9장 그래프

순서

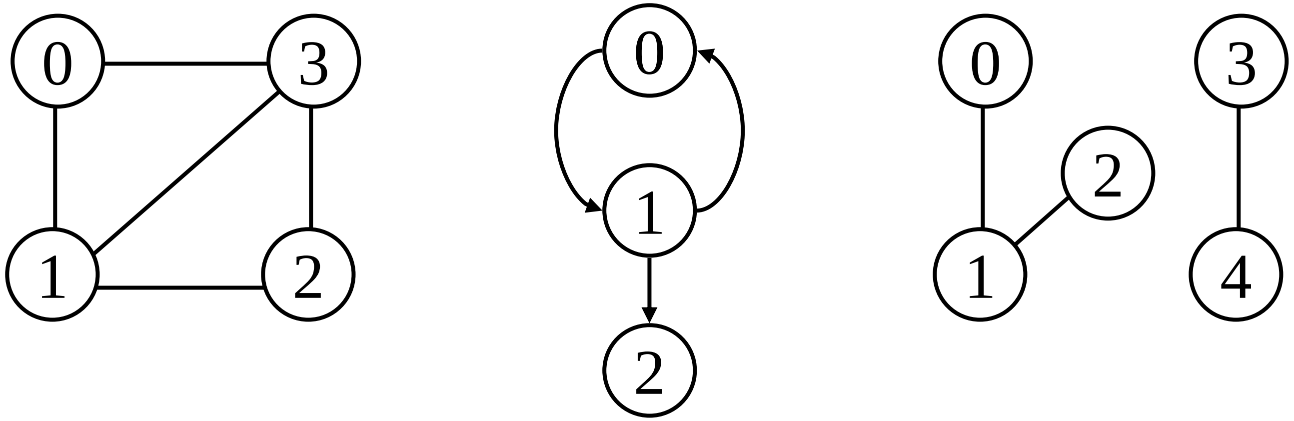
9.1 그래프 추상 데이터 타입

그래프 (Graph)

- 그래프(graph)의 정의
  - G = (V, E) : 그래프 G는 2개의 집합 V와 E로 구성
    - V : 공백이 아닌 노드 또는 정점(vertex)의 유한집합
      - V만 표현할 때는 V(G)로 표기
    - E : 상이한 두 정점을 잇는 간선(edge)의 유한집합
      - E만 표현할 때는 E(G)로 표기

- 무방향 그래프(undirected graph)
  - 간선을 표현하는 두 정점의 쌍에 순서가 없는 그래프
    - $(v_0, v_1) = (v_1, v_0)$
- 방향 그래프(directed graph)
  - 유방향 그래프 또는 다이그래프(digraph)
  - 간선을 표현하는 두 정점의 쌍에 순서가 있는 그래프
  - 간선을 아크(arc)라고도 함
  - $v_j \rightarrow v_k$를 $< v_j, v_k >$로 표현 (v_j는 꼬리(tail), v_k는 머리(head))
  - $< v_j, v_k > \neq < v_k, v_j >$

그래프 예



G_1 G_2 G_3

$V(G_1)=\{0, 1, 2, 3\}$ $E(G_1)=\{(0, 1), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

$V(G_2)=\{0, 1, 2\}$ $E(G_2)=\{<0, 1>, <1, 0>, <1, 2>\}$

$V(G_3)=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ $E(G_3)=\{(0, 1), (1, 2), (3, 4)\}$

그래프의 정점 집합(V)과 간선 집합(E)

단순 그래프와 완전 그래프

- 단순 그래프(simple graph)
  - 자기 루프(자신을 연결하는 루프)를 허용하지 않음
  - 두 정점 사이에 최대 하나의 간선만 존재

- (참고) 다중그래프(multigraph)는 두 정점 사이에 둘 이상의 간선이 허용
  - 일반적으로 그래프로 취급하지 않음

- 완전 그래프(complete graph)
  - 허용된 최대 수의 간선을 가진 그래프
  - 정점이 n개일 때, 간선의 수는

    무방향 그래프: n(n-1)/2 개, 방향 그래프: n(n-1) 개

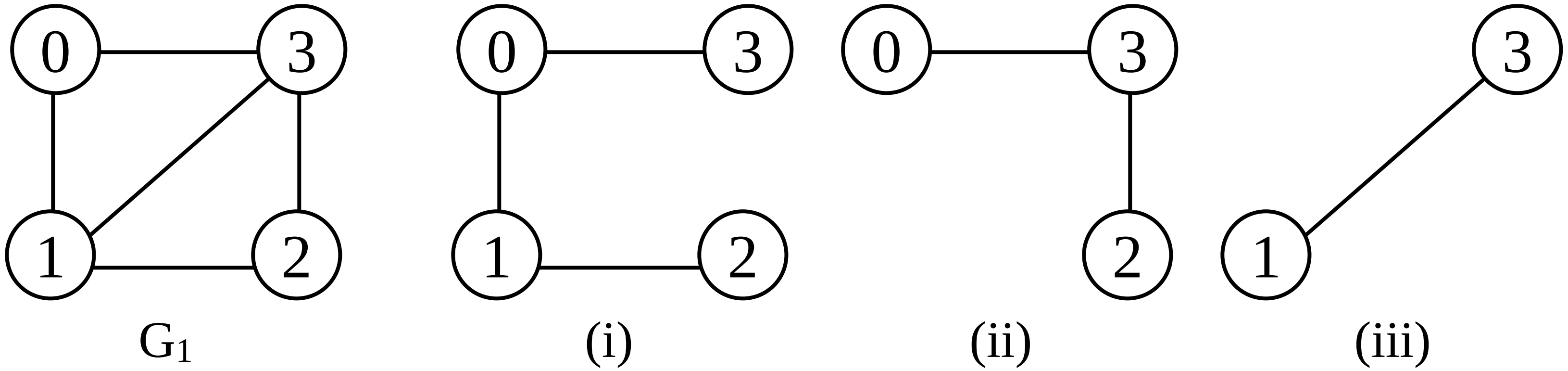
인접과 부속

- 무방향 그래프에서
  - 간선 (v_j, v_k)에 대해 정점 v_j와 v_k는 서로 인접(adjacent) 한다고 함
  - 간선 (v_j, v_k)는 정점 v_j와 v_k에 부속(incident)한다고 함
  - 예1) 그래프 G_1
    - 정점 1, 3 은 정점 0에 인접한다.
    - 간선 (0, 1), (1, 2), (1, 3) 은 정점 1에 부속한다.
  - 예2) 방향 그래프 G_2
    - 아크 <0, 1>, <1, 2>, <1, 0>은 정점 1에 부속한다.

