Київський національний університет ім. Т. Шевченка

Звіт
до лабораторної роботи №3
на тему:
“Інтерполяційне наближення функцій”

студентки 2-го курсу
Групи К-25 ФКНК
Нємкевич Дар’ї

Київ - 2022

Постановка задачі. Функція $f(x)$ задана на дискретній множині точок (сітці), які належать проміжку [a,b]. Потрібно

1) побудувати інтерполяційний поліном Ньютона $P_n(x)$ (величина n може змінюватися) за множиною

а) рівновіддалених вузлів $\overline{\omega}_h^E = \{x_i : x_i = a + ih,\ h = (b-a)/n,\ i = \overline{0,n}\}$ $(P_n^E(x))$.

б) чебишовських вузлів $\overline{\omega}_h^T = \{x_i : a \le x_0 < x_1 < x_2 \dots x_n \le b\}$ $(P_n^T(x))$.

2) Побудувати графіки :

графік 1) $f(x),\ P_n^E(x), P_n^T(x),\ x \in [a,b]$;

графік 2) $f(x) - P_n^E(x),\ f(x) - P_n^T(x),\ x \in [a,b]$.

Пояснити отриманий результат.

3) побудувати кубічний інтерполяційний природній сплайн $s(x)$ за множиною вузлів $\overline{\omega}_N = \{x_i : a \le x_0 < x_1 < x_2 \dots x_N \le b\}$ (величина N може змінюватися). Побудувати графіки : графік 1) $f(x),\ s(x),\ x \in [a,b]$;

графік 2) $f(x) - s(x),\ x \in [a,b]$.

Функція:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, \ -2 \le x \le 0, \\ 1 - 8(x - 0{,}5)^3, \ 0 \le x \le 1, \\ x^2 - 2x + 1, \ \ 1 \le x \le 3. \end{cases}$$

)

Теоретичні відомості

Нехай функція $f(x) \in C[a,b]$. Задача інтерполяції полягає у відшуканні невідомих значень функції $f(x)$ за її відомими значеннями $f(x_k)$ в точках $x_k \in [a;b]$, $k = \overline{0,n}$, які називають ***вузлами інтерполяції***. На підставі теореми Вейерштрасса розв'язок шукаємо у вигляді полінома $P_n(x)$, що відповідає ***інтерполяційним умовам***:

$$f(x_k) = P_n(x_k), \quad k = \overline{0,n}.$$

Тоді для знаходження наближеного значення функції в довільній точці $\tilde{x}$:

$$f(\tilde{x}) \approx P_n(\tilde{x}).$$

Через $(n+1)$ вузол інтерполяції можна побудувати єдиний поліном не вище n-го степеня. Інтерполяційний поліном можна побудувати у вигляді:
1) поліному Лагранжа;
2) поліному Ньютона.

Інтерполяційний поліном Ньютона

Розділеною різницею першого порядку називається величина:

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i};$$

другого порядку:

$$f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_i, x_{i+1}) - f(x_{i-1}, x_i)}{x_{i+1} - x_{i-1}};$$

(k+1) порядку:

$$f(x_i, ..., x_{i+k+1}) = \frac{f(x_{i+1}, ..., x_{i+k+1}) - f(x_i, ..., x_{i+k})}{x_{i+k+1} - x_i}.$$

Таблиця розділених ріниць має вигляд:

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & f(x_0) & f(x_0;x_1) & f(x_0;x_1;x_2) & \cdots & f(x_0;x_1;\ldots;x_n) \\
x_1 & f(x_1) & f(x_1;x_2) & f(x_1;x_2;x_3) & \cdots & \\
x_2 & f(x_2) & f(x_2;x_3) & f(x_1;x_2;x_3) & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\cdots & \cdots & f(x_{n-1};x_n) & & & \\
x_n & f(x_n) & & & &
\end{array}$$

