习题：2.7

2014年12月30日 20:51

习题 2.7. A. P1.

(2). 对于自变量的改变量 Δx, 令 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$, 称 Δy 为 $f(x)$ 在 x_0 点的改变量. 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$ 可否确定 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点连续?

答: 可以.

$\because \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) = f(x_0)$.

、试确定 A, B, 使函数

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)^{\frac{1}{x}} & x>0 \\ B & x=0 \\ x\sin\frac{1}{x} + A & x<0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续.

解: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)^{\frac{1}{x}} \xlongequal{令y=-x} \lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{-\frac{1}{y}} = \frac{1}{e}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x\sin\frac{1}{x} + A) = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to 0} A = A$.

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 则 $f(0^+) = \frac{1}{e} = f(0^-) = A = B$.

$\therefore A = B = e^{-1}$. #

设 $f(x) = \begin{cases} a+bx & x\le 0 \\ \frac{\sin bx}{x} & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续. 问 a, b 应满足什么关系?

解: $f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+}(a+bx) = a$

$f(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin bx}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin bx}{bx}\cdot b = b$

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 则 $f(0) = f(0^+) = f(0^-)$

$\therefore a = b$ #

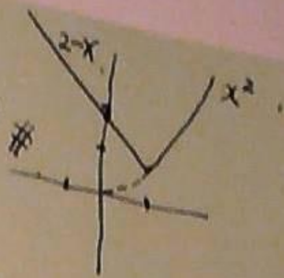
设 $f(x) = \begin{cases} 2-x & x<0 \end{cases}$

设 $f(x)=\begin{cases}2-x & x<1\\ x^2 & x>1\end{cases}$

(1). 画出f(x)的图形 (2) 怎样定义f(1)，使得f(x)在R上连续？

习题2.7. A P2.

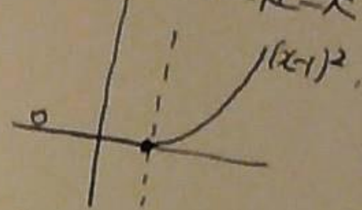
解：如图，定义 $f(1)=1$ 即可#



设 $f(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ (x-1)^2 & x>1.\end{cases}$

(1). 画出f(x)的图形 (2). 怎样定义f(1)，使得f(x)在R上连续？

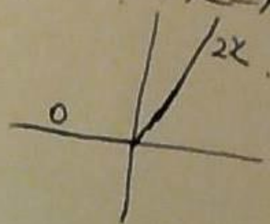
解：如图，定义 $f(1)=0$ 即可#



设 $f(x)=x+|x|$

(1). 画出f(x)的图形. (2). f(x)在x=0是否连续？

解：$f(x)=\begin{cases}2x & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$



如图f(x)在x=0处连续#

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0.\end{cases}$ 问x=0是否为f(x)的可去间断点？

答：不是，振荡间断点#

(2). 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0.\end{cases}$ 问x=0是否为f(x)的间断点，若是，指出类型.

答：∵ $f(0+)=f(0-)=0\neq f(0)=1$ 是可去间断点

判断下列函数的间断点……

$f(0)=0 \neq f(0)=1$. 是可去间断点 #.

3. 判断下列函数间断点的类型

(1). $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2}}$ $x=0$

$\because f(x)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$ $\therefore$ $f(0^+)=1$, $f(0^-)=-1$. 跳跃间断点.

习题2.7. A. P3.

(2). $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$. $x=0$

$\because f(0^+)=+\infty$. $f(0^-)=0$. $\therefore x=0$ 为无穷间断点 #

(3). $f(x)=\frac{1}{x+1}$ $x=-1$.

$\because f(-1^+)=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{1}{x+1}=+\infty$.

$f(-1^-)=\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{1}{x+1}=-\infty$

$\therefore x=0$ 为无穷间断点.

(4). $f(x)=\arctan e^{\frac{1}{x}}$. $x=0$

$\because f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan e^{\frac{1}{x}}=\frac{\pi}{2}$.