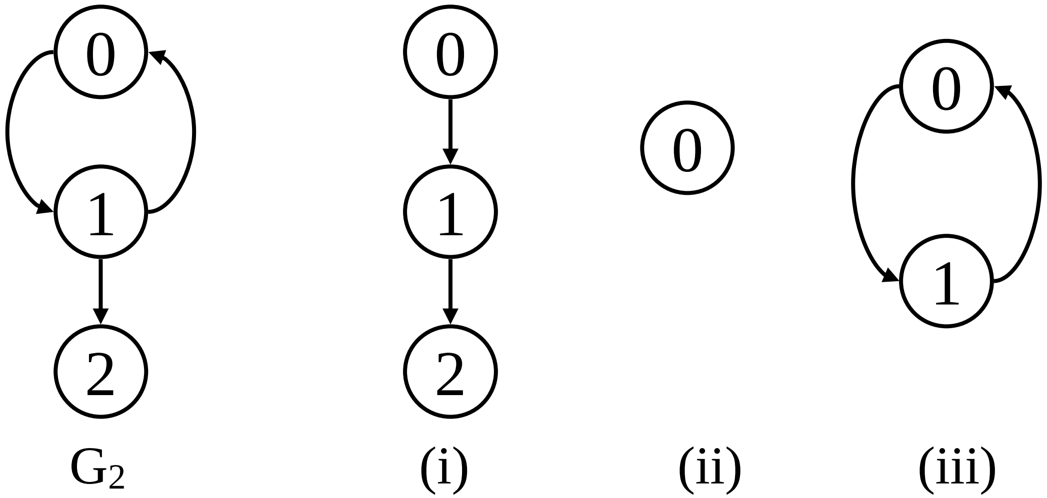
- 부분 그래프(subgraph)
  - 그래프 G의 부분 그래프 G′이라 하면

    $V(G') \subseteq V(G)$이고, $E(G') \subseteq E(G)$인 그래프

부분 그래프 예



그래프 G_1과 부분 그래프 예



그래프 G_2와 부분 그래프 예

경로

- 그래프 G에서의 정점 u로부터 v까지의 경로(path)
  - 간선으로 연결된 정점의 순서 리스트 u, v_1, v_2, …,v_k , v
  - 여기서 (u, v_1), (v_1, v_2), …, (v_k, v)는 그래프 G에 속한 간선
  - 방향 그래프에서는 방향 경로(directed path)라함
    - 아크로 연결

- 경로의 길이(path length)
  - 경로를 구성하는 간선의 수

- 단순 경로(simple path)
  - 모두 상이한 간선들로 구성된 경로
  - 예1) 그래프 G_1
    - 경로 0,1,3,2와 경로 0,1,3,1 : 길이는 모두 3
    - 첫번째 경로 : 단순 경로, 두 번째 경로 : 단순 경로가 아님
  - 예2) 그래프 G_2
    - 0,1,2 : 단순 방향 경로, 0,1,2,1 : 경로가 아님

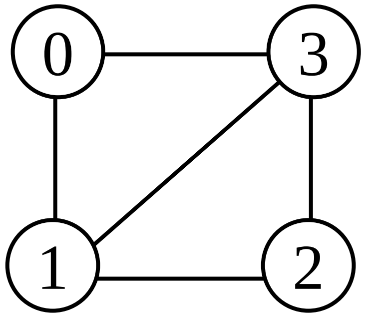
사이클 (Cycle)

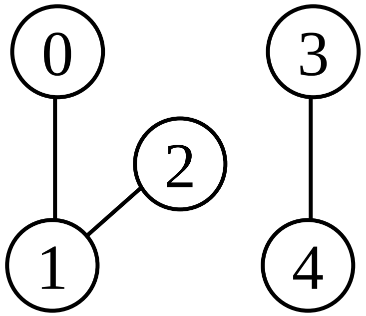
- 사이클(cycle)
  - 첫 번째 정점과 마지막 정점이 같은 단순 경로
    - 무방향 그래프에서 사이클의 길이 : 3 이상
    - 방향 그래프에서 사이클의 길이 : 2 이상
  - 예1) 무방향 그래프 G_1의 경로 0, 1, 3, 0 : 사이클
  - 예2) 방향 그래프 G_2의 경로 0, 1, 0 : 사이클

- DAG(directed acyclic graph)
  - 방향 그래프에서 사이클이 없는 그래프

연결 그래프

- 연결 그래프(connected graph)
  - 서로 다른 모든 쌍의 정점들 사이에 경로가 있는 무방향 그래프
  - 어느 한 정점에서부터 다른 어떤 정점에로의 경로 존재
  - 트리(tree) : 사이클이 없는 연결 그래프
  - 예1) 그래프 G_1 : 연결 그래프
  - 예2) 그래프 G_3 : 단절 그래프(disconnected graph)



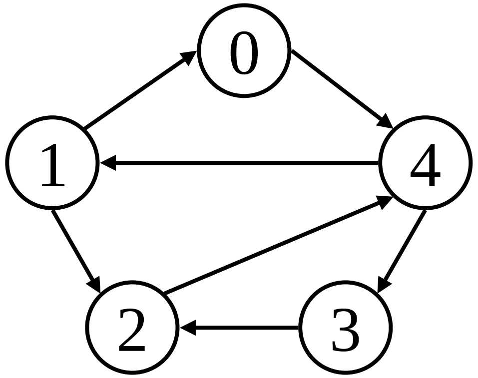


- 연결 요소(connected component) 또는 요소(component)
  - 최대 연결 부분 그래프(maximal connected subgraph)
  - 최대 : 최대 수의 정점과 최대 수의 간선
    - 연결 요소에는 정점을 더 추가하여 확장할 수 없음
  - 예) 그래프 G_3 : 정점 {0,1,2}와 {3,4}로 구성된 2개의 연결 요소

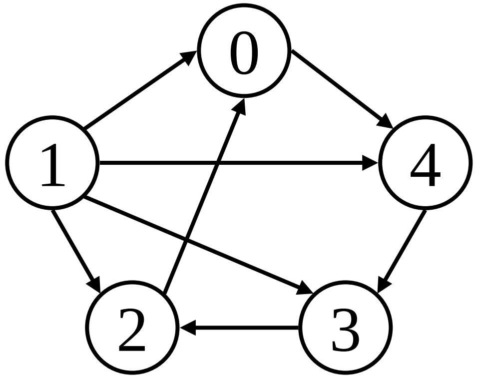
연결 그래프

- 강력 연결(strongly connected)
  - 방향 그래프 G에서 V(G)에 있는 서로 다른 모든 정점의 쌍 u와 v에 대해 u에서 v, 그리고 v에서 u까지의 방향 경로가 존재
- 약한 연결(weakly connected)
  - 방향 그래프 G에서 V(G)에 있는 서로 다른 모든 정점의 쌍 u와 v에 대해 u에서 v까지, 또는 v에서 u까지 어느 하나의 경로만 존재
- 강력 연결 요소(strongly connected component)
  - 강력 연결된 최대 부분 그래프
    - G2는 두 개의 강력 연결 요소를 가짐

