

ЦИФРОВА СХЕМОТЕХНІКА

ЗАНЯТТЯ 1



AGENTA

1. Системи числення
2. Перехід з однієї системи числення в іншу
3. Основи булевої алгебри
4. Основні закони булевої алгебри

СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ (NUMBER SYSTEM)

Системи числення – сукупність знаків, котрі використовуються для запису числа.

- **Десяткова система** (Decimal). Використовуються цифри 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Наприклад, 790_{10} , де індекс «10» вказує на приналежність до відповідної системи числення.

$$A_q = a_k \cdot q^k + a_{k-1} \cdot q^{k-1} + \dots + a_0 \cdot q^0 + a_{-1} \cdot q^{-1} + \dots + a_{-t} \cdot q^{-t} = \sum_{i=-m}^k a_i \cdot q_i$$

- **Двійкова система** (Binary), число представляється у вигляді 0 і 1. 10101011_2 – приклад двійкового числа.

Приклад перетворення двійкового числа в десяткове:

$$10101011_2 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$128 + 32 + 8 + 2 + 1 = 171_{10}$$

$$10101011_2 = 171_{10}$$

Лайфхак: щоб дізнатись чи число парне/непарне достаньмо подивитись на останню цифру двійкового числа (0 – парне, 1 – непарне)

10101011_2 – число восьмибітове (8bit), оскільки містить 8 символів

Найбільш значущим бітом (**MSB**) є біт двійкового числа, що має найбільше значення і розташований зліва. MSB може також відповідати за знаковість числа (0 – додатне, 1- від'ємне)

Найменш значущим бітом (**LSB**) є біт двійкового числа, що має найменше значення і розташований справа.

СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ (NUMBER SYSTEM)

DEC	BIN
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111

СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ (NUMBER SYSTEM)

Приклад переведення з десяткової системи в двійкову:

			195	2							
			194	97	2						
LSB	1	←	1	96	48	2					
bit1	1	←		1	48	24	2				
bit2	0	←			0	24	12	2			
bit3	0	←				0	12	6	2		
bit4	0	←					0	6	3	2	
bit5	1	←						0	2		1
bit6	1	←							1		
MSB	1	←									
			195	початкове число							
			1	частка від ділення							

Таким чином: $195_{10} = 11100011_2$

СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ (NUMBER SYSTEM)

Приклад представлення дробового числа з точністю до четвертого знаку:

Дане число **0.855**

Крок 1: Помножимо дробову частину на 2

$0.855 \times 2 = 1.710 \rightarrow$ Ціла частина: **1**, залишок: **0.71**

$0.71 \times 2 = 1.420 \rightarrow$ Ціла частина: **1**, залишок: **0.42**

$0.42 \times 2 = 0.840 \rightarrow$ Ціла частина: **0**, залишок: **0.84**

$0.84 \times 2 = 1.680 \rightarrow$ Ціла частина: **1**, залишок: **0.68**

Крок 2: Записуємо цілі частини в отриманому порядку

Отримані цілі частини - **1101**, таким чином:

$$0.855_{10} \approx 0.1101_2$$

СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ (NUMBER SYSTEM)

Представлення від'ємних чисел:

Спосіб 1. З величиною знака MSB використовується для позначення від'ємного числа. Це легко побачити, але це не так добре для арифметики. Наприклад, 4-бітне число

$$0011_2 = 3_{10} \text{ або } 1011_2 = -3_{10}$$

Спосіб 2. За допомогою доповняльного числа. Сума доповняльного числа з числом дорівнює 0.

Наприклад число $6_{10}=0110_2$ має доповняльну форму -6_{10} і щоб отримати це число використовується два методи:

1. Інвертування і додавання 1

$$0110_2 \rightarrow 1001_2; 1001_2 + 1_2 = 1010_2 \text{ доповняльний код числа } 6$$

$$0110_2 + 1010_2 = 10000 \text{ (використовуються тільки 4біти)}$$

2. Додавання числа до від'ємного 2^n

Для **4-бітових чисел** значення $-2^3 = -8$ (-2^n (де n — кількість бітів) і додати необхідне число.

