

Київський національний університет імені Т.Шевченка

Звіт

до лабораторної роботи №2
на тему:

**«Розв'язання систем лінійних
алгебраїчних рівнянь»**

*Студентки 2-ого курсу
Групи К-25 ФКНК
Нємкевич Дар'ї*

*Київ
2022*

Зміст

1 Постановка задачі

2 Метод Гаусса

3 Метод Зейделя

Постановка задачі

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$Ax = b,$$

де A – матриця розмірності $n \times n$, $\det A \neq 0$, отже розв'язок системи існує і він єдиний.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} n \cos \frac{\pi}{n} \\ n \cos \frac{\pi}{n-1} \\ \dots \\ \dots \\ n \cos \frac{\pi}{1} \end{pmatrix},$$

$$n_0 = 10, \quad (n = \overline{10, 30}),$$

$$a_k = 1 + 0.75 \cdot k.$$

Методом Гаусса знайти:

- а) розв'язок системи \bar{x} ;
- б) нев'язку $\bar{r} = A\bar{x} - \bar{b}$;
- в) число обумовленості матриці A ;
- г) визначник матриці A (знайдений за допомогою заданого прямого методу);
- д) обернену матрицю A^{-1} (знайдену за допомогою заданого прямого методу), вивести також матрицю $A^{-1} \cdot A$.

Методом Зейделя знайти:

- а) розв'язок системи \bar{x} , отриманий з точністю ε ($\varepsilon_0 = 10^{-4}$);
- б) нев'язку $\bar{r} = A\bar{x} - \bar{b}$;
- в) вивести кількість ітерацій.

Метод Гаусса

(з вибором головного елемента по стовпцях)

Покладемо $A_0 = A$. Ведучим елементом обирається максимальний по модулю елемент стовпця, що розглядається: $a_{lk} = \max_i |a_{ik}^{(k-1)}|$, $i = \overline{k, n}$. Для того щоб ведучий елемент

зайняв відповідне місце, переставляються рядки k та l в матриці A_{k-1} за допомогою матриці перестановок:

$$\tilde{A}_k = P_k A_{k-1},$$

де P_k – це матриця перестановок, отримана з одиничної матриці перестановкою k та l рядків:

$$P_k = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} l \\ \\ k \\ \\ k \\ \\ \end{matrix}$$

Прямий хід Гаусса в матричній формі:

$$A_k = M_k \tilde{A}_k,$$

де M_k – матриця розмірності $n \times n$:

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & m_{(k+1)k} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_{nk} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$m_{kk} = \frac{1}{\tilde{a}_{kk}^{(k)}}, \quad m_{ik} = \frac{-\tilde{a}_{ik}^{(k)}}{\tilde{a}_{kk}^{(k)}}, \quad i = \overline{k+1, n}.$$

За допомогою прямого ходу методу Гаусса в матричній формі:

$$M_n P_n \dots M_2 P_2 M_1 P_1 A x = M_n P_n \dots M_2 P_2 M_1 P_1 b,$$

ЗВОДИМО СИСТЕМУ ДО ВИГЛЯДУ:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n & = & a_{1(n+1)}^{(1)}; \\ & & x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = a_{2(n+1)}^{(2)}; \\ & & \dots\dots\dots \\ & & x_n = a_{n(n+1)}^{(n)}. \end{array} \right.$$

Розв'язок знаходимо за допомогою зворотнього ходу Гаусса:

$$x_n = a_{n(n+1)}^n, \quad x_i = a_{i(n+1)}^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)}, \quad i = \overline{n-1, 1}.$$

Складність методу Гаусса: $Q(n) = \frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$.

Зауваження. Методом Гаусса з вибором головного можна знайти визначник:

$$\det A = (-1)^p \tilde{a}_{11}^{(1)} \tilde{a}_{22}^{(2)} \dots a_{nn}^{(n)} = (-1)^p a_{11}^{(0)} a_{22}^{(1)} \dots a_{nn}^{(n-1)},$$

де p – кількість перестановок.

Знаходження оберненої матриці A^{-1} методом Гаусса з вибором головного елемента

$$A, \det A \neq 0$$

Із означення оберненої матриці маємо:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Позначимо:

$$X = A^{-1}$$

Для знаходження оберненої матриці X маємо матричне рівняння

$$AX = E$$

$$X = \{x_i\}_{i=1}^n, \quad E = \{e_i\}_{i=1}^n,$$

або

$$Ax_i = e_i, \quad i = \overline{1, n}$$

Нехай

$$A \equiv LU,$$

де U – верхня трикутна матриця на діагоналі – 1, L – нижня трикутна матриця.