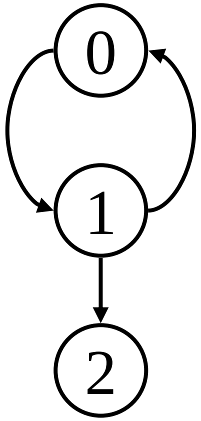
연결 그래프 예



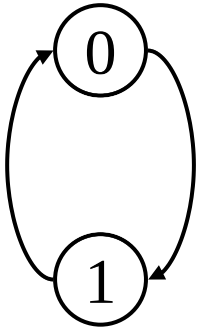
강력 연결 그래프 G_4



약한 연결 그래프 G_5



G_2



(i)

(ii)

G_2의 두 강력 연결 요소

차수 (Degree)

- 무방향 그래프의 정점
  - 정점의 차수(degree) : 그 정점에 부속된 간선의 수
    - 예) 그래프 G_3에서 정점 0의 차수: 1, 정점 1의 차수: 2

- 방향 그래프의 정점 v에 대해
  - 진입 차수(indegree) : 방향 그래프에서 정점 v를 머리로 하는 간선의 수
  - 진출 차수(outdegree) : 방향 그래프에서 정점 v를 꼬리로 하는 간선의 수
  - 선행자(predecessor) : 정점 v를 머리로 하는 간선들의 정점(v_i)들, $<v_i,v>$
  - 후속자(successor) : 정점 v를 꼬리로 하는 간선들의 정점(v_k) 들 $<v,v_k>$
  - 예) 그래프 G_2
    - 정점 0의 진입 차수 = 진출 차수 = 1
    - 정점 1의 진입 차수 =1, 진출 차수 =2

인접 집합

- n개의 정점, e개의 간선으로 된 그래프 G에서 정점 i의 차수를 degree(i)라 할 때,

$$e = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \text{degree}(i)\right)/2$$

- 그래프 G에서 각 정점 u에 대한 인접 집합(adjacency set), adjacency(u)

$$\text{adjacency}(u) = \{v \mid (u, v) \in E(G)\}$$

그래프 추상 데이타 타입

```
ADT Graph
   데이타 : 공백이 아닌 정점(vertex)의 유한집합(V)과 간선(edge)의
            집합(E). 여기서 간선은 두 정점의 쌍.
   연산 : G ∈ Graph,  u, v ∈ V;
      createG() ::= create an empty graph;
      insertVertex(G, v) ::= insert vertex v into G;
      insertEdge(G, u, v) ::= insert edge (u, v) into G;
      deleteVertex(G, v) ::= delete vertex v and all edges incident on v from G;
      deleteEdge(G, u, v) ::= delete edge (u, v) from G;
      isEmpty(G) ::= if G has no vertex then return true, else return false;
      adjacent(G, v) ::= return set of all vertices adjacent to v;
End Graph
```

9.2 그래프 표현

그래프 표현

- 그래프 표현 방법
  - 인접 행렬(adjacency matrix)
  - 인접 리스트(adjacency list)
  - 인접 다중 리스트(adjacency multilist)

- 그래프에서 수행하려는 연산과 응용에 따라 표현 방법을 선택

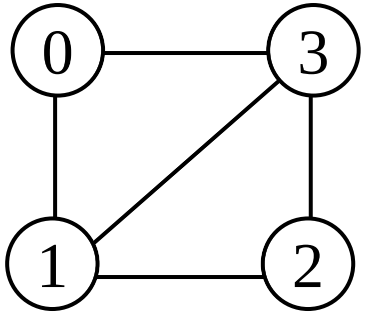
인접 행렬(1)

- 인접 행렬(adjacency matrix)
  - n≥1개의 정점을 가진 그래프 G = (V, E)에 대해, 크기가 n x n인 2차원 배열 a[n,n]로 표현

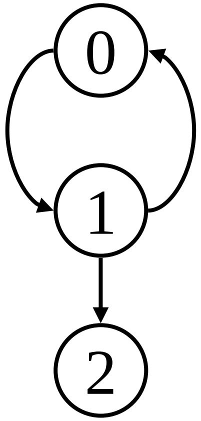
$$a[i, j] = \begin{cases} 1, & (i, j) \in E(G) \\ 0, & (i, j) \notin E(G) \end{cases}$$

  - **부속 행렬**(incidence matrix)이라고도 함
  - 인접 행렬로 표현하는데 필요한 공간 : n^2 비트
    - 무방향 그래프에서 행렬은 대칭이기 때문에 행렬의 상위 삼각이나 하위 삼각만 저장한다면 거의 반 정도의 공간을 절약
  - 인접 행렬의 정보
    - 간선이나 아크의 존재 여부
    - 무방향 그래프 인접 행렬에서 행 i 의 합은 정점 i 의 차수
    - 방향 그래프 인접 행렬에서 행 i의 합은 정점 i의 진출 차수, 열 i의 합은 정점 i의 진입 차수

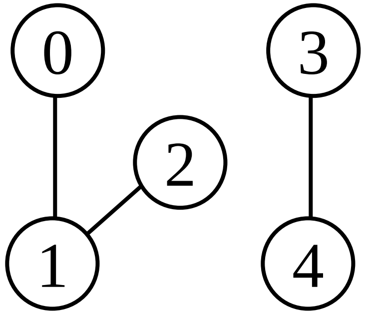
인접 행렬(2)



G_1



G_2



G_3

	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	0	1	0	1
[1]	1	0	1	1
[2]	0	1	0	1
[3]	1	1	1	0

a[4, 4]

	[0]	[1]	[2]
[0]	0	1	0
[1]	1	0	1
[2]	0	0	0

a[3, 3]

	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	0	1	0	0	0
[1]	1	0	1	0	0
[2]	0	1	0	0	0
[3]	0	0	0	0	1
[4]	0	0	0	1	0

a[5, 5]

