Tugas 2

1) Sebuah variabel random x mempunyai fungsi densitas probabilita ce^{-x}. Tentukan nilai c yang layak, dengan asumsi $0 \le x < \infty$. Tentukan rata-rata dan varian fungsi densitas probabilita x.

→ 1) Menentukan nilai c yang layak

- Fungsi densitas probabilitas dari X : $Fx(x) = ce^{-cx}$
- syarat total probabilitas : $\int_0^\infty ce^{-cx}\,dx = 1$

subtitusikan $fx(x)$: $\int_0^\infty ce^{-cx}\,dx = 1$

$\int_0^\infty e^{-cx}\,dx = \frac{1}{c}$

jadi

$c\int_0^\infty e^{-cx}\,dx = c.\frac{1}{c} = 1$

maka nilai c yang layak adalah berapapun nilai positif. Untuk memudahkan perhitungan selanjutnya, kita umumnya memilih $c = 1$

2) mean (rata-rata)

- rata-rata μ dari X
  → $\mu = \int_0^\infty x\,Fx(x)\,dx$
- subtitusikan $Fx(x) = e^{-x}$
  → $\mu = \int_0^\infty xe^{-x}\,dx$

$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = 1$

mean $X \rightarrow \mu = 1$

3) varian dari X

varian σ^2 dari X adalah

$\sigma^2 = E[x^2] - (E[x^2])^2$

- hitung $E[x^2]$ =

$E[x^2] = \int_0^\infty x^2\,Fx(x)\,dx$

- subtitusikan $Fx(x) = e^{-x}$

$E[x^2] = \int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx$

$\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx = 2$

- $E[x^2] = 2$

varian → $E[x^2] - (E[x])^2$

$= 2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$

GARDA

2) permintaan suatu produk adalah -1, 0, +1, +2, perhari dengan probabilitas masing-masing $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}$, sebuah permintaan dari -1 menyatakan secara tidak langsung sebuah unit dikembalikan. Tentukan rata-rata permintaan dan variannya. Gambarkan fungsi distribusinya

① mean

$\mu = \sum_i x_i p_i$

x_i = nilai permintaan, p_i = nilai probabilitas

↳ -1, 0, 1, 2 ↳ $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}$

$\mu = (-1)(\frac{1}{5}) + 0(\frac{1}{10}) + 1(\frac{2}{5}) + 2(\frac{3}{10})$

$\mu = -\frac{1}{5} + 0 + \frac{2}{5} + \frac{6}{10}$

$\mu = -0,2 + 0 + 0,4 + 0,6$

$\mu = 0,8$

② variansi permintaan

$\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i$

$\mu = 0,8$

$\sigma^2 = (-1 - 0,8)^2 (\frac{1}{5}) + (0 - 0,8)^2 (\frac{1}{10}) + (1 - 0,8)^2 (\frac{2}{5}) + (2 - 0,8)^2 (\frac{3}{10})$

$\sigma^2 = (-1,8)^2 (\frac{1}{5}) + (-0,8)^2 (\frac{1}{10}) + (0,2)^2 (\frac{2}{5}) + (1,2)^2 (\frac{3}{10})$

$\sigma^2 = 3,24 (\frac{1}{5}) + 0,64 (\frac{1}{10}) + 0,04 (\frac{2}{5}) + 1,44 (\frac{3}{10})$

$\sigma^2 = 0,648 + 0064 + 0016 + 04,32$

$\sigma^2 = 1,16$

③ fungsi distribusi kumulatif (CDF) $F(x)$ didefinisikan sebagai probabilitas bahwa variabel random X kurang dari atau sama dengan x