Тоді

$$LUx_i = e_i, \quad i = \overline{1, n},$$

Позначимо

$$Ux_i = y_i, \quad i = \overline{1, n}$$

Тоді

$$Ly_i = e_i, \quad i = \overline{1, n}$$

З останніх систем знайдемо вектори $y_i, \quad i = \overline{1, n}$ та перейдемо до розв'язання таких систем:

$$Ux_i = y_i, \quad i = \overline{1, n}$$

Звідки одержимо вектори $x_i, \quad i = \overline{1, n}$, які є стовпцями оберненої матриці:

$$A^{-1} = X = \{x_i\}_{i=1}^n.$$

Важливо знати похибку, яка виникає при розв'язанні СЛАР:

$$\delta(x) = \frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|}$$

$\|x\|$ – норма в просторі H

1) $\|x\| > 0$, якщо $x \neq 0$; $\|0\| = 0$

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y, \alpha \in H$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty; \quad \|x\|_\infty = \max_{j=\overline{1, n}} |x_j|$$

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p$$

Матрична $\|A\|_p$ та векторна $\|x\|_p$ норми називають узгодженими, якщо

$$\|Ax\|_p \leq \|A\|_p \|x\|_p$$

$$\|A\|_1 = \max_{k=1,n} \sum_{j=1}^n |a_{jk}|, \quad \|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|,$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(AA^*)}, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$$

$\lambda_{\max}(AA^*)$ – максимальне власне число матриці AA^*

$$\|A\|_{\infty} = \max_{j=1,n} \sum_{k=1}^n |a_{jk}|, \quad \|x\|_{\infty} = \max_{j=1,n} |x_j|$$

Розглянемо систему

$$A\bar{x} = \bar{b} \tag{3}$$

В (3) вектор правих частин заданий наближено. Оцінимо похибку, яка при цьому буде виникати

Із (1) маємо $x = A^{-1}b$

Із (2): $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$

Тоді

$$x - \bar{x} = A^{-1}(b - \bar{b})$$

$$\|x - \bar{x}\| = \|A^{-1}(b - \bar{b})\| \leq \|A^{-1}\| \|b - \bar{b}\| \frac{\|A\bar{x}\|}{\|A\bar{x}\|}, \quad \bar{b} = A\bar{x}$$

$$\delta(x) = \frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \|A\| \delta(b),$$

$$\delta(x) = \frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \|A\| \delta(b),$$

де величина $\kappa(A) = \text{cond}(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$ називається числом обумовленості, це число є мірою невизначеності розв'язку у разі неточних вихідних даних.

Результат для n = 10:

Розв'язок системи:	Нев'язка:
12.16512358	0
-1.581827069	2.0e-17
-0.5378004739	-3.7e-20
-0.8054259772	8.3e-16
-0.674860891	1.7e-15
-0.7158089988	-6.9e-16
-0.796044867	1.0e-15
-1.019052594	0
-1.592295855	1.7e-15
-2.654558416	5.0e-18

Детермінант: 446817.4833984375

Обернена матриця:

1.1	-2.2e-6	3.9e-6	-9.8e-6	3.2e-5	-0.00013	0.0006	-0.0033	0.021	-0.15
-0.64	0.57	-2.2e-6	5.6e-6	-1.8e-5	7.3e-5	-0.00035	0.0019	-0.012	0.083
-0.19	-0.23	0.4	1.7e-6	-5.5e-6	2.2e-5	-0.0001	0.00057	-0.0036	0.025
-0.29	0.07	-0.12	0.31	-8.1e-6	3.2e-5	-0.00015	0.00085	-0.0053	0.037
-0.21	-0.018	0.031	-0.077	0.25	2.4e-5	-0.00011	0.00062	-0.0039	0.027
-0.19	0.0037	-0.0065	0.016	-0.053	0.21	-0.0001	0.00057	-0.0036	0.025
-0.17	-0.00067	0.0012	-0.0029	0.0096	-0.038	0.18	0.0005	-0.0031	0.022
-0.15	0.00011	-0.00019	0.00047	-0.0015	0.0061	-0.029	0.16	-0.0028	0.02
-0.14	-1.5e-5	2.6e-5	-6.6e-5	0.00021	-0.00086	0.0041	-0.022	0.14	0.018
-0.13	2.2e-6	-3.9e-6	9.8e-6	-3.2e-5	0.00013	-0.0006	0.0033	-0.021	0.15

