역기구학(Inverse Kinematics)

역기구학(Inverse Kinematics)

- 작업자가 원하는 말단장치의 목표 위치와 방위를 만들어 낼 수 있는 관절변수 값 (q_i 또는 θ_i)를 찾아내는 문제
- 원하는 자세와 위치를 만들어 내기 위해 머니퓰레이터의 각 관절을 어떻게 제어해야 할 것인가에 대한 답을 찾는 과정
- 특정 관절변수 값에 의해서 만들어지는 머니퓰레이터 말단장치의 위치와 방위를 결정하는 정 기구학의 반대 개념

역 기구학

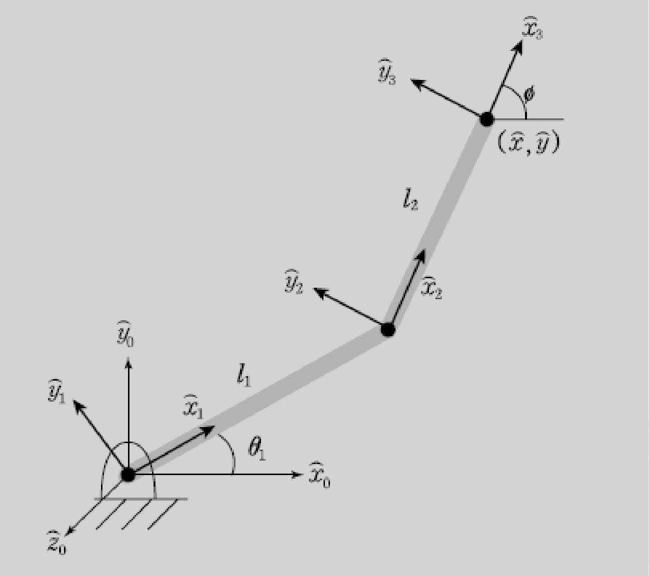
주어진 목표 위치 및 방위 ${}^{0}_{N}T = \begin{bmatrix} R & r \\ O_{1\times3} & 1 \end{bmatrix}$ 를 구현하는

관절변수 값 $q_1, q_2, \cdots, q_N$ 을 찾는 문제

목표 위치 구현을 위한 역 기구학

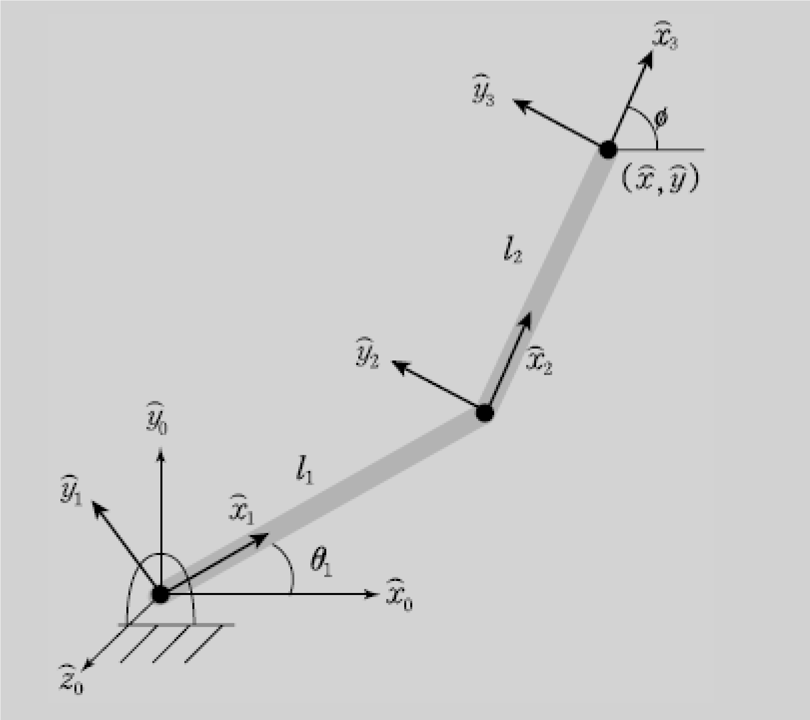
일반적 해법

- ${}^{0}_{N}T$ 행렬구성요소들의 함수 형태를 최대한 이용하여 구하고자 하는 관절변수들 q_i 를 고립시켜 구한 후 순차적으로 나머지 관절변수들의 값을 구함
- 간단한 머니퓰레이터 경우 머니퓰레이터의 기하학적 특성을 이용하여 관절변수 값을 쉽게 구할 수도 있음



$$\underbrace{{}^{0}_{2}T}_{given} = {}^{0}_{1}T\,{}^{1}_{2}T$$

목표 위치 구현을 위한 역 기구학



역 기구학 식

$$\underbrace{{}^{0}_{2}T}_{given} = {}^{0}_{1}T\,{}^{1}_{2}T$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{given} = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1c_1 + l_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1s_1 + l_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

