Fibonacci sayılarını, $f_0 = 0$ $f_1 = 1$ olmak kaydıyla $\{f_n, n \geq 0\}$ özyinelemeli olarak

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ şeklinde tanımlayabiliriz.

Bu sayıları kullanarak oluşturulacak Fibonacci polinomu aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$\{F_n, n \geq 0\}, F_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$

Örneğin;

$F_7(x)=x+x^2+2x^3+3x^4+5x^5+8x^6+13x^7$ olur. Buradan yola çıkarak F(11):

$F_7(11) = 268357683$

Soru:

$n = 10^{15}$ olsun. $\sum_{x=0}^{100}{}^{100} F_n(x)$ toplamının cevabını mod 1307674368000(=15!) cinsinden bulunuz.

Çözüm:

$\sum_{j=0}^{n} ax^j = a\left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right)$ olduğundan,

$F_n(x) = f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + f_4 x^4 + \cdots + f_n x^n = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$,

Polinomunu $F_n(x) = \dfrac{f_n x^{n+2} + f_{n+1} x^{n+1} - x}{x^2 + x - 1}$, şeklinde tanımlaya biliriz.

Sonucu mod 1307674368000(=15!) cinsinden istediğinden dolayı

$$\frac{a}{b} \bmod m = \frac{a \bmod m \cdot b}{b}, \text{ if } a \bmod b \equiv 0$$

denkliğini kullanarak,

$$F_n(x) \bmod m = \frac{(f_n x^{n+2} + f_{n+1} x^{n+1} - x) \bmod \left(m(x^2 + x - 1)\right)}{(x^2 + x - 1)}$$

İfadesine dönüştürülmektedir.

Daha sonra n = 10^{15} f_n 'nin optimizasyonunu sağlama için Fibonacci Q matris yöntemi ile hesaplanması gerçekleştirilir.

$$\mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$