



통신공학

3강. 신호의 주파수 영역 분석

CONTENTS

- **스펙트럼의 개념**
- 직교 신호에 의한 신호의 표현
- 푸리에 급수
- 푸리에 변환
- 스펙트럼 밀도
- 선형 시스템과 필터
- 신호의 왜곡

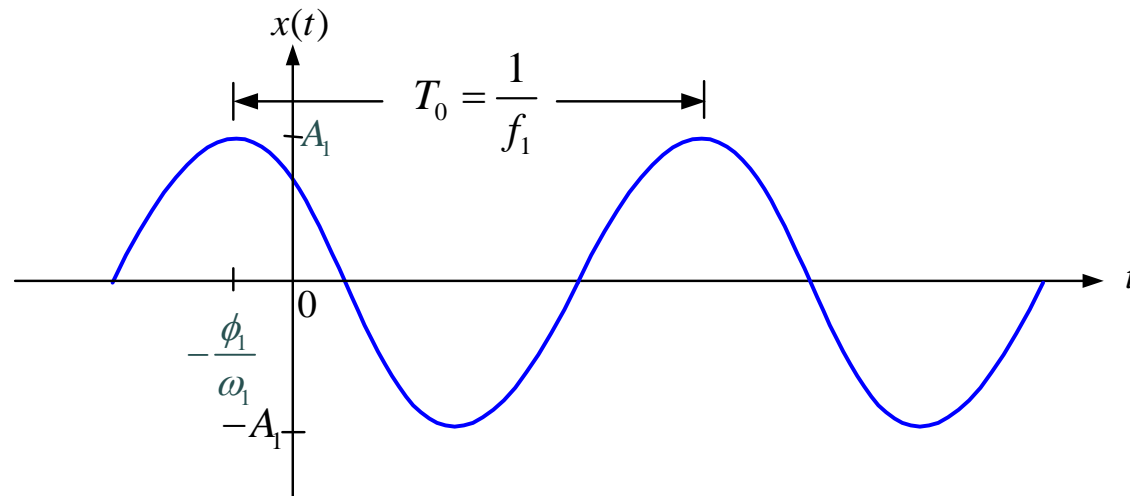


스펙트럼의 개념

■ 한 개의 정현파

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1)$$

- 주파수: f_1 [rad/sec]
- 다른 파라미터: 진폭과 위상 (A_1, ϕ_1)
- (A_1, ϕ_1) 정보만 안다면 신호의 파형을 정확히 묘사할 수 있다.

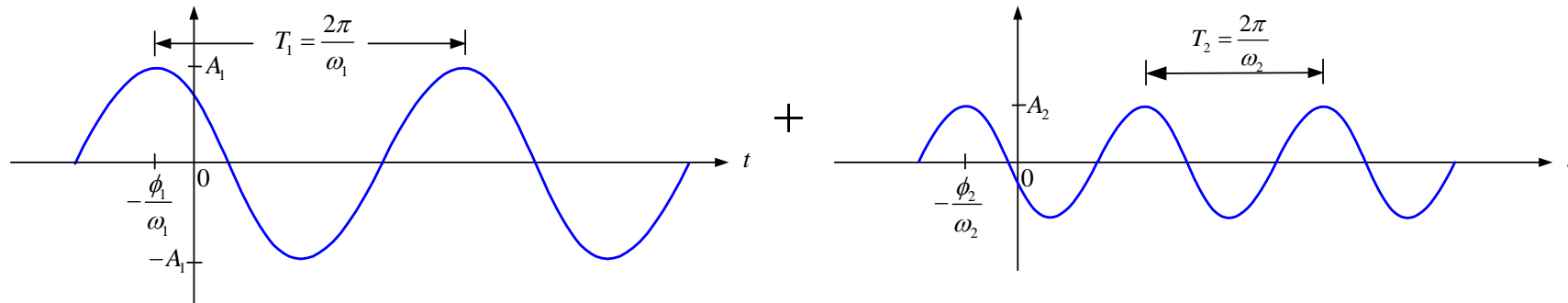


스펙트럼의 개념

■ 두 개의 정현파

$$x_2(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$$

- 주파수: f_1, f_2 [rad/sec]
- f_1 : 주파수 성분의 진폭과 위상 (A_1, ϕ_1)
- f_2 : 주파수 성분의 진폭과 위상 (A_2, ϕ_2)
- 주파수 성분별 진폭과 위상을 안다면 신호의 파형을 정확히 묘사할 수 있다.

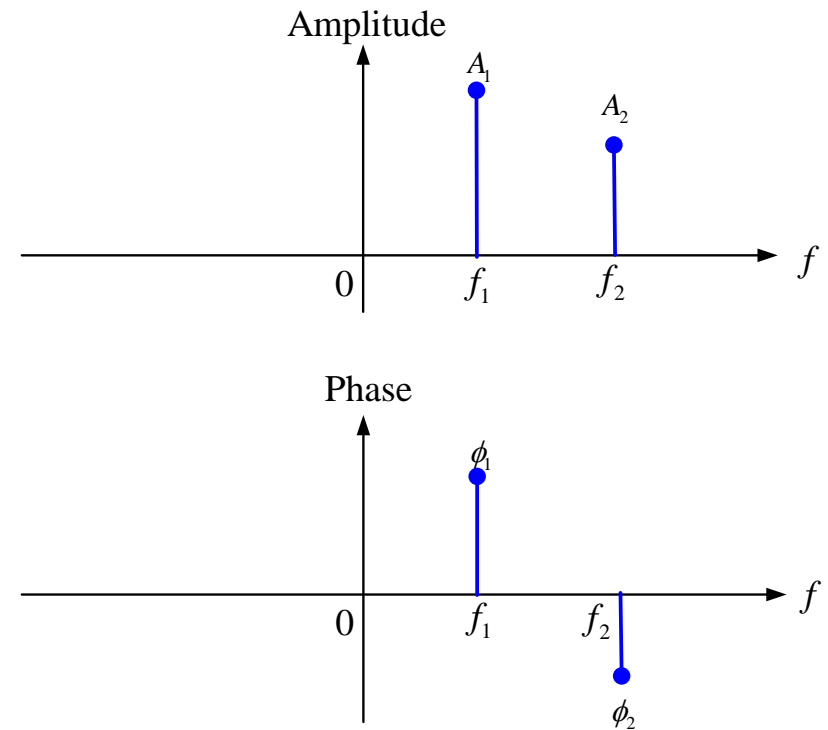


스펙트럼의 개념

■ One-sided Spectrum

- 주파수 성분별 크기와 진폭 (A_n, f_n)을 나열한 그림

$$x_2(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$$



- Euler 공식

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{j2}$$

- 정현파 신호를 복소 정현파를 사용하여 표현하면

$$x_1(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) = A_1 \frac{e^{j(2\pi f_1 t + \phi_1)} + e^{-j(2\pi f_1 t + \phi_1)}}{2} = \frac{A_1 e^{j\phi_1}}{2} e^{j2\pi f_1 t} + \frac{A_1 e^{-j\phi_1}}{2} e^{-j2\pi f_1 t}$$

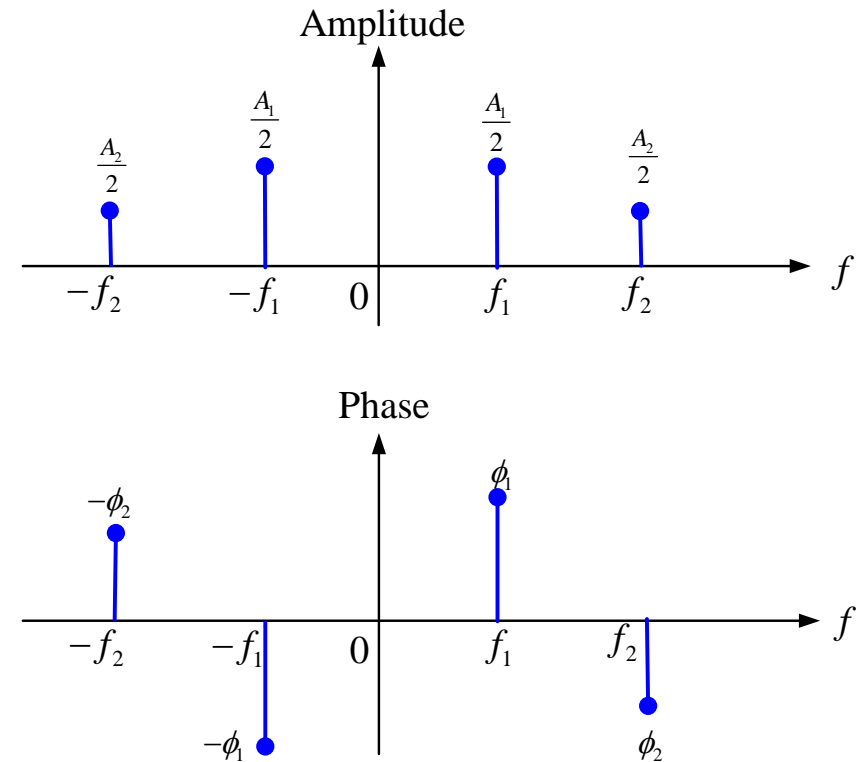
$$x_2(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) = \frac{A_1 e^{j\phi_1}}{2} e^{j2\pi f_1 t} + \frac{A_1 e^{-j\phi_1}}{2} e^{-j2\pi f_1 t} + \frac{A_2 e^{j\phi_2}}{2} e^{j2\pi f_2 t} + \frac{A_2 e^{-j\phi_2}}{2} e^{-j2\pi f_2 t}$$



스펙트럼의 개념

■ Two-sided Spectrum

- f_n 주파수의 정현파는 f_n 주파수 성분의 weight $A_n e^{j\phi_n}/2$ 와 $-f_n$ 주파수 성분의 weight $A_n e^{-j\phi_n}/2$ 로 표현할 수 있다.



스펙트럼의 개념

- N 개의 정현파를 더해 만들어지는 신호로 확장 가능

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) + \cdots + A_N \cos(2\pi f_N t + \phi_N) \\&= \sum_{n=1}^N A_n \cos(2\pi f_n t + \phi_n)\end{aligned}$$

- 일반적인 신호로 확장 가능한가?

- 임의의 신호 $x(t)$ 를 여러 정현파 신호의 선형조합(즉 가중치가 있는 합)으로 표현할 수 있는가?

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) + A_3 \cos(2\pi f_3 t + \phi_3) + \cdots = \sum_n A_n \cos(2\pi f_n t + \phi_n)$$

- 이것은 여러 주파수의 정현파를 크기와 위상을 적당히 조절하여 더하면 $x(t)$ 와 동일한 파형을 합성할 수 있다는 것을 의미한다.
- 여기서 주파수 성분 f_n 은 어떤 속성을 갖는가?
- 주파수 성분의 개수 N 은 유한한가?



스펙트럼의 개념

■ Fourier 이론

- $x(t)$ 가 주기 신호인 경우
 - 위와 같이 여러 정현파의 (가중치 있는) 합으로 표현 가능하며
 - 주파수 성분은 기본주파수의 정수 배, 즉 $f_n = nf_0$ 가 되는 특성이 있다.
 - 따라서 $x(t)$ 를 다음과 같이 무한급수로서 표현할 수 있다.

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \phi_n)$$

- 삼각함수 공식을 사용하면 다음과 같이 표현 가능

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos 2\pi n f_0 t + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin 2\pi n f_0 t = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n f_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2\pi n f_0 t$$

- Euler 공식을 사용하면 다음과 같이 (양측 스펙트럼 형태) 표현 가능

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(2\pi n f_0 t)$$



스펙트럼의 개념

■ Fourier 이론

- $x(t)$ 가 비주기 신호인 경우
 - 항상 여러 정현파의 합으로 표현 가능하다는 보장은 없음
 - 에너지 신호의 경우 가능함
 - 여기서 주파수 성분은 이산적이 아니라 연속적임(비주기 신호이므로 기본주파수 개념이 없음), 즉 모든 주파수 성분을 가질 수 있음
 - 따라서 $x(t)$ 는 무한급수가 아닌 적분의 형태로 표현할 수 있다.

$$x(t) = \int_0^{\infty} A(f) \cos[2\pi ft + \phi(f)] df$$

- Euler 공식을 사용하면 다음과 같이 (양측 스펙트럼 형태) 표현 가능

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(f) \exp(j2\pi ft) df$$



- 스펙트럼의 개념
- 직교 신호에 의한 신호의 표현
- 푸리에 급수
- 푸리에 변환
- 스펙트럼 밀도
- 선형 시스템과 필터
- 신호의 왜곡



ORTHOGONAL DECOMPOSITION OF VECTOR SPACE

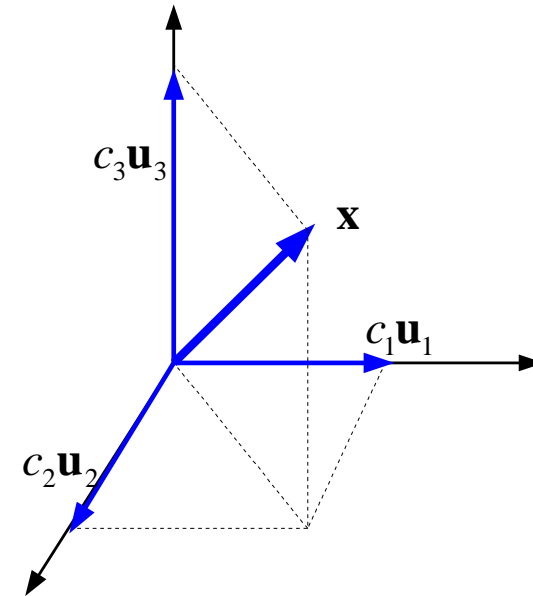
- Orthogonal vector를 사용한 표현(3차원 공간)

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + c_3 \mathbf{u}_3$$

where

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_1 = 0$$

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = |\mathbf{u}_i|^2 \neq 0, i = 1, 2, 3$$



ORTHOGONAL DECOMPOSITION OF VECTOR SPACE

■ 선형조합의 계수?

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + c_3 \mathbf{u}_3$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1 = c_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 + c_3 \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_1 = c_1 |\mathbf{u}_1|^2$$

$$\Rightarrow c_i = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i} = \frac{1}{|\mathbf{u}_i|^2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_i, i = 1, 2, 3$$



ORTHOGONAL DECOMPOSITION OF VECTOR SPACE

■ N차원 공간으로 확장

- 직교 벡터

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ |\mathbf{u}_i|^2 & i = j \end{cases}$$

- 임의의 벡터 \mathbf{x} 에 대한 표현

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N c_i \mathbf{u}_i$$

- 선형조합의 계수

$$c_i = \frac{1}{|\mathbf{u}_i|^2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_i, \quad i = 1, \dots, N$$



ORTHOGONAL DECOMPOSITION OF FUNCTION SPACE

- 구간 $[t_1, t_2]$ 에서 두 함수 $f_1(t)$ 와 $f_2(t)$ 의 내적

$$\langle f_1(t), f_2(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t) dt$$

- $f_1(t)$ 와 $f_2(t)$ 가 같으면 신호의 에너지가 된다.

$$\langle f_1(t), f_1(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} |f_1(t)|^2 dt = E$$

- 구간 $[t_1, t_2]$ 에서 직교 함수군 $\{\psi_1(t), \psi_2(t), \dots\}$

$$\langle \psi_i(t), \psi_j(t) \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ E_{\psi_i} & i = j \end{cases}$$



ORTHOGONAL DECOMPOSITION OF FUNCTION SPACE

- 직교 함수군을 사용한 함수의 표현

$$x(t) = c_1\psi_1(t) + c_2\psi_2(t) + \cdots + c_i\psi_i(t) + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i(t)$$

- 선형조합의 계수

$$\begin{aligned} \langle x(t), \psi_n(t) \rangle &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i \langle \psi_i(t), \psi_n(t) \rangle = c_n \int_{t_1}^{t_2} |\psi_n(t)|^2 dt \Rightarrow c_n = \frac{\langle x(t), \psi_n(t) \rangle}{\int_{t_1}^{t_2} |\psi_n(t)|^2 dt} \\ &= \frac{1}{E_{\psi_n}} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \psi_n^*(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$



ORTHOGONAL DECOMPOSITION OF FUNCTION SPACE

[예제 3.1] 다음의 함수들은 임의의 t_0 에 대해 $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ 구간에서 직교 함수 집합을 이루는 것을 보여라.

$$\{\sin(n\omega_0 t), \cos(n\omega_0 t), n = 1, 2, \dots, \infty\} \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \right)$$

[풀이]

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_0+T} \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos((m-n)\omega_0 t) dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos((m+n)\omega_0 t) dt \\ &= \begin{cases} \frac{T}{2}, m = n \\ 0, m \neq n \end{cases} \end{aligned}$$



ORTHOGONAL DECOMPOSITION OF FUNCTION SPACE

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(m\omega_o t) \cos(n\omega_o t) dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos((m-n)\omega_o t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos((m+n)\omega_o t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, m = n \\ 0, m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin(m\omega_o t) \cos(n\omega_o t) dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \sin((m-n)\omega_o t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \sin((m+n)\omega_o t) dt = 0$$



ORTHOGONAL DECOMPOSITION OF FUNCTION SPACE

[예제 3.2] 다음의 함수들은 임의의 t_0 에 대해 $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ 구간에서 직교 함수 집합을 이루는 것을 보여라.

$$\{\exp(jn\omega_o t), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty\} \left(\omega_o = \frac{2\pi}{T} \right)$$

[풀이]

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_0+T} \exp(jm\omega_o t) \exp(jn\omega_o t)^* dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T} \exp[j(m-n)\omega_o t] dt \\ &= \begin{cases} T, m = n \\ 0, m \neq n \end{cases} \end{aligned}$$



- 스펙트럼의 개념
- 직교 신호에 의한 신호의 표현
- 푸리에 급수
- 푸리에 변환
- 스펙트럼 밀도
- 선형 시스템과 필터
- 신호의 왜곡



COMPLEX EXPONENTIAL FOURIER SERIES

- 구간 $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ 에서 임의의 신호 $x(t)$ 는 복소 정현파 함수의 선형 조합으로 나타낼 수 있다.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \psi_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jn\omega_0 t) \text{ where } \omega_0 = 2\pi/T_0$$

- Fourier coefficients

$$c_n = \frac{\langle x(t), \psi_n(t) \rangle}{\int_{t_0}^{t_0+T_0} |\psi_n(t)|^2 dt} = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \psi_n^*(t) dt}{\int_{t_0}^{t_0+T_0} 1 dt} = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$



COMPLEX EXPONENTIAL FOURIER SERIES

- 만일 신호 $x(t)$ 가 주기 T 를 가진 주기 신호라면 복소 정현파 $\psi_1(t)$ 도 역시 동일한 주기를 가진 함수가 되므로 위의 푸리에 급수 표현은 한 주기의 구간을 넘어서 모든 시구간으로 확장할 수 있다.
- 주기 신호의 Fourier series 표현

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t}$$
$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

- $|c_n|$: amplitude spectrum
- $\angle c_n$: phase spectrum
- $|c_n|^2$: power spectrum



TRIGONOMETRIC FOURIER SERIES

- Basis function set

$$\{1, \cos n \omega_0 t, \sin n \omega_0 t, n = 1, 2, 3, \dots\}$$

- 주기 신호의 Fourier series 표현

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n \omega_0 t + b_n \sin n \omega_0 t]$$