Добуток оберненої та початкової матриць:

1.0	8.5e-22	1.7e-21	0	0	0	-4.3e-19	-3.5e-18	0	0
0	1.0	0	0	0	5.4e-20	2.2e-19	1.7e-18	1.4e-17	0
2.4e-17	5.6e-17	1.0	0	0	0	0	0	0	0
-2.1e-17	0	0	1.0	0	0	1.1e-19	8.7e-19	6.9e-18	0
-6.9e-18	0	0	0	1.0	1.4e-20	1.1e-19	4.3e-19	3.5e-18	2.8e-17
-5.9e-17	0	0	6.9e-18	0	1.0	0	0	0	-2.8e-17
1.4e-17	2.2e-19	0	0	0	0	1.0	4.3e-19	0	-2.8e-17
-2.4e-17	-2.7e-20	-5.4e-20	-2.2e-19	0	3.5e-18	2.8e-17	1.0	0	-2.8e-17
6.9e-18	6.8e-21	1.4e-20	5.4e-20	0	0	0	0	1.0	-2.8e-17
2.8e-17	-8.5e-22	-1.7e-21	0	0	0	4.3e-19	3.5e-18	0	1.0

Число обумовленості: 27.1561791582892

Метод Зейделя

Метод Зейделя є ітераційним методом для розв'язання СЛАР $Ax = b$, де розв'язок знаходимо із заданою точністю ε . Початкове наближення x^0 обираємо довільним чином. Ітераційний процес має вигляд:

$$x_i^{k+1} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

Достатня умова збіжності 1. Якщо $\forall i : i = \overline{1, n}$ виконується нерівність

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|,$$

то ітераційний процес методу Зейделя збігається, при чому швидкість збіжності лінійна.

Достатня умова збіжності 2. Якщо $A = A^T > 0$, то ітераційний процес методу Зейделя збігається, при чому швидкість збіжності лінійна.

Умова припинення: $\|x^n - x^{n-1}\| \leq \varepsilon$.

Необхідні і достатні умови збіжності. Для $\forall x^0$ ітераційний процес методу Зейделя збігається тоді і тільки

тоді, коли $|\lambda| < 1$, де λ – це корені нелінійного рівняння:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Для заданої матриці виконується перша достатня умова збіжності, отже можна застосувати метод Зейделя.

Початкова матриця:

1.0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.0	9.51
1.0	1.75	0	0	0	0	0	0	0	0	9.4
1.0	1.0	2.5	0	0	0	0	0	0	0	9.24
1.0	0	1.0	3.25	0	0	0	0	0	0	9.01
1.0	0	0	1.0	4.0	0	0	0	0	0	8.66
1.0	0	0	0	1.0	4.75	0	0	0	0	8.09
1.0	0	0	0	0	1.0	5.5	0	0	0	7.07
1.0	0	0	0	0	0	1.0	6.25	0	0	5.0
1.0	0	0	0	0	0	0	1.0	7.0	0	0
1.0	0	0	0	0	0	0	0	1.0	7.75	-10.0

Результат для $n = 10$, $\varepsilon = 10^{-4}$:

Метод Зейделя:	Нев'язка:
Кількість ітерацій: 7	
12.16511802	-4.9e-6
-1.581823894	2.4e-16
-0.5377995212	8.3e-16
-0.8054245605	-6.4e-16
-0.6748598558	0
-0.7158080468	1.1e-15
-0.7960440296	2.0e-16
-1.019051839	1.6e-16
-1.592295169	4.5e-17
-2.654557787	5.0e-20

Результат для $n = 10$, $\varepsilon = 10^{-7}$:

Метод Зейделя:	Нев'язка:
Кількість ітерацій: 10	
[12.16512357]	[-7.1e-9]
-1.581827065	-1.7e-15
-0.5378004725	-8.3e-16
-0.8054259752	-8.2e-16
-0.6748608895	0
-0.7158089974	-9.9e-16
-0.7960448658	-1.7e-15
-1.019052593	1.7e-16
-1.592295854	-3.7e-17
-2.654558415]	-5.0e-20]