통신공학

2강. 신호의 시간 영역 분석

정보통신공학과 손경락

CONTENTS

- 신호 해석을 위한 기초 용어
- 신호의 유형 분류
- 신호의 기본 연산
- 신호 해석에 많이 사용되는 기본 함수
- 선형 시스템
- 상관 함수

시간 평균, 직류값, 실효값

- **시간 평균** (time average)

$$\langle [\cdot] \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [\cdot]dt$$

- **직류값** (dc value)

$$x_{\mathrm{dc}} = \langle x(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$$

  - **유한 시구간 $t_1 \le t \le t_2$에서의 직류값**

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x(t)dt$$

  - **주기 신호의 직류값**

$$x_{\mathrm{dc}} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)dt\,, \quad t_0\text{는 임의}$$

시간 평균, 직류값, 실효값

- **실효값**(RMS **값**: root mean square value)

$$x_{rms} = \sqrt{\langle |x(t)|^2 \rangle} = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt}$$

  - **주기 신호의 경우**

$$x_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{T} |x(t)|^2 dt}$$

전력과 에너지

- **전력** (power)**: 전기 회로의 경우**
  - **부하의 소비 전력**
    - **순간 전력** (instantaneous power)

$$p(t) = v(t)i(t)$$

      - **부하가 저항 값** R**을 가진 저항이라면**

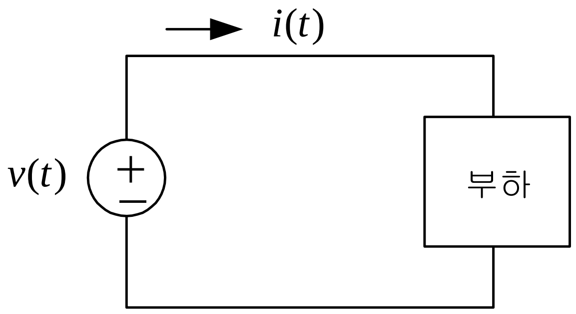
$$p(t) = v(t)i(t) = i^2(t)R = \frac{v^2(t)}{R}$$

      - **만일** R = 1 ohm**이라면**

$$p(t) = i^2(t) = v^2(t)$$

    - **평균 전력**(average power)

$$P = \langle p(t) \rangle = \langle v(t)i(t) \rangle$$



전력과 에너지

- **전력** (power): **신호 해석의 경우**
  - **신호 해석에서는 정규화된**(normalized) **전력의 개념 사용**
  - **즉, 저항 값이** $R = 1\Omega$**이라고 가정한 전력의 정의가 사용됨**
    - **통신/신호처리에서는 신호나 잡음의 절대 전력이 중요한 것이 아니라 신호전력 대 잡음전력의 비**(Signal to Noise Ratio: SNR)**가 중요하다. 따라서** SNR **산출에서 저항 값이 상쇄되므로 정규화된 전력을 사용해도 된다.**
  - **신호** x(t)**의 전력**
    - **순간 전력** (instantaneous power)

$$p(t) = x^2(t)$$

    - **평균 전력** (average power)

$$P = \langle |x(t)|^2 \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

전력과 에너지

- **평균 전력과 실효값의 관계**

$$x_{\mathrm{rms}} = \sqrt{P}, \quad P = x_{rms}^2$$

- **에너지**(energy)

$$E = \lim_{T \to \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

데시벨

- **데시벨**(decibel)
  - **두 전력의 비율**(ratio)**을 로그 값으로 표현한 것**
  - **예: 입력의 전력 레벨 대 출력의 전력 레벨의 비율**
- **[정의] 데시벨 이득** (decibel gain)

$$\mathrm{dB} = 10\log\left(\frac{P_{\mathrm{out}}}{P_{\mathrm{in}}}\right)$$

  - **여기서** Pin**은 입력의 평균 전력이고,** Pout**은 출력의 평균 전력**
  - **데시벨 이득을 신호의** rms **값으로 표현하면**

$$\mathrm{dB} = 20\log\left(\frac{x_{\mathrm{rmsout}}}{x_{\mathrm{rmsin}}}\right)$$

  - **만일** dB **값을 알고 있다면 입력과 출력의 전력비는 다음과 같이 구할 수 있다.**

$$\frac{P_{\mathrm{out}}}{P_{\mathrm{in}}} = 10^{\mathrm{dB}/10}$$

데시벨

- Example
  - 3 dB 이득
    - 출력신호의 전력이 입력신호 전력의 2배
    - 출력신호의 전압이 입력신호 전압의 1.414배
  - -3 dB 이득
    - 출력신호의 전력이 입력신호 전력의 0.5배
    - 출력신호의 전압이 입력신호 전압의 0.707배
  - 6 dB 이득
    - 출력신호의 전력이 입력신호 전력의 4배
    - 출력신호의 전압이 입력신호 전압의 2배

데시벨

- dBm
  - 1 mW에 대한 데시벨 전력 레벨
  - 기준 전력을 고정시킴으로써 dBm은 절대 전력을 표현하게 됨

$$\mathrm{dBm} = 10\log\left(\frac{\text{actual power level (watts)}}{10^{-3}}\right) = 30 + 10\log(\text{actual power level (watts)})$$

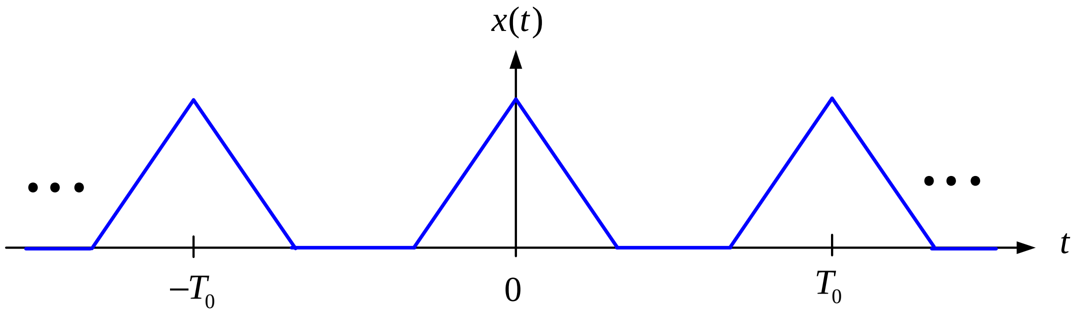
- 절대 전력을 나타내는 다른 데시벨 척도
  - dBW: 1 W에 대한 데시벨 전력 레벨
  - dBk: 1 kW에 대한 데시벨 전력 레벨

- 예: $5\ \mathrm{W} = 7\ \mathrm{dBW} = 37\ \mathrm{dBm} = -23\ \mathrm{dBk}$

주기와 주파수

- **주기**(period)
  - T **초마다 동일한 파형 반복**

$$x(t+T)=x(t)$$

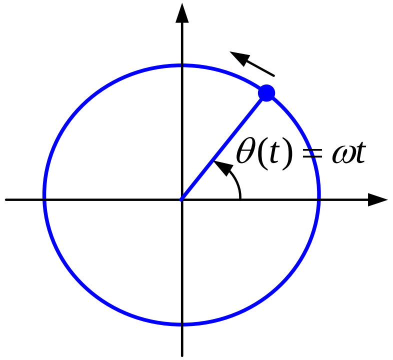


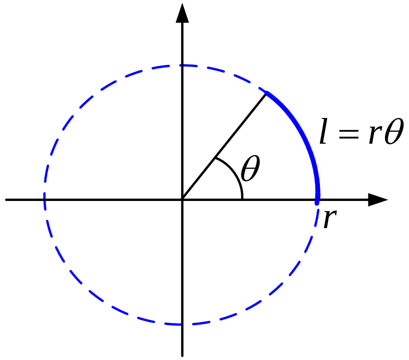
- **주파수**(frequency): $f=\frac{1}{T}$ [Hz]
  - 1 **초마다 동일한 파형이** 1/T **번 반복**

주기와 주파수

- **각주파수**(angular frequency)
  - **원주 상을 등속도로 회전하는 경우** : $\theta(t) = \omega t$
  - **주기가 T 라면** $\theta(T) = \omega T = 2\pi$
  - **각속도/각주파수**: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ [rad/sec]
  - **주기, 주파수, 각주파수의 관계**

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f,\ fT = 1,\ \omega T = 2\pi$$





- 신호 해석을 위한 기초 용어
- 신호의 유형 분류
- 신호의 기본 연산
- 신호 해석에 많이 사용되는 기본 함수
- 선형 시스템
- 상관 함수

신호의 유형

- 신호의 유형 분류
  - 연속시간 신호와 이산시간 신호
  - 아날로그 신호와 디지털 신호
  - 주기 신호와 비주기 신호
  - 에너지 신호와 전력 신호
  - 결정 신호와 랜덤 신호

연속시간 신호와 이산시간 신호

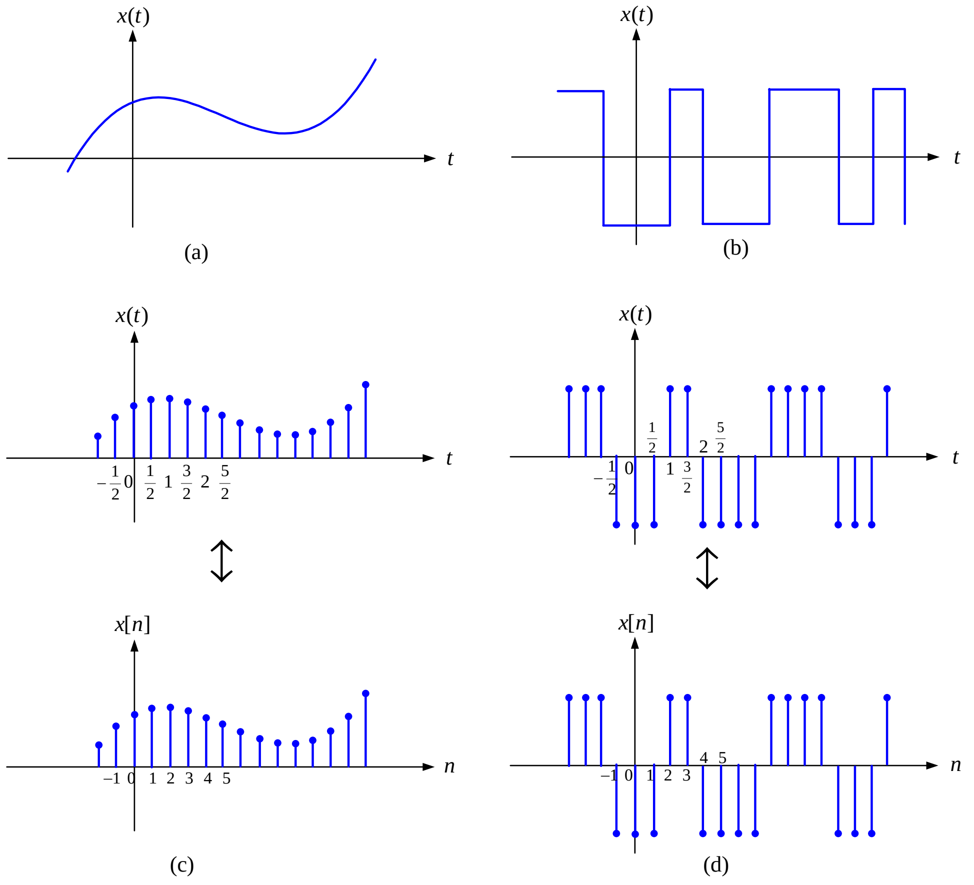
- **연속시간**(CT) **신호** $x(t)$**와 이산시간**(DT) **신호** $x[n]$
  - **독립변수인 시간이 연속적인 값을 갖는지 이산적인 값을 갖는지에 의하여 구분**
  - CT **신호** $x(t)$: **독립변수** t**는 연속적인 시간축 상의 위치를 나타냄**
  - DT **신호** $x[n]$: **독립변수** n**은 불연속적인 혹은 이산적인 시간축 상의 위치(시간 인덱스)를 의미**
    - n은 integer**로서 시간 자체가 아니라 단위 시간**(T_s)**이** n**번 지난 후의 시간(즉** $t = nT_s$**)을 나타낸다.**
    - **그러므로** t**의 단위는 초**(sec)**이나,** n**은 정수값을 갖는 인덱스로서 단위는 없다.**
  - Sampling: CT **신호를** DT **신호화**
    - Sampling **간격을** T_s **로 하는 경우**

$$x[n] = x(t)\Big|_{t=nT_s} = x(nT_s)$$

아날로그 신호와 디지털 신호

- **아날로그 신호와 디지털 신호**
  - Analog 신호: 신호의 크기가 연속적인 범위에서 어떠한 값도 가질 수 있는 경우
  - Digital 신호: 신호 크기가 유한한 이산적인 값만 가질 수 있는 경우
    - 디지털 신호 중에서 두 개의 준위(level) 만을 갖는 신호를 이진(binary) 신호라 하며, M 개의 준위를 갖는 신호를 M진(M-ary) 신호라 한다.
  - Quantization(양자화): 아날로그 신호를 디지털 신호화

