

ЦИФРОВА СХЕМОТЕХНІКА

ЗАНЯТТЯ 1



AGENTA

1. Системи числення
2. Перехід з однієї системи числення в іншу
3. Основи булевої алгебри
4. Основні закони булевої алгебри

СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ (NUMBER SYSTEM)

Системи числення – сукупність знаків, котрі використовуються для запису числа.

- **Десяткова система** (Decimal). Використовуються цифри 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Наприклад, 790_{10} , де індекс «10» вказує на принадлежність до відповідної системи числення.

$$A_q = a_k \cdot q^k + a_{k-1} \cdot q^{k-1} + \dots + a_0 \cdot q^0 + a_{-1} \cdot q^{-1} + \dots + a_{-t} \cdot q^{-m} = \sum_{i=-m}^k a_i \cdot q^i$$

- **Двійкова система** (Binary), число представляється у вигляді 0 і 1. 10101011_2 – приклад двійкового числа.

Приклад перетворення двійкового числа в десяткове:

$$10101011_2 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$128 + 32 + 8 + 2 + 1 = 171_{10}$$

$$10101011_2 = 171_{10}$$

Лайфхак: щоб дізнатись чи число парне/непарне достаньо подивитись на останню цифру двійкового числа (0 – парне, 1 – непарне)

10101011_2 – число восьмибітове (8bit), оскільки містить 8 символів

Найбільш значущим бітом (**MSB**) є біт двійкового числа, що має найбільше значення і розташований зліва. MSB може також відповідати за знаковість числа (0 – додатнє, 1 – від’ємне)

Найменш значущим бітом (**LSB**) є біт двійкового числа, що має найменше значення і розташований справа.

СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ (NUMBER SYSTEM)

| DEC | BIN |
|-----|------|
| 0 | 0000 |
| 1 | 0001 |
| 2 | 0010 |
| 3 | 0011 |
| 4 | 0100 |
| 5 | 0101 |
| 6 | 0110 |
| 7 | 0111 |
| 8 | 1000 |
| 9 | 1001 |
| 10 | 1010 |
| 11 | 1011 |
| 12 | 1100 |
| 13 | 1101 |
| 14 | 1110 |
| 15 | 1111 |

СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ (NUMBER SYSTEM)

Приклад переведення з десяткової системи в двійкову:

| | | | | | | | | |
|------|---|-----|--------------------|----|---|--|--|--|
| | | 195 | 2 | | | | | |
| | | 194 | 97 | 2 | | | | |
| LSB | 1 | 1 | 96 | 48 | 2 | | | |
| bit1 | 1 | 1 | 48 | 24 | 2 | | | |
| bit2 | 0 | 0 | 24 | 12 | 2 | | | |
| bit3 | 0 | 0 | 12 | 6 | 2 | | | |
| bit4 | 0 | 0 | 6 | 3 | 2 | | | |
| bit5 | 1 | | 0 | 2 | 1 | | | |
| bit6 | 1 | | | 1 | | | | |
| MSB | 1 | | | | | | | |
| | | 195 | початкове число | | | | | |
| | | 1 | частка від ділення | | | | | |

Таким чином: $195_{10} = 11100011_2$

СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ (NUMBER SYSTEM)

Приклад представлення дробового числа з точністю до четвертого знаку:

Дане число **0.855**

Крок 1: Помножимо дробову частину на 2

$0.855 \times 2 = 1.710 \rightarrow$ Ціла частина: **1**, залишок: **0.71**

$0.71 \times 2 = 1.420 \rightarrow$ Ціла частина: **1**, залишок: **0.42**

$0.42 \times 2 = 0.840 \rightarrow$ Ціла частина: **0**, залишок: **0.84**

$0.84 \times 2 = 1.680 \rightarrow$ Ціла частина: **1**, залишок: **0.68**

Крок 2: Записуємо цілі частини в отриманому порядку

Отримані цілі частини - **1101**, таким чином:

$$0.855_{10} \approx 0.1101_2$$

СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ (NUMBER SYSTEM)

Представлення від'ємних чисел:

Спосіб 1. З величиною знака MSB використовується для позначення від'ємного числа. Це легко побачити, але це не так добре для арифметики. Наприклад, 4-бітне число

$$0011_2 = 3_{10} \text{ або } 1011_2 = -3_{10}.$$

Спосіб 2. За допомогою доповняльного числа. Сума доповняльного числа з числом дорівнює 0.

