座位号________

专业班级________

学院________

学号________

姓名________

(密 封 线 内 不 答 题)

密 封 线

诚信应考,考试作弊将带来严重后果!

华南理工大学本科生期末考试

《工科数学分析(二)》

2016-2017 学年第二学期期末考试试卷 A 卷

参考答案

注意事项:

一、 开考前请将密封线内各项信息填写清楚;

二、 所有答案请直接答在试卷上;

三、 考试形式:闭卷;

四、 本试卷共 6 大题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
得 分							

一、 填空题:共 5 题,每题 3 分,共 15 分。

1. 函数 $f(x,y)=2x^2+y^2$ 在点 $(1,1)$ 处沿该点的梯度方向的方向导数为 $\underline{\quad 2\sqrt{5} \quad}$;

2. 向量场 $(2x-3y)\vec{i}+(3x-z)\vec{j}+(y-2x)\vec{k}$ 的旋度向量为 $\underline{\quad 2\vec{i}+2\vec{j}+6\vec{k} \quad}$;

3. 设 Σ 表示球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧,

   则第二类曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{\quad 4\pi R^3 \quad}$;

4. 1. 初值问题 $\begin{cases} y'+y\cos x=e^{-\sin x} \\ y|_{x=0}=1 \end{cases}$ 的解为 $\underline{\quad y=(1+x)e^{-\sin x} \quad}$;

5. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数,它在 $(-1,1]$ 上的表达式 $f(x)=\begin{cases} 2, & -1<x\leqslant 0, \\ x^3+1, & 0<x\leqslant 1, \end{cases}$

   则 $f(x)$ 的傅里叶 (Fourier) 级数在 $x=0$ 处收敛于 $\underline{\quad \frac{3}{2} \quad}$;

二、 单选题：共 5 题，每题 2 分，共 10 分

1. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（　　B　　）

   A. 连续，偏导数存在　　B. 不连续，偏导数存在

   C. 连续，偏导数不存在　D. 不连续，偏导数不存在

2. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\ x-y+z=1\end{cases}$ 在点 $M(1,2,2)$ 处的切线一定平行于（　　D　　）

   A. Oxy 平面　　B. Oyz 平面　　C. Ozx 平面　　D. 平面 $x-y+z=1$

3. 设 D 是一个有界的平面闭区域，其边界曲线 Γ 分段光滑，则下列积分值**不等于**区域 D 的面积的是（　　A　　）

   A. $\int\limits_{\Gamma} y\mathrm{d}x.$　　B. $\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$　　C. $\int\limits_{\Gamma} x\mathrm{d}y$　　D. $\iint\limits_{D} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

4. 微分方程 $(y-\sin x)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$ 是（　　B　　）

5. 使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛的常数 p 的取值范围是（　　C　　）

   A. $p\leqslant 0$　　B. $0<p<1$　　C. $0<p\leqslant 1$　　D. $p>1.$

三、 计算题：共 4 题，每题 7 分，共 28 分

1. 设函数 $u = f(x, y, z)$ 有连续的偏导数，函数 $y = y(x)$ 和 $z = z(x)$ 分别由方程 $e^{xy} = y$ 和 $e^z = xz$ 确定，计算 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

   解：在方程 $e^{xy} = y$ 两边取全微分，得

$$ye^{xy}\mathrm{d}x + xe^{xy}\mathrm{d}y = \mathrm{d}y.$$

   因此，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{ye^{xy}}{1 - xe^{xy}} = \frac{y^2}{1 - xy}.$$

   类似地，在方程 $e^z = xz$ 两边取全微分，得

$$e^z\mathrm{d}z = z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}z.$$

   所以，

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{z}{x + e^z} = \frac{z}{xz - x}.$$

   由复合函数求导法则，

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{y^2}{1 - xy} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{z}{xz - x}.$$

2. 计算累次积分 $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^x \sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y + \int_2^4 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^2 \sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$.

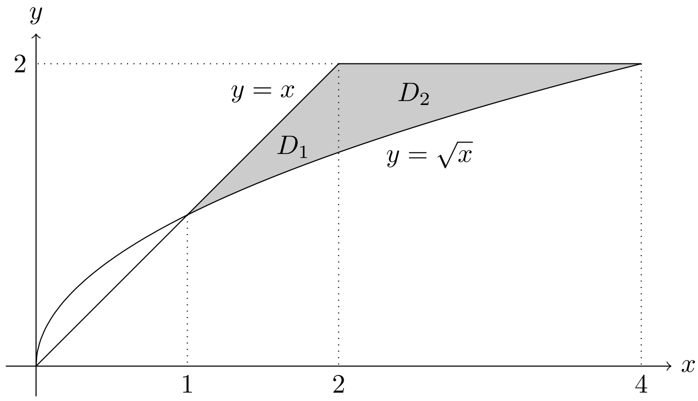
   解：

$$\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^x \sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y + \int_2^4 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^2 \sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} \sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} \sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

