공간 좌표 변환의 개념

위치의 표현

직교 좌표계(Cartesian coordinate)를 많이 이용

- 직교하는 단위벡터(unit vector)로 구성된 3차원 좌표계
- 오른손 법칙을 따른다.

직교 좌표계상의 한 점의 위치

- 좌표계의 원점과 물체를 연결한 위치 벡터 p 로 표현

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}\cdot\hat{x} + \mathbf{p}\cdot\hat{y} + \mathbf{p}\cdot\hat{z} = p_x\hat{x} + p_y\hat{y} + p_z\hat{z}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

p_x, p_y, p_z **: p 의** $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ **방향 성분**

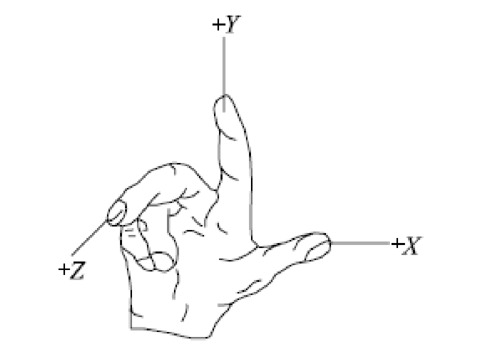


그림 1.29 ■ 오른손 법칙에 의한 직각좌표계

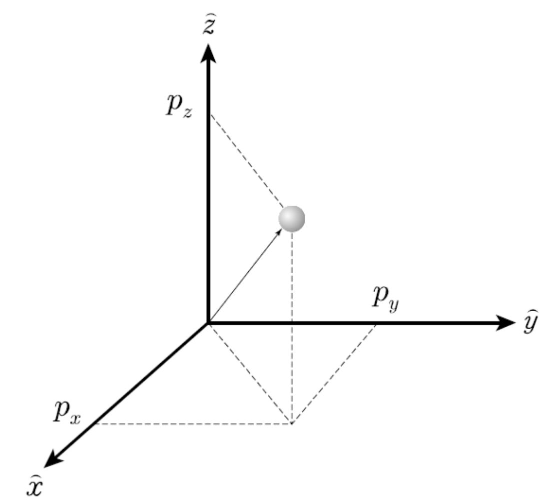


그림 2.1 ■ 점 P의 위치 벡터

위치의 표현

$$\hat{x}_B = \hat{x}_B \cdot \hat{x}_A + \hat{x}_B \cdot \hat{y}_A + \hat{x}_B \cdot \hat{z}_A \Leftrightarrow \hat{x}_B = \begin{bmatrix} \hat{x}_B \cdot \hat{x}_A \\ \hat{x}_B \cdot \hat{y}_A \\ \hat{x}_B \cdot \hat{z}_A \end{bmatrix}$$

방향 코사인(direction cosine)

→ 좌표계 {A}에서 본 벡터의 방향

→ 방향 벡터(direction vector)

$$\mathbf{p} = {}^{A}\mathbf{p} = {}^{A}p_x \hat{x}_A + {}^{A}p_y \hat{y}_A + {}^{A}p_z \hat{z}_A$$
$$= {}^{B}\mathbf{p} = {}^{B}p_x \hat{x}_B + {}^{B}p_y \hat{y}_B + {}^{B}p_z \hat{z}_B$$

