线性代数与解析几何

第五章 特征值与特征向量

§ 5.2 相似矩阵及矩阵可对角化条件

- 在第二章第一节, 我们学习了矩阵的乘法. 对于矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

我们可以轻松地算知

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -5 & 14 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} -11 & 38 \\ -19 & 46 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} -49 & 130 \\ -65 & 146 \end{pmatrix},$$

- 计算 A^{100}，怎么办?
- 是否存在一种简单易行的方法呢?
- 这就是我们要介绍的对角化方法.

单考虑上面的矩阵, 我们可以找到一个可逆矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = B.$$

这样, $A = PBP^{-1}$, $\quad A^k = (PBP^{-1})(PBP^{-1}) \cdots (PBP^{-1}) = PB^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} P^{-1}$. 于是我们可以轻而易举地算出,

$$\begin{aligned} A^{100} &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{101} - 3^{100} & -2^{101} + 2 \cdot 3^{100} \\ 2^{100} - 3^{100} & -2^{100} + 2 \cdot 3^{100} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

介绍对角化方法前，我们首先给出矩阵相似的定义.

定义 2.1

设 A, B 都是 n 阶矩阵, 如果存在可逆矩阵 P, 使得

$$B = P^{-1}AP,$$

我们就说 A 相似于 B, 记为 $A \sim B$.

相似关系是矩阵之间的一种关系, 它有如下三个性质.

- 反身性: $A \sim A$.
- 对称性: 如果 $A \sim B$, 那么 $B \sim A$.
- 传递性: 如果 $A \sim B$, $B \sim C$, 那么 $A \sim C$.

性质 2.1

如果 A, B 相似, 即存在可逆矩阵 P, 使得 $B = P^{-1}AP$, 则

(1) $|A| = |B|$;

(2) A 和 B 有相同的特征多项式和特征值;

(3) $tr(A) = tr(B)$ 且有 $r(A) = r(B)$;

(4) 如果 $f(x)$ 是一个多项式, 那么 $f(B) = P^{-1}f(A)P$;

(5) $A^T \sim B^T$; 且若 A 可逆, 则 $A^{-1} \sim B^{-1}$ 及 $A^* \sim B^*$.

定义 2.2

如果矩阵 A 和一个对角阵相似，我们就称 A 可对角化。

- 是不是每一个矩阵都可对角化?
- 前面已知，矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ 可以对角化。
- 有了相似矩阵的定义及性质, 就可以给出矩阵可对角化的条件了.
- 对角阵 Λ 可以表示为 $\Lambda = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 Λ 的主对角元素.

定理 2.1

n 阶矩阵 A 可对角化的充要条件是: A 有 n 个线性无关的特征向量.

证明 充分性: 设 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 它们所对应的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ (λ_i 不必各不相同), 于是有:

$$A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为列向量构成一个矩阵 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$. 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关, 知 $r(P) = n$, $|P| \neq 0$, 所以 P 可逆. 又

$$AP = A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \cdots, \lambda_n\alpha_n) = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

所以

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

即矩阵 A 与对角矩阵相似, A 可对角化.

必要性:

设 A 可对角化, 即存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n),$$

即 $AP = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$. 令 P 的列向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 从而

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

故有

$$A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

因为 P 可逆, 知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 都不为零向量, 且线性无关. 由定义知, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是分别对应于 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的特征向量.

- 定理的证明过程蕴含了矩阵对角化的算法，主要是矩阵 P 的求解。
- 结合上一节特征值、特征向量的求法，就可以判断一个 n 阶矩阵 A是不是可以对角化. 只需将求得的线性无关的特征向量合并起来组成一个向量组,

  [1] 如果向量组中向量的个数等于n, 则 A 可对角化;

  [2] 如果向量组中向量的个数小于n, 则 A 不可对角化.
- 如果是情形 [1], 就将所求得的 n 个无关的特征向量作为列向量作成矩阵 P, P 就是一个可以对角化 A 的可逆矩阵, 满足

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

- 以上节的例 1.1 为例, 矩阵 $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值为 1,-1.
- 对应于 1 的特征向量是

$$k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k_1 \neq 0);$$

- 对应于 -1 的特征向量是

$$k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -19 \end{pmatrix} \quad (k_2 \neq 0).$$

- 由于线性无关的特征向量的个数小于 3, 故 A不可对角化.

