习题：2.5

2014年12月30日 20:41

习题 2.5. A. B.

1. 略.

2. 证明数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \cdots \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \cdots$ 收敛, 并求其极限.

解1: 令 $x_1=\sqrt{2}$ $x_2=\sqrt{2x_1}$ $\cdots$ $x_n=\sqrt{2x_{n-1}}$ $\cdots$

则 $\{x_n\}$ 单调上升, 且有上界2. (归纳法)

$\therefore$ 可令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $x_n=\sqrt{2x_{n-1}}$ 两边令 $n\to\infty$

$\Rightarrow a^2=2a \Rightarrow a=0$ 或 $a=2$.

又 $\{x_n\}$ 单调上升, 且 $x_n>0$, $\forall n=1,2,\cdots$

$\therefore a=0$ 舍去. $\therefore a=2$ #.

解2: $\because x_1=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$

$$x_2=\sqrt{2\sqrt{2}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$$

$$x_3=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}$$

$$\cdots$$

$$x_n=\sqrt{2\sqrt{2\cdots\sqrt{2}}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}} = 2^{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n})}$$

$$= 2^{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}} = 2 \ \#.$$

3. 设 $a>0$. $0<x_1<\frac{1}{a}$. $x_{n+1}=x_n(2-ax_n)$ $(n=1,2,\cdots)$

证明 $\{x_n\}$ 收敛 并求 $\lim x_n$

证明$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Pf: $\because 0<x_1<\frac{1}{a}$. 假设$0<x_n<\frac{1}{a}$. 则

$$x_{n+1}-\frac{1}{a}=x_n(2-ax_n)-\frac{1}{a}=2x_n-ax_n^2-\frac{1}{a}$$

$$=-\frac{1}{a}[a^2x_n^2-2ax_n+1]=-\frac{1}{a}(ax_n-1)^2<0.$$

$\therefore \forall n, 0<x_n<\frac{1}{a}$. 即$\{x_n\}$有上界.

习题 2.5. A B_2.

又$\frac{x_{n+1}}{x_n}=2-ax_n=1+1-ax_n>1$. ($\because 0<x_n<\frac{1}{a}$)

$\therefore \{x_n\}$单调上升.

则$\{x_n\}$有极限. 令$A=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 则$x_{n+1}=x_n(2-ax_n)$

两边令$n\to\infty$. 则

$$A=A(2-aA)$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{a}.\ \#.$$

4. 设$x_1>0$. $x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}$ $n=1,2,\cdots$ 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在且值为$\sqrt{3}$.

Pf: 1°. 若$x_1=\sqrt{3}$. 则$x_1=x_2=\cdots=x_n=\cdots=\sqrt{3}$.

2°. 若$x_1>\sqrt{3}$. $\because f(x)=\frac{3(1+x)}{3+x}=\frac{3x+9-6}{x+3}$

$$=3-\frac{6}{x+3}\text{ 单调上升.}$$

$\therefore x_2=f(x_1)>f(\sqrt{3})=\sqrt{3}$

$\therefore x_2 = f(x_1) > f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ $= 3 - \frac{6}{x+3}$ 单调上升.

......

即 $x_n > \sqrt{3}$. 即 $\{x_n\}$ 有下界 $\sqrt{3}$.

又 $x_{n+1} - x_n = \frac{3 - x_n^2}{3 + x_n} < 0$. $\therefore \{x_n\}$ 单调下降.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$.

3°. 若 $x_1 < \sqrt{3}$. 则 $\{x_n\}$ ~~单调上升~~有上界 $\sqrt{3}$

又 $x_{n+1} - x_n = \frac{3 - x_n^2}{3 + x_n} > 0$. $\therefore \{x_n\}$ ~~本~~单调上升.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$ #.

B.

1. 设 $x_1 = 10$. $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 证明: $\{x_n\}$ 的极限存在, 并求极限.

习题 2.5. B. P_3.

解: 由归纳法易证 $\{x_n\}$ 单调下降.

$\therefore \{x_n\}$ 单调下降有下界. 从而令 $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. 且 $x_n > 0$. $\forall n \in$ ...

则 $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ 两边令 $n \to +\infty$. 则

$a = \sqrt{6 + a}$ $\Rightarrow a = 3$ #

2. 用 Cauchy 准则, 证明下数...

2. 用 Cauchy 准则，证明下数列的收敛性.

