7. Tree

순서

7.1 트리의 기본 개념
7.2 이진 트리
7.3 이진 트리의 표현
7.4 이진 트리 순회
7.5 이진 트리의 기타 주요 연산
7.6 스레드 이진 트리
7.7 일반 트리를 이진 트리로의 표현

7.1 트리의 기본 개념

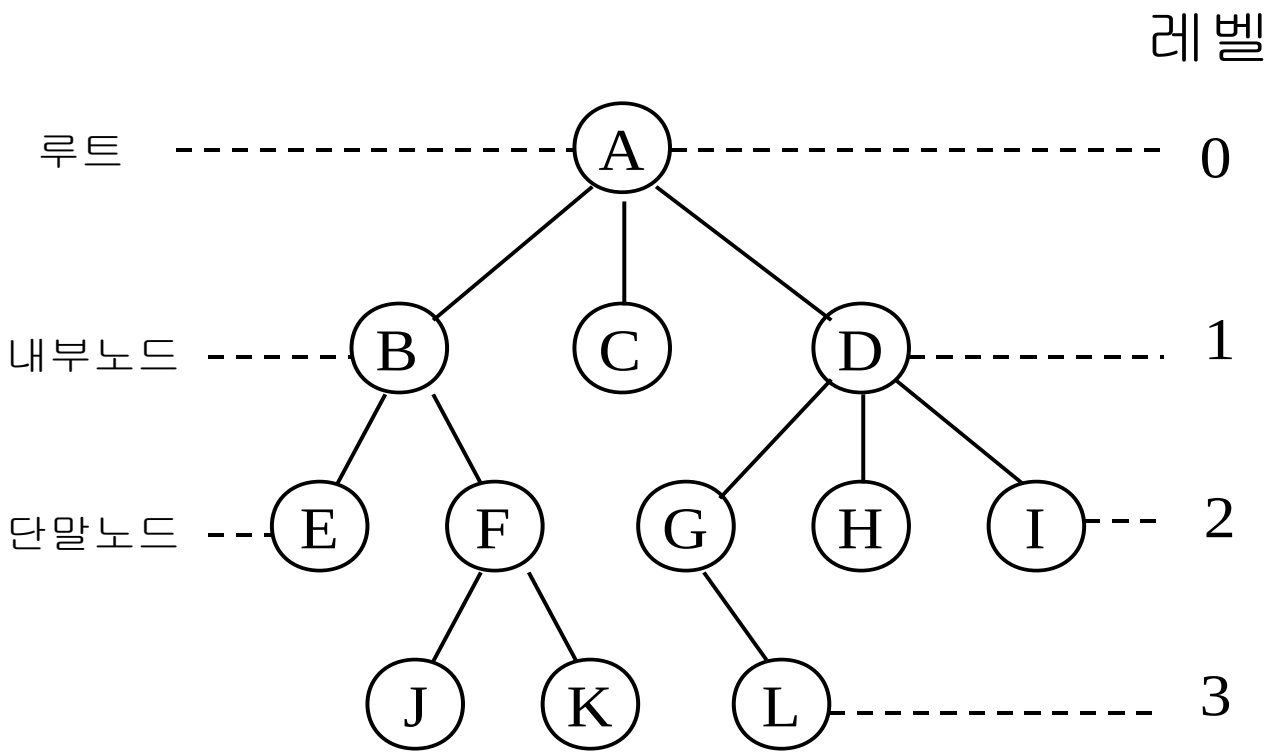
트리(tree)의 정의

- 트리(tree)
  - 노드(node)들을 간선(edge)으로 연결한 계층형 자료구조 (hierarchical data structure)
  - 제일 위에 하나의 노드를 루트(root)로 하여 나머지 노드들이 간선으로 연결 됨.

- 트리(tree)의 정의
  1. 하나의 노드는 그 자체로 트리이면서 루트(root)가 된다.
  2. 만일 n이 노드이고 $T_1,T_2, ...,T_k$가 $n_1,n_2, ...,n_k$를 루트로 하는 트리라고 할 때 n을 부모로 $n_1,n_2, ...,n_k$를 연결하면 새로운 트리가 생성된다. 이 트리에서 n은 루트이고 트리 $T_1,T_2, ...,T_k$는 루트 n의 서브트리(subtree)가 된다. 또 노드 $n_1,n_2,...,n_k$는 노드 n의 자식들(children)이다.

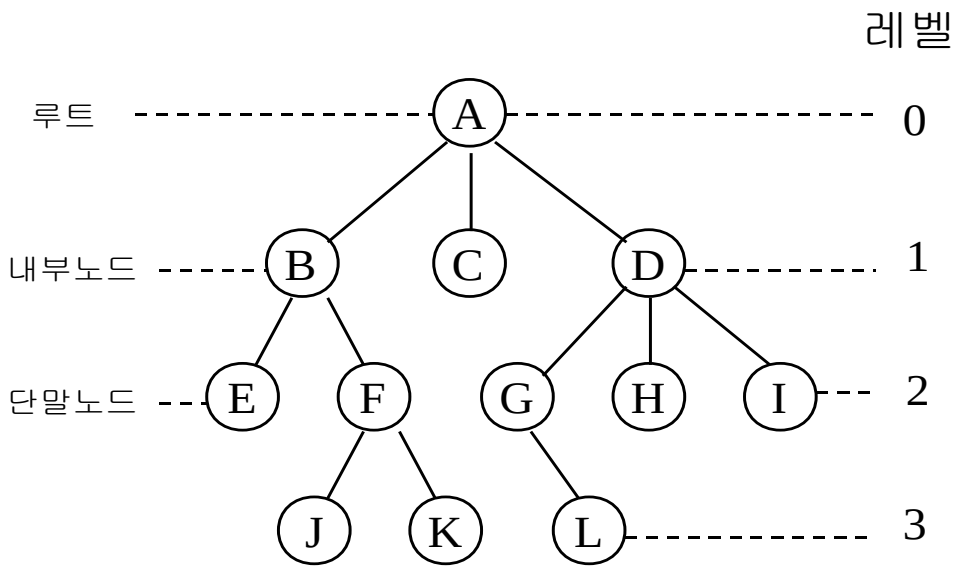
트리의 예

- 트리의 예: 트리 T(12개의 노드로 구성)
  - 루트: A, 3개의 서브트리를 가짐.



트리의 용어 (1)

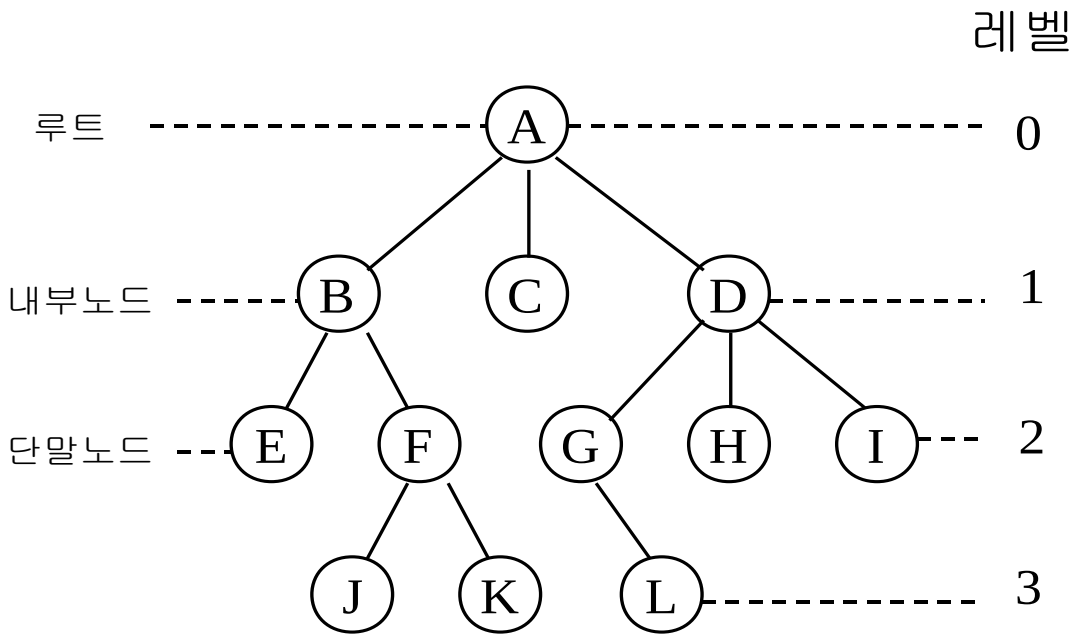
- 노드(node)의 차수(degree)
  - 한 노드가 가지고 있는 서브트리의 수
    - A의 차수: 3, B의 차수: 2, C의 차수: 0
- 리프(leaf), 단말 또는 터미널(terminal) 노드
  - 차수가 0인 노드
- 비단말(nonternminal) 노드
  - 차수가 1 이상인 노드
- 노드의 부모/자식(parent/children) 구조
  - 자식(children) : 노드 x의 서브트리 루트들
  - 부모(parent) : 노드 x(노드 G에 연결된 상위 레벨 노드)
    - 노드 D의 자식들: G, H, I
    - D의 부모: A
  - 부모-자식 관계(parent-child relationship)
  - 선조(ancestor); 부모, 부모의 부모 노드들



트리의 용어 (2)