${}^{A}p_x, {}^{A}p_y, {}^{A}p_z$: p의 $\hat{x}_A, \hat{y}_A, \hat{z}_A$ 방향성분

${}^{B}p_x, {}^{B}p_y, {}^{B}p_z$: p의 $\hat{x}_B, \hat{y}_B, \hat{z}_B$ 방향성분

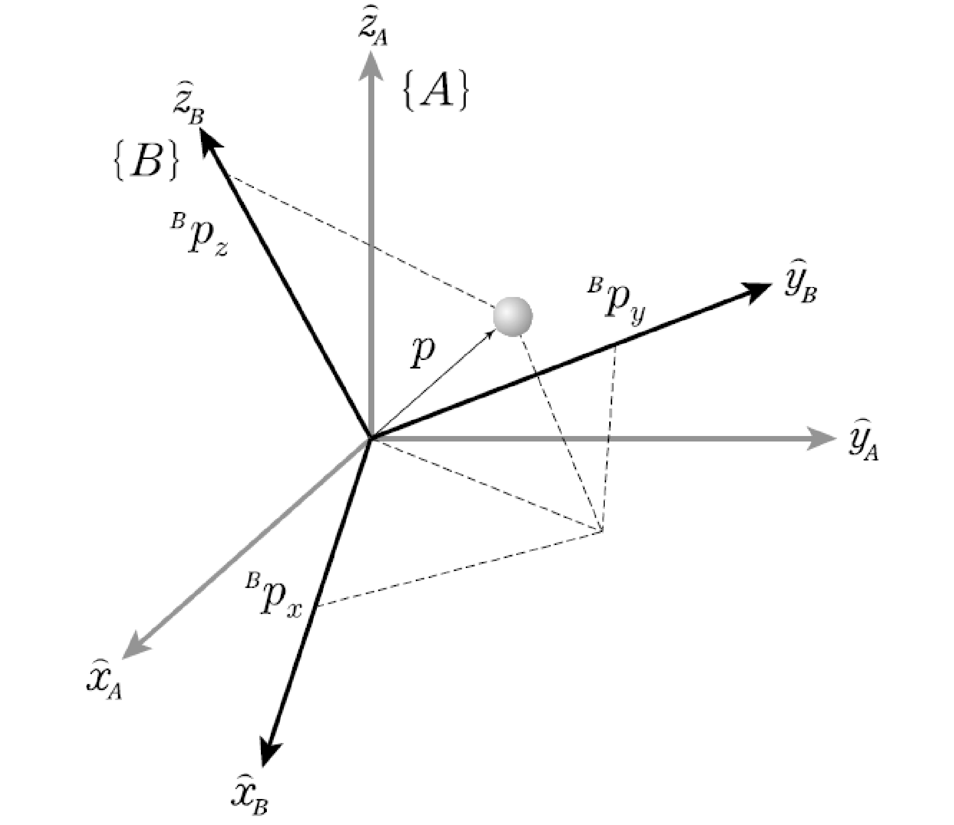


그림 2.2 ■ 좌표계 {A}, {B}에서 본 점 P의 위치

회전 행렬(rotation matrix)

$$\left.\begin{aligned}\hat{x}_B &= \hat{x}_B \cdot \hat{x}_A + \hat{x}_B \cdot \hat{y}_A + \hat{x}_B \cdot \hat{z}_A \\ \hat{y}_B &= \hat{y}_B \cdot \hat{x}_A + \hat{y}_B \cdot \hat{y}_A + \hat{y}_B \cdot \hat{z}_A \\ \hat{z}_B &= \hat{z}_B \cdot \hat{x}_A + \hat{z}_B \cdot \hat{y}_A + \hat{z}_B \cdot \hat{z}_A\end{aligned}\right\} \Rightarrow \; {}^A_B R = \begin{bmatrix}\hat{x}_B & \hat{y}_B & \hat{z}_B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\hat{x}_B \cdot \hat{x}_A & \hat{y}_B \cdot \hat{x}_A & \hat{z}_B \cdot \hat{x}_A \\ \hat{x}_B \cdot \hat{y}_A & \hat{y}_B \cdot \hat{y}_A & \hat{z}_B \cdot \hat{y}_A \\ \hat{x}_B \cdot \hat{z}_A & \hat{y}_B \cdot \hat{z}_A & \hat{z}_B \cdot \hat{z}_A\end{bmatrix}$$

- 좌표계 {A}와 {B} 사이의 변환 행렬으로 {B}의 {A}에 대한 상대 관계 또는 상대 회전량을 나타낸다.
- 물체의 방위를 나타내는데 사용된다.
  (∴ 방위 : 물체에 부착된 좌표계가 다른 기준 좌표계에 대해 갖는 상대적 회전량)

회전 행렬(rotation matrix)

$$
{}^{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} {}^{A}p_x \\ {}^{A}p_y \\ {}^{A}p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}\mathbf{p}\cdot\hat{x}_A \\ {}^{A}\mathbf{p}\cdot\hat{y}_A \\ {}^{A}\mathbf{p}\cdot\hat{z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}\cdot\hat{x}_A \\ \mathbf{p}\cdot\hat{y}_A \\ \mathbf{p}\cdot\hat{z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ({}^{B}p_x\hat{x}_B + {}^{B}p_y\hat{y}_B + {}^{B}p_z\hat{z}_B)\cdot\hat{x}_A \\ ({}^{B}p_x\hat{x}_B + {}^{B}p_y\hat{y}_B + {}^{B}p_z\hat{z}_B)\cdot\hat{y}_A \\ ({}^{B}p_x\hat{x}_B + {}^{B}p_y\hat{y}_B + {}^{B}p_z\hat{z}_B)\cdot\hat{z}_A \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \hat{x}_B\cdot\hat{x}_A & \hat{y}_B\cdot\hat{x}_A & \hat{z}_B\cdot\hat{x}_A \\ \hat{x}_B\cdot\hat{y}_A & \hat{y}_B\cdot\hat{y}_A & \hat{z}_B\cdot\hat{y}_A \\ \hat{x}_B\cdot\hat{z}_A & \hat{y}_B\cdot\hat{z}_A & \hat{z}_B\cdot\hat{z}_A \end{bmatrix}
$$

$$\Rightarrow {}^{A}\mathbf{p} = {}^{A}_{B}R\ {}^{B}\mathbf{p}$$

→좌표계 {B}에 대해 표현된 점 p의 위치 ${}^{B}\mathbf{p}$ 가 좌표계 {A}의 좌표값 ${}^{A}\mathbf{p}$ 로 회전행렬 을 통하여 변환됨을 의미

${}^{A}_{B}R$: 변환행렬(Transformation Matrix)이라고 하며
R, A를 기준으로 하는 B라고 읽는다.