На підставі цієї таблиці, використовучи перший її рядок, можемо записати ***інтерполянт Ньютона вперед***:

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ ... + f(x_0, x_1, ..., x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_{n-1}),$$

чи скориставшись останнім рядком, дістанемо ***інтерполяційну формулу Ньютона назад***:

$$P_n(x) = f(x_n) + f(x_{n-1}; x_n)(x - x_n) + \cdots$$
$$\cdots + f(x_0; x_1; \ldots; x_n)(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1).$$

Обирають ту чи іншу формули Ньютона, в залежності від того, де знаходиться точка x (в якій потрібно обчислити значення функції). Якщо ближче до точки x_0, то інтерполяційну формулу Ньютона вперед. Якщо ближче до x_n, то інтерполяційну формулу Ньютона назад.

Для практичного застосування найчастише використовують інтерполяційні поліноми Ньютона, оскільки для його обчислення можна застосовувати схему Горнера.

За точністю зручно слідкувати таким чином: якщо доданки $f(x_o; x_1; \ldots; x_k)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})$ в інтерполяційній формулі спадають достатньо швидко, то можна очікувати на гарну точність.

Вузли інтерполяції називаються ***рівновіддаленими***, якщо $x_i - x_{i-1} = h = const$, $x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{0, n}$.

Нехай $f(x_i) = y_i$. Величина $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ називається ***скінченою різницею першого порядку***.

Величина $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ називається ***скінченою різницею другого порядку***.

Величина $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$ називається ***скінченою різницею k-го порядку***.

Таблиця скінчених різниць:

$$\begin{array}{lllllll}
y_0 & \Delta y_0 & \Delta^2 y_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta^n y_0 \\
y_1 & \Delta y_1 & \Delta^2 y_1 & \cdots & \cdots & \Delta^{n-1} y_1 & \\
y_2 & \Delta y_2 & \Delta^2 y_2 & \cdots & \Delta^{n-2} y_{n-2} & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
\cdots & \Delta y_{n-1} & & & & & \\
y_n & & & & & &
\end{array}$$

Має місце рівність: $\Delta^k y_i = k! h^k f(x_i; \ldots; x_k)$.

Покладемо $x = x_0 + th$, $t = \dfrac{x - x_0}{h}$. Тоді ***інтерполяційні формули Ньютона для рівновіддалених вузлів*** набувають вигляду:

$$P_n(t) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1) \cdots (t-n+1),$$

$$P_n(t) = y_0 + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} t(t+1) \cdots +$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t+1) \cdots (t+n-1).$$

Оптимальний вибір вузлів

Для зменшення похибки інтерполяції необхідно в якості вузлів взяти нулі поліному Чебишова 1 роду. Для їх визначення використовують рекурентні співідношення:

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,$$

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x$$

чи в явному вигляді

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2},\ \ |x| \geqslant 1,$$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),\ \ |x| \leqslant 1.$$

Позначимо $\overline{T_n}(x) = 2^{1-n} T_n(x),\ \ |x| \leqslant 1.$

Лема 1. Серед усіх поліномів $P_n(x)$ степеня n із старшим коефіцієнтом, що дорівнює 1 багаточлен $\overline{T_n}(x)$ найменш відхиляється від нуля на проміжку $[-1, 1]$ та

$$||P_n(x)||_{C[-1,1]} \geqslant ||\overline{T_n}(x)||_{C[-1,1]} = 2^{1-n}$$

Лема 2. Система багаточленів Чебишова$T_n(x)$ є ортогональною на проміжку $[-1; 1]$ з ваговою функцією $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$(T_k(x), T_m(x))_{L_{2,\rho}[a,b]} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} T_k(x) T_m(x) dx =$$

$$= \begin{cases} = 0, \text{ якщо } k \neq m \\ \neq 0, \text{ якщо } k = m \end{cases}$$

Нулі полінома Чебишова $x \in [-1, 1]$: $x_k = \cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ $k = \overline{0, n-1}$; екстремуми: $x_k = \cos\dfrac{\pi k}{n}$, $\quad k = \overline{0, n}$.