例题 2.1

已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

问 A 能否对角化? 在可对角化的情况下, 求出使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵的可逆矩阵 P.

例题 2.1

已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}.$$

问 A 能否对角化? 在可对角化的情况下, 求出使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵的可逆矩阵 P.

解 A 的特征方程为: $|\lambda E-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2=0$. 故 A 的特征值为 $5,-1$(二重).

将 $\lambda=5$ 和 $\lambda=-1$ 分别带入齐次线性方程组 $(\lambda E-A)X=0$ 中, 可求得对应于 5 的特征向量是

$$k_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\qquad(k_1\neq 0);$$

对应于 -1 的特征向量是

$$k_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad k_3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\qquad (k_2,k_3\neq 0)$$

取 $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}$, 有

$$\begin{aligned}P^{-1}AP &= \begin{pmatrix}1/3&1/3&1/3\\-1/3&2/3&-1/3\\2/3&-1/3&-1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}5&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

下面给出矩阵 A 可对角化的一些简单判别方法。

定理 2.2

如果 n 阶矩阵 A 有 n 个不同的特征值, 则 A 可对角化.

下面给出矩阵 A 可对角化的一些简单判别方法。

定理 2.2

如果 n 阶矩阵 A 有 n 个不同的特征值, 则 A 可对角化.

证明 由性质 1.3 知, A 有 n 个分别对应 n 个不同特征值的特征向量, 且线性无关. 从而得到 A 可对角化.

下面给出矩阵 A 可对角化的一些简单判别方法。

定理 2.2

如果 n 阶矩阵 A 有n 个不同的特征值, 则 A 可对角化.

证明 由性质 1.3 知, A 有 n 个分别对应 n 个不同特征值的特征向量, 且线性无关. 从而得到 A 可对角化.

定理 2.3

如果 n 阶复系数矩阵 A 特征多项式无重根, 则 A 可对角化.

下面给出矩阵 A 可对角化的一些简单判别方法。

定理 2.2

如果 n 阶矩阵 A 有 n 个不同的特征值，则 A 可对角化.

证明 由性质 1.3 知，A 有 n 个分别对应 n 个不同特征值的特征向量，且线性无关. 从而得到 A 可对角化.

定理 2.3

如果 n 阶复系数矩阵 A 特征多项式无重根，则 A 可对角化.

证明 在复数域内每一个 n 次多项式都有 n 个根，于是 n 阶复系数矩阵 A 的特征多项式无重根说明 A 有 n 个不同的特征值. 由上一定理可知，A 可对角化.

- 上述两个定理的条件都是充分而不必要的，也就是说，可对角化的矩阵不一定要特征值两两不同。
- 例：单位矩阵 $E = \mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1)$ 可对角化, 其特征多项式有 n 重根, 特征值 $\lambda = 1$。

例题 2.2

已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

在复数范围内, 求使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵的可逆矩阵 P.

例题 2.2

已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&2&1\\-4&0&3\\-2&-3&0\end{pmatrix}.$$

在复数范围内, 求使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵的可逆矩阵 P.

解 A 的特征方程为: $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda^2+19)=0$. 故 A 的特征值为 0, $\sqrt{19}$i, $-\sqrt{19}$i.

将 $\lambda=0$ 和 $\lambda=\pm\sqrt{19}$i 分别带入齐次线性方程组 $(\lambda E-A)X=0$ 中, 可求得:

对应于 0 的特征向量是

$$k_1\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}\quad(k_1\neq 0);$$

对应于 $\sqrt{19}\mathrm{i}$ 的特征向量是

$$k_2\begin{pmatrix} 5 \\ 2\sqrt{19}i+3 \\ \sqrt{19}i-6 \end{pmatrix}, \quad (k_2\neq 0).$$

对应于 $-\sqrt{19}\mathrm{i}$ 的特征向量是

$$k_2\begin{pmatrix} 5 \\ -2\sqrt{19}i+3 \\ -\sqrt{19}i-6 \end{pmatrix}, \quad (k_3\neq 0)$$

取 $P=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 2\sqrt{19}i+3 & -2\sqrt{19}i+3 \\ 4 & \sqrt{19}i-6 & -\sqrt{19}i-6 \end{pmatrix}$, 有

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(0,\sqrt{19}i,-\sqrt{19}i).$$

本章作业 P149

1(2)(4); 2(2); 3; 9(2)(4); 14(1)(3); 15; 17; 19; 21; 23