- 형제(siblings)
  - 한 부모의 자식 노드들
    - 노드 G, H, I는 형제들

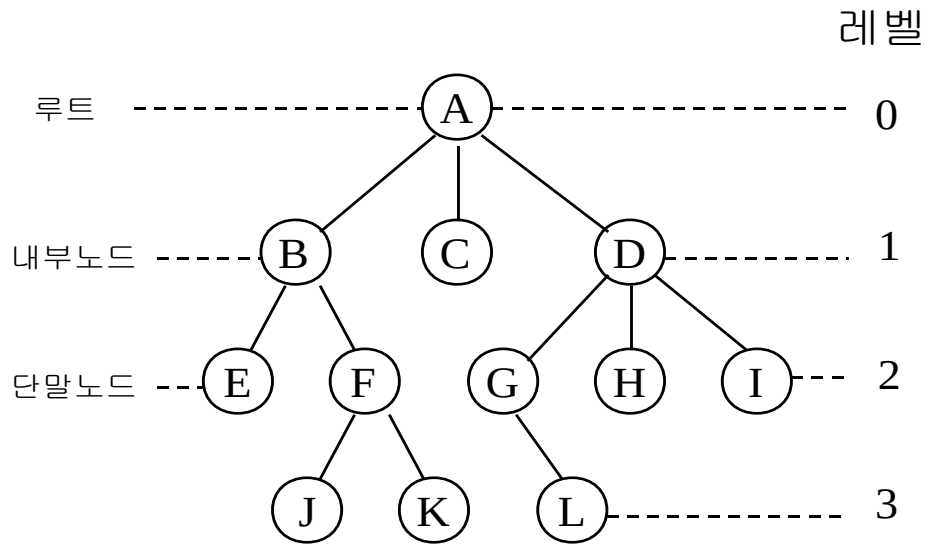
- 트리의 차수(degree)
  - 트리 노드들의 차수 중에서 최대 차수
    - 트리 T의 차수 : 3



트리의 용어 (3)

- 노드의 레벨(level)
  - 루트: 0
  - 한 노드가 레벨 l에 속하면, 그 자식들은 레벨 l+1에 속함
    - level(v)

```
if (v = root) then return 0;
else return (1 + level(v의 부모));
end level()
```

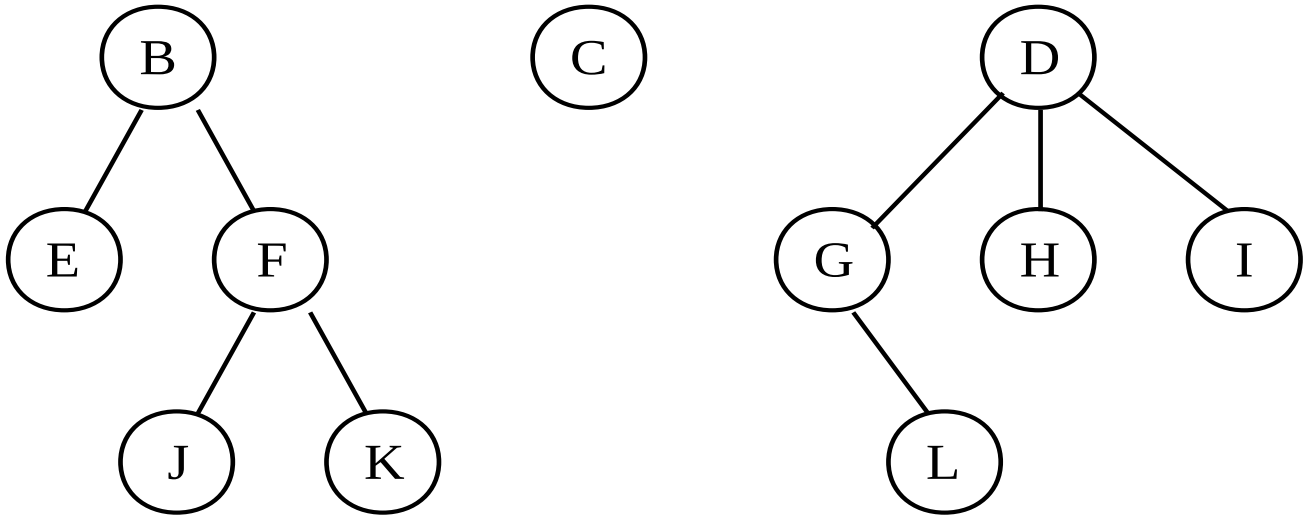


- 트리의 높이(height) 또는 깊이(depth)
  - 트리의 최대 레벨
    - 트리 T의 높이: 3

- 노드의 레벨 순서(level order)
  - 트리의 노드들을 레벨별로 위에서 아래로, 같은 레벨 안에서는 왼쪽에서 오른쪽으로 차례로 1,2,3,... 과 같이 순서를 매긴 것

Forest

- **트리의 집합**
- n개의 서브트리를 가진 트리에서 루트를 제거하면 n개의 분리된 트리의 집합
  - 트리 T에서 루트 A를 제거한 결과로 얻은 포리스트(3개의 트리로 구성)



트리를 기술하는 방법

- 리스트(list) 표현
  - 트리나 서브트리들을 모두 리스트로 표현
    - `(A(B(E, F(J, K)), C, D(G(L), H, I)))`

- 메모리에서의 표현 (연결 리스트 표현)
  - 노드 A :

데이타	링크 1	링크 2	링크 3

  - 노드 B :

데이타	링크 1	링크 2

  - 서브트리 수에 따라 링크 필드 수가 다름.
  - 그러나 효율적인 알고리즘 작성을 위해서는 노드 구조가 일정한 것이 좋음
  - 만일 모든 노드의 차수가 2이하라면 모든 노드는 하나의 데이타 필드와 2개의 링크필드로 표현 가능

7.2 이진 트리(Binary Tree)

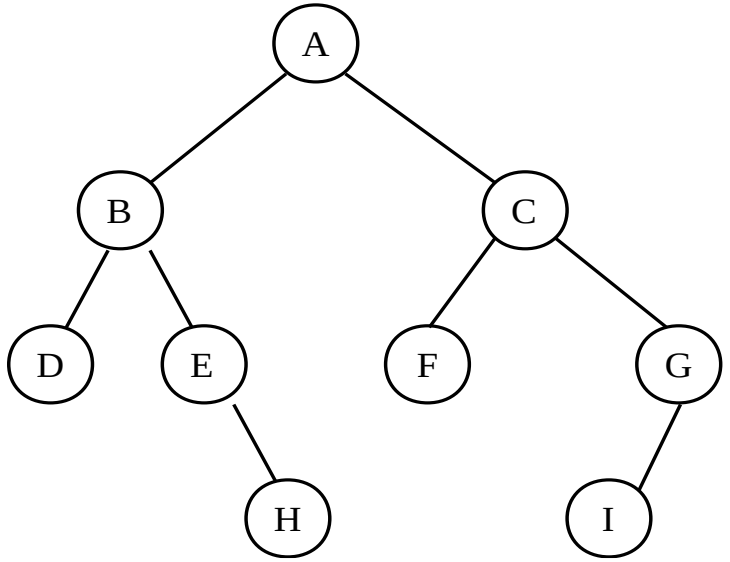
이진 트리(Binary Tree)

- 특징
  - 모든 노드가 정확하게 두 개의 서브트리를 가지고 있는 트리
    - 서브트리는 공백이 될 수 있음
    - 리프 노드 (leaf node): 서브트리가 모두 공백인 노드
  - 왼쪽 서브트리와 오른쪽 서브트리를 분명하게 구별
  - 이진 트리 자체가 노드가 없는 공백(empty)이 될 수 있음

- 정의 : 이진 트리(binary tree: BT)
  - 노드의 유한집합으로서 공백(empty)이거나 루트와 두 개의 분리된 이진 트리, 왼쪽 서브트리(left subtree)와 오른쪽 서브트리(right subtree)로 구성

이진 트리(Binary Tree) 예

- 이진 트리 예
  - 리프노드 (leaf node) : D, H, F, I
  - 노드 E와 G : 공백이 아닌 서브트리를 하나씩 가지고 있음
  - 노드 E : 공백 왼쪽 서브트리와 오른쪽 서브트리 H를 가지고 있음
  - 노드 G : 왼쪽 서브트리 I와 공백 오른쪽 서브트리를 가지고 있음



이진 트리(Binary Tree) 추상 데이타 타입

ADT BinaryTree

데이타 : 노드의 유한집합으로 공백이거나 루트 노드, 왼쪽 서브 트
오른쪽 서브 트리로 구성

연산 :

bt, bt1, bt2 ∈ BinaryTree; item ∈ Element;

createBT() ::= create an empty binary tree;

isEmpty(bt) ::= if (bt = empty) then return true
else return false;

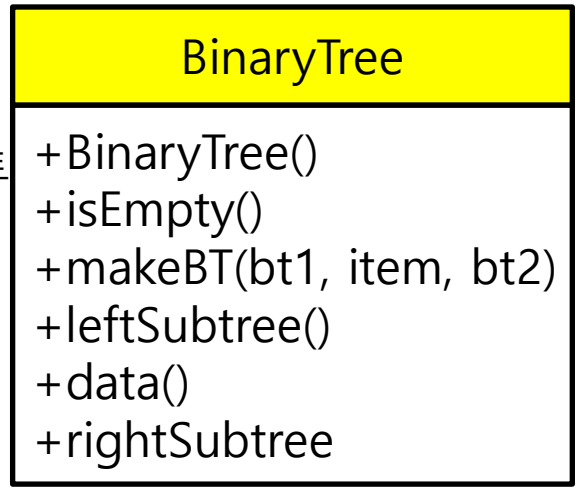
makeBT(bt1, item, bt2) ::= return a binary tree whose root contains item,
left subtree is bt1, and right subtree is bt2;

leftSubtree(bt) ::= if (isEmpty(bt)) then return null
else return left subtree of bt;

data(bt) ::= if (isEmpty(bt)) then return null
else return the item in the root node of bt;