- Fourier coefficients

$$a_n = \frac{\langle x(t), \cos n \omega_0 t \rangle}{\int_{T_0} |\cos n \omega_0 t|^2 dt} = \frac{\int_{T_0} x(t) \cos n \omega_0 t dt}{\int_{T_0} \frac{1}{2} \{1 + \cos 2 n \omega_0 t\} dt} = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n \omega_0 t dt$$
$$b_n = \frac{\langle x(t), \sin n \omega_0 t \rangle}{\int_{T_0} |\sin n \omega_0 t|^2 dt} = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin n \omega_0 t dt, n = 1, 2, 3, \dots$$



TRIGONOMETRIC FOURIER SERIES

- For $n = 0$

$$a_0 = \frac{\langle x(t), 1 \rangle}{\int_{T_0} |1|^2 dt} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$$

- 요약

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n \omega_0 t + b_n \sin n \omega_0 t]$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n \omega_0 t dt, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin n \omega_0 t dt, n = 1, 2, 3, \dots$$



FOURIER 계수의 성질

i) If $x(t)$ is real

$$c_n = c_{-n}^*$$

ii) If $x(t)$ is real and even

$$\text{Im}[c_n] = 0 \text{ and } c_n = c_{-n} \Rightarrow c_n \text{ is also real and even}$$

iii) If $x(t)$ is real and odd

$$\text{Re}[c_n] = 0 \text{ and } c_n = -c_{-n} \Rightarrow c_n \text{ is pure imaginary and odd}$$

iv) Parseval's Theorem

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

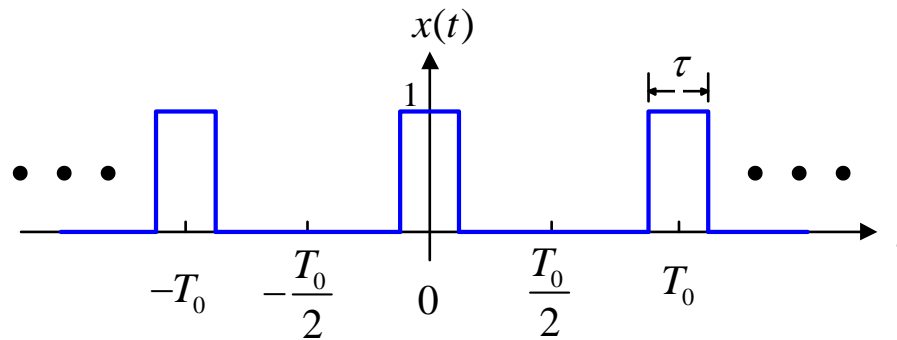
v) 복소지수형 푸리에급수 계수와 삼각함수형 푸리에급수 계수와의 관계

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} [a_n - jb_n] & n > 0 \\ a_0 & n = 0 \\ \frac{1}{2} [a_{-n} + jb_{-n}] & n < 0 \end{cases}$$



FOURIER SERIES

■ 예제 3.3: Pulse train



$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \exp\left(\frac{-j2\pi n t}{T_0}\right) dt \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} (1) \exp\left(\frac{-j2\pi n t}{T_0}\right) dt
 \end{aligned}$$

■ For $n = 0$, $c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} (1) dt = \frac{\tau}{T_0}$

FOURIER SERIES

■ Example (pulse train)

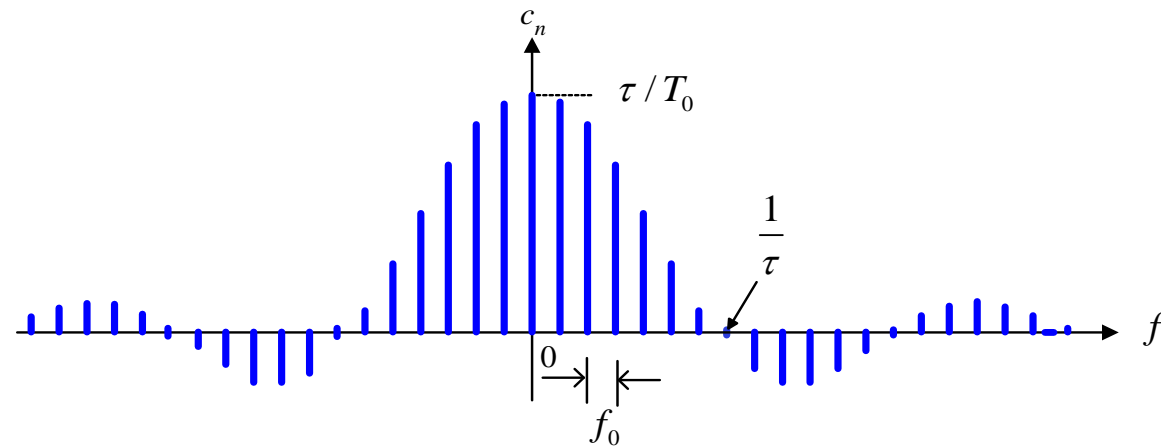
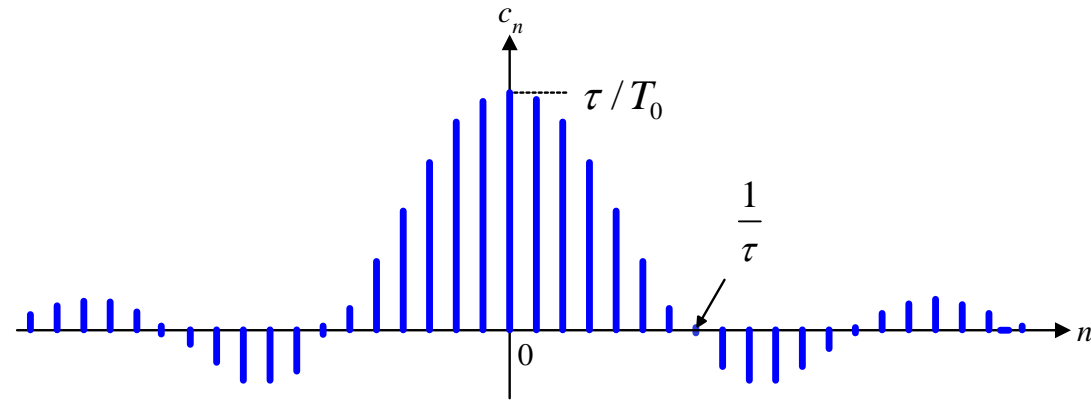
For $n \neq 0$,

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} (1) \exp\left(\frac{-j2\pi nt}{T_0}\right) dt = \frac{1}{-j2\pi n} \exp\left(\frac{-j2\pi nt}{T_0}\right) \Bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\
 &= \frac{1}{j2\pi n} \left[\exp\left(\frac{j\pi n\tau}{T_0}\right) - \exp\left(\frac{-j\pi n\tau}{T_0}\right) \right] = \frac{\sin(\pi n\tau/T_0)}{\pi n} \xleftrightarrow{=} \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin(\pi n\tau/T_0)}{(\pi n\tau/T_0)} = \frac{\tau}{T_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right) = \frac{\tau}{T_0} \operatorname{sinc}(nf_0\tau) \\
 &\Rightarrow c_n = c(nf_0) = \frac{\tau}{T_0} \operatorname{sinc}(nf_0\tau) = \frac{\tau}{T_0} \operatorname{sinc}(f\tau) \Bigg|_{f=nf_0}
 \end{aligned}$$

■ Line spectrum

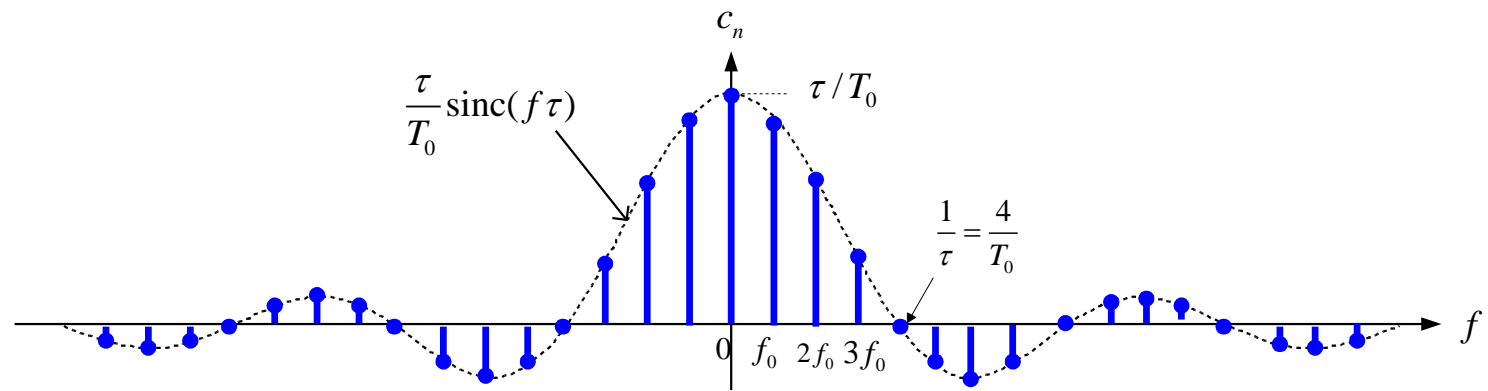


FOURIER SERIES

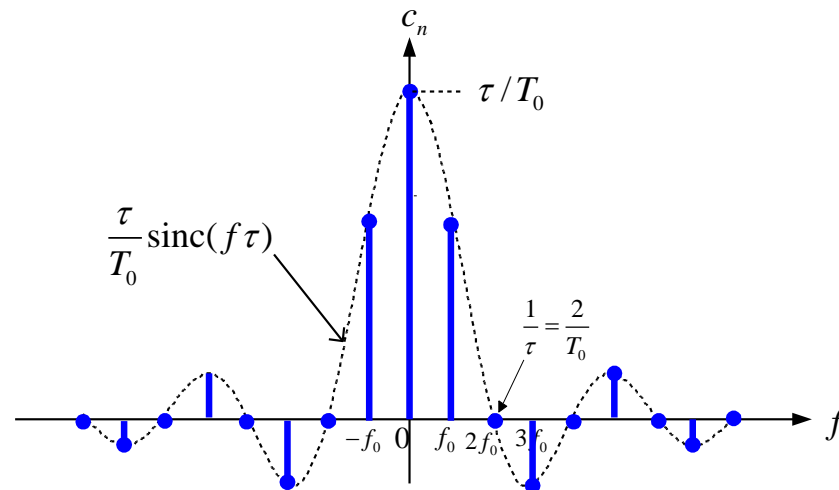


FOURIER SERIES

For $\tau = T_0/4$



For $\tau = T_0/2$



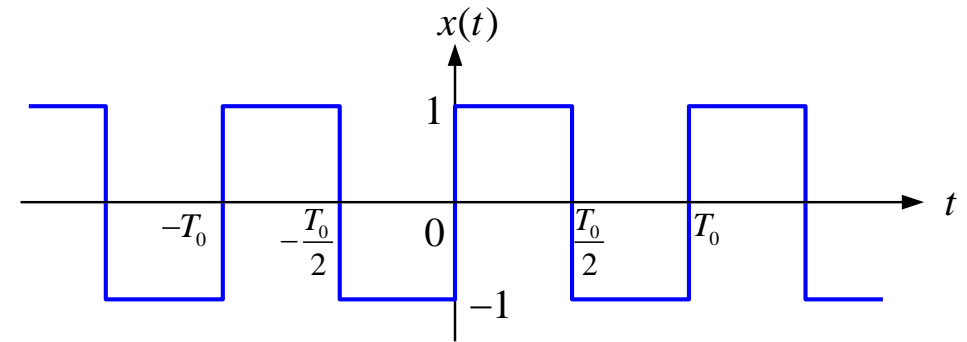
FOURIER SERIES

■ 예제 3.4(양극성 펄스열)

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} (1) e^{-j2\pi n f_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} (-1) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{-j2\pi n f_0 T_0} e^{-j2\pi n f_0 t} \Big|_0^{\frac{T_0}{2}} - \frac{1}{-j2\pi n f_0 T_0} e^{-j2\pi n f_0 t} \Big|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} \\
 &= \frac{1}{-j2\pi n} [\{e^{-j\pi n} - 1\} - \{e^{-j2\pi n} - e^{-j\pi n}\}] = \frac{1 - e^{-j\pi n}}{j\pi n}
 \end{aligned}$$

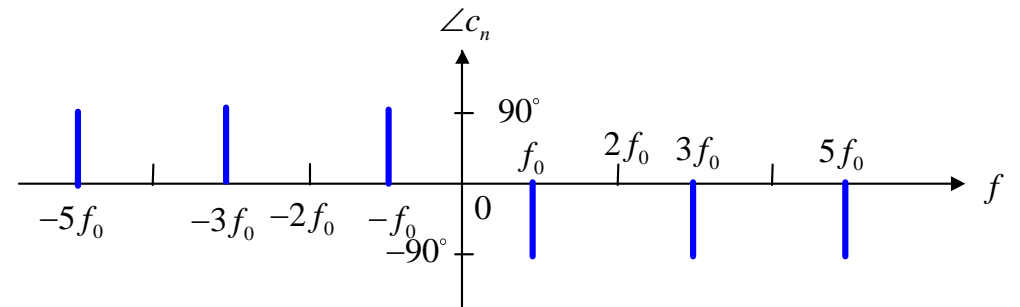
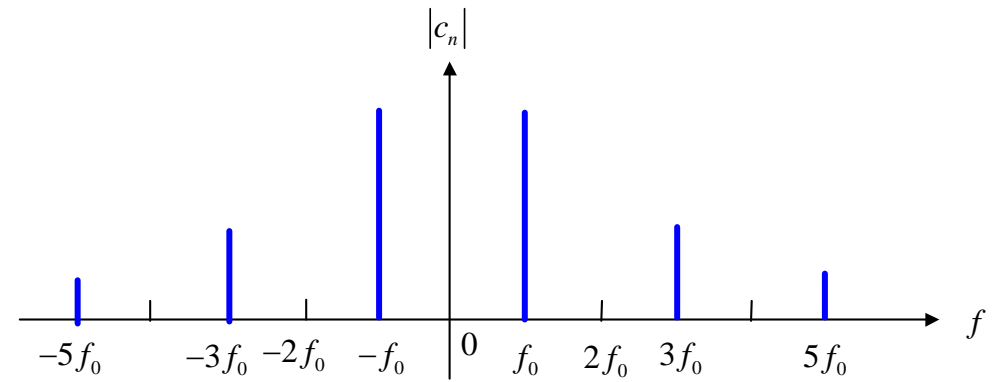
$$\exp(-j\pi) = -1, \exp(-j2\pi) = 1$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{2}{jn\pi}, & n = \text{odd} \\ 0, & n = \text{even} \end{cases}$$



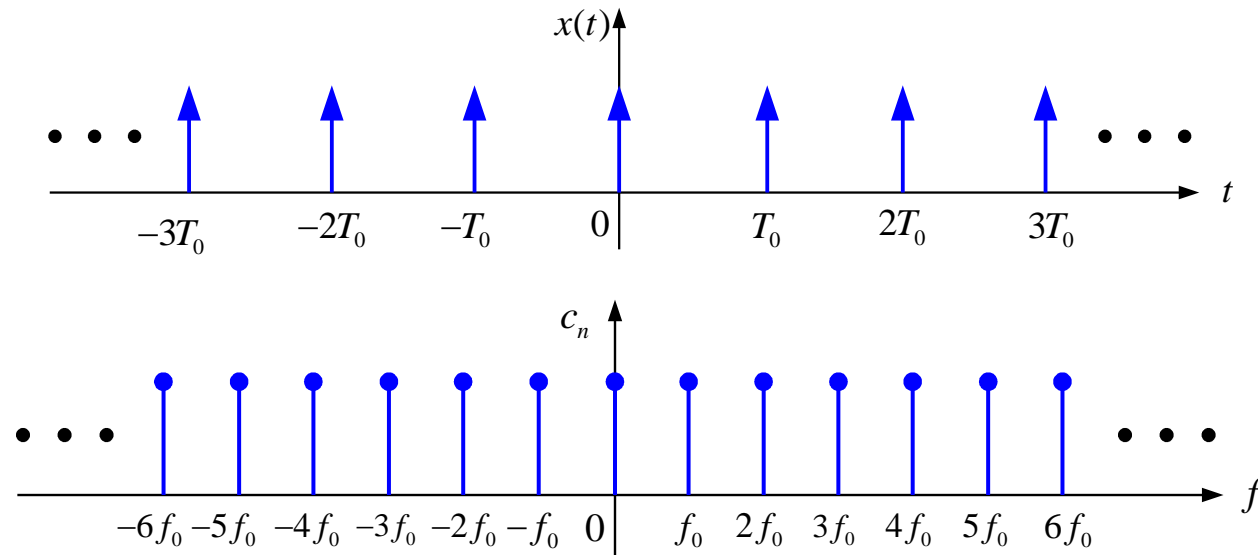
FOURIER SERIES

$$c_n = \begin{cases} \frac{2}{jn\pi}, n = \text{odd} \\ 0, n = \text{even} \end{cases}$$



FOURIER SERIES

■ 예제 3.5 (impulse train)



$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) \exp(-j2\pi n f_0 t) dt = \frac{1}{T_0} \cdot \exp(-j2\pi n f_0 t) \Big|_{t=0} = \frac{1}{T_0}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \exp(j2\pi n f_0 t)$$

POWER SPECTRUM

- Average Power

$$P = \overline{|x(t)|^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

For periodic signal

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

- Parseval's Theorem

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

- $|c_n|^2$ is called power spectrum



POWER SPECTRUM

■ Example

정현파 $f(t)=2\sin t$ 에 대해 Parseval 정리를 증명하라.