$-6 = -8 + 2$ Тепер додаємо **-8** (яке в 4-бітовому двійковому вигляді дорівнює **1000**) і **2** (яке в двійковому вигляді — **0010**):

$$1000_2 + 0010_2 = 1010_2$$

СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ (NUMBER SYSTEM)

- **Шістнадцяткова система** (Hexadecimal). Використовуються символи 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Наприклад, $5F_{16}$ де індекс «16» вказує на приналежність до відповідної системи числення або 0x5F (чи x5F)
- Шістнадцяткову систему числення використовують для зручності і компактності запису. Її легко читати і робити перетворення в двійкову чи десяткову. Приклад перетворення з двійкової в шістнадцяткову:

1. Число котре необхідно 1000011101011010 робимо по чотири біти, починаючи з кінця.

Ці чотири біти ще називають тетрадою або ніблом (напівбайт)

1000 0111 0101 1010

2. Знаходимо відповідний символ з таблиці

1000 0111 0101 1010 = 0x875A

3. Користуючись вже відомою формулою

$$A_q = a_k \cdot q^k + a_{k-1} \cdot q^{k-1} + \dots + a_0 \cdot q^0 + a_{-1} \cdot q^{-1} + \dots + a_{-t} \cdot q^{-t} = \sum_{i=-m}^k a_i \cdot q_i$$