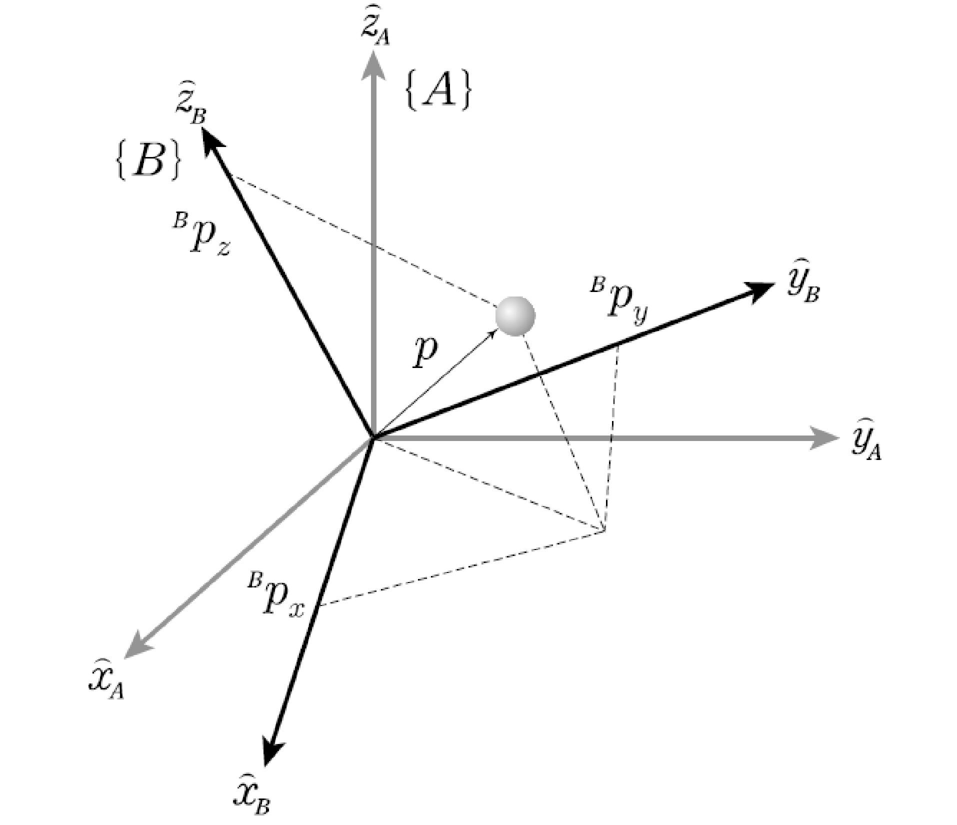


그림 2.2 ■ 좌표계 {A}, {B}에서 본 점 P의 위치

회전 행렬(rotation matrix)

회전행렬의 성질

$$
{}^{B}_{A}R = \begin{bmatrix} \hat{x}_A \cdot \hat{x}_B & \hat{y}_A \cdot \hat{x}_B & \hat{z}_A \cdot \hat{x}_B \\ \hat{x}_A \cdot \hat{y}_B & \hat{y}_A \cdot \hat{y}_B & \hat{z}_A \cdot \hat{y}_B \\ \hat{x}_A \cdot \hat{z}_B & \hat{y}_A \cdot \hat{y}_B & \hat{z}_A \cdot \hat{y}_B \end{bmatrix} \Longleftrightarrow {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} \hat{x}_B \cdot \hat{x}_A & \hat{y}_B \cdot \hat{x}_A & \hat{z}_B \cdot \hat{x}_A \\ \hat{x}_B \cdot \hat{y}_A & \hat{y}_B \cdot \hat{y}_A & \hat{z}_B \cdot \hat{y}_A \\ \hat{x}_B \cdot \hat{z}_A & \hat{y}_B \cdot \hat{y}_A & \hat{z}_B \cdot \hat{y}_A \end{bmatrix}
$$