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 4 \sin^2 t \, dt = 2(W) \quad (T = 2\pi)$$

i) time domain

$$2 \sin t = -j \exp(jt) + j \exp(-jt)$$

$$c_n = \begin{cases} -j, n = 1 \\ j, n = -1, \\ 0, |n| \neq 1. \end{cases}$$

ii) frequency domain

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = |c_{-1}|^2 + |c_1|^2 = 1 + 1 = 2(W)$$



선형 시스템과 FOURIER SERIES

■ System Analysis

For periodic input:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t}$$



$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(nf_0) c_n e^{j2\pi n f_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{j2\pi n f_0 t} \end{aligned}$$

$$d_n = H(nf_0) c_n$$



- 스펙트럼의 개념
- 직교 신호에 의한 신호의 표현
- 푸리에 급수
- 푸리에 변환
- 스펙트럼 밀도
- 선형 시스템과 필터
- 신호의 왜곡

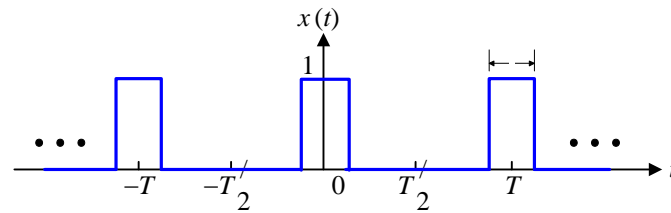
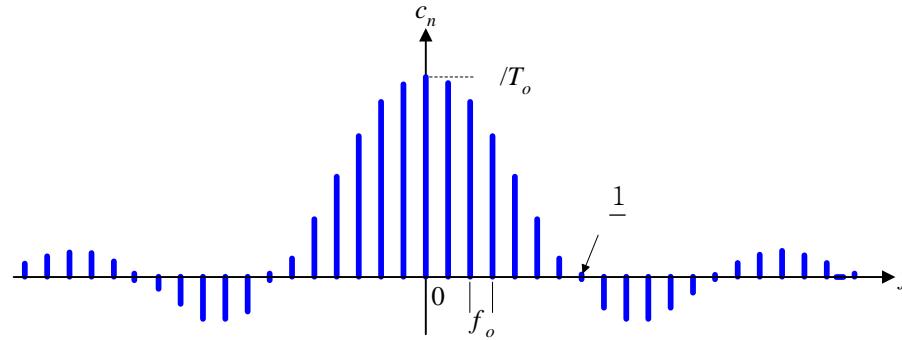
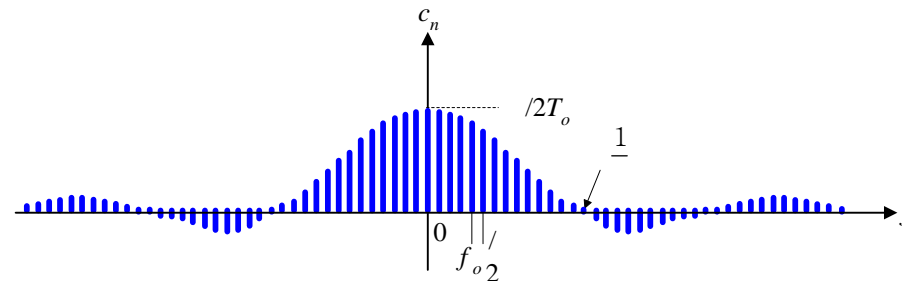


FOURIER TRANSFORM

- 구형파 펄스열 예제에서 신호의 기본 주기가 증가할수록 푸리에 급수의 기본주파수는 감소하고, 선 스펙트럼의 간격이 줄어든다.
- 주기가 무한대로 접근할수록 선 스펙트럼의 간격이 무한소로 줄어들어 스펙트럼은 연속 스펙트럼으로 되고, 결과적으로 sinc 함수 모양이 된다.

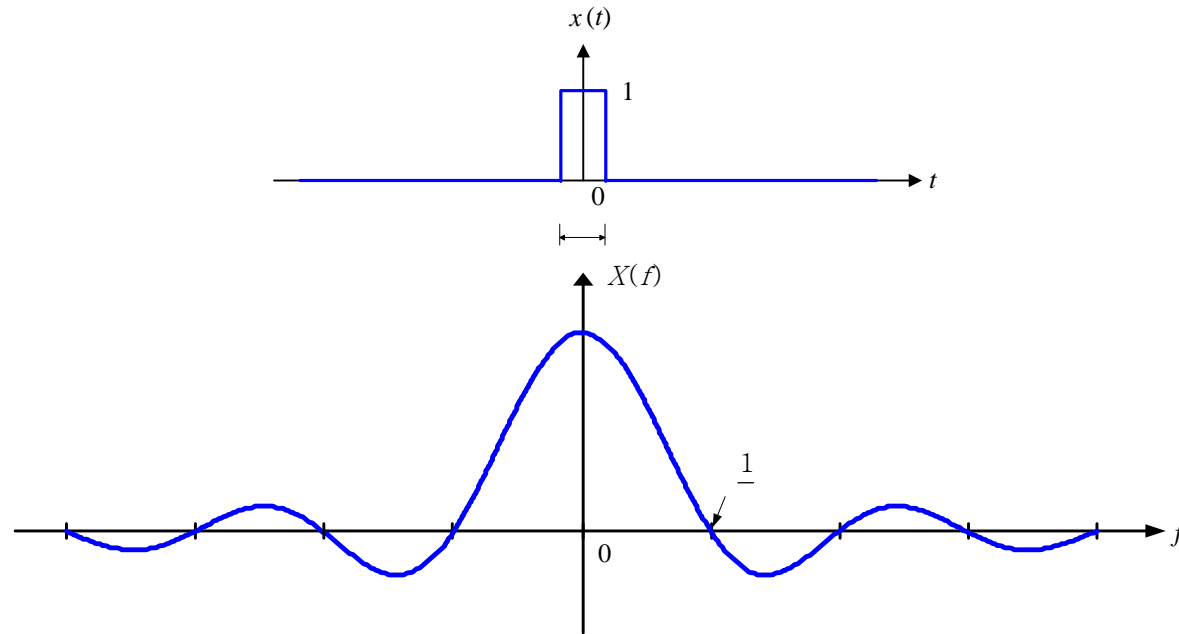


FOURIER TRANSFORM

(a) $T = T_o$ (b) $T = 2 T_o$ 

FOURIER TRANSFORM

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \tau/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$X(f) = \tau \text{sinc}(f\tau)$$

FOURIER TRANSFORM

- Fourier transform pair

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \Leftrightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \Leftrightarrow X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$X(f) = |X(f)| \exp[j\angle X(f)] \quad : \text{(continuous) spectrum of } x(t)$$

$$|X(f)| = \sqrt{\operatorname{Re}\{X(f)\}^2 + \operatorname{Im}\{X(f)\}^2} \quad : \text{magnitude spectrum of } x(t)$$

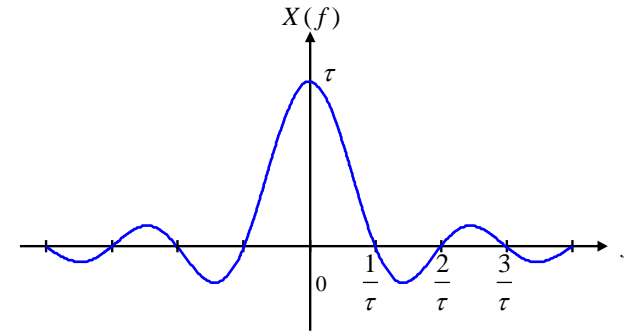
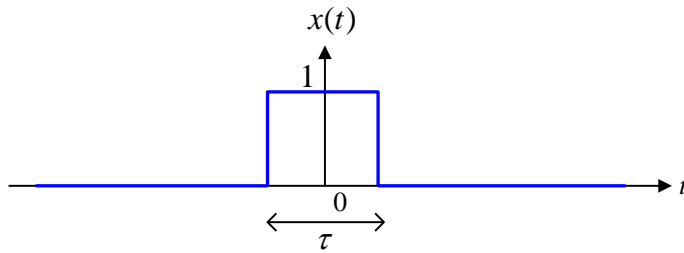
$$\angle X(f) = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Im}\{X(f)\}}{\operatorname{Re}\{X(f)\}} \quad : \text{phase spectrum of } x(t)$$



FOURIER TRANSFORM

■ 예제 3.6: rectangular pulse

$$\Pi(t/\tau) \Leftrightarrow \tau \text{sinc}(f\tau)$$



$$X(f) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \exp(-j2\pi ft) dt = -\frac{\exp(-j2\pi ft)}{j2\pi f} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f} = \tau \text{sinc}(f\tau)$$

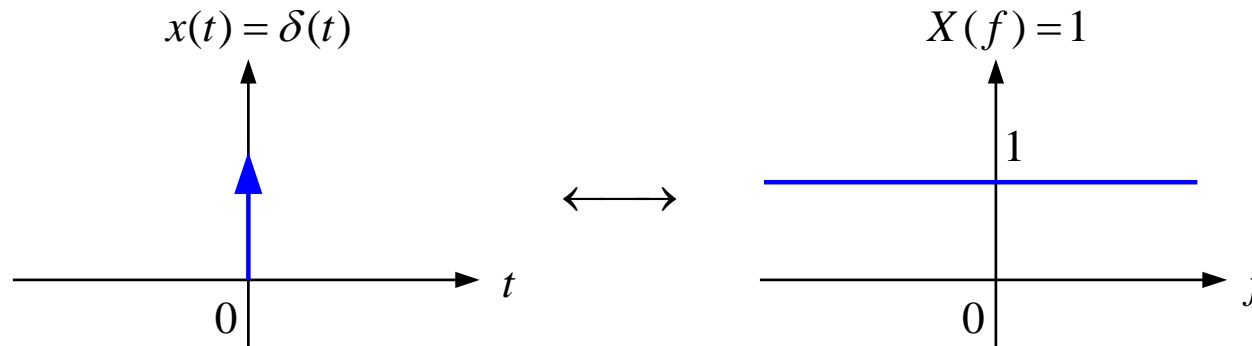
- A smaller τ produces a wider main lobe (broad bandwidth)

FOURIER TRANSFORM

■ 예제 3.7: impulse

$$x(t) = \delta(t) \Leftrightarrow X(f) = 1$$

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = e^0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

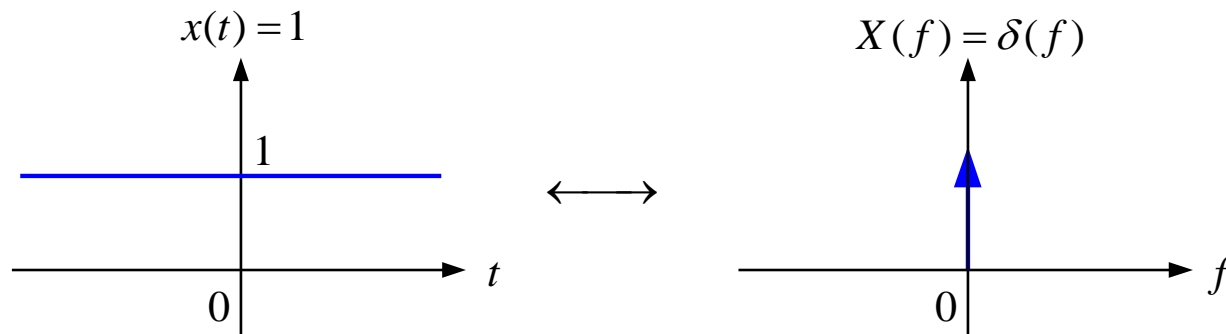


FOURIER TRANSFORM

■ 예제 3.8: constant

$$x(t) = 1 \Leftrightarrow X(f) = \delta(f)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) e^{j2\pi ft} df = e^0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) df = 1$$



FOURIER TRANSFORM

■ 예제 3.9: exponential function

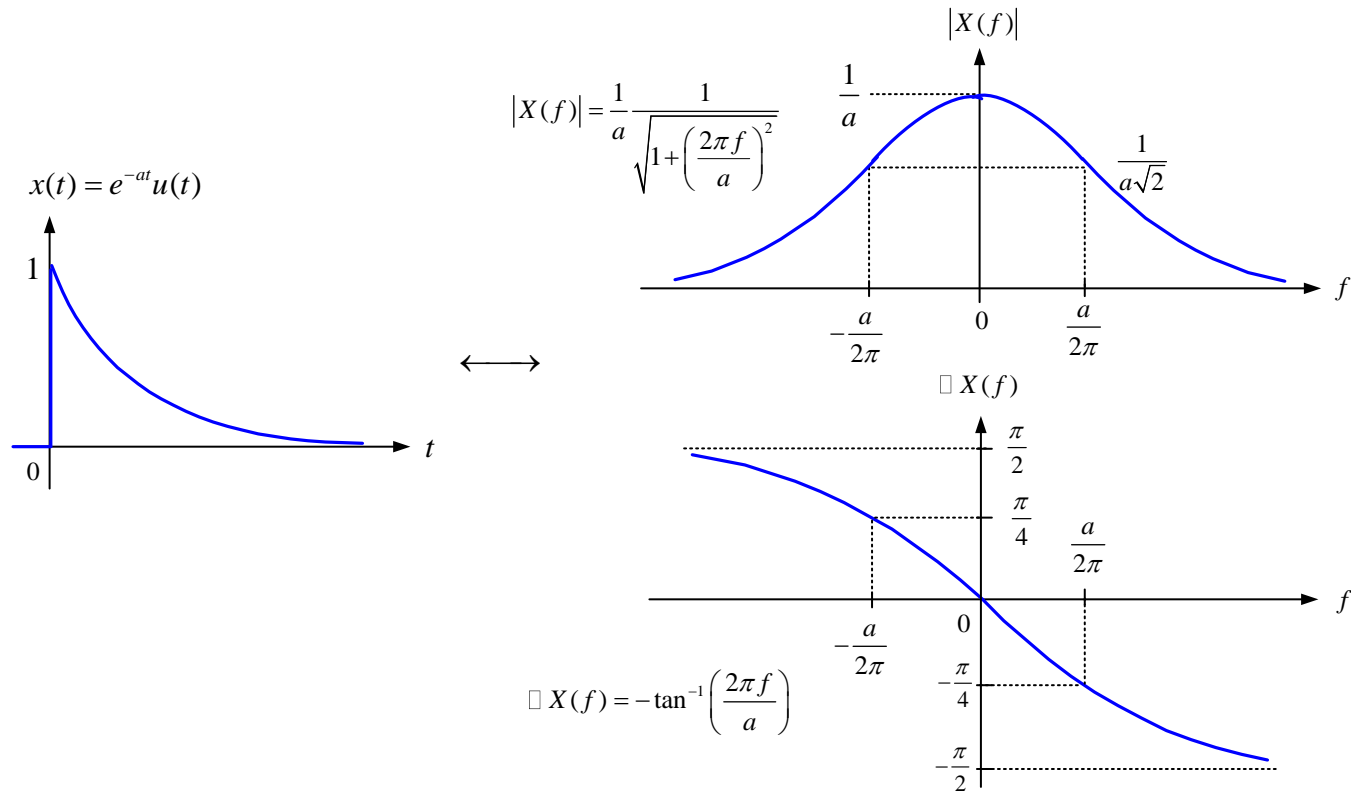
$$x(t) = e^{-at}u(t), a > 0 \Leftrightarrow X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ft} u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt = \frac{1}{a + j2\pi f}, a > 0$$

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}} = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 \left(\frac{f}{a}\right)^2}}, \angle X(f) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\pi f}{a}\right)$$



FOURIER TRANSFORM



PROPERTIES OF FOURIER TRANSFORM

■ Linearity

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}_n} aX_1(f) + bX_2(f)$$

■ Time shifting

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j2\pi ft_0} X(f)$$

- 진폭 스펙트럼은 불변
- 선형 위상 천이

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t - t_0) \\ |Y(f)| &= |e^{-j2\pi ft_0} X(f)| = |e^{-j2\pi ft_0}| \cdot |X(f)| = |X(f)| \\ \angle Y(f) &= -2\pi ft_0 + \angle X(f) \end{aligned}$$

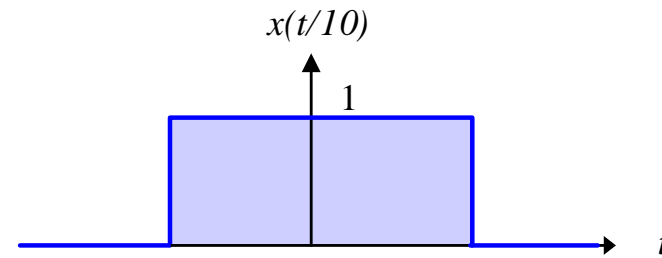
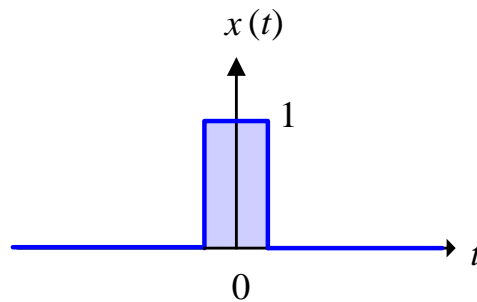


PROPERTIES OF FOURIER TRANSFORM

- Time scaling

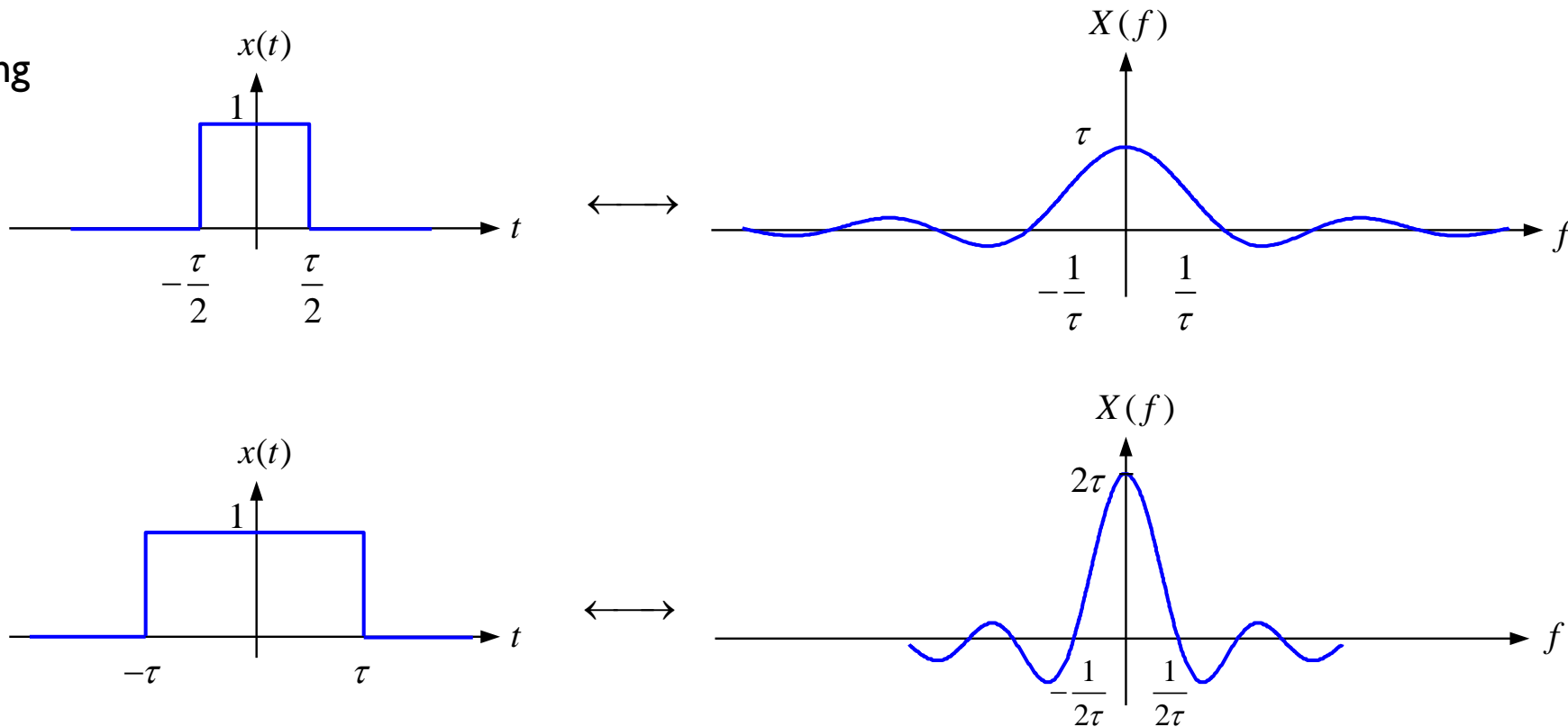
$$x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

- expanding in time ($|a| < 1$) leads to slow variation
- (deemphasizing high frequency components)



