组基.

  (1) 求与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$等价的正交基$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$;

  (2) 求与正交基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$等价的标准正交基$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$.
- 问题 (1) 称为将 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$正交化;
- 问题 (2) 称为将 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$单位化（或标准化), 这只需要令

$$\eta_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|}, \eta_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|}, \cdots, \eta_n = \frac{\beta_n}{|\beta_n|}.$$

用下述, 施密特正交化方法可以回答问题 (1).

定理 3.2

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 n 维内积空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 令

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1, \\
\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\beta_1, \alpha_2)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1, \\
&\vdots \\
\beta_n &= \alpha_n - \frac{(\beta_1, \alpha_n)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\beta_2, \alpha_n)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\beta_{n-1}, \alpha_n)}{(\beta_{n-1}, \beta_{n-1})}\beta_{n-1}
\end{aligned}
$$

则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是 n 维内积空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组正交基.

用下述, 施密特正交化方法可以回答问题 (1).

定理 3.2

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 n 维内积空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 令

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1, \\
\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\beta_1, \alpha_2)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1, \\
&\vdots \\
\beta_n &= \alpha_n - \frac{(\beta_1, \alpha_n)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\beta_2, \alpha_n)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\beta_{n-1}, \alpha_n)}{(\beta_{n-1}, \beta_{n-1})}\beta_{n-1}
\end{aligned}$$

则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是 n 维内积空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组正交基.

证明 只需要证明 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 为两两正交的向量组即可. 我们用数学归纳法来证明这一点. 当 $n = 2$ 时,

$$(\beta_1, \beta_2) = (\beta_1, \alpha_2 - \frac{(\beta_1, \alpha_2)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1) = (\beta_1, \alpha_2) - \frac{(\beta_1, \alpha_2)}{(\beta_1, \beta_1)}(\beta_1, \beta_1) = 0,$$

即 β_1, β_2 两两正交.

归纳假设当 $n = k$ 时, 结论成立. 来看 $n = k + 1$ 的情形. 我们有

$$\beta_{k+1} = \alpha_{k+1} - \sum_{s=1}^{k} \frac{(\beta_s, \alpha_{k+1})}{(\beta_s, \beta_s)} \beta_s,$$

由归纳假设 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ 两两正交, 因此对 $i = 1, 2, \cdots, k$ 有

$$(\beta_i, \beta_{k+1}) = (\beta_i, \alpha_{k+1}) - \sum_{s=1}^{k} \frac{(\beta_s, \alpha_{k+1})}{(\beta_s, \beta_s)} (\beta_i, \beta_s) = (\beta_i, \alpha_{k+1}) - (\beta_i, \alpha_{k+1}) = 0.$$

因此 β_{k+1} 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ 都正交, 从而 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k, \beta_{k+1}$ 两两正交, 即当 $n = k + 1$ 时结论成立. 故由数学归纳法原理知, 对任意的 n, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 为两两正交的.

由于 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 和与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 都是 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的基, 显然它是等价的, 从而可以互相线性表出. 这也可以从定理 3.2 中的式子很容易看出来.

例题 3.2

在内积空间 $\mathbb{R}^4$ 中已给

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= (1,1,1,1),\\
\alpha_2 &= (3,3,1,1),\\
\alpha_3 &= (1,9,1,9),\\
\alpha_4 &= (4,0,0,0).
\end{aligned}
$$

把它们标准正交化.

解:

首先将其正交化. 取 $\beta_1 = \alpha_1 = (1,1,1,1)$.

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 = \alpha_2 - \tfrac{8}{4}\beta_1 = (1,1,-1,-1).$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2 = \alpha_3 - \tfrac{20}{4}\beta_1 - \tfrac{0}{4}\beta_2 = (-4,4,-4,4),$$

$$\begin{aligned}\beta_4 &= \alpha_4 - \frac{(\alpha_4,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_4,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2 - \frac{(\alpha_4,\beta_3)}{(\beta_3,\beta_3)}\beta_3 \\ &= \alpha_4 - \tfrac{4}{4}\beta_1 - \tfrac{4}{4}\beta_2 + \tfrac{16}{64}\beta_3 = (1,-1,-1,1).\end{aligned}$$

即得正交向量组

$$\begin{aligned}\beta_1 &= (1,1,1,1),\\ \beta_2 &= (1,1,-1,-1),\\ \beta_3 &= (-4,4,-4,4),\\ \beta_4 &= (1,-1,-1,1).\end{aligned}$$

其次，将 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 单位化得

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \frac{1}{2}(1,1,1,1),\\
\eta_2 &= \frac{1}{2}(1,1,-1,-1),\\
\eta_3 &= \frac{1}{2}(-1,1,-1,1),\\
\eta_4 &= \frac{1}{2}(1,-1,-1,1).
\end{aligned}$$

若以 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 为列向量，得到一个 4 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

它的列是两两正交的，容易验证$A^TA=AA^T=E$，我们称它是一个正交矩阵.