Наприклад число $6_{10}=0110_2$ має доповняльну форму -6_{10} і щоб отримати це число використовується два методи:

1. Інвертування і додавання 1

$$0110_2 \rightarrow 1001_2; 1001_2 + 1_2 = 1010_2 \text{ доповняльний код числа 6}$$

$$0110_2 + 1010_2 = 10000 \text{ (використовуються тільки 4 біти)}$$

2. Додавання числа до від'ємного 2^n

Для 4-бітових чисел значення $-2^3 = -8$ (-2^n (де n — кількість бітів) і додати необхідне число.

$-6 = -8 + 2$ Тепер додаємо **-8** (яке в 4-бітовому двійковому вигляді дорівнює **1000**) і **2** (яке в двійковому вигляді — **0010**):

$$1000_2 + 0010_2 = 1010_2$$

СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ (NUMBER SYSTEM)

- Шістнадцяткова система (Hexadecimal). Використовуються символи 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.
Наприклад, $5F_{16}$ де індекс «16» вказує на принадлежність до відповідної системи числення або $0x5F$ (чи x5F)
- Шістнадцяткову систему числення використовують для зручності і компакності запису. Її легко читати і робити переворення в двійкову чи десяткову. Приклад перетворення з двійкової в шістнадцяткову:

1. Число котре необхідно 1000011101011010 робиваємо по чотири біти, починаючи з кінця.

Ці чотири біти ще називають тетрадою або ніблом (напівбайт)

1000 0111 0101 1010

2. Знаходимо відповідний символ з таблиці

$$1000 \text{ (cyan)} \text{ 0111 (magenta)} \text{ 0101 (red)} \text{ 1010 (yellow)} = 0x875A$$

3. Користуючись вже відомою формулою

$$A_q = a_k \cdot q^k + a_{k-1} \cdot q^{k-1} + \dots + a_0 \cdot q^0 + a_{-1} \cdot q^{-1} + \dots + a_{-t} \cdot q^{-t} = \sum_{i=-t}^k a_i \cdot q^i$$