목표 위치 구현을 위한 역 기구학

- **방법 I**
  - **역기구학의 위치정보를 이용하면** $x = l_1 c_1 + l_2 c_{12}$ $y = l_1 s_1 + l_2 s_{12}$

양변을 제곱하여 더하면 $x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 (c_1 c_{12} + s_1 s_{12}) = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2$

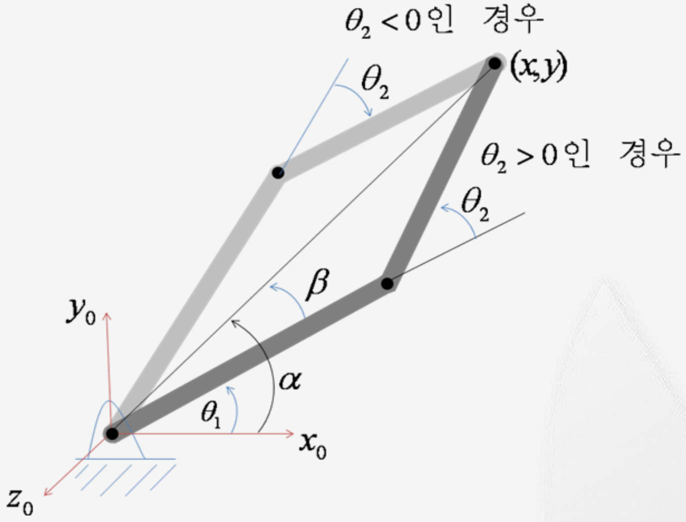
$\cos\theta_2$ 에 대해 정리하면 $\cos\theta_2 = \dfrac{x^2 + y^2 - (l_1^2 + l_2^2)}{2l_1 l_2}$

$\sin^2\theta_2 + \cos^2\theta_2 = 1$관계를 이용하면 $\sin\theta_2 = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta_2}$

$$\theta_2 = \operatorname{atan2}(\sin\theta_2, \cos\theta_2) = \operatorname{atan2}(\pm\sqrt{1 - \cos^2\theta_2}, \cos\theta_2)$$

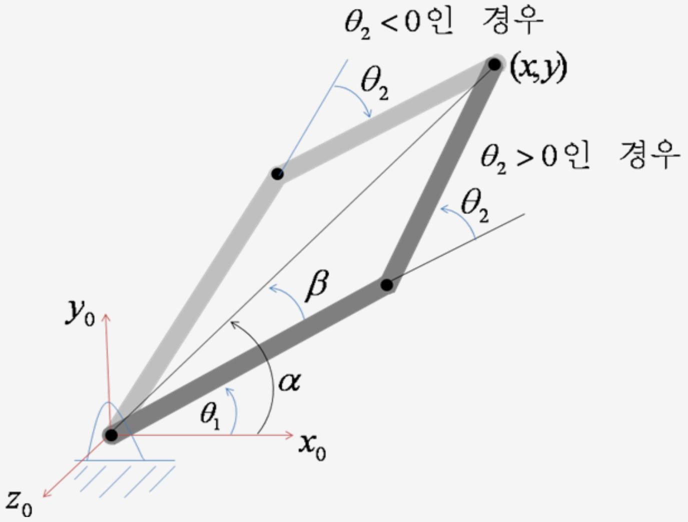
Found θ_2 !

$\sin\theta_2$ 의 양, 음 부호에 따라
θ_2 값도 두 개가 존재



역 기구학 해의 부호에 따라 가능한 두 가지 형상

목표 위치 구현을 위한 역 기구학



역 기구학 해의 부호에 따라 가능한 두 가지 형상

- 정기구학과 달리 역 기구학의 해는 유일하지 않을 수 있다!
- 수학적으로 해가 얻어졌다 하더라도 현실적으로 머니퓰레이터가 만들어 낼 수 있는 자세가 아닐 수도 있어 역 기구학의 해가 없을 수도 있다.

