КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК І КІБЕРНЕТИКИ

Звіт до лабораторної роботи №1 на тему

«Наближені методи розв'язання нелінійних рівнянь»

Студентки групи К-25

Нємкевич Дар'ї

Зміст

1. Постановка задачі.

Методами простої ітерації, Ньютона та модифікованим методом Ньютона знайти всі дійсні корені рівняння:

$$x^7 + x + 4 = 0$$

з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$. А також порівняти швидкість збіжності розглянутих методів за кількістю ітерацій.

2. Попередні обчислення.

Знайдемо кількість розв’язків заданого рівняння й проміжки, які їх містять.

$$x^7 + x + 4 = 0$$

Знайдемо похідну функції $f(x) = x^7 + x + 4$

$$f'(x) = 7x^6 + 1$$

Оскільки похідна функції завжди більше нуля і не змінює свій знак, то задане рівняння має лише один корінь. Знайдемо проміжок на якому він знаходиться:

Значення аргументу х	*Значення функції f(x)*	*Знак*
0	*4*	+
-1	*2*	+
-2	*-126*	-

Отже шуканий корінь лежить на проміжку [-2;-1].

3. Розв'язання задачі методом простої ітерації.

Метод простої ітерації застосовується до розв'язування нелінійного рівняння вигляду $x = \varphi(x)$.

Вибравши нульове наближення x_0, наступні наближення знаходяться за формулою $x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 0, 1, 2, \dots$.

Наведемо достатні умови збіжності методу простої ітерації.

Теорема 1. Нехай для обраного початкового наближення x_0 на проміжку $S = \{x: |x - x_0| \le \delta\}$ функція $\varphi(x)$ задовольняє умові Ліпшиця $|\varphi(x') - \varphi(x'')| \le q|x' - x''|$, x', $x'' \epsilon S$, де $0 < q < 1$, і виконується нерівність $|\varphi(x_0) - x_0| \le (1 - q)\delta$.

Тоді швидкість збіжності визначається нерівністю $|x_n - x_*| \le \frac{q^n}{1-q}|\varphi(x_0) - x_0|$.

Наведемо також апостеріорну оцінку, що характеризує збіжність методу простої ітерації: $|x_n - x_*| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$. З цієї нерівності одержимо $|x_n - x_*| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, звідки $|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-q}{q}\varepsilon$.

Спочатку рівняння $f(x) = 0$ замінюємо еквівалентним $x = \varphi(x)$.

$$x^7 + x + 4 = 0$$

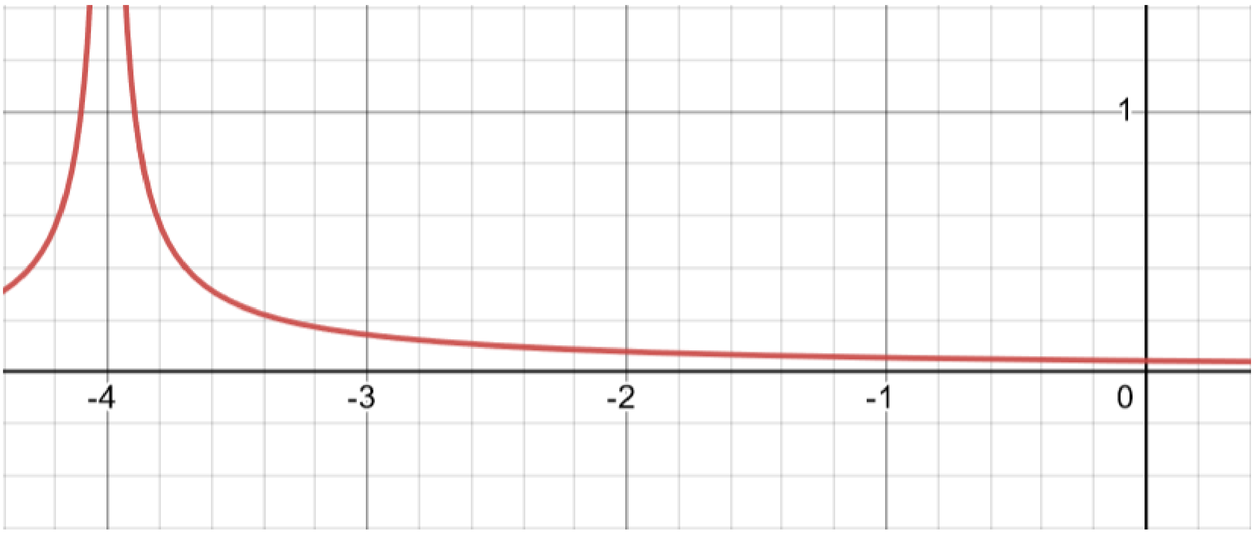
$$x^7 = -x - 4$$

$$x = -(x + 4)^{\frac{1}{7}}$$

Отже, $\varphi(x) = -(x + 4)^{\frac{1}{7}}$.

Метод простої ітерації збігається, якщо $|\varphi'(x)| < 1$ на відрізку, на якому шукаємо корінь. Перевіримо виконання даної умови на відрізку $[-2; -1]$.

$$|\varphi'(x)| = \left|-\frac{1}{7(x+4)^{\frac{6}{7}}}\right| = \frac{1}{7(x+4)^{\frac{6}{7}}}$$



Як бачимо на графіку функція монотонно спадає на проміжку

$[-2;-1]$. Тому максимум функції досягається у точці (-2; 0,07886). А отже умова $|\varphi'(x)| < 1$ виконується та $q \approx 0{,}07886$

Нехай $x_0 = -1{,}5$, тоді $\delta = 0{,}5$. Тоді

$$|\varphi(x_0) - x_0| = |\varphi(x_0) - x_0| = \left|-(x_0+4)^{\frac{1}{7}} - x_0\right| \approx \left|-(-1.5+4)^{\frac{1}{7}} + 1{,}5\right| = \left|-(2.5)^{\frac{1}{7}} + 1{,}5\right| \approx |-1{,}13985 + 1{,}5| = 0.36015$$

З іншої сторони,

$$(1-q)\delta = 0{,}5(1-0{,}07886) = 0{,}46057$$

Отже, умова $|\varphi(x_0) - x_0| \le (1-q)\delta$ також виконується. Тому метод збігається.

Знайдемо кількість ітерацій, що може знадобитися для досягнення заданої точності $\varepsilon = 10^{-5}$:

$$n \ge \left[\frac{\ln \frac{|\varphi(x_0) - x_0|}{(1-q)\varepsilon}}{\ln \frac{1}{q}}\right] + 1 = \left[\frac{\ln \frac{0.36015}{0{,}00001(1-0{,}07886)}}{\ln \frac{1}{0{,}07886}}\right] + 1 = \left[\frac{\ln \frac{0.36015}{0.0000092114}}{\ln 12.68069997}\right] + 1 = \left[\frac{\ln 39098.291248}{\ln 12.68069997}\right] + 1 = \left[\frac{10.573834}{2.540081}\right] + 1 = [4.16] + 1 = 4 + 1 = 5$$

Отже, маємо такий ітераційний процес: $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $k = \overline{0,5}$.

Нехай $f(x) = x^7 + x + 4$.

Результат:

k	x_k	|x_k-x_k-1|	f(x_k)
0	-1.5000000000	-	-14.5859375000
1	-1.1398522810	0.3601477190	0.3601477190
2	-1.1619791945	0.0221269134	-0.0221269134
3	-1.1606907161	0.0012884784	0.0012884784
*4	-1.1607659815	0.0000752654	-0.0000752654
*5	-1.1607615858	0.0000043958	0.0000043958

Апріорна оцінка - 5, апостеріорна оцінка – 4.

4. Розв'язання задачі методом Ньютона.

Метод Ньютона застосовується до розв'язання нелінійного рівняння

$f(x) = 0$, де $f(x) \in C^2[a; b]$.

На початку обчислень обирається початкове наближення x_0.

Наступні наближення обчислюються за формулою

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, \ldots, f'(x_n) \neq 0.$$

З геометричної точки зору x_{n+1} є значенням абсциси точки перетину дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $(x_n, f(x_n))$ з віссю абсцис. Тому метод Ньютона називають також методом дотичних.

Теорема 1 (про вибір початкового наближення). Якщо $f(x) \in C^2[a; b]$, $f(a)f(b) < 0$, $f''(x)$ не змінює знаку на $[a; b]$ і початкове наближення $x_0 \in [a; b]$ задовольняє умові $f(x_0)f''(x_0) > 0$, то можна обчислити єдиний корінь x_* рівняння $f(x) = 0$ метода Ньютона з будь-якою точністю.

Введемо позначення $m = \underset{x \in S}{min}|f'(x)|$, $M = \underset{x \in S}{max}|f''(x)|$.

Теорема 2 (про збіжність методу Ньютона). Нехай x_* – простий дійсний корінь рівняння $f(x) = 0$, $f(x) \in C^2(S)$, $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in S$, де $S = \{x: |x - x_0| \leq \delta\}$ і виконується нерівність $q = \frac{M|x_0 - x_*|}{2m} < 1$.

Тоді для $x_0 \in S$ метод Ньютона збігається, а для похибки справедлива оцінка $|x_n - x_*| \leq q^{2^n - 1}|x_0 - x_*|$.

Також варто зазначити, що метод Ньютона має квадратичну збіжність.

Як було показано раніше, рівняння $x^7 + x + 4 = 0$ має єдиний корінь, що належить проміжку $[-2; -1]$. Нехай $f(x) = x^7 + x + 4$. Тоді $f'(x) = 7x^6 + 1 > 0$ і $f''(x) = 42x^5 < 0$, де $x \in [-2; -1]$. Перевіримо умови збіжності:

$$m = \underset{x \in [-2;-1]}{min}|f'(x)| = |f'(-1)| = 8; M = \underset{x \in [-2;-1]}{max}|f''(x)| = |f''(-2)| = 1344.$$

Оберемо $x_0 = -1{,}5$, тоді $|x_0 - x_*| \leq 0{,}5$. З формули $q = \frac{M|x_0 - x_*|}{2m} < 1$ маємо $q = 42 > 1$, умова не виконується і ми не можемо порахувати апріорну оцінку кількості ітерацій. Тому звузимо проміжок і знову перевіримо умови збіжності.

Візьмемо проміжок [-1.25; -1.125] і $x_0 = -1{,}25$. $f(x_0)f''(x_0) > 0$.
$|x_0 - x_*| \le 0{,}125$. $m = \underset{x\in[-1.25;-1.125]}{min}|f'(x)| = |f'(-1.125)| = 15.191$;

$M = \underset{x\in[-1.25;-1.125]}{max}|f''(x)| = |f''(-1.25)| = 128.17$. З формули $q = \frac{M|x_0 - x_*|}{2m} < 1$ маємо $q = 0.527327 < 1$.

Отже, всі умови теореми про збіжність методу Ньютона виконані.

Знайдемо кількість ітерацій, що може знадобитися для досягнення заданої точності $\varepsilon = 10^{-5}$:

$$n_0(\varepsilon) = \left[\log_2 \frac{\ln \frac{|x_0 - x_*|}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{q}} + 1\right] + 1 = \left[\log_2 \frac{\ln \frac{0{,}125}{0{,}00001}}{\ln \frac{1}{0{,}527327}} + 1\right] + 1$$
$$= \left[\log_2 \frac{\ln 12500}{\ln 1{,}896357} + 1\right] + 1 = \left[\log_2 \frac{9{,}433483}{0{,}639935} + 1\right] + 1$$
$$= [\log_2 14{,}741314 + 1] + 1 = 5$$

Отже, маємо такий ітераційний процес: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = \overline{0,5}$.

Результат:

k	x_k	|x_k-x_k-1|	f(x_k)
0	-1.2500000000	-	-2.0183715820
1	-1.1771421773	0.0728578227	-0.3090029416
2	-1.1613959540	0.0157462233	-0.0115094930
3	-1.1607628090	0.0006331450	-0.0000177719
*4	-1.1607618283	0.0000009807	-0.0000000000
*5	-1.1607618283	0.0000000000	0.0000000000

Апріорна оцінка – 5, умова: $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$ ^ $|f(x_n)| \le \varepsilon$ виконується уже на 4 кроці.

5. Розв’язання задачі модифікованим методом Ньютона.

Всі викладки, зазначені до методу Ньютона, справедливі також для модифікованого методу Ньютона. Різниця між ними полягає лише в тому, що модифікований метод Ньютона, на відміну від методу Ньютона, дозволяє не обчислювати похідну $f'(x_n)$ на кожній ітерації. Ітераційний процес даного методу: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ f'(x_0) \neq 0$. Також це дозволяє позбутися можливого ділення на нуль на $n \geq 1$ ітераціях. Проте даний алгоритм має лінійну збіжність.

Використаємо міркування й розрахунки, які ми провели при використанні методу Ньютона. Всі умови теореми про збіжність методу Ньютона також застосовні й до модифікованого методу Ньютона.

Матимемо такий ітераційний процес: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$, який зупинимо по загальній формулі зупинки ітераційного процесу:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \ \varepsilon \ \hat{} \ |f(x_n)| \leq \varepsilon$$

Результат:

k	x_k	|x_k-x_k-1|	f(x_k)
0	-1.2500000000	-	-2.0183715820
1	-1.1771421773	0.0728578227	-0.3090029416
2	-1.1659879965	0.0111541808	-0.0959268479
3	-1.1625252935	0.0034627030	-0.0320956381
4	-1.1613667267	0.0011585668	-0.0109782287
5	-1.1609704420	0.0003962847	-0.0037824419
6	-1.1608339059	0.0001365361	-0.0013064270
7	-1.1607867474	0.0000471585	-0.0004516136
8	-1.1607704454	0.0000163020	-0.0001561623
9	-1.1607648083	0.0000056370	-0.0000540044
10	-1.1607628589	0.0000019494	-0.0000186766
11	-1.1607621847	0.0000006742	-0.0000064591

6. Висновок.

Отже, було наближено знайдено корінь рівняння $x^7 + x + 4 = 0$ з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$ методами простої ітерації, Ньютона та модифікованим методом Ньютона. Найефективнішими виявилися метод Ньютона та метод простої ітерації.

Метод Ньютона має квадратичну швидкість збіжності, а метод простої ітерації й модифікований метод Ньютона – лінійну швидкість збіжності. Тому в загальному метод Ньютона найефективніший з цих трьох, проте ефективність даного методу корелює зі складністю обчислення $f'(x_n)$ на кожній ітерації. Хоча методи простої ітерації й модифікований метод Ньютона є менш ефективними в порівнянні з методом Ньютона, вони дозволяють зробити обчислення простішими.