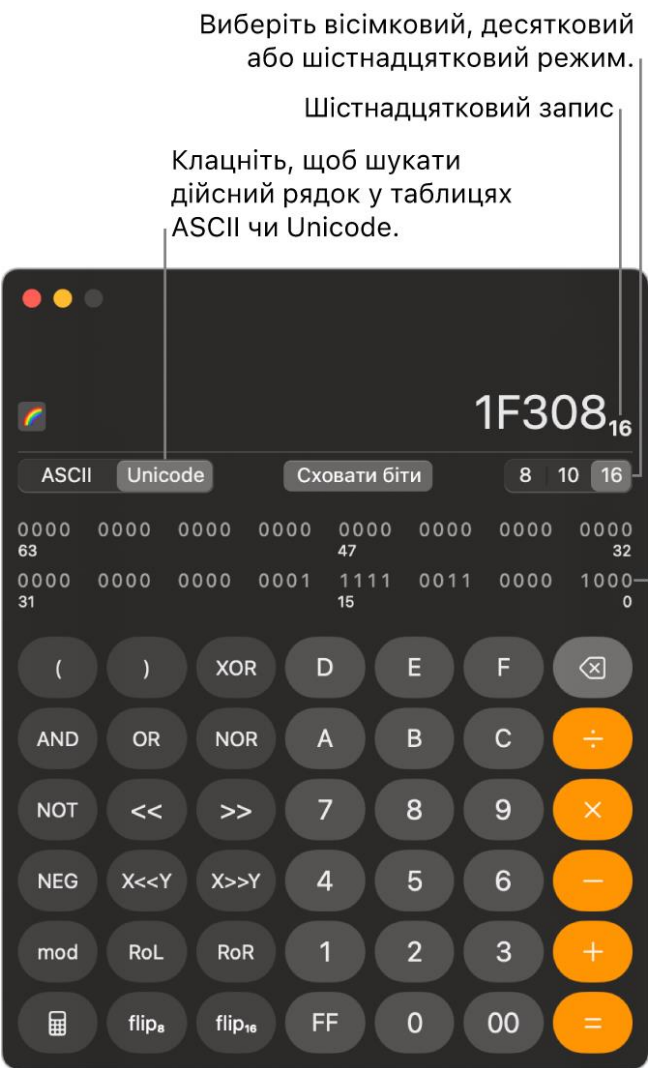
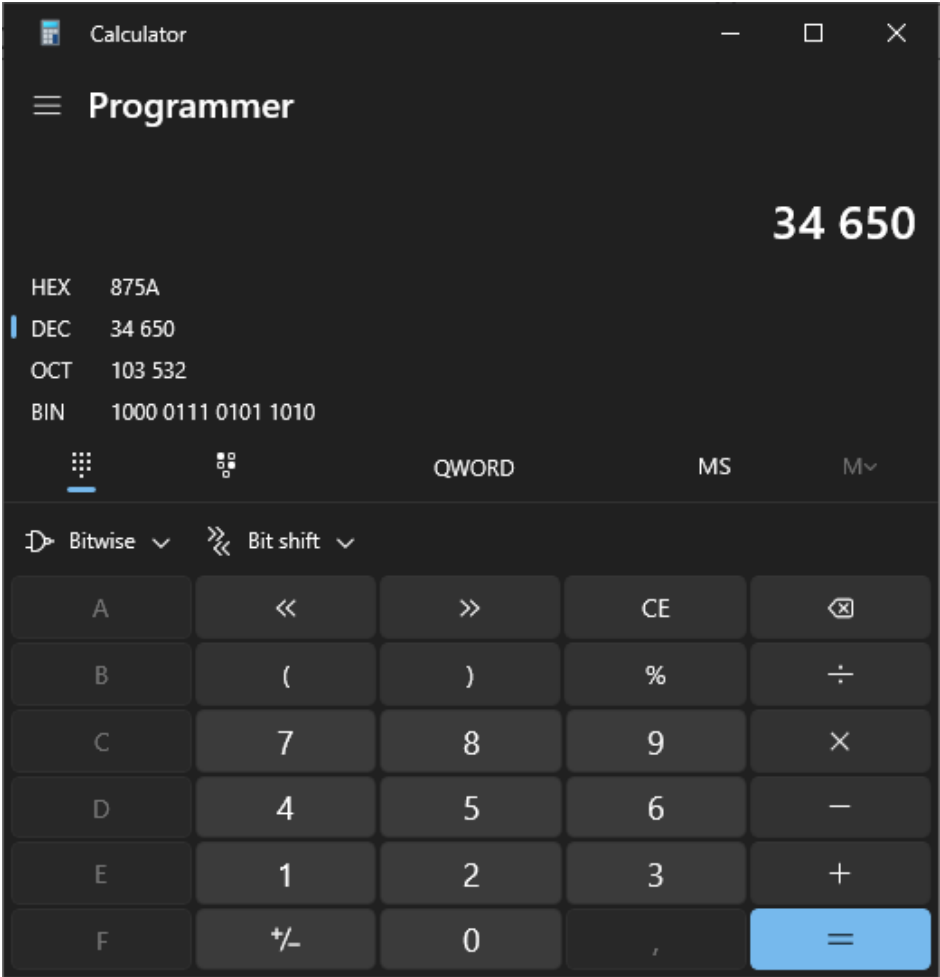
можна перейти до більш звичної числа в десятковій системі

$$875A_{16} = 8 \cdot 16^3 + 7 \cdot 16^2 + 5 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^0 = 32768 + 1792 + 80 + 10 = 34650_{10}$$

DEC	BIN	HEX
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ (NUMBER SYSTEM) OFF-TOPIC

Ледве не забув, вбудований конвертор в Window чи MacOS (картинку запозиччено [тут](#))



ОСНОВИ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ

Булева функція – це функція ($y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$) n змінних, де ($n > 0$), в якій кожна змінна і сама функція набувають власних значень з множин $\{0, 1\}$. Кількість булевих функцій для n змінних рівна 2^{2^n}

Є кілька типів представлення функцій

1. Табличний

Функція двох змінних $x_1 x_2$

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Функція трьох змінних $x_1 x_2 x_3$

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Функція чотирьох змінних $x_1 x_2 x_3 x_4$

x_1	x_2	x_3	x_4	y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Загальне число комбінацій функції $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ рівне 2^n (n – кількість змінних)