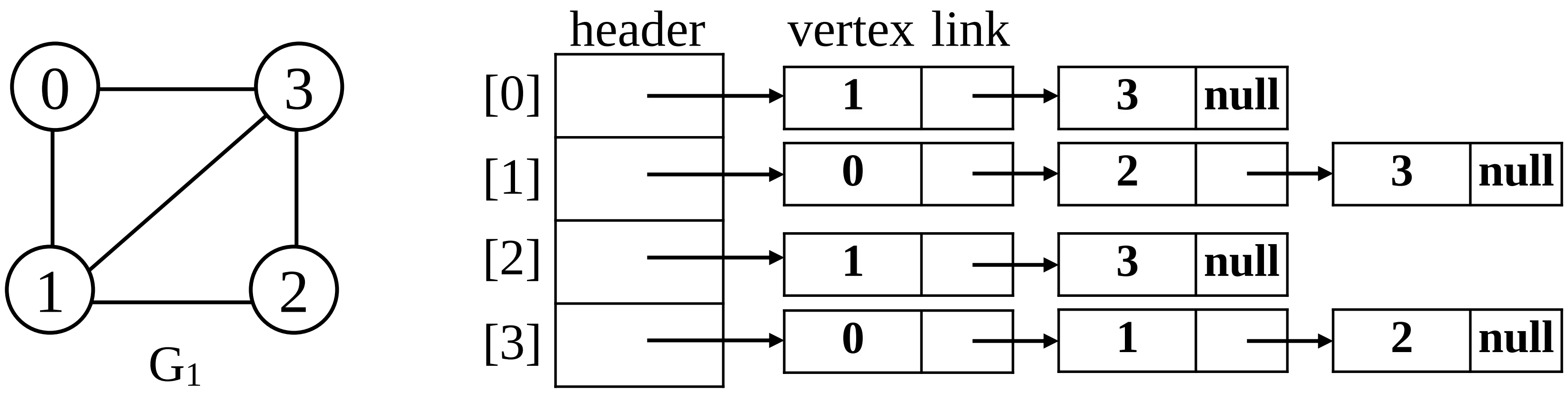
그래프 G_1, G_2, G_3에 대한 인접 행렬 표현

인접 리스트 – 연결 리스트 (1)

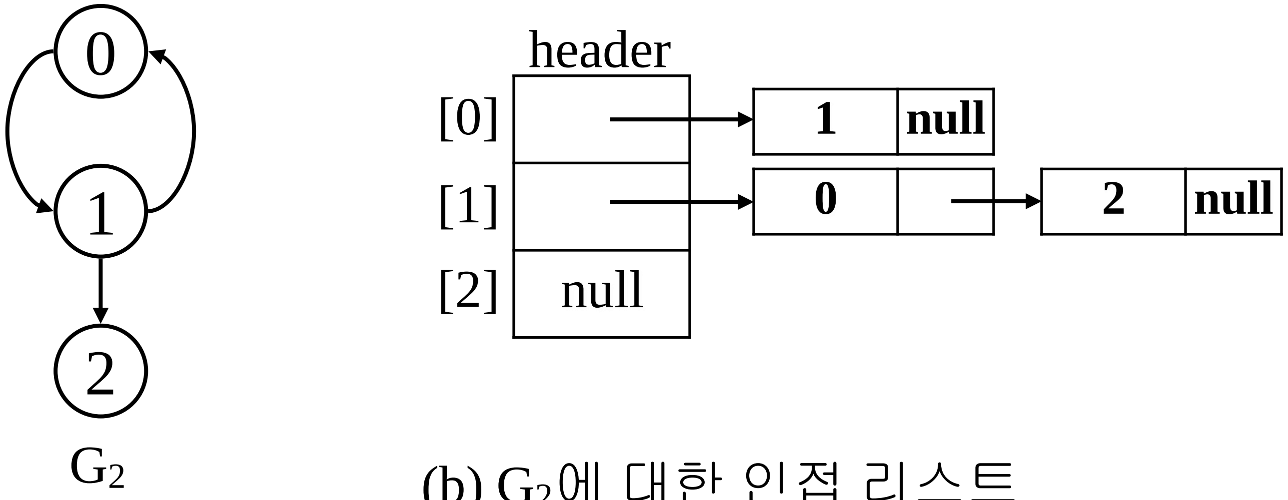
- 인접 리스트(adjacency list)
  - n개의 정점 각각에 대해 인접한 정점들을 리스트로 만듦
  - 인접 리스트의 구현
    - 연결 리스트
    - 순차 표현

- 연결 리스트로 구현한 인접 리스트
  - 각 정점의 리스트 : 헤더 노드와 vertex, link 필드를 가진 리스트 노드로 구성
  - n개의 정점과 e개의 간선(아크)을 가진 그래프에서
    - 무방향 그래프는 n개의 헤더 노드와 2e개의 리스트 노드가 필요
      - 하나의 간선은 두 번씩 중복 저장
    - 방향 그래프는 n개의 헤더 노드와 e개의 리스트 노드가 필요

인접 리스트 – 연결 리스트 (2)



(a) G_1에 대한 인접 리스트



(b) G_2에 대한 인접 리스트

인접 리스트 – 순차 표현 (1)

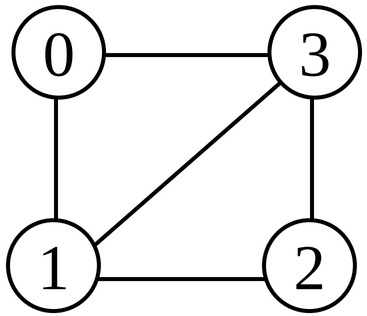
- 순차 표현(배열 vertex[ ])으로 구현한 인접 리스트
  - 각 정점 별로 인접 노드들을 순차적으로 배열에 저장
  - n개의 정점과 e개의 간선을 가진 그래프:

    배열 vertex[n+2e+1]로 표현
  - vertex[i] :

    정점 i, 0≤i<n에 대한 인접 리스트가 시작되는 배열의 인덱스
  - vertex[n] :

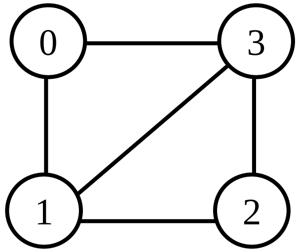
    배열의 크기, (n+2e+1)를 저장
  - 정점 i에 인접한 정점들을 순차로 저장

    vertex[vertex[i]], …, vertex[vertex[i +1]-1], 0≤i<n에 저장



인접 리스트 – 순차 표현 (2)

- 그래프 G1에 대한 순차 표현



vertex	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]	[13]	[14]
	5	7	10	12	15	1	3	0	2	3	1	3	0	1	2

리스트 시작과
배열 크기 정보

인접 정점 정보

- vertex[4]에는 배열 vertex[] 크기 15(∵n=4, e=5)를 저장
- vertex[0]에는 정점 0에 대한 인접 리스트가 시작되는 인덱스 5를 저장 :
  - vertex[5], vertex[6]에는 각각 두 인접 정점 1과 3을 저장
- vertex[1]에는 정점 1에 대한 인접 리스트가 시작되는 인덱스 7을 저장
  - vertex[7], vertex[8], vertex[9]에는 각각 인접 정점 0, 2, 3을 저장

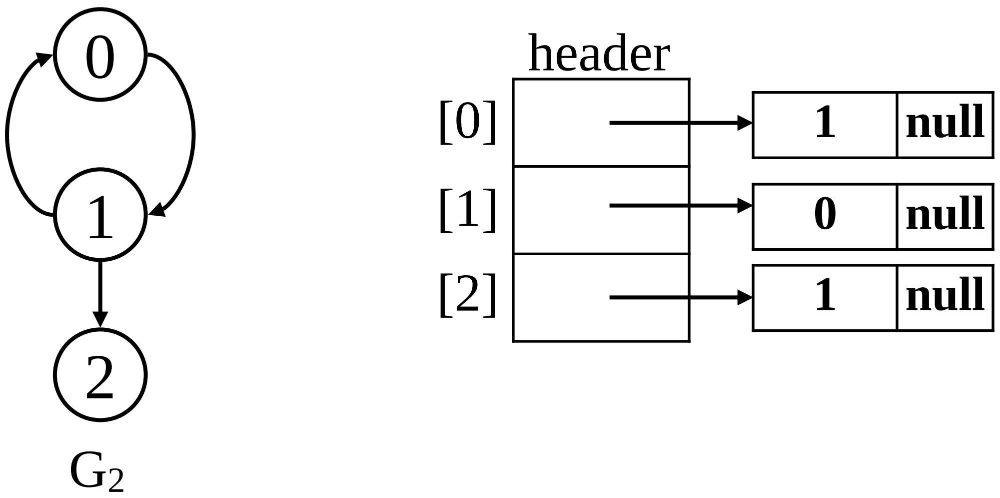
인접 리스트

- 무방향 그래프의 인접 리스트에서 각 정점의 차수
  - 정점에 부속된 간선의 수
  - 정점(헤더)의 인접 리스트에 연결된 노드 수
  - 전체 간선 수 계산에 걸리는 시간 : O(n+e)

- 방향 그래프의 인접 리스트에서 각 정점의 차수
  - 진출 차수: 정점(헤더)에 연결된 인접 리스트의 노드 수
  - 진입 차수: 인접 리스트로부터 진입 차수는 계산이 복잡하므로, 역 인접 리스트를 별도로 유지

- 역 인접 리스트(inverse adjacency list)
  - 각 정점 i에 대해, 정점 i로 진입하는 모든 정점들을 포함시킨 리스트

역 인접 리스트



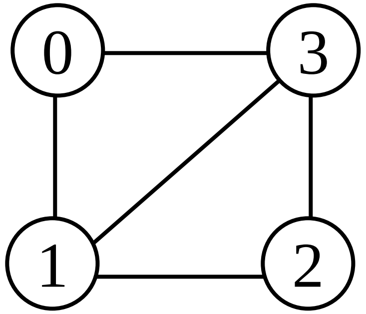
그래프 G_2에 대한 역 인접 리스트

인접 다중 리스트(1)

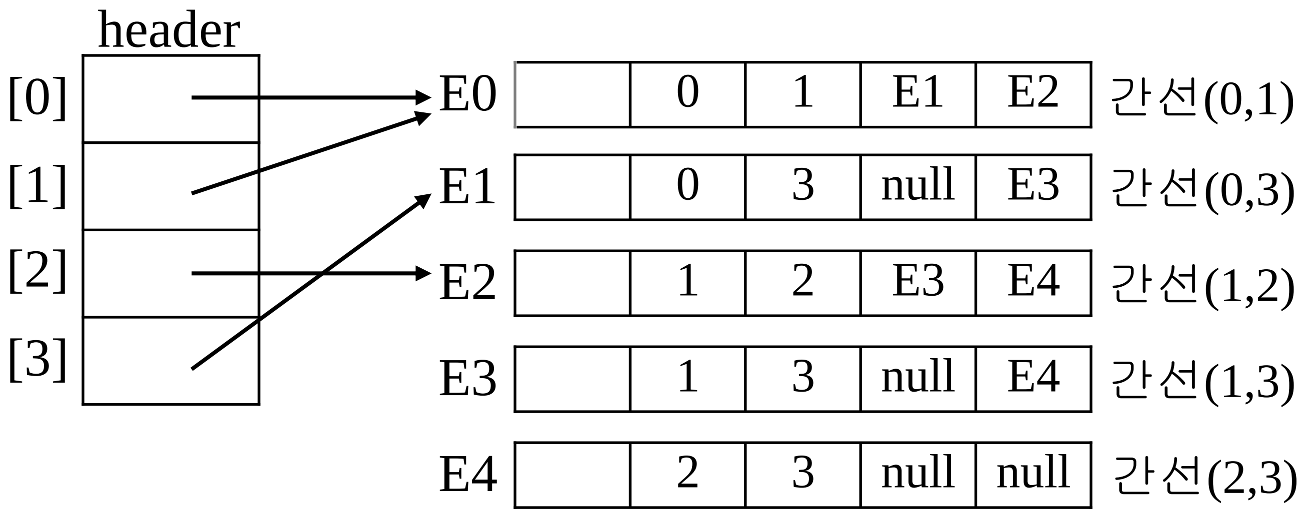
- 인접 다중 리스트(adjacency multilist)
  - 인접 리스트를 다중 리스트(multilist)로 표현
  - 다중 리스트
    - 노드들을 여러 리스트들이 공용하는 리스트
    - 특정 간선에 대해 이미 접근했는지를 표시하는 데 편리
  - 간선의 두 정점 각각에 대해 인접 정점들을 리스트로 유지
    - 하나의 간선을 두 개의 리스트가 공유
  - 간선 (i, j)를 표현하는 노드 구조
    - M : 간선을 이미 접근했었는지 여부를 표시하는 마크 비트
    - i-link, j-link : 각 정점 i, j에 대한 인접 리스트의 링크

M	i	j	i-Link	j-Link

인접 다중 리스트(2)



G_1



G_1에 대한 인접 다중 리스트

인접 다중 리스트(3)

- G1에 대한 인접 다중 리스트의 식별
  - 정점 0의 경우
    - 정점 0의 헤더로부터 노드 E0를 따라감
    - 노드 E0에서 정점 0을 포함한 필드 = i   i-link를 따라 E1으로 감
    - 노드 E1의 첫 번째 i 필드가 정점 0 포함   다시 i-link를 따라감
    - 이 때 링크 값이 널   여기서 리스트가 끝남
  - 위의 방법으로 정점 0의 인접 정점들을 모두 식별

정점 0 : E0 → E1
정점 1 : E0 → E2 → E3
정점 2 : E2 → E4
정점 3 : E1 → E3 → E4

9.3 그래프 순회

그래프 순회

- 그래프 순회(graph traversal)
  - 주어진 어떤 정점을 출발하여 체계적으로 그래프의 모든 정점들을 순회하는 것

- 그래프 순회의 종류
  - 깊이 우선 탐색(DFS: Depth First Search)
  - 너비 우선 탐색(BFS: Breadth First Search)

- 그래프 순회의 응용
  - 연결 요소(connected component)의 탐색
  - 신장 트리(spanning tree)의 구축

깊이 우선 탐색(1)

- 깊이 우선 탐색(depth first search : DFS) 방법
  (1) 정점 i를 방문한다.
  (2) 정점 i에 인접한 정점 중에서 아직 방문하지 않은 정점이 있으면, 이 정점들을 모두 스택에 저장한다.
  (3) 스택에서 정점을 삭제하여 새로운 i를 설정하고, 단계 (1)부터 다시 수행한다.
  (4) 스택이 공백이 되면 연산을 종료한다.

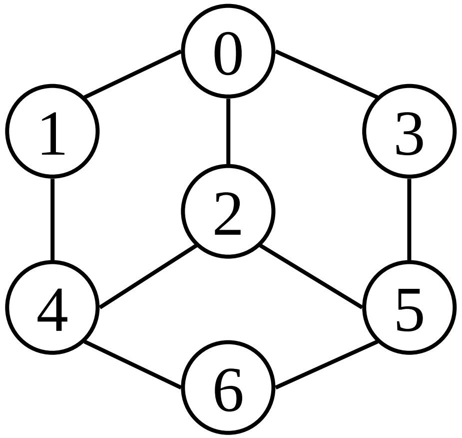
- 정점 방문 여부의 표시 방법
  - 배열 visited[n]을 이용하여 표현

$$\text{visited}[i] = \begin{cases} \text{true}, & \text{방문하였음} \\ \text{false}, & \text{방문하지 않았음} \end{cases}$$

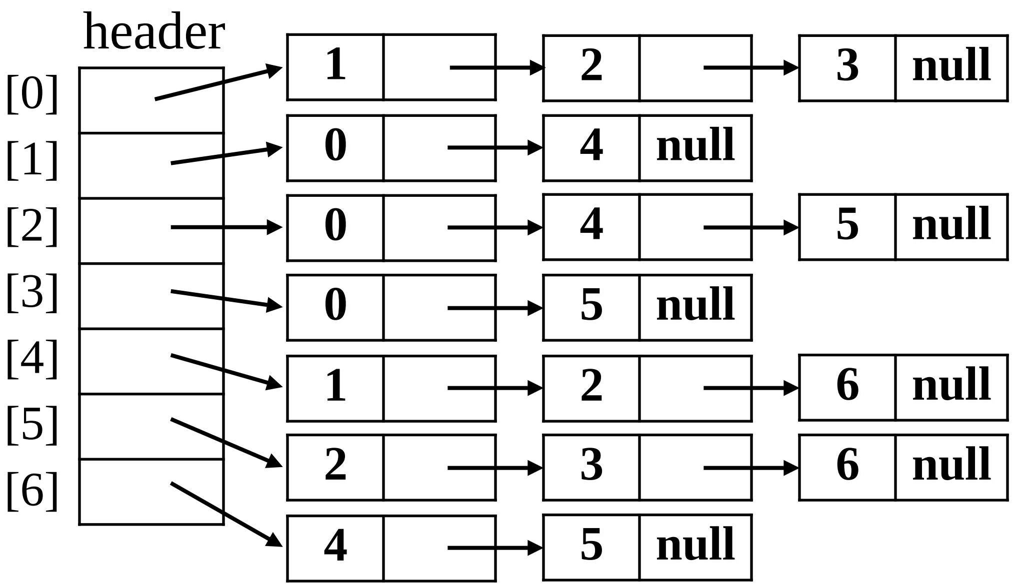
깊이 우선 탐색 알고리즘

```
DFS(i)
    // i 는 시작 정점
    for (i ← 0; i < n; i ← i +1) do {
        visited[i] ← false;              // 모든 정점을 방문하지 않은 것으로 마크
    }

    createStack();                       //방문할 정점을 저장하는 스택

    push(Stack, i);                      // 시작 정점 i를 스택에 저장

    while (not isEmpty(Stack)) do {      // 스택이 공백이 될 때까지 반복 처리
        j ← pop(Stack);

        if (visited[j] = false) then {   //정점 j를 아직 방문하지 않았다면
            visit j;                     // 직접 j를 방문하고
            visited[j] ← true;           // 방문 한 것으로 마크

            for (each k ∈ adjacency(j)) do {  // 정점 j에 인접한 정점 중에서
                if (visited[k] = false) then   // 아직 방문하지 않은 정점들을
                    push(Stack, k);            // 스택에 삽입
            }
        }
    }
end DFS()
```

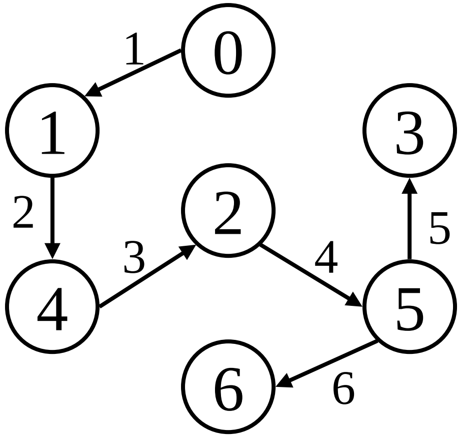
깊이 우선 탐색 예



탐색을 위한 그래프 G



그래프 G에 대한 인접 리스트 표현



그래프 G에 대한
깊이 우선 탐색 경로

너비 우선 탐색(1)

- 너비 우선 탐색(breadth first search ; BFS) 방법
  (1) 정점 i를 방문한다.
  (2) 정점 i에 인접한 정점 중에서 아직 방문하지 않은 정점이 있으면, 이 정점들을 모두 큐에 저장한다.
  (3) 큐에서 정점을 삭제하여 새로운 i를 설정하고, 단계 (1)부터 다시 수행한다.
  (4) 큐가 공백이 되면 연산을 종료한다.

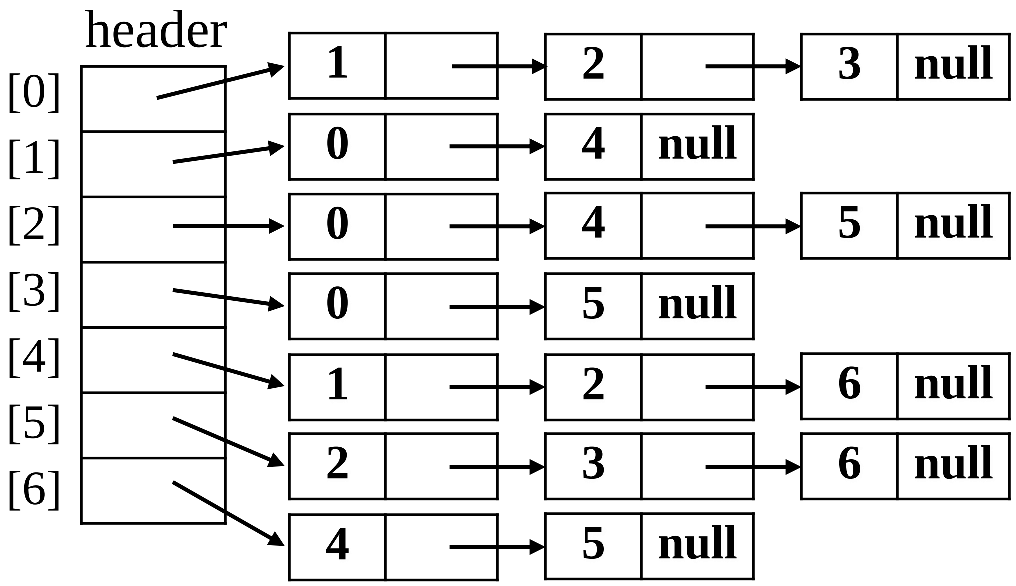
- 정점 방문 여부의 표시 방법
  - 깊이 우선 탐색과 마찬가지로 배열 visited[n]을 이용

$$\text{visited}[i] = \begin{cases} \text{true}, & \text{방문하였음} \\ \text{false}, & \text{방문하지 않았음} \end{cases}$$

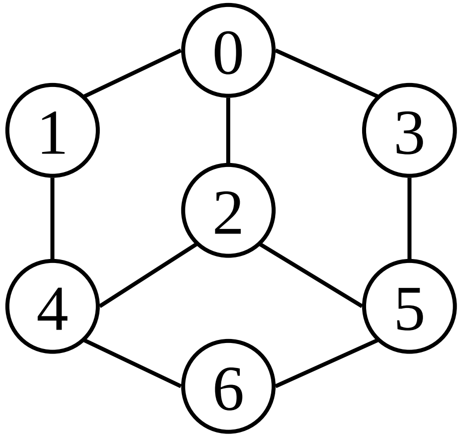
너비 우선 탐색(2)

```
BFS(i)
    // i는 시작 정점
    for (i←0; i<n; i ←i+1) do {
        visited[i] ← false;     // 모든 정점을 방문하지 않은 것으로 마크
    }
    visited[i] ← true;
    createQ();     // 방문할 정점을 저장하는 큐
    enquere(Q, i);
    while (not isEmpty(Q)) do {  //큐가 공백이 될 때까지 반복 처리
        j ← dequeue(Q);
        if (visited[j] = false) then {
            visit j;
            visited[j] ← true;   //방문한 것으로 표시
        }
        for (each k ∈ adjacency(j)) do {   //정점 j에 인접한 정점 중에서
            if (visited[k] = false) then {  //아직 방문하지 않은 정점을
                enqueue(Q, k);    //큐에 삽입
            }
        }
    }
end BFS()
```

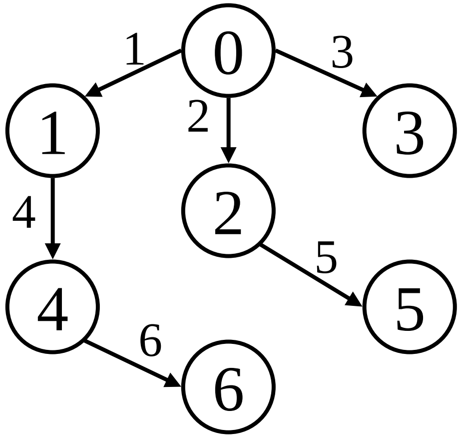
너비 우선 탐색(3)



그래프 G에 대한 인접 리스트 표현



탐색을 위한 그래프 G



그래프 G에 대한
너비 우선 탐색 경로

연결 요소(1)

- 연결 그래프 여부의 판별
  - DFS나 BFS 알고리즘으로 판별 가능
  - 무방향 그래프 G에서 하나의 정점 i에서 시작하여

    DFS(or BFS)로 방문한 노드집합 V(DFS(G, i))가

    V(G)와 같으면 G는 연결 그래프.

    V(DFS(G, i)) = V(G) : 연결 그래프, 하나의 연결 요소
    V(DFS(G, i))⊂ V(G) : 단절 그래프, 둘 이상의 연결 요소

- 연결 요소 찾기
  - 정점 i에 대해 DFS (or BFS)를 수행
  - 둘 이상의 연결 요소가 있는 경우, 나머지 정점 j에 대해 DFS(or BFS)를 반복 수행

연결 요소(2)

- DFS로 연결 요소를 찾는 알고리즘

```
dfsComponent(G, n)     // G=(V,E), n은 G의 정점 수
    for (i←0; i <n; i ← i +1) do {
        visited[i] ← false;
    }
    for (i ←0; i <n; i ← i +1) do {
        // 모든 정점 0, 1, …, n-1에 대해 연결 요소 검사
        if (visited[i] = false) then {
            print(“new component”);
            DFS(i);   // 정점 i가 포함된 연결 요소를 탐색
        }
    }
end dfsComponent()
```

  - DFS(i)를 BFS(i)로 대체해도 무방

트리 간선 (tree edge)

- G가 연결 그래프일 때
  - DFS나 BFS는 G의 모든 정점을 방문
  - G의 간선은 방문에 사용한 간선들과 사용하지 않은 간선들로 나뉨
  - 이 방문에 사용한 간선을 **트리 간선**(tree edge)이라 함