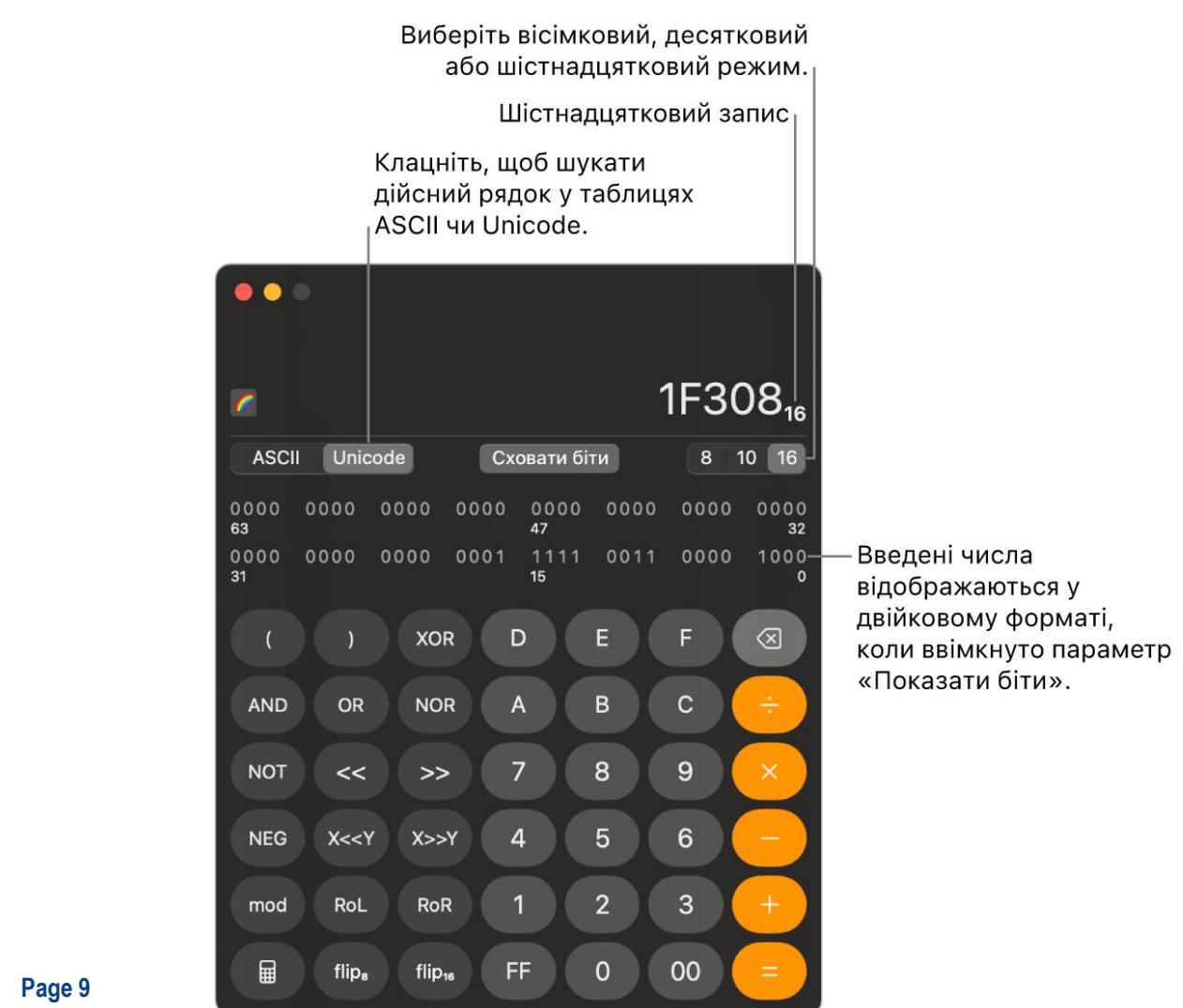
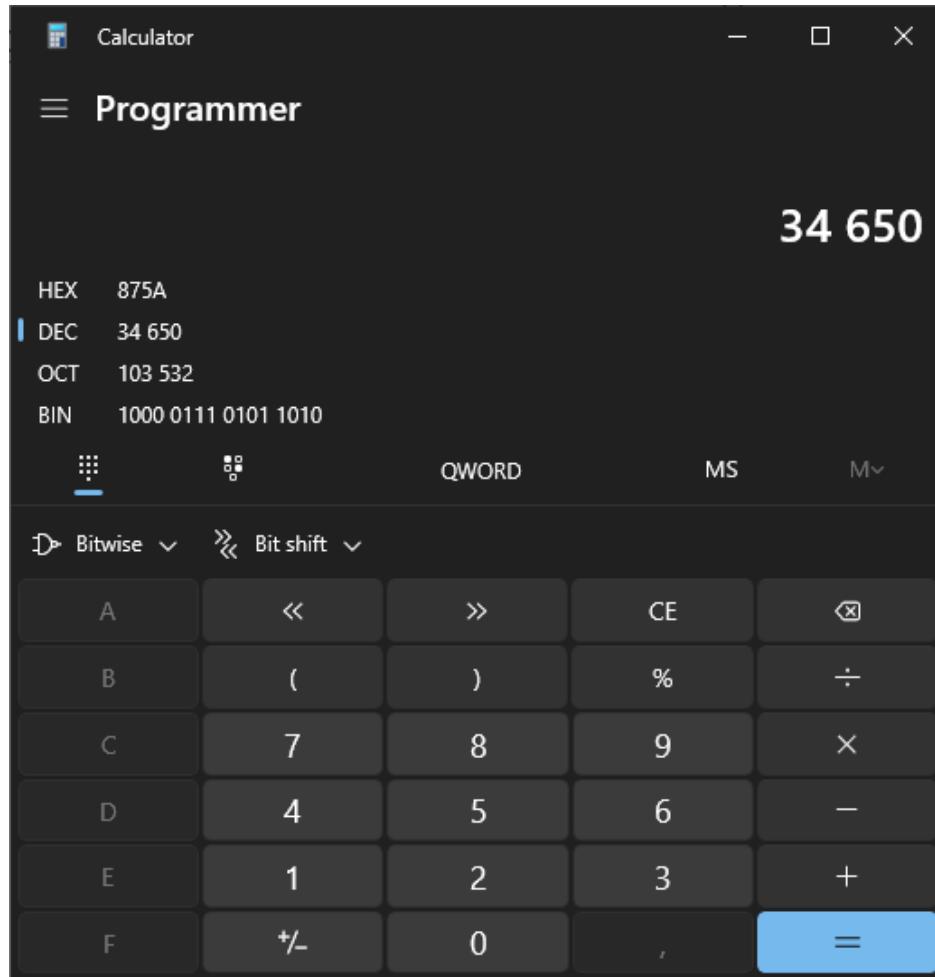
можна перейти до більш звичної числа в десятковій системі