(1). $x_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n$. 其中 $|a_i| \le M$, $|q|<1$.

Pf: ∵ $x_n = \frac{a_0(1-q^{n+1})}{1-q}$　　$x_{n+p} = \frac{a_0(1-q^{n+p+1})}{1-q}$

∴ $|x_{n+p}-x_n| = \frac{|a_0|}{1-q}|\cancel{1}-q^{n+p+1}\cancel{-1}+q^{n+1}|$

$= \frac{|a_0|}{1-q}\cdot|q^{n+1}|\,|1-q^p|$

$< \frac{M}{1-q}|q|^{n+1}$.

∴ $\forall \varepsilon>0$. 令 $N \triangleq \left[\frac{\ln\frac{\varepsilon(1-q)}{M}}{\ln|q|}\right]+1$. 则 $n>N$ 时

$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$ 对于任何 $p\in N^+$ 成立 #.

(2). $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$

Pf: $|x_{n+p}-x_n| = \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|$

$\le \frac{1}{2^{n+1}}\left|1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{p-1}}\right|$

$= \frac{1}{2^{n+1}}\frac{1-(\frac{1}{2})^p}{1-\frac{1}{2}} < \frac{1}{2^n}$.

∴ $\forall\varepsilon>0$. 取 $N=[\ln(\frac{1}{\varepsilon})/\ln 2]+1$. 则 $n>N$ 时 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$ #.

习题 2.5. B. P4.

3. 对于数列 $\{x_n\}$, 若了...

3. 对于数列$\{x_n\}$，若子列$\{x_{2k}\}$与$\{x_{2k+1}\}$均收敛于 a，试用"$\varepsilon-N$"语言证明$\{x_n\}$也收敛于 a。

Pf: $\forall \varepsilon>0$，$\because \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k}=a$，$\therefore \exists N_1$，s.t. $2k>N_1$时 有 $|x_{2k}-a|<\varepsilon$ (1) 又 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1}=a$，$\therefore \exists N_2$，s.t. $2k+1>N_1$时，有 $|x_{2k+1}-a|<\varepsilon$ (2)

取 $N=\max([\frac{N_1}{2}]+1, [\frac{N_2-1}{2}]+1)$，则 $n>N$时，总有 $|x_n-a|<\varepsilon$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ #

4. 证明：若f(x)为定义于$[a,+\infty)$上的单调增加函数，则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在 $\Leftrightarrow$ f(x)在$[a,+\infty)$上有上界。

Pf: "$\Rightarrow$" 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，对 $\varepsilon_0=1$，有 x_0 s.t. $x>x_0$时，$|f(x)-A|<\varepsilon_0 \Rightarrow$ $~~|f(x)|=|f(x)-A+A| \le |f(x)-A|+|A|~~$

$f(x)\le A+1$.

又 f(x)单调上升，$\therefore \forall x\in[a, x_0]$ $~~=|A|+1~~$

则 $f(x)\le f(x_0+1)<A+1$.

"$\Leftarrow$"，令 $S=\{f(x)\mid x\in[a,+\infty)\}$

则S非空有上界，$\therefore$有上确界 令 $A=\sup S$.

则 1° $\forall x\in[a,+\infty)$，$f(x)\le A$.

2° $\forall \varepsilon>0$，$\exists x_\varepsilon$ s.t. $f(x_\varepsilon)>A-\varepsilon$ ~~则 $\exists x_n$ s.t. $f(x_n)>A-\frac{1}{n}$~~

~~特取 $\varepsilon=\frac{1}{n}$~~，~~取 $x\to$~~，则 $\exists x_n$ s.t.

~~又取~~ $\lim f(x)$ $\forall n$. ~~取~~ $\varepsilon = \frac{1}{n}$. 则 $\exists x_n$ s.t.

$f(x_n) > A - \frac{1}{n}$. $\Rightarrow |f(x_n) - A| < \frac{1}{n}$.

习题 2.5. B P5.

$\therefore \forall \varepsilon > 0$. 取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$. 则 $n > N$ 时有

$|f(x_n) - A| < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

又 $f(x)$ 单调上升. $\therefore$ 当 $x > x_{N+1}$ 时有 $f(x) \geq f(x_{N+1})$.

$\therefore A - \varepsilon < f(x_n) \leq f(x) \leq A < A + \varepsilon$

$\therefore |f(x) - A| < \varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ ※.