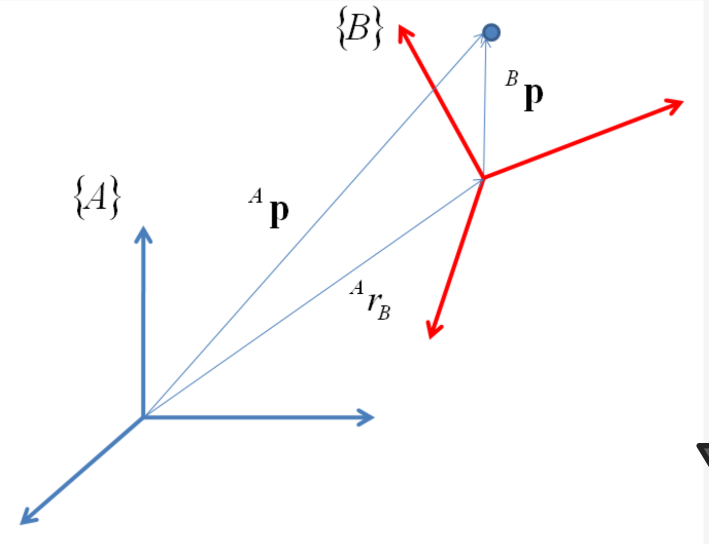
$$
{}^{B}_{A}R = {}^{A}_{B}R^{T}
$$

$$
\left.\begin{array}{l} {}^{A}\mathbf{p} = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\mathbf{p} \\ {}^{B}\mathbf{p} = {}^{B}_{A}R\,{}^{A}\mathbf{p} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad {}^{A}\mathbf{p} = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\mathbf{p} = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{A}R\,{}^{A}\mathbf{p} \quad \Rightarrow \quad {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{A}R = \mathbf{I}
$$

$$
\boxed{{}^{B}_{A}R = {}^{A}_{B}R^{-1} = {}^{A}_{B}R^{T}}
$$

회전 행렬(rotation matrix)

회전행렬의 성질



$^{A}\mathbf{p} = {}^{A}r_{B} + {}^{B}\mathbf{p}$ (incorrect!)

x,y,z 성분들은 서로 방위가 다른 좌표계 기준으로 표현되어 있어 직접 더해질 수 없다

$^{A}\mathbf{p} = {}^{A}r_{B} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\mathbf{p}$ (correct!)

두 좌표계 사이의 상대 거리(translation)

두 좌표계 사이의 상대 회전(rotation)

$$\begin{bmatrix} ^{A}\mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} & ^{A}_{B}R & & ^{A}r_{B} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{^{A}\mathbf{T}_{B}} \begin{bmatrix} ^{B}\mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{A}\mathbf{p} = {}^{A}_{B}\mathbf{T}\,{}^{B}\mathbf{p}$$

$^{A}\mathbf{T}_{B}$:동차 변환행렬(homogeneous transformation matrix)

동차변환을 이용한 좌표변환

동차 변환행렬의 구조와 표현

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \text{회전행렬}(3\times 3) & \text{병진벡터}(3\times 1) \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \qquad\qquad 1} \end{bmatrix}$$

정방행렬을 구성하여 행렬 계산이 용이하도록 추가된 행

$^{A}_{B}\mathbf{T}$

- 좌표계 {B} 로 표현된 벡터 ($^{B}\mathbf{p}$)를 좌표계 {A} 에 대해 표현하는 좌표변환(coordinate transformation) 으로서,

- 좌표계 {B}의 좌표계 {A}에 대한 회전행렬과 좌표계 {A}의 원점에서 좌표계 {B}의 원점까지의 병진벡터를 포함하는 4 x 4 행렬
-T A를 기준으로 하는 B로 읽음

Ex 1) 두 좌표계가 방위는 동일하고 좌표계 {A}에서 측정한 좌표계 {B}의 원점이 $[^{A}p_x, ^{A}p_y, ^{A}p_z]^T$ 에 위치하고 있다면

$$\mathbf{T} = Trans(p_x, p_y, p_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ^{A}p_x \\ 0 & 1 & 0 & ^{A}p_y \\ 0 & 0 & 1 & ^{A}p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

