

第5章 小尺度衰落

小尺度衰落 概述

多普勒分支

1. 多普勒频移
2. 相干时间

多径分支

1. 时间域 t 和 时延域 τ
2. 线性多径信道模型
 - (1) 时变
 - (2) 时不变
3. 时延拓展
4. 相干带宽
5. 窄带衰落信道模型 / 平坦衰落信道模型 (时不变)
 - (1) 瑞利信道模型
推导:
统计特性
功率分布
中断率
 - (2) 莱斯信道模型
 - (3) Nakagami信道模型 *
6. 窄带衰落信道模型 (时变)
Clarke 模型 (均匀散射环境)
电平通过和衰落统计
7. 宽带衰落模型 / 频率选择性衰落模型
 - (1) 附加时延段 和 分析带宽
 - (2) WSS-US假设
 - (3) 抽头延迟线 (TDL) 模型
 - (4) 基于簇-径的宽带信道模型
Saleh - Valenzuela (S-V) 信道模型
8. 空时信道模型

第5章 小尺度衰落

小尺度衰落 概述

“小尺度”：信号强度经过短距离/短时延后急剧变化

小尺度衰落：

1. (多普勒分支) 发射端和接收端的相对运动 - 多普勒频移 - 信道的相干时间 - 慢衰落/快衰落
2. (多径分支) 