无穷级数习题课

一. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 则级数

(A) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛.

(B) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$收敛.

(C) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$收敛.

(D) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n+a_{n+1}}{2}$收敛.

D.

一. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 则级数

(A) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛.

(B) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$收敛.

(C) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$收敛.

(D) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n+a_{n+1}}{2}$收敛.

D.

二. 设有两个数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 则

(A) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛.

(B) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$发散.

(C) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$收敛.

(D) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$发散.

C.

二. 设有两个数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$, 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 则

(A) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛.

(B) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$发散.

(C) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$收敛.

(D) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$发散.

C.

三. 设数列$\{a_n\}$单调减少, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $S = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k (n = 1, 2, \cdots)$无界, 则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$的收敛域为

(A) (-1,1].

(B) [-1,1).

(C) [0,2).

(D) (0,2].

C.

三. 设数列$\{a_n\}$单调减少, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $S = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k (n = 1, 2, \cdots)$无界, 则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$的收敛域为

(A) (-1,1].

(B) [-1,1).

(C) [0,2).

(D) (0,2].

C.

四. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛, 则$x=\sqrt{3}$与$x=3$依次为幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$的

(A) 收敛点, 收敛点.

(B) 收敛点, 发散点.

(C) 发散点, 收敛点.

(D) 发散点，发散点.

B.

四. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛, 则$x=\sqrt{3}$与$x=3$依次为幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$的

(A) 收敛点, 收敛点.

(B) 收敛点, 发散点.

(C) 发散点, 收敛点.

(D) 发散点，发散点.

B.

五. 设$f(x) = |x - \frac{1}{2}|$, $b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi dx (n = 1, 2, \cdots)$, 令$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, 则$S(-\frac{9}{4}) =$ ____

(A) $\frac{3}{4}$.

(B) $\frac{1}{4}$.

(C) -$\frac{1}{4}$.

(D) -$\frac{3}{4}$.

C.

五. 设$f(x) = |x - \frac{1}{2}|$, $b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx (n = 1, 2, \cdots)$, 令$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, 则$S(-\frac{9}{4}) =$ ____

(A) $\frac{3}{4}$.

(B) $\frac{1}{4}$.

(C) -$\frac{1}{4}$.

(D) -$\frac{3}{4}$.

C.

六. 已知函数$f(x)$可导, 且$f(0)=1, 0<f'(x)<\frac{1}{2}$, 设数列$\{x_n\}$满足$x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$, 证明:

(1) 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$绝对收敛

(2) $\lim_{n\to\infty} x_n$存在, 且$0<\lim_{n\to\infty} x_n<2$

七. 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$的收敛域及和函数.

八. 设$f(x)$在点$x=0$的某个邻域内具有二阶连续导数, 且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$绝对收敛.

9. 将函数$f(x) = 2 + |x|(-1 \le x \le 1)$展开为以2为周期的Fourier级数, 并由此求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$的和.