신호의 분류



(a) **연속시간, 아날로그**

(b) **연속시간, 디지털**

(c) **이산시간, 아날로그**

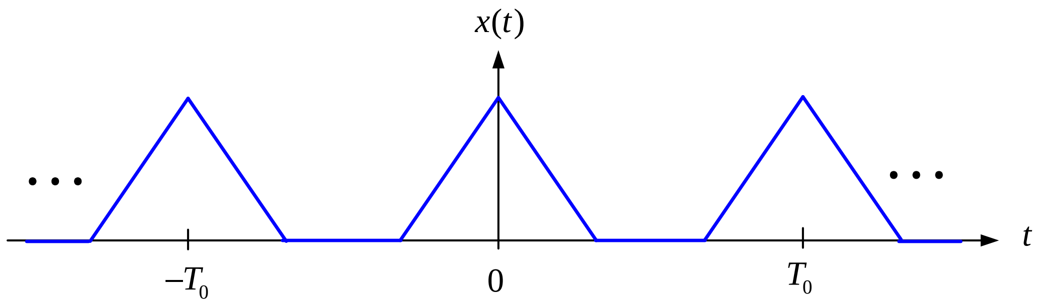
(d) **이산시간, 디지털**

주기 신호와 비주기 신호

- Periodic signal with period T

$$x(t) = x(t + T)$$

  - **어떤 신호가 주기** T**를 가진 주기 신호라면, 이 신호는 또한 주기** mT(**m은 자연수**)**를 가진 주기 신호가 된다.**
  - **기본주기**(fundamental period) T_0: minimum period
  - **기본주파수**(fundamental frequency) $f_0 = \frac{1}{T_0}$ [Hz]



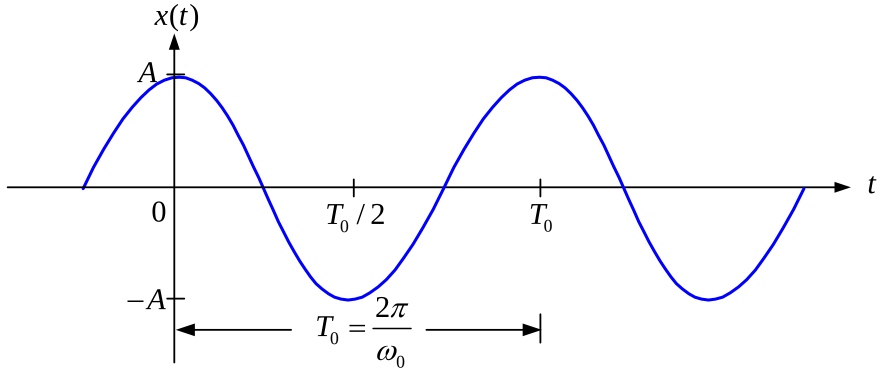
- Aperiodic (nonperiodic) signal: **주기신호가 아닌 신호**

주기 신호

- **정현파**(sinusoidal) **신호: 대표적인 주기 신호**

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t)$$

  - **기본주기**: $T_0 = 2\pi/\omega_0$
  - **기본주파수**: $f_0 = 1/T_0 = \omega_0/2\pi$ [Hz], $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi f_0$ [rad/sec]



- **주기신호의 평균 전력**

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt$$

에너지 신호와 전력 신호

- Energy Signal if

$$0 < E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

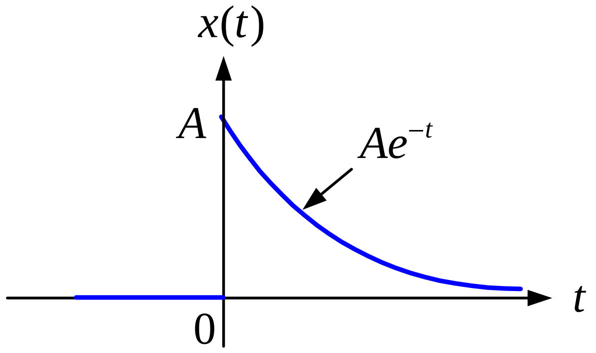
- Power Signal if

$$0 < P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty$$

- Note
  - **에너지 신호의 전력은 0이다.**
  - **전력 신호의 에너지는 ∞이다.**
  - **에너지 신호도 아니고 전력 신호도 아닌 신호가 존재한다.**
  - (**예**: $x(t) = t$ or $x(t) = e^t$)
  - **주기 신호는 전력 신호이다.**

에너지 신호와 전력 신호

- Example



(a)

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{0}^{\infty} A^2 e^{-2t} dt = \frac{A^2}{2}, \qquad 0 < E < \infty \;\Rightarrow\; \text{Energy signal}$$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T/2} A^2 e^{-2t} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[-\frac{A^2}{2} e^{-2t} \right]_0^{T/2} = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T} = 0 \Rightarrow \text{Not power signal}$$

에너지 신호와 전력 신호

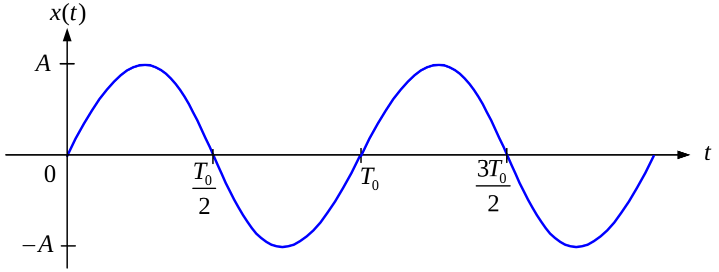
- Example

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{0} A^2 dt + \int_{0}^{\infty} A^2 e^{-2t} dt = \infty \quad \Rightarrow \text{Not energy signal}$$

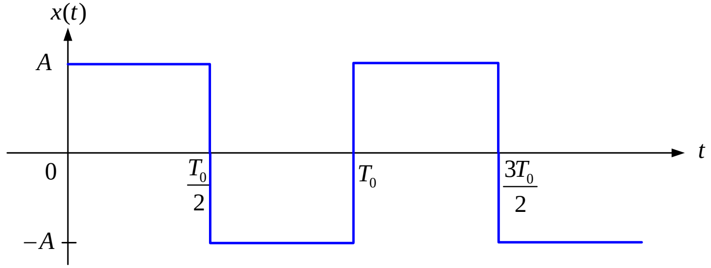
$$\begin{aligned} P &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{0} A^2 dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T/2} A^2 e^{-2t} dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} A^2 \frac{T}{2} + 0 = \frac{A^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{Power signal} \end{aligned}$$

에너지 신호와 전력 신호

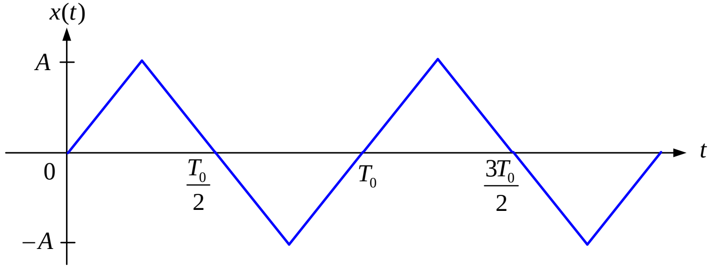
- Example: **평균전력을 구하라**



$$P=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}A^2\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)dt=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\frac{A^2}{2}\left\{1-\cos\left(\frac{4\pi t}{T_0}\right)\right\}dt=\frac{A^2}{2}$$



$$P=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{0}(-A)^2dt+\frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0/2}A^2dt=\frac{A^2}{2}+\frac{A^2}{2}=A^2$$



$$P=\frac{4}{T_0}\int_{0}^{T_0/4}\left(\frac{4At}{T_0}\right)^2dt=\frac{A^2}{3}$$

결정 신호와 랜덤 신호

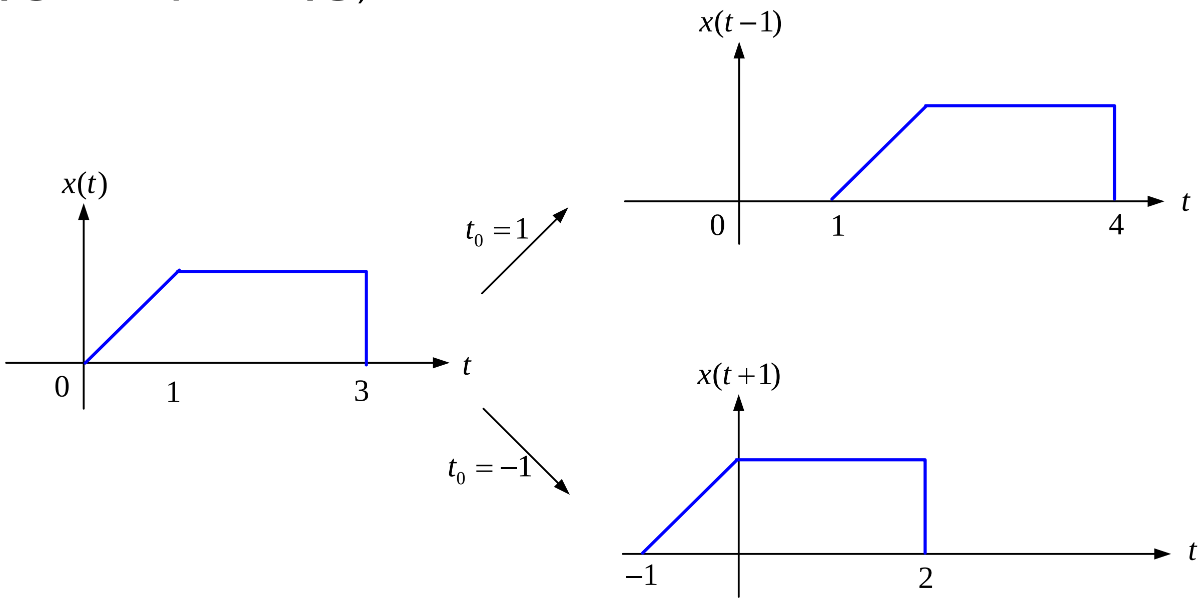
- Deterministic Signal
  - **신호를 표현함에 있어서 불확실성이 없어서 수식이나 그래픽 형태로 신호에 대한 물리적인 기술을 완전히 할 수 있는 신호**
  - **예**: $x(t) = 10\cos(20\pi t + \pi/6)$

- Random Signal
  - **신호의 파라미터에 불확실성이 있어서 확률적으로만 표현할 수 있는 신호**
  - **예**: $x(t) = 10\cos(20\pi t + \theta)$ with θ a random variable dstributed in $(0,2\pi)$

- 신호 해석을 위한 기초 용어
- 신호의 유형 분류
- 신호의 기본 연산
- 신호 해석에 많이 사용되는 기본 함수
- 선형 시스템
- 상관 함수

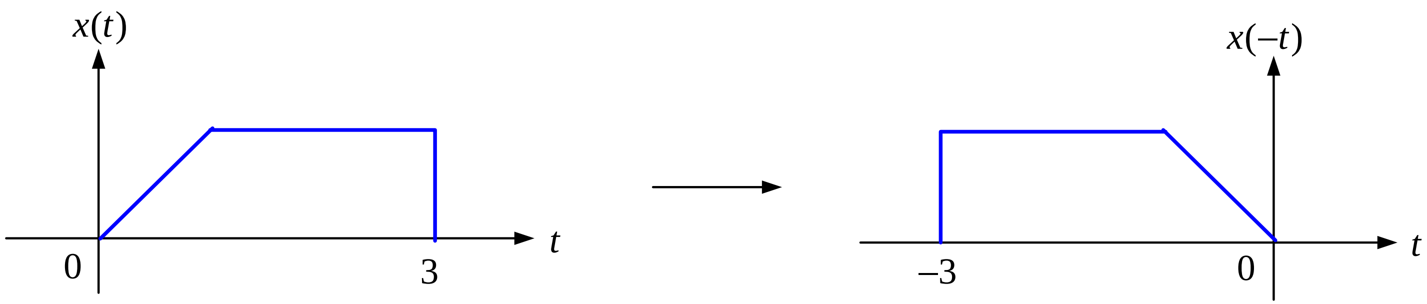
신호의 기본 연산

- **시간 천이** (time shift): $x(t - t_0)$
  - **신호를 시간축 상에서 t_0 만큼 오른쪽으로 이동**
  - $t_0 > 0$: time delay
  - $t_0 < 0$: time advance (**파형은 왼쪽으로 이동**)