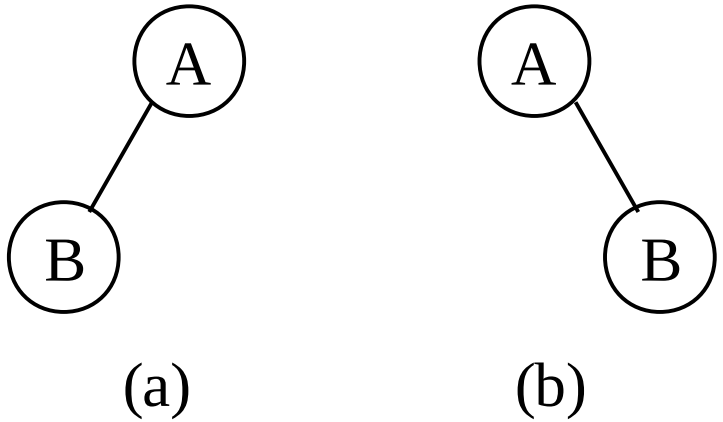
rightSubtree(bt) ::= if (isEmpty(bt)) then return null
else return right subtree of bt;

End BinaryTree



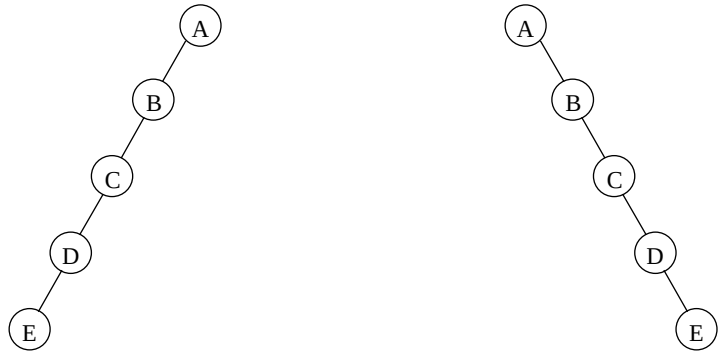
이진 트리와 일반 트리의 차이점

- 이진 트리에는 공백 이진 트리가 있지만, 일반 트리에는 공백 트리가 없음
- 이진 트리에서는 서브트리의 순서를 구분
  - 서로 다른 이진 트리 예



편향 이진 트리(skewed binary tree)

- 편향 이진 트리
  - 왼편 편향
  - 오른편 편향

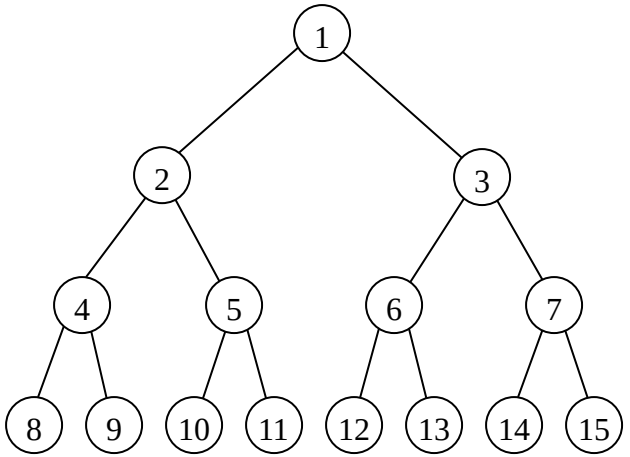


(a) (b)

- 이진 트리의 주요 성질
  - 레벨 i($i \geq 0$)의 최대 노드 수: 2^i
  - 높이가 h($h \geq 0$)인 이진 트리의 최대 노드 수 : $2^{h+1}-1$

포화 이진 트리(full binary tree)

- 높이가 h일 때 노드 수가 $2^{h+1}-1$인 이진 트리
- 높이가 3인 포화 이진 트리의 예

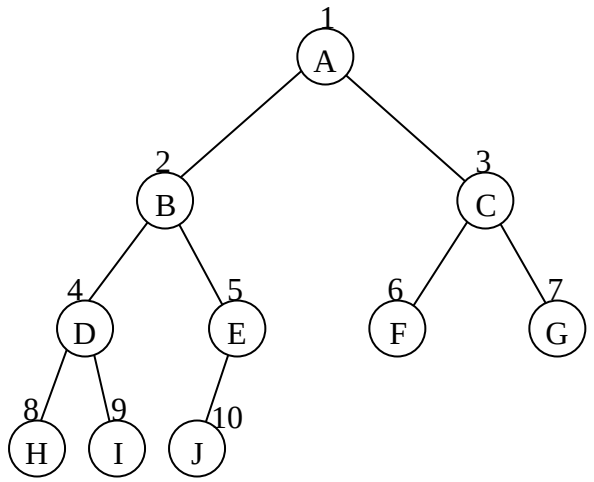


높이가 3인 포화 이진 트리

- 포화 이진 트리 번호(full binary tree number): 루트 노드를 1번으로 하고 레벨 별로 왼편에서 오른편으로 차례로 노드 위치에 지정한 번호($2^{h+1}-1$ 까지 유일)

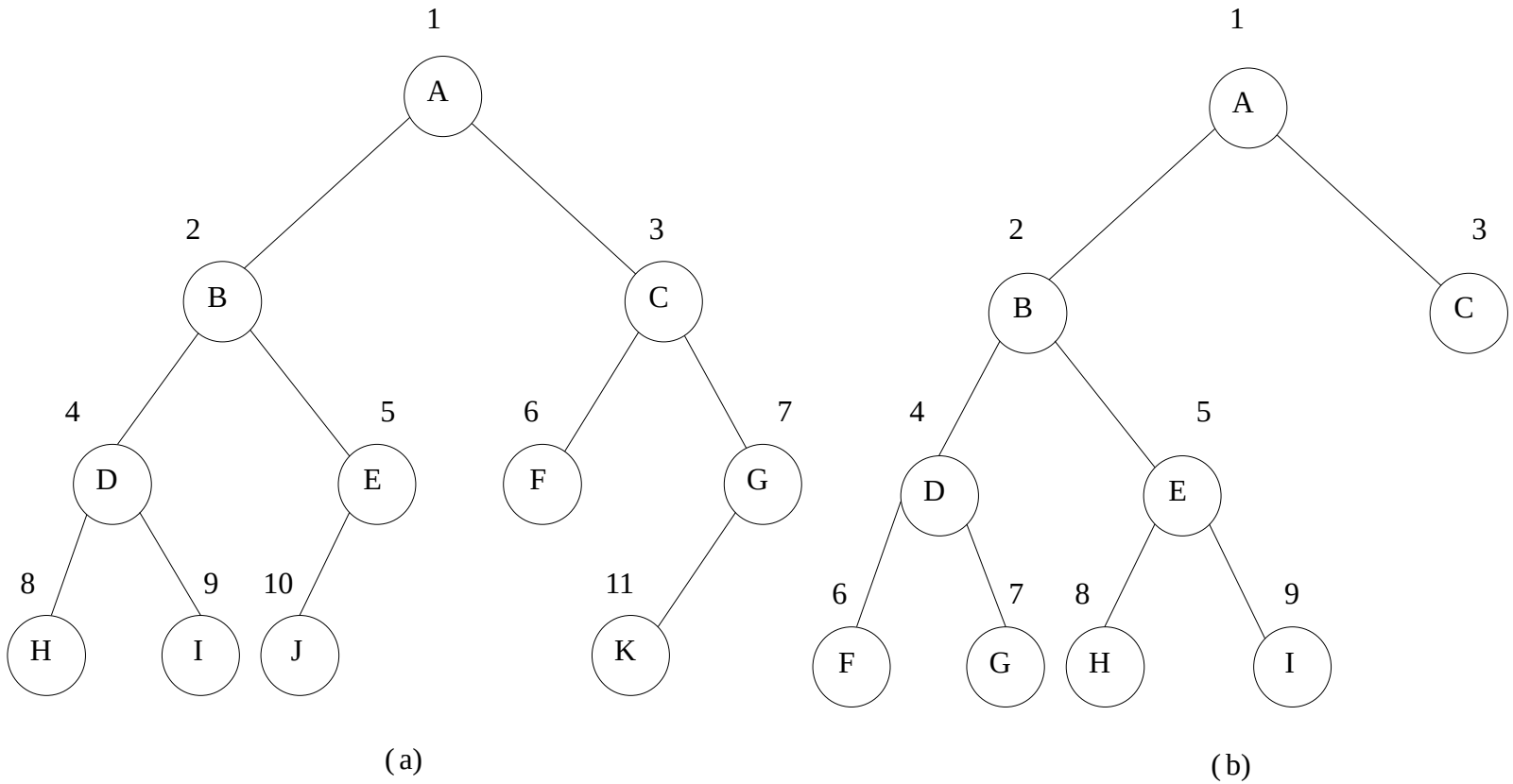
완전 이진 트리(complete binary tree)