$$875A_{16} = 8 \cdot 16^3 + 7 \cdot 16^2 + 5 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^0 = 32768 + 1792 + 80 + 10 = 34650_{10}$$

| DEC | BIN | HEX |
|-----|------|-----|
| 0 | 0000 | 0 |
| 1 | 0001 | 1 |
| 2 | 0010 | 2 |
| 3 | 0011 | 3 |
| 4 | 0100 | 4 |
| 5 | 0101 | 5 |
| 6 | 0110 | 6 |
| 7 | 0111 | 7 |
| 8 | 1000 | 8 |
| 9 | 1001 | 9 |
| 10 | 1010 | A |
| 11 | 1011 | B |
| 12 | 1100 | C |
| 13 | 1101 | D |
| 14 | 1110 | E |
| 15 | 1111 | F |

СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ (NUMBER SYSTEM) OFF-TOPIC

Ледве не забув, вбудований конвертор в Window чи MacOS (картинку запозичено [тут](#))



ОСНОВИ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ

Булева функція – це функція ($y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$) п змінних, де ($n > 0$), в якій кожна змінна і сама функція набувають власних значень з множини {0,1}. Кількість булевих функцій для п змінних рівна 2^{2^n}

Є кілька типів представлення функцій

1. Табличний

Функція двох змінних x_1 x_2

| x_1 | x_2 | y |
|-------|-------|-----|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Функція трьох змінних x_1 x_2 x_3

| x_1 | x_2 | x_3 | y |
|-------|-------|-------|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Загальне число комбінацій функції $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ рівне 2^n (n – кількість змінних)

Функція чотирьох змінних x_1 x_2 x_3 x_4

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | y |
|-------|-------|-------|-------|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