   其中 $D_1 = \{(x, y) : 1 \leqslant x \leqslant 2, \sqrt{x} \leqslant y \leqslant x\}$, $D_2 = \{(x, y) : 2 \leqslant x \leqslant 4, \sqrt{x} \leqslant y \leqslant 2\}$。

   如图示，$D_1 \cup D_2 = \{(x, y) : 1 \leqslant y \leqslant 2, y \leqslant x \leqslant y^2\}$. 因此，

$$\begin{aligned}\text{原积分} &= \iint\limits_{D} \sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_1^2 \mathrm{d}y \int_y^{y^2} \sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 -\frac{2}{\pi}y\cos\frac{\pi}{2}y\mathrm{d}y \\ &= \frac{4}{\pi^2}\left(1 + \frac{2}{\pi}\right).\end{aligned}$$



3. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=R^2, R>0$ 和锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的闭区域。

解：区域 Ω 在 xOy 平面上的投影为

$$D:=\left\{(x,y): x^2+y^2=\frac{R^2}{2}.\right\}$$

因此，

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{R^2}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\mathrm{d}z\\ &=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{R^2}{2}} R^2-2x^2-2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}(R^2-2r^2)r\mathrm{d}r\\ &=\frac{\pi}{8}R^4.\end{aligned}$$

4. 计算第二类曲线积分 $\int\limits_{\Gamma} xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x$，其中 Γ 为椭圆弧 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，取逆时针方向。

解：记 D 为 Γ 围成的闭区域。因为 xy^2 和 $-x^2y$ 都是区域 D 上有连续的偏导数，由 Green 公式，

$$\int\limits_{\Gamma} xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x+\int\limits_{\Gamma_1} xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x=\iint_D \frac{\partial xy^2}{\partial x}+\frac{\partial x^2y}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D x^2+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

利用广义极坐标换元 $x=2r\cos\theta, y=r\sin\theta, 0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，其 Jabobi 行列式的绝对值为

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=2r.$$

因此，

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D} x^2+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(4r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)\cdot 2r\mathrm{d}r\\ &=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}4\cos^2\theta+\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\\ &=5\pi.\end{aligned}$$

因此，

$$\int\limits_{\Gamma} xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x=\frac{5\pi}{2}.$$

四、 解答题：共 4 题，每题 8 分，共 32 分。

1. 设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=-e^x$ 的一个特解为 $y=(1+x)e^x$，试确定常数 α,β，并求该方程的通解。

   解：因为特解满足微分方程，我们有

$$((1+x)e^x)''+\alpha((1+x)e^x)'+\beta(1+x)e^x=-e^x$$

   对任意 x 恒成立，即

$$(1+\alpha+\beta)xe^x+(4+2\alpha+\beta)e^x=0$$

   对任意 x 恒成立。因此，

$$\begin{cases}1+\alpha+\beta=0,\\ 4+2\alpha+\beta=0.\end{cases}$$

   由此解得 $\alpha=-3,\beta=2.$

   二阶常系数线性微分方程 $y''-3y'+2y=-e^x$，相应的齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2-3\lambda+2=0$$

   此特征方程有两个实根 $\lambda=2,\lambda=1$。因此，微分方程 $y''-3y'+2y=-e^x$ 的通解为

$$y=C_1'e^{2x}+C_2'e^x+(1+x)e^x=C_1e^{2x}+C_2e^x+xe^x,$$

   其中 C_1,C_2 为任意常数。

2. 已知螺旋形弹簧一圈 Γ 的方程为：$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=bt,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$ 其中 a,b 为大于零的常数，且弹簧上各点处的线密度等于该点到 Oxy 平面的距离，求此弹簧的质心坐标。

   解：曲线 Γ 的弧长微元为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\mathrm{d}t=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}\mathrm{d}t=\sqrt{a^2+b^2}\mathrm{d}t.$$

   弹簧上 (x,y,z) 处的线密度为 $\rho(x,y,z)=z$，因此，弹簧的质量为

$$M=\int_\Gamma\rho(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\Gamma z\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}b\sqrt{a^2+b^2}t\mathrm{d}t=2\pi^2b\sqrt{a^2+b^2}.$$

   设弹簧的质心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，则

$$\begin{aligned}M\bar{x}&=\int_\Gamma x\rho(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\Gamma xz\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}ab\sqrt{a^2+b^2}t\cos t\mathrm{d}t=0,\\ M\bar{y}&=\int_\Gamma y\rho(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\Gamma yz\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}ab\sqrt{a^2+b^2}t\sin t\mathrm{d}t=-2\pi ab\sqrt{a^2+b^2},\\ M\bar{z}&=\int_\Gamma z\rho(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\Gamma z^2\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}b^2\sqrt{a^2+b^2}t^2\mathrm{d}t=\frac{8}{3}\pi^3b^2\sqrt{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