Поліноми Чебишова 1 роду на проміжку [a;b]

За допомогою заміни $x = \frac{1}{2}((b-a)z + (b+a))$ переведемо проміжок $[-1, 1]$ в $[a, b]$. Тоді поліноми Чебишова запишуться таким чином:

$$T_n^{[a;b]}(x) = T_n^{[-1;1]}\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right)$$

Його нулі: $x_k = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$, $\quad k = \overline{0, n-1}$

Відповідно поліном із старшим коефіцієнтом 1 набуває вигляду:

$$\overline{T_n}^{[a;b]}(x) = (b-a)^n \cdot 2^{1-2n} T_n^{[-1;1]}\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right),$$

а його відхилення від нуля подамо у вигляді:

$$||\overline{T_n}^{[a;b]}(x)||_{C[a,b]} = (b-a)^n \cdot 2^{1-2n}.$$

Для побудови інтерполяційного поліному n-го степеня P_n необхідно в якості вузлів взяти $(n+1)$ корінь поліному Чебишова $(n+1)$-го степеня:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = \overline{0, n}.$$

При використанні цих вузлів похибка має вигляд:

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

Інтерполяційний природній кубічний сплайн

Інтерполяційним природнім кубічним сплайном називається поліном, для якого виконуються умови:
1) $s(x)$ – поліном степеня 3 для $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$;
2) $s(x) \in C^2_{[a;b]}$;
3) $s(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$;

4) $s''(a) = s''(b) = 0$ – умова природності.

Зауваження. Для побудови інтерполяційного кубічного сплайну можна замість умови 4) використовувати інші умови, але тоді сплайн не буде природнім: $s''(a) = A$; $s''(b) = B$ або $s'(a) = A$; $s'(b) = B$, або умови періодичності: $s(a) = s(b)$, $s'(a) = s'(b)$, $s''(a) = s''(b)$.

Розглянемо формули для побудови інтерполяційного природного кубічного сплайну s_i на проміжку $[x_{i-1}, x_i]$:

$$s_i = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3,$$

де c_i знаходяться з тридіагональної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$h_i c_{i-1} + 2c_i(h_i + h_{i+1}) + h_{i+1}c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right),$$

$$c_0 = c_n = 0;$$

решта коефіцієнтів знаходяться за формулами:

$$a_i = f_i; \qquad b_i = \frac{h_i}{2}c_i - \frac{h_i^2}{6}d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}; \qquad d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}.$$