- 높이가 h, 노드수가 n인 이진 트리에서 노드의 레벨 순서 번호들이 높이가 h인 포화 이진 트리 번호 1에서 n까지 모두 일치하는 트리



완전 이진 트리

완전 이진 트리가 아닌 이진 트리의 예

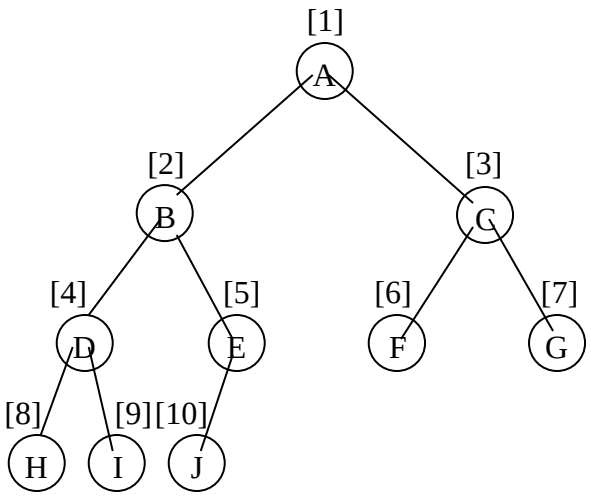


완전 이진 트리가 아닌 이진 트리

7.3 이진 트리의 표현

일차원 배열 표현

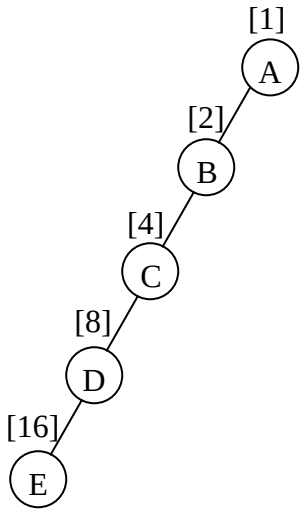
- 이진 트리의 순차 표현
- 포화 이진 트리 번호를 배열의 인덱스로 사용
  - 인덱스 0: 실제로 사용하지 않음
  - 인덱스 1: 항상 루트 노드
- 완전 이진 트리(T)의 순차 표현 예



	T
[0]	-
[1]	A
[2]	B
[3]	C
[4]	D
[5]	E
[6]	F
[7]	G
[8]	H
[9]	I
[10]	J

편향 이진 트리의 순차 표현 예

- 편향 이진 트리(S)의 순차 표현 예



S

[0]	-
[1]	A
[2]	B
[3]	-
[4]	C
[5]	-
[6]	-
[7]	-
[8]	D
.	-
.	…
.	-
[16]	E

- 완전 이진 트리의 1차원 배열 표현에서의 인덱스 관계

목표 노드	인덱스 값	조 건
노드 i의 부모	$\lfloor i/2 \rfloor$	$i > 1$
노드 i의 왼쪽 자식	$2*i$	$2*i \leq n$
노드 i의 오른쪽 자식	$2*i + 1$	$(2*i + 1) \leq n$
루트 노드	1	$0 < n$

이진 트리의 표현

- 배열 T에 대한 인덱스 관계 적용 예
  - 노드 I의 부모: 배열 T에서 I=T[9], 그 부모는 T[9/2]=T[4]에 위치
  - 노드 C의 오른쪽 자식: C=T[3], 그 오른쪽 자식은 T[3*2+1]=T[7]에 위치
  - 노드 C의 왼쪽 자식: T[3*2]=T[6]에 위치

- 순차 표현의 장단점
  - 장점
    - 어떤 이진 트리에도 사용 가능
    - 완전 이진 트리: 최적
  - 단점
    - 편향 이진 트리: 배열 공간을 절반도 사용하지 못할 수 있음
      → 높이가 k인 편향 이진 트리: 2^{k+1}-1개의 공간이 요구될 때 k+1만 실제 사용
    - 트리의 내부 노드의 삭제나 삽입시: 많은 다른 노드들의 이동 불가피

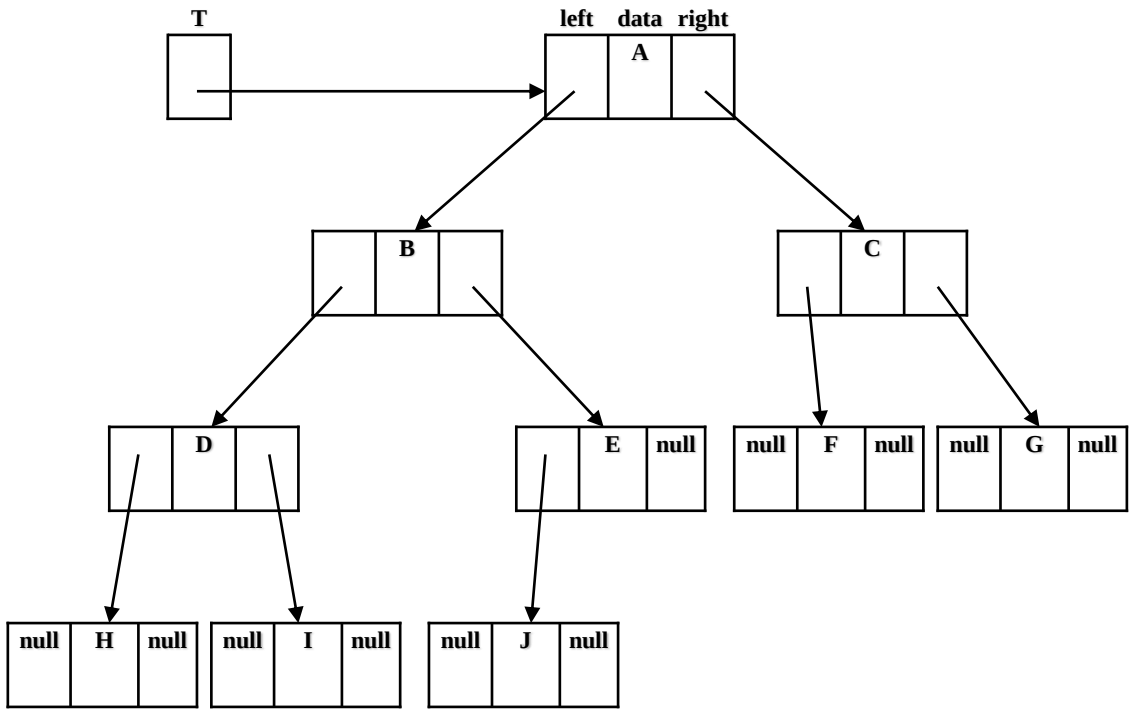
연결 리스트로 표현

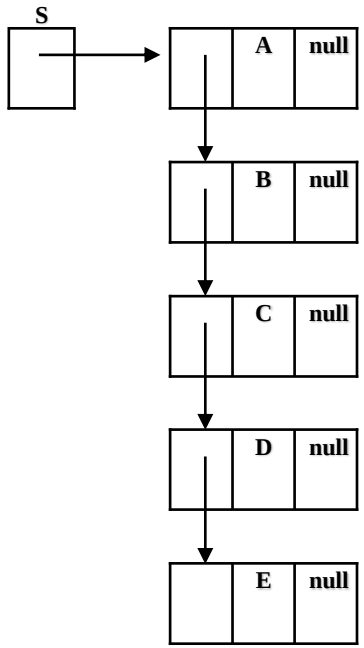
- 이진 트리의 비순차 표현
- 각 노드를 3개의 필드 left, data, right로 구성

  - left와 right : 각각 왼쪽 서브트리와 오른쪽 서브트리를 가리키는 링크

- 필요 시 부모를 가리키는 parent 필드 추가

완전 이진 트리와 편향 이진 트리의 연결 표현





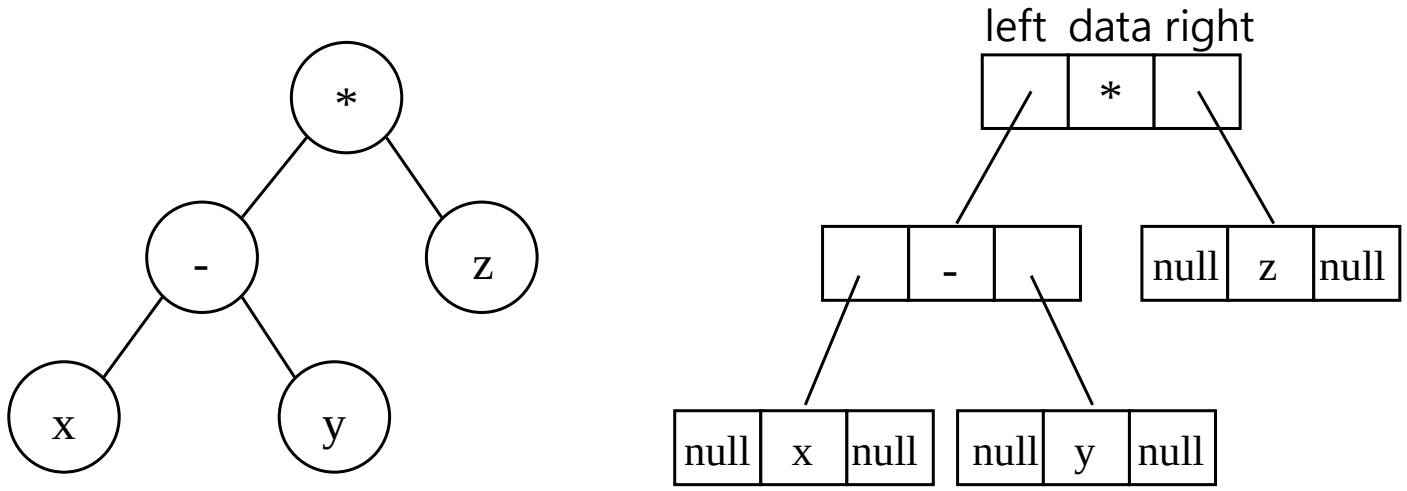
이진 트리 노드 구조를 위한 TreeNode class 정의

```
class TreeNode{
    Object  data;
    TreeNode  left;
    TreeNode  right;
}
```

```
public class BinaryTree {
   Object  data;
   BinaryTree left;
   BinrayTree right;

   public BinaryTree() { . . . }

   public boolean isEmpty() {
      return data == null
             && left == null
             && right == null;
   }

   public BinaryTree leftSubtree() {
      return left;
   }

   public BinaryTree rightSubtree() {
      return right;
   }

   public Object getData() {
      return data;
   }
}
```

