

Глава 6

ТРЕХМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

6.1. Введение

Построение алгоритмов решения трехмерных задач теории упругости проводится аналогично тому, как это было описано в гл. 4 и 5 применительно к алгоритмам решения двумерных задач теории упругости и трехмерных задач о потенциальном течении, хотя ядра полученных интегральных уравнений будут, конечно, нными.

Большие потенциальные возможности МГЭ при решении трехмерных задач уже использовались рядом исследователей, которые анализировали напряженное состояние сложных трехмерных тел при помощи НМГЭ и ПМГЭ [1—11]. В настоящее время применяется ряд коммерческих вычислительных программ, основанных на этих алгоритмах.

6.2. Сингулярные решения

6.2.1. Решение для сосредоточенной силы в изотропной среде

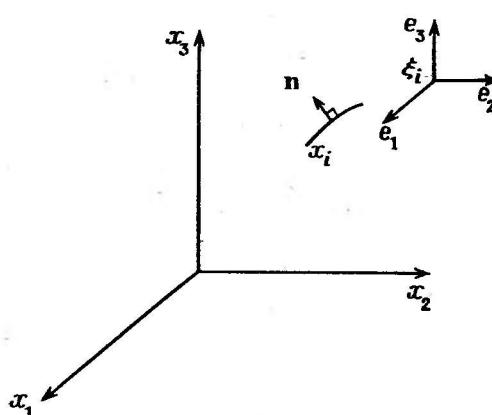


Рис. 6.1.

Полученное Кельвином [12] решение для сосредоточенной силы, действующей в трехмерной однородной изотропной упругой среде, имеет вид

$$u_i(x) = G_{ij}(x, \xi) e_j(\xi), \quad (6.1)$$

где $e_j(\xi)$ — единичные силы, приложенные в точке ξ_i и направленные по осям декартовой системы координат x_i (рис. 6.1), причем

$$G_{ij}(x, \xi) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{1}{r} \left[(3 - 4\nu) \delta_{ij} + \frac{y_i y_j}{r^2} \right]; \quad (6.2)$$

здесь μ и ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона среды соответственно и $y_i = x_i - \xi_i$, $r^2 = y_i y_i$.

Тензор деформации ϵ_{ij} определяется как

$$\epsilon_{ij} = B_{ijk}(x, \xi) e_k(\xi), \quad (6.3)$$

где

$$B_{ijk}(x, \xi) = -\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \left[(1-2\nu) \left(\delta_{ik} \frac{y_j}{r} + \delta_{jk} \frac{y_i}{r} \right) - \right. \\ \left. - \delta_{ij} \frac{y_k}{r} + \frac{3y_i y_j y_k}{r^3} \right], \quad (6.4)$$

а соответствующие напряжения равны

$$\sigma_{ij}(x) = T_{ijk}(x, \xi) e_k(\xi), \quad (6.5)$$

где

$$T_{ijk}(x, \xi) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \left[\left(\delta_{ik} \frac{y_j}{r} + \delta_{jk} \frac{y_i}{r} - \delta_{ij} \frac{y_k}{r} \right) (1-2\nu) + \right. \\ \left. + \frac{3y_i y_j y_k}{r^3} \right].$$

Усилия на проходящей через точку x поверхности с внешней нормалью n_i вычисляются обычным образом: $t_i(x) = \sigma_{ij}(x) n_j(x)$, откуда

$$t_i(x) = F_{ij}(x, \xi) e_j(\xi), \quad (6.6)$$

где

$$F_{ij}(x, \xi) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \left\{ (1-2\nu) \left(n_j \frac{y_i}{r} - n_i \frac{y_j}{r} \right) + \right. \\ \left. + \left[\frac{3y_i y_j}{r^3} + (1-2\nu) \delta_{ij} \right] \frac{y_k n_k}{r} \right\}. \quad (6.7)$$

Уравнения (6.1) — (6.7) дают нам все компоненты сингулярного или фундаментального решения и их производные, что позволяет в принципе решить любую трехмерную задачу теории упругости для изотропного тела.

6.2.2. Решение для сосредоточенной силы в анизотропной среде

Существует целый ряд формальных решений задачи о сосредоточенной силе, действующей в анизотропных телах, но замкнутое аналитическое решение имеется только в случае трансверсально-изотропного тела [13—15]. Большинство других решений не подходят для построения общего алгоритма, хотя и могут быть полезны в частных случаях.

В общем случае анизотропного тела ядро функции смещений $G_{ij}(x, \xi)$ можно представить [16] в виде

$$G_{ij}(x, \xi) = [1/(8\pi^2 r)] \oint_{|\lambda|=1} K_{ij}^{-1}(\lambda) ds, \quad (6.8)$$

где контурный интеграл вычисляется по окружности единичного радиуса в плоскости, нормальной к r и проходящей через x . Функция K_{ij}^{-1} имеет вид

$$K_{ij}^{-1}(\lambda) = [C_{ijklm} \lambda_k \lambda_m]^{-1}, \quad (6.9)$$

где C_{ijklm} — набор упругих постоянных.

Ядро в выражении для смещений можно вычислить или при помощи разложения в ряд (6.8), или прямым численным методом [17, 18], но обе эти процедуры неудовлетворительны для обычного численного расчета. В [16] приведено эффективное и изящное вычисление контурного интеграла в (6.8). Для этого вводится функция

$$M_{ij}(v_1, v_2) = \oint_{|\lambda|=1} K_{ij}^{-1}(\lambda) ds, \quad (6.10)$$

где v_1 и v_2 задают ориентацию вектора r . Тогда уравнение (6.8) можно записать в виде

$$G_{ij}(x, \xi) = [1/(8\pi^2 r)] M_{ij}(v_1, v_2). \quad (6.11)$$

Не зависящая от r (расстояния между точкой приложения нагрузки и точкой поля) функция $M_{ij}(v_1, v_2)$ не имеет особенностей при совпадении точки приложения нагрузки и точки поля и является непрерывно дифференцируемой.

Для нахождения деформации в точке x необходимо продифференцировать функцию G_{ij} :

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial x_k} = -\frac{1}{8\pi^2 r^2} \frac{y_k}{r} M_{ij} + \frac{1}{8\pi^2 r} \frac{\partial M_{ij}}{\partial v_a} \frac{\partial v_a}{\partial x_k}. \quad (6.12)$$

где производные M_{ij} не имеют особенностей и производные v_a можно вычислить в явном виде.

Используя (6.12), можно вычислить все требуемые компоненты решения задачи о сосредоточенной силе, помня о том, что при вычислении $M_{ij,a}$ необходимо избегать численного дифференцирования. Другие особенности этого решения можно найти в работе Уилсона и Круза [16].

6.3. Основные интегральные представления

Выведенные в гл. 4 прямое и непрямое интегральные представления равным образом применяются для анализа трехмерного напряженного состояния при условии, что используются соответст-

вующие трехмерному случаю ядра G , F , T и т. д., введенные в § 6.2. Более того, как и в задаче о трехмерном потенциальном течении, функция G удовлетворяет граничным условиям на бесконечности автоматически и поэтому не требуется введенный для двумерного представления НМГЭ вектор \mathbf{C} смещений тела как целого.

Порядок особенности равен $1/r$ для функции G и $1/r^2$ для функций F , B и T . Существование и интегрируемость подобных особенностей рассматривались в § 5.3.

6.4. Объемные силы

Наличие объемных сил произвольной природы требует схемы интегрирования по всему объему тела. Однако в случаях, когда объемные силы либо обусловливаются установившимся полем температурных градиентов, либо являются фильтрационными или центробежными силами, интегралы по объему от объемных сил можно свести к эквивалентным интегралам по поверхности. Следовательно, задача снова сводится лишь к интегрированию по границе.

6.4.1. Температурные деформации или фильтрационные градиенты

Во многих случаях необходимо проводить трехмерный анализ напряженного состояния тел с некоторым распределением температуры или гидравлического потенциала, который удовлетворяет следующему уравнению установившегося потенциального течения:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = -q, \quad (6.13)$$

где q либо равно нулю, либо постоянно по всей области. Полные напряжения в этом случае имеют вид [19—21]

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \gamma \delta_{ij} p, \quad (6.14)$$

где $\sigma'_{ij} = [2\mu\nu/(1-2\nu)] \delta_{ij} \partial u_m / \partial x_m + \mu (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$, а μ и ν — снова модуль сдвига и коэффициент Пуассона тела (в случае пористого тела эти постоянные имеют тот же смысл для скелета, а σ_{ij} соответствует тензору эффективных напряжений), $\gamma = -1$ для задачи фильтрации и $\gamma = \alpha E / (1-2\nu)$ в задачах о распределении температурных напряжений, где α — коэффициент теплового расширения и E — модуль Юнга.

Полное поверхностное усилие записывается в виде

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = \sigma'_{ij} n_j - \gamma p n_i = t'_i - \gamma p n_i, \quad (6.15)$$

а условия равновесия — в виде

$$\partial \sigma_{ij} / \partial x_j = \partial \sigma'_{ij} / \partial x_j - \gamma \partial p / \partial x_i = 0. \quad (6.16)$$

Теперь эти уравнения можно использовать для получения прямого и непрямого интегральных представлений при решении краевой задачи. Если заметить теперь, что второй член в (6.16) соответствует эквивалентной объемной силе, то прямое интегральное представление для смещений в любой внутренней точке можно записать в виде

$$u_j(\xi) = \int_S [t'_i(x) G_{ij}(x, \xi) - F_{ij}(x, \xi) u_i(x)] dS - \int_V \gamma [\partial p(x)/\partial x_i] G_{ij}(x, \xi) dv, \quad (6.17)$$

где $t'_i(x) = \sigma'_{ij}(x) n_j(x) = t_i + \gamma p n_i$. Используя теорему Гаусса — Остроградского, объемный интеграл в (6.17) можно переписать следующим образом:

$$-\int_V \gamma \frac{\partial p(x)}{\partial x_i} G_{ij}(x, \xi) dv = -\int_S \gamma p n_i(x) G_{ij}(x, \xi) dS + \int_S \gamma p(x) \frac{\partial G_{ij}(x, \xi)}{\partial x_i} dS. \quad (6.18)$$

Подставляя (6.18) в (6.17) и используя (6.15) для исключения t'_i (видоизмененного усилия), получаем

$$u_j(\xi) = \int_S [t_i(x) G_{ij}(x, \xi) - F_{ij}(x, \xi) u_i(x)] dS + \int_V \gamma p(x) \frac{\partial G_{ij}(x, \xi)}{\partial x_i} dv. \quad (6.19)$$

Для аналогичной задачи о температурных напряжениях подстановка ядра функции смещений G_{ij} из (6.2) позволяет переписать объемный интеграл так:

$$\int_V \gamma p(x) \frac{\partial G_{ij}(x, \xi)}{\partial x_i} dv = \frac{a(1+\nu)}{4\pi(1-\nu)} \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} p(x) dv, \quad (6.20)$$

где r — расстояние между точками x и ξ .

Для того чтобы преобразовать объемный интеграл в (6.19) и (6.20), отметим следующее свойство трехмерного оператора Лапласа [22]:

$$\nabla^2 r = 2/r. \quad (6.21)$$

Используя (6.13) с $q = 0$ и (6.21), можно переписать (6.20) в виде [22]

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} p(x) dv = \frac{1}{2} \int_V \left[\nabla^2 \frac{\partial r}{\partial x_j} p(x) - \frac{\partial r}{\partial x_j} \nabla^2 p(x) \right] dv. \quad (6.22)$$

Теорема Гаусса — Остроградского, примененная к правой части (6.22), приводит к равенству

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} p(x) dv = \frac{1}{2} \int_S \left[\frac{1}{r} \left(n_j - \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial n} \right) p(x) - \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial p(x)}{\partial n} \right] ds,$$

и поэтому (6.19) сводится к выражению

$$u_j(\xi) = \int_S [t_i(x) G_{ij}(x, \xi) - F_{ij}(x, \xi) u_i(x)] dS + \\ + \frac{\alpha(1+\nu)}{8\pi(1-\nu)} \int_S \left\{ \frac{1}{r} \left[n_j(x) - \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial n} \right] p(x) - \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial p(x)}{\partial n} \right\} dS, \quad (6.23)$$

в котором все объемные интегралы преобразованы к эквивалентным интегралам по границе.

После этого (6.23) обычным способом переписывается для точки ξ на границе. Для решения этого уравнения надо знать на границе потенциал $p(x)$ и его нормальную производную $\partial p(x)/\partial n$, которые могут быть получены из предыдущего решения основной задачи о потенциальном течении, рассмотренной в гл. 5. Эти замечания относятся также к случаю пористого тела, и различными будут только константы, стоящие перед вторым поверхностным интегралом в (6.23).

Ясно, что производные поля смещений, задаваемого уравнением (6.23), при подстановке в (6.14) приведут к напряжениям σ_{ij} [22, 23]:

$$\sigma_{ij}(\xi) = \sigma'_{ij}(\xi) - \gamma \delta_{ij} p(\xi) = \int_S [D_{hij}(x, \xi) t_k(x) - S_{hij}(x, \xi) u_k(x)] dS + \\ + \int_S \left[S_{ij}^*(x, \xi) p(x) - V_{ij}^*(x, \xi) \frac{\partial p(x)}{\partial n} \right] dS - \gamma \delta_{ij} p(\xi), \quad (6.24)$$

где

$$D_{hij} = \frac{1}{r^{a_0}} \frac{(1-2\nu)(\delta_{hi} r_{,j} + \delta_{hj} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,h}) + \beta r_{,i} r_{,j} r_{,h}}{4\pi\alpha_0(1-\nu)},$$

$$S_{hij} = \frac{2\mu}{r^6} \left[\beta \frac{dr}{dn} \left\{ (1-2\nu) \delta_{ij} r_{,h} + \nu (\delta_{ih} r_{,j} + \delta_{jh} r_{,i}) - \psi r_{,i} r_{,j} r_{,h} \right\} + \right. \\ \left. + \beta \nu (n_i r_{,j} r_{,h} + n_j r_{,i} r_{,h}) + (1-2\nu) (\beta n_h r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ih} + n_i \delta_{jh}) - \right. \\ \left. - (1-4\nu) n_h \delta_{ij} \right] / [4\pi\alpha_0(1-\nu)].$$

Для рассматриваемого здесь трехмерного случая $\alpha_0=2$, $\beta=3$ и $\psi=5$, тогда как в двумерном случае, рассмотренном в гл. 4, $\alpha_0=1$, $\beta=2$ и $\psi=4$. Для трехмерного случая

$$\begin{aligned} S_{ij}^* &= \frac{\alpha E}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + \left(n_i r_{,j} + n_j r_{,i} - 3 r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \right) \right], \\ V_{ij}^* &= -\frac{\alpha E}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{1-2\nu} \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right). \end{aligned}$$

В этих уравнениях дифференцирование проводится по переменной ξ , а нормаль вычисляется в точке x .

Используя эквивалентность прямого и непрямого представлений МГЭ, рассмотренную в разд. 3.6, получим из (6.19) эквивалентный интеграл смещений для непрямого представления

$$u_i(x) = \int_S G_{ij}(x, \xi) \varphi_j(\xi) dS + \int_V \gamma p(\xi) [\partial G_{ij}(x, \xi)/\partial \xi_i] dv, \quad (6.25)$$

где объемный интеграл можно преобразовать к поверхностному указанным выше способом. Отсюда находим

$$\begin{aligned} u_i(x) &= \int_S G_{ij}(x, \xi) \varphi_j(\xi) dS + \\ &+ \frac{\alpha(1+\nu)}{8\pi(1-\nu)} \int_S \left\{ \frac{1}{r} \left[n_j(\xi) - \frac{\partial r}{\partial \xi_j} \frac{\partial r}{\partial n} \right] p(\xi) - \frac{\partial r}{\partial \xi_j} \frac{\partial p(\xi)}{\partial n} \right\} dS. \quad (6.26) \end{aligned}$$

Подставляя выражения (6.26) в соотношения между деформациями и смещениями и используя зависимость между напряжениями и деформациями, получаем «псевдонапряжения»

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij}(x) &= \int_S T_{ijk}(x, \xi) \varphi_k(\xi) dS + \int_S [S'_{ij}(x, \xi) p(\xi) - \\ &- V'_{ij}(x, \xi) \partial p(\xi)/\partial n] dS, \quad (6.27) \end{aligned}$$

где $S'_{ij}(x, \xi)$ и $V'_{ij}(x, \xi)$ совпадают с определенными выше S_{ij}^* и V_{ij}^* , за исключением того, что дифференцирование проводится по x , а нормаль вычисляется в точке ξ .

Полное усилие $t_i(x)$ на проходящей через точку x поверхности с внешней нормалью $n(x)$ дается выражением

$$t_i(x) = \sigma_{ij}(x) n_j(x) = \sigma'_{ij}(x) n_j(x) - \gamma p(x) n_i(x),$$

или

$$\begin{aligned} t_i(x) &= \int_S F_{ij}(x, \xi) \varphi_j(\xi) dS + \int_S [S'_{ij}(x, \xi) n_j(x) p(\xi) - \\ &- V'_{ij}(x, \xi) n_j(x) \partial p(\xi)/\partial n] dS - \gamma p(x) n_i(x). \quad (6.28) \end{aligned}$$

Устремляя в (6.26) и (6.28) x к точке границы x_0 , как показано в гл. 4, можно получить два граничных интегральных уравнения, позволяющих при помощи непрямого МГЭ найти решение любой корректно поставленной краевой задачи.

6.4.2. Механические объемные силы

Риццо и Шиппи [7, 8, 24] рассмотрели случай объемных сил, являющихся градиентами скалярного потенциала, и разработали представление ПМГЭ, учитывающее комбинированное действие температурного поля и механических объемных сил.

Если температурное поле удовлетворяет уравнению

$$\partial^2 p(x)/\partial x_i \partial x_i = 0 \quad (6.29)$$

и механические объемные силы можно задать в виде

$$\psi_i(x) = \partial f(x)/\partial x_i, \quad \partial^2 f(x)/\partial x_i \partial x_i = q, \quad (6.30)$$

где q постоянно по всей области, то при решении (6.29) и (6.30) для значений $(p, \partial p/\partial n)$ и $(f, \partial f/\partial n)$, заданных на поверхности, можно использовать любой из двух вариантов МГЭ. Вывод НМГЭ следует выводу, рассмотренному в предыдущем разделе и в гл. 4, причем на этот раз смещения в любой внутренней точке задаются выражением [8]

$$\begin{aligned} u_j(\xi) = & \int_S \{[t_i(x) - f(x)n_i(x)]G_{ij}(x, \xi) - u_i(x)F_{ij}(x, \xi)\} dS + \\ & + \int_S \{[f(x) + \gamma p(x)]\partial w'(x, \xi)/\partial x_j - \\ & - (\partial[f(x) + \gamma p(x)]/\partial n)\partial w(x, \xi)/\partial x_j\} dS + q \int_S n_j(x)w(x, \xi) dS, \quad (6.31) \end{aligned}$$

которое (отметим еще раз) содержит только поверхностные интегралы.

Для двумерных задач (плоская деформация)

$$w = -(1 - 2\nu)(1 + \nu)/[8\pi E(1 - \nu)] r^2 (\ln r - 1), \quad w' = \partial w/\partial n,$$

а для трех измерений

$$w = \{(1 - 2\nu)(1 + \nu)/[8\pi E(1 - \nu)]\} r, \quad w' = \partial w/\partial n.$$

Для решения любой корректно поставленной задачи уравнение (6.31), как и выше, рассматривается для точки границы ξ_0 .

6.5. Начальные напряжения и начальные деформации

Начальные напряжения и начальные деформации появляются в теле благодаря целому ряду эффектов. Например, давление жидкости в пористом упругом теле может рассматриваться как начальное напряжение, а недостатки подгонки изделий, температурные деформации, ползучесть и т. д. — как источники начальных деформаций. Понятие начального напряжения (*Eigenspannungen*) было впервые введено Рейснером [25].

Если начальные деформации ϵ_{ij}^0 или начальные напряжения σ_{ij}^0 известны, то истинные напряжения можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} (\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^0), \text{ или } \sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl} - \sigma_{ij}^0. \quad (6.32 \text{ а, б})$$

Уравнения (6.32) очень похожи на уравнения (6.14), и поэтому для получения представлений ПМГЭ и НМГЭ можно применять развитую в разд. 6.4.1 технику [см. (6.14) — (6.19)]. Однако полезно познакомиться с альтернативным подходом [26, 27], использующим принцип виртуальной работы.

Известно [21], что поле смещений u_i , соответствующее произвольной задаче, можно представить в виде

$$u_i = u'_i + u_i^*, \quad (6.33)$$

где u'_i — решение однородных дифференциальных уравнений (без объемных сил или начальных градиентов напряжений и т. д.), удовлетворяющее граничным условиям, а u_i^* — частное решение неоднородных дифференциальных уравнений (т. е. уравнений с объемными силами и градиентами начальных напряжений).

По аналогии со стандартным методом решения неоднородных дифференциальных уравнений можно рассматривать u'_i как дополнительную функцию, а u_i^* — как частный интеграл; следовательно,

$$u'_i(\xi) = \int_S [t_i(x) G_{ij}(x, \xi) - F_{ij}(x, \xi) u_i(x)] dS. \quad (6.34)$$

Чтобы получить частный интеграл, рассмотрим уравнение для виртуальной работы

$$\int_S t_i^*(x) u_i^*(x) dS + \int_S f_i^*(x) u_i^*(x) dS = \int_V \sigma_{ij}^*(x) \epsilon_{ij}^0(x) dv, \quad (6.35)$$

где $t_i^*(x)$, $f_i^*(x)$ и $\sigma_{ij}^*(x)$ соответствуют виртуальному состоянию, не связанному с истинным состоянием $u_i^*(x)$ и $\epsilon_{ij}^0(x)$.

Если в качестве системы, отмеченной звездочкой, выбрать состояние, вызываемое сосредоточенной силой, приложенной в некоторой точке безграничной упругой среды, а в качестве $u_i^*(x)$,

$\varepsilon_{ij}^0(x)$ — истинные смещения и начальные деформации, то (6.35) приводит к

$$u_k^*(\xi) = \int_V T_{ijk}(x, \xi) \varepsilon_{ij}^0(x) dv, \quad (6.36)$$

где тензор $T_{ijk}(x, \xi)$ соответствует напряжениям $\sigma_{ij}^*(x)$, обусловленным единичной сосредоточенной силой $e_k(\xi)$ [уравнение (6.5)]. Соотношение (6.36) фактически представляет собой обобщенный вариант известного выражения Майзеля [28, 29] для смещений, вызываемых установившимся температурным полем, в котором начальная деформация равна просто $\varepsilon_{ij}^0 = \delta_{ij}\alpha p$, где α — коэффициент теплового расширения (заметим, что условия плоского напряженного состояния сводятся к использованию модифицированного α) и p — температурное поле. Читатель может проверить, что в задаче о температурных деформациях правые части (6.20) и (6.36) тождественны.

Используя соотношения

$$\int_V \sigma_{ij}^*(x) \varepsilon_{ij}^0(x) dv = \int_V D_{ijkl} \varepsilon_{kl}^*(x) \varepsilon_{ij}^0(x) dv = \int_V \varepsilon_{kl}^*(x) \sigma_{kl}^0(x) dv,$$

можно переписать (6.36) в эквивалентном виде

$$u_k^*(\xi) = \int_V B_{ijk}(x, \xi) \sigma_{ij}^0(x) dv, \quad (6.37)$$

где тензор $B_{ijk}(x, \xi)$ соответствует деформациям $\varepsilon_{ij}^*(x)$, обусловленным единичной сосредоточенной силой $e_k(\xi)$ [уравнение (6.3)].

Соотношения (6.36) и (6.37) дают частные интегралы, которые требуются в задачах с начальными деформациями или начальными напряжениями соответственно. Поэтому в случае известных начальных напряжений смещения в любой внутренней точке ξ вычисляются по формуле

$$u_j(\xi) = \int_S [t_i(x) G_{ij}(x, \xi) - F_{ij}(x, \xi) u_i(x)] dS + \\ + \int_V B_{ikj}(x, \xi) \sigma_{ik}^0(x) dv. \quad (6.38)$$

Границные уравнения могут быть получены из (6.38) обычным способом.

Соответствующее непрямое представление для смещений имеет вид

$$u_i(x) = \int_S G_{ij}(x, \xi) \varphi_j(\xi) dS + \int_V B_{jhi}(x, \xi) \sigma_{jh}^0(\xi) dv, \quad (6.39)$$

а истинные напряжения равны

$$\begin{aligned}\sigma_{mn}(x) = \sigma'_{mn}(x) - \sigma^0_{mn}(x) &= \int_S T_{mnk}(x, \xi) \varphi_k(\xi) dS + \\ &+ \int_V L_{jkmn}(\xi, x) \sigma^0_{jk}(\xi) dv - \sigma^0_{mn}(x),\end{aligned}\quad (6.40)$$

где

$$\begin{aligned}L_{jkmn}(\xi, x) = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{mn} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_V B_{jki}(\xi, x) dv + \\ + \mu \frac{\partial}{\partial x_n} \int_V B_{jkm}(\xi, x) dv + \mu \frac{\partial}{\partial x_m} \int_V B_{jkn}(\xi, x) dv.\end{aligned}\quad (6.41)$$

Причина вынесения производной за знак интеграла становится ясной, если посмотреть на функцию B_{jki} из (6.39). Порядок особенностей в функции B_{jki} равен $1/r$ для двумерных задач и $1/r^2$ для трехмерных, поэтому объемный интеграл существует в обычном смысле. Однако если дифференцировать под знаком интеграла (что допускается, так как интегрирование проводится по ξ), то возникающие при совпадении x и ξ особенности будут порядка $1/r^2$ и $1/r^3$ в дву- и трехмерном случаях соответственно и при этом объемный интеграл в формуле (6.40) теряет смысл. Поэтому, как показано в гл. 3, необходимо аналитически интегрировать (6.41) при $x = \xi$ и затем вычислять производные. Это не является характерной особенностью непрямого представления, так как при вычислении внутренних напряжений, основанном на (6.40), возникали бы такие же трудности. Их можно преодолеть при помощи вычисления вкладов в поле смещений, даваемых объемными интегралами (6.39) и (6.40), и использования конечно-разностной аппроксимации уравнения (6.41) вблизи особенности.

Поверхностные усилия $t_i(x)$ на проходящей через точку x поверхности с внешней нормалью $n_j(x)$ вычисляются с учетом (6.40) по формуле

$$\begin{aligned}t_i(x) = \int_S F_{ij}(x, \xi) \varphi_j(\xi) dS + \int_V M_{jki}(\xi, x) \sigma^0_{jk}(\xi) dv - \\ - \sigma^0_{ij}(x) n_j(x),\end{aligned}$$

где

$$M_{jki} = L_{jkim}(\xi, x) n_m(x).\quad (6.42)$$

Уравнения (6.39) и (6.42) снова можно записать для точки границы x_0 и использовать при решении граничной задачи.

6.6. Дискретизация

6.6.1. Общие положения

Мы можем разделить поверхность тела на плоские треугольные элементы, построить локальную систему координат, как описано в гл. 5 (разд. 5.4.1), и предположить, что на каждом элементе параметры u_i , t_i и φ_i меняются линейно. Поэтому основной алгоритм идентичен рассмотренному в гл. 5 алгоритму решения трехмерной задачи о потенциальном течении. Для простоты будем предполагать, что объемные силы, начальные напряжения и т. п. отсутствуют.

6.6.2. Линейные базисные функции

Если предположить, что на q -м (например) граничном элементе неизвестные фиктивные интенсивности меняются линейно, то имеем [30]

$$\boldsymbol{\varphi}(\xi) = \mathbf{N}^q(\xi) \boldsymbol{\Phi}_n, \quad (6.43)$$

где $\boldsymbol{\varphi}(\xi)$ — трехмерный вектор фиктивных усилий в произвольной точке внутри элемента, имеющий компоненты $\varphi_i(\xi)$ по осям x_i :

$$\boldsymbol{\varphi}(\xi) = \{\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \varphi_3(\xi)\},$$

$\mathbf{N}^q(\xi)$ — матрица размером 3×9 :

$$\mathbf{N}^q(\xi) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix},$$

а $\boldsymbol{\Phi}_n$ — девятимерный вектор-столбец узловых значений $\boldsymbol{\varphi}$. Тогда дискретизованные формы соответствующих граничных интегралов можно получить рассмотренным в гл. 4 способом.

6.6.3. Вычисление некоторых интегралов

Схемы интегрирования функций, не обладающих особенностями и обладающих ими, будут идентичны схемам, рассмотренным в предыдущих главах. В случае когда подынтегральные выражения остаются конечными на всем интервале интегрирования, применяются формулы численного интегрирования. Сингулярный случай, когда точка поля совпадает с узлом, в котором базисная функция стремится к единице, следует выделить особо; в этом случае интегрирование должно проводиться аналитически (см. разд. 4.4.2 и 5.4.4).

(a) Вычисление $\int_{\Delta S} G_{ij}(x_0, \xi) dS(\xi)$ или $\int_{\Delta S} G_{ij}(x, \xi_0) dS(x)$. Вве-

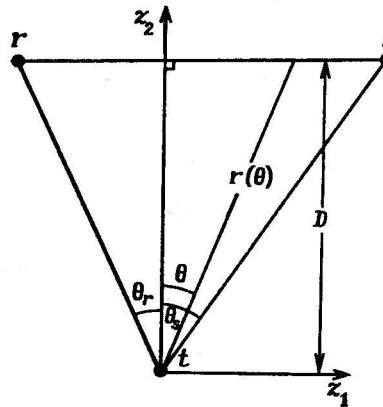


Рис. 6.2.

дем локальную систему координат (рис. 6.2): оси z_1 и z_2 в плоскости элемента и ось z_3 по направлению нормали в рассматриваемом узле [5]; тогда

$$\begin{aligned} y_i/r &= \partial r/\partial x_i = \sin \theta \partial z_1/\partial x_i + \\ &+ \cos \theta \partial z_2/\partial x_i = \sin \theta e_{1i} + \\ &+ \cos \theta e_{2i}, \end{aligned}$$

где e_{1i} и e_{2i} — соответственно направляющие косинусы осей z_1 и z_2 в глобальной системе координат.

Перепишем интеграл в виде

$$\begin{aligned} \int_{\Delta S} G_{ij}(x, \xi) dS(x) &= \int_{-\theta_r}^{\theta_s} \int_0^{r(\theta)} A(1/r) [\delta_{ij}(3 - 4\nu) + y_i y_j / r] r dr d\theta = \\ &= \int_{-\theta_r}^{\theta_s} Ar(\theta) [\delta_{ij}(3 - 4\nu) + (\sin \theta e_{1i} + \cos \theta e_{2i})(\sin \theta e_{1j} + \cos \theta e_{2j})] d\theta, \end{aligned}$$

где $A = 1/[16 \pi \mu (1 - \nu)]$ и $r(\theta) = D/\cos \theta$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\Delta S} G_{ij}(x, \xi) dS(x) &= \int_{\Delta S} G_{ij}(x, \xi) dS(\xi) = \\ &= DA [\delta_{ij}(3 - 4\nu) \ln(\tan \theta + \sec \theta) + a_{ij} \{\ln(\tan \theta + \sec \theta) - \sin \theta\} + \\ &+ b_{ij} \cos \theta + c_{ij} \sin \theta] \Big|_{-\theta_r}^{\theta_s}, \quad (6.44) \end{aligned}$$

где $a_{ij} = e_{1i} e_{1j}$, $b_{ij} = -(e_{2i} e_{1j} + e_{1i} e_{2j})$, $c_{ij} = e_{2i} e_{2j}$.

(б) Вычисление $\int_{\Delta S} F_{ij}(x, \xi) dS(\xi)$ или $\int_{\Delta S} F_{ij}(x, \xi) dS(x)$. Здесь

мы в точности следуем методу вычисления этих интегралов, предложенному Круэром [5]. Для плоского элемента $y_k n_k = 0$; поэтому функция $F_{ij}(x, \xi)$ сводится к

$$F_{ij}(x, \xi) = B(1/r^2)[n_j y_i/r - n_i y_j/r], \quad B = -(1 - 2\nu)/[8\pi(1 - \nu)].$$

Используя тождество

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{rsk} n_r \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \left(n_j \frac{\partial r}{\partial x_l} - \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i \right) =$$

$$= \frac{1}{r^2} \left(n_j \frac{y_i}{r} - n_i \frac{y_j}{r} \right),$$

где ϵ_{ijk} — перестановочный тензор (тензор Леви-Чивиты, см. приложение А):

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{когда } i = j, \text{ или } j = k, \text{ или } k = i, \\ 1, & \text{когда } i, j \text{ и } k \text{ образуют циклическую подстановку,} \\ -1, & \text{когда } i, j \text{ и } k \text{ образуют антициклическую подстановку,} \end{cases}$$

мы можем записать интеграл $\int_{\Delta S} F_{ij}(x, \xi) dS(x)$ в виде

$$\Delta F_{ij} = \int_{\Delta S} F_{ij}(x, \xi) dS(x) = B \epsilon_{ijk} \int_{\Delta S} \epsilon_{rsk} n_r [\partial(1/r)/\partial x_s] dS(x).$$

Используя теорему Стокса, преобразуем этот интеграл в контурный:

$$\Delta F_{ij} = B \epsilon_{ijk} \oint (1/r) dx_k. \quad (6.45)$$

Вводя вдоль стороны rs локальные переменные $dx_k = e_{1k} dz_1 + e_{2k} dz_2$, имеем

$$\Delta F_{ij} = B \epsilon_{ijk} e_{1k} [\ln(z_1 + r)]_r^s. \quad (6.46)$$

Окончательный результат получается такой переориентацией локальной системы координат, что z_t — поочередно совпадает со сторонами st и tr треугольника. Эти результаты затем выражаются через координаты точки поля и координаты узлов. Ясно, что (6.46) можно использовать для аналогичного вычисления интеграла в случае плоского четырехугольного элемента.

Так как нормаль n не меняет направления на нашем плоском элементе (т. е. не существенно, берется ли нормаль в точке приложения нагрузки или в точке поля) и $dr/dx_i = -\partial r/\partial \xi_i$, легко показать, что для этого локального элемента

$$\int_{\Delta S} F_{ij}(x, \xi) dS(x) = - \int_{\Delta S} F_{ij}(x, \xi) dS(\xi).$$

Поэтому в НМГЭ можно использовать тот же результат для элемента, изменив знак.

Если в (6.46) точка поля берется внутри области, то разрывные члены, возникающие из-за рассмотрения этого интеграла как несобственного, получаются автоматически.

Читатель должен отметить, что интегралы в (5.14) и (6.45) подобны.

6.7. Анализ осесимметричного напряженного состояния

Во многих практических случаях, включающих исследование упругих напряжений трехмерных тел, геометрия и система нагрузления таковы, что могут быть разумно аппроксимированы трех-

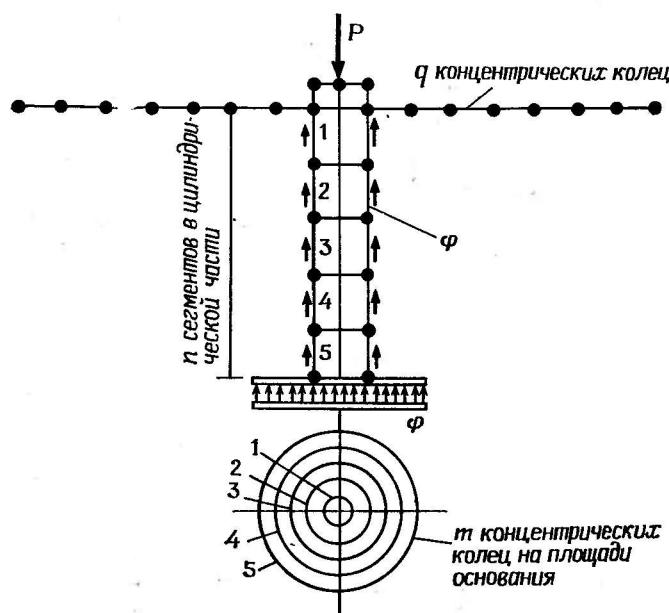


Рис. 6.3. Свая под действием аксиальной нагрузки.

мерной осесимметричной системой. Конечно, существует много действительно осесимметричных задач, подобных, например, представленной на рис. 6.3. В этой задаче рассматривается погруженная в упругий грунт аксиально нагруженная свая, диаметр основания которой больше диаметра основной цилиндрической части. Граница разбивается на ряд кольцевых элементов, показанных на рисунке. Использование осевой симметрии приводит поэтому к существенному уменьшению затрат труда на аналитическое решение задачи по сравнению с обычным трехмерным анализом. Авторы исследовали подобные задачи при помощи НМГЭ [31] почти десять лет назад. Керманидис опубликовал [32, 33] общее непрямое представление для осесимметричных задач, тогда как Круз, Сноу и Уилсон [34] при помощи ПМГЭ провели анализ совершенно общего случая, включающего температурные и центробежные нагрузки.

6.7.1. Фундаментальные решения

Необходимые для дальнейшего анализа фундаментальные сингулярные решения могут быть получены преобразованием решения, соответствующего общему трехмерному случаю, рассмотренному в § 6.2, к цилиндрической системе координат (см. разд. 5.5.2) и

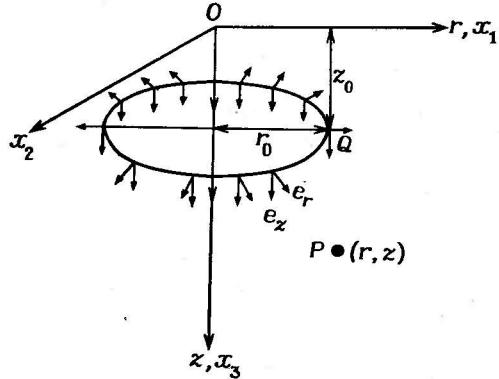


Рис. 6.4.

интегрированием различных функций вдоль кольца, как показано на рис. 6.4. Этот подход был использован некоторыми исследователями [31, 33].

С другой стороны, Круз, Сноу и Уилсон [34] использовали векторное представление Галёркина сосредоточенной силы в цилиндрической системе координат. Для сохранения связи с осесимметричными анализом гл. 5 мы будем использовать первый подход (т. е. прямое интегрирование решения задачи о сосредоточенной силе в трехмерном случае из § 6.2).

Поле смещений, обусловленное радиальным кольцевым нагружением интенсивности $2\pi r_0 e_r$, можно получить из (6.1) в виде [33]

$$u_r = \frac{e_r}{4\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{4(1-\nu)(r^2 + \bar{z}^2) - r^2}{2rR} K(\pi/2, m) - \left\{ \frac{3.5 - 4\nu}{2r} R - \frac{e^4 - \bar{z}^4}{4rR^3(1-m^2)} \right\} E(\pi/2, m) \right]; \quad (6.47a)$$

$$u_z = \frac{e_r \bar{z}}{4\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{(e^2 + \bar{z}^2) E(\pi/2, m)}{2R^3(1-m^2)} - \frac{K(\pi/2, m)}{2R} \right]; \quad (6.47b)$$

соответствующее поле, обусловленное аксиальным кольцевым нагружением интенсивности $2\pi r_0 e_z$, дается выражением

$$u_r = \frac{e_z r_0 \bar{z}}{4\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{e^2 - \bar{z}^2}{2rR^3(1-m^2)} E(\pi/2, m) + \frac{K(\pi/2, m)}{2rR} \right]. \quad (6.47b)$$

$$u_z = \frac{e_z r_0}{4\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{3-4\nu}{R} K(\pi/2, m) + \frac{\bar{z}^2 E(\pi/2, m)}{R^3(1-m^2)} \right]. \quad (6.47\gamma)$$

Здесь $\rho^2 = r^2 + r_0^2$, $e^2 = r^2 - r_0^2$, $R = \sqrt{(r+r_0)^2 + \bar{z}^2}$ и $\bar{z} = z - z_0$, а K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно с модулем $m = \sqrt{4rr_0/R^2}$, $0 \leq m^2 \leq 1$, и дополнительным модулем $m_1 = \sqrt{1-m^2}$. Как было упомянуто в гл. 5, такие интегралы можно аппроксимировать полиномами. Мы можем переписать систему (6.47) в матричной форме:

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{rr} & G_{rz} \\ G_{zr} & G_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_r \\ e_z \end{Bmatrix}, \text{ или } \mathbf{u} = \mathbf{Ge}. \quad (6.48)$$

Частные производные эллиптических интегралов, необходимые для вычисления деформаций, напряжений и усилий, представляются в виде

$$\partial E / \partial a = (E - K) / (2a), \quad \partial K / \partial a = E / [2a(1 - a)] - K / (2a), \quad (6.49)$$

где $a = m^2$. Используя (6.48) и (6.49), можно вычислить деформации:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial G_{rr} / \partial r & \partial G_{rz} / \partial r \\ G_{rr} / r & G_{rz} / r \\ \partial G_{zr} / \partial z & \partial G_{zz} / \partial z \\ \frac{\partial G_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial G_{zr}}{\partial r} & \frac{\partial G_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial G_{zz}}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_r \\ e_z \end{Bmatrix}, \text{ или } \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Be}, \quad (6.50)$$

а из соотношений между напряжениями и деформациями найти напряжения:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{2\mu}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix}, \text{ или } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (6.51)$$

Усилия на проходящей через точку (r, z) поверхности с внешней нормалью \mathbf{n} (компоненты n_r и n_z направлены по осям r и z) вычисляются по формулам [34]

$$\begin{Bmatrix} t_r \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{rr} & F_{rz} \\ F_{zr} & F_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_r \\ e_z \end{Bmatrix}, \quad \text{или} \quad \mathbf{t} = \mathbf{F}\mathbf{e}, \quad (6.52)$$

где

$$\begin{aligned} F_{rr} &= 2\mu \left\{ \left[c \frac{\partial G_{rr}}{\partial r} + d \left(\frac{G_{rr}}{r} + \frac{\partial G_{zr}}{\partial z} \right) \right] n_r + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial G_{zr}}{\partial r} \right) n_z \right\}, \\ F_{rz} &= 2\mu \left\{ \left[c \frac{\partial G_{zr}}{\partial z} + d \left(\frac{G_{zr}}{r} + \frac{\partial G_{rr}}{\partial r} \right) \right] n_z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial G_{zr}}{\partial r} \right) n_r \right\}, \\ F_{zr} &= 2\mu \left\{ \left[c \frac{\partial G_{rz}}{\partial r} + d \left(\frac{G_{rz}}{r} + \frac{\partial G_{zz}}{\partial z} \right) \right] n_r + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial G_{zz}}{\partial r} \right) n_z \right\}, \\ F_{zz} &= 2\mu \left\{ \left[c \frac{\partial G_{zz}}{\partial z} + d \left(\frac{G_{zz}}{r} + \frac{\partial G_{rz}}{\partial r} \right) \right] n_r + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial G_{zz}}{\partial r} \right) n_z \right\}, \\ c &= (1 - \nu)/(1 - 2\nu), \quad d = \nu/(1 - 2\nu). \end{aligned}$$

Уравнения (6.48) — (6.52) дают нам все необходимые компоненты сингулярного фундаментального решения.

6.7.2. Прямое и непрямое представления

И прямое, и непрямое представления МГЭ следуют из решения о сосредоточенной силе. Например, непрямое представление во внутренней точке P можно переписать в виде [заметим, что теперь (r, z) — координаты точки P , а (r_0, z_0) — координаты точки Q]

$$\mathbf{u}(P) = \int_S \mathbf{G}(P, Q) \varphi(Q) dr_0 dz_0, \quad (6.53)$$

$$\mathbf{t}(P) = \int_S \mathbf{F}(P, Q) \varphi(Q) dr_0 dz_0, \quad (6.54)$$

где $\varphi(Q) = \{\varphi_r, \varphi_z\}$ и нормаль для \mathbf{F} вычисляется в точке P . Аналогично непрямое представление во внутренней точке Q (r_0, z_0) принимает вид

$$\mathbf{u}(Q) = \int_S [\mathbf{F}^T(P, Q) \mathbf{u}(P) - \mathbf{G}^T(P, Q) \mathbf{t}(P)] dr dz, \quad (6.55)$$

где \mathbf{F}^T и \mathbf{G}^T — транспонированные матрицы \mathbf{F} и \mathbf{G} .

Мы можем снова использовать (6.53) и (6.54) или (6.55) для построения численного алгоритма решения краевой задачи, устремляя к границе точку поля P в (6.53) и (6.54) или точку Q в (6.55). Вывод этого алгоритма в основном совпадает с выводом, предложенным в разд. 5.5.3 и работах [31, 34].

6.7.3. Объемные силы

Во многих прикладных задачах механики требуется исследовать трехмерное осесимметричное напряженное состояние с учетом стационарных температурных и центробежных сил; подобные задачи возникают в разных областях техники. Простейший подход вновь заключается в преобразовании интегралов, выведенных в § 6.4, к их эквивалентной осесимметричной форме по указанной выше схеме. (Соответствующий осесимметричный анализ при помощи векторного представления Галёркина можно найти в [34].)

6.8. Примеры

Удобства, присущие МГЭ при исследовании трехмерного напряженного состояния в инженерных задачах, привели к появлению обширной литературы, демонстрирующей полезность этого метода в обычном анализе. Для громоздких тел это, по-видимому, единственный в настоящее время надежный метод, позволяющий получать подробные результаты за разумную плату. Кроме того, МГЭ дает возможность пользоваться теорией сингулярных решений, представлений граничной геометрии, анизотропии и т. д. перед выполнением численных расчетов. В этом параграфе представлены несколько решенных задач и дана оценка точности полученных результатов.

(а) **Задача о нагруженном кубе [11].** Дискретизация границы и приложенные нагрузки показаны на рис. 6.5. В задаче 1 смещения u_x линейно изменяются в конце консоли (рис. 6.5,б).

На рис. 6.6, а изображено напряжение σ_x в различных местах, включая внутренние и граничные точки; видно, что рассчитанные изгибающие напряжения находятся в прекрасном соответствии с точным решением. На рис. 6.6, б показаны распределения изгибающих и сдвиговых напряжений вдоль вертикальной линии, проходящей через центр образца от его середины, для задач 2 и 3. Для сравнения приведены результаты трехмерного анализа, использующего предположение о равномерном распределении усилий и смещений в задаче 3. Ясно, что в этой задаче результаты трехмерного анализа весьма неудовлетворительны и что для тел с преобладанием изгибающих напряжений на границе необходимо рассматривать функции, меняющиеся вдоль границы по меньшей мере линейно.

(б) **Трехмерная задача о выработке [10].** Для непосредственного сравнения метода конечных элементов и МГЭ при анализе трехмерного напряженного состояния была выбрана структура типа выработки с крепью для поддержания кровли в угольной шахте. Геометрия этой задачи, дискретизация с помощью конечных элементов и две системы граничных ячеек показаны на рис. 6.7. На рис. 6.7, а изображена часть структуры (плоскости xy и xz являются плоскостями симметрии); на поверхностях 1, 2 и 3 нормаль-

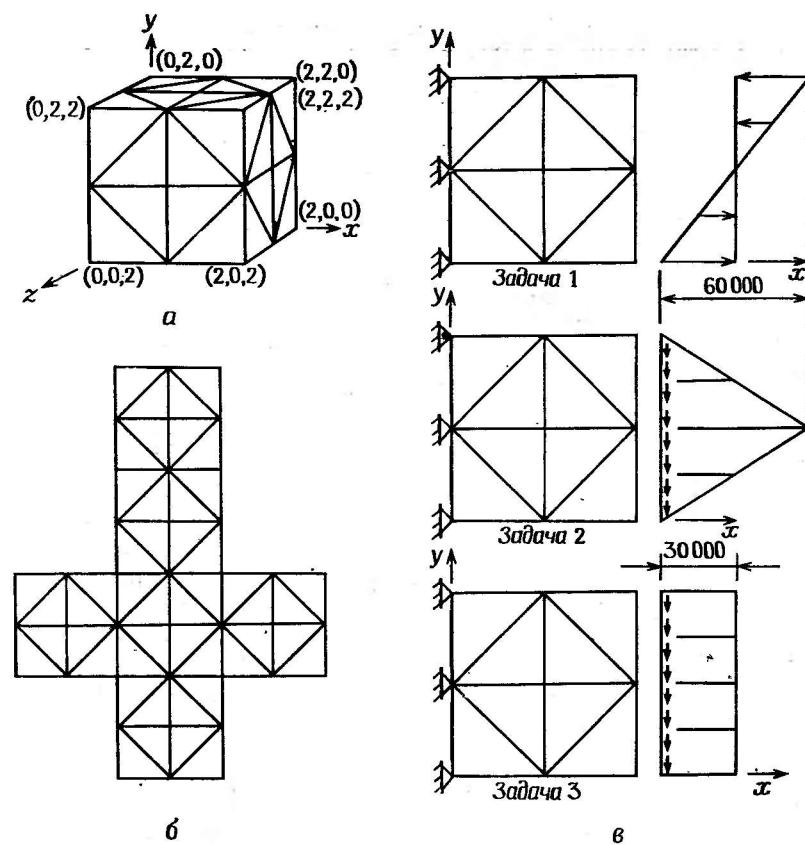


Рис. 6.5. а — геометрия тестовой задачи; б — граничные сегменты в тестовой задаче; в — граничные условия для тестовой задачи в балочном приближении.

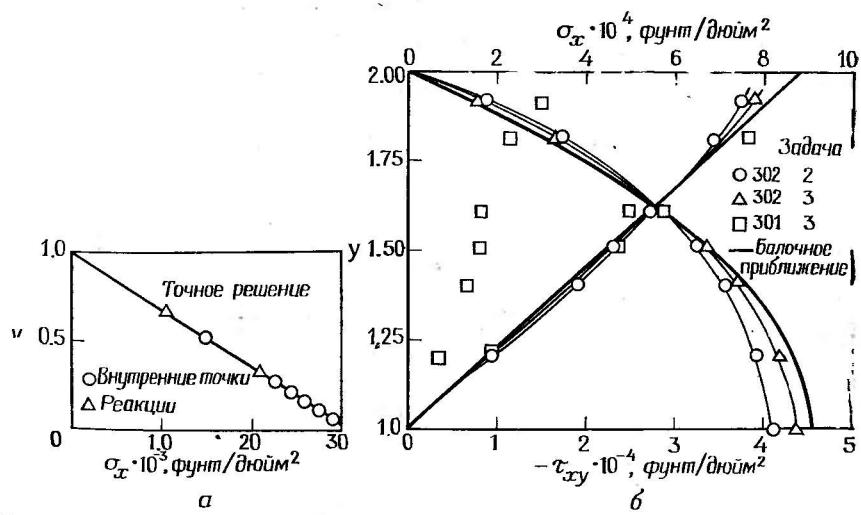


Рис. 6.6. а — изгибающие напряжения — задача 1; б — изгибающие и сдвиговые напряжения — задачи 2 и 3.

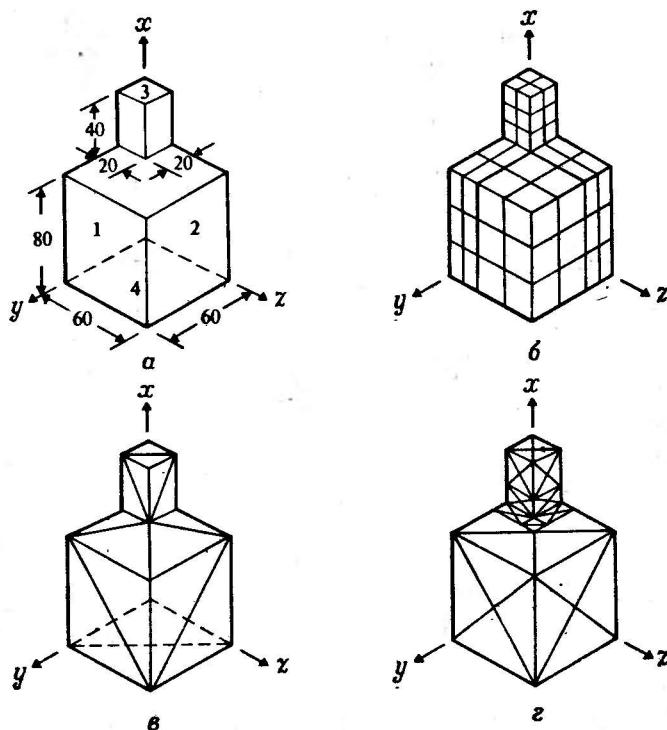


Рис. 6.7. а — форма выработки; б — моделирование выработки при помощи МКЭ; в — моделирование выработки при помощи МГЭ-001; г — моделирование выработки при помощи МГЭ-003.

ные и сдвиговые смещения равны нулю, к поверхности 4 приложена нормальная нагрузка.

Круз [10] использовал кусочно-постоянную аппроксимацию u_i и t_i для решения этой задачи и выяснения следующих вопросов:

- 1) Дают ли МКЭ и МГЭ сравнимые значения для внутренних напряжений?
- 2) Каковы относительные размерности задачи и время счета в обоих методах?
- 3) Как в этих двух методах решается задача о концентрации напряжений в месте соединения выработки и крепи?

В анализе при помощи МКЭ использовались модифицированные гексаэдры Айронса — Зенкевича (Irons — Zienkiewicz hexahedra). Было показано, что во всех внутренних точках напряжения, полученные при помощи МКЭ, отличаются на 10—15% от напряжений, полученных при помощи МГЭ-001 (рис. 6.7, в) и на 5% при использовании МГЭ-003 (рис. 6.7, г).

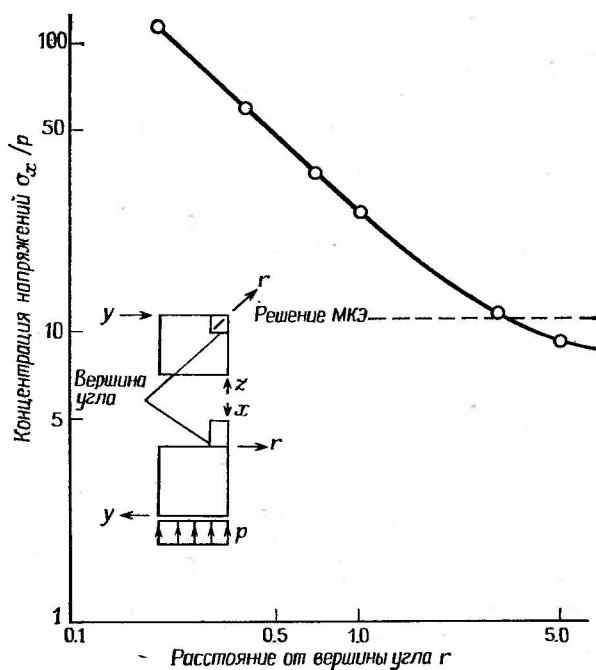


Рис. 6.8. Напряжения вблизи места соединения кровли и крепи.

В табл. 6.1 суммируются численные результаты, использующие раннюю версию программы МГЭ, разработанную Крузом. На рис. 6.8 изображены вычисленные при помощи МГЭ напряжения

Таблица 6.1

Результаты МКЭ и МГЭ в трехмерной задаче о выработке

	МКЭ	МГЭ-001	МГЭ-003
Размерность задачи	Ширина ленты матрицы 92 Число степеней свободы 274 Число коэффициентов массива 24 208	Число граничных сегментов 16 48 2304	Число граничных сегментов 44 132 19 044
Время работы центрального процессорного устройства ¹⁾	Полное 50 с	Решение на границе 34 с Решение в каждой внутренней точке 7 с	Решение на границе 315 с Решение в каждой внутренней точке 19 с

¹⁾ Время указано для CDC 6400.

вблизи места соединения кровли и крепи. Дискретизация конечными элементами слишком груба, чтобы дать детальное описание напряжений; ясно, что результаты, полученные при помощи МКЭ, не применимы и требуется гораздо более точная дискретизация в углах, которая в свою очередь приводит к увеличению времени счета. Поэтому полное сравнение не так точно, как того можно было бы желать.

(в) Трехмерный анализ напряженного состояния группы погруженных в грунт свай [35]. На рис. 6.9, а изображена группа свай 3×3 , погруженных в многослойный грунт, а на рис. 6.9, б — принятая схема дискретизации. Среднее вертикальное напряжение по сечению свай показано на рис. 6.10, где отчетливо видно, что Центральная свая несет наименьшую нагрузку, а четыре угловые сваи — почти половину нагрузки и что доля нагрузки, приходящаяся непосредственно на верхнюю плиту, незначительна.

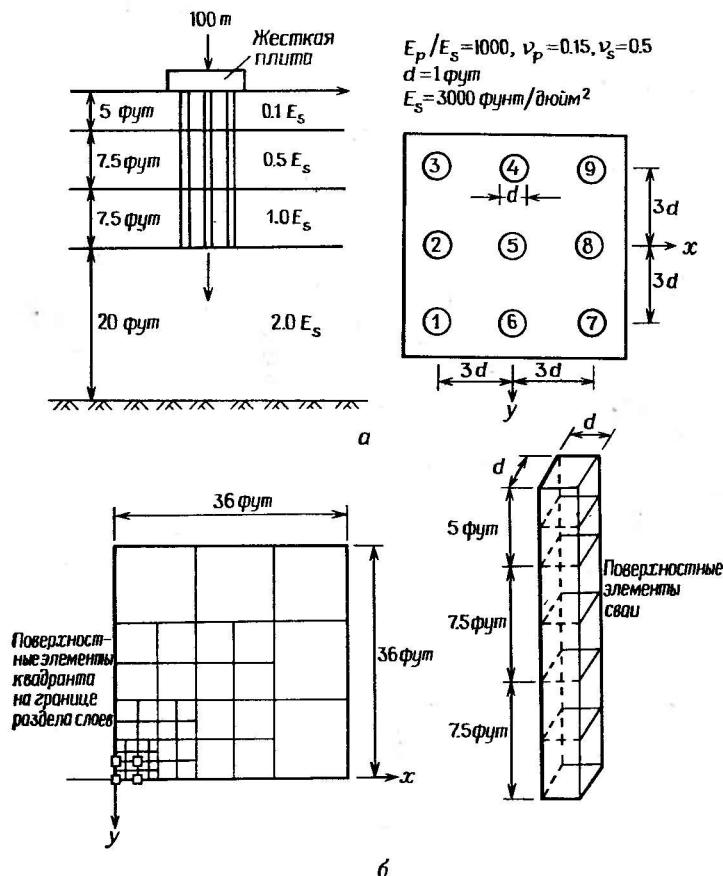


Рис. 6.9. Геометрия и способ дискретизации задачи о группе свай.

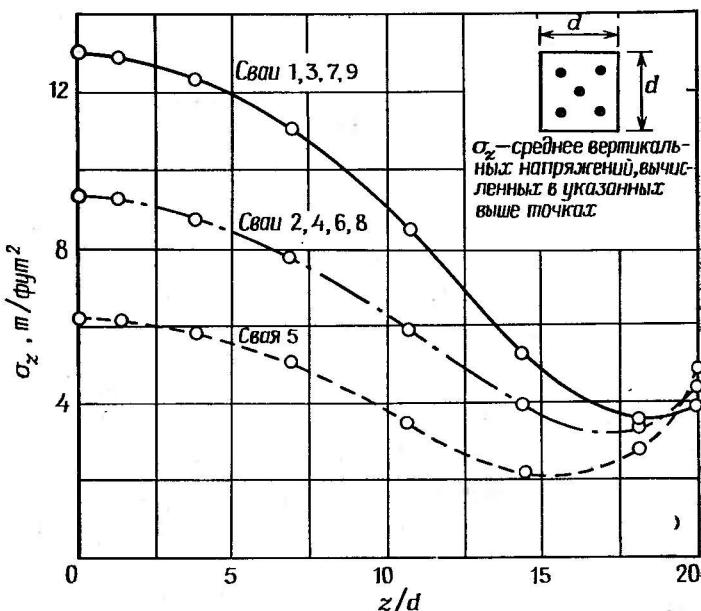


Рис. 6.10. Распределение вертикальных напряжений в сваях.

Рис. 6.11 объединяет результаты, полученные при помощи трехмерного анализа смещений под нагрузкой для погруженной в изотропный упругий грунт группы жестких свай как с жесткой верхней плитой, так и без плиты. (Относительная осадка определяется как отношение осадки группы N свай к осадке одной сваи при условии, что все сваи несут одинаковые средние нагрузки.)

Эту задачу решили при помощи НМГЭ Бендерджи и Баттерфилд [36], использовавшие для получения ядер решения Миндлина [37] задачи о сосредоточенной силе внутри полупространства. Так как это частное решение задачи о сосредоточенной силе автоматически удовлетворяет граничным условиям на свободной от напряжений поверхности полупространства, нужно дискретизовать только поверхности соприкосновения плиты и грунта, а также сваи и грунта. Имеется дополненная коммерческая версия [38] этой программы (PGROUP), позволяющая учитывать деформируемость и наклон свай, боковое нагружение, неоднородности и проскальзывания поверхности сваи по грунту.

(г) Анализ осесимметричного напряженного состояния трехмерных тел. Круз, Сноу и Уилсон [34] провели анализ осесимметричного напряженного состояния диска под воздействием граничных стационарных температурных и центробежных нагрузок. Так как в осесимметричном случае ядра имеют сложный вид и связанные с ними вычисления трудоемки, авторы избрали представ-

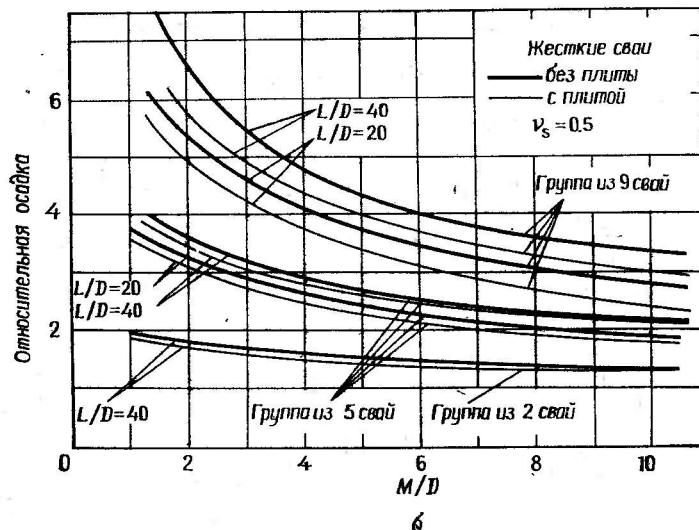
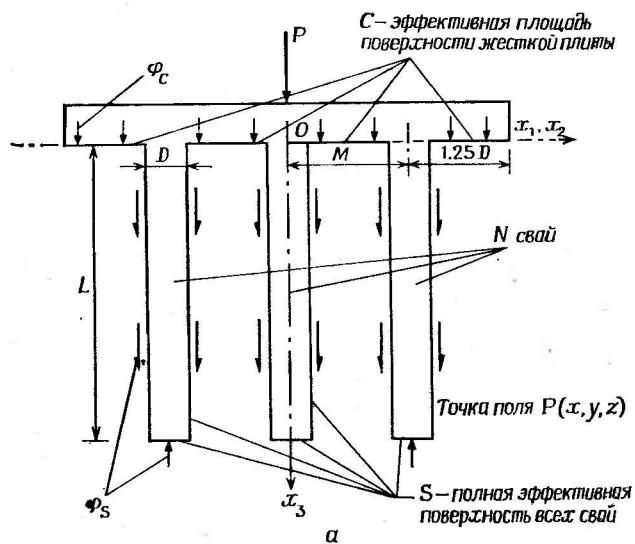


Рис. 6.11. а — геометрия группы жестких свай с верхней плитой; б — относительная осадка, вычисленная для различных групп свай.

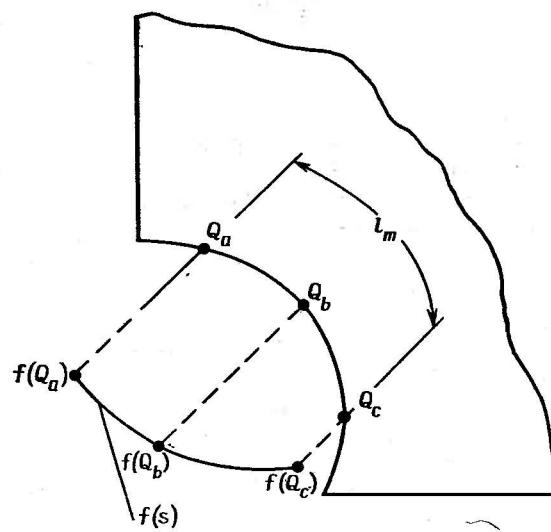


Рис. 6.12. Для s в интервале $(s(Q_a), s(Q_c))$ $f(s) = C_a(s)f(Q_a) + C_b(s)f(Q_b) + C_c(s)f(Q_c)$, где $C_a(s) = 1 - 3s/l_m + 2(s/l_m)^2$, $C_b(s) = 4s/l_m - 4(s/l_m)^2$, $C_c(s) = -s/l_m + 2(s/l_m)^3$.

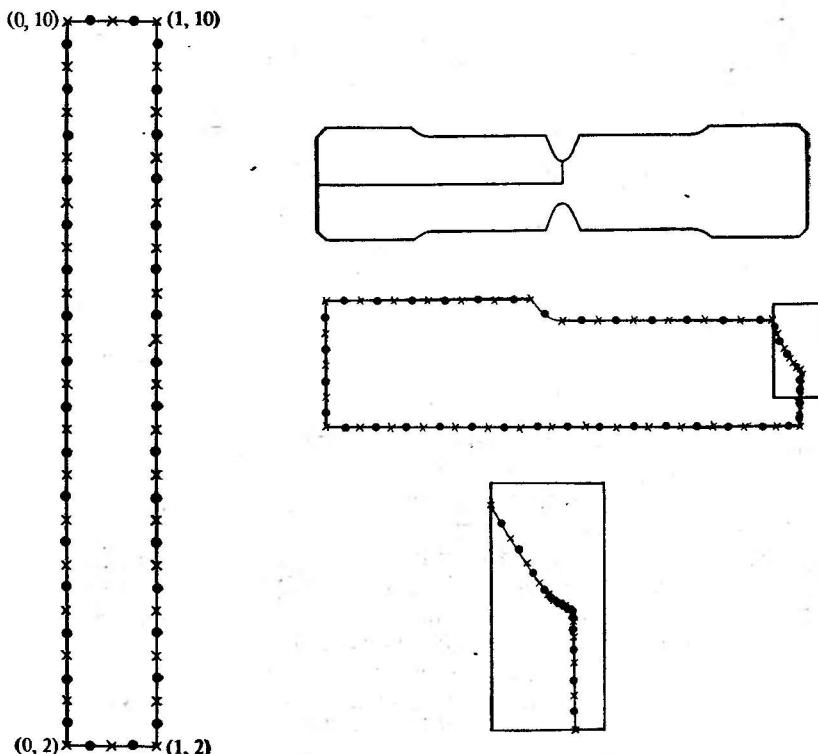


Рис. 6.13.

Рис. 6.14. Дискретизация границы для цилиндрического образца с кольцевым вырезом.

ление границы в виде простых линейных и дуговых элементов. Как показано на рис. 6.12, было принято параболическое изменение искомых функций в пределах каждого элемента. На рис. 6.13 изображена дискретизация границы диска толщиной 1 дюйм с внутренним радиусом 2 дюйма и внешним радиусом 10 дюймов. Задача исследовалась в трех тестовых случаях:

- 1) радиальное нагружение по ободу, $\sigma_r = 300$;
- 2) нагружение центробежными силами;
- 3) стационарное неоднородное распределение температуры.

В табл. 6.2—6.4 результаты расчетов сравниваются с точным решением Тимошенко и Гудьера [39]. Соответствие очень хорошее, и погрешность составляет менее 2%.

Таблица 6.2

Диск с нагрузкой, приложенной к ободу

r	u_r		σ_r		σ_θ	
	МГЭ $\times 10^4$	Точное $e \times 10^4$	МГЭ	Точное	МГЭ	Точное
2	0.417	0.417	4	0	626	625
3	0.408	0.408	176	174	452	451
4	0.443	0.443	235	234	391	391
5	0.495	0.495	263	263	363	363
6	0.556	0.556	278	278	347	347
7	0.621	0.621	287	287	338	338
8	0.690	0.690	293	293	332	332
9	0.761	0.761	297	297	328	328
10	0.833	0.833	300	300	325	325

В работе [34] рассматривался также цилиндрический образец с кольцевым вырезом, обычно использующийся при испытании на усталость. Дискретизация МГЭ показана на рис. 6.14 в случае большого количества элементов, использованных для получения детальной картины концентрации напряжений в окрестности выреза. Номинальный коэффициент концентрации напряжений K_t быстро меняется при изменении радиуса выреза, и поэтому требуется высокая точность вблизи вершины выреза.

В этой работе проведен также анализ напряженного состояния цилиндрического образца с кольцевым вырезом методом конечных элементов на основе пакета NASTRAN с использованием кольцевых элементов в предположении о линейном изменении деформации. Использованная дискретизация (рис. 6.15) включает 750

Таблица 6.3

r	u_r		σ_r		σ_θ	
	МГЭ $\times 10^4$	Точное $\times 10^4$	МГЭ	Точное	МГЭ	Точное
2	0.547	0.547	5	0	821	820
3	0.532	0.532	209	205	584	583
4	0.566	0.567	257	256	489	489
5	0.614	0.615	256	256	433	433
6	0.662	0.662	231	231	389	389
7	0.701	0.702	190	190	348	348
8	0.729	0.730	137	137	308	308
9	0.740	0.741	73	73	265	265
10	0.732	0.733	0	0	220	220

Таблица 6.4

Диск со стационарным одномерным распределением температуры

r	u_r		σ_r		σ_θ	
	МГЭ	Точное	МГЭ	Точное	МГЭ	Точное
2	0.577×10^{-2}	0.588×10^{-2}	921	0	86 827	88 237
3	0.627×10^{-2}	0.636×10^{-2}	21 046	19 722	37 552	38 105
4	0.818×10^{-2}	0.824×10^{-2}	21 719	21 158	14 702	15 093
5	0.108×10^{-1}	0.109×10^{-1}	18 851	18 449	893	1 067
6	0.139×10^{-1}	0.140×10^{-1}	14 996	14 685	-8 920	-8 844
7	0.174×10^{-1}	0.175×10^{-1}	11 013	10 758	-16 500	-16 478
8	0.212×10^{-1}	0.212×10^{-1}	7 136	6 953	-22 727	-22 688
9	0.252×10^{-1}	0.252×10^{-1}	3 497	3 361	-27 970	-27 930
10	0.294×10^{-1}	0.294×10^{-1}	88	0	-32 562	-32 471

узлов и 300 элементов по сравнению с 70 узлами и 35 граничными элементами, показанными на рис. 6.14. Время счета на машине IBM 360/168 для МКЭ и МГЭ составило соответственно 3 и 1 мин.

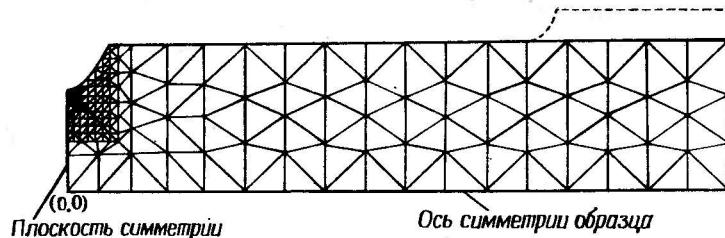


Рис. 6.15. Дискретизация конечными элементами для цилиндрического образца с кольцевым вырезом.

В табл. 6.5 приведены коэффициенты концентрации напряжений, полученные обоими методами при различных формах выреза. Стоит

Таблица 6.5

Коэффициент концентрации напряжений
для образца, используемого при испыта-
ниях на усталость

Номинальная геометрия образца	NASTRAN	МГЭ
$K_T = 2$	2.18	2.15
$K_T = 3$	3.30	3.36
$K_T = 4$	4.43	4.45

подчеркнуть также, что время подготовки данных для анализа МГЭ значительно меньше, чем время, требуемое пакетом NASTRAN. Другие примеры могут быть найдены в работах [1—11, 22—24, 31—36, 38, 40—47].

6.9. Заключительные замечания

Мы надеемся, что примеры, приведенные в этой главе, убедят читателя в полезности и многогранности МГЭ как инструмента решения задач. Так как описанные здесь в общих чертах численные схемы разработаны для первого поколения программ МГЭ, их эффективность будет улучшаться. Тем не менее алгоритмы, представленные в гл. 2—6, действительно демонстрируют основные этапы, из которых состоит процесс решения.

Решения МГЭ алгебраически сложны; возможно, что более эффективная их реализация будет достигнута использованием аппроксимаций высшего порядка для геометрии и искомых функций, так что число необходимых для описания граничных данных элементов, по которым выполняется интегрирование, уменьшится.

Такие схемы высшего порядка будут рассмотрены в гл. 8, ибо мы верим, что будущие успехи МГЭ в конечном итоге связаны с точным моделированием граничных данных.

6.10. Литература

- [1] Banerjee P. K. Integral equation methods for analysis of piece-wise non-homogeneous three-dimensional elastic solids of arbitrary shape. — Int. J. Mech. Sci., 1976, v. 18, p. 293—303.
- [2] Banerjee P. K., Davies P. G. The behavior and axially and laterally loaded single piles embedded in nonhomogeneous soils. — Géotechnique, 1978, t. 28, No. 3, p. 309—326.
- [3] Cruse T. A. Two and three dimensional problems of fracture mechanics. — In: Developments in boundary element methods. Ed. by P. K. Banerjee, R. Batterfield. Vol. 1, Ch. V. — London: Applied Science Publishers 1979.
- [4] Banerjee P. K. Foundations within a finite elastic layer — application of the integral equation method. — Civ. Engng, 1971, p. 1197—1202.
- [5] Cruse T. A. Numerical solutions in three-dimensional elasto-statics. — Int. J. Solids and Structs, 1969, v. 5, p. 1259—1274.
- [6] Boundary integral equation method: computational applications in applied mechanics. Ed. by T. A. Cruse, F. J. Rizzo. — New York: ASME, 1975. [Имеется перевод: Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике. Под ред. Т. Круза и Ф. Риццо. — М.: Мир, 1978.]
- [7] Rizzo F. J., Shippy D. J. An advanced boundary integral equation method for three-dimensional thermo-elasticity. — Int. J. Num. Meth. in Engng, 1977, v. 11, p. 1753.
- [8] Rizzo F. J., Shippy D. J. Recent advances of the boundary element method in thermoelasticity. — In: Developments in boundary element methods. Ed. by P. K. Banerjee, R. Batterfield. Vol. 1, Ch. VI. — London: Applied Science Publishers, 1979.
- [9] Lachat J. C., Watson J. O. Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elasto-statics. — Int. J. Num. Meth. in Engng, 1976, v. 10, p. 991—1005.
- [10] Cruse T. A. Application of the boundary integral equation method to three-dimensional stress analysis. — Int. J. Computer and Structs, 1973, v. 3, p. 509—527.
- [11] Cruse T. A. An improved boundary integral equation method for three-dimensional elastic stress analysis. — Computer and Structs, 1974, v. 4, p. 741—754.
- [12] Love A. E. H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. — New York: Dover, 1944. [Имеется перевод изд. 1931 г.: Ляв А. Математическая теория упругости. — М.: ОНТИ, 1935.]
- [13] Willis J. R. The elastic interaction energy of dislocation loops in anisotropic media. — Q. Mech. and Appl. Math., 1965, v. 18, p. 419—433.
- [14] Lifschitz I. M., Rozenweig L. N. — J. Exp. Theor. Physics, 1974, v. 17, p. 783.
- [15] Pan Y. C., Chou T. W. Point force solution for an infinite transversely isotropic solid. — J. Appl. Mech. Trans. ASME, 1976, v. 98(E), p. 608—612.
- [16] Wilson R. B., Cruse T. A. Efficient implementation of anisotropic three-dimensional boundary integral equation stress analysis. — Int. J. Num. Meth. in Engng, 1978, v. 12, p. 1383—1397.
- [17] Kinoshita M., Mura T. Green's function for anisotropic elasticity. — AEC contract report C00-2034-5, North-Western Univ., Illinois, 1975.