Результати

Рівновіддалені вузли

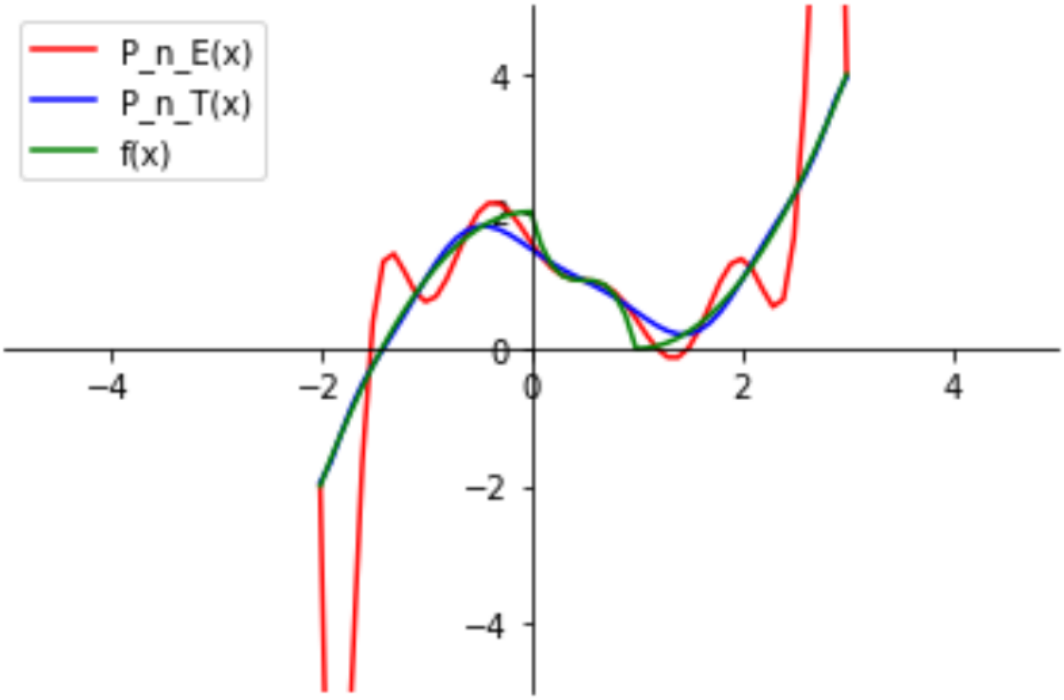
$$\begin{bmatrix} -2.0 \\ -1.5 \\ -1.1 \\ -0.64 \\ -0.18 \\ 0.27 \\ 0.73 \\ 1.2 \\ 1.6 \\ 2.1 \\ 2.5 \\ 3.0 \end{bmatrix}$$

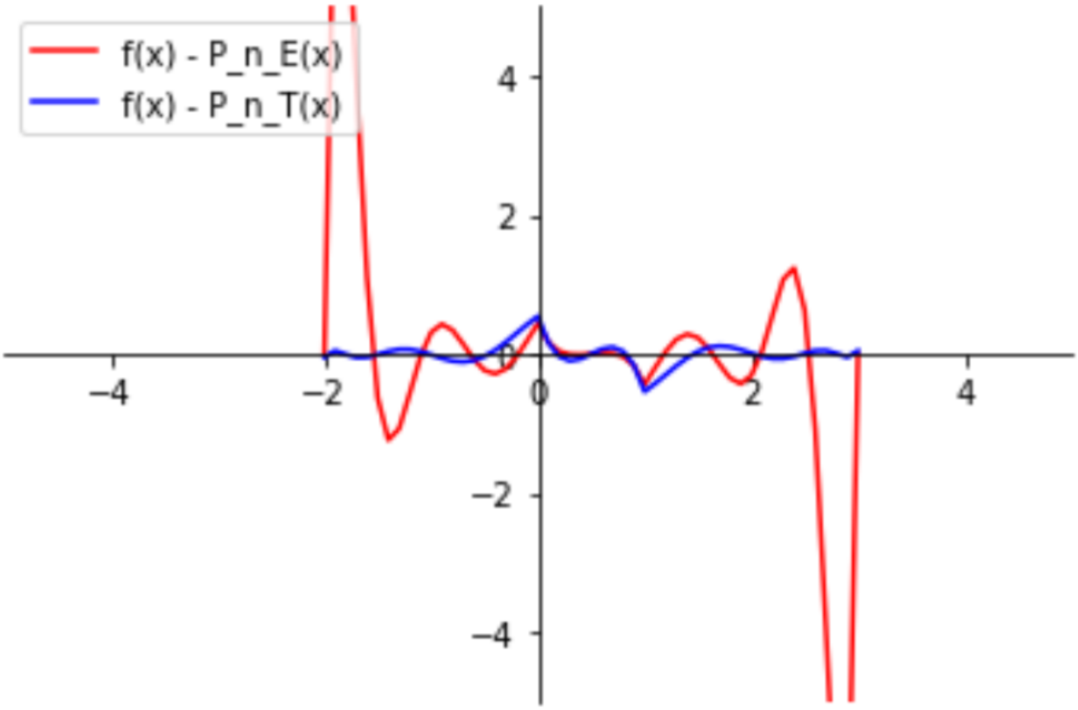
```
P = -2.0 +

3.5( x + 2.0 ) +

-1.0( x + 2.0 )( x + 1.5 ) +

-1.6e-16( x + 2.0 )( x + 1.5 )( x + 1.1 ) +

2.7e-16( x + 2.0 )( x + 1.5 )( x + 1.1 )( x + 0.64 ) +

-0.36( x + 2.0 )( x + 1.5 )( x + 1.1 )( x + 0.64 )( x + 0.18 ) +

0.70( x + 2.0 )( x + 1.5 )( x + 1.1 )( x + 0.64 )( x + 0.18 )( x - 0.27 ) +

-0.70( x + 2.0 )( x + 1.5 )( x + 1.1 )( x + 0.64 )( x + 0.18 )( x - 0.27 )( x - 0.73 ) +

0.50( x + 2.0 )( x + 1.5 )( x + 1.1 )( x + 0.64 )( x + 0.18 )( x - 0.27 )( x - 0.73 )( x - 1.2 ) +

-0.28( x + 2.0 )( x + 1.5 )( x + 1.1 )( x + 0.64 )( x + 0.18 )( x - 0.27 )( x - 0.73 )( x - 1.2 )( x - 1.6 ) +

0.13( x + 2.0 )( x + 1.5 )( x + 1.1 )( x + 0.64 )( x + 0.18 )( x - 0.27 )( x - 0.73 )( x - 1.2 )( x - 1.6 )( x - 2.1 ) +

-0.052( x + 2.0 )( x + 1.5 )( x + 1.1 )( x + 0.64 )( x + 0.18 )( x - 0.27 )( x - 0.73 )( x - 1.2 )( x - 1.6 )( x - 2.1 )( x
- 2.5 )
```