수식 이진 트리(expression binary tree)

- 수식을 이진 트리로 표현
- 수식 ((x-y)*z)를 표현하는 수식 이진 트리의 연결 리스트 표현 예



7.4 이진 트리 순회

이진 트리 순회(binary tree traversal)

- 이진 트리에서 모든 노드를 차례로 방문
- n개의 노드들에 대한 가능한 순회 순서: n!

- 한 노드에서 취할 수 있는 조치
  - 왼쪽 서브 트리로 이동 (L)
  - 현재의 노드(데이타 필드) 방문 (D)
  - 오른쪽 서브 트리로 이동 (R)

- 한 노드에서 취할 수 있는 순회 방법
  - LDR, LRD, DLR, RDL, RLD, DRL 등 6가지
  - 왼편 서브트리를 오른편 서브트리보다 항상 먼저 순회해야한다는 조건: LDR, LRD, DLR 3가지
    → 이것을 중위(inorder), 후위(postorder), 전위(preorder) 순회라 함 : 데이타 필드의 위치를 기준
  - 산술식 표현 이진 트리의 중위, 후위, 전위 순회 결과
    → 각각 중위 표기식, 후위 표기식, 전위 표기식이 됨

중위 순회(inorder traversal)

- 중위 순회 방법

  i) 왼편 서브트리(left subtree)를 중위 순회

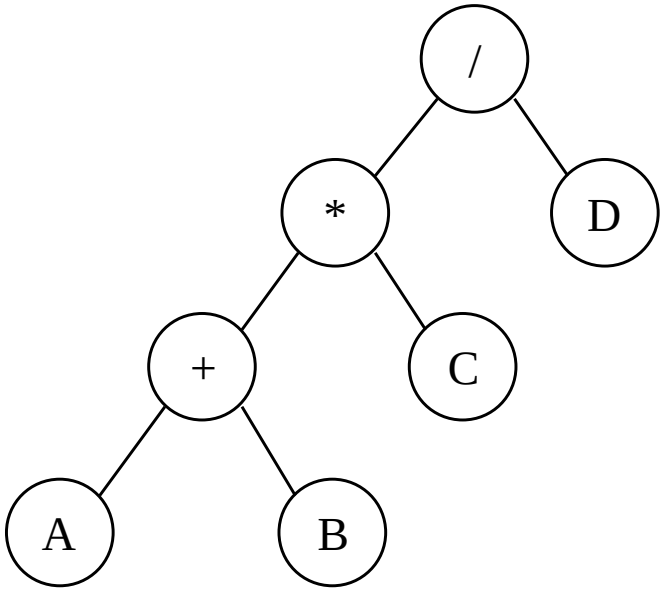
  ii) 루트 노드(root node)를 방문

  iii) 오른편 서브트리(right subtree)를 중위 순회

- 순환 함수로 표현

```
inorder(T)
    if (T ≠ null) then  {
        inorder(T.left);
        visit T.data;
        inorder(T.right);
    }
end inorder()
```

수식 이진 트리의 예



- 수식 이진 트리의 중위 순회 결과: A+B*C/D

후위 순회(postorder traversal)

- 후위 순회 방법
  - i) 왼편 서브트리(left subtree)를 후위 순회
    - ii) 오른편 서브트리(right subtree)를 후위 순회
  - iii) 루트 노드(root node)를 방문

- 순환 함수로 표현

```
postorder(T)
   if (T ≠ null) then {
       postorder(T.left);
       postorder(T.right);
       visit T.data;
   }
end postorder()
```

- 수식 이진 트리의 후위 순회 결과: AB+C*D/

전위 순회(preorder traversal)

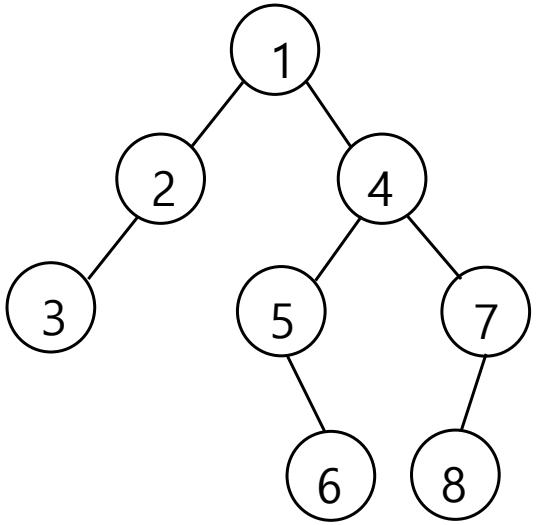
- 전위 순회 방법
  - i) 루트 노드(root node)를 방문
  - ii) 왼편 서브트리(left subtree)를 전위 순회
  - iii) 오른편 서브트리(right subtree)를 전위 순회

- 순환 함수로 표현

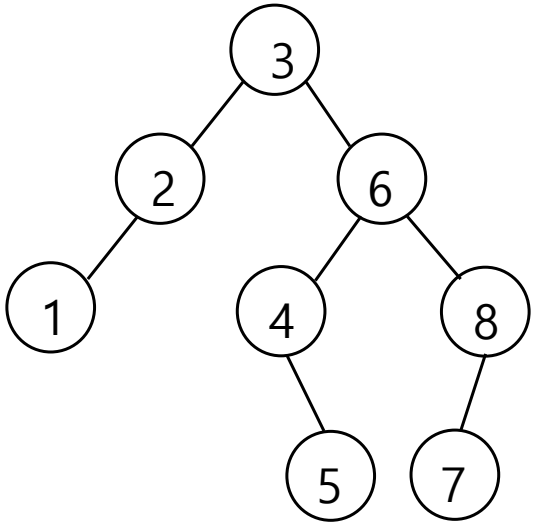
```
preorder(T)
    if (T ≠ null) then {
        visit T.data;
        preorder(T.left);
        preorder(T.right);
    }
end preorder()
```

- 수식 이진 트리의 전위 순회 결과: /*+ABCD

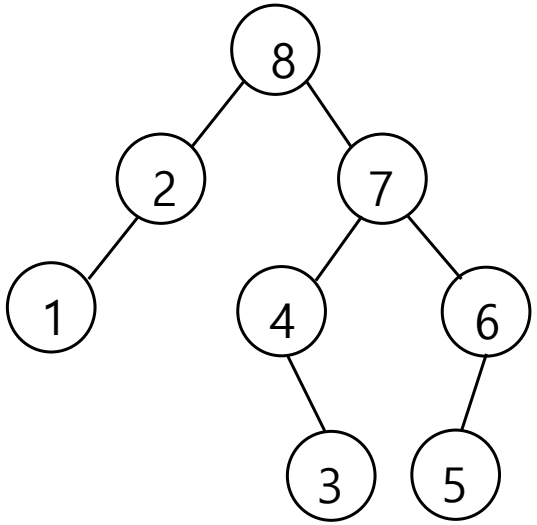
전위, 중위, 후위 순회 비교



(a) 전위 순회



(b) 중위 순회



(c) 후위 순회

중위 순회를 위한 비순환 알고리즘

- 순환 호출을 제어하기 위해 스택을 사용

```
iterInorder(T)
     initialize stack;   //스택을 초기화
     p ← T;
     if (p ≠ null) then push(stack, p);  //루트를 삽입
     while (not(isEmpty(stack))) do {
         if (p ≠ null) then {
             p ← peek(stack);
             p ← p.left;     //왼쪽 서브트리 순회
             while (p ≠ null) do {
                 push(stack, p);
                 p ← p.left;
             }
         }
         p ← pop(stack);
         visit p.data;
         p ← p.right;   //오른쪽 서브트리 순회
         if (p ≠ null) then push(stack, p);
     }
 end iterInorder()
```

레벨 순서 순회(level order traversal)

- 이진 트리를 노드의 레벨 순서로 순회
- 큐를 사용
  1. 먼저 루트 노드를 큐에 삽입
  2. 순회는 큐에 있는 노드를 삭제하며 널이 아니면 그 노드를 방문하고
  3. 그의 왼쪽 자식과 오른쪽 자식을 순서대로 큐에 삽입
  4. 이 과정을 큐가 공백이 될 때까지 반복
- 레벨 순서 이진 트리 순회 알고리즘

```
levelorder(T)
    initialize queue; // 큐를 초기화
    enqueue(queue,T);
    while (not (isEmpty(queue))) do {
        p ← dequeue(queue);
        if (p ≠ null) then {
            visit p.data;
            enqueue(queue, p.left);
            enqueue(queue, p.right);
        }
    }
end levelorder()
```