변환의 합성

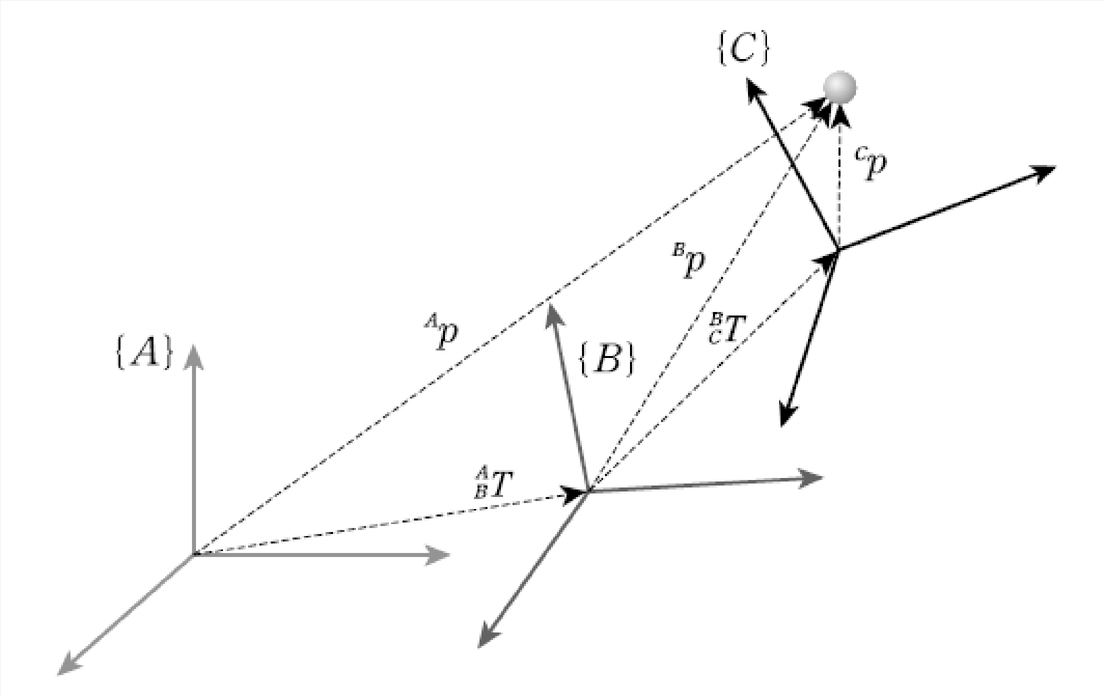


그림 2.5 ■ 변환의 합성

$$\begin{cases} {}^{B}\mathbf{p} = {}^{B}_{C}\mathbf{T}\,{}^{C}\mathbf{p} \\ {}^{A}\mathbf{p} = {}^{A}_{B}\mathbf{T}\,{}^{B}\mathbf{p} \end{cases}$$

$$^{A}\mathbf{p} = {}^{A}_{B}\mathbf{T}\,{}^{B}\mathbf{p} = {}^{A}_{B}\mathbf{T}\,{}^{B}_{C}\mathbf{T}\,{}^{C}\mathbf{p} = {}^{A}_{C}\mathbf{T}\,{}^{C}\mathbf{p}$$

$$^{A}_{C}\mathbf{T} = {}^{A}_{B}\mathbf{T}\,{}^{B}_{C}\mathbf{T}$$

변환 방정식

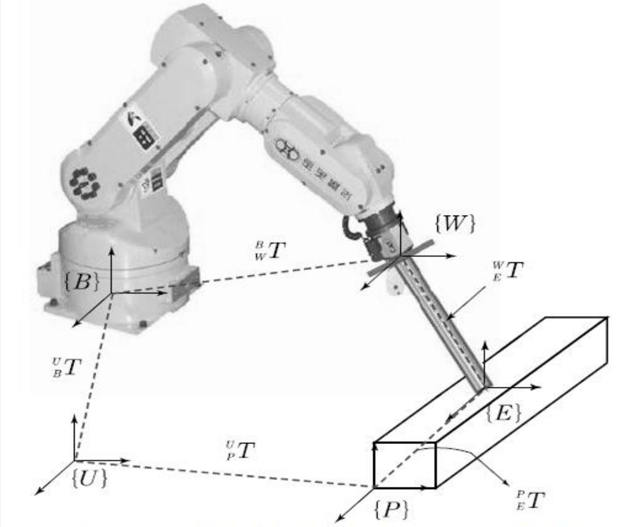


그림 2.6 ■ 물체에 용접 작업을 하고 있는 머니퓰레이터

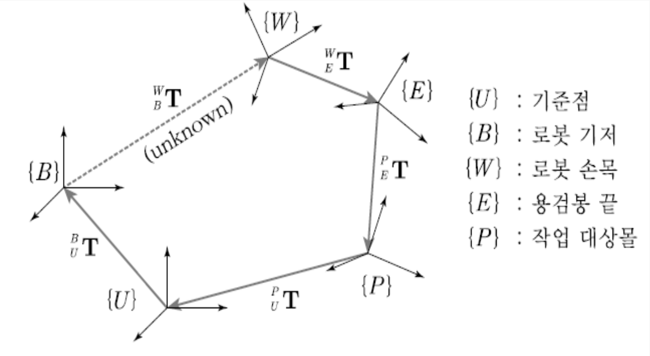


그림 2.7 ■ 폐루프를 이용한 변환 방정식

- 물체의 특정지점의 위치는 여러 기준 위치 사이의 상대개념을 이용하면, 손쉽게 위치정보를 얻을 수 있음

$^U_B\mathbf{T}, {}^W_E\mathbf{T}, {}^U_P\mathbf{T}, {}^P_E\mathbf{T}$ **: 주어졌을 때**

기준 좌표계에서 본 용접점의 위치

$${}^U_E\mathbf{T} = {}^U_B\mathbf{T}\,{}^B_W\mathbf{T}\,{}^W_E\mathbf{T} \qquad {}^U_E\mathbf{T} = {}^U_P\mathbf{T}\,{}^P_E\mathbf{T}$$

$${}^U_B\mathbf{T}\,{}^B_W\mathbf{T}\,{}^W_E\mathbf{T} = {}^U_P\mathbf{T}\,{}^P_E\mathbf{T}$$

