习题：10.4

2015年6月15日 15:32

A

1)、回答下列问题.

(1). 级数 $\sum u_n(x)$ 在 I 上点态收敛于 $S(x)$ 的意思是什么？

$\forall x\in I$, 数项级数 $\sum u_n(x)$ 收敛于 $S(x)$.

(2). 什么叫级数 $\sum u_n(x)$ 的收敛域和发散域？

收敛的点集构成收敛域,

发散的点集构成发散域.

(3). 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$ 的定义是怎样的？

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N$ 与 x 无关, s.t $n>N$ 时有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

(4). 级数 $\sum u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$ 的定义是怎样的？

是指其部分和序列 $\{S_n(x)\}$ 一致收敛于 $S(x)$.

(5). 一致收敛与点态收敛有什么不同？

若序列 $\{f_n(x)\}$ 点态收敛到 $f(x)$；$\forall \varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon, x)$

s.t $n>N(\varepsilon, x)$ 时, $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

而序列 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛到 $f(x)$；$\forall \varepsilon>0$, $\exists N_\varepsilon$ s.t

$n>N_\varepsilon$ 时, $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ 对任何 $x\in I$ 成立.

即点态收敛的 N 不仅与 ε 有关也和 x 有关, 而一致收敛

的N仅与ε有关而与x无关.

2). 试用Weierstrass-M判别法证明下列级数在指定区间上一致收敛.

(1). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n}$ ， $\forall x\in\mathbb{R}$.

Pf: $\because \left|\frac{\cos nx}{2^n}\right|\le\frac{1}{2^n}$ 又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n}$ 一致收敛.

(2). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ ， $\forall x\in\mathbb{R}$

Pf: $\because \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$ 又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ 一致收敛.

(3). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{3/2}}$ ， $x\in[-1,1]$

Pf: $\because \forall x\in[-1,1]$ $\left|\frac{x^n}{n^{3/2}}\right|\le\frac{1}{n^{3/2}}$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛. $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{3/2}}$ 一致收敛.

(4). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-e^{-nx})}{n^2+x^2}$ ， $0\le x<+\infty$

Pf: $\because \left|\frac{(-1)^n(1-e^{-nx})}{n^2+x^2}\right|=\left|\frac{1-e^{-nx}}{n^2+x^2}\right|\le\frac{1}{n^2+x^2}\le\frac{1}{n^2}$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-e^{-nx})}{n^2+x^2}$ 一致收敛.

3). 由定义讨论下列级数在指定区间一致收敛.

(1). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ ， $x\in\mathbb{R}$.

解：令其前n项和为$S_n(x)$. 由Leibnitz判别法中余项的估计：$|S_n(x)-S(x)|<\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}<\frac{x^2}{(n+1)x^2}<\frac{1}{n}$

$\therefore \forall \varepsilon>0$, 取$N_\varepsilon=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$. 则$n>N_\varepsilon$时有

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{1}{n}<\varepsilon \quad , \forall x\in R$$

$\therefore$ 级数一致收敛.

(2). $\sum_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n+1})$, $\forall x\in(0,1)$.

解：$\because S_n(x)=x-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}-\cancel{x^3}+\cdots+\cancel{x^n}-x^{n+1}$

$$=x-x^{n+1}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n(x)=x$ 我们证明不存在与ε无关的N. s.t 上极限成立. 否则：$\forall\varepsilon>0$. $\exists N$ s.t $n>N$时有

$$|S_n(x)-x|=x^{n+1}<\varepsilon \quad 对\ \forall x\in(0,1)成立.$$

不妨令$\varepsilon_0=\frac{1}{4}$. 又取定某个自然数$n_0>N$. 则

$$x^{n_0+1}<\frac{1}{4} \quad 对\ \forall x\in(0,1)成立.$$

又取 $x=2^{-\frac{1}{n_0+1}}$ 则 $(2^{-\frac{1}{n_0+1}})^{n_0+1}=\frac{1}{2}<\frac{1}{4}$ 矛盾.

故级数不一致收敛 #.

B

1). 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$在$[0,+\infty)$上一致收敛.

Pf：$\because e^{nx}=1+nx+\frac{1}{2}n^2x^2+\cdots+\frac{1}{n!}n^nx^n+R_n(x)$.

$\geq \frac{1}{2}n^2x^2 \quad \therefore e^{-nx} \leq \frac{2}{n^2x^2}$

$\therefore |x^2e^{-nx}| = \frac{x^2}{e^{nx}} \leq \frac{2x^2}{n^2x^2} = \frac{2}{n^2}$ 又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} x^2e^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛 #

27. 证明 $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,+\infty)$ 上逐点收敛于0，但不一致收敛.

Pf：$\because f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} \to 0$.

对任何给定的 $x\in[0,+\infty)$ 成立. $\therefore f_n(x)\to 0$ 逐点收敛.

若 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛到0，则 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N_\varepsilon$ 与 x 无关，s.t.

$n>N_\varepsilon$ 时有：$|f_n(x)-0|<\varepsilon$ 对任何 $x\in[0,+\infty)$ 成立.

取 $\varepsilon=\frac{1}{4}$，则 $\exists N_{\frac{1}{4}}$，当 $n>N_{\frac{1}{4}}$ 时有 $|f_n(\frac{1}{n})-0|$

$=\frac{1}{2}>\frac{1}{4}=\varepsilon$. 矛盾. 故 $\{f_n(x)\}$ 不一致收敛 #.