Київський національний університет імені Т.Шевченка

Звіт

до лабораторної роботи №2
на тему:

«Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь»

Студентки 2-ого курсу
Групи К-25 ФКНК
Нємкевич Дар'ї

Київ
2022

Зміст

Постановка задачі

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$Ax = b,$$

де A – матриця розмірності $n \times n$, $det A \neq 0$, отже розв'язок системи існує і він єдиний.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} n\cos\frac{\pi}{n} \\ n\cos\frac{\pi}{n-1} \\ ... \\ ... \\ n\cos\frac{\pi}{1} \end{pmatrix},$$

$n_0 = 10$, $(n = \overline{10,30})$,

$a_k = 1 + 0.75 \cdot k$.

Методом Гаусса знайти:

а) розв'язок системи $\bar{x}$;

б) нев'язку $\bar{r} = A\bar{x} - \bar{b}$;

в) число обумовленості матриці А;

г) визначник матриці А (знайдений за допомогою заданого прямого методу) ;

д) обернену матрицю A^{-1} (знайдену за допомогою заданого прямого методу), вивести також матрицю $A^{-1} \cdot A$.

Методом Зейделя знайти:

а) розв'язок системи $\bar{x}$, отриманий з точністю ε $(\varepsilon_0 = 10^{-4})$;

б) нев'язку $\bar{r} = A\bar{x} - \bar{b}$;

в) вивести кількість ітерацій.

Метод Гаусса

(з вибором головного елемента по стовпцях)

Покладемо $A_0 = A$. Ведучим елементом обирається максимальний по модулю елемент стовпця, що розглядається: $a_{lk} = \max_i |a_{ik}^{(k-1)}|$, $i = \overline{k, n}$. Для того щоб ведучий елемент

зайняв відповідне місце, переставляються рядки k та l в матриці A_{k-1} за допомогою матриці перестановок:

$$\tilde{A}_k = P_k A_{k-1},$$

де P_k – це матриця перестановок, отримана з одиничної матриці перестановкою k та l рядків:

$$P_k = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ l \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array}$$

Прямий хід Гаусса в матричній формі:

$$A_k = M_k \tilde{A}_k,$$

де M_k – матриця розмірності $n \times n$:

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & m_{kk} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & m_{(k+1)k} & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & m_{nk} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix},$$

$$m_{kk} = \frac{1}{\tilde{a}_{kk}^{(k)}}, \quad m_{ik} = \frac{-\tilde{a}_{ik}^{(k)}}{\tilde{a}_{kk}^{(k)}}, \quad i = \overline{k+1, n}.$$

За допомогою прямого ходу методу Гаусса в матричній формі:

$$M_n P_n ... M_2 P_2 M_1 P_1 A x = M_n P_n ... M_2 P_2 M_1 P_1 b,$$

зводимо систему до вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + ... + a_{1n}^{(1)} x_n = & a_{1(n+1)}^{(1)}; \\ \qquad\quad x_2 + ... + a_{2n}^{(2)} x_n = & a_{2(n+1)}^{(2)}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = & a_{n(n+1)}^{(n)}. \end{cases}$$

Розв'язок знаходимо за допомогою зворотнього ходу Гаусса:

$$x_n = a_{n(n+1)}^{n}, \quad x_i = a_{i(n+1)}^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)}, \quad i = \overline{n-1, 1}.$$

Складність методу Гаусса: $Q(n) = \frac{2}{3} n^3 + O(n^2)$.

Зауваження. Методом Гаусса з вибором головного можна знайти визначник:

$$det A = (-1)^p \, \tilde{a}_{11}^{(1)} \, \tilde{a}_{22}^{(2)} \, ... \, a_{nn}^{(n)} = (-1)^p \, a_{11}^{(0)} \, a_{22}^{(1)} \, ... \, a_{nn}^{(n-1)},$$

де p – кількість перестановок.