알려지지 않은${}^B_W\mathbf{T}$의 위치를 알 수 있다.

$${}^B_W\mathbf{T} = {}^U_B\mathbf{T}^{-1}\,{}^U_P\mathbf{T}\,{}^P_E\mathbf{T}\,{}^W_E\mathbf{T}^{-1}$$ **(변환 방정식)**

절대변환과 상대 변환

- **여러 단계에 걸쳐 연속적으로 발생하는 좌표계의 변환을 구하는 방법**
- **정의**

이동 좌표계(moving frame): 변환(회전 또는 병진)에 의해 새롭게 얻어지는 좌표계

고정 좌표계(fixed frame): 변환에 관계없이 처음과 동일하게고정된 좌표계

절대 변환(absolute transform): 전 단계의 변환에 관계없이 후속변환을 계속 초기의 고정된 기준좌표인 고정좌표계에 수행하는 것.

상대 변환(relative transform): 변환이 각 단계의 변환 후 얻어진 새로운 좌표계인 이동 좌표계에 대하여 다음 변환이 수행 되는 것.

절대변환과 상대 변환

- 좌표계 {A}와 {B} 사이의 변환을 나타내는 동차 변환행렬

$$
{}^{A}_{B}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ & 0 & 2 \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ & 0 & 0 \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= Trans(2,1,0_x)Rot(z_A,30^\circ)
$$

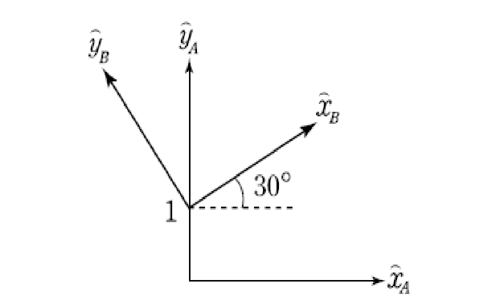


그림 2.8 ■ 좌표계 {A}와 {B} 사이의 변환

- 두 좌표계 사이의 변환에 대해 가능한 네 개의 변환 조합
  - 이동좌표를 따라 병진 후 이동좌표에 대해 회전
  - 이동좌표에 대해 회전 후 이동좌표를 따라 병진
  - 고정좌표에 대해 회전 후 고정좌표를 따라 병진
  - 고정좌표를 따라 병진 후 고정좌표에 대해 회전

절대변환과 상대 변환

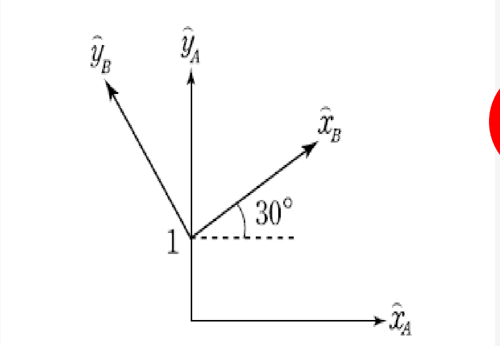
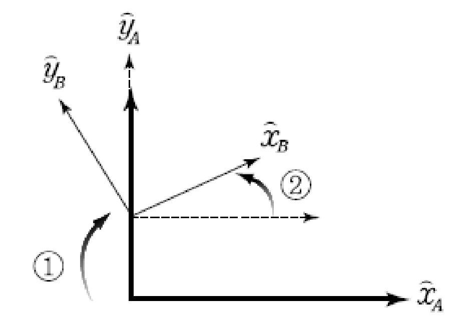
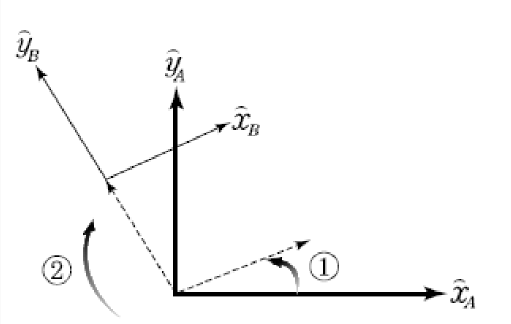


그림 2.8 ■ 좌표계 {A}와 {B} 사이의 변환



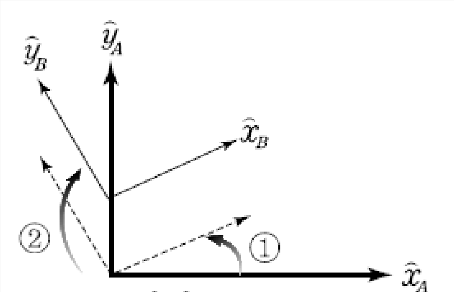
변환 1
(상대변환)