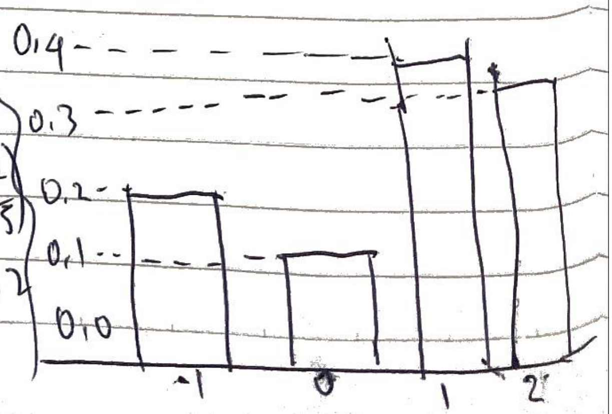
1) $F(-1) = P(X \leq -1) = \frac{1}{5}$

2) $F(0) = P(X \leq 0) = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$

3) $F(1) = P(X \leq 1) = \frac{3}{10} + \frac{2}{5}$

$= \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}$

4) $F(2) = P(X \leq 2) = \frac{7}{10} + \frac{3}{10} = 1$



3) Seorang manajer toko pakaian pria menginventarisikan stelan-stelan pakaian yang jumlahnya 30 (seluruh ukuran). Jumlah stelan pakaian dijual dari priode sekarang sampai periode akhir mengikuti distribusi $f(x) = e^{-20} 20^x / x!$ $x = 0, 1, 2 \ldots$ ~~stelan pakaian~~ lainnya. Tentukan probabilitas bahwa manajer tsb akan mempunyai stelan stelan pakaian pada periode akhir

Jawab

Untuk menentukan probabilitas bahwa manajer toko pakaian akan mempunyai stelan-stelan pakaian pada periode akhir, kita perlu menghitung probabilitas bahwa jumlah pakaian yang terjual x adalah kurang atau sama dengan 30. Distribusi yang diberikan mengikuti distribusi Poisson dengan parameter $\lambda = 20$. Distribusi poisson digunakan untuk model jumlah kejadian dalam interval waktu tertentu, dgn formula

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

di mana λ adalah rata-rata kejadian (dalam hal ini, rata-rata jumlah stelan pakaian yang terjual). Untuk menghitung probabilitas bahwa manajer tsb mempunyai stelan pakaian pada periode akhir kita mencari probabilitas bahwa jumlah stelan yang terjual x tidak melebihi 30

$$P(X \leq 30) = \sum_{k=0}^{30} \frac{20^k e^{-20}}{k!}$$

GARDA

$$P(X < 30) = \sum_{x=0}^{29} P(X = x)$$

Maka:

$$P(X < 30) = \frac{e^{-20}20^0}{0!} + \frac{e^{-20}20^1}{1!} + \frac{e^{-20}20^2}{2!} + \frac{e^{-20}20^3}{3!} + \dots + \frac{e^{-20}20^{29}}{29!}$$

x	distribusi	20
0	2,0612E-09	
1	4,1223E-08	
2	4,1223E-07	
3	2,7482E-06	
4	1,3741E-05	
5	5,4964E-05	
6	0,00018321	
7	0,00052347	
8	0,00130867	
9	0,00290815	
10	0,00581631	
11	0,0105751	
12	0,01762517	
13	0,02711565	
14	0,03873664	
15	0,05164885	
16	0,06456107	
17	0,0759542	
18	0,08439355	
19	0,08883532	
20	0,08883532	
21	0,08460506	
22	0,07691369	
23	0,06688147	
24	0,05573456	
25	0,04458765	
26	0,03429819	
27	0,02540607	
28	0,01814719	
29	0,0125153	
Jumlah	0,97818178	

probabilitas 0.978~~ atau sekitar 97

4. Misalkan fungsi densitas probabilita sebagai berikut:

$$f(x) = kx$$

$$= k(4 - x)$$

$$= 0$$

$0 \leq x < 2$

$2 \leq x \leq 4$

$lainnya$

(a) Tentukan nilai k yang f adalah fungsi densitas probabilita.

(b) Tentukan rata-rata dan varian X.

(c) Tentukan fungsi distribusi kumulatif.