PROPERTIES OF FOURIER TRANSFORM

■ Time scaling



PROPERTIES OF FOURIER TRANSFORM

■ Frequency shifting and modulation

$$\begin{aligned} e^{\pm j2\pi f_0 t} x(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f \mp f_0) \\ \cos(2\pi f_0 t) \cdot x(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2} \\ \sin(2\pi f_0 t) \cdot x(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{X(f - f_0) - X(f + f_0)}{2j} \end{aligned}$$

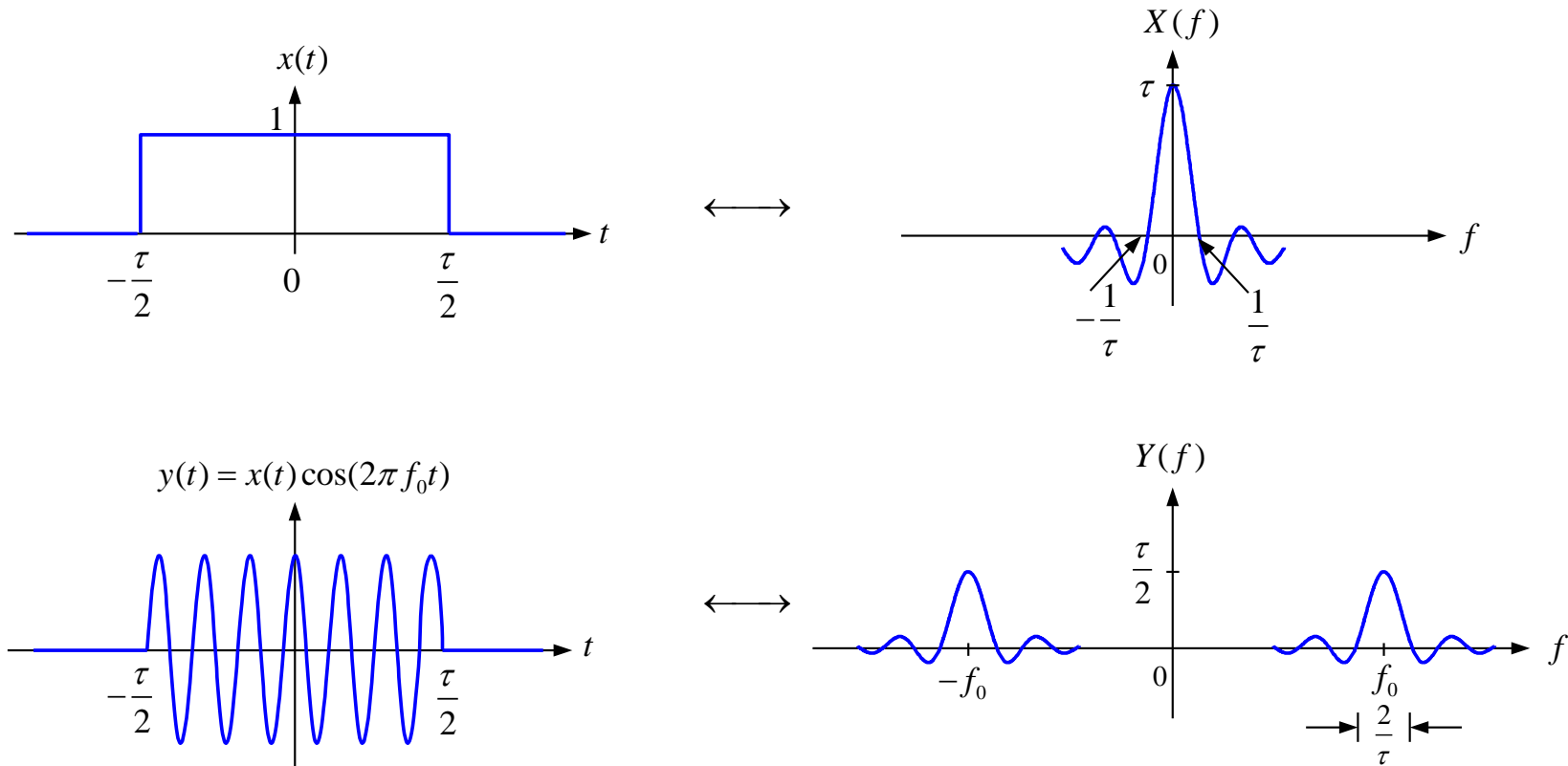
- Special case $x(t) = 1$

$$\begin{aligned} e^{\pm j2\pi f_0 t} &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \delta(f \mp f_0) \\ \cos(2\pi f_0 t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2} \\ \sin(2\pi f_0 t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2j} \end{aligned}$$



PROPERTIES OF FOURIER TRANSFORM

■ Frequency shifting and modulation



PROPERTIES OF FOURIER TRANSFORM

■ Duality

$$y(t) = X(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(f) = x(-f)$$

$$\text{pf) } x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \xrightarrow{t \leftrightarrow f} x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j2\pi ft} dt = \mathcal{F}\{X(t)\}$$

• Example:

$$x(t) = e^{-a|t|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$

$$y(t) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 t^2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(f) = e^{-a|f|}$$

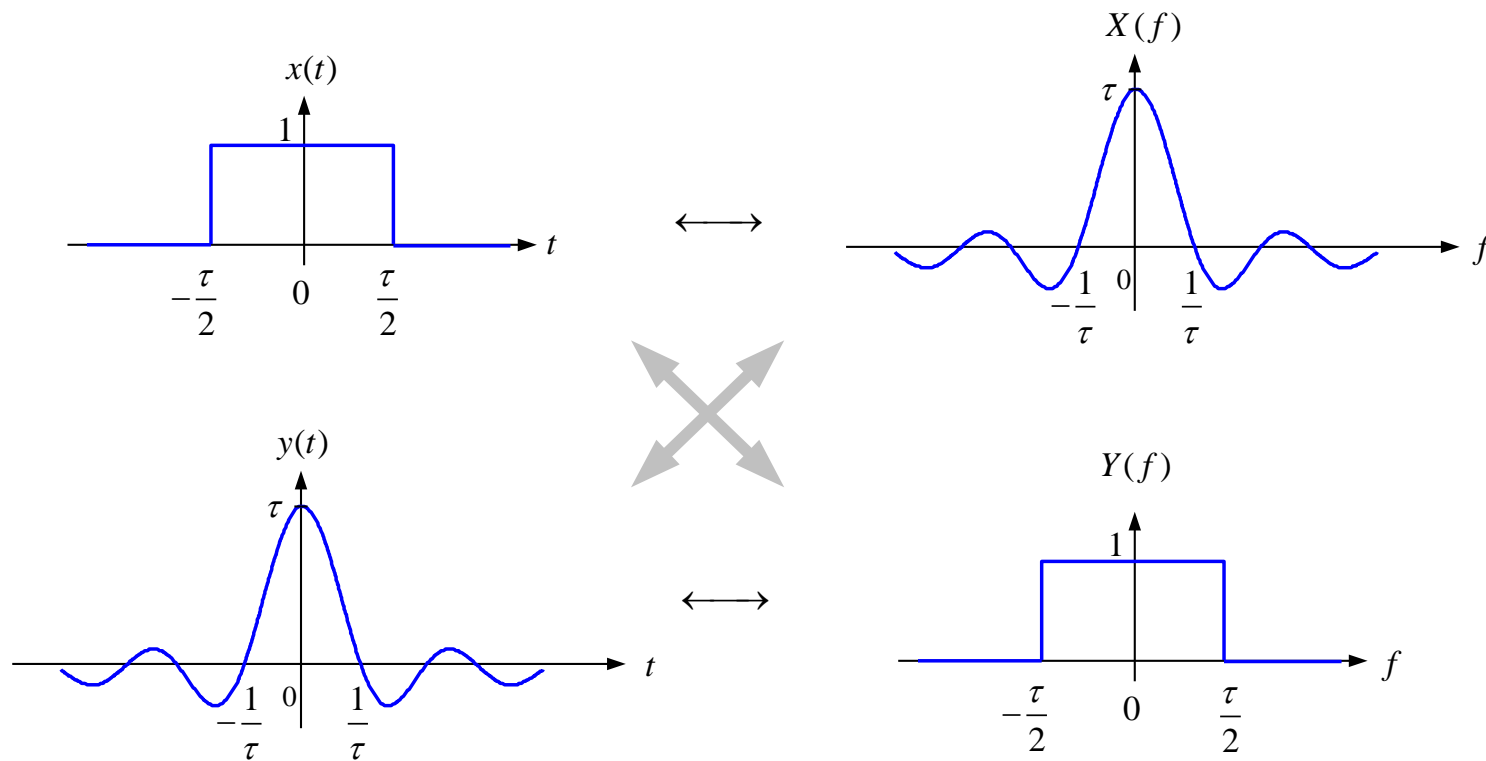
$$x(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f) = \tau \text{sinc}(f\tau)$$

$$y(t) = \tau \text{sinc}(t\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(f) = \Pi\left(\frac{f}{\tau}\right)$$



PROPERTIES OF FOURIER TRANSFORM

■ Duality



PROPERTIES OF FOURIER TRANSFORM

■ Differentiation

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} j2\pi f X(f) \\ x^{(n)}(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} (j2\pi f)^n X(f)\end{aligned}$$

• Example:

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = x'(t) + x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (j2\pi f)^2 Y(f) + 2(j2\pi f)Y(f) + Y(f) = (j2\pi f)X(f) + X(f)$$

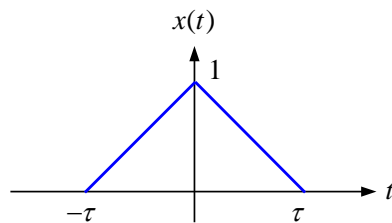
■ Integration

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2} \delta(f)$$

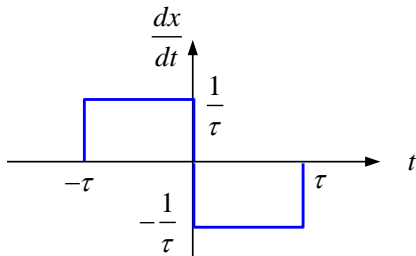


PROPERTIES OF FOURIER TRANSFORM

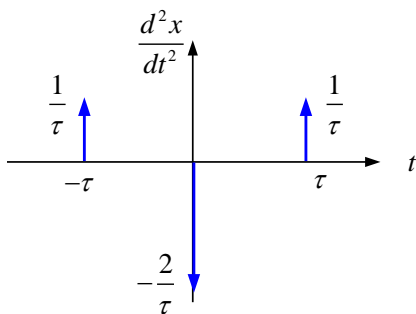
- Example : triangular pulse $x(t) = \Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)$



$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{\tau} [\delta(t + \tau) - 2\delta(t) + \delta(t - \tau)]$$



$$\mathcal{F}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = \frac{1}{\tau} [e^{j2\pi f\tau} - 2 + e^{-j2\pi f\tau}] = \frac{2}{\tau} [\cos(2\pi f\tau) - 1] = -\frac{4}{\tau} \sin^2(\pi f\tau)$$



$$\mathcal{F}\left[\frac{dx}{dt}\right] = -\frac{4 \sin^2(\pi f\tau)}{\tau j2\pi f}, \quad \mathcal{F}[x(t)] = -\frac{4 \sin^2(\pi f\tau)}{\tau (j2\pi f)^2} = \tau \frac{\sin^2(\pi f\tau)}{(\pi f\tau)^2} = \tau \text{sinc}^2(f\tau)$$

PROPERTIES OF FOURIER TRANSFORM

■ Parseval's Theorem

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

$$\begin{aligned} \text{pf) } \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)e^{-j2\pi ft} df \right\} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \right\} df = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)X(f) df \end{aligned}$$

■ Energy Spectral Density (ESD) : $|X(f)|^2$

- the frequency distribution of total energy



PROPERTIES OF FOURIER TRANSFORM

■ Symmetry

$$\mathcal{F}[x^*(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j2\pi ft} dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi ft} dt \right]^* \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(-f)t} dt \right]^* \Rightarrow x^*(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X^*(-f)$$

- If $x(t)$ is real ($x(t) = x^*(t)$), then $X(f) = X^*(-f)$

$$\Rightarrow |X(f)| = |X(-f)|$$

$$\angle X(f) = -\angle X(-f)$$



PROPERTIES OF FOURIER TRANSFORM

■ Symmetry (continued)

i) If $x(t)$ is real and even, $X(f)$ is also real and even

$$\begin{aligned} X(-f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi ft} dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j2\pi ft} dt \right)^* = X^*(f) \quad \because x(t) = x^*(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = X(f) \quad \because x(t) = x(-t) \end{aligned}$$

ii) If $x(t)$ is real and odd, $X(f)$ is imaginary and odd

$$X(-f) = X^*(f) = -X(f)$$



PROPERTIES OF FOURIER TRANSFORM

■ Convolution (in time)

$$x(t) * h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \cdot H(f)$$

• Example 1

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega) = j\omega X(\omega) \quad \therefore H(\omega) = j\omega$$

• Example 2

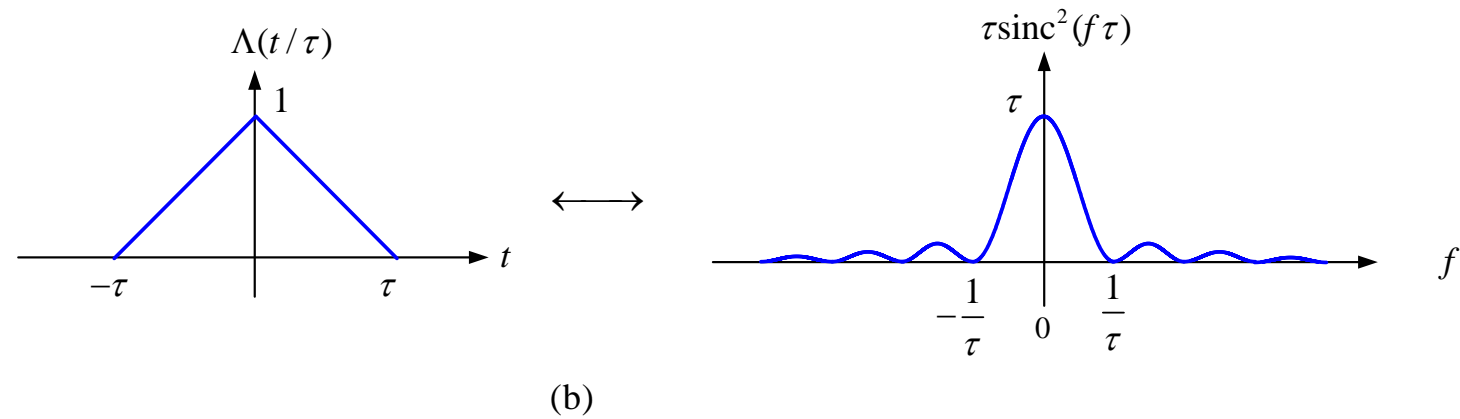
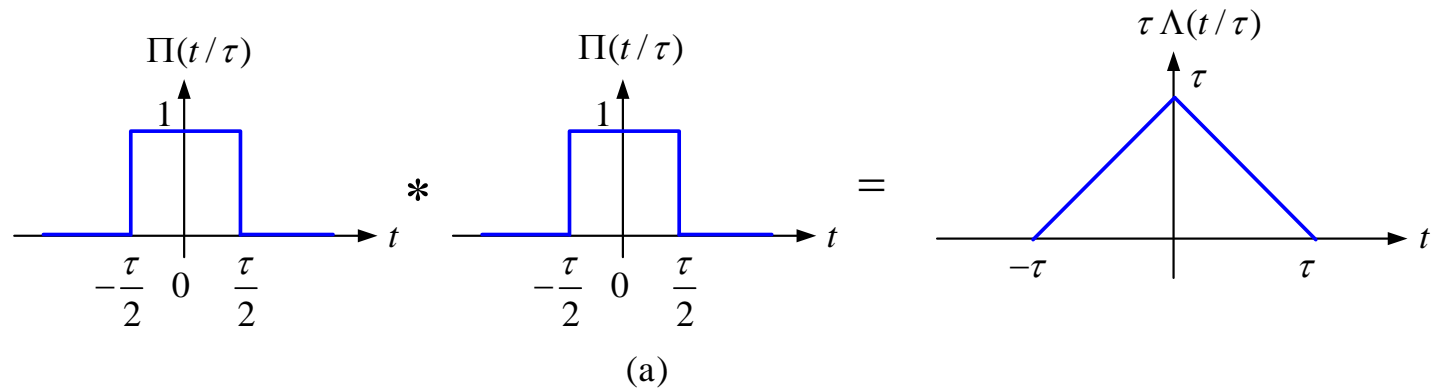
$$x(t) = e^{-bt}u(t), \quad b > 0, \quad h(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0, a \neq b$$

$$Y(f) = X(f)H(f) = \frac{1}{b + j2\pi f} \cdot \frac{1}{a + j2\pi f} = \frac{1}{b - a} \left\{ \frac{1}{a + j2\pi f} + \frac{-1}{b + j2\pi f} \right\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} y(t) = \frac{1}{b - a} (e^{-at} - e^{-bt})u(t)$$



PROPERTIES OF FOURIER TRANSFORM

■ Convolution (in time)



PROPERTIES OF FOURIER TRANSFORM

- Multiplication (in time) : dual of convolution property

$$x(t) \cdot m(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f) * M(f)$$

- Special case: modulation

$$m(t) = \cos 2\pi f_0 t$$

$$M(f) = \frac{1}{2} \{ \delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) \}$$

$$y(t) = x(t)m(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(f) = X(f) * M(f) = \frac{1}{2} \{ X(f - f_0) + X(f + f_0) \}$$



USEFUL FOURIER TRANSFORM PAIRS

■ Unit impulse

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1$$

$$\delta(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0}$$

■ Constant

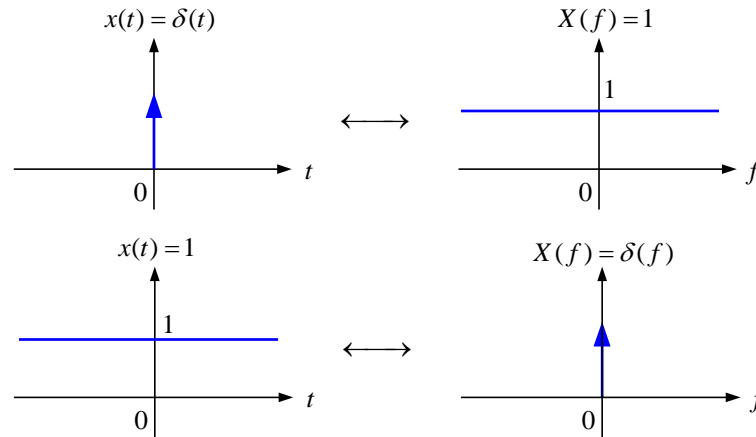
$$1 \Leftrightarrow \delta(f)$$

■ Unit step function

$$u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

■ Exponential

$$e^{-at}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{a + j2\pi f}$$



USEFUL FOURIER TRANSFORM PAIRS

- Complex exponential

$$\begin{aligned}e^{j2\pi f_0 t} &\Leftrightarrow \delta(f - f_0) \\e^{-j2\pi f_0 t} &\Leftrightarrow \delta(f + f_0)\end{aligned}$$