1. 이동좌표계를 따라 병진 후
이동좌표계에 대해 회전



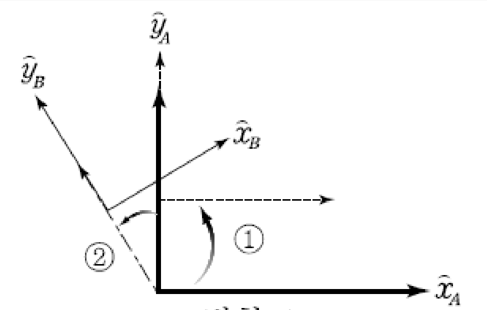
변환 2
(상대변환)

2. 이동좌표계를 따라 회전 후
이동좌표계에 대해 병진



변환 3
(절대변환)

3. 고정좌표계를 따라 회전 후
고정좌표계에 대해 병진



변환 4
(절대변환)

4. 고정좌표계를 따라 병진 후
고정좌표계에 대해 회전

절대변환과 상대 변환

- **올바른 변환을 나타내는 조합**

상대변환 : 이동좌표계에 대한 병진 → 이동좌표계에 대한 회전
절대변환 : 고정좌표계에 대한 회전 → 고정좌표계에 대한 병진

두가지 모두 동일한 결과 ${}^{A}_{B}\mathbf{T}$ 를 나타낸다.

$$ {}^{A}_{B}\mathbf{T} = Trans(p_x, p_x, p_x)Rot(\alpha, \beta, \gamma) $$

상대변환의 구현
  회전과 병진을 나타내는 변환행렬이 앞에서부터 뒤로 순차적으로 곱해져야 (post-multiply) 함
절대변환의 구현
  반대로 해당 변환행렬이 뒤에서부터 앞쪽으로 (pre-multiply) 순차적으로 곱해져야 함

방위의 다른 표현

방위의 표현

- 회전행렬(3×3행렬) → 다른 방위를 지정할 때 마다 9개의 원소를 지정해 주어야 함.
- 작은 수의 입력으로 방위를 표시할 수 있다면, 보다 효과적

오일러 각(Euler angle)과 롤-피치-요(roll-pitch-yaw) 방법

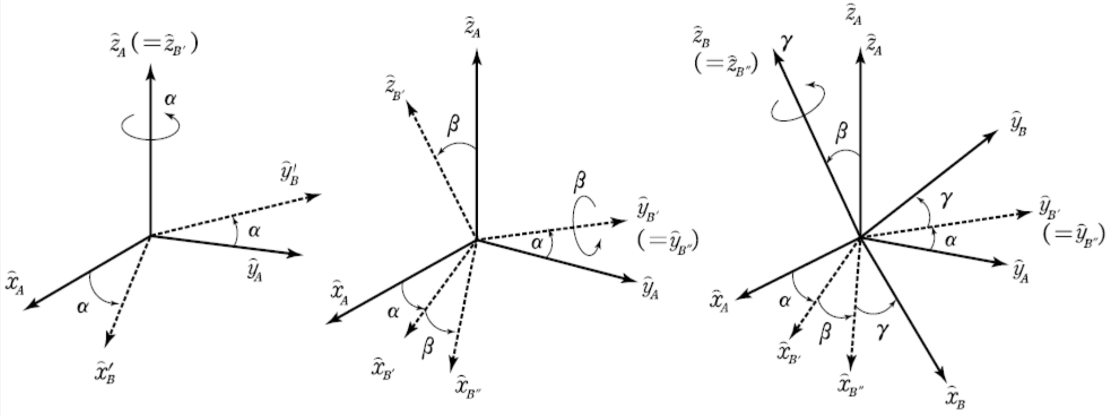
- 물체의 방위를 연속된 세 번의 회전만으로 표현할 수 있어 회전행렬보다 효율적으로 방위를 표현하는 방법
- 오일러 각: 초기 방위를 나타내는 좌표계를 이동 좌표계의 주축에 대해 연속적으로 세 번 회전을 수행하여 특정 방위를 얻어내는 방법
- 롤-피치-요 방법: 고정 기준 좌표계에 대해 연속적으로 세 번 회전을 하여 원하는 방위를 표시하는 방법
- 초기 좌표를 세 번만 회전하므로 매 회전시의 회전량 3개만 정의하면 되므로 9개를 입력해야 하는 회전행렬에 비해 효율적이다.
- 머니퓰레이터 말단부를 3자유도로 구성함으로써 모든 방위를 구현할 수 있게 되는 근거