목표 방위 구현을 위한 역 기구학

- 임의의 위치에 임의의 방위를 갖도록 머니퓰레이터를 제어하기 위한 최소 자유도 : 6
- 처음 세 축: 위치 결정, 나머지 세 축: 방위 결정
- 일반적으로 방위결정을 위한 마지막 3축은 관절축이 한 점에서 교차하도록 구성
- **6자유도 머니퓰레이터 말단장치의 위치와 방위 표현식**

$$
\begin{aligned}
{}^0_6T &= {}^0_1T(\theta_1)\,{}^1_2T(\theta_2)\,{}^2_3T(\theta_3)\,{}^3_4T(\theta_4)\,{}^4_5T(\theta_5)\,{}^5_6T(\theta_6) \\
&= \underbrace{{}^0_3T(\theta_1,\theta_2,\theta_3)}\,\underbrace{{}^3_6T(\theta_4,\theta_5,\theta_6)}
\end{aligned}
$$

말단장치 위치를 결정하는 처음 세 관절의 변수 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$의 함수

말단장치의 방위를 결정짓는 마지막 세 관절의 관절변수 $\theta_4,\theta_5,\theta_6$의 함수1

How to find $\theta_1,\theta_2,\theta_3$?

How to find $\theta_4,\theta_5,\theta_6$?

목표 위치 구현을 위한 역 기구학

마지막 세관절의 관절변수 값을 구하는 역 기구학

$${}^{3}_{6}T(\theta_4,\theta_5,\theta_6) = \left({}^{0}_{3}T\right)^{-1}\,{}^{0}_{6}T$$

Both known, hence can be solved for $\theta_4,\theta_5,\theta_6$

방위에만 관련되므로

$${}^{3}_{6}R(\theta_4,\theta_5,\theta_6) = \underbrace{{}^{3}_{4}R\,{}^{4}_{5}R\,{}^{5}_{6}R}_{\text{세 번의 연속 회전}} = \left({}^{0}_{3}R\right)^{-1}\,{}^{0}_{6}R$$

오일러 각도법과 롤-피치-요
각도법에 의해 구현 가능

특정방위를 구현해 내는 관절각 $\theta_4,\theta_5,\theta_6$의 값을 구하는 역 기구학 문제

오일러 각도법과 롤-피치-요 각도법 적용

목표 위치 구현을 위한 역 기구학

마지막 세 관절의 관절변수 값을 구하는 역 기구학

목표 방위

$$
{}^{3}_{6}R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}
$$

목표 방위 구현을 위한 Z-Y-Z 오일러 각도법

$$
\begin{aligned}
{}^{3}_{6}R &= R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_Z(\gamma) \\
&= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

목표 위치 구현을 위한 역 기구학

β ?

A. 만약 $s\beta \neq 0$ 행렬의 (3,3) 요소를 이용하여 ➡ $\beta = a\tan 2(\pm\sqrt{1-r_{33}^2}, r_{33})$

β의 부호에 따라

$$\begin{cases} \beta = a\tan 2(\sqrt{1-r_{33}^2}, r_{33}) \text{인 경우} & \alpha = a\tan 2(r_{23}, r_{13}), \quad \gamma = a\tan 2(r_{32}, -r_{31}) \\ \beta = a\tan 2(-\sqrt{1-r_{33}^2}, r_{33}) \text{인 경우} & \alpha = a\tan 2(-r_{23}, -r_{13}), \quad \gamma = a\tan 2(-r_{32}, r_{31}) \end{cases}$$

B. 만약 $s\beta = 0$ $(\beta = 0, \pi)$

B.1 $\beta = 0$

회전행렬➔
$$\begin{bmatrix} c\alpha c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha s\gamma - s\alpha c\gamma & 0 \\ s\alpha c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha s\gamma + c\alpha c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\alpha+\gamma) & -s(\alpha+\gamma) & 0 \\ s(\alpha+\gamma) & c(\alpha+\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \gamma = a\tan 2(r_{21}, r_{11}) = a\tan 2(-r_{12}, r_{11})$$

➡ 1 eq. for 2 variables

➡ 무수히 많은 해가 존재

➡ $\alpha = 0$ 가정

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \gamma = a\tan 2(r_{21}, r_{11}) = a\tan 2(-r_{12}, r_{11}) \end{cases}$$

목표 위치 구현을 위한 역 기구학

B.2 $\beta = \pi$

회전행렬➔ $$\begin{bmatrix} -c\alpha c\gamma - s\alpha s\gamma & c\alpha s\gamma - s\alpha c\gamma & 0 \\ -s\alpha c\gamma + c\alpha s\gamma & s\alpha s\gamma + c\alpha c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\alpha-\gamma) & -\sin(\alpha-\gamma) & 0 \\ \sin(\alpha-\gamma) & \cos(\alpha-\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha - \gamma = a\tan 2(r_{21}, -r_{11}) = a\tan 2(-r_{12}, -r_{11})$$

➡ $\alpha = 0$ 가정

$$\begin{cases} \beta = \pi \\ \alpha = 0 \\ \gamma = -a\tan 2(r_{21}, -r_{11}) = -a\tan 2(-r_{12}, -r_{11}) \end{cases}$$