- Sinusoidal functions

$$\begin{aligned}\cos 2\pi f_0 t &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\} \\ \sin 2\pi f_0 t &\Leftrightarrow \frac{1}{2j}\{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\}\end{aligned}$$



USEFUL FOURIER TRANSFORM PAIRS

- Rectangular pulse

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow X(f) = T \operatorname{sinc}(fT)$$

- Triangular pulse

$$x(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow X(f) = T \operatorname{sinc}^2(fT)$$

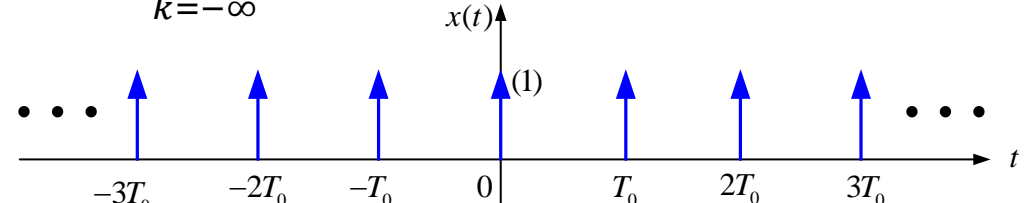
- Impulse train

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \Leftrightarrow X(f) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0) f_0 = \frac{1}{T}$$



FOURIER TRANSFORM OF PERIODIC SIGNALS

■ Impulse train

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \quad : \text{periodic with period } T_0$$


i) Fourier series

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t}, f_0 = \frac{1}{T_0}$$

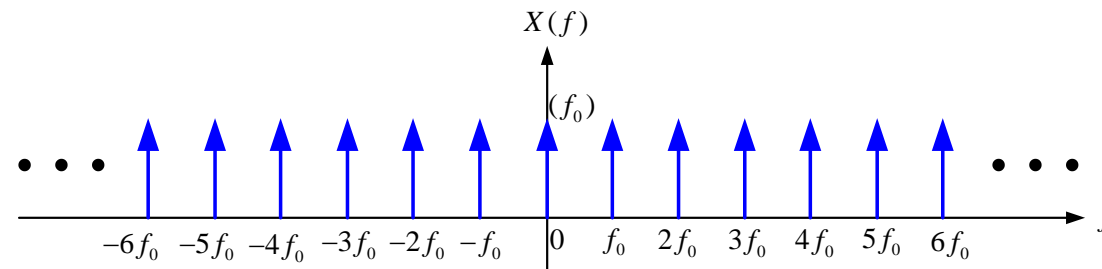
$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \delta(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_0}$$

FOURIER TRANSFORM OF PERIODIC SIGNALS

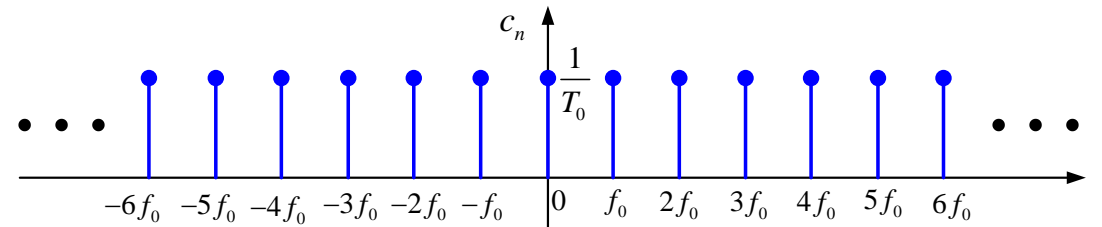
■ Impulse train (continued)

ii) Take Fourier transform to get

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta\left(f - n \frac{1}{T_0}\right) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - n \frac{1}{T_0}\right) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0)$$



(a)



(b)

FOURIER TRANSFORM OF PERIODIC SIGNALS

- Arbitrary periodic signal $x(t)$ with period T_0
 - Fourier series

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t}, f_0 = \frac{1}{T}$$
$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

- Take Fourier transform

$$X(f) = \mathcal{F} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathcal{F}[e^{j2\pi n f_0 t}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(f - n f_0)$$



FOURIER TRANSFORM OF PERIODIC SIGNALS

- Arbitrary periodic signal $x(t)$ with period T_0 (continued)

- Define truncated signal

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Then the Fourier coefficients are

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j2\pi f t} dt \right]_{f=nf_0} \\ &= \frac{1}{T_0} [X_T(f)]_{f=nf_0} : \text{sampling of } X(f) \text{ with the interval } f_0 \end{aligned}$$



FOURIER TRANSFORM OF PERIODIC SIGNALS

- Arbitrary periodic signal $x(t)$ with period T_0 (continued)
 - 주기 신호의 푸리에 변환은 주파수 영역에서 임펄스열이 되며 각 임펄스의 가중치는 푸리에 계수가 되는데, 이 푸리에 계수는 한 주기의 신호만 취해 만들어진 신호 $x_T(t)$ 의 푸리에 변환을 기본주파수의 정수배 주파수에서 표본화하고 주기로 나눈 것과 동일하다.

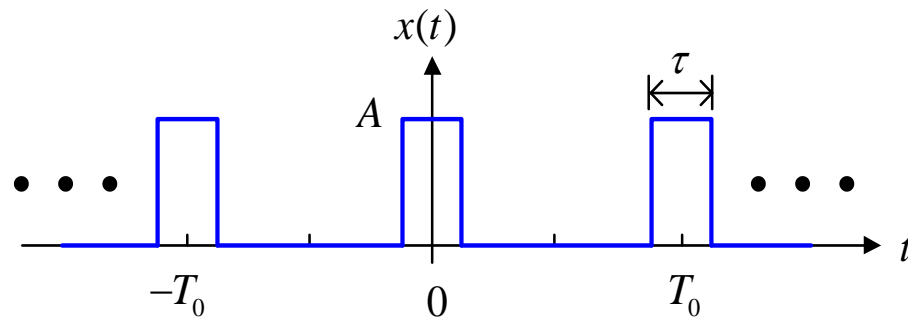
$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(f - nf_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{X_T(nf_0)}{T_0} \delta(f - nf_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{X_T(f)}{T_0} \delta(f - nf_0)$$



FOURIER TRANSFORM OF PERIODIC SIGNALS

■ 예제

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A \Pi \left(\frac{t - kT_0}{\tau} \right)$$

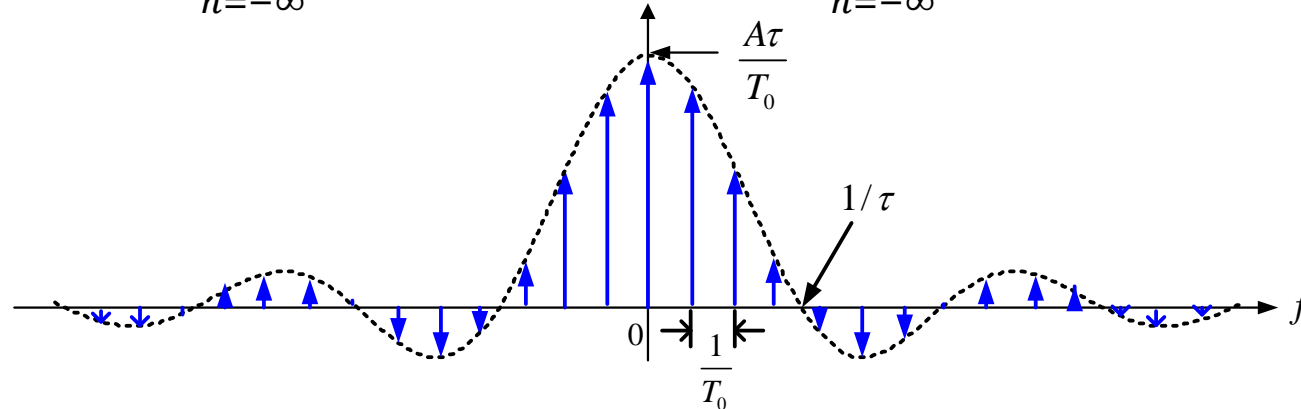


■ 풀이

Truncated signal: $x_T(t) = A \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right), X_T(f) = A\tau \text{sinc}(f\tau)$

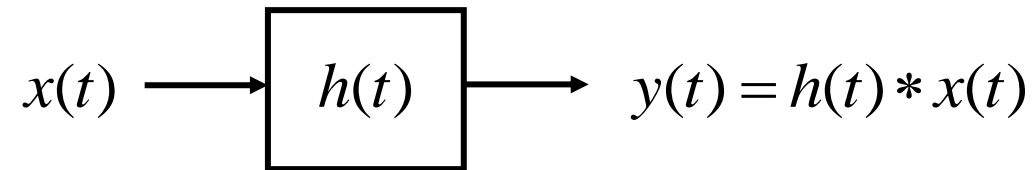
\Rightarrow

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\tau \text{sinc}(f\tau)}{T_0} \delta(f - nf_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\tau \text{sinc}(nf_0\tau)}{T_0} \delta(f - nf_0)$$



선형 시스템과 FOURIER TRANSFORM

- Linear system



$$X(f) \quad H(f) \quad Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

- 스펙트럼의 개념
- 직교 신호에 의한 신호의 표현
- 푸리에 급수
- 푸리에 변환
- **스펙트럼 밀도**
- 선형 시스템과 필터
- 신호의 왜곡



ENERGY SPECTRAL DENSITY

■ Energy Spectral Density (ESD) function

- Total energy

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(f) df$$

- Energy Spectral Density

$$\Psi_x(f) = |X(f)|^2$$



ENERGY SPECTRAL DENSITY

- Autocorrelation과의 관계
 - 에너지 신호의 자기상관함수

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t + \tau)dt$$

- 자기상관함수의 푸리에 변환

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[R_x(\tau)] &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t + \tau)dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau + t)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)[X(f)e^{j2\pi ft}]dt = X(f) \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi ft}dt \\ &= X(f)X(-f) = |X(f)|^2 = \Psi_x(f)\end{aligned}$$



ENERGY SPECTRAL DENSITY

■ 요약

- ESD

$$\Psi_x(f) = |X(f)|^2 = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt\right]$$

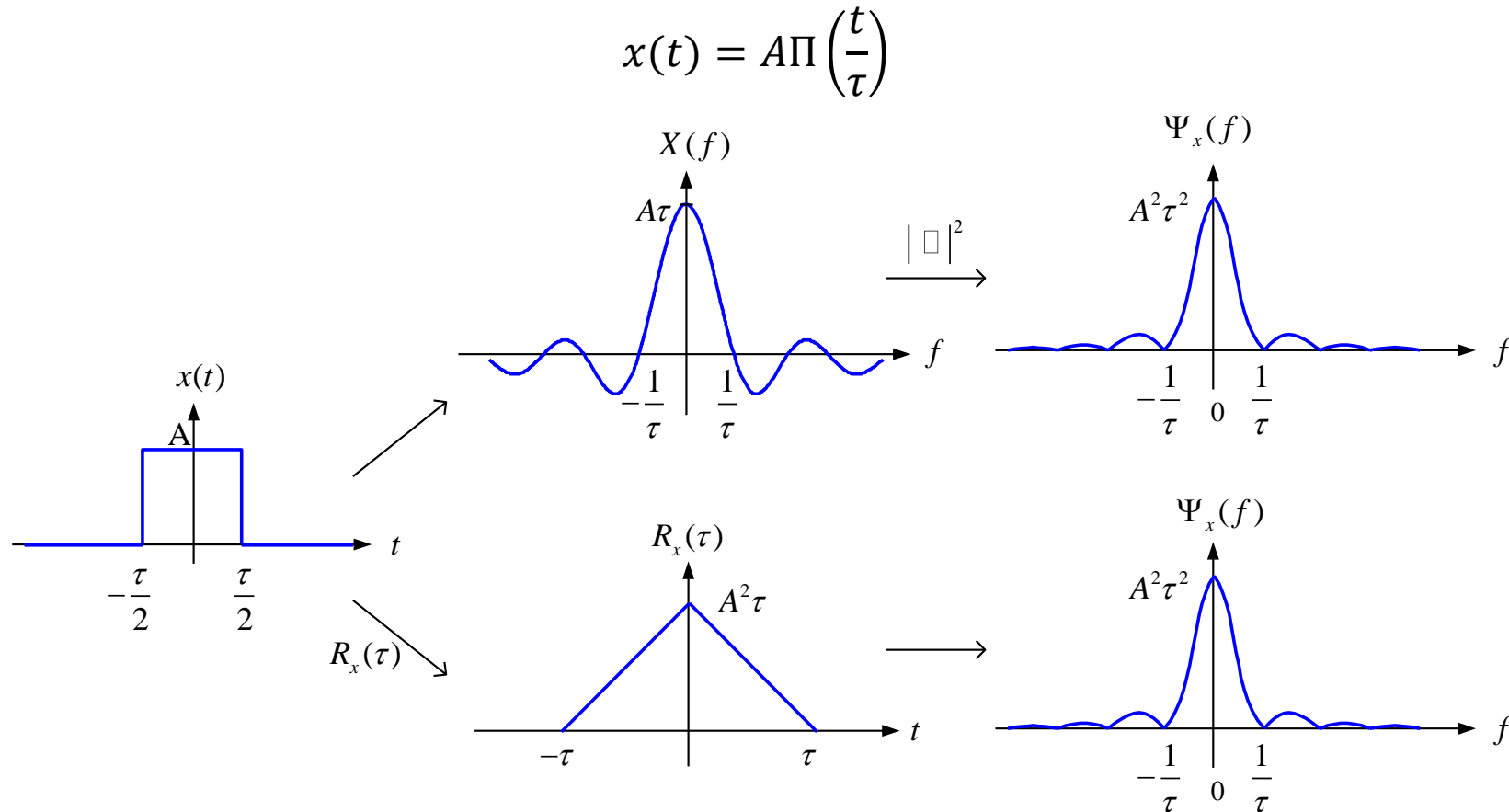
- Total energy

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(f) df = R_x(0)$$



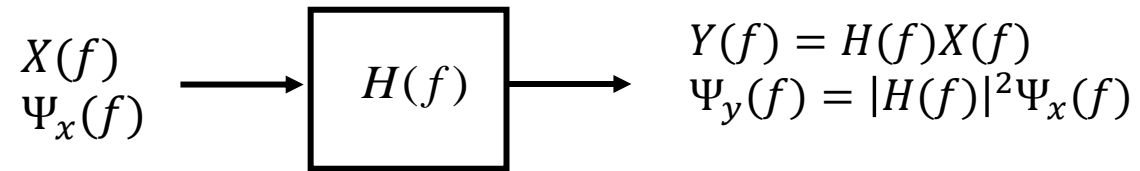
ENERGY SPECTRAL DENSITY

■ 예제



ENERGY SPECTRAL DENSITY

- Energy transmission through LTI system



ENERGY SPECTRAL DENSITY

- 변조된 신호의 ESD

$$y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

$$Y(f) = \frac{1}{2} [X(f + f_0) + X(f - f_0)]$$

$$\Psi_y(f) = |Y(f)|^2 = \frac{1}{4} |X(f + f_0) + X(f - f_0)|^2 = \frac{1}{4} [\Psi_x(f + f_0) + \Psi_x(f - f_0)]$$

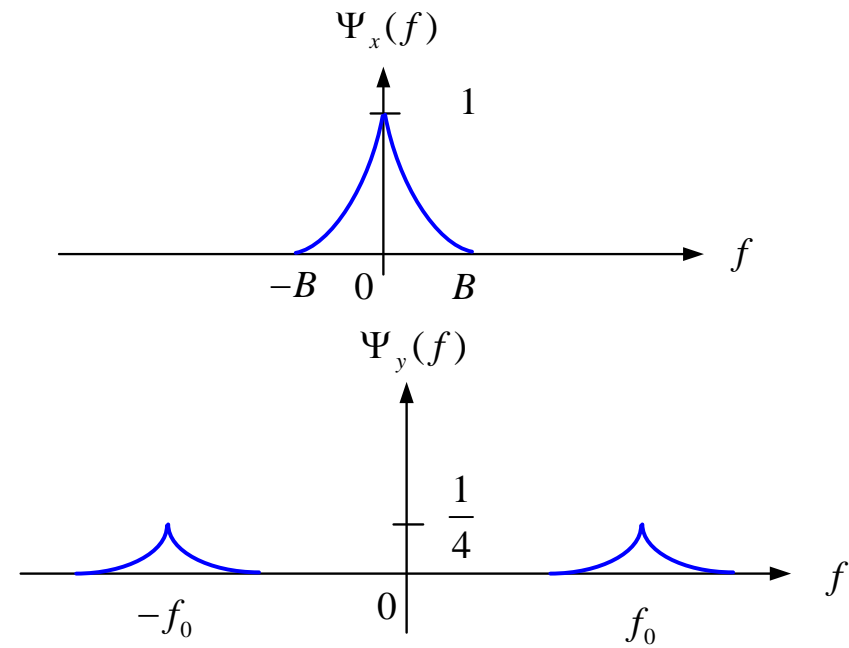
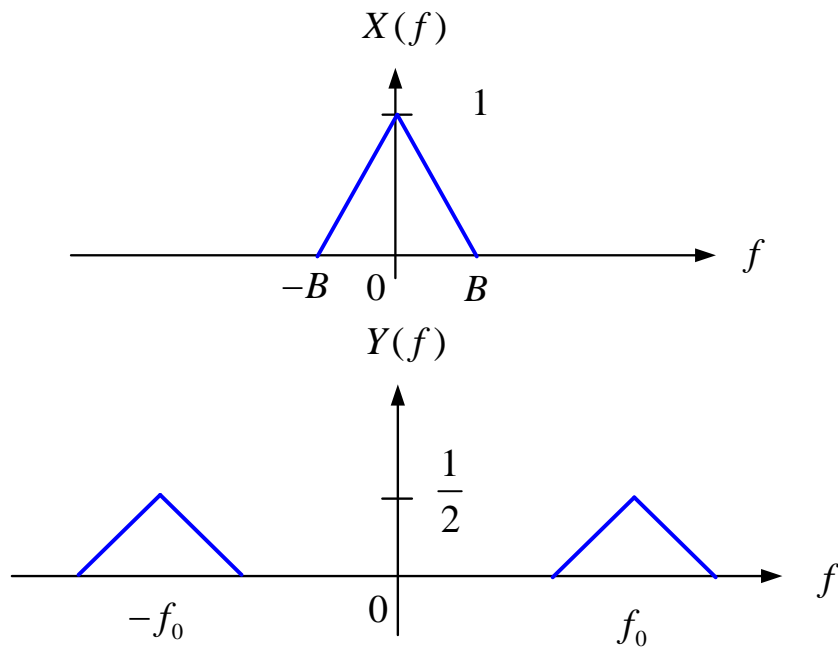
$$E_y = \frac{1}{2} E_x, f_0 \geq 2B$$



ENERGY SPECTRAL DENSITY

■ 변조된 신호의 ESD

$$y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t)$$



POWER SPECTRAL DENSITY

■ Power Spectral Density (PSD) function

- Average power

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df$$

- Power Spectral Density $S_x(f)$

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}$$

$$\text{where } x_T(t) = \begin{cases} x(t) & -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



POWER SPECTRAL DENSITY

■ Autocorrelation과의 관계

- 전력 신호의 자기상관함수

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt$$

- 자기상관함수의 푸리에 변환

$$\mathcal{F}[R_x(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} = S_x(f)$$