{

ОСНОВИ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ

2. Аналітичний

$$y = x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot (x_2 + x_3),$$

де «·» та «+» є логічними операціями, котрі ми розглянемо далі 😊

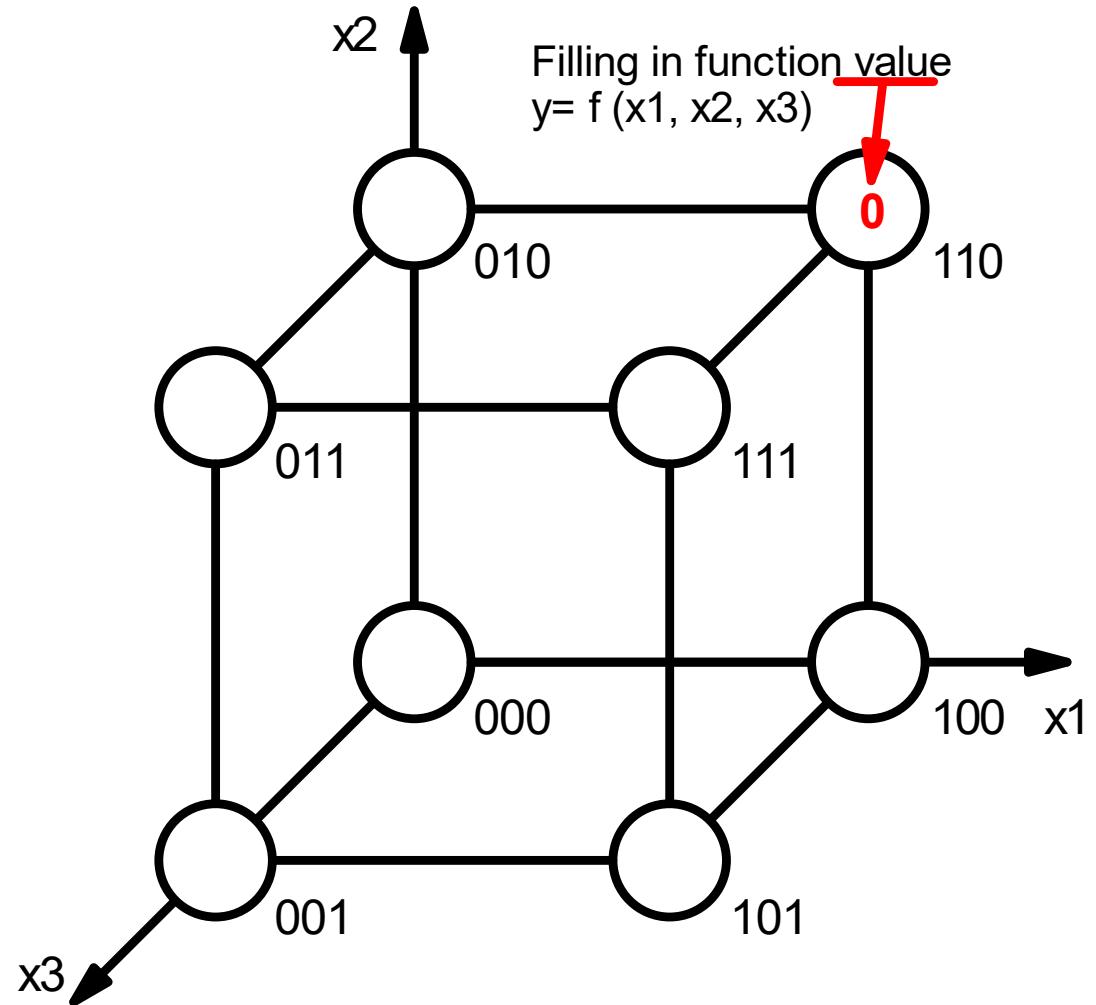
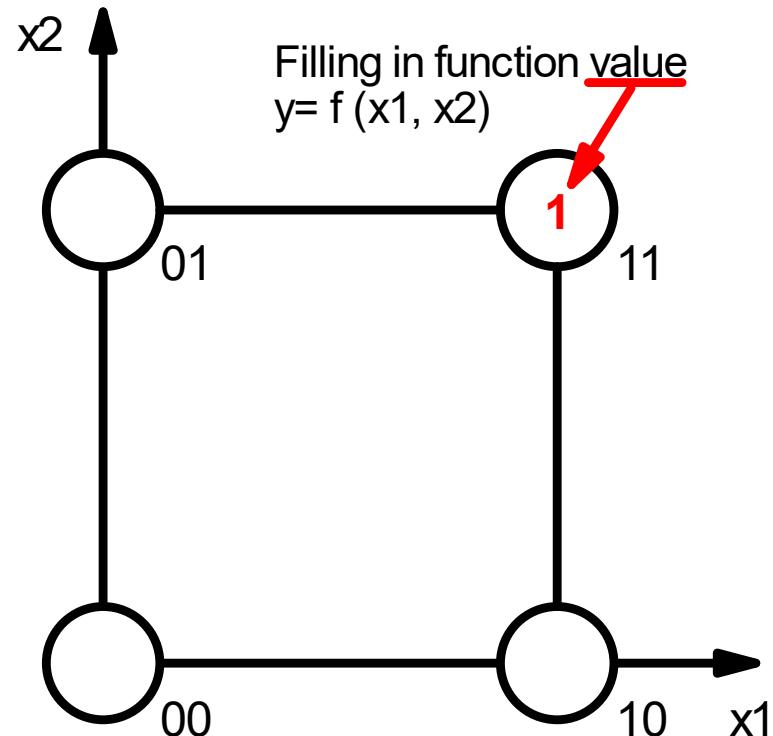
3. Кординатний (карта Карно)

