5. Побудувати таблиці функції Лобачевського $F(x) = -\int\limits_0^x \ln\cos t dt$ з 2 правильними значущими цифрами на проміжку $[0; \pi/2]$ з кроком $\pi/36$, побудувати графік функції. Використати формулу правих прямокутників, правило Рунге.

Формула правих прямокутників:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(b),$$

оцінка залишкового члена квадратурної формули:

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{2}.$$

Складена формула з оцінкою залишкового члена мають вигляд:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)),$$

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_1(b-a)h}{2}.$$

Алгебраїчний степінь точності квадратурної формули правих прямокутників, так саме як і лівих, дорівнює 0, порядок точності складеної формули – 1, а формули по одному проміжку – 2.

Правило Рунге

Величина похибки чисельного інтегрування залежить від кроку h та від гладкості підінтегральної функції $f(x)$. Наприклад, величина M_i, яка є складовою оцінки залишкових членів, може сильно змінюватись від точки до точки та невідома заздалегідь. Якщо величина похибки велика, то її можна зменшити за рахунок зменшення кроку, але для цього необхідно вміти оцінювати похибку апостеріорно, наприклад, методом Рунге.

Апостеріорна оцінка похибки. Розглянемо деяку складену квадратурну формулу, яка має порядок точності p, з кроком h та $h/2$:

$I = I_h + ch^p + o(h^p),\ (I)$

$I = I_{\frac{h}{2}} + c\left(\frac{h}{2}\right)^p + o(h^p),\ (II)$

де ch^p – головний член похибки квадратурної формули, c не залежить від h.

$(I)-(II)\ :\ I_{\frac{h}{2}} - I_h \approx ch^p - c\left(\frac{h}{2}\right)^p;\ c\left(\frac{h}{2}\right)^p \approx \frac{(I_{\frac{h}{2}} - I_h)}{2^p-1}$ – підставляємо в (II) і отримуємо *апостеріорну оцінку похибки* інтеграла I за допомогою наближення $I_{\frac{h}{2}}$ за *правилом Рунге*:

$$|I - I_{\frac{h}{2}}| \approx \frac{\left|I_{\frac{h}{2}} - I_h\right|}{2^p - 1}. \qquad (16)$$

Обчислення інтеграла із заданою точністю. Алгоритм обчислення інтеграла з заданою точністю ε за допомогою правила Рунге:

1) Наближено обчислюємо інтеграл з кроками h та $\frac{h}{2}$, оцінюємо похибку за формулою (16).

2) Якщо $\frac{\left|I_{\frac{h}{2}} - I_h\right|}{2^p-1} > \varepsilon$, то наближено обчислюємо інтеграл з кроком $\frac{h}{4}$ і обчислюємо похибку $|I - I_{\frac{h}{4}}|$.

3) Процес обчислення інтеграла $I_{\frac{h}{2^i}}$, $i = 1, 2, ..., n$, з двічі меншим кроком продовжуємо, поки не виконається умова $\frac{\left|I_{\frac{h}{2^n}} - I_{\frac{h}{2^{n-1}}}\right|}{2^p-1} \leqslant \varepsilon$.

4) Тоді $I \approx I_{\frac{h}{2^n}}$ з точністю ε.

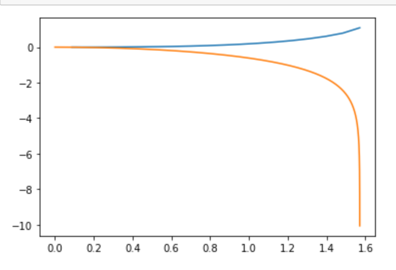
In [1]:
```python
import numpy as np
from sympy import *
import matplotlib.pyplot as plt
```