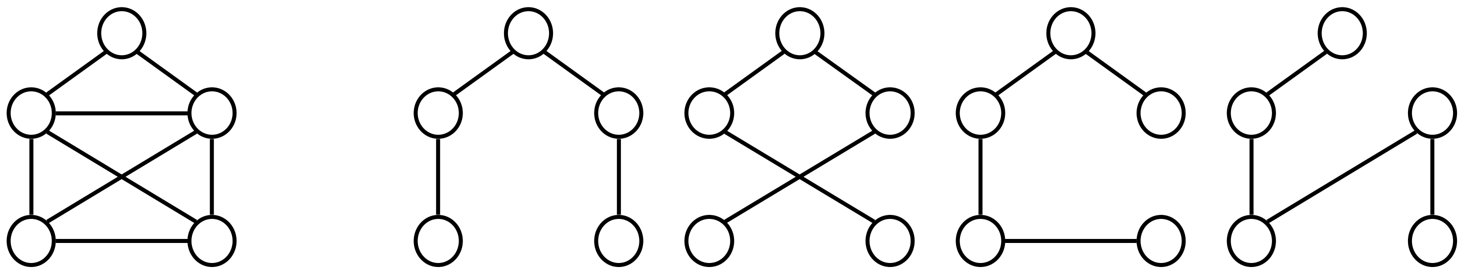
- 방문에 사용된 간선 (j, k)의 집합을 T라 할 때
  - DFS와 BFS 알고리즘의 for속의 if-then 절에 명령문

    $T \leftarrow T \cup \{(j, k)\}$을 삽입시켜 구할 수 있음
  - T에 있는 간선들을 전부 결합시키면 그래프 G의 모든 정점들을 포함하는 트리가 됨.

    이것을 **신장 트리**(spanning tree)라 함

신장 트리(1)

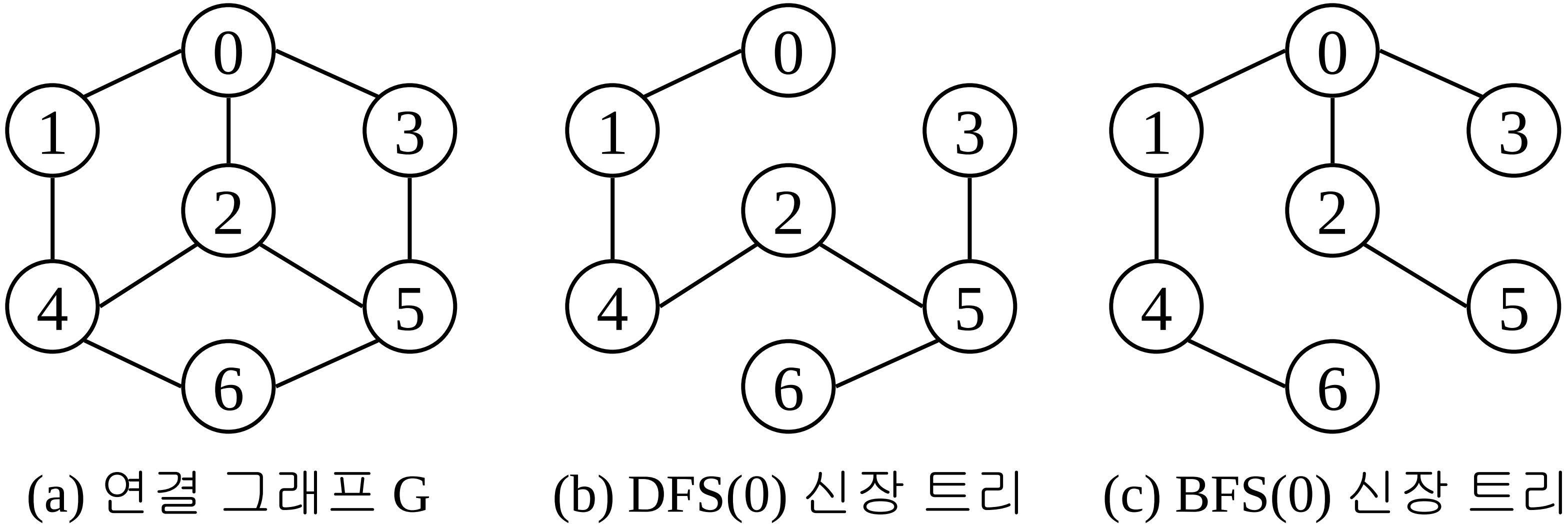
- 신장 트리(spanning tree)
  - 그래프 G에서 E(G)에 있는 간선과 V(G)에 있는 모든 정점들로 구성된 트리
  - DFS, BFS에서 사용된 간선 집합 T는 그래프 G의 신장 트리를 의미
  - 주어진 그래프 G에 대한 신장 트리는 유일하지 않음



(a) 연결 그래프 G (b) 신장 트리

신장 트리(2)

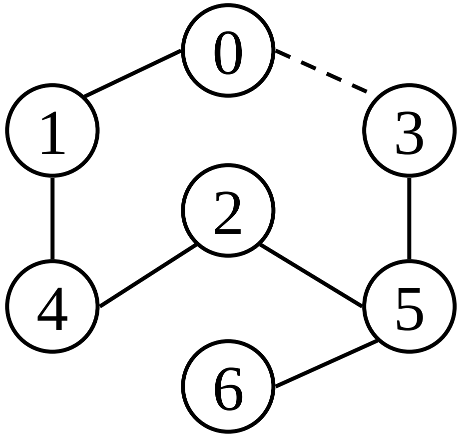
- 신장 트리의 종류
  - 깊이 우선 신장 트리(depth first spanning tree) : DFS 사용
  - 너비 우선 신장 트리(breadth first spanning tree) : BFS 사용



연결 그래프 G와 신장 트리

신장 트리(3)

- 비트리 간선(nontree edge) 집합(NT)
  - 신장 트리에 사용되지 않은 간선들의 집합
  - NT에 있는 임의의 간선 (i, j)를 신장 트리 T에 첨가시키면 사이클이 만들어져 더 이상 트리가 되지 않음
  - 예) DFS(0) 신장 트리
    - 간선 (0, 3) 첨가 : 0, 1, 4, 2, 5, 3, 0으로 구성된 사이클 형성



최소 연결 부분 그래프

- 최소 연결 부분 그래프(minimal connected subgraph)
  - G의 부분 그래프 G′ 중 다음 조건을 만족하는 그래프

(1) $V(G') = V(G)$
(2) $E(G') \subseteq E(G)$
(3) G′ 는 연결 그래프
(4) G′ 는 최소의 간선 수를 포함

  - 신장 트리는 최소 연결 부분 그래프로서, n-1개의 간선을 가짐
    - n개의 정점을 가진 그래프는 정확히 n-1개의 간선이 필요
    - n-1개의 간선을 가진 연결 그래프는 트리
  - 응용 : 통신 네트워크 설계
    - 도시간 네트워크 설계에서 최소 링크 수를 구하는 데 사용