방위의 다른 표현

Z-Y-Z 오일러 각

- 좌표계 {A}의 Z축에 대해 α만큼 회전 후
- 이동 좌표계 즉 회전 후 얻어진 새로운 좌표계 {B′}의 Y축에 대해 β 만큼 회전한 후,
- 다시 새롭게 얻어진 좌표계(이동 좌표계) {B″}의 Z축에 대해 γ만큼 연속적으로 회전을 하여 특정방위를 나타내는 좌표계 {B}를 얻는 방법
- 모든 회전이 이동 좌표계에 대한 회전을 이용한 상대변환이므로 해당 변환행렬을 앞에서부터 순차적으로 곱한다

$$
\begin{aligned}
{}^{A}_{B}\mathbf{T} &= Rot(\hat{\mathbf{z}},\alpha)Rot(\hat{\mathbf{y}},\beta)Rot(\hat{\mathbf{z}},\gamma) \\
&= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$



방위의 다른 표현

Z-Y-X 오일러 각

- 좌표계 {A}의 Z축에 대해 α만큼 회전 후
- 이동 좌표계 즉 회전 후 얻어진 새로운 좌표계 {B'}의 Y축에 대해 β 만큼 회전한 후,
- 다시 새롭게 얻어진 좌표계(이동 좌표계) {B''}의 X축에 대해 γ만큼 연속적으로 회전을 하여 특정방위를 나타내는 좌표계 {B}를 얻는 방법
- 모든 회전이 이동 좌표계에 대한 회전을 이용한 상대변환이므로 해당 변환행렬을 앞에서부터 순차적으로 곱한다

$$
{}^{A}_{B}\mathbf{T} = Rot(\hat{z},\alpha)Rot(\hat{y},\beta)Rot(\hat{x},\gamma)
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}
$$

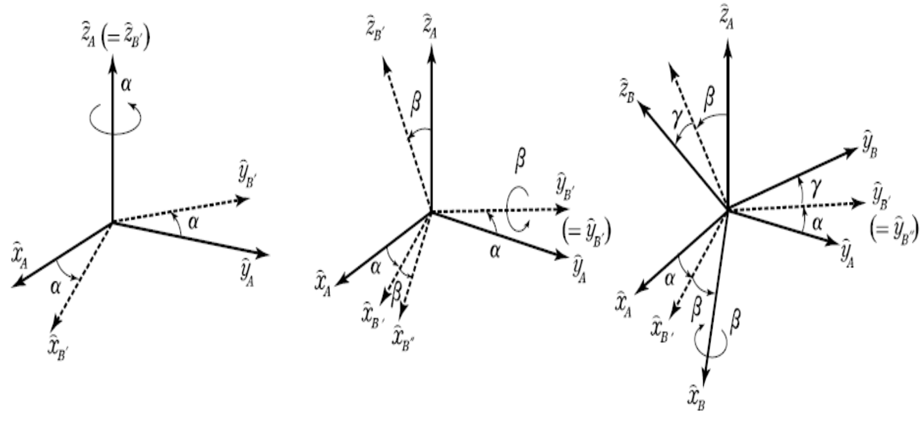


그림 2.14 ▪ Z-Y-X 오일러 각

방위의 다른 표현

X-Y-Z 롤-피치-요

- 고정기준 좌표계 {A}의 Z축에 대해 α 만큼 회전 후
- 고정 좌표계의 Y축에 대해 β 만큼 회전한 후,
- 고정 좌표계의 X축에 대해 γ만큼 연속적으로 회전을 하여 특정방위를 나타내는 좌표계 {B}를 얻는 방법
- 모든 회전이 고정 기준 좌표계에 대한 회전을 이용한 절대변환이므로 해당 변환행렬을 뒤에서부터 앞으로 역순으로 곱한다.

$$
\begin{aligned}
{}^{A}_{B}\mathbf{T} &= Rot(\hat{z},\alpha)Rot(\hat{y},\beta)Rot(\hat{x},\gamma) \\
&= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

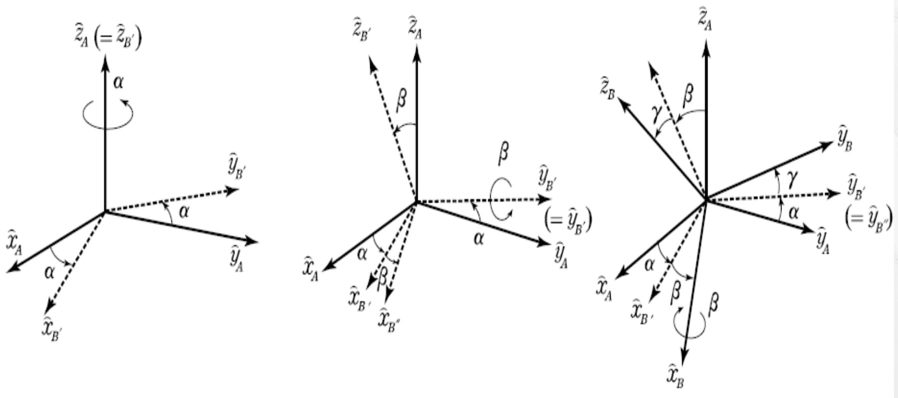


그림 2.14 ■ Z-Y-X 오일러 각