POWER SPECTRAL DENSITY

■ 요약

- PSD

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = \mathcal{F} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt \right]$$

- Average power

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df = R_x(0)$$



POWER SPECTRAL DENSITY

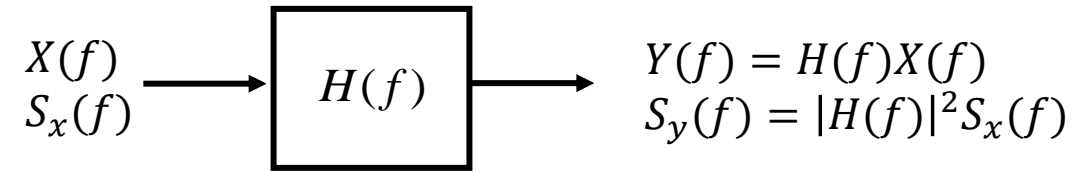
■ 주기신호의 PSD

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df$$
$$S_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \delta(f - nf_0)$$



POWER SPECTRAL DENSITY

- Power transmission through LTI system



- 스펙트럼의 개념
- 직교 신호에 의한 신호의 표현
- 푸리에 급수
- 푸리에 변환
- 스펙트럼 밀도
- **선형 시스템과 필터**
- 신호의 왜곡



선형 시스템의 입출력 관계와 주파수 응답

$$\begin{array}{ccccc}
 x(t) & \longrightarrow & \boxed{h(t)} & \longrightarrow & y(t) = h(t) * x(t) \\
 X(f) & & H(f) & & Y(f) = H(f) \cdot X(f)
 \end{array}$$

■ 주파수 응답

$$H(f) = \mathcal{F}[h(t)] = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

■ 진폭응답과 위상응답

$$H(f) = |H(f)|e^{j\angle H(f)}$$

amplitude response: $|H(f)|$

$$\text{phase response: } \angle H(f) = \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im}\{H(f)\}}{\text{Re}\{H(f)\}} \right]$$



선형 시스템의 입출력 관계와 주파수 응답

- 선형 시스템의 출력

$$Y(f) = |Y(f)|e^{j\angle Y(f)} = |H(f)||X(f)|e^{j[\angle H(f)+\angle X(f)]}$$

- 따라서 출력의 진폭응답과 위상응답은

$$\begin{aligned}|Y(f)| &= |H(f)||X(f)| \\ \angle Y(f) &= \angle H(f) + \angle X(f)\end{aligned}$$



선형 시스템의 입출력 관계와 주파수 응답

	시간 영역	주파수 영역
일반 신호	$y(t) = h(t) * x(t)$	$Y(f) = H(f) X(f)$ $\Psi_y(f) = H(f) ^2 \Psi_x(f)$ $S_y(f) = H(f) ^2 S_x(f)$ <p>에너지 신호의 ESD는</p> $\Psi_x(f) = X(f) ^2 = F[R_x(\tau)]$ <p>주기 신호의 PSD는</p> $S_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n ^2 \delta(f - nf_0) = F[R_x(\tau)]$



선형 시스템의 입출력 관계와 주파수 응답

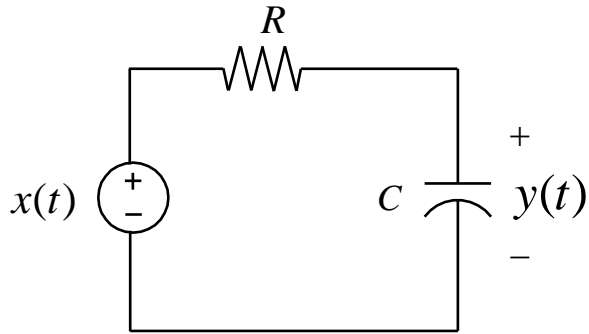
	시간 영역	주파수 영역
정 현 파 신 호	<p>정현파 입력 $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ 의 경우</p> <p>출력 신호는 $y(t) = A H(f_0) \cos(2\pi f_0 t + \angle H(f_0))$</p> <p>입력의 평균전력은 $P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) ^2 dt = A^2 / 2$</p> <p>출력의 평균 전력은 $P_y = A^2 H(f_0) ^2 / 2$</p>	$X(f) = \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} \delta(f + f_0)$ $Y(f) = \frac{A}{2} H(f_0) \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} H(-f_0) \delta(f + f_0)$ $S_x(f) = \frac{A^2}{4} \delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4} \delta(f + f_0)$ <p>입력의 평균전력은 $P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df = A^2 / 2$</p> $S_y(f) = \frac{A^2}{4} H(f_0) ^2 \delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4} H(-f_0) ^2 \delta(f + f_0)$ <p>출력의 평균전력은 $P_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f) df = A^2 H(f_0) ^2 / 2$</p>

선형 시스템의 입출력 관계와 주파수 응답

	시간 영역	주파수 영역
일반 주기 신호	<p>임의의 주기 신호</p> $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-j2\pi n f_0 t}$ $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{-j2\pi n f_0 t}$ <p>여기서</p> $d_n = H(nf_0) c_n$	$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(f - nf_0)$ $Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \delta(f - nf_0)$ $S_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n ^2 \delta(f - nf_0)$ $S_y(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n ^2 \delta(f - nf_0)$

주파수 응답

- 예제: 다음 RC회로의 임펄스응답과 주파수 응답을 구하라.

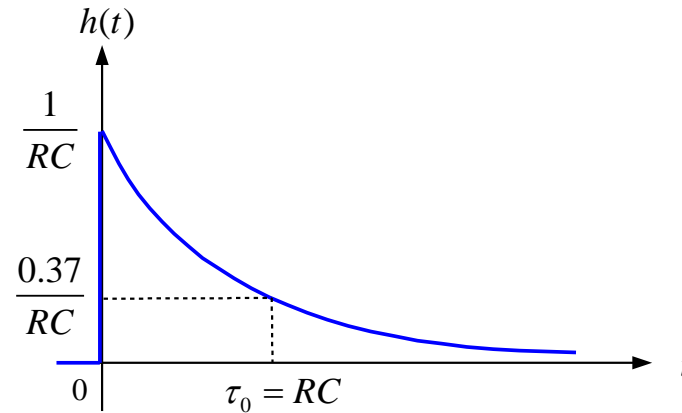


$$x(t) = Ri(t) + y(t) = RC \frac{dy}{dt} + y(t)$$

$$X(f) = RC(j2\pi f)Y(f) + Y(f)$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1 + j(2\pi RC)f}$$

$$h(t) = \frac{1}{\tau_0} e^{-t/\tau_0} u(t), \tau_0 = RC$$



주파수 응답

■ 진폭 응답과 주파수 응답은

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi RC)^2 f^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}}$$

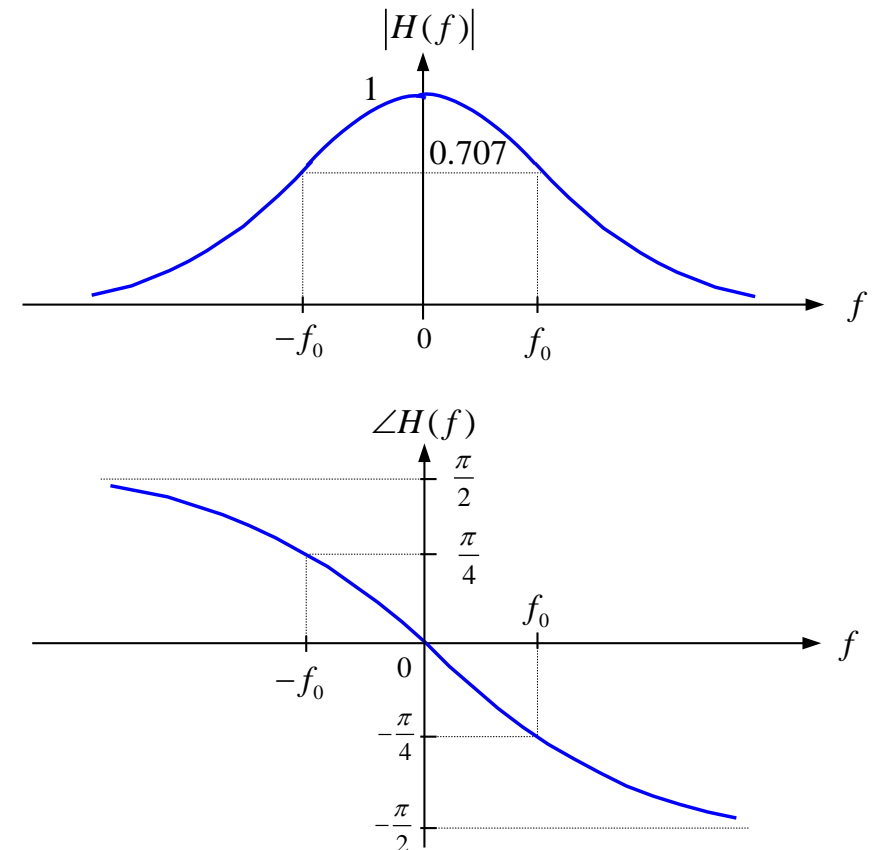
$$\angle H(f) = -\tan^{-1}(2\pi RCf) = -\tan^{-1}\left(\frac{f}{f_0}\right)$$

where $f_0 = 1/2\pi RC$

■ For sinusoidal input $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$

- Output is

$$y(t) = A|H(f_0)| \cos(2\pi f_0 t + \angle H(f_0)) = \frac{A}{\sqrt{2}} \cos(2\pi f_0 t - \pi/4)$$

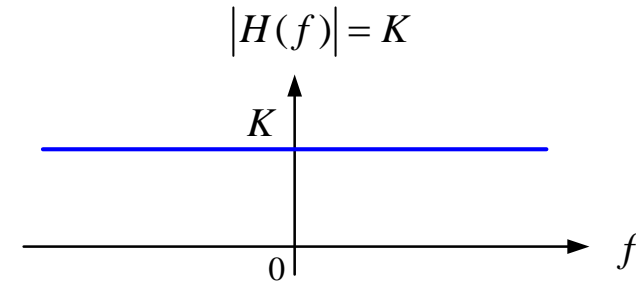


무왜곡 전송

■ Distortionless Transmission

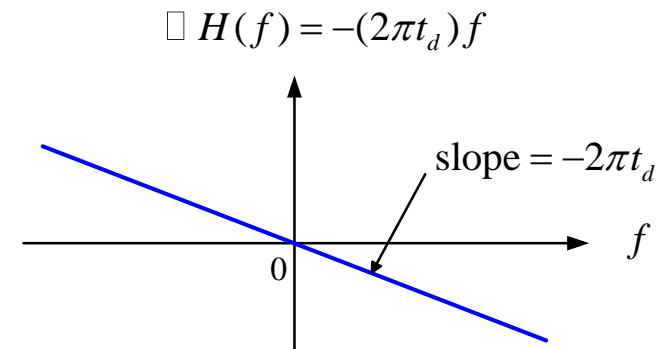
$$y(t) = Kx(t - t_d)$$

$$Y(f) = KX(f)e^{-j2\pi ft_d}$$



■ 무왜곡 전송의 조건

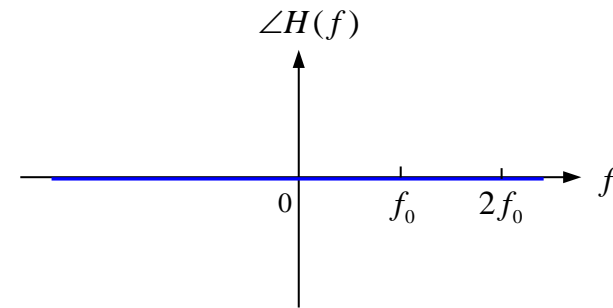
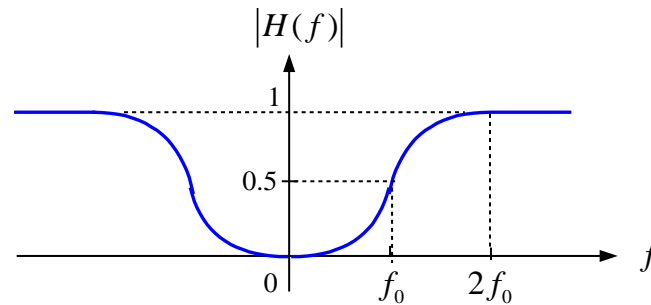
$$h(t) = K\delta(t - t_d), H(f) = Ke^{-j2\pi ft_d} \Rightarrow \begin{cases} |H(f)| = K \\ \angle H(f) = -(2\pi t_d)f \end{cases}$$



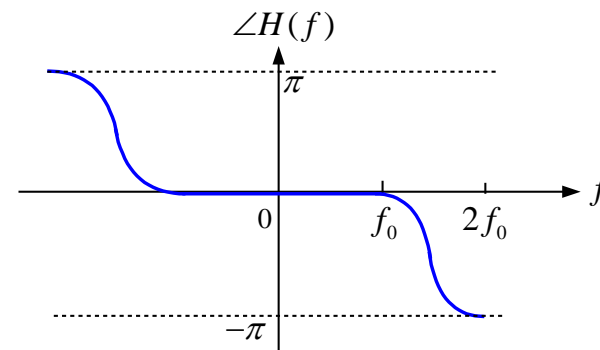
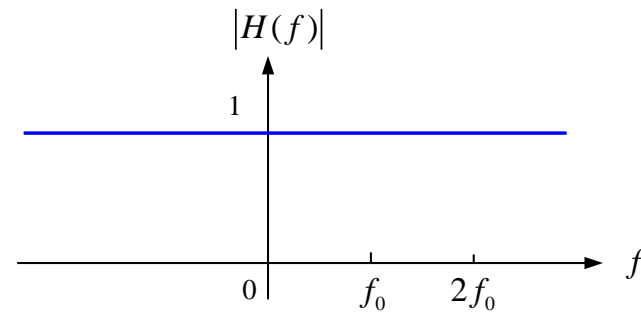
무왜곡 전송

■ 예제 (진폭왜곡과 위상왜곡의 효과)

- 입력: $x(t) = \sin(2\pi f_0 t) + 0.5 \sin(4\pi f_0 t)$
- 채널 A



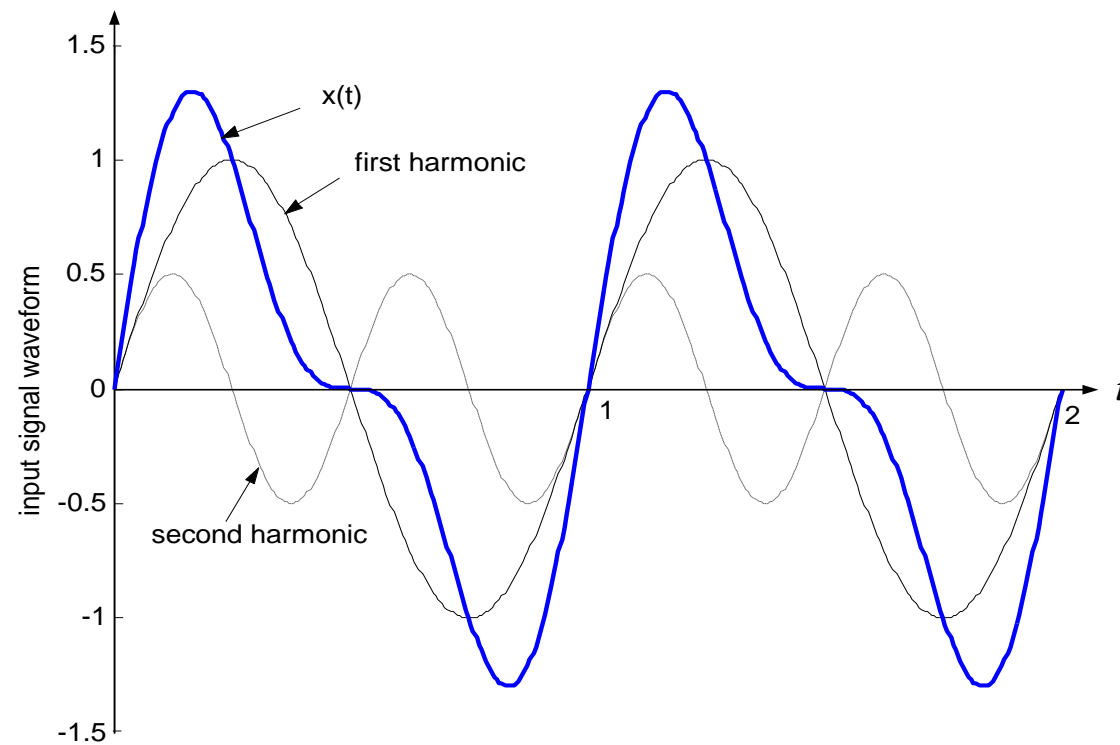
- 채널 B



무왜곡 전송

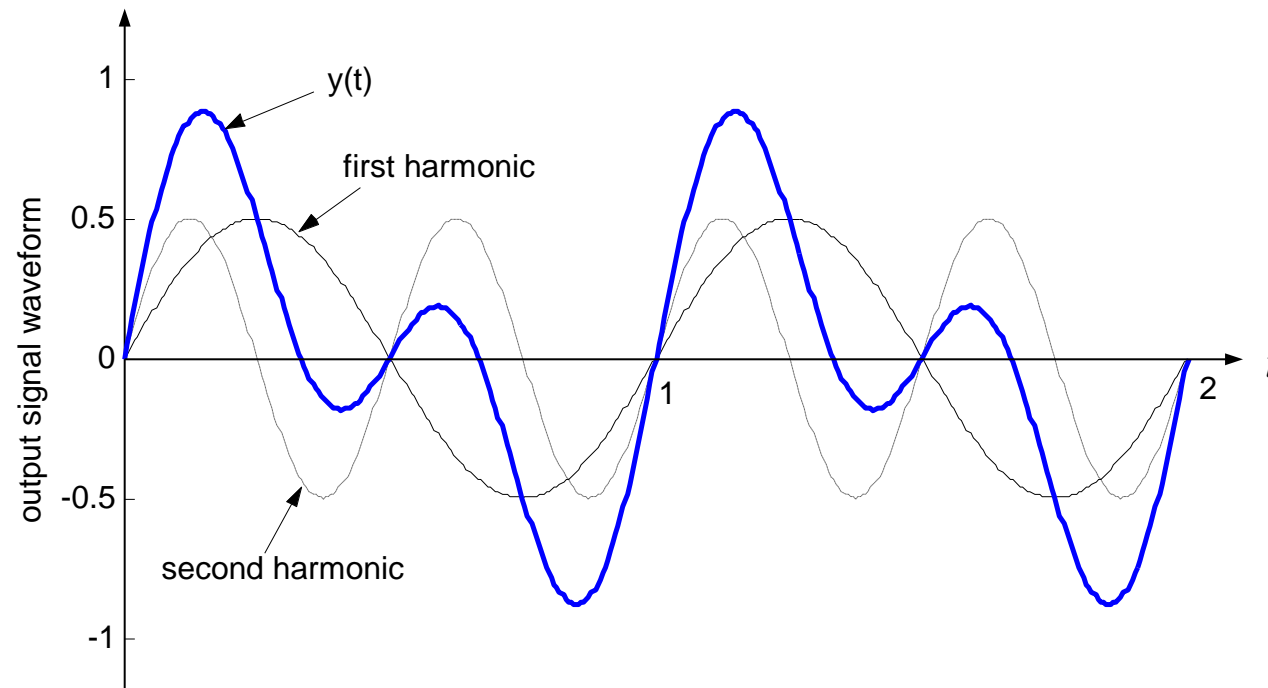
■ 예제 (진폭왜곡과 위상왜곡의 효과)