| | | x3 | | |
|--|--|-------|---|---|
| | | x1 x2 | 0 | 1 |
| | | 00 | | |
| | | 01 | | |
| | | 11 | | |
| | | 10 | | |

| | | x3 x4 | | | | |
|--|--|-------|----|----|----|----|
| | | x1 x2 | 00 | 01 | 11 | 10 |
| | | 00 | | | | |
| | | 01 | | | | |
| | | 11 | | | | |
| | | 10 | | | | |

ОСНОВИ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ

4. Графічний



ОСНОВИ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ

5. Числовий

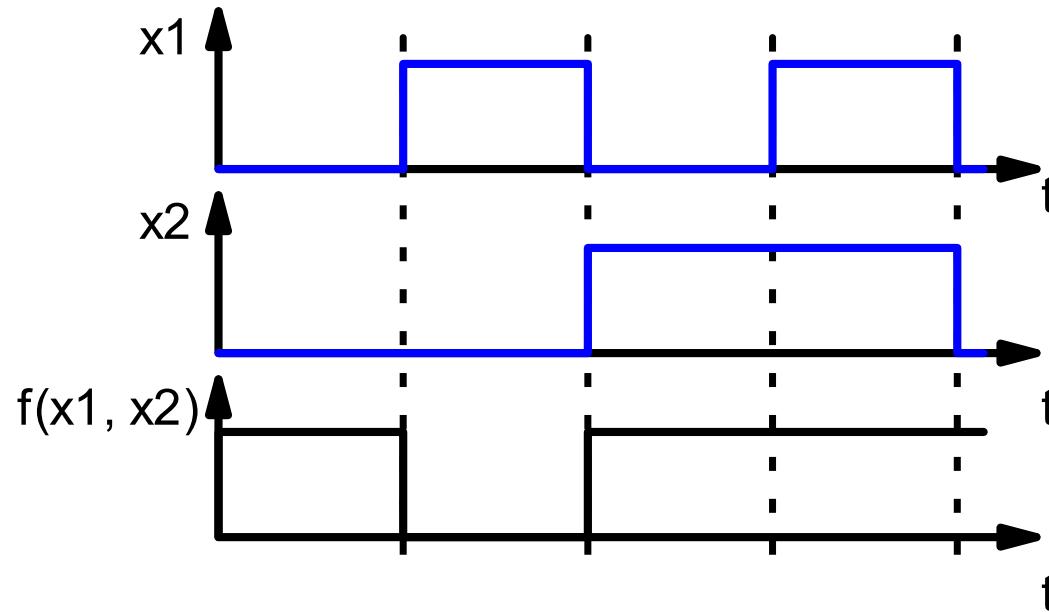
$$y = \{4;5;7\} \quad x_1 x_2 x_3$$

$$4 = 100 \quad (x_1=1; x_2=0; x_3=0)$$

$$5 = 101 \quad (x_1=1; x_2=0; x_3=1)$$

$$7 = 111 \quad (x_1=1; x_2=1; x_3=1)$$

6. Часові діаграми (*неортодоксальний*)



ОСНОВИ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ

В булевій алгебрі (алгебрі логіки) є три основні логічні операції:

1. Інверсія (або заперечення), функція $y=f(x)$, набуває значення 1, коли $x=0$ та 0, коли $x=1$.

$$y = \bar{x} \text{ (not } x\text{)}$$

2. Диз'юнкція (або логічне додавання), функція $y=f(x_1, x_2)$, набуває значення 0, лише коли обидва аргументи x_1, x_2 дорівнюють 0

$$y = x_1 + x_2 \text{ або } y = x_1 \vee x_2 \text{ (x}_1 \text{ OR } x_2\text{)}$$

3. Кон'юнкція (або логічне множення), функція $y=f(x_1, x_2)$, набуває значення 1, лише коли обидва аргументи x_1, x_2 дорівнюють 1

$$y = x_1 \cdot x_2 \text{ або } y = x_1 \wedge x_2 \text{ (x}_1 \text{ AND } x_2\text{)}$$

Таблиці істинності логічних операцій мають наступний вигляд:

| x | $y=\bar{x}$ |
|----------|-------------------------------|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

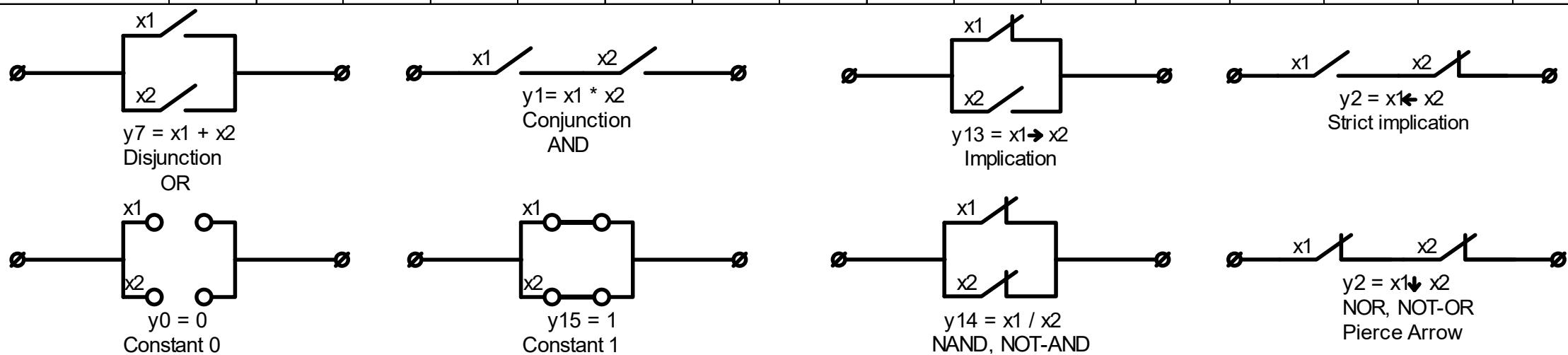
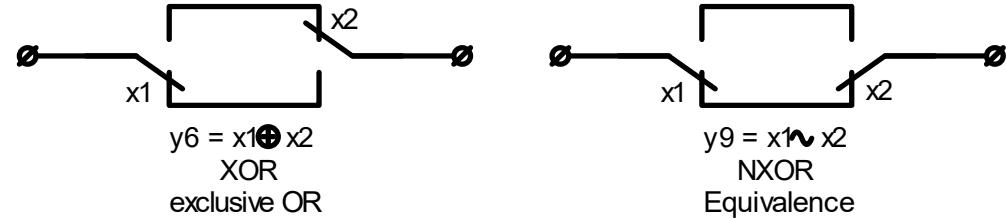
| x1 | x2 | $y = x_1 + x_2$ |
|-----------|-----------|-----------------------------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| x1 | x2 | $y = x_1 \cdot x_2$ |
|-----------|-----------|---------------------------------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