In [19]:
```python
def right_rectangles(f, a, b, h):
    result = 0
    for x in np.arange(a, b, h):
        result += h * f(x + h)
    return result

f = lambda x: np.log(np.cos(x))
a, b = -np.pi/2, 0
epsilon = 0.001
step = np.pi/36
h = step
I1 = right_rectangles(f, a, b, h)
I2 = right_rectangles(f, a, b, h/2)
while np.abs(I1-I2) > epsilon :
    h /= 2
    I1 = I2
    I2 = right_rectangles(f, a, b, h/2)
h /= 2;

table = [[i*step, -right_rectangles(f, -i*step, b, h)] for i in range(1, 19)]
Matrix(np.round(table, 5))
```

Out[19]:

$$\begin{bmatrix} 0.08727 & 0.00011 \\ 0.17453 & 0.00089 \\ 0.2618 & 0.00301 \\ 0.34907 & 0.00717 \\ 0.43633 & 0.01411 \\ 0.5236 & 0.0246 \\ 0.61087 & 0.0395 \\ 0.69813 & 0.05974 \\ 0.7854 & 0.08638 \\ 0.87266 & 0.12066 \\ 0.95993 & 0.16404 \\ 1.0472 & 0.21833 \\ 1.13446 & 0.28588 \\ 1.22173 & 0.36988 \\ 1.309 & 0.47502 \\ 1.39626 & 0.60914 \\ 1.48353 & 0.78846 \\ 1.5708 & 1.0879 \end{bmatrix}$$

In [17]:
```python
plt.plot([x[0] for x in table], [y[1] for y in table])
x = np.arange(0, np.pi/2, h)
plt.plot(x, f(x))
plt.show()
```



14. Наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x^2)}}$ за допомогою методу обрізання границь з точністю $\varepsilon = 0,5$. Використати метод лівих прямокутників, оцінку залишкових членів.

Метод обрізання границь також використовує розбиття інтеграла на суму інтегралів. Наприклад, для обчислення з точністю ε невласного інтеграла II роду з особливою точкою c можна представити його у вигляді такої суми:

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{c-\delta_1} f(x)dx + \int\limits_{c-\delta_1}^{c+\delta_2} f(x)dx + \int\limits_{c+\delta_2}^b f(x)dx. \quad (27)$$

При цьому величини δ_1, δ_2 вибирають, наприклад, щоб виконувалась умова:

$$\left|\int\limits_{c-\delta_1}^{c+\delta_2} f(x)dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тоді інтеграли $\int\limits_a^{c-\delta_1} f(x)dx$, $\int\limits_{c+\delta_2}^b f(x)dx$ наближено обчислюються чисельними методами також з точністю $\frac{\varepsilon}{3}$.

Зауваження. Для невласних інтегралів II роду з особливими точками $c_1, c_2, ..., c_m$ розв'язок будується аналогічно (27):

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{c_1-\delta_1^1} f(x)dx + \int\limits_{c_1-\delta_1^1}^{c_1+\delta_1^2} f(x)dx + \int\limits_{c_1+\delta_1^2}^{c_2-\delta_2^1} f(x)dx +$$

$$+ \int\limits_{c_2-\delta_2^1}^{c_2+\delta_2^2} f(x)dx + ... + \int\limits_{c_m-\delta_m^1}^{c_m+\delta_m^2} f(x)dx + \int\limits_{c_m+\delta_m^2}^b f(x)dx,$$

при цьому кожен інтеграл обчислюється з точністю $\frac{\varepsilon}{2m+1}$.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x^2)}} = \underbrace{\int\limits_0^\delta \frac{dx}{\sqrt{x(1+x^2)}}}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_\delta^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x^2)}}}_{I_2}$$

$$I_1 \leq \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \int\limits_0^\delta \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{\delta}}{\sqrt{1+\delta^2}}$$

$$\delta = 0,01 \Rightarrow I_1 \leq 0,2 = \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1 = 0,5 - 0,2 = 0,3$$

Формула лівих прямокутників. Якщо в інтегралі замінити підінтегральну функцію сталою функцією, значення якої співпадає із значенням функції в лівому вузлі, то отримаємо формулу лівих прямокутників:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \int\limits_a^b f(a)dx = (b-a)f(a),$$

використавши оцінку залишкового члена інтерполяції (5), отримаємо оцінку залишкового члена квадратурної формули:

$$|R(f)| = \left|\int\limits_a^b f(x)dx - (b-a)f(a)\right| = \left|\int\limits_a^b (f(x) - f(a))dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b M_1(x-a)dx = \frac{M_1(b-a)^2}{2}, \quad M_1 = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

Порядок точності формули лівих прямокутників дорівнює 2.