- 입력: $x(t) = \sin(2\pi f_o t) + 0.5 \sin(4\pi f_o t)$



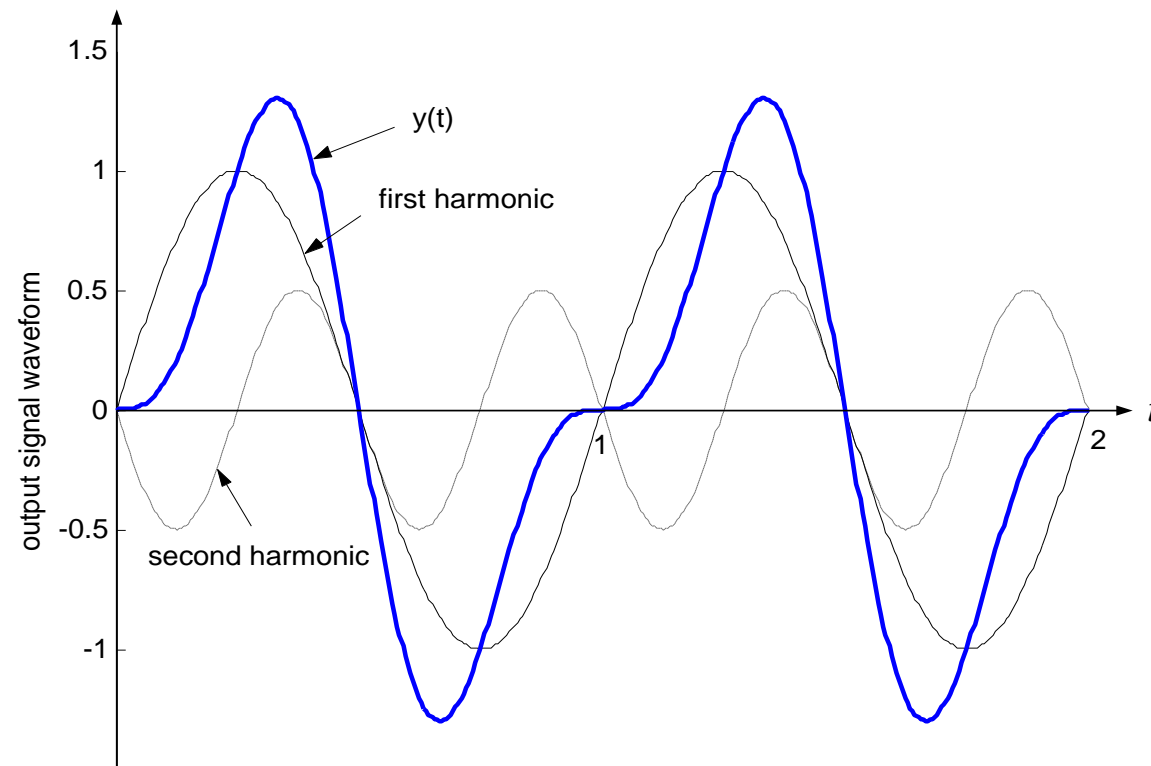
무왜곡 전송

■ 예제 (채널 A 출력: 진폭왜곡의 효과)



무왜곡 전송

■ 예제 (채널 B 출력: 위상왜곡의 효과)



무왜곡 전송

■ 음성 신호와 영상 신호에 대한 왜곡의 영향

- 일반적으로 사람의 귀는 진폭 왜곡에 대해 민감한 반면 위상 왜곡에 대해서는 둔감하다. 위상 왜곡은 지연 시간의 변동으로 나타나는데, 이 위상 왜곡의 실제 영향을 분석하기 위해서는 지연 시간의 변동을 신호의 지속 시간과 비교해야 한다. 음성 신호의 경우 각 음절의 평균 지속시간이 0.01~0.1초인데 비해 보통의 음성 시스템의 위상 응답의 기울기 변화는 msec보다 작기 때문에 귀로 잘 느끼지 못한다.
- 이와 반대로 사람의 눈은 진폭 왜곡에 둔감한 반면 위상 왜곡에 민감하다. 예를 들어 TV 신호에서 진폭 왜곡은 사람의 눈이 바로 감지하지 못하도록 부분적으로 값이 틀려진다. 그러나 위상 왜곡은 화면 요소마다 다른 지연을 발생시키는데, 결과적으로 화면이 희미하게 되어 눈으로 쉽게 감지된다.



무왜곡 전송

■ 음성 신호와 영상 신호에 대한 왜곡의 영향

- 이와 같이 음성 신호를 처리할 때는 시스템의 진폭 응답 특성이 상대적으로 중요하며, 영상 신호를 처리하는 경우에는 시스템의 위상 응답 특성에 더 주의를 기울여야 한다는 것을 알 수 있다.



FILTER

■ (주파수 선택적) 필터

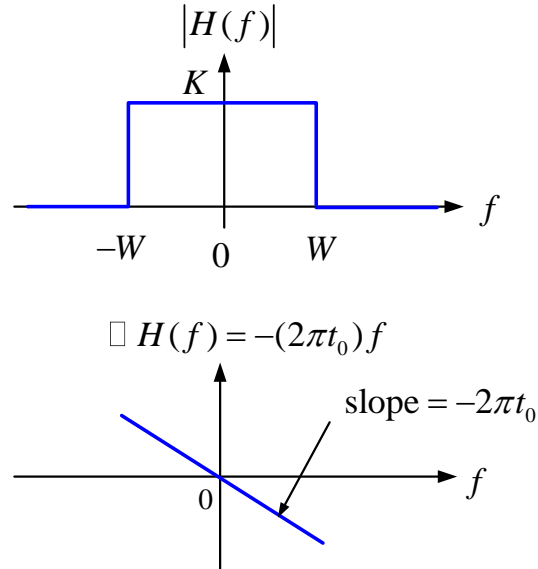
- 필터란 특정 주파수 대역의 신호 성분은 통과시키고 나머지 주파수 성분은 차단시키는 시스템이다.
- 이상적인 필터(ideal filter)는 원하는 주파수 대역에서는 무왜곡 전송을 하며(즉 시스템 전달함수의 진폭응답은 해당 주파수 대역에서 균일하고 위상응답은 주파수에 비례하는 선형성을 가짐) 나머지 주파수 대역에서는 전달 함수가 완전히 0인 필터이다.
- 필터는 통과시키는 주파수 대역에 따라 저역통과 필터, 고역통과 필터, 대역통과 필터, 대역차단 필터 등으로 분류된다.



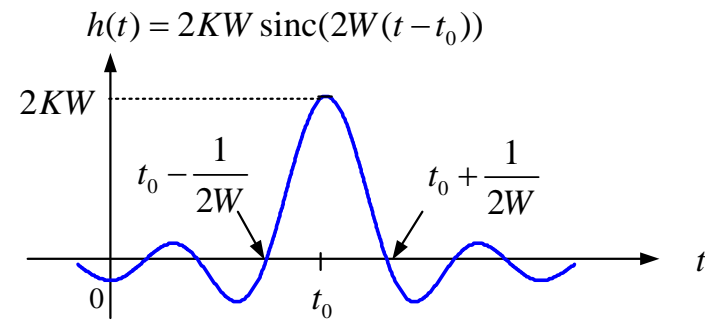
FILTER

■ Ideal Lowpass Filter (LPF)

$$|H(f)| = K\Pi\left(\frac{f}{2W}\right), \quad \angle H(f) = -(2\pi t_0)f, \quad \text{for } -W < f < W$$

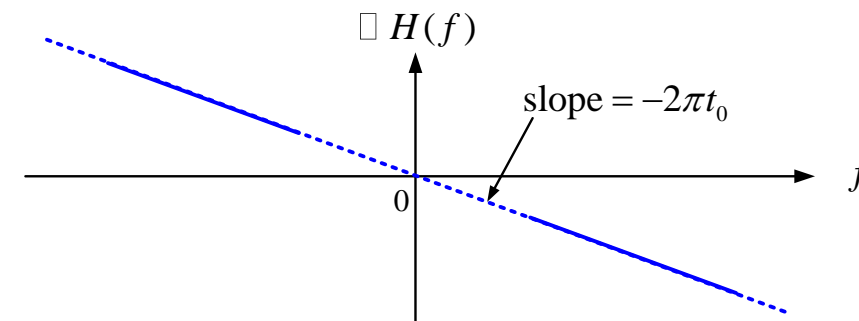
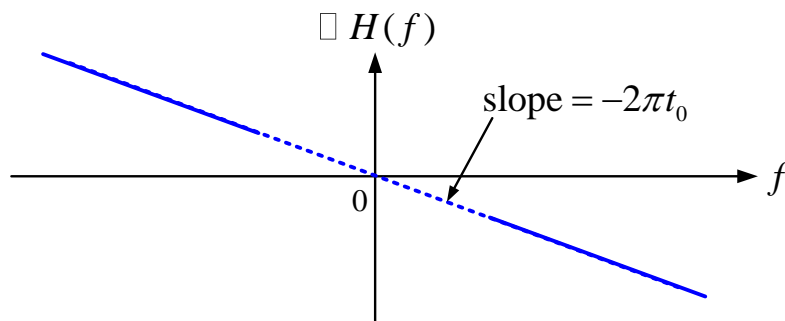
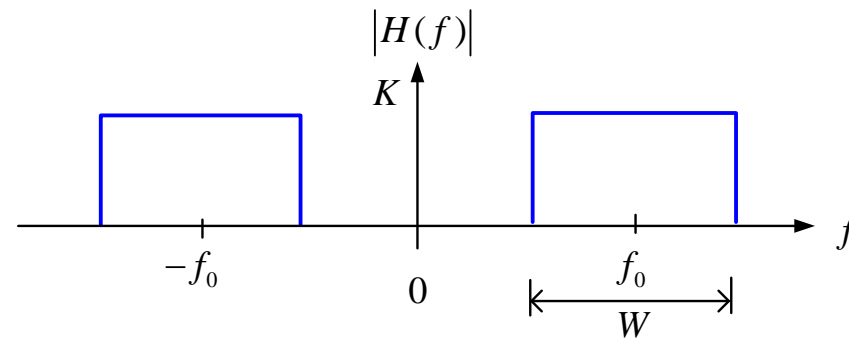
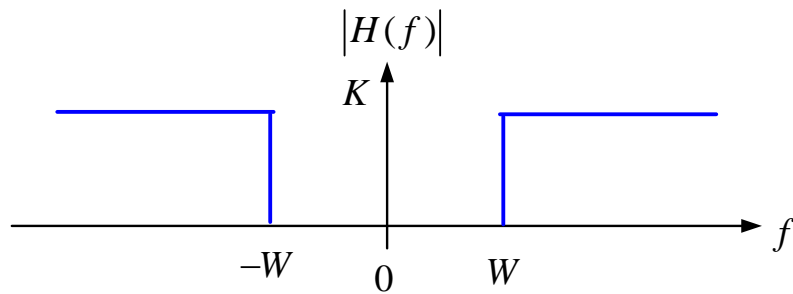


\longleftrightarrow



FILTER

■ Ideal Highpass Filter (HPF) and Bandpass Filter (BPF)

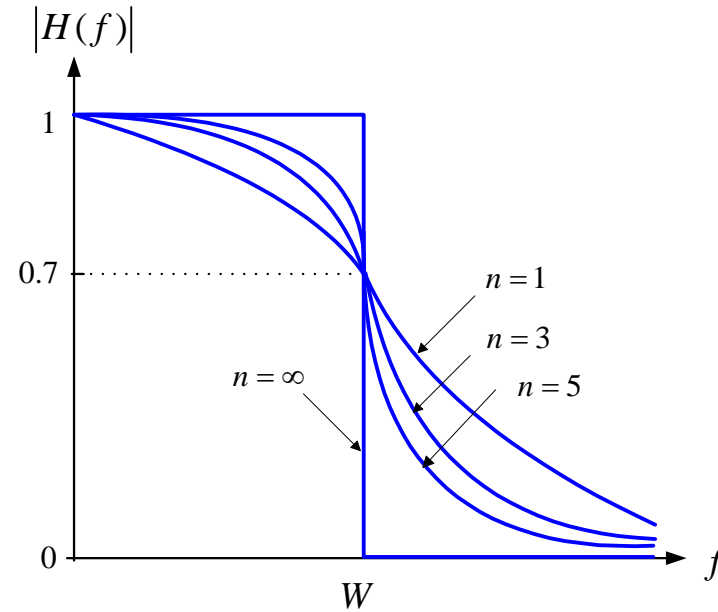


PRACTICAL FILTER

■ 예: Butterworth Filter

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/W)^{2n}}}, n = 1, 2, 3, \dots$$

- 필터 차수 n 이 커질수록 필터의 특성이 이상적인 저역통과 필터 특성에 근접한다.



PRACTICAL FILTER

■ Butterworth Filter

- 필터의 대역폭을 진폭 응답이 최대값의 3 dB로 감쇠하는(또는 0.707배가 되는) 주파수로 정의하면 위의 필터들은 모든 n 에 대하여 동일한 대역폭 W Hz를 가진다는 것을 알 수 있다.
- 한편, 필터의 설계에 있어서 전달함수의 진폭응답과 위상응답은 상호 연관되어 있어서 완전히 독립적으로 설계할 수 없다.
- 예를 들어 필터의 진폭 응답 특성을 이상적인 필터에 가깝도록 할수록($n \rightarrow \infty$) 위상 응답 특성은 차단 주파수 근처에서 왜곡이 커져서 이상적인 필터 특성에서 멀어진다. 반대로 위상 응답 특성을 이상적인 필터에 가깝게 할수록 진폭 응답 특성은 이상적인 필터 특성에서 멀어지게 된다.
- 이와 같이 필터의 설계에 있어서 이상적인 진폭 응답 특성과 이상적인 위상 응답 특성 사이에 타협이 존재한다.



PRACTICAL FILTER

■ 예제

- 대역폭이 W 이고 다음과 같은 주파수 응답을 가진 1차 Butterworth 필터를 가정하자.

$$H(f) = \frac{W}{W + jf} = \frac{1}{1 + jf/W}$$

- 다음의 신호가 입력될 때 출력을 구하라.
 - (a) 단위계단함수
 - (b) 펄스폭이 T 인 구형 펄스



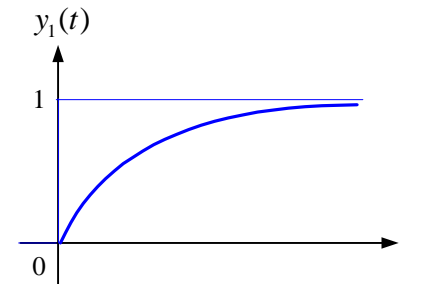
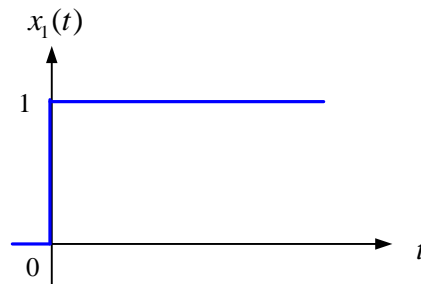
PRACTICAL FILTER

■ 풀이

• (a)

$$\begin{aligned}
 Y_1(f) &= H(f)X_1(f) = \frac{W}{W + jf} \times \left(\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f) \right) \\
 &= \frac{W}{j2\pi f(W + jf)} + \frac{1}{2} \frac{W}{W + jf} \delta(f) = \frac{W}{j2\pi f(W + jf)} + \frac{1}{2}\delta(f) \\
 &= \frac{1}{j2\pi f} - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{W + jf} + \frac{1}{2}\delta(f)
 \end{aligned}$$

$$y_1(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f) \right] - \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{2\pi W + j2\pi f} \right] = [1 - e^{-2\pi W t}]u(t)$$

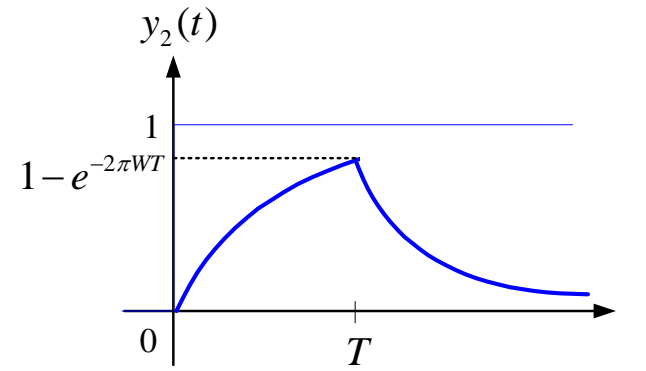
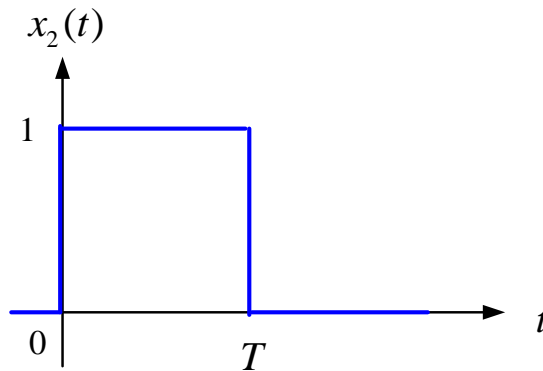


PRACTICAL FILTER

■ 풀이

• (b)

$$\begin{aligned}
 y_2(t) &= y_1(t) - y_1(t - T) \\
 &= [1 - e^{-2\pi W t}]u(t) - [1 - e^{-2\pi W(t-T)}]u(t - T) \\
 &= \begin{cases} 1 - e^{-2\pi W t}, & 0 < t < T \\ 1 - e^{-2\pi W T}, & t = T \\ [1 - e^{-2\pi W T}]e^{-2\pi W(t-T)}, & t > T \end{cases}
 \end{aligned}$$



- 스펙트럼의 개념
- 직교 신호에 의한 신호의 표현
- 푸리에 급수
- 푸리에 변환
- 스펙트럼 밀도
- 선형 시스템과 필터
- **신호의 왜곡**



선형 왜곡

■ LTI 채널의 무왜곡 전송 조건

$$\text{조건 1: } |H(f)| = K$$

$$\text{조건 2: } \angle H(f) = -(2\pi t_d)f$$

■ 선형왜곡

- 균일 진폭 조건(조건 1)이 만족되지 않으면 진폭 왜곡 이 발생하였다고 하며, 선형 위상 조건(조건 2)이 만족되지 않으면 위상 왜곡 이 발생하였다고 한다.
- 진폭 왜곡이 발생하지 않으려면 신호가 가진 모든 주파수 대역에서 채널의 주파수 응답이 일정한 진폭을 가져야 한다. 그러나 채널의 대역폭이 신호의 대역폭에 비해 작은 경우 수신 신호는 시간 영역에서 퍼지게 된다.
- 또한 위상 왜곡이 발생하면 신호의 주파수 성분 별로 지연 시간이 달라지게 되어 역시 펄스의 퍼짐 현상 이 일어나게 된다.