{

ОСНОВИ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ

2. Аналітичний

$$y = x1 \cdot x3 + x2 \cdot x3 + x1 \cdot (x2 + x3),$$

де « \cdot » та « $+$ » є логічними операціями, котрі ми розглянемо далі 😊

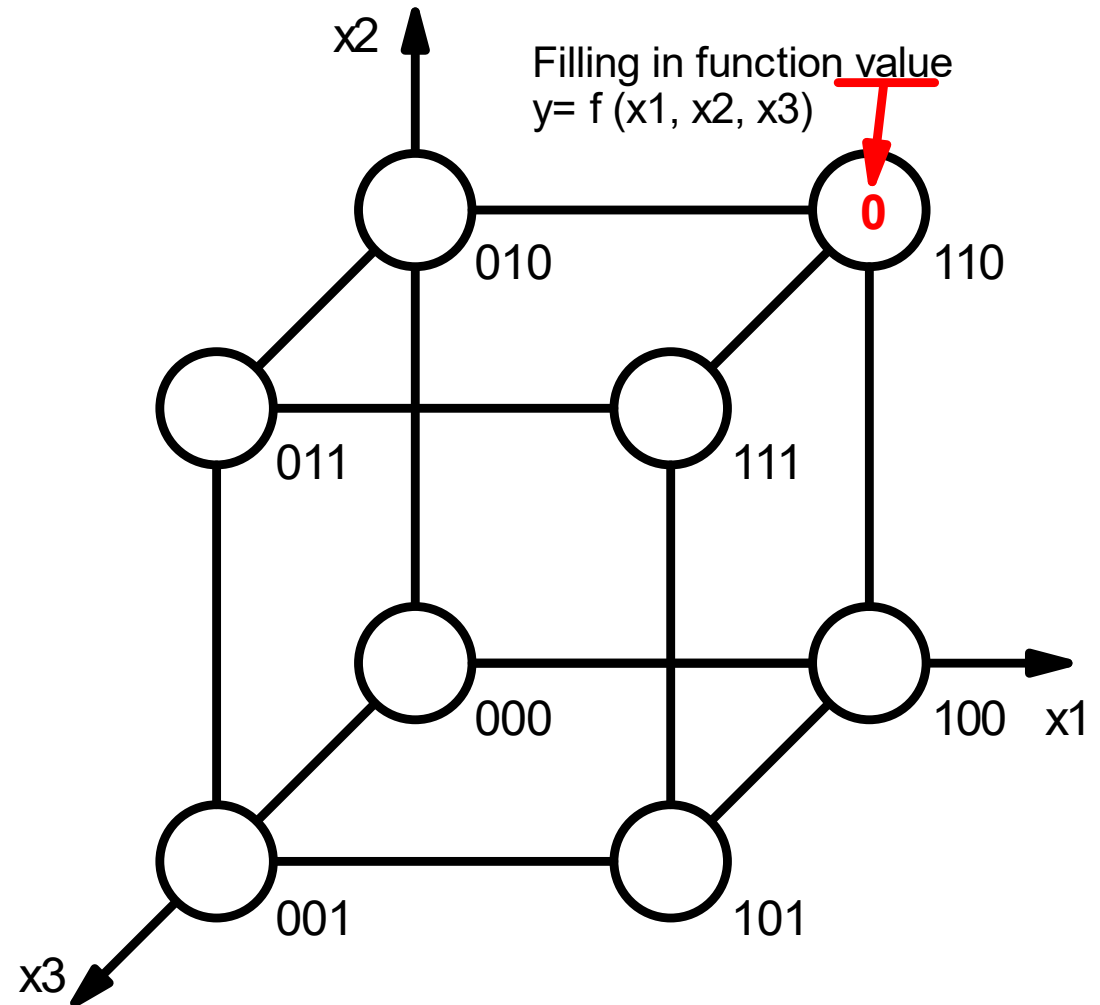
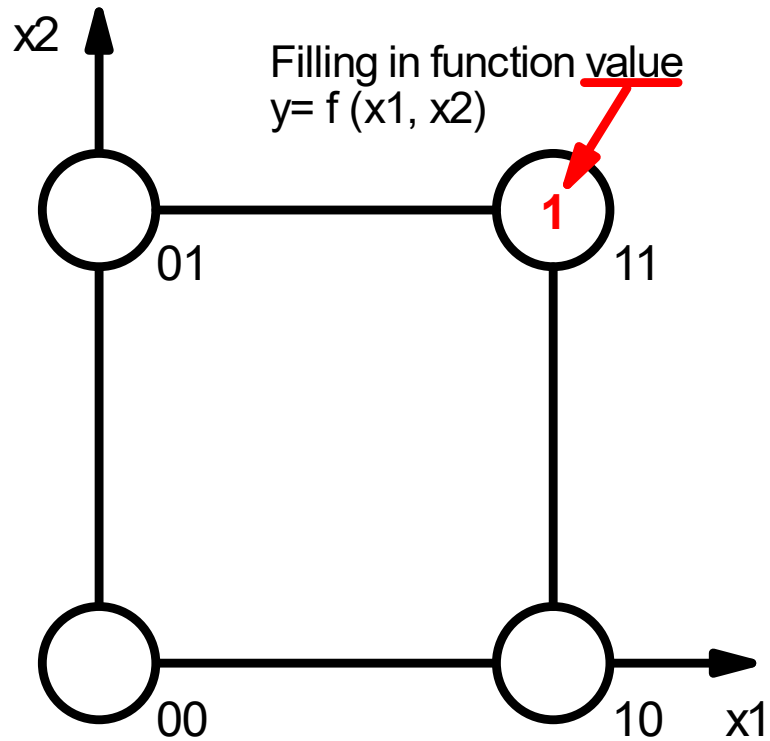
3. Кординатний (карта Карно)