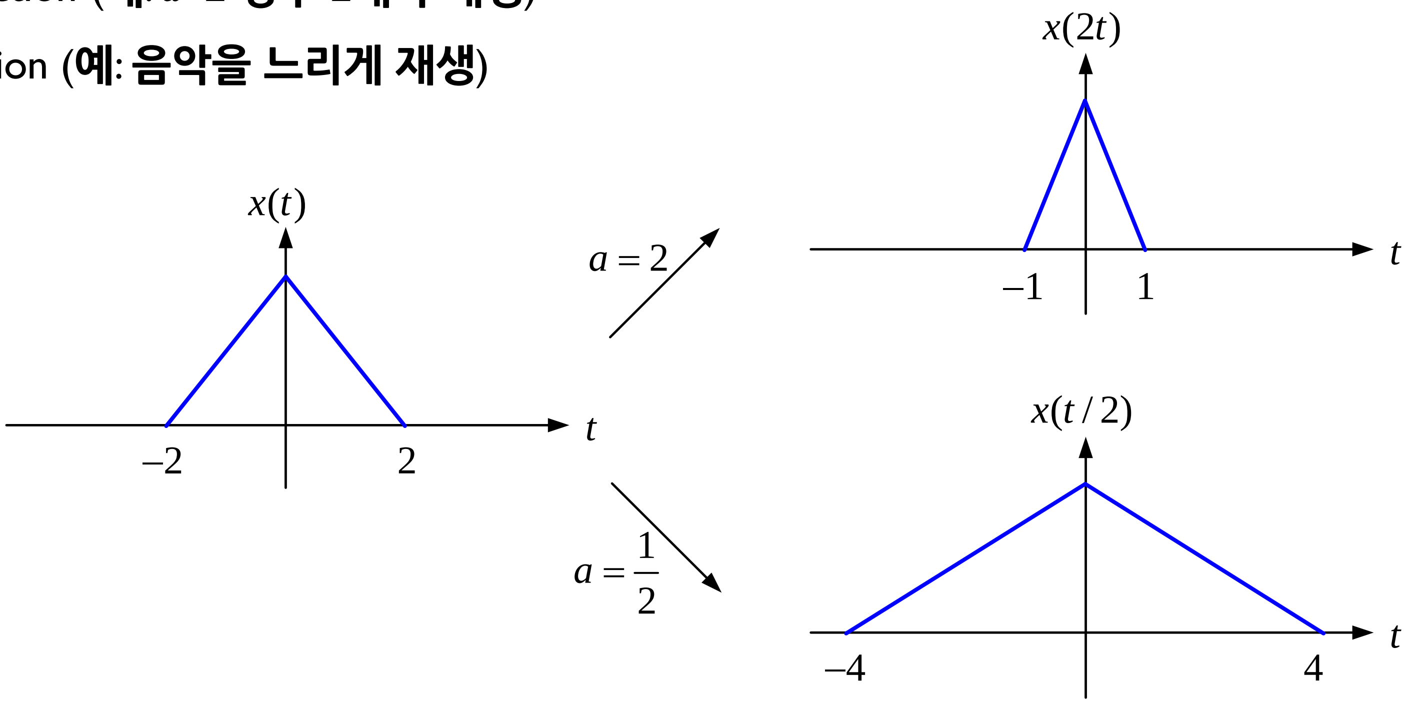
신호의 기본 연산

- Time Reversal: $x(-t)$
  - mirror image
  - **음반에 녹음된 음악을 반대 방향으로 재생시키는 것과 같은 조작**



신호의 기본 연산

- Time Scaling: $x(at)$
  - $|a| > 1$: contraction (**예**: a=2 **경우 2배속 재생**)
  - $|a| < 1$: expansion (**예**: **음악을 느리게 재생**)

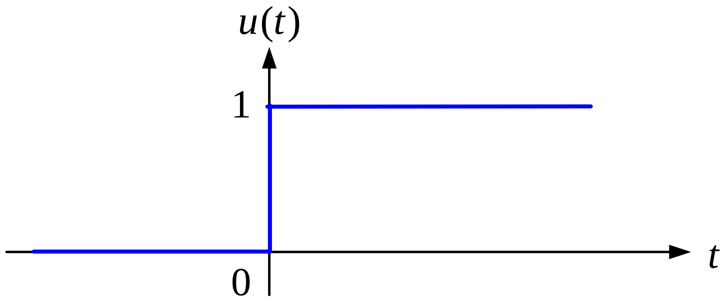


- 신호 해석을 위한 기초 용어
- 신호의 유형 분류
- 신호의 기본 연산
- 신호 해석에 많이 사용되는 기본 함수
- 선형 시스템
- 상관 함수

STEP FUNCTION

- **정의**: Unit Step Function

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



- **사용**
  - **전기회로의 분석에서 전원이 갑자기 가해지거나 제거되는 스위치 동작을 표현하는데 사용**
  - **신호의 분석에서 시구간의 일부를 절사**(truncate)**한 파형을 표현하는데 사용**

$$x(t)u(t), x(t)u(-t)$$

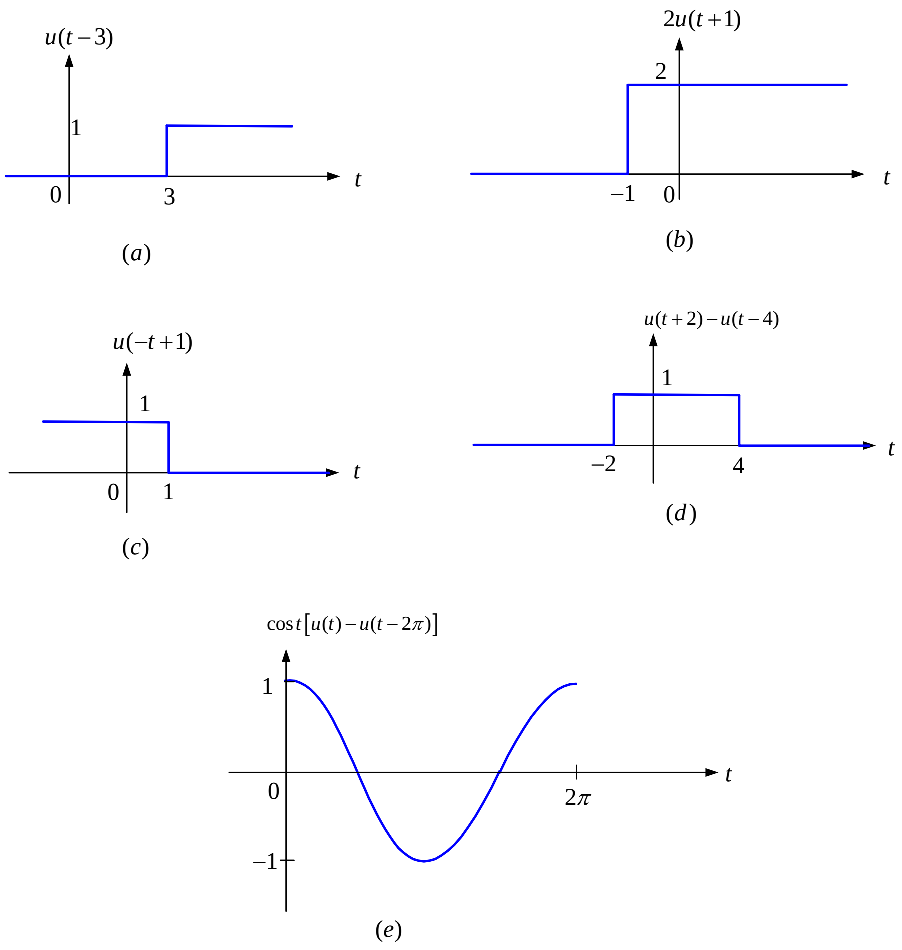
STEP FUNCTION

- **[예제]**
  - **다음 신호의 파형을 그려보라.**

(a) $x(t) = u(t-3)$
(b) $x(t) = 2u(t+1)$
(c) $x(t) = u(-t+1)$
(d) $x(t) = u(t+2) - u(t-4)$
(e) $x(t) = \cos t\,[u(t) - u(t-2\pi)]$

STEP FUNCTION

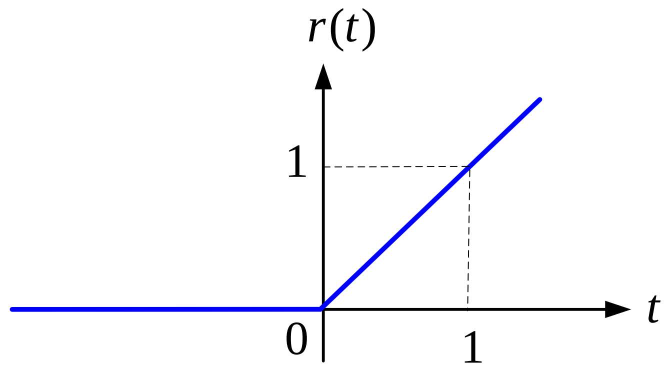
- **[풀이]**



RAMP FUNCTION

- **정의**: Unit Ramp Function

$$r(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = tu(t)$$



- Unit step function**과의 관계**

$$u(t) = \frac{d}{dt} r(t)$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau) d\tau$$

IMPULSE FUNCTION

- **정의**: Unit Impulse Function

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t)dt = x(0), \qquad t_1 < 0 < t_2$$

i) $\delta(t) = 0 \quad \text{for } t \neq 0$

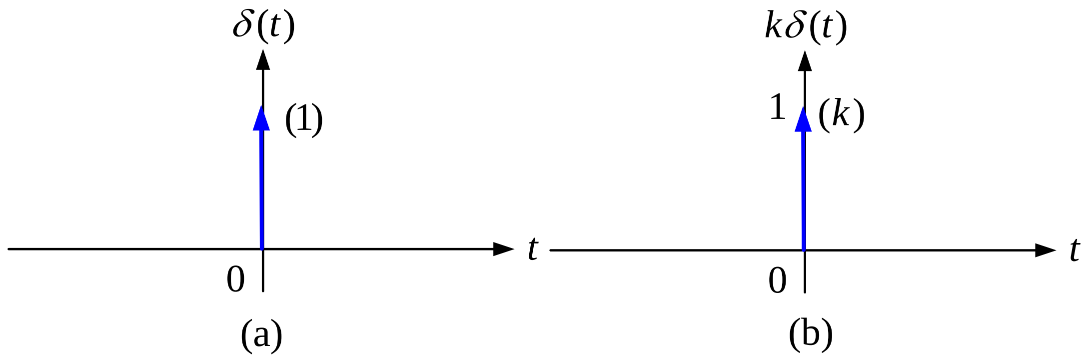
ii) $\delta(0) \to \infty$

iii) $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)dt = 1 \quad \text{for any } \varepsilon > 0$

iv) $\delta(t) = \delta(-t)$ i.e. even function

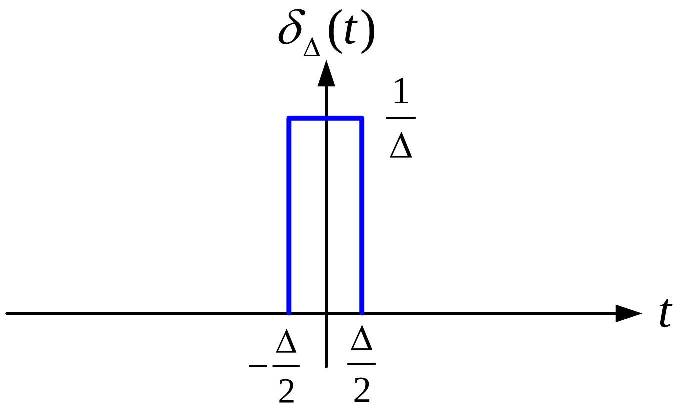
- Impulse의 weight: $k\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k\delta(t)dt = k$$



IMPULSE FUNCTION

- Unit impulse **함수의 근사화**
  - **단위 면적을 가지고 폭이 좁은 사각 펄스로 근사화된다** .
  - **이 펄스의 폭** D**가 좁을수록 펄스의 크기** 1/D**는 커지며,**
  - **펄스 폭** D →0**의 극한이 취해지면 단위 임펄스 함수가 된다.**