선형 왜곡

■ 선형왜곡 효과

- 선형 왜곡이 펄스의 퍼짐을 일으킨다는 것을 다른 측면에서 살펴보자. LTI 시스템에서 출력의 푸리에 변환은 입력의 푸리에 변환과 주파수 응답과의 곱이므로 새로운 주파수 성분이 만들어지지 않으며 신호의 스펙트럼은 일반적으로 늘어나지 않게 된다. 따라서 신호 대역폭의 감소는 펄스폭의 증가를 가져오게 된다. 무왜곡 전송조건은 채널의 임펄스 응답이 임펄스 함수로서 펄스폭이 궁극적으로 0이라는 것인데, 이 조건이 만족되지 못하면 임펄스 응답의 폭이 0보다 커서 입력과의 컨볼루션을 취하면 펄스 폭이 늘어나게 된다.
- 이상에서 살펴 본 바와 같이 선형 왜곡은 펄스의 모양뿐만 아니라 펄스의 퍼짐을 일으키는데, 그 영향으로 인접 펄스에 영향을 미치므로 시분할 다중화(TDM) 시스템에서 채널간 간섭이 발생하게 되므로 바람직하지 못하다.



선형 왜곡

■ [예제 3.25] (진폭 왜곡의 효과)

- 다음과 같은 주파수 응답을 가진 채널을 가정하자.

$$H(f) = 0.5(1 + \cos(2\pi\tau f))$$

- 펄스폭이 T인 구형 펄스가 전송되는 경우 수신되는 신호를 구하라.

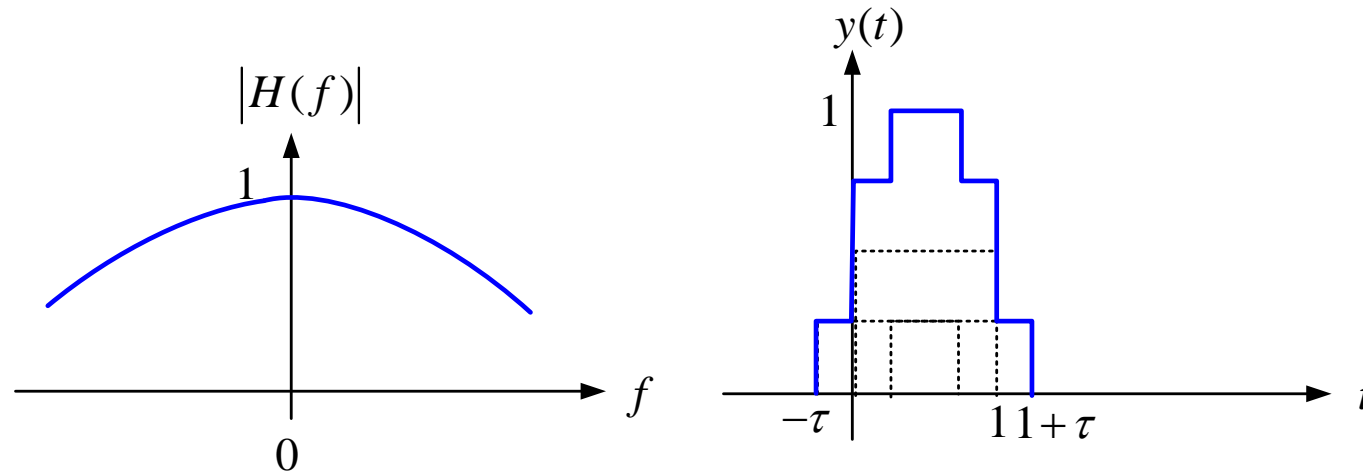


선형 왜곡

■ [풀이]

$$Y(f) = H(f)X(f) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\pi\tau f))X(f) = \frac{1}{2}X(f) + \frac{1}{4}(e^{j2\pi\tau f} + e^{-j2\pi\tau f})X(f)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{4}[x(t + \tau) + x(t - \tau)]$$



비선형 왜곡

■ 비선형 왜곡

- 실제의 통신 채널에서는 비선형성이 존재한다. 특히 미약 신호를 송신하기 위하여 전력 증폭기를 사용하는데, 효율이 높은 증폭기(C급)는 비선형 특성을 가진다.
- 선형 시스템의 경우에는 출력에 새로운 주파수 성분이 만들어지지 않는다. 이것은 선형 시스템의 경우 출력이 입력과 임펄스 응답과의 컨볼루션이므로 출력의 스펙트럼이 입력의 스펙트럼과 주파수 응답과의 곱이라는 것으로부터 쉽게 유추할 수 있다.
- 그러나 시스템이 비선형인 경우 출력이 입력과 임펄스 응답과의 컨볼루션으로 표현할 수 없으며 아래의 예에 보인 바와 같이 새로운 주파수 성분이 발생 할 수 있다는 것이 큰 특징이다.



비선형 왜곡

■ 비선형 왜곡

- 비선형 시스템의 입출력 특성을 다음과 같이 표현해보자.

$$y(t) = f(x) = a_0 + a_1x(t) + a_2x^2(t) + a_3x^3(t) + \cdots + a_kx^k(t) + \cdots$$

- 두 신호의 곱에 대한 푸리에 변환은 각 신호의 푸리에 변환의 주파수 영역 컨볼루션이다. 따라서 신호 $x(t)$ 의 대역폭이 B Hz라면 $x^k(t)$ 의 대역폭은 kB Hz가 된다.
- 결론적으로 출력의 스펙트럼은 입력의 스펙트럼보다 대역폭이 확장되며, 이것은 입력 신호에는 없는 새로운 주파수 성분이 생긴다는 것이다. 이것이 선형 왜곡과의 큰 차이점이다.



비선형 왜곡

■ [예제 3.26] (비선형 왜곡의 효과)

- 다음과 같은 입출력 관계를 갖는 비선형 채널을 가정하자.

$$y(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t)$$

- (a) 이 시스템의 입력으로 다음과 같이 두 개의 주파수 성분을 가진 신호를 가정하자.

$$x(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$$

입출력 스펙트럼을 구하고 새롭게 생긴 주파수 성분이 어떤 것이 있는지 나열하라.

- (b) 입력 신호가 $x(t) = 1000\text{sinc}(100t)$ 라고 가정하자. 이 신호에 대한 출력 $y(t)$ 와 스펙트럼 $Y(f)$ 를 구하라. 출력 신호를 처리하여 $x(t)$ 를 복원할 수 있는가?



비선형 왜곡

[풀이]

(a) 출력을 구하면

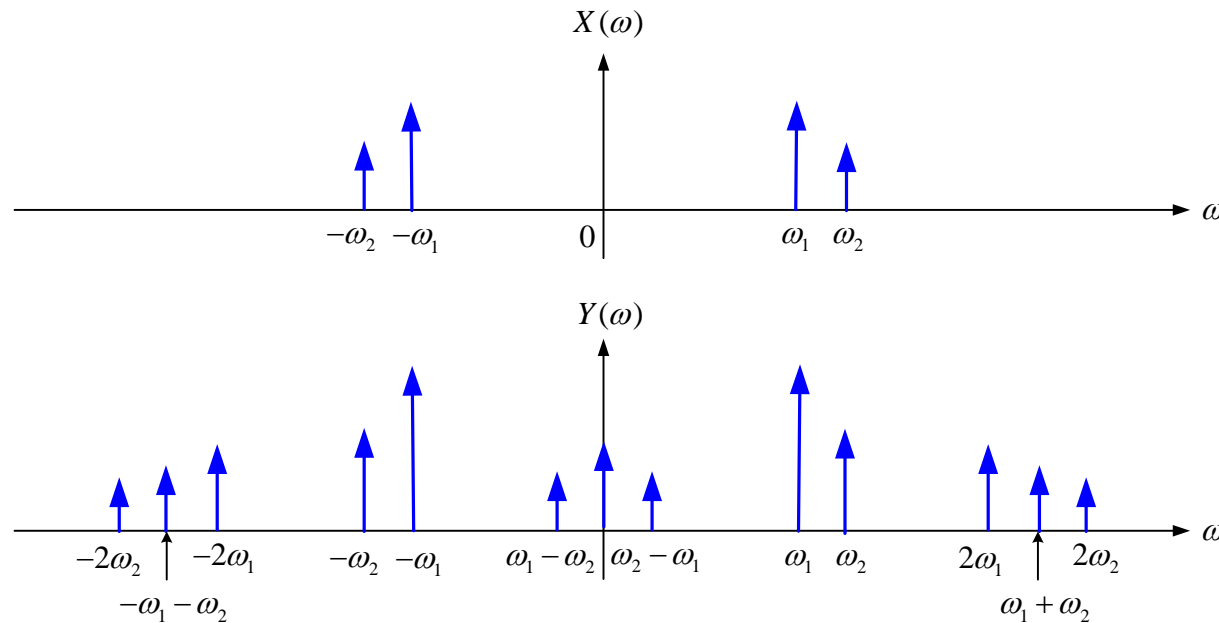
$$\begin{aligned}
 y(t) &= a_1(A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t) + a_2(A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t)^2 \\
 &= a_1(A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t) + a_2(A_1^2 \cos^2 \omega_1 t + A_2^2 \cos^2 \omega_2 t + 2A_1 A_2 \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t) \\
 &= a_1(A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t) + a_2 \left[A_1^2 \frac{1 + \cos 2\omega_1 t}{2} + A_2^2 \frac{1 + \cos 2\omega_2 t}{2} + A_1 A_2 \{\cos(\omega_1 - \omega_2)t + \cos(\omega_1 + \omega_2)t\} \right] \\
 &= a_1(A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t) + \frac{1}{2} a_2(A_1^2 + A_2^2) + \frac{1}{2} a_2(A_1^2 \cos 2\omega_1 t + A_2^2 \cos 2\omega_2 t) + a_2 A_1 A_2 \{\cos(\omega_1 - \omega_2)t + \cos(\omega_1 + \omega_2)t\}
 \end{aligned}$$



비선형 왜곡

■ [풀이] (계속)

(a) 위 식의 첫 번째 항은 원하는 출력 신호이며, 두 번째 항은 직류 성분이며, 세 번째 항은 입력 주파수의 고조파 항이다. 네 번째 항은 입력 주파수의 고조파의 합과 차 주파수 항이다. 첫 번째 항을 제외한 나머지 항이 새롭게 발생한 주파수 성분이 된다. 아래에 입출력 스펙트럼을 보인다.



비선형 왜곡

■ [풀이] (계속)

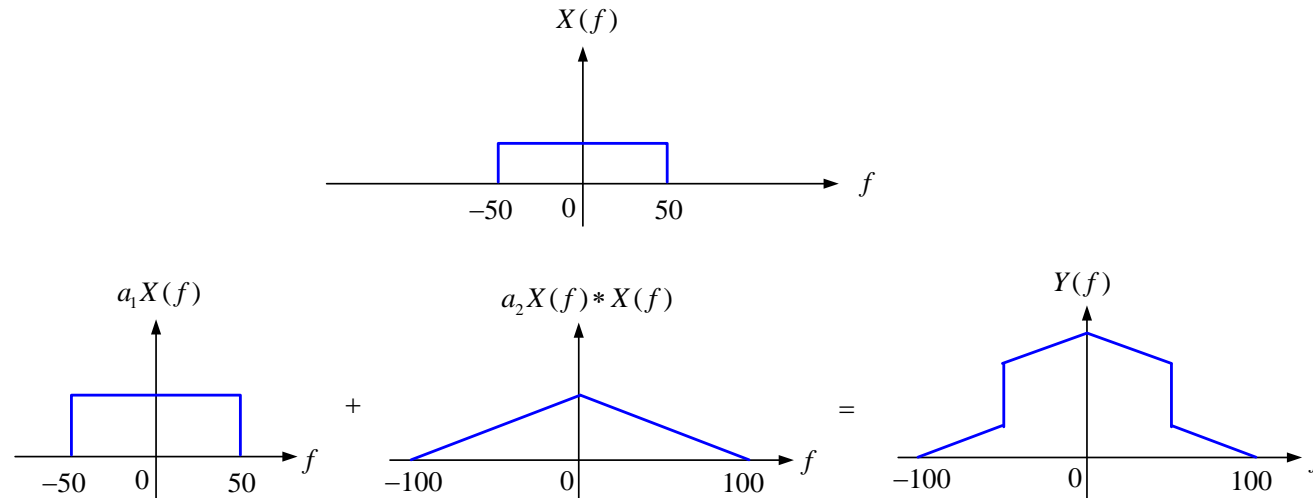
(b) 출력의 푸리에 변환을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$Y(f) = a_1 X(f) + a_2 X(f) * X(f)$$

한편 입력의 푸리에 변환은

$$X(f) = 10\Pi(f/100)$$

이므로 출력의 푸리에 변환은 다음과 같이 된다.



다중경로에 의한 왜곡

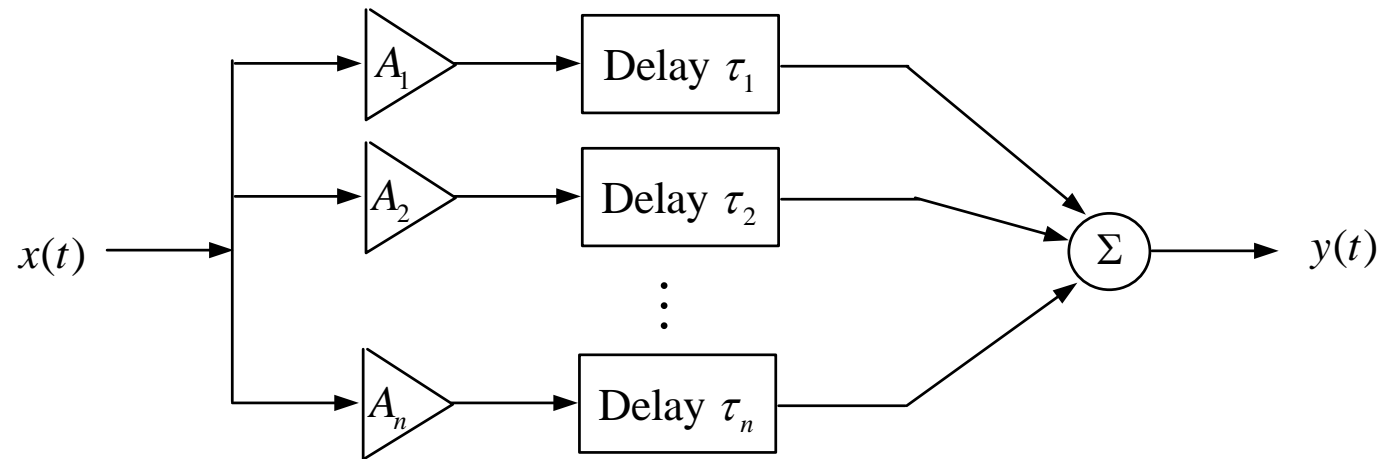
■ 다중경로 채널

- 송신기에서 전송된 신호가 수신기에 도달할 때까지 거치는 경로는 두 개 이상이 될 수 있다. 이렇게 전송된 신호가 여러 경로를 거쳐 수신되는 채널을 다중경로(multipath) 채널이라 하는데, 경로차에 따라 서로 다른 지연 시간을 갖고 수신되어 왜곡을 발생시킬 수 있다.
- 이러한 다중경로 전송에 의한 왜곡은 무선 전송에서 흔히 발생하는 문제로, 송수신 안테나 사이의 직접파와 언덕, 건물 등과 같은 물체에 의한 반사파들이 더해져서 수신되는 경우 발생한다.
- 다중경로 채널은 각각 서로 다른 이득과 시간 지연을 갖는 subsystem들이 병렬로 결합된 시스템으로 모델링할 수 있다.



다중경로에 의한 왜곡

■ 다중경로 채널



다중경로에 의한 왜곡

- 다중경로 채널에서 발생하는 왜곡의 특성을 살펴보자.
- 간단히 두 개의 경로만 있고, 각 경로를 표현하는 subsystem은 LTI 시스템으로 가정하자.
- 첫 번째 경로에 대한 시스템의 전달함수는 이득이 1이고 시간지연이 t_0 이며, 두 번째 경로를 표현하는 시스템은 이득이 A 이고 시간지연이 $t_0 + \Delta t$ 라고 가정하자. 이 경우 다중경로 채널의 전체 전달함수는 다음과 같이 표현된다.

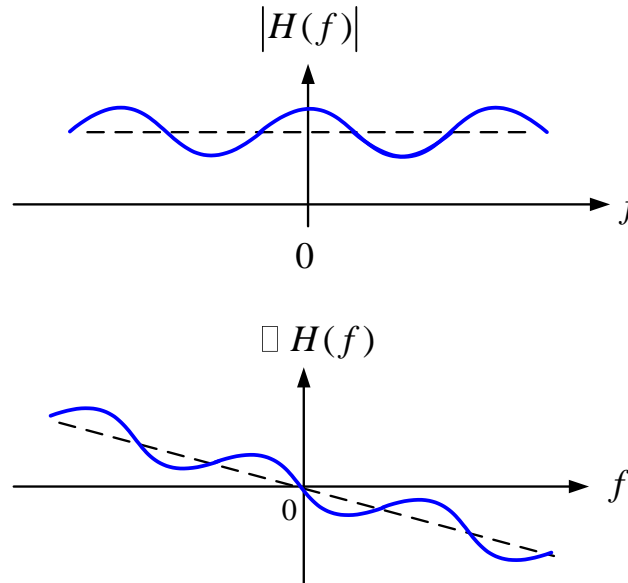
$$\begin{aligned}
 H(f) &= e^{-j2\pi f t_0} + A e^{-j2\pi f (t_0 + \Delta t)} \\
 &= e^{-j2\pi f t_0} (1 + A e^{-j2\pi f \Delta t}) \\
 &= e^{-j2\pi f t_0} (1 + A \cos(2\pi f \Delta t) - jA \sin(2\pi f \Delta t)) \\
 &= \sqrt{1 + A^2 + 2A \cos(2\pi f \Delta t)} \cdot \exp \left[-j \left\{ 2\pi f t_0 + \tan^{-1} \left(\frac{A \sin(2\pi f \Delta t)}{1 + A \cos(2\pi f \Delta t)} \right) \right\} \right] \\
 &= |H(f)| \cdot \exp[-j\angle H(f)]
 \end{aligned}$$



다중경로에 의한 왜곡

■ 다중경로 채널에 의한 왜곡 효과

- Subsystem 각각의 전달함수는 무왜곡 전송의 조건을 만족시키지만 전체 전달함수는 무왜곡 전송의 조건을 만족시키지 못한다. 결과적으로 선형 왜곡이 발생하여 펄스의 퍼짐 현상이 일어난다.
- 특히 위의 시스템에서는 주파수 응답의 진폭과 위상이 주파수 영역에서 주기 $1/\Delta t$ 의 주기 함수가 된다.



다중경로에 의한 왜곡

■ 다중경로 채널에 의한 왜곡 효과

- 위의 채널의 이득은 $1/2\Delta t$ 의 짝수 배 주파수에서 최대가 되며, $1/2\Delta t$ 의 홀수 배 주파수에서 최소가 된다.
- 두 개의 경로 이득이 동일하다면($A = 1$), 신호의 $1/2\Delta t$ 의 홀수 배 주파수 성분은 완전히 사라진다.
- 이와 같이 다중경로 채널에서는 주파수 성분에 따라 커지기도 하고 작아지기도 하는 현상이 발생하는데 이것을 주파수 선택적 페이딩(frequency selective fading)이라 한다.





ANY QUESTIONS?