Чебишовські вузли

$$\begin{bmatrix} 3.0 \\ 2.8 \\ 2.5 \\ 2.0 \\ 1.5 \\ 0.83 \\ 0.17 \\ -0.46 \\ -1.0 \\ -1.5 \\ -1.8 \\ -2.0 \end{bmatrix}$$

```
3.8( x - 3.0 ) +

1.0( x - 3.0 )( x - 2.8 ) +

-5.0e-14( x - 3.0 )( x - 2.8 )( x - 2.5 ) +

-4.1e-14( x - 3.0 )( x - 2.8 )( x - 2.5 )( x - 2.0 ) +

-0.13( x - 3.0 )( x - 2.8 )( x - 2.5 )( x - 2.0 )( x - 1.5 ) +

-0.18( x - 3.0 )( x - 2.8 )( x - 2.5 )( x - 2.0 )( x - 1.5 )( x - 0.83 ) +

-0.12( x - 3.0 )( x - 2.8 )( x - 2.5 )( x - 2.0 )( x - 1.5 )( x - 0.83 )( x - 0.17 ) +

-0.056( x - 3.0 )( x - 2.8 )( x - 2.5 )( x - 2.0 )( x - 1.5 )( x - 0.83 )( x - 0.17 )( x + 0.46 ) +

-0.023( x - 3.0 )( x - 2.8 )( x - 2.5 )( x - 2.0 )( x - 1.5 )( x - 0.83 )( x - 0.17 )( x + 0.46 )( x + 1.0 ) +

-0.0089( x - 3.0 )( x - 2.8 )( x - 2.5 )( x - 2.0 )( x - 1.5 )( x - 0.83 )( x - 0.17 )( x + 0.46 )( x + 1.0 )( x + 1.5 ) +

-0.0036( x - 3.0 )( x - 2.8 )( x - 2.5 )( x - 2.0 )( x - 1.5 )( x - 0.83 )( x - 0.17 )( x + 0.46 )( x + 1.0 )( x + 1.5 )( x
+ 1.8 )
```