Складена формула лівих прямокутників, яка отримується розбиттям проміжку $[a, b]$ на проміжки довжини h та додаванням інтегралів по цих проміжках, має вигляд:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_{k-1})dx = h(f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1})),$$

тоді її залишковий член:

$$|R(f)| \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{M_{1,k}(x_k - x_{k-1})^2}{2} \leqslant \frac{nM_1h^2}{2} = \frac{M_1(b-a)h}{2},$$

де $M_{1,k} = \max\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} |f'(x)|$, $k = \overline{1, n}$.

Порядок точності складеної квадратурної формули лівих прямокутників дорівнює 1.

$$I_2 = \int\limits_{0,01}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)^2}} \qquad \varepsilon_2 = 0,3$$

$$|R(f)| \leq \frac{M_1(b-a)h}{2} \leq \varepsilon_2$$

$$M_1 = \max_{x\in[0,01;1]} \left|-\frac{3x^2+1}{2(x^3+x)^{3/2}}\right| = 500$$

$$h \leq \frac{2\cdot 0,3}{500(1-0,01)} \approx 0,0012$$

$$h = 0,0001$$

In [30]:
```python
def left_rectangles(f, a, b, h):
    result = 0
    for x in np.arange(a, b, h):
        result += h * f(x)
    return result

f = lambda x: 1/np.sqrt(x*(1+x**2))
a, b = 0.01, 1
epsilon1 = 0.2
h = 0.0001

I1 = epsilon1
I2 = left_rectangles(f, a, b, h)

print(f"I = {I1:.5} + {I2:.5} = {I1 + I2:.5}")
```

```
I = 0.2 + 1.6545 = 1.8545
```

31. Наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_2^\infty \frac{dx}{1+x^3}dx$ за допомогою методу обрізання границь з точністю $\varepsilon = 0,005$. Використати метод лівих прямокутників, правило Рунге.

Метод обрізання границь. Невласний інтеграл I роду вигляду $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ можна представити у вигляді суми:

$$I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^A f(x)dx + \int\limits_A^{+\infty} f(x)dx \qquad (33)$$

Величину A, наприклад, вибирають таким чином, щоб виконувалась умова

$$\left|\int\limits_A^{+\infty} f(x)dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

тоді інтеграл $\int\limits_a^A f(x)dx$ також обчислюють з точністю $\frac{\varepsilon}{2}$.

$$I = \int\limits_2^\infty \frac{dx}{1+x^3} \qquad \varepsilon = 0,005$$

$$I = \underbrace{\int\limits_2^A \frac{dx}{1+x^3}}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_A^\infty \frac{dx}{1+x^3}}_{I_2} \qquad 1+x^3 > 1+x^2 \ (x \geqslant 2) \quad \frac{1}{1+x^3} < \frac{1}{1+x^2}$$

$$I_2 \leq \int\limits_A^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}(x)\Big|_A^\infty = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,A$$

$$A = 400 \Rightarrow I_2 \leq 0,0025 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

In [31]:
```python
f = lambda x: 1/(1+x**3)
a, b = 2, 400
epsilon = 0.005
h = 0.1
I1 = left_rectangles(f, a, b, h)
I2 = left_rectangles(f, a, b, h/2)
while np.abs(I1-I2) > epsilon :
    h /= 2
    I1 = I2
    I2 = left_rectangles(f, a, b, h/2)
print(f"I = {I2:.5} + {epsilon/2} = {I2 + epsilon/2:.5}")
```

```
I = 0.122 + 0.0025 = 0.1245
```

In [ ]: