Київський національний університет імені Т.Шевченка

Звіт

до лабораторної роботи №2

на тему:

«Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь»

Студентки 2-ого курсу

Групи К-25 ФКНК

Нємкевич Дар’ї

Київ

2022

Зміст

Постановка задачі

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$Ax = b,$$

де A – матриця розмірності $n \times n$, $detA \neq 0$, отже розв'язок системи існує і він єдиний.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} n\cos\frac{\pi}{n} \\ n\cos\frac{\pi}{n-1} \\ \dots \\ \dots \\ n\cos\frac{\pi}{1} \end{pmatrix},$$

$n_0 = 10$, $(n = \overline{10,30})$,

$a_k = 1 + 0.75 \cdot k$.

Методом Гаусса знайти:

а) розв'язок системи $\bar{x}$;

б) нев'язку $\bar{r} = A\bar{x} - \bar{b}$;

в) число обумовленості матриці А;

г) визначник матриці А (знайдений за допомогою заданого прямого методу) ;

д) обернену матрицю A^{-1} (знайдену за допомогою заданого прямого методу), вивести також матрицю $A^{-1} \cdot A$.

Методом Зейделя знайти:

а) розв'язок системи $\bar{x}$, отриманий з точністю ε $(\varepsilon_0 = 10^{-4})$;

б) нев'язку $\bar{r} = A\bar{x} - \bar{b}$;

в) вивести кількість ітерацій.

Метод Гаусса

(з вибором головного елемента по стовпцях)

Покладемо $A_0 = A$. Ведучим елементом обирається максимальний по модулю елемент стовпця, що розглядається: $a_{lk} = \max\limits_i |a_{ik}^{(k-1)}|$, $i = \overline{k,n}$. Для того щоб ведучий елемент

зайняв відповідне місце, переставляються рядки k та l в матриці A_{k-1} за допомогою матриці перестановок:

$$\tilde{A}_k = P_k A_{k-1},$$

де P_k – це матриця перестановок, отримана з одиничної матриці перестановкою k та l рядків:

$$P_k = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ l \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array}$$

Прямий хід Гаусса в матричній формі:

$$A_k = M_k \tilde{A}_k,$$

де M_k – матриця розмірності $n \times n$:

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & m_{kk} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & m_{(k+1)k} & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & m_{nk} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix},$$

$$m_{kk} = \frac{1}{\tilde{a}_{kk}^{(k)}}, \quad m_{ik} = \frac{-\tilde{a}_{ik}^{(k)}}{\tilde{a}_{kk}^{(k)}}, \quad i = \overline{k+1,n}.$$

За допомогою прямого ходу методу Гаусса в матричній формі:

$$M_nP_n...M_2P_2M_1P_1Ax = M_nP_n...M_2P_2M_1P_1b,$$

зводимо систему до вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + ... + a_{1n}^{(1)}x_n = & a_{1(n+1)}^{(1)}; \\ \qquad\quad x_2 + ... + a_{2n}^{(2)}x_n = & a_{2(n+1)}^{(2)}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = & a_{n(n+1)}^{(n)}. \end{cases}$$

Розв'язок знаходимо за допомогою зворотнього ходу Гаусса:

$$x_n = a_{n(n+1)}^{n}, \quad x_i = a_{i(n+1)}^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)}, \quad i = \overline{n-1, 1}.$$

Складність методу Гаусса: $Q(n) = \frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$.

Зауваження. Методом Гаусса з вибором головного можна знайти визначник:

$$detA = (-1)^p\ \tilde{a}_{11}^{(1)}\ \tilde{a}_{22}^{(2)}\ ...\ a_{nn}^{(n)} = (-1)^p\ a_{11}^{(0)}\ a_{22}^{(1)}\ ...\ a_{nn}^{(n-1)},$$

де p – кількість перестановок.

Результат для n = 10:

```
Розв'язок системи:
[ 12.16512358
 -1.581827069
 -0.5378004739
 -0.8054259772
 -0.674860891
 -0.7158089988
 -0.796044867
 -1.019052594
 -1.592295855
 -2.654558416 ]
```

```
Нев'язка:
[3.4e-11
 2.4e-11
 4.7e-11
 3.9e-11
 6.5e-11
 3.8e-11
 2.7e-11
 1.3e-10
 7.3e-11
 0 ]
```

Детермінант: 446817.4833984375

Обернена матриця:

$$\begin{bmatrix} 1.1 & -2.2e-6 & 3.9e-6 & -9.8e-6 & 3.2e-5 & -0.00013 & 0.0006 & -0.0033 & 0.021 & -0.15 \\ -0.64 & 0.57 & -2.2e-6 & 5.6e-6 & -1.8e-5 & 7.3e-5 & -0.00035 & 0.0019 & -0.012 & 0.083 \\ -0.19 & -0.23 & 0.4 & 1.7e-6 & -5.5e-6 & 2.2e-5 & -0.0001 & 0.00057 & -0.0036 & 0.025 \\ -0.29 & 0.07 & -0.12 & 0.31 & -8.1e-6 & 3.2e-5 & -0.00015 & 0.00085 & -0.0053 & 0.037 \\ -0.21 & -0.018 & 0.031 & -0.077 & 0.25 & 2.4e-5 & -0.00011 & 0.00062 & -0.0039 & 0.027 \\ -0.19 & 0.0037 & -0.0065 & 0.016 & -0.053 & 0.21 & -0.0001 & 0.00057 & -0.0036 & 0.025 \\ -0.17 & -0.00067 & 0.0012 & -0.0029 & 0.0096 & -0.038 & 0.18 & 0.0005 & -0.0031 & 0.022 \\ -0.15 & 0.00011 & -0.00019 & 0.00047 & -0.0015 & 0.0061 & -0.029 & 0.16 & -0.0028 & 0.02 \\ -0.14 & -1.5e-5 & 2.6e-5 & -6.6e-5 & 0.00021 & -0.00086 & 0.0041 & -0.022 & 0.14 & 0.018 \\ -0.13 & 2.2e-6 & -3.9e-6 & 9.8e-6 & -3.2e-5 & 0.00013 & -0.0006 & 0.0033 & -0.021 & 0.15 \end{bmatrix}$$

Добуток оберненої та початкової матриць:

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 8.5e-22 & 1.7e-21 & 0 & 0 & 0 & -4.3e-19 & -3.5e-18 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 5.4e-20 & 2.2e-19 & 1.7e-18 & 1.4e-17 & 0 \\ 2.4e-17 & 5.6e-17 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.1e-17 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 1.1e-19 & 8.7e-19 & 6.9e-18 & 0 \\ -6.9e-18 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 1.4e-20 & 1.1e-19 & 4.3e-19 & 3.5e-18 & 2.8e-17 \\ -5.9e-17 & 0 & 0 & 6.9e-18 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & -2.8e-17 \\ 1.4e-17 & 2.2e-19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 4.3e-19 & 0 & -2.8e-17 \\ -2.4e-17 & -2.7e-20 & -5.4e-20 & -2.2e-19 & 0 & 3.5e-18 & 2.8e-17 & 1.0 & 0 & -2.8e-17 \\ 6.9e-18 & 6.8e-21 & 1.4e-20 & 5.4e-20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & -2.8e-17 \\ 2.8e-17 & -8.5e-22 & -1.7e-21 & 0 & 0 & 0 & 4.3e-19 & 3.5e-18 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Число обумовленості: 27.1561791582892

Метод Зейделя

Метод Зейделя є ітераційним методом для розв'язання СЛАР $Ax = b$, розв'язок знаходимо із заданою точністю ε. Початкове наближення x^0 обираємо довільним чином. Ітераційний процес має вигляд:

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

Достатня умова збіжності 1. Якщо $\forall i : i = \overline{1,n}$ виконується нерівність

$$|a_{ii}| \geqslant \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|,$$

то ітераційний процес методу Зейделя збігається, при чому швидкість збіжності лінійна.

Достатня умова збіжності 2. Якщо $A = A^T > 0$, то ітераційний процес методу Зейделя збігається, при чому швидкість збіжності лінійна.

Умова припинення: $||x^n - x^{n-1}|| \leqslant \varepsilon$.

Необхідні і достатні умови збіжності. Для $\forall x^0$ ітераційний процес методу Зейделя збігається тоді і тільки

тоді, коли $|\lambda| < 1$, де λ – це корені нелінійного рівняння:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \ldots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Для заданої матриці виконується перша достатня умова збіжності, отже можна застосувати метод Зейделя.

Результат для n = 10:

```
Метод Зейделя:
Кількість ітерацій:  7
⎡ 12.16511802 ⎤
⎢             ⎥
⎢-1.581823894 ⎥
⎢             ⎥
⎢-0.5377995212⎥
⎢             ⎥
⎢-0.8054245605⎥
⎢             ⎥
⎢-0.6748598558⎥
⎢             ⎥
⎢-0.7158080468⎥
⎢             ⎥
⎢-0.7960440296⎥
⎢             ⎥
⎢-1.019051839 ⎥
⎢             ⎥
⎢-1.592295169 ⎥
⎢             ⎥
⎣-2.654557787 ⎦
```

```
Нев'язка:
⎡-4.92876e-6  ⎤
⎢             ⎥
⎢   4.02725   ⎥
⎢             ⎥
⎢   5.54328   ⎥
⎢             ⎥
⎢   6.23748   ⎥
⎢             ⎥
⎢   6.49519   ⎥
⎢             ⎥
⎢   6.38698   ⎥
⎢             ⎥
⎢   5.78542   ⎥
⎢             ⎥
⎢     4.2     ⎥
⎢             ⎥
⎢-1.45519e-11 ⎥
⎢             ⎥
⎣  -8.70968   ⎦
```