3. 正交矩阵

定义 3.7

若 n 阶实矩阵 A 满足

$$A^TA = AA^T = E,$$

则称为一个正交矩阵.

n 阶正交矩阵 A 有下列性质:

- (1) A 是可逆的, 且 $A^{-1} = A^T$;
- (2) A^{-1}, A^T 也是正交矩阵;
- (3) $|A| = \pm 1$;
- (4) 正交矩阵的乘积仍是正交矩阵.

证明作为练习.

定理 3.3

设 A 为 n 阶实方阵, 且 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 则 A 是正交矩阵的充分必要条件是列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

定理 3.3

设 A 为 n 阶实方阵，且 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则 A 是正交矩阵的充分必要条件是列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

证明 由于

$$A^TA=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix}.$$

这里 α_i 为列向量，由内积的定义易知 $\alpha_i^T\alpha_j=(\alpha_i,\alpha_j)$. 则

$$A^TA=E\Longleftrightarrow(\alpha_i,\alpha_j)=\alpha_i^T\alpha_j=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

即 A 是正交矩阵的充分必要条件是列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

4. 实对称矩阵的对角化

定理 3.4

实对称矩阵的特征值都是实数.

证明 设 $A=(a_{ij})_n$ 是 n 阶实对称阵, λ 是 A 的任意一个特征值, $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是属于 λ 的任一特征向量, 于是有 $A\alpha=\lambda\alpha$. 两边取共轭得 $\overline{A}\overline{\alpha}=\overline{\lambda}\overline{\alpha}$, 但 A 是实矩阵, $\overline{A}=A$, 故有 $A\overline{\alpha}=\overline{\lambda}\overline{\alpha}$, 用 α^T 左乘上式两端得到 $\alpha^T A\overline{\alpha}=\overline{\lambda}\alpha^T\overline{\alpha}$, 因为 $A=A^T$, $\alpha^T A\overline{\alpha}$ 和 $\alpha^T\overline{\alpha}$ 是数, 于是又有

$$\begin{aligned}\alpha^T A\overline{\alpha} &= (\alpha^T A\overline{\alpha})^T=\overline{\alpha}^T A\alpha=\overline{\alpha}^T\lambda\alpha\\ &=\lambda\overline{\alpha}^T\alpha=\lambda(\overline{\alpha}^T\alpha)^T=\lambda\alpha^T\overline{\alpha}.\end{aligned}$$

于是 $\lambda\alpha^T\overline{\alpha}=\overline{\lambda}\alpha^T\overline{\alpha}$, 从而

$$(\lambda-\overline{\lambda})\alpha^T\overline{\alpha}=0.$$

又因 α 是非零向量, $\alpha^T\overline{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\overline{x_i}x_i\neq 0$. 故 $\lambda=\overline{\lambda}$. 即 λ 是一个实数.

- 由上面的定理, 实对称矩阵 A 的特征值均为实数, 所以齐次线性方程组 $(A-\lambda_i E)X=0$ 为实系数方程组, 由于 $|A-\lambda_i E|=0$, 齐次线性方程组 $(A-\lambda_i E)X=0$ 必有实的基础解系, 从而对应的特征向量可以取实向量.
- 明显地, 定理 3.4 的逆命题不成立.

定理 3.5

实对称矩阵 A 的对应于不同特征值的特征向量必正交.

定理 3.5

实对称矩阵 A 的对应于不同特征值的特征向量必正交.

证明 设 α_1, α_2 分别是 A 的对应于不同特征值 λ_1, λ_2 的 (实) 特征向量, 即:

$$A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i \quad (\alpha_i \neq 0, \quad i = 1, 2).$$

作内积

$$(A\alpha_1, \alpha_2) = (\lambda_1 \alpha_1, \alpha_2) = \lambda_1 (\alpha_1, \alpha_2).$$

另一方面,

$$(A\alpha_1, \alpha_2) = (A\alpha_1)^T \alpha_2 = \alpha_1^T A^T \alpha_2 = \alpha_1^T A \alpha_2 = (\alpha_1, A\alpha_2)$$

$$= (\alpha_1, \lambda_2 \alpha_2) = \lambda_2 (\alpha_1, \alpha_2).$$

于是, $\lambda_1(\alpha_1, \alpha_2) = \lambda_2(\alpha_1, \alpha_2)$. 然而 λ_1, λ_2 是两个不同的特征值, 所以 $(\alpha_1, \alpha_2) = 0$, 即 α_1 与 α_2 是正交的.

定理 3.6

设 A 是一个 n 阶实对称矩阵, 则存在正交矩阵 T, 使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.