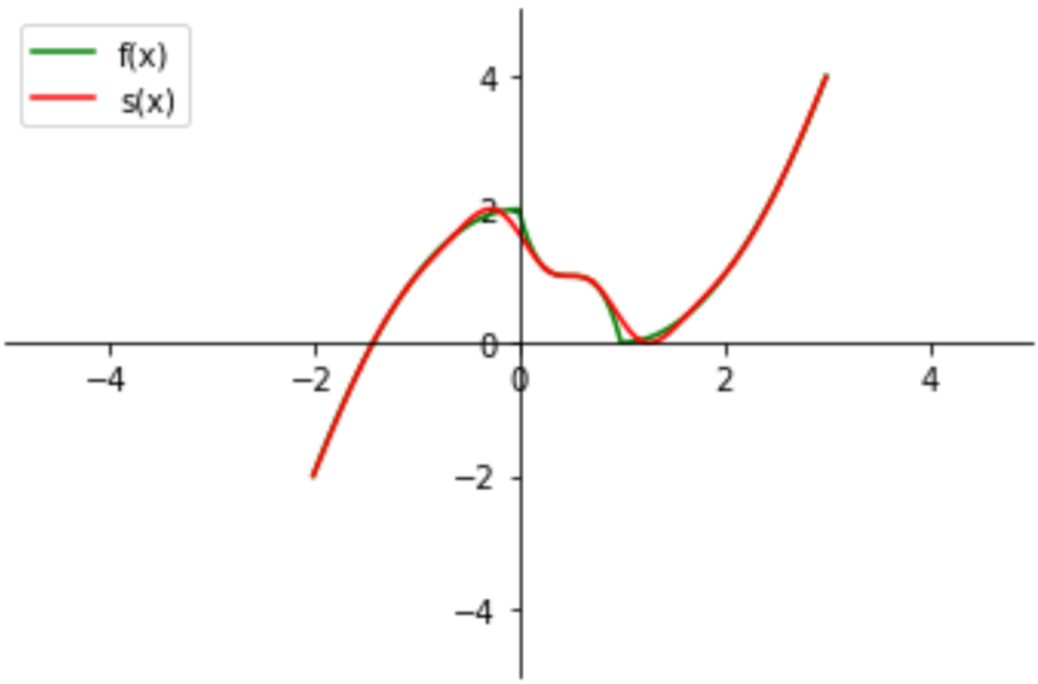


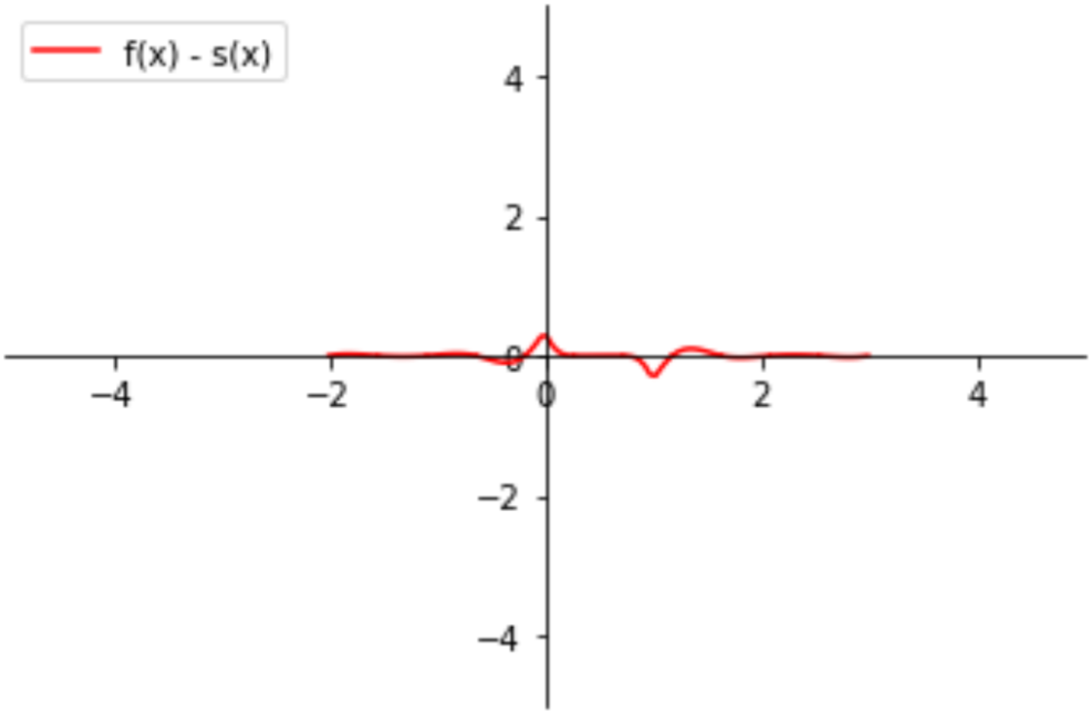


Як ми бачимо, справді, вузли Чебишева дають меншу похибку ніж рівновіддалені вузли.

Природній інтерполяційний кубічний сплайн:

```
-0.388429752066116  +  3.18785659492553 (x -  -1.54545454545455 ) +  -2.36014647349148 (x -  -1.54545454545455 )^2/2 +  -5.1
9232224168126 (x -  -1.54545454545455 )^3/6

0.809917355371901  +  2.06977464503336 (x -  -1.09090909090909 ) +  -2.55941410603407 (x -  -1.09090909090909 )^2/2 +  -0.43
8388791593700 (x -  -1.09090909090909 )^3/6

1.59504132231405  +  1.62395391585011 (x -  -0.636363636363636 ) +  0.597802897627773 (x -  -0.636363636363636 )^2/2 +  6.94
587740805606 (x -  -0.636363636363636 )^3/6

1.96694214876033  +  -0.929226672070169 (x -  -0.181818181818182 ) +  -11.8317974844770 (x -  -0.181818181818182 )^2/2 +  -2
7.3451208406305 (x -  -0.181818181818182 )^3/6

1.09391435011270  +  -1.21448524409836 (x -  0.272727272727273 ) +  10.5766597675529 (x -  0.272727272727273 )^2/2 +  49.298