ОСНОВИ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ

Елементарні функції двох змінних

| x_1 | x_2 | y_0 | y_1 | y_2 | y_3 | y_4 | y_5 | y_6 | y_7 | y_8 | y_9 | y_{10} | y_{11} | y_{12} | y_{13} | y_{14} | y_{15} |
|----------|-------|-------|--------------|-------|-------|-------------|----------|-------|-------|--------------|--------|-------------|-------------|-------------|---------------|----------|----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Операція | | | | | | \bar{x}_1 | | | | | | | | x_1 | | | |
| | 0 | . | \leftarrow | x_1 | . | x_2 | \oplus | | + | \downarrow | \sim | \bar{x}_2 | + | \bar{x}_1 | \rightarrow | / | 1 |
| | | | | | x_2 | | | | | | | | \bar{x}_2 | | | | |
| Схема | ✓ | ✓ | ✓ | - | - | - | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | - | - | - | - | ✓ | ✓ | |



ЗАКОНИ БУЛЕВОЇ АЛГЕБРИ

Булевою алгеброю називається множина логічних функцій з операціями диз'юнкція, кон'юнкція та заперечення.

Основні закони булевих операцій:

1. Комутативний:

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1$$

$$x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$$

2. Асоціативний:

$$x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$$

$$x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$$

3. Дистрибутивний:

$$x_1 \cdot (x_2 + x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3$$

перший дистрибутивний закон

$$x_1 + (x_2 \cdot x_3) = (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_3)$$

другий дистрибутивний закон 😊

4. Закони де Моргана

$$\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$$

$$\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$$

Інверсія кон'юнкції дорівнює диз'юнкції інверсії; інверсія диз'юнкції дорівнює кон'юнкції інверсії

Заперечення "або" дорівнює "і" заперечень; Заперечення "і" дорівнює "або" заперечень



Аугустус де Морган

ЗАКОНИ БУЛЕВОЇ АЛГЕБРИ

5. Іденпотентний:

$$x + x = x$$

$$x \cdot x = x$$

6. Закон вилучення третього:

$$x + \bar{x} = 1$$

$$x \cdot \bar{x} = 0$$

P.S. ще називають «склейка»

7. Поглинання

$$(x_1 + x_2) \cdot x_2 = x_2$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_2 = x_2$$

8. Ідентичність та анігіляція

$$x \cdot 1 = x$$

$$x \cdot 0 = 0$$

$$x + 1 = 1$$

$$x + 0 = x$$

9. Подвійне заперечення

$$\bar{\bar{x}} = x$$

ФОРМИ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

Диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ) містить диз'юнкцію скінченного числа елементарних (змінна зустрічається тільки один раз в прямій чи інверсій формі) кон'юнкцій:

$$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3$$

Досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ) містить усі змінні в елементарних кон'юнкціях:

$$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3$$

Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ) містить кон'юнкцію скінченного числа елементарних диз'юнкцій

$$(\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot x_3$$

Досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ) містить усі змінні в елементарних диз'юнкціях

$$(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3) \cdot (x_1 + x_2 + \overline{x_3})$$

Далі буде...