定理 3.6

设 A 是一个 n 阶实对称矩阵, 则存在正交矩阵 T, 使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.

证明 对 A 的阶数 n 作数学归纳.

当 $n = 1$ 时, 结论显然成立.

假设对于 $n-1$ 阶的实对称矩阵上述结论成立, 下证对 n 阶矩阵同样成立.

设 λ 是 A 的一个特征值, 由定理 3.4 知, λ 为实数. 设 α 是 A 的对应于 λ 的一个实特征向量, 有 $A\alpha = \lambda\alpha$. 因为特征向量的非零倍数仍然是特征向量, 将 α 单位化, 有:

$$\alpha_1 = \frac{1}{|\alpha|}\alpha.$$

于是, $A\alpha_1 = \lambda\alpha_1$. 以 α_1 为第一列作一个正交矩阵 $T_1 = (\alpha, S)$(由施密特正交化方法知道, T_1 的存在性显然, S 为 $n \times (n-1)$ 矩阵), 则 $A^T = A$, $T_1^T = T_1^{-1}$. 于是有

$$T_1^{-1}AT_1 = T_1^TAT_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ S^T \end{pmatrix} A(\alpha_1, S) = \begin{pmatrix} \alpha_1^TA\alpha_1 & \alpha_1^TAS \\ S^TA\alpha_1 & S^TAS \end{pmatrix}.$$

由于 $A\alpha_1 = \lambda\alpha_1$ 及 T_1 的正交性, $\alpha_1^TA\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1^T\alpha_1$, $S^TA\alpha_1 = \lambda_1S^T\alpha_1 = 0$, $\alpha_1^TAS = (S^TA\alpha_1)^T = 0$.

这样,

$$T_1^TAT_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

其中, $A_1 = S^TAS$ 为 $n-1$ 阶实对称矩阵.

根据归纳假设，有一个 $n-1$ 阶正交矩阵 T_2，使得 $T_2^{-1}AT_2 = \mathrm{diag}(\lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n)$ 为对角矩阵.

取 n 阶正交矩阵 $T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$，则有

$$T_3^{-1}(T_1^{-1}AT_1)T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdot$$

令 $T = T_1T_3$，则 T 仍然为正交矩阵. 有

$$T^{-1}AT = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

根据数学归纳法原理，定理成立.

有了上面的分析，下一步我们就着手介绍使实对称矩阵 A 对角化的正交矩阵的求法：

- (1) 求出 A 的全部特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ 和对应于每一个 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, t)$ 的特征向量 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{is_i}$;
- (2) 将对应于 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, t)$ 的特征向量 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{is_i}$ 正交化和单位化，记为 $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \cdots, \eta_{is_i}$，它们仍然是属于 λ_i 的线性无关的特征向量;
- (3) 由定理 3.5 知，将经过上一步处理的所有的特征向量合并之后的向量组仍然是正交的单位向量组，且所含的向量总个数仍为 n，以这 n 个向量为列向量作成的矩阵 T 就是所求的正交矩阵.

例题 3.2 实际上就是一个关于实对称矩阵的例子.

例题 3.3

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

求正交矩阵 T, 使 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.

例题 3.3

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

求正交矩阵 T, 使 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.

解 在例题 3.2 中已求得对于特征值 -1, 求得 $(-E-A)X=0$ 的一个基础解系:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

将 α_1, α_2 正交化, 令

$$\beta_1 = \alpha_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

将 β_1, β_2 分别单位化, 有:

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}.$$

对于特征值 5, 求得一个基础解系:

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

将 α_3 单位化, 有:

$$\eta_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

取

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix},$$

则 T 为正交矩阵, 并且有:

$$T^{-1}AT = \mathrm{diag}(-1, -1, 5).$$

例题 3.4

证明: 设 A 和 B 都是 n 阶实对称矩阵, 若 $A \sim B$, 则存在正交矩阵 T, 使得 $T^{-1}AT = B$.

例题 3.4

证明: 设 A 和 B 都是 n 阶实对称矩阵, 若 $A \sim B$, 则存在正交矩阵 T, 使得 $T^{-1}AT = B$.

证明 由性质 2.1(2), A 和 B 有相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ (λ_i 不必各不相同). 又由定理 3.6, 存在正交矩阵 T_1 和 T_2, 使得

$$T_1^{-1}AT_1 = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = T_2^{-1}BT_2.$$

于是

$$T_2T_1^{-1}AT_1T_2^{-1} = B,$$

取 $T = T_1T_2^{-1}$, 知 T 仍是正交矩阵, 且 $T^{-1} = T_2T_1^{-1}$, 这样就有,

$$T^{-1}AT = B.$$

本章作业 P149

1(2)(4); 2(2); 3; 9(2)(4); 14(1)(3); 15; 17; 19; 21; 23