Jawaban:

(a) Menentukan nilai K

Fungsi densitas probabilitas f(x) harus memenuhi syarat yaituintegral f(x) = 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Diketahui di soal kx untuk interval $0 \leq x < 2$ dan k(4-x) untuk $2 \leq x \leq 4$ maka intervalnya menjadi $0 \leq x \leq 4$ maka bis akita tulisakan seperti ini:

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^2 kxdx + \int_2^4 k(4 - x)dx = 1$$

Maka perhitungannya menjadi:

$$\int_0^2 kxdx = k\int_0^2 x\ dxk = k[\frac{x^2}{2}]_0^2 = \left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = k.2 = 2$$

$$\int_2^4 k(4 - x)dx = k\int_2^4 (4 - x)dx = k[4x - \frac{x^2}{2}]_2^4$$

$$[4x - \frac{x^2}{2}]_2^4 = (16 - 8) - (8 - 2) = 8 - 6 = 2$$

$$k.\ 2 = 2k$$

Sehingga 2k + 2k = 4k

Karena integral f(x) = 1 maka 4k = 1, sehingga

$$k = \frac{1}{4}$$

(b) Menentukan rata-rata dan varians X Pertama kita menentukan **rata-rata** dulu

$$E[X] = \int_0^2 x\ .\ kx dx + \int_2^4 x.k(4 - x)\ dx$$

Substitusikan k yang sudah didapat sebelumnya

$$E[X] = \int_0^2 x.\frac{1}{4}\ x dx + \int_2^4 x.\frac{1}{4}(4 - x)\ dx$$

$$\int_0^2 \frac{1}{4}x^2\, dx = \frac{1}{4}[\frac{x^3}{3}]_0^2 = \frac{1}{4}.\frac{8}{3} = \frac{2}{3}$$

$\Big[2\ x$

3 4

$$\int_2^4 \frac{1}{4}x(4 - x)\, dx = \frac{1}{4}\int_2^4 (4x - x^2)\, dx = \frac{1}{4}[4\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_2^4$$

$$2 - \frac{x}{3}\Big]_2 = (32 - 21.333\sim) - (8 - 2.666\sim) = \frac{1}{4}.5.3\sim = 1.3\sim$$

$$E[X] = \frac{2}{3} + 1.3\sim = 2$$

Kedua kita menentukan **varians** X

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Karena E[X] sudah didapat maka kita hanya perlu menentukan

$$E[X^2] = \int_0^2 x^2 . \frac{1}{4} xdx + \int_2^4 x^2 . \frac{1}{4} (4-x) dx$$

$$E[X^2] = \int_0^2 x^3 . \frac{1}{4} dx + \int_2^4 x^2 . \frac{1}{4} (4-x) dx$$

Kemudian mari menghitung integralnya

$$\int_0^2 \frac{1}{4} x^3 \, dx = \frac{1}{4} [\frac{x^4}{4}]_0^2 = \frac{1}{4} . \frac{16}{4} = 1$$

$$\int_2^4 \frac{1}{4} x^2 (4-x) \, dx = \frac{1}{4} \int_2^4 (4x^2 - x^3) \, dx = \frac{1}{4} [4 \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}]_2^4$$

$$\left[4 \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_2^4 = \left(\frac{256}{3} - 64\right) - \left(\frac{32}{3} - 4\right) = 21.3\sim - 6.6\sim = 14.6\sim$$

$$\frac{1}{4} . 14.6 \cong 3.6\sim$$

$$E[X^2] = 1 + 3.6 \cong 4.6\sim$$

Maka :

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 4.6\sim - 2^2 = 0.6\sim$$

(c) Menentukan fungsi distributive kumulatif Rumus untuk fungsi distibusi kumulatif adalah:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt$$

Kemudian tentukan kumulatif setiap intervalUntuk

interval 0 ≤ x < 2:

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{4} t\,dt = \frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{8}}$$

Untuk interval 2 ≤ x ≤ 4

$$F(x) = \int_0^2 \frac{1}{4} t\,dt + \int_2^x \frac{1}{4}(4-t)\,dt = \frac{1}{8}\,.\,4 + \frac{1}{4}\left[4t - \frac{t^2}{2}\right]_2^x$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(4x - \frac{x^2}{2} - 8 + 2\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(4x - \frac{x^2}{2} - 6\right)$$

$$= \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{8} - \frac{3}{2} = \boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{8}} - 1$$

Untuk x > 4

$$F(x) = 1$$

Karena probabilitas sudah terakumulasi menjadi 1, mencakupsemua nilai x dari 0 hingga 4.