7.5 이진 트리의 기타 주요 연산

이진 트리의 복사

```
copy(T)
    S ← null;                  //공백 이진 트리 초기화.
    if (T ≠ null) then {
        L ← copy(T.left);    // 왼편 서브 트리 복사
        R ← copy(T.right);   // 오른편 서브 트리 복사
        S ← getnode();       // 노드는 data, left, right 필드로 구성
        S.left  ← L;         // s의 필드에 복사
        S.right ← R;
        S.data  ← T.data;
    }
    return S;
end copy()
```

두 개의 이진 트리의 동등성 결정

```
equal(S, T)
    ans ← false;
    case {
        S = null and T = null :
            ans ← true;
        S ≠ null and T ≠ null :
            if (S.data = T.data) then {
                ans ← equal(S.left, T.left);
                if ans then
                    ans ← equal(S.right, T.right);
            }
    }
    return ans;
end equal()
```

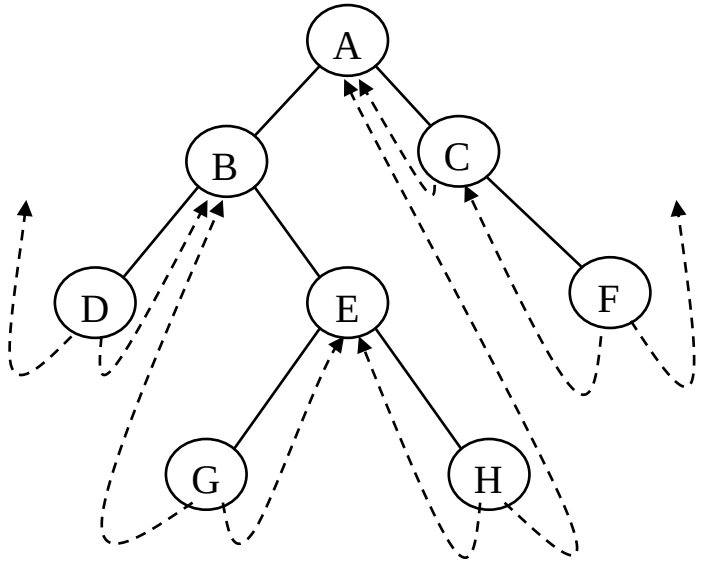
7.6 스레드 이진 트리

스레드 이진 트리(threaded binary tree) (1)

- 연결 리스트로 표현한 이진 트리의 특성
  - 실제로 사용하는 링크 수보다 사용하지 않는 널(null)
    링크 수가 더 많음(낭비)
    - n개의 노드를 가진 이진 트리의 총 링크 수: 2n개
    - 실제 사용되는 링크 수: n-1개
    - 널 링크 수: n+1개
- 스레드 이진 트리(threaded binary tree)
  - 사용하지 않는 널 링크에 스레드를 저장해 트리 순회를 위한 정보로 활용
    - 스레드(thread): 트리의 어떤 다른 노드에 대한 포인터
  - 스레드 이진 트리 생성 방법
    - 노드 p의 널 right: 중위 순회에서 중위 후속자에 대한 포인터를 저장
    - 노드 p의 널 left: 중위 순회에서 중위 선행자에 대한 포인터를 저장

스레드 이진 트리 (2)

- 스레드 이진 트리,TBT : 점선은 스레드를 표현



- 9개의 널 링크에 스레드가 저장

- 노드 H : left 필드에는 중위 선행자 E에 대한 스레드, right 필드에는 중위 후속자 A에 대한 스레드를 저장

스레드 이진 트리 (3)

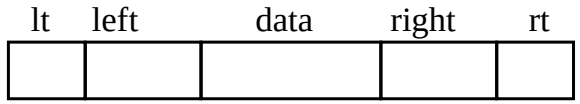
- 스레드와 일반 널 포인터를 구별하기 위하여 두 개의 불리언 필드 lt(왼쪽 스레드, left thread)와 rt(오른쪽 스레드, right thread)를 추가로 사용

$$p.lt = \begin{cases} \text{true} & : \text{P.left는 중위 선행자에 대한 스레드} \\ \text{false} & : \text{P.left는 왼쪽 자식을 가리키는 포인터} \end{cases}$$

$$p.rt = \begin{cases} \text{true} & : \text{P.right는 중위 후속자에 대한 스레드} \\ \text{false} & : \text{P.right는 오른쪽 자식을 가리키는 포인터} \end{cases}$$

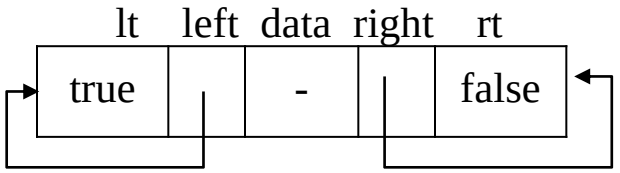
스레드 이진 트리 구조(1)

- 노드 구조



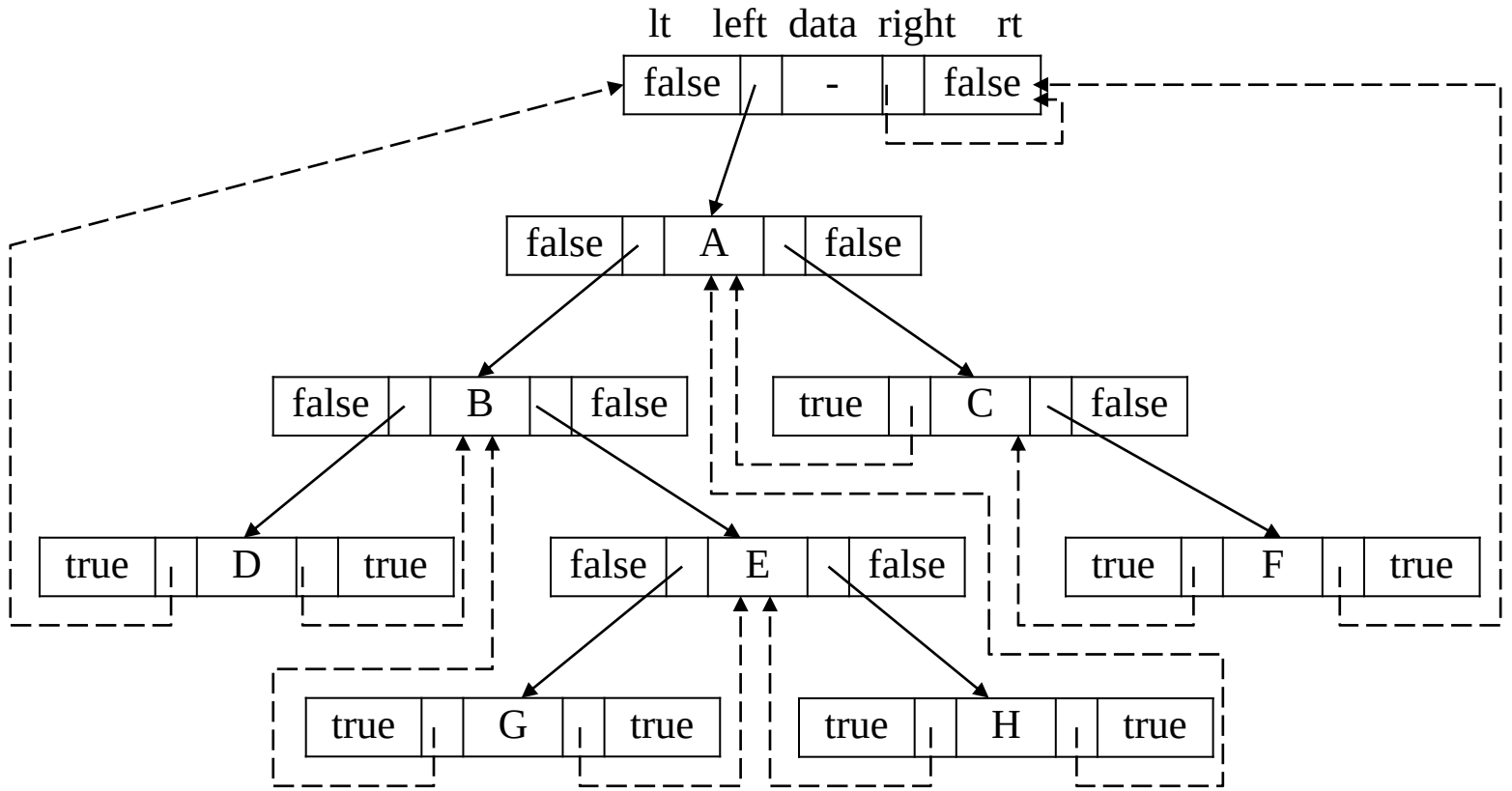
- 헤더 노드를 사용
  - D.lt와 F.rt의 매달려 있는 스레드(dangling thread)를 해결
  - 다른 노드 구조와 동일
  - data 필드는 다른 용도로 사용
  - 스레드 이진 트리 TBT를 헤더 노드의 왼쪽 서브트리로 표현