$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan e^{\frac{1}{x}}=0$.

$\therefore x=0$ 为跳跃间断点. #

4. 设 $x=a$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点, 设 $a\neq x$ 时, $g(x)=f(x)$. 并设 $g(a)=\lim\limits_{x\to a}f(x)$. 证明: $g(x)$ 在 a 处连续

Pf: 只需证 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$.

证：只需证 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)$.

$\because$ $g(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$. $\therefore \forall \varepsilon>0$. $\exists \delta>0$. s.t $0<|x-a|<\delta$ 时

有 $|g(x)-g(a)|=|f(x)-g(a)|<\varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)$. #.

. 设法利用补充定义的方法，使下列函数在R上连续.

(1). $f(x)=\dfrac{x^3-27}{x-3}=x^2+3x+9$.

$\therefore \lim\limits_{x\to 3} f(x)=9+9+9=27$. 定义 $f(3)=27$ 即可 #.

习题2.7. A. P4.

(2). $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$. $\therefore$ 令 $f(0)=\dfrac{1}{2}$ 即可 #.

B.

1. 证明 $f(x)=\cos x\in C(-\infty,+\infty)$.

pf: $f(x_0+h)=\cos(x_0+h)$

$=\cos x_0\cos h-\sin x_0\sin h$.

$\therefore \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\lim\limits_{h\to 0}\cos(x_0+h)$

$=\cos x_0-\lim\limits_{h\to 0}\sin x_0\sin h$

$=\cos x_0=f(x_0)$. #.

2. 判断下列函数间断点类型

(1). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1} & x\neq 0.\end{cases}$

(1). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cdots}{e^{\frac{1}{x}}-1} & x\neq 0.\\ 0 & x=0.\end{cases}$

∵ $f(0^+)=1$. $f(0^-)=-1$. ∴ $x=0$ 为跳跃间断点. #

(2). $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx}{1+nx^2}$ $x=0$

~~$f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq$~~

若 $x=0$、则 $f(x)=0$.

若 $x\neq0$. 则 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx}{1+nx^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{\frac{1}{n}+x^2}=\dfrac{1}{x}$.

∴ $f(0^+)=+\infty$. $f(0^-)=-\infty$.

∴ $x=0$ 为无穷间断点.

设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，试找出$f(x)$的间断点.

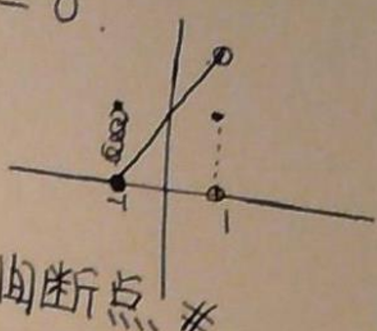
解：易见 $f(0)=1$.

若 $|x|<1$. 则 $f(x)=1+x$.

习题 2.7. B P5.

若 $|x|>1$. 则 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=0$.

∴ $f(x)=\begin{cases}0 & |x|>1 \quad x=-1.\\ 1+x & |x|<1.\\ 1 & x=1\end{cases}$



如图. ~~…~~ $x=1$ 均为跳跃间断点 #

试确定 a、b 的值. 使 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$. 可去间断点 $x=1$.

解：若 $x=0$ 为无穷间断点.

间断点

解：若 $x=0$ 为无穷间断点、

则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)} = \infty$.

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} \frac{(x-a)(x-1)}{e^x-b} = 0$. 即 $a=0$. $b\neq 1$ 即可.

若 $x=1$ 为可去间断点、则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 应当存在.

又 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)} \overset{t=x-1}{=\!=} \lim\limits_{t\to 0} \frac{e^{t+1}-b}{(t+1-a)t}$

则应有 $a\neq 1$. $b=e$. $\therefore$ 此时 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{e(e^t-1)}{(t+1-a)t} = \frac{e}{1-a}$ #.