   因此，弹簧的质心坐标为

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(0,-\frac{a}{\pi},\frac{4\pi b}{3}\right).$$

3. 求上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2, z\geqslant 0$ 被柱面 $x^2+y^2=ax$ 截下的部分的面积。
解：上半球面的方程为
$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$
球面的面积微元为
$$\begin{aligned}\mathrm{d}S&=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$
因此，所求面积是
$$\begin{aligned}S&=\iint\limits_{\Sigma}1\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2\leqslant ax}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}r\mathrm{d}r\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^2(1-|\sin\theta|)\mathrm{d}\theta=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\mathrm{d}\theta\\&=a^2(\pi-2).\end{aligned}$$

4. 将函数 $f(x)=\arctan x$ 展开为 x 的幂级数。
解：因为 $f(x)=\arctan x$，所以
$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$
当 $-1<x<1$ 时，
$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$
对任意的 $x\in(-1,1)$，有
$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$
注意到 $f(0)=\arctan 0=0$。因此，当 $-1<x<1$ 时，有
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$
等式右端的幂级数的收敛域为 $[-1,1]$，但 $f(x)$ 在 $x=\pm 1$ 处都连续，因此，$f(x)$ 可展开为 x 的幂级数，
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1].$$

五、 证明题：共 2 题，每题 6 分，共 12 分。

1. 设函数 $f(\xi,\eta)$ 具有连续的二阶偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}=0$。

   证明：函数 $z=f(x^2-y^2,2xy)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

   证明：记 $\xi=x^2-y^2,\eta=2xy$，由复合函数求导法则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=2x\frac{\partial f}{\partial \xi}+2y\frac{\partial f}{\partial \eta},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=-2y\frac{\partial f}{\partial \xi}+2x\frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

   再求偏导数，得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=2\frac{\partial f}{\partial \xi}+2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+2y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\\
&=2\frac{\partial f}{\partial \xi}+2x\left(2x\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}+2y\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}\right)+2y\left(2x\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}+2y\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)\\
&=2\frac{\partial f}{\partial \xi}+4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}+8xy\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}+4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2},\\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=-2\frac{\partial f}{\partial \xi}-2y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\\
&=-2\frac{\partial f}{\partial \xi}-2y\left(-2y\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}+2x\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}\right)+2x\left(-2y\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}2x\right)\\
&=-2\frac{\partial f}{\partial \xi}+4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}-8xy\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}+4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}.
\end{aligned}$$

   因此，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}=0.$$

2. 证明：函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ 在区间 $(0,1)$ 上点态收敛，但不一致收敛。

   证明：函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ 的前 n 项和为

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(1-x)x^k=(1-x)\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=1-x^{n+1}.$$

   对于任意给定的 $x\in(0,1)$，

$$\lim_{n\to+\infty}x^{n+1}=0.$$

   因此，

$$\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=\lim_{n\to+\infty}(1-x^{n+1})=1.$$

   即，函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ 在区间 $(0,1)$ 上点态收敛于常值函数 1.

   但是，可以取到区间 $(0,1)$ 中的数列 $\left\{x_n=1-\frac{1}{n}\in(0,1),n=1,2,\ldots\right\}$ 使得

$$\lim_{n\to+\infty}|S_n(x_n)-1|=\lim_{n\to+\infty}\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}-1\right|=1-e^{-1}\neq 0.$$

   因此，函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ 不一致收敛。

六、 应用题：共 1 题，共 8 分。

求曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$ 上到 Oxy 平面距离最近的点。

解：这是一个约束优化问题。

目标函数：$z = x^2 + y^2$.

约束条件：$xy - 1 = 0$.

构造 Lagrange 函数

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(xy - 1).$$

曲线上到 Oxy 平面距离最近的点应满足方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda y = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y - \lambda x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(xy - 1) = 0. \end{cases}$$

解此方程组，得

$$(x, y, \lambda) = (1, 1, 2) \text{ 或} (-1, -1, 2).$$

当 $(x, y) = (1, 1)$ 时，$(1, 1, 2)$ 是曲线上的点，其到 Oxy 平面的距离为 2。

当 $(x, y) = (-1, -1)$ 时，$(-1, -1, 2)$ 是曲线上的点，其到 Oxy 平面的距离也为 2。

因此，$(1, 1, 2)$ 和 $(-1, -1, 2)$ 都是曲线上到 Oxy 平面距离最近的点，最近距离为 2。