6059544659 (x -  0.272727272727273 )^3/6

0.906085649887303  +  -1.21448524409836 (x -  0.727272727272727 ) +  -10.5766597675530 (x -  0.727272727272727 )^2/2 +  -46.
5373029772330 (x -  0.727272727272727 )^3/6

0.0330578512396693  +  -0.929226672070169 (x -  1.18181818181818 ) +  11.8317974844770 (x -  1.18181818181818 )^2/2 +  49.29
86059544659 (x -  1.18181818181818 )^3/6

0.404958677685950  +  1.62395391585011 (x -  1.63636363636364 ) +  -0.597802897627775 (x -  1.63636363636364 )^2/2 +  -27.34
51208406305 (x -  1.63636363636364 )^3/6

1.19008264462810  +  2.06977464503336 (x -  2.09090909090909 ) +  2.55941410603410 (x -  2.09090909090909 )^2/2 +  6.9458774
0805612 (x -  2.09090909090909 )^3/6

2.38842975206612  +  3.18785659492553 (x -  2.54545454545455 ) +  2.36014647349145 (x -  2.54545454545455 )^2/2 +  -0.438388
791593825 (x -  2.54545454545455 )^3/6

4.00000000000000  +  3.72425352071905 (x -  3.00000000000000 ) +  0 (x -  3.00000000000000 )^2/2 +  -5.19232224168119 (x -
3.00000000000000 )^3/6
```




f(x) - s(x)
4
2
0
−2
−4
−4
−2
2
4