Знаходження оберненої матриці A^{-1} методом Гаусса з вибором головного елементу

$$A, \; det A \neq 0$$

Із означення оберненої матриці маємо:

$$AA^{-1} = A^{-1} A = E$$

Позначимо:

$$X = A^{-1}$$

Для знаходження оберненої матриці X маємо матричне рівняння

$$AX = E$$

$$X = \{x_i\}_{i=1}^n, \; E = \{e_i\}_{i=1}^n,$$

або

$$Ax_i = e_i, \; i = \overline{1, n}$$

Нехай

$$A = LU,$$

де U – верхня трикутна матриця на діагоналі – 1, L – нижня трикутна матриця. Тоді

$$LUx_i = e_i, \; i = \overline{1, n},$$

Позначимо

$$Ux_i = y_i,\ i = \overline{1,n}$$

Тоді

$$Ly_i = e_i,\ i = \overline{1,n}$$

З останніх систем знайдемо вектори $y_i,\ i = \overline{1,n}$ та перейдемо до розв'язання таких систем:

$$Ux_i = y_i,\ i = \overline{1,n}$$

Звідки одержимо вектори $x_i,\ i = \overline{1,n}$, які є стовпцями оберненої матриці:

$$A^{-1} = X = \{x_i\}_{i=1}^n.$$

Важливо знати похибку, яка виникає при розв'язанні СЛАР:

$$\delta(x) = \frac{\|x - \overline{x}\|}{\|x\|}$$

$||x||$ – норма в просторі H
1) $||x|| > 0$, якщо $x \neq 0$; $||0|| = 0$
2) $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$
3) $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y|| \qquad \forall x, y, \alpha \in H$

$$\|x\|_p = (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p)^{\frac{1}{p}},\ 1 \leqslant p <\leqslant \infty;\ \|x\|_\infty = \max_{j=\overline{1,n}} |x_j|$$

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p$$

Матрична $\|A\|_p$ та векторна $\|x\|_p$ норми називають узгодженими, якщо

$$\|Ax\|_p \leqslant \|A\|_p \|x\|_p$$

$$\|A\|_1 = \max_{k=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{jk}|, \ \|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|,$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(AA^*)}, \ \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}$$

$\lambda_{max}(AA^*)$ – максимальне власне число матриці AA^*

$$\|A\|_\infty = \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|, \ \|x\|_\infty = \max_{j=\overline{1,n}} |x_j|$$

Розглянемо систему

$$A\overline{x} = \overline{b} \tag{3}$$

В (3) вектор правих частин заданий наближено. Оцінимо похибку, яка при цьому буде виникати

Із (1) маємо $x = A^{-1}b$

Із (2): $\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$

Тоді

$$x - \overline{x} = A^{-1}(b - \overline{b})$$

$$\|x - \overline{x}\| = \|A^{-1}(b - \overline{b})\| \leqslant \|A^{-1}\| \|b - \overline{b}\| \frac{\|A\overline{x}\|}{\|A\overline{x}\|}, \ \overline{b} = A\overline{x}$$

$$\delta(x) = \frac{\|x - \overline{x}\|}{\|x\|} \leqslant \|A^{-1}\| \|A\| \delta(b),$$

$$\delta(x) = \frac{\|x - \overline{x}\|}{\|x\|} \leqslant \|A^{-1}\| \|A\| \delta(b),$$

де величина ν(A) = cond(A) = $||A^{-1}|| \, ||A||$ називається числом обумовленості, це число є мірою невизначеності розв'язку у разі неточних вихідних даних.

Результат для n = 10:

```
Розв'язок системи:
[ 12.16512358 ]
[ -1.581827069 ]
[ -0.5378004739 ]
[ -0.8054259772 ]
[ -0.674860891 ]
[ -0.7158089988 ]
[ -0.796044867 ]
[ -1.019052594 ]
[ -1.592295855 ]
[ -2.654558416 ]
```

```
Нев'язка:
[ 3.4e-11 ]
[ 2.4e-11 ]
[ 4.7e-11 ]
[ 3.9e-11 ]
[ 6.5e-11 ]
[ 3.8e-11 ]
[ 2.7e-11 ]
[ 1.3e-10 ]
[ 7.3e-11 ]
[ 0 ]
```

Детермінант: 446817.4833984375

Обернена матриця:

1.1	-2.2e-6	3.9e-6	-9.8e-6	3.2e-5	-0.00013	0.0006	-0.0033	0.021	-0.15
-0.64	0.57	-2.2e-6	5.6e-6	-1.8e-5	7.3e-5	-0.00035	0.0019	-0.012	0.083
-0.19	-0.23	0.4	1.7e-6	-5.5e-6	2.2e-5	-0.0001	0.00057	-0.0036	0.025
-0.29	0.07	-0.12	0.31	-8.1e-6	3.2e-5	-0.00015	0.00085	-0.0053	0.037
-0.21	-0.018	0.031	-0.077	0.25	2.4e-5	-0.00011	0.00062	-0.0039	0.027
-0.19	0.0037	-0.0065	0.016	-0.053	0.21	-0.0001	0.00057	-0.0036	0.025
-0.17	-0.00067	0.0012	-0.0029	0.0096	-0.038	0.18	0.0005	-0.0031	0.022
-0.15	0.00011	-0.00019	0.00047	-0.0015	0.0061	-0.029	0.16	-0.0028	0.02
-0.14	-1.5e-5	2.6e-5	-6.6e-5	0.00021	-0.00086	0.0041	-0.022	0.14	0.018
-0.13	2.2e-6	-3.9e-6	9.8e-6	-3.2e-5	0.00013	-0.0006	0.0033	-0.021	0.15

Добуток оберненої та початкової матриць:

$$
\begin{bmatrix}
1.0 & 8.5e-22 & 1.7e-21 & 0 & 0 & 0 & -4.3e-19 & -3.5e-18 & 0 & 0 \\
0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 5.4e-20 & 2.2e-19 & 1.7e-18 & 1.4e-17 & 0 \\
2.4e-17 & 5.6e-17 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2.1e-17 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 1.1e-19 & 8.7e-19 & 6.9e-18 & 0 \\
-6.9e-18 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 1.4e-20 & 1.1e-19 & 4.3e-19 & 3.5e-18 & 2.8e-17 \\
-5.9e-17 & 0 & 0 & 6.9e-18 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & -2.8e-17 \\
1.4e-17 & 2.2e-19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 4.3e-19 & 0 & -2.8e-17 \\
-2.4e-17 & -2.7e-20 & -5.4e-20 & -2.2e-19 & 0 & 3.5e-18 & 2.8e-17 & 1.0 & 0 & -2.8e-17 \\
6.9e-18 & 6.8e-21 & 1.4e-20 & 5.4e-20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & -2.8e-17 \\
2.8e-17 & -8.5e-22 & -1.7e-21 & 0 & 0 & 0 & 4.3e-19 & 3.5e-18 & 0 & 1.0
\end{bmatrix}
$$

Число обумовленості: 27.1561791582892

Метод Зейделя

Метод Зейделя є ітераційним методом для розв'язання СЛАР $Ax = b$, розв'язок знаходимо із заданою точністю ε. Початкове наближення x^0 обираємо довільним чином. Ітераційний процес має вигляд:

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

Достатня умова збіжності 1. Якщо $\forall i : i = \overline{1,n}$ виконується нерівність

$$|a_{ii}| \geqslant \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|,$$

то ітераційний процес методу Зейделя збігається, при чому швидкість збіжності лінійна.

Достатня умова збіжності 2. Якщо $A = A^T > 0$, то ітераційний процес методу Зейделя збігається, при чому швидкість збіжності лінійна.

Умова припинення: $||x^n - x^{n-1}|| \leqslant \varepsilon$.

Необхідні і достатні умови збіжності. Для $\forall x^0$ ітераційний процес методу Зейделя збігається тоді і тільки

тоді, коли $|\lambda| < 1$, де λ – це корені нелінійного рівняння:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Для заданої матриці виконується перша достатня умова збіжності, отже можна застосувати метод Зейделя.

Результат для n = 10:

```
Метод Зейделя:
Кількість ітерацій:  7
⎡ 12.16511802 ⎤
⎢             ⎥
⎢-1.581823894 ⎥
⎢             ⎥
⎢-0.5377995212⎥
⎢             ⎥
⎢-0.8054245605⎥
⎢             ⎥
⎢-0.6748598558⎥
⎢             ⎥
⎢-0.7158080468⎥
⎢             ⎥
⎢-0.7960440296⎥
⎢             ⎥
⎢-1.019051839 ⎥
⎢             ⎥
⎢-1.592295169 ⎥
⎢             ⎥
⎣-2.654557787 ⎦
```

```
Нев'язка:
⎡-4.92876e-6  ⎤
⎢             ⎥
⎢  4.02725    ⎥
⎢             ⎥
⎢  5.54328    ⎥
⎢             ⎥
⎢  6.23748    ⎥
⎢             ⎥
⎢  6.49519    ⎥
⎢             ⎥
⎢  6.38698    ⎥
⎢             ⎥
⎢  5.78542    ⎥
⎢             ⎥
⎢    4.2      ⎥
⎢             ⎥
⎢-1.45519e-11 ⎥
⎢             ⎥
⎣  -8.70968   ⎦
```