- 공백 스레드 이진 트리에 대한 헤더 노드(note: rt=false)



스레드 이진 트리 구조(2)

- 헤더 노드를 추가시킨 TBT



스레드 이진 트리에 대한 중위 순회 알고리즘

- 임의의 노드 p에서 p.rt = true 이면,
  - p의 중위 후속자는 p.right가 가리키는 노드가 됨
- p.rt = false이면,
  - p의 오른편 자식의 왼편 링크만을 계속 따라 내려가다가 lt = true 인 노드가 p의 중위 후속자가 됨

- 임의의 노드 p에 대한 중위 후속자 탐색 함수

```
// 중위 스레드 이진 트리에서 p의 중위 후속자를 반환
inorderSuccessor(p)
    q ← p.right;
    if (p.rt = false) then // 이전 링크가 쓰레드 링크였나?
        while (q.lt = false) do
            q ← q.left;
    return q;
end inorderSuccessor()
```

중위 스레드 이진 트리의 순회 알고리즘

- 함수 inorderSuccessor를 반복적으로 계속 호출

```
// 중위 스레드 이진 트리를 중위 순회
inorderThread(p)
    q ← inorderSuccessor(p);
    while (q ≠ p) do {
        visit q.data;
        q ← inorderSuccessor(q);
    }
end inorderThread()
```

노드 p의 중위 선행자를 찾아내는 함수를 만드는 경우

- 중위 후속자를 찾아내는 함수에서 right와 left의 기능을 서로 바꿔줌

```
// 중위 스레드 이진 트리에서 중위 선행자를 반환
inorderPredecessor(p)
    q ← p.left;
    if (p.lt = false) then
        while (q.rt = false) do
            q ← q.right;
    return q;
end inorderPredecessor()
```

스레드 이진 트리에 대한 전위 순회 알고리즘

- 먼저 전위 후속자 반환 함수 preorderSuccessor를 작성

- 전위 후속자 반환 함수

```
// 중위 스레드 이진 트리에서 p의 전위 후속자를 반환
preorderSuccessor(p)
    if (p.lt = false) then return p.left;
    else {
        q ← p;
        while (q.rt = true) do
            q ← q.right;
        return q.right;
    }
end preorderSuccessor()
```

전위 순회 알고리즘

```
preorderThread(p)
    // 중위 스레드 이진트리를 전위 순회
    q ← preorderSuccessor(p);
    while (q ≠ p) do {
        visit q.data
        q ← preorderSuccessor(q);
    }
end preorderThread()
```

스레드 이진 트리에서의 노드 삽입(1)

- 중위 스레드 이진 트리에서 노드 p의 오른편 자식으로 노드 q를 삽입하는 경우

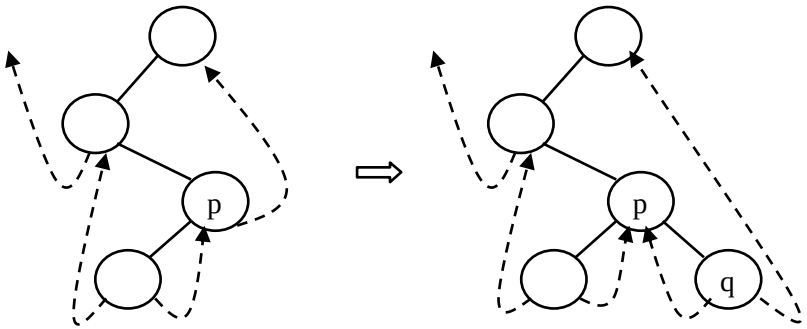
1. 노드 p의 오른편 서브트리가 공백시 (그림 (a))
   - 노드 p의 right와 rt를 그대로 노드 q에 복사
   - q의 left는 스레드로 p를 가리키게 하면서 lt는 true로 설정

2. 노드 p가 오른편 서브트리 r을 가지고 있을 때 (그림 (b))
   - 이 r을 노드 q의 오른편 서브 트리로 만듦
   - 그리고 q의 left는 스레드로 p를 가리키게 함
   - 다음에는 q의 중위 후속자(q를 삽입하기 전에 p의 중위 후속자)의 left가 스레드로 q를 가리키게 함

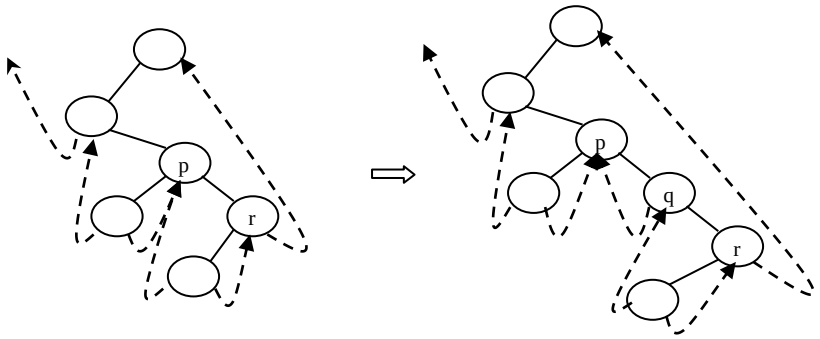
스레드 이진 트리에서의 노드 삽입(2)

스레드 이진 트리에서 노드 p의 오른쪽 서브트리로 노드 q를 삽입하는 예

(a) p의 오른쪽 서브트리가 공백인 경우



(b) p의 오른쪽 서브트리가 공백이 아닌 경우

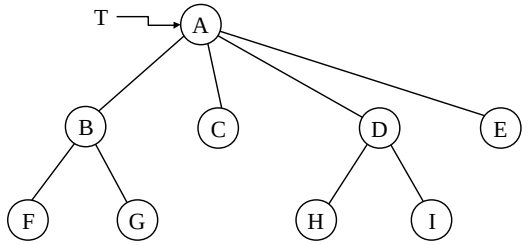



```
threadInsertRight(p, q)
    // 중위 스레드 이진 트리에서
    // 노드 p의 오른편 서브트리로 노드 q를 삽입
     q.right ← p.right;
     q.rt ← p.rt;
     q.left ← p;
     q.lt ← true;
     p.right ← q;
     p.rt ← false;
     if (q.rt = f) then {
          r ← inorderSuccessor(q);
          r.left ← q;
     }
 end threadInsertRight()
```

7.7 일반 트리를 이진 트리로의 표현

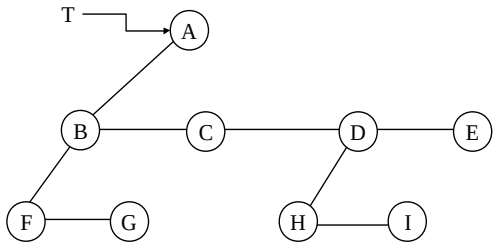
일반 트리를 이진 트리로 표현 (1)

- 일반 트리를 이진 트리로 변환하는 방법
  - 한 노드의 모든 자식들을 첫 번째 자식과 나머지 다음 형제 관계로 만듦
    - 모든 노드는 기껏해야 하나의 첫째 자식과 하나의 다음 형제를 갖도록 함
    - 트리(T)



      - 노드 B: 첫째 자식은 F, 다음 형제는 C

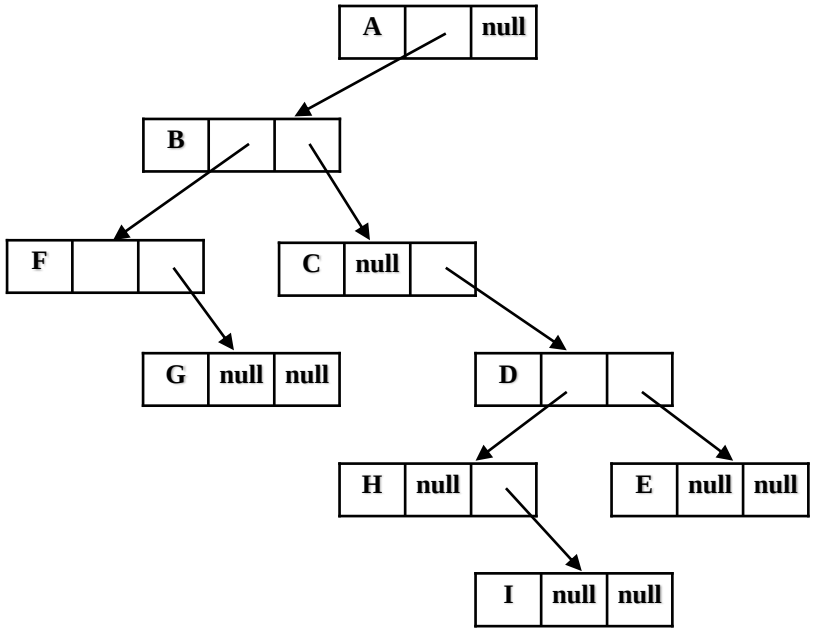
  - 대응 이진 트리: 부모노드와 첫째 자식 노드, 그리고 다음 형제 노드들을 연결



일반 트리를 이진 트리로 표현 (2)

- 이진 트리 표현
  - 노 드 구 조 : data 와 두 개 의 필 드 child 와 sibling 으 로 구 성

  - 오른편 서브트리를 왼편으로 45도 회전
  - 변환된 이진 트리의 루트 노드는 sibling 필드가 항상 공백
  - 변환된 이진 트리의 연결 리스트 표현