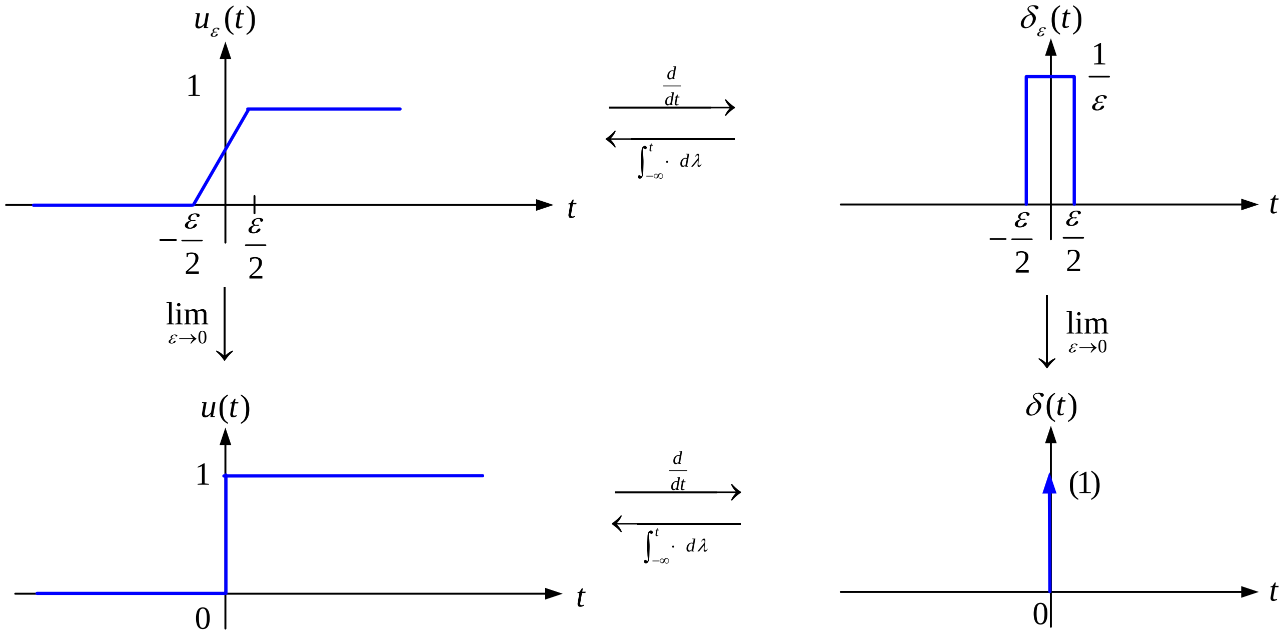


IMPULSE FUNCTION

- Step function과의 관계

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

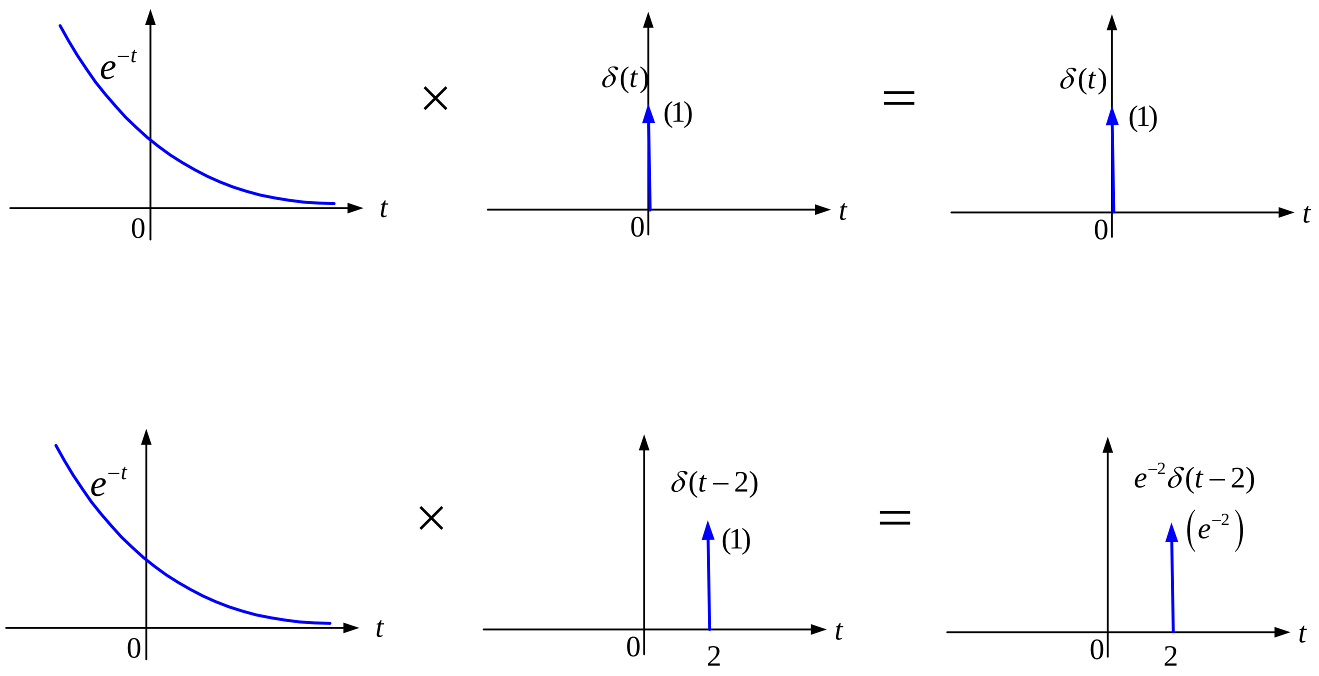
$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda)d\lambda = u(t)$$



IMPULSE FUNCTION

- Sampling property

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$
$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$



IMPULSE FUNCTION

- Sifting property

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t-t_0)dt = \begin{cases} x(t_0), & t_1 < t_0 < t_2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

IMPULSE FUNCTION

- Convolution property

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

- Scaling property

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$\delta(at+b) = \frac{1}{|a|}\delta\left(t+\frac{b}{a}\right)$$

IMPULSE FUNCTION

- **[예제]**

$$\text{(a)}\quad \int_{-4}^{2} (2t + t^3)\,\delta(t-3)dt$$

$$\text{(b)}\quad \int_{1}^{4} (2t + t^3)\,\delta(t-3)dt$$

$$\text{(c)}\quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp(t-3)\,\delta(2t-6)dt$$

- **풀이**

$$\text{(a)}\quad t_0 = 3 \notin (-4,\ 2) \Rightarrow 0$$

$$\text{(b)}\quad [2t + t^3]_{t=3} = 6 + 27 = 33$$

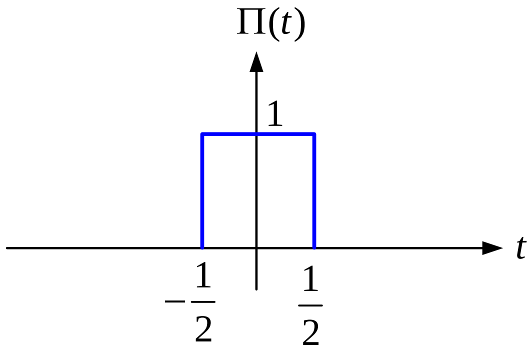
$$\text{(c)}\quad \left[\frac{1}{2}\exp(t-3)\right]_{t=3} = \frac{1}{2}$$

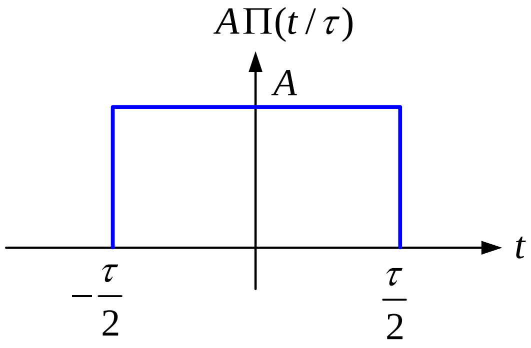
RECTANGULAR PULSE

- **크기가 1이고 펄스 폭이 1인 사각 펄스(구형파)**

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

- **크기가 A이고 펄스 폭이 t인 사각 펄스**: $A\Pi(t/\tau)$



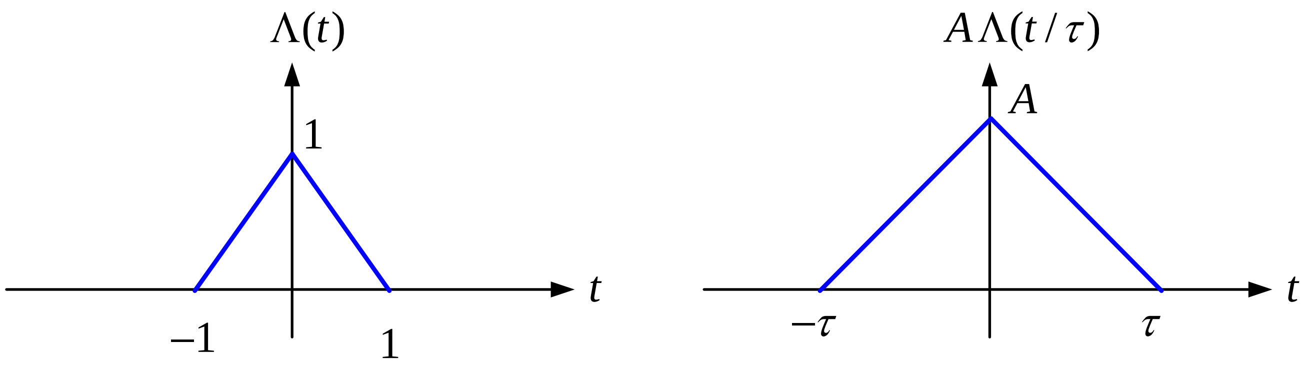


TRIANGULAR PULSE

- **크기가 1이고 펄스 폭이 2인 삼각 펄스**

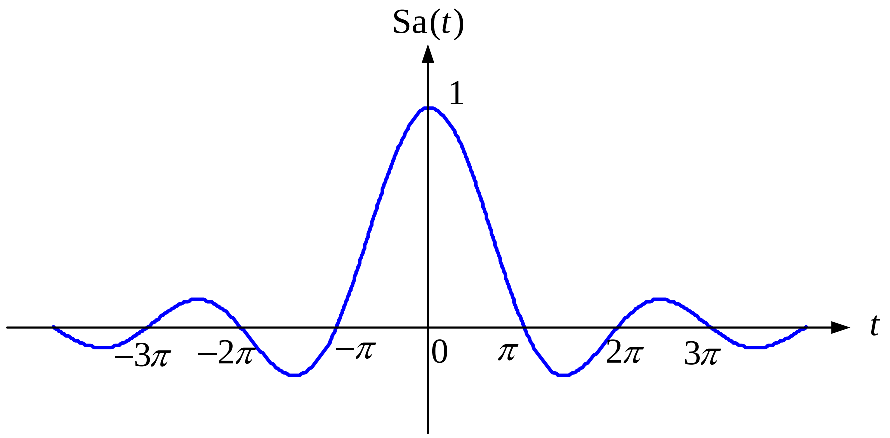
$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{for } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

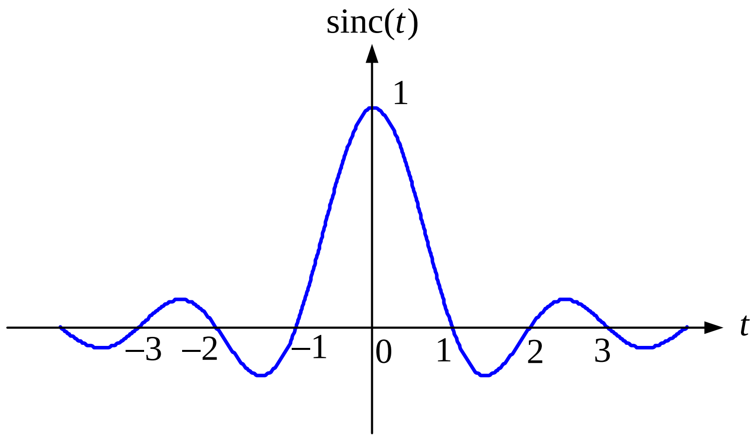
  - **크기가 A이고 펄스 폭이 2t인 삼각 펄스**: $A\Lambda(t/\tau)$



SAMPLING FUNCTION

- **Sa 함수와 sinc 함수**
  - $\mathrm{Sa}(t) = \dfrac{\sin t}{t}$
  - $\mathrm{sinc}(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t} = \mathrm{Sa}(\pi t)$



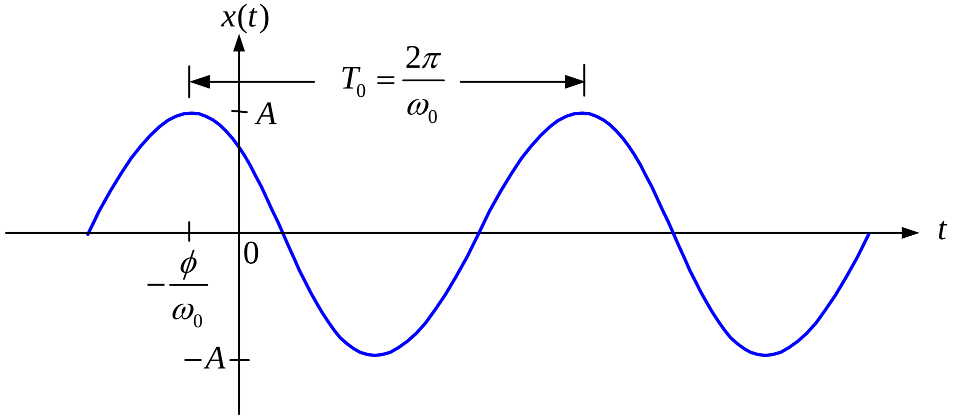


SINUSOIDAL FUNCTION

▪ 정현파 신호

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

- A: amplitude
- f_0: frequency [Hz]
- w_0: angular frequency [rad/sec] ($\omega_0 = 2\pi f_0$)
- f_0: initial phase [rad]
- Period: $T_0 = 1/f_0 = 2\pi/\omega_0$



SINUSOIDAL FUNCTION

- **정현파의 위상**

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) = A\cos(\omega_0 (t + \tau)), \quad \tau = \frac{\phi}{\omega_0}$$

  - **정현파에서 위상은 시간차와 같은 의미를 가진다.**
  - **두 정현파가 위상만 다르다는 것은 파형은 동일하고 시간적으로 선행하거나 지연된 것을 의미한다.**
  - **그런데 주기 신호에서는 동일한 파형이 반복되므로 선행과 지연의 구별이 없다. 주기가** T_0**라면** τ **만큼 지연되었다는 것은** $T_0 - \tau$ **만큼 선행한다는 것과 같기 때문이다.**

SINUSOIDAL FUNCTION

- **정현파의 전력**

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$P = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} A^2\cos^2\left(\frac{2\pi t}{T_0} + \phi\right)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\frac{A^2}{2}\left\{1 + \cos\left(\frac{4\pi t}{T_0} + 2\phi\right)\right\}dt$$

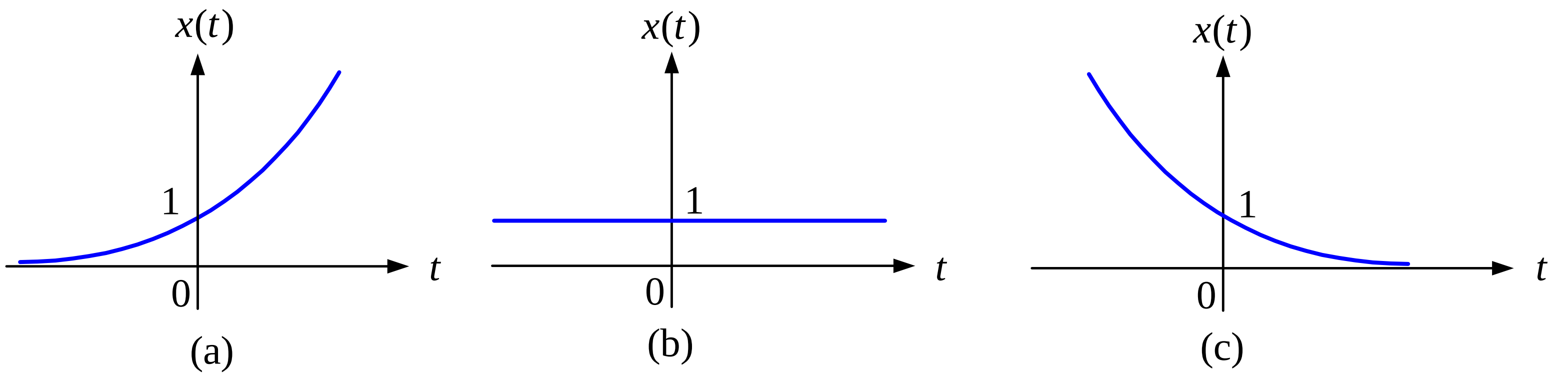
$$= \frac{A^2}{2}$$

EXPONENTIAL FUNCTION

- **지수 함수**

$$x(t) = e^{st}$$

(1) s**가 실수인 경우** : real exponential function



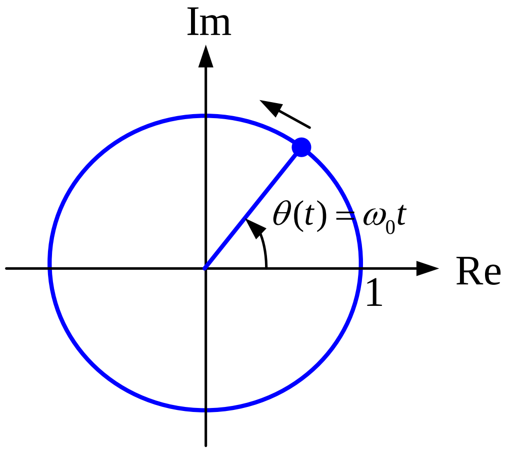
$s > 0$ $s = 0$ $s < 0$

EXPONENTIAL FUNCTION

- **복소 정현파** (Complex Sinusoid) - (2) s**가 순허수인**($s = jw_0$) **경우**
  - $x(t) = e^{j\omega_0 t}$
  - periodic with period $T_0 = 2\pi/w_0$

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 t}e^{j2\pi} = e^{j\omega_0(t+2\pi/\omega_0)}$$

  - $x(t) = e^{j\omega_0 t}$**는 복소 평면에서 반지름이 1인 원주 상을 등각속도 w0로 회전하는 신호이다. 즉** $\left|e^{j\omega_0 t}\right| = 1$**이며, 평균 전력이 1인 전력 신호이다.**



EXPONENTIAL FUNCTION

- Euler 항등식

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

- 파를 Rectangular form으로 표현하면

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t$$

- 정현파와 여현파는 다음과 같이 복소 정현파로 표현할 수 있다.

$$\cos\omega_0 t = \mathrm{Re}\{e^{j\omega_0 t}\} = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$$

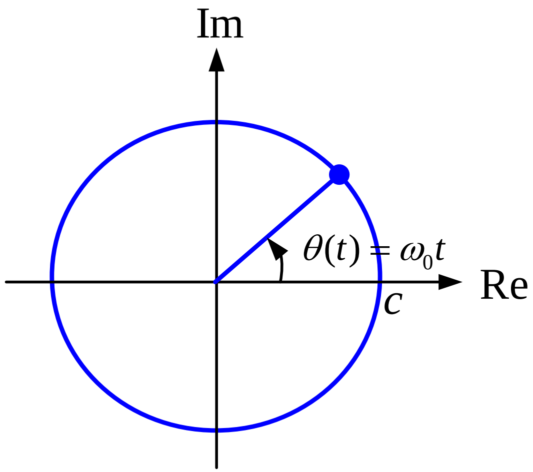
$$\sin\omega_0 t = \mathrm{Im}\{e^{j\omega_0 t}\} = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}$$

EXPONENTIAL FUNCTION

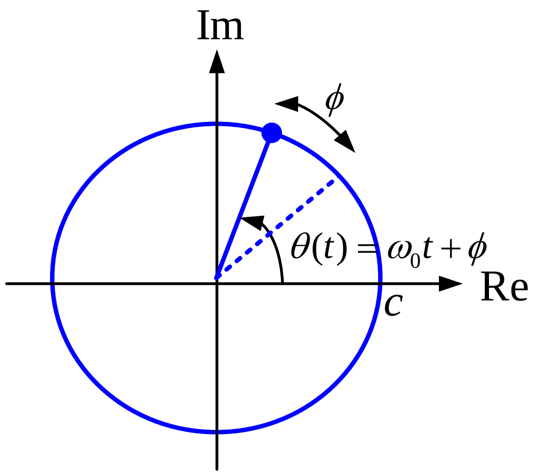
- **초기 위상이 0이 아닌 경우**

$$x(t) = e^{j(\omega_0 t + \phi)} = e^{j\omega_0 t} \cdot e^{j\phi}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\{x(t)\} = \cos(\omega_0 t + \phi), \quad \mathrm{Im}\{x(t)\} = \sin(\omega_0 t + \phi)$$



$x(t) = e^{j\omega_0 t}$

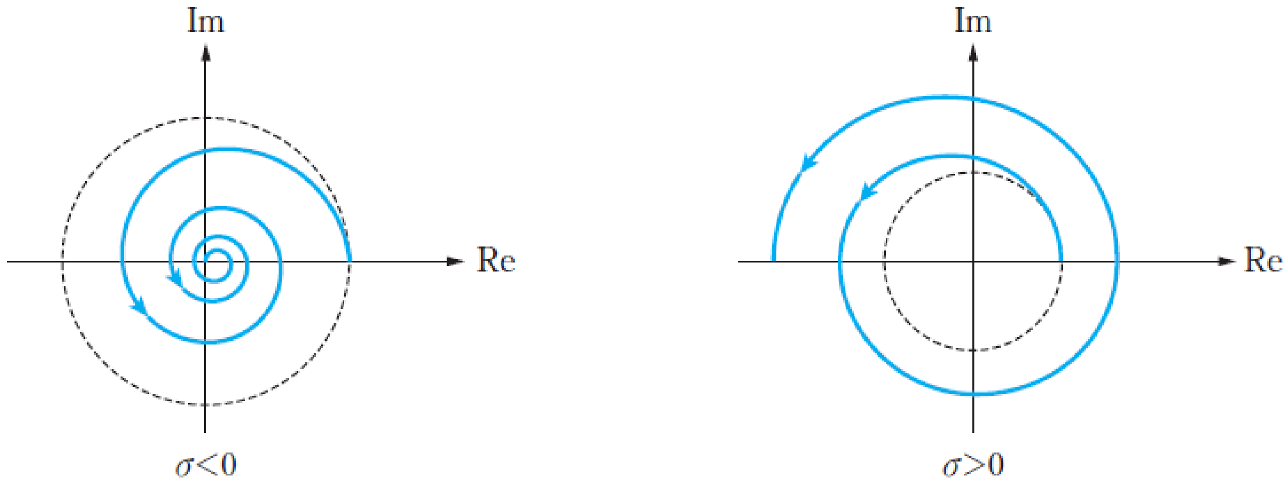


$x(t) = e^{j(\omega_0 t + \phi)}$

EXPONENTIAL FUNCTION

- **복소 지수 함수** (Complex Exponential Function) - (3) s**가 일반적인 복소수인**($s = s + jw_0$) **경우**

$$x(t) = e^{(\sigma + j\omega_0)t} = e^{\sigma t}\cos\omega_0 t + je^{\sigma t}\sin\omega_0 t$$

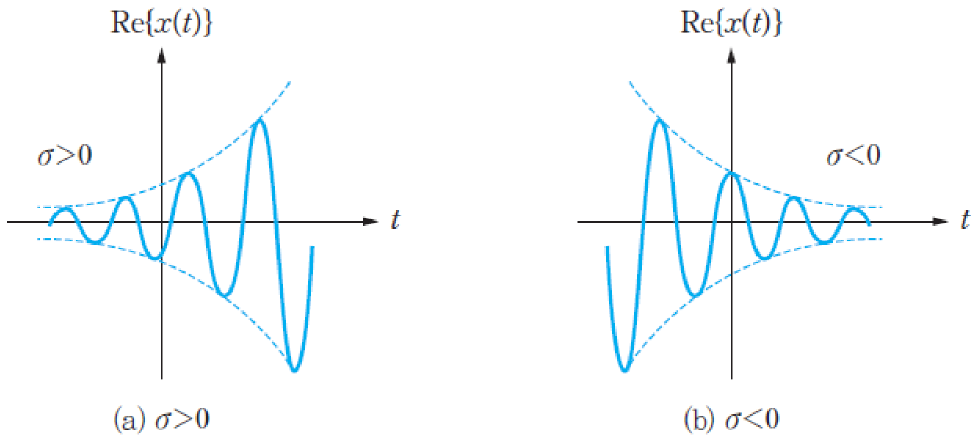


EXPONENTIAL FUNCTION

- **복소 지수 함수** (Complex Exponential Function) - (3) s**가 일반적인 복소수인**($s = s + jw_0$) **경우**

$$x(t) = e^{(\sigma + j\omega_0)t} = e^{\sigma t}\cos\omega_0 t + je^{\sigma t}\sin\omega_0 t$$

  - **실수부의 파형**: s**의 부호에 따라 진동하면서 진폭이 커지거나 진동하면서 진폭이 감쇠**



- 신호 해석을 위한 기초 용어
- 신호의 유형 분류
- 신호의 기본 연산
- 신호 해석에 많이 사용되는 기본 함수
- 선형 시스템
- 상관 함수

LINEAR SYSTEM VS. NONLINEAR SYSTEM

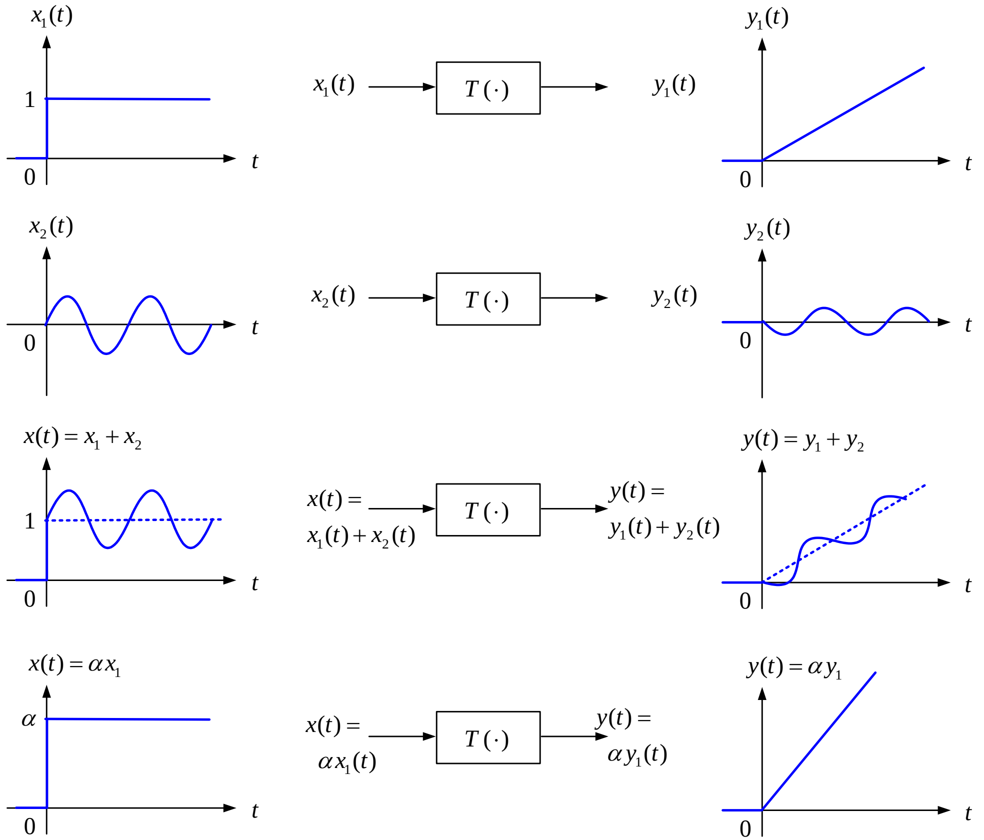
- Linear if
  - Additive: $T[x_1(t) + x_2(t)] = T[x_1(t)] + T[x_2(t)]$
  - Homogeneous: $T[\alpha x_1(t)] = \alpha T[x_1(t)]$
- Linearity를 위한 필요충분 조건: 중첩의 원리 성립

$$T[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha T[x_1(t)] + \beta T[x_2(t)]$$

- Nonlinear system: 선형 시스템이 아닌 시스템
  - Additivity나 homogeneity 중 어느 하나라도 만족이 안 되는 시스템

LINEAR SYSTEM VS. NONLINEAR SYSTEM

- Principle of superposition



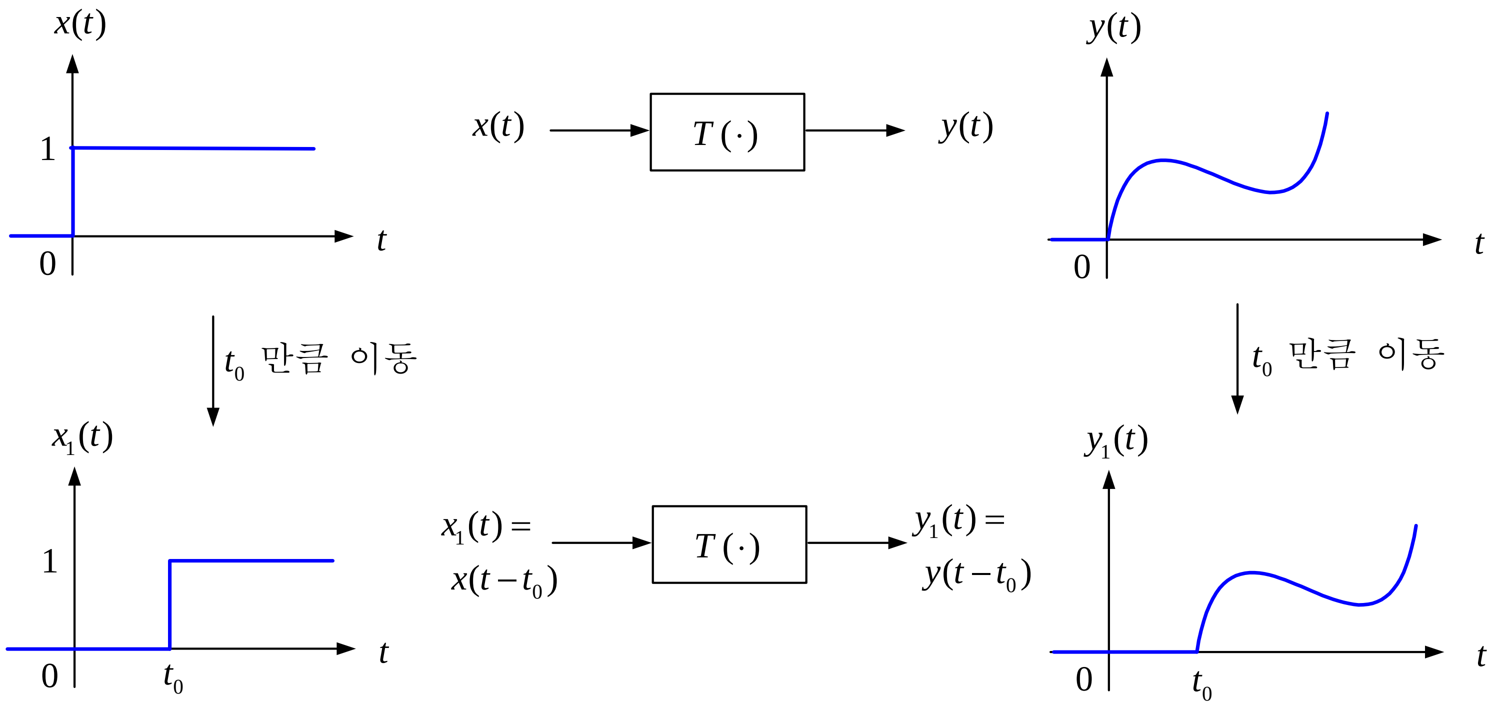
TIV SYSTEM VS. TV SYSTEM

- Time Invariant (TIV: **시불변) 시스템의 개념**
  - **시스템의 속성이 시간에 따라 변하지 않는 시스템**
  - **시스템이 동작하는 시점에 상관 없이 항상 같은 출력을 발생시키는 시스템**
- Time Varying (TV) **시스템**
  - TIV **시스템이 아닌 시스템(속성이 시간에 따라 변하는 시스템)**
- TIV **시스템의 정의**
  - **입력** $x(t)$**에 대한 출력을** $y(t) = T[x(t)]$**라 하자.**
  - **이 입력을** t0**초 후에 가하는 경우, 즉** $x_1(t) = x(t - t_0)$**를 가하는 경우 출력이** $y_1(t) = y(t - t_0)$**가 된다면, 즉** t_0**초 후에 동일한 파형의 출력이 나온다면 이 시스템을 시불변 시스템이라 한다. 즉**

$$T[x(t - t_0)] = y(t - t_0)$$

TIV SYSTEM VS. TV SYSTEM

- TIV 시스템



$$T[x(t-t_0)] = y(t-t_0)$$

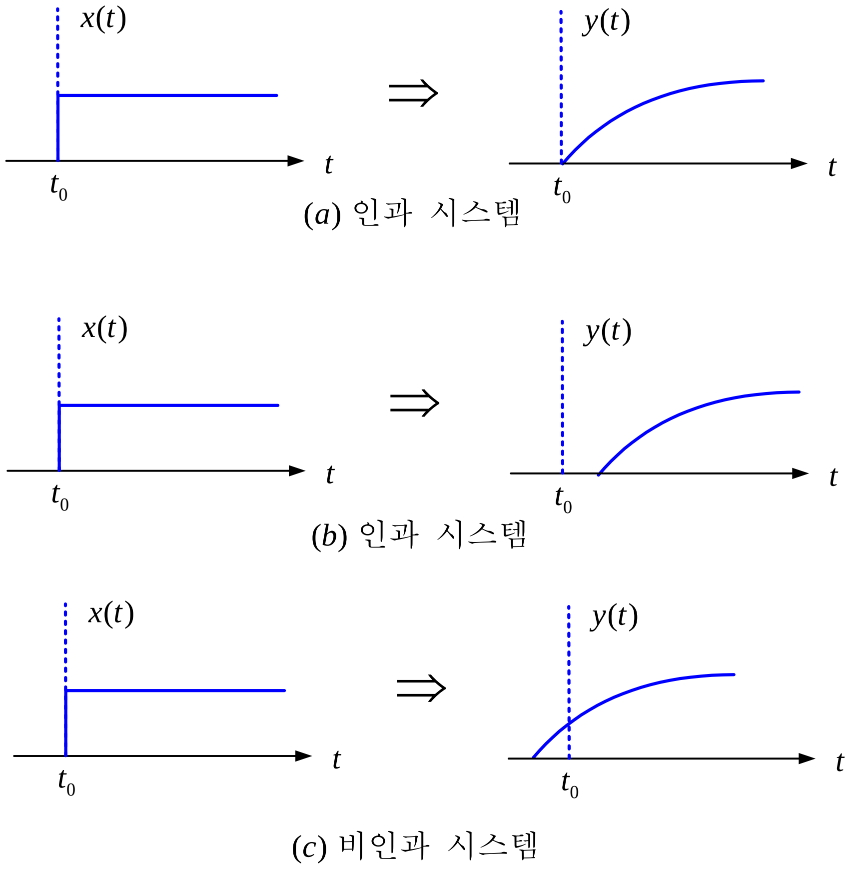
CAUSAL SYSTEM VS. NONCAUSAL SYSTEM

- Causal (인과) System의 개념
  - 아직 들어오지 않은 미래의 입력은 현재의 출력에 영향을 미치지 않는 시스템, 즉 원인(cause)이 있어야 결과(effect)가 있는 시스템의 속성을 인과적(causal)이라 한다.
  - 시각 t_0에서 시스템의 출력 $y(t_0)$이 현재와 과거의 입력, 즉 $t \le t_0$ 의 입력에 의해서만 결정되는 시스템

- Noncausal (비인과) System
  - $t > t_0$ 의 입력이 $y(t_0)$에 영향을 미치는 시스템

CAUSAL SYSTEM VS. NONCAUSAL SYSTEM

- Linear Causal System
  - For $x(t) = 0 \ (t \leq t_0) \ \Rightarrow \ y(t) = 0 \ (t \leq t_0)$

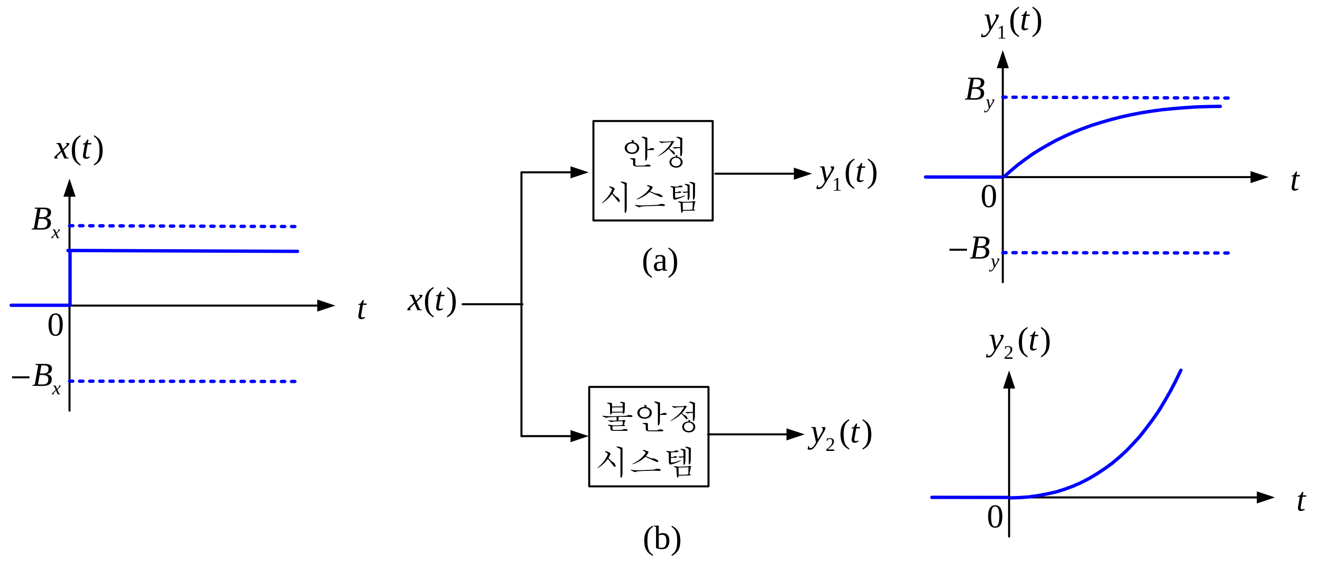


STABLE SYSTEM VS. UNSTABLE SYSTEM

- BIBO Stability
  - **시스템에 임의의 유한한 크기의 입력을 가했을 때, 출력이 무한한 크기로 발산하지 않는다면 그 시스템을** BIBO (bounded input bounded output) **안정 시스템**(stable system)**이라 한다**.
  - **즉 모든** t **에서** $|x(t)| \leq B_x < \infty$ **와 같이 크기가 유한한 임의의 입력에 대해, 출력이 모든** t **에서** $|y(t)| \leq B_y < \infty$ **을 만족시킨다면 이 시스템은** BIBO **안정하다**.

- Unstable System
  - **입력의 크기가 유한한 값을 넘지 못하게 제한하더라도 출력이 발산하는 시스템**

STABLE SYSTEM VS. UNSTABLE SYSTEM



- [Note]
  - BIBO **안정성을 증명하려면 크기가 제한된 모든 종류의 입력 신호에 대해 출력 신호의 크기가 제한된다는 것을 보여야 한다**.
  - **불안정성을 증명하는 경우에는 출력 신호가 발산하게 되는 제한된 크기의 입력 신호의 예를 하나만 제시해도 충분하다**.

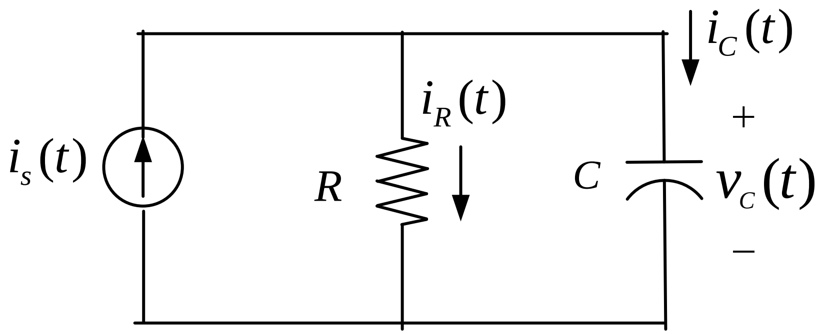
입출력 미분방정식에 의한 표현

입출력 미분방정식

- **시스템의 예:**

$$i_s(t) = i_R(t) + i_C(t) = \frac{v_c}{R} + C\frac{dv_C}{dt}$$
$$i_s(t) = x(t), v_c(t) = y(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{C}x(t)$$

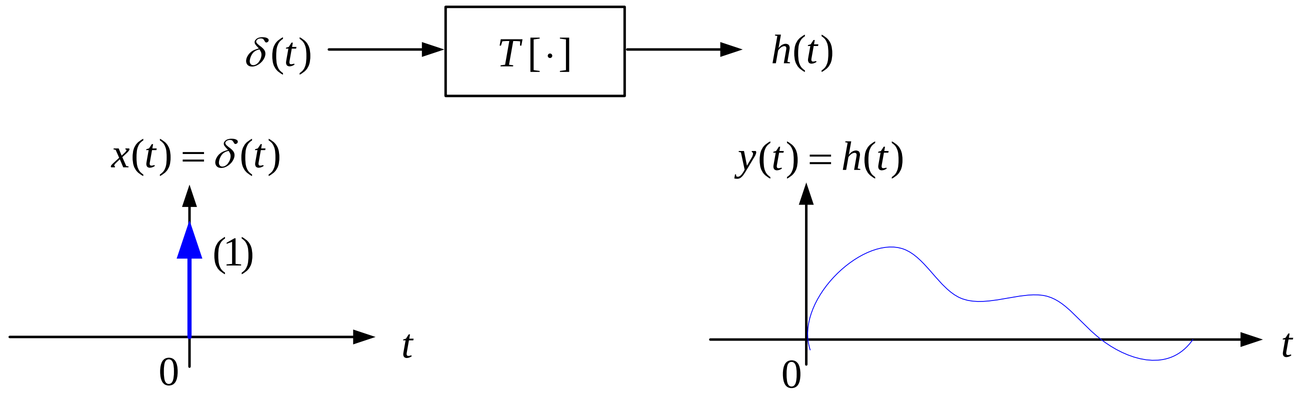


- **일반적인 선형 시불변 시스템의 입출력 미분방정식**

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^n}$$

IMPULSE RESPONSE에 의한 표현

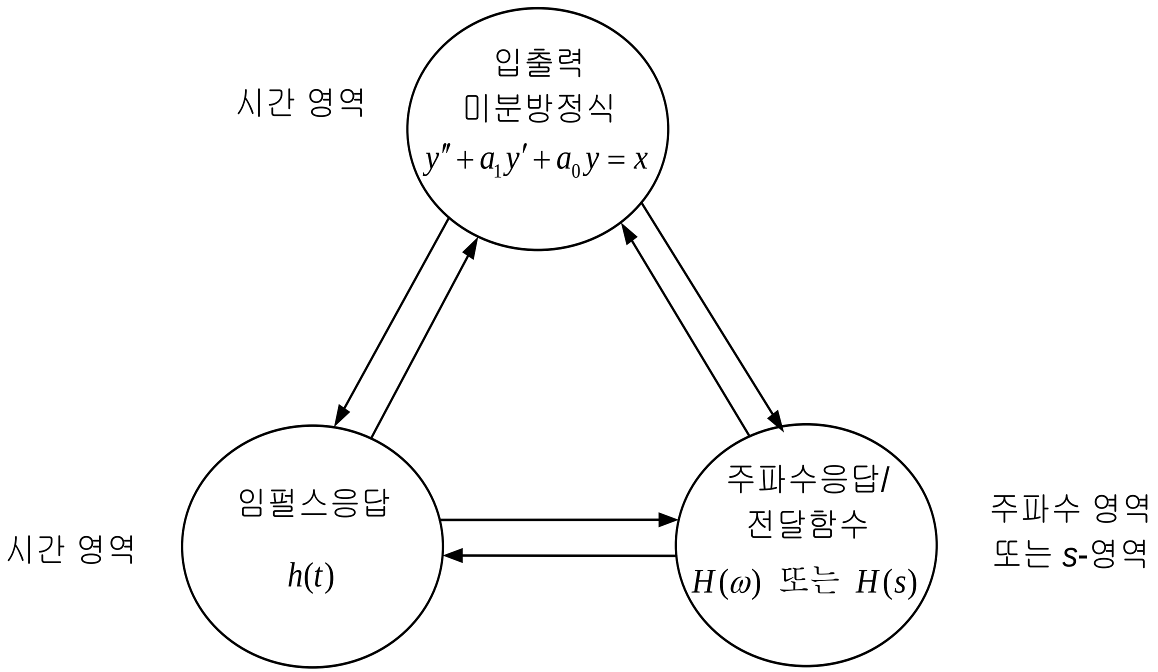
- Impulse Response
  - **정의**: $h(t) = T[\delta(t)]$



  - **미분방정식 경우, 차수가 높으면 방정식의 해를 구하는 것이 쉽지 않다.**
  - **임펄스 응답에 의한 시스템 표현에서는 다음 적분만 계산하면 되므로 상대적으로 출력을 구하기가 쉽다.**

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

시스템에 대한 여러 가지 표현 방법



임펄스 응답으로 표현된 시스템의 응답

- **LTI System의 응답**
  - Convolution integral

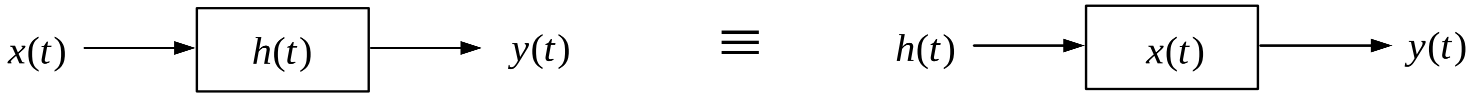
$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

CONVOLUTION의 성질

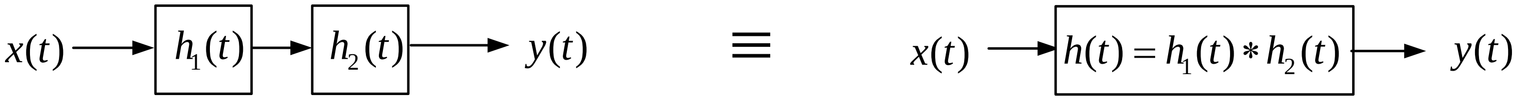
- **교환성**

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$



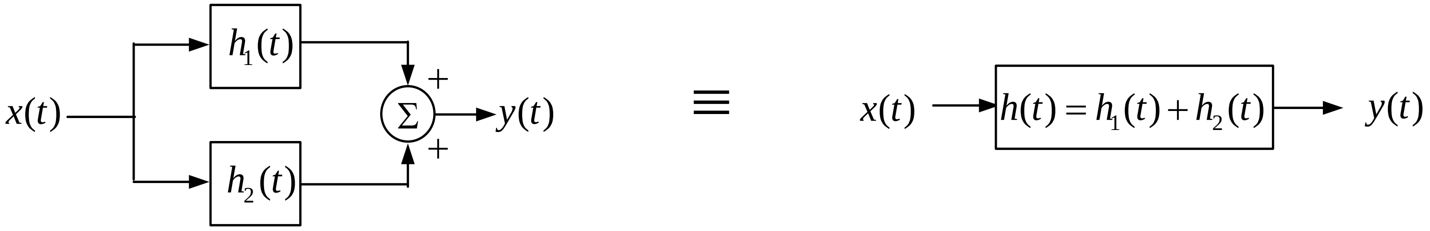
- **결합성**

$$\{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\}$$



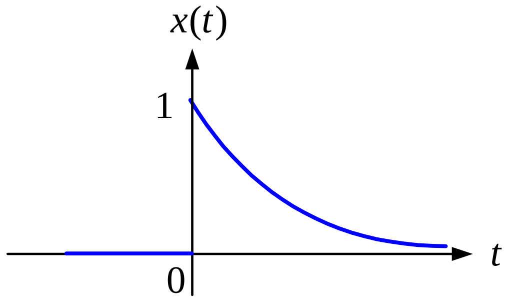
- **분배성**

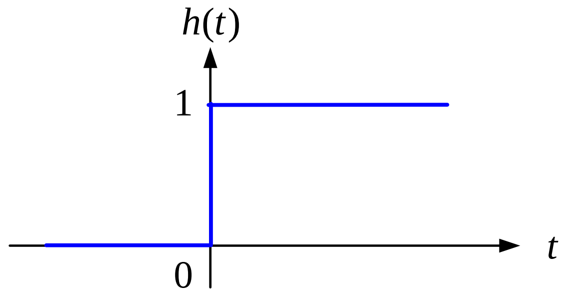
$$x(t) * \{h_1(t) + h_2(t)\} = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

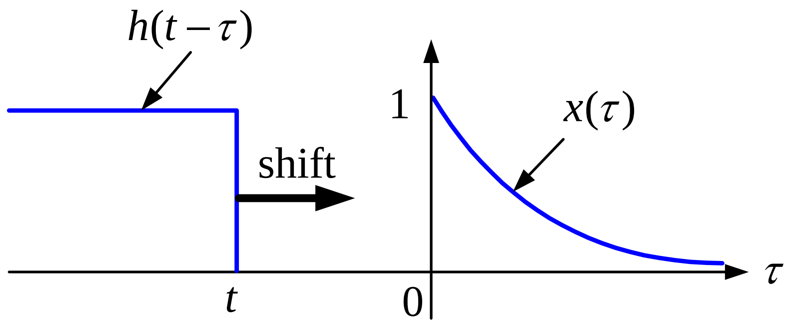


CONVOLUTION 적분의 계산

- **[예제]** : $y(t) = x(t) * h(t)$
  - $x(t) = e^{-at}u(t), a > 0, h(t) = u(t)$



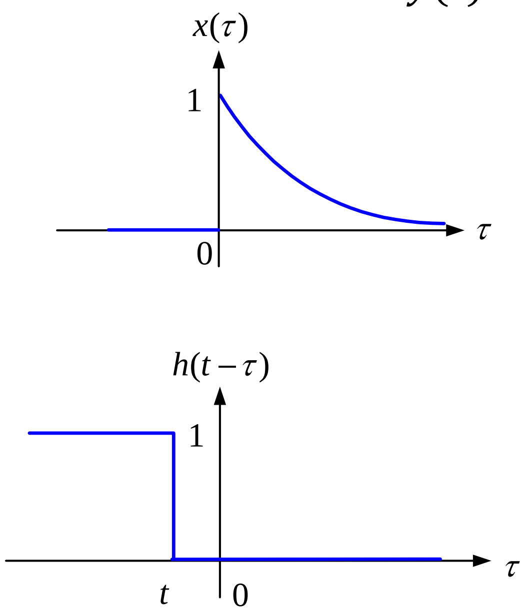




CONVOLUTION 적분의 계산

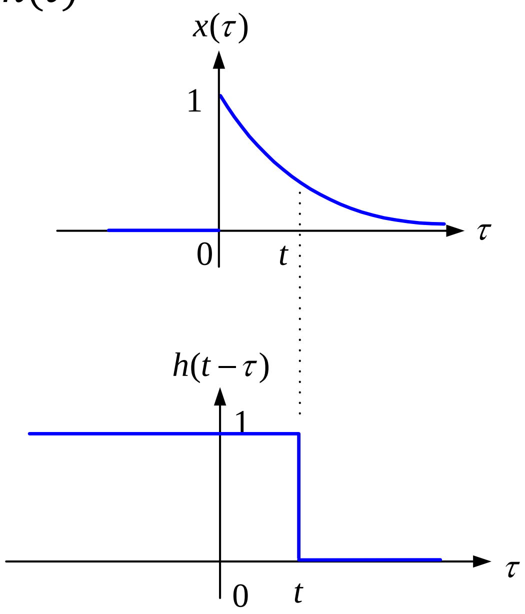
- **[풀이]**

$$y(t) = x(t) * h(t)$$



i) $t < 0$

no overlap $\Rightarrow y(t) = 0$



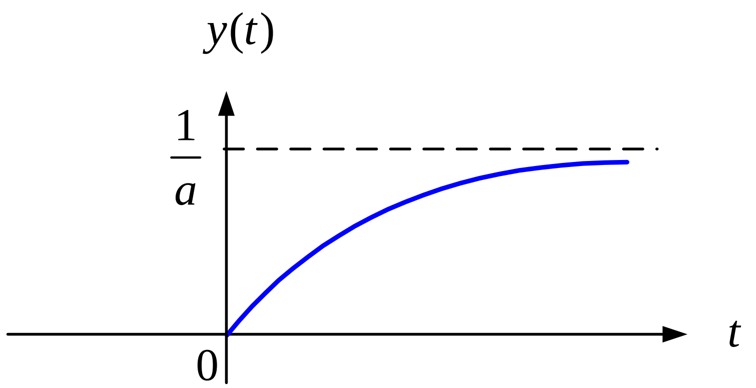
ii) $t > 0$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t e^{-a\tau}d\tau = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$$

CONVOLUTION 적분의 계산

- **[풀이]** : $y(t) = x(t) * h(t)$

$$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t)$$



항등 시스템과 무왜곡 전송 채널

- Identity **시스템**

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t)$$

  - **항등 시스템의 임펄스 응답**

$$h(t) = \delta(t) \quad \leftrightarrow \quad y(t) = x(t)$$

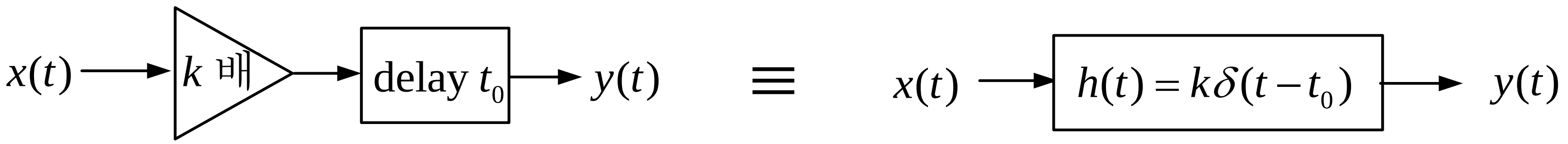
- **지연만 있는 시스템의 임펄스 응답**

$$h(t) = \delta(t - t_0) \quad \leftrightarrow \quad y(t) = x(t - t_0)$$

항등 시스템과 무왜곡 전송 채널

- Distortionless Channel
  - **송신 신호가 상수의 배율(k배)로 곱해지고 일정 시간(t_0)만큼 지연되어 수신기에 들어온다면 수신 신호의 모양 자체는 송신 신호의 모양과 동일하므로 정보의 복구에 문제가 없다.**
  - **이러한 통신 환경을 무왜곡 전송**(distortionless transmission) **조건이라 한다.**
  - **무왜곡 시스템의 임펄스 응답**

$$h(t) = k\delta(t - t_0) \quad \leftrightarrow \quad y(t) = kx(t - t_0)$$



LTI SYSTEM의 임펄스 응답

- Memoryless system

$$y(t) = Kx(t), K\text{는 상수} \Leftrightarrow h(t) = K\delta(t)$$

- Causal system
  - LTI system is causal if $h(t) = 0, \quad t < 0$
  - Output of causal LTI system

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- Stable system
  - LTI system is BIBO stable iff impulse response is absolutely integrable

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$$

- 신호 해석을 위한 기초 용어
- 신호의 유형 분류
- 신호의 기본 연산
- 신호 해석에 많이 사용되는 기본 함수
- 선형 시스템
- 상관 함수

CROSS-CORRELATION FUNCTION

- **에너지 신호의 상호상관 함수**

$$R_{xy}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt$$

- **전력 신호의 상호상관 함수**

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)y(t+\tau)dt$$

  - **주기 신호의 경우**

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^*(t)y(t+\tau)dt$$

AUTO-CORRELATION FUNCTION

- **에너지 신호의 자기상관 함수**

$$R_x(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

- **자기상관 함수의 성질**

i) $R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$

ii) $R_x(0) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = E$

iii) $|R_x(\tau)| \le R_x(0)$

AUTO-CORRELATION FUNCTION

- **전력 신호의 자기상관 함수**

$$R_\tau(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

  - **주기신호의 경우**

$$R_\tau(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

  - **자기상관 함수의 성질**

i) $R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$

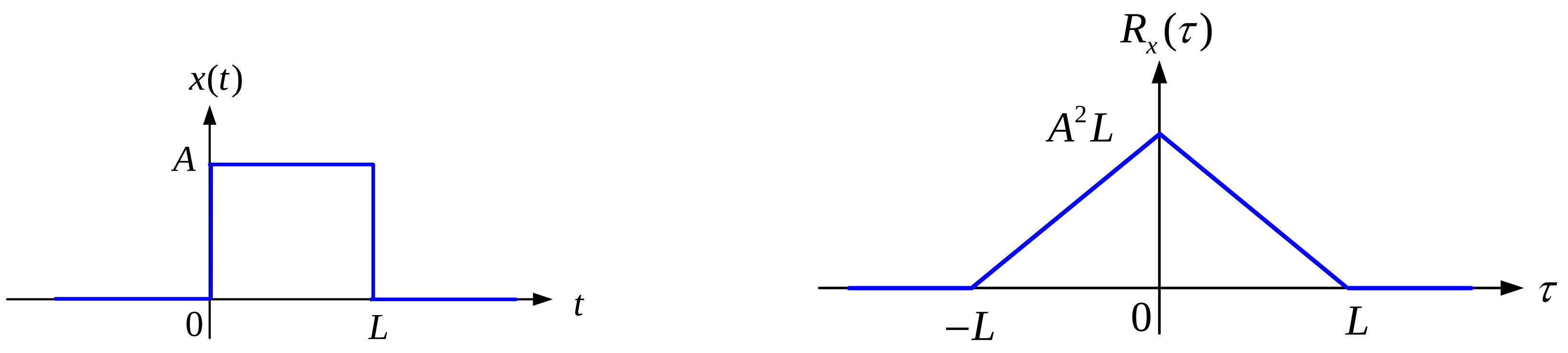
ii) $R_x(0) \triangleq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2dt = P$

iii) $|R_x(\tau)| \le R_x(0)$

iv) If $x(t)$ is periodic, then $R_x(\tau)$ is also periodic with same period

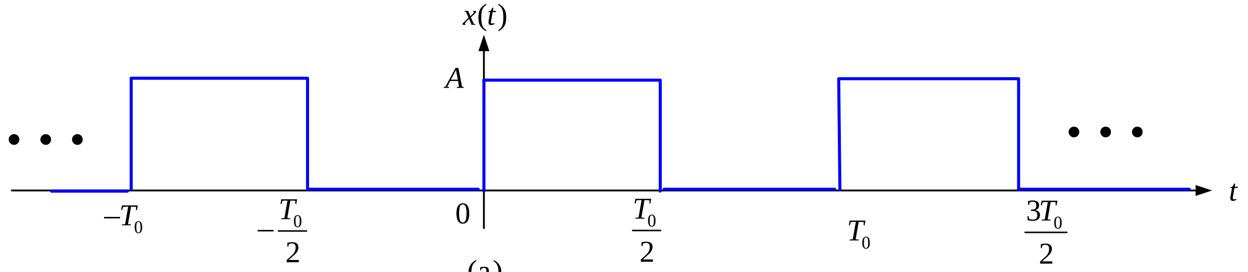
AUTO-CORRELATION FUNCTION

- **예제 (에너지 신호)**

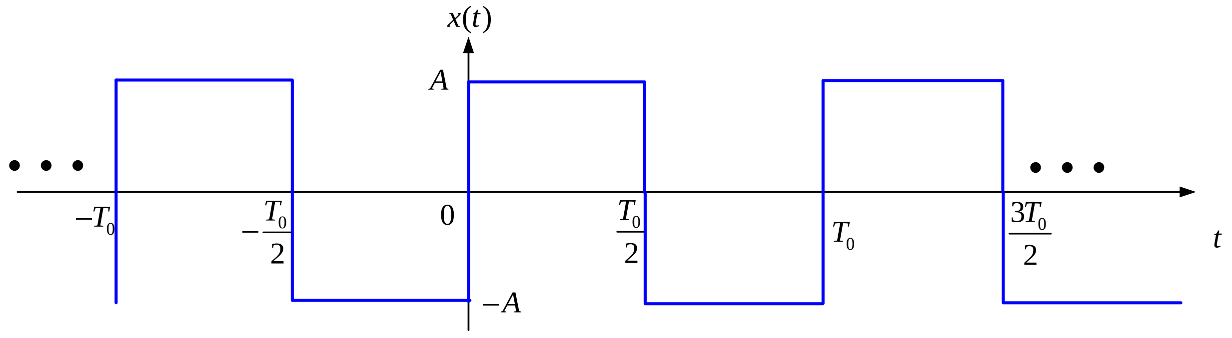


AUTO-CORRELATION FUNCTION

- **예제 (전력 신호)**



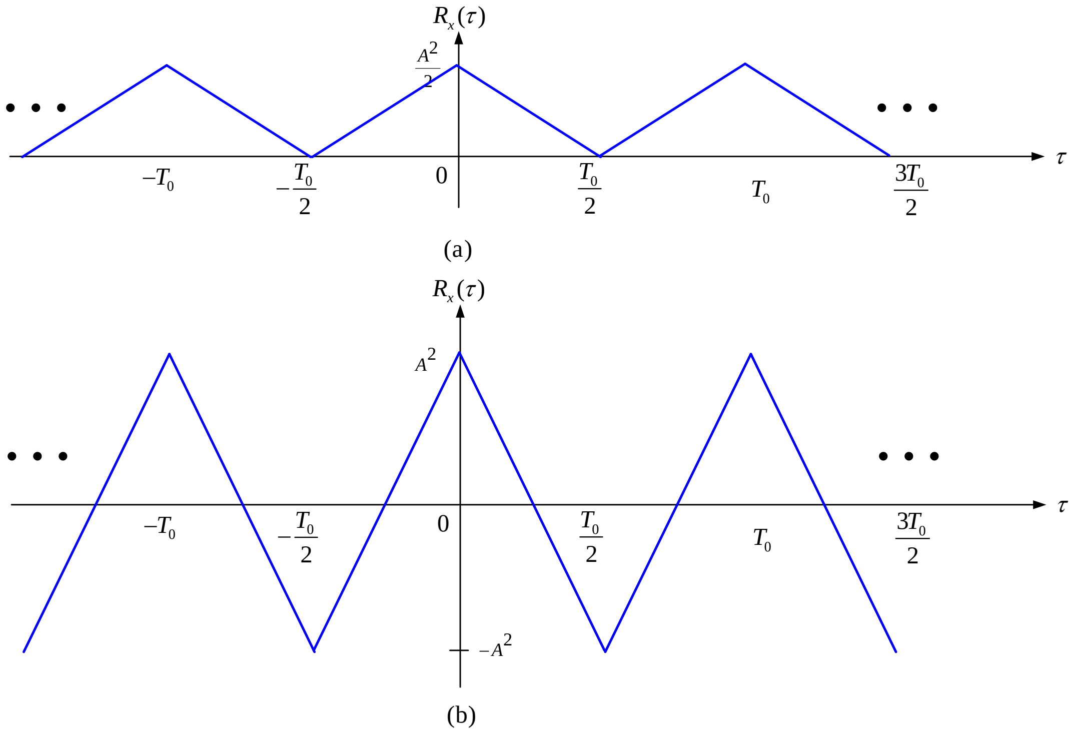
(a)



(b)

AUTO-CORRELATION FUNCTION

- **예제 (전력 신호)**



AUTO-CORRELATION FUNCTION

- **예제 (정현파 신호)**

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

$$\begin{aligned}
R_x(\tau) &= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)x(t-\tau)dt \\
&= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} A\cos(\omega_0 t + \theta)\cdot A\cos(\omega_0(t-\tau)+\theta)dt \\
&= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{A^2}{2}\{\cos(\omega_0\tau) + \cos(2\omega_0 t - \omega_0\tau + 2\theta)\}dt \\
&= \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)
\end{aligned}$$

- **자기상관 함수는 주기 신호이며 θ 와는 무관하다.**
- $R_x(0)$**는 신호의 평균 전력** $A^2/2$**과 동일하다.**

ANY QUESTIONS?