		x3	
		0	1
x1	x2	x1 x2 \ x3	
	0	00	
	1	01	
	1	11	
	0	10	

		x3				
		x4				
		x3 x4	00	01	11	10
x1	x2	x1 x2 \	00	01	11	10
	00					
	01					
	11					
	10					

ОСНОВИ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ

4. Графічний



ОСНОВИ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ

5. Числовий

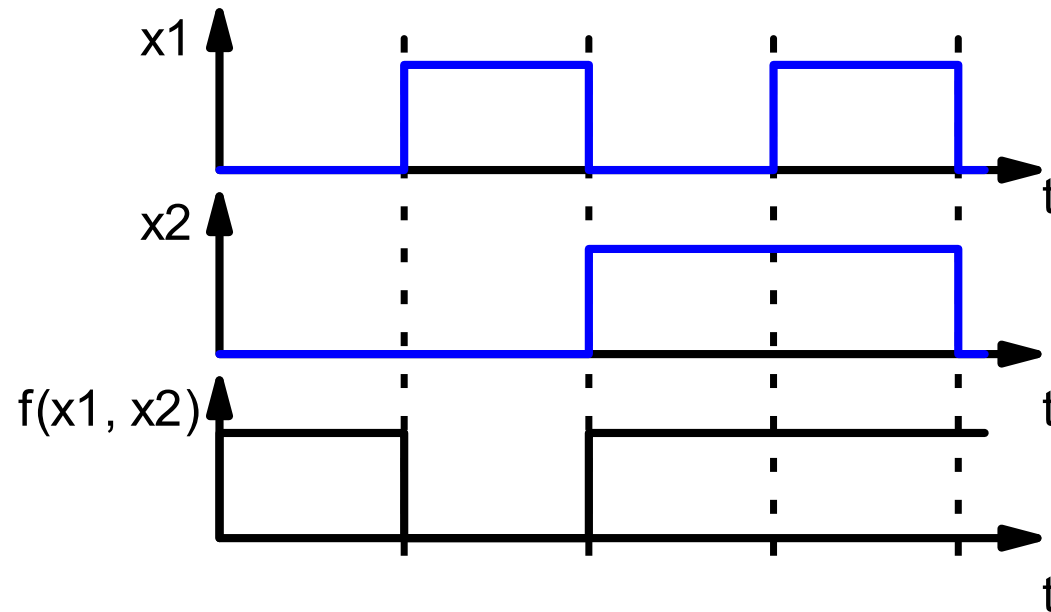
$$y = \{4; 5; 7\}_{x_1 x_2 x_3}$$

$$4 = 100 \ (x_1=1; x_2=0; x_3=0)$$

$$5 = 101 \ (x_1=1; x_2=0; x_3=1)$$

$$7 = 111 \ (x_1=1; x_2=1; x_3=1)$$

6. Часові діаграми *(неортодоксальний)*



ОСНОВИ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ

В булевій алгебрі (алгебрі логіки) є три основні логічні операції:

1. Інверсія (або заперечення), функція $y=f(x)$, набуває значення 1, коли $x=0$ так 0, коли $x=1$.

$$y = \bar{x} \text{ (not } x\text{)}$$

2. Диз'юнкція (або логічне додавання), функція $y=f(x_1, x_2)$, набуває значення 0, лише коли обидва аргументи x_1, x_2 дорівнюють 0

$$y = x_1 + x_2 \text{ або } y = x_1 \vee x_2 \text{ (} x_1 \text{ OR } x_2\text{)}$$

3. Кон'юнкція (або логічне множення), функція $y=f(x_1, x_2)$, набуває значення 1, лише коли обидва аргументи x_1, x_2 дорівнюють 1

$$y = x_1 \cdot x_2 \text{ або } y = x_1 \wedge x_2 \text{ (} x_1 \text{ AND } x_2\text{)}$$

Таблиці істиності логічних операцій мають наступний вигляд:

x	$y=\bar{x}$
0	1
1	0

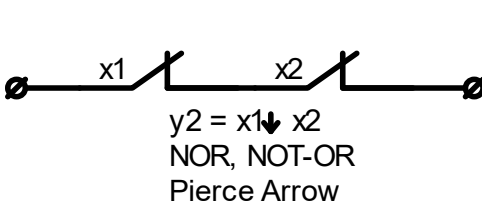
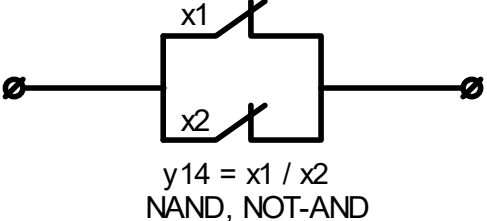
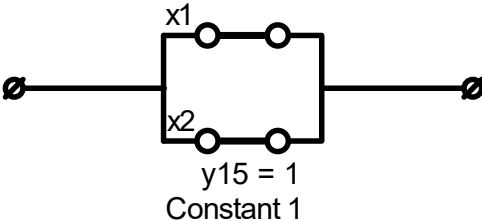
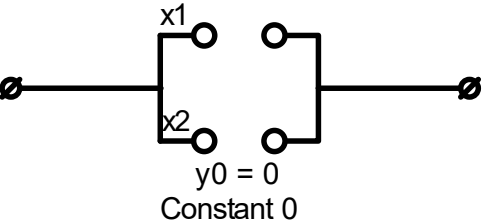
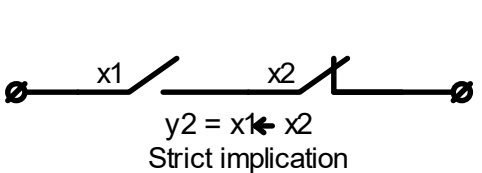
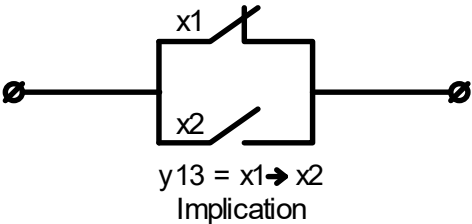
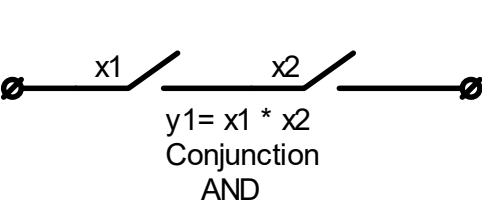
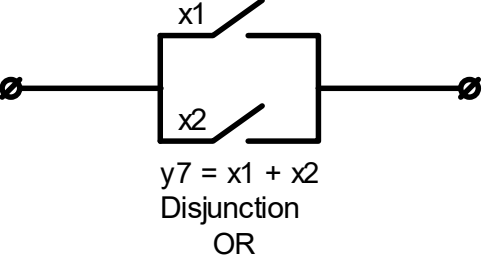
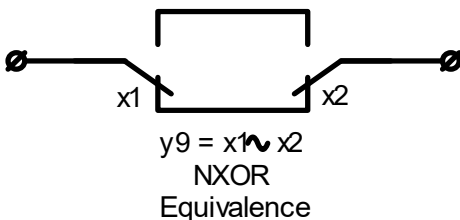
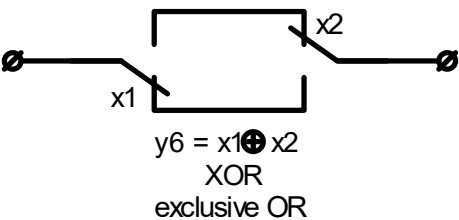
x1	x2	$y = x_1 + x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x1	x2	$y = x_1 \cdot x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ОСНОВИ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ

Елементарні функції двох змінних

x1	x2	y0	y1	y2	y3	y4	y5	y6	y7	y8	y9	y10	y11	y12	y13	y14	y15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Операція						$\overline{x1}$							x1				
		0	.	←	x1	.	x2	\oplus	+	↓	~	$\overline{x2}$	+	$\overline{x1}$	→	/	1
						x2							$\overline{x2}$				
Схема		✓	✓	✓	-	-	-	✓	✓	✓	✓	-	-	-	-	✓	✓



ЗАКОНИ БУЛЕВОЇ АЛГЕБРИ

Булевою алгеброю називається множина логічних функцій з операціями диз'юнкція, кон'юнкція та заперечення.

Основні закони булевих операцій:

1. Комутативний: $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$

$$x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$$

2. Асоціативний: $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$

$$x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$$

3. Дистрибутивний: $x_1 \cdot (x_2 + x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3$

перший дистрибутивний закон

$$x_1 + (x_2 \cdot x_3) = (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_3)$$

другий дистрибутивний закон 🤗

4. Закони де Моргана

$$\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$$

$$\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$$

Інверсія кон'юнкції дорівнює диз'юнкції інверсії; інверсія диз'юнкції дорівнює кон'юнкції інверсії

Заперечення "або" дорівнює "і" заперечень; Заперечення "і" дорівнює "або" заперечень



Аугустус де Морган

ЗАКОНИ БУЛЕВОЇ АЛГЕБРИ

5. Іденпотентний:

$$x + x = x$$

$$x \cdot x = x$$

6. Закон вилучення третього:

$$x + \bar{x} = 1$$

$$x \cdot \bar{x} = 0$$

P.S. ще називають «склейка»

7. Поглинання

$$(x_1 + x_2) \cdot x_2 = x_2$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_2 = x_2$$

8. Ідентичність та анігіляція

$$x \cdot 1 = x$$

$$x \cdot 0 = 0$$

$$x + 1 = 1$$

$$x + 0 = x$$

9. Подвійне заперечення

$$\bar{\bar{x}} = x$$

ФОРМИ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

Диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ) містить диз'юнкцію скінченного числа елементарних (змінна зустрічається тільки один раз в прямій чи інверсійній формі) кон'юнкцій:

$$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3$$

Досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ) містить усі змінні в елементарних кон'юнкціях:

$$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3$$

Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ) містить кон'юнкцію скінченного числа елементарних диз'юнкцій

$$(\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot x_3$$

Досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ) містить усі змінні в елементарних диз'юнкціях

$$(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3) \cdot (x_1 + x_2 + \overline{x_3})$$

Далі буде...