트리에 대한 순회 알고리즘

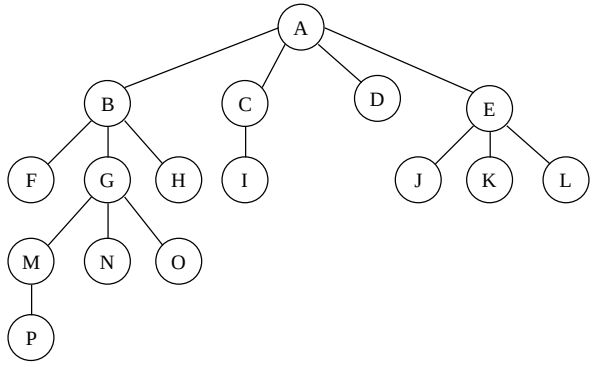
- 트리 전위(tree preorder) 순회
  ① 루트를 방문
  ② 첫 번째 서브트리를 트리 전위로 순회
  ③ 나머지 서브트리들을 트리 전위로 순회

- 트리 중위(tree inorder)순회
  ① 첫 번째 서브트리를 트리 중위로 순회
  ② 루트를 방문
  ③ 나머지 서브트리들을 트리 중위로 순회

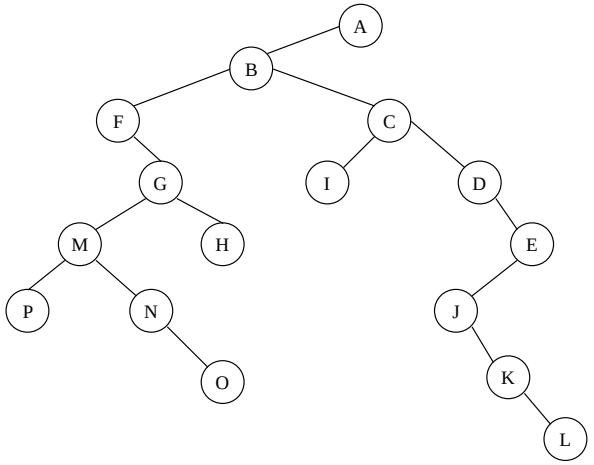
- 트리 후위(tree postorder)순회
  ① 첫 번째 서브트리를 트리 후위로 순회
  ② 나머지 서브트리를 트리 후위로 순회
  ③ 루트를 방문

일반 트리를 이진 트리로 표현 (4)

- 트리와 변환된 이진 트리의 예



(a) 트리



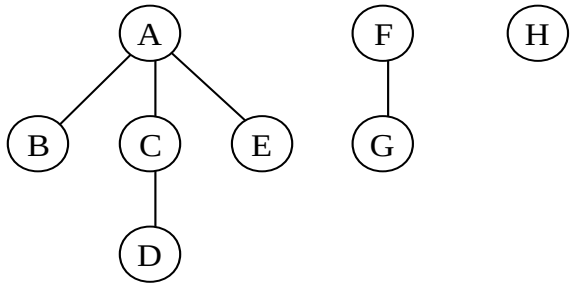
(b) 변환된 이진 트리

- 트리 순회의 결과
  - 트리 전위 순회: A, B, F, G, M, P, N, O, H, C, I, D, E, J, K, L
  - 트리 중위 순회: F, B, P, M, G, N, O, H, A, I, C, D, J, E, K, L
  - 트리 후위 순회: F, P, M, N, O, G, H, B, I, C, D, J, K, L, E, A
- 변환된 이진 트리의 순회 결과와의 비교
  - 트리 전위 순회 결과 = 변환된 이진 트리의 전위 순회 결과
  - 트리 중위 순회 결과 ≠ 변환된 이진 트리의 어떤 순회 결과
  - 트리 후위 순회 결과 = 변환된 이진 트리의 중위 순회 결과

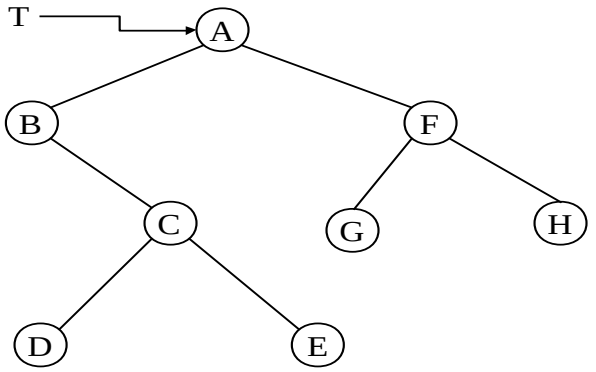
포리스트를 이진 트리로 변환 방법

- 각 트리들을 이진 트리로 변환
- 이들의 루트 노드들을 첫 번째 루트 노드의 형제로 취급하여 Sibling 필드로 연결

- 포리스트 F



- 포리스트 F의 이진 트리 T로



포리스트에 대한 순회 알고리즘

- 포리스트 전위(forest preorder)순회
  ① F의 첫 번째 트리의 루트를 방문
  ② 첫 번째 트리의 서브트리들을 포리스트 전위로 순회
  ③ F의 나머지 트리들을 포리스트 전위로 순회

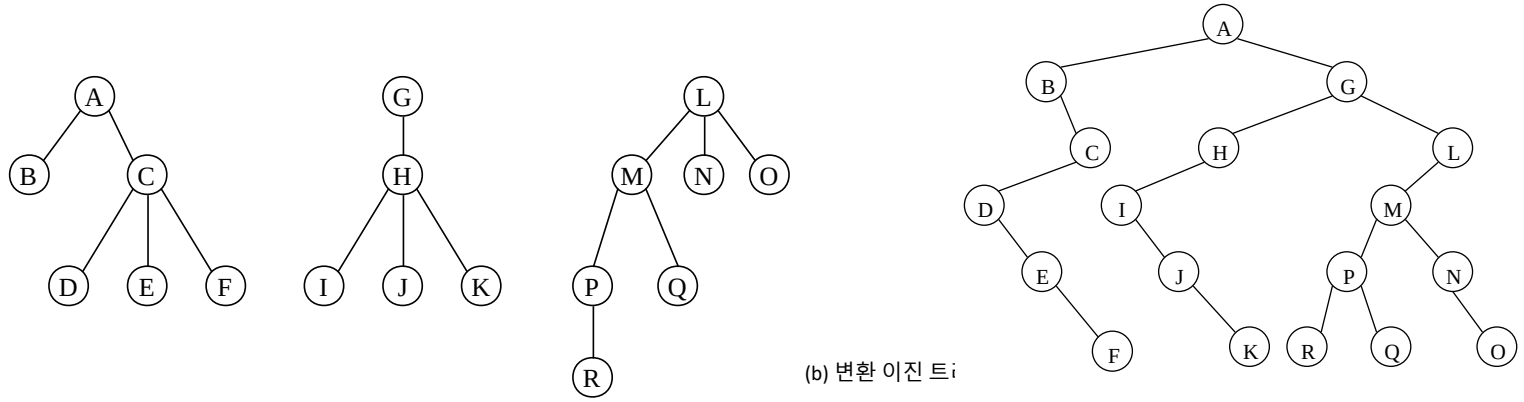
- 포리스트 중위(forest inorder) 순회
  ① 첫 번째 트리의 서브트리들을 포리스트 중위로 순회
  ② 첫 번째 트리의 루트를 방문
  ③ 나머지 트리들을 포리스트 중위로 순회

- 포리스트 후위(forest postorder)순회
  ① 첫 번째 트리의 서브트리들을 포리스트 후위로 순회
  ② 나머지 트리들을 포리스트 후위로 순회
  ③ 첫 번째 트리의 루트를 방문

- 변환된 이진 트리의 순회 결과와의 비교
  - 포리스트 전위 순회 결과 = 변환된 이진 트리의 전위 순회 결과
  - 포리스트 중위 순회 결과 = 변환된 이진 트리의 중위 순회 결과
  - 포리스트 후위 순회 결과 ≠ 변환된 이진 트리의 후위 순회 결과

포리스트를 이진 트리로 표현 (3)

- 3개의 트리로 구성된 포리스트와 이를 변환한 이진 트리 예



- 순회 결과의 비교
  - 포리스트 전위 순회 결과 = 변환된 이진 트리의 전위 순회 결과
    = (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, P, R, Q, N, O)
  - 포리스트 중위 순회 결과 = 변환된 이진 트리의 중위 순회 결과
    = (B, D, E, F, C, A, I, J, K , H, G, R, P, Q, M, N, O, L)
  - 포리스트의 후위 순회 결과
    = (B, D, E, F, C, I, J, K, H, G, R, P, Q, M, N, O, L, A)
  - 변환된 이진 트리의 후위 순회 결과
    = (F, E, D, C, B, K, J, I, H, R, Q, P, O, N, M, L, G, A)

포리스트를 이진 트리로 표현 (4)

- 포리스트의 레벨 순서 순회
  - 포리스트에 있는 각 트리의 루트 노드에서부터 시작하여 레벨별로 노드들을 순회
  - 같은 레벨 안에서는 왼편에서 오른편으로 순회

  - 포리스트의 레벨 순서 순회와 변환된 이진 트리의 레벨 순서 순회는 그 결과가 반드시 일치하지 않음

    - 위 그림 (a)의 포리스트 레벨 순서 순회 결과:

      A, G, L, B, C, H, M, N, O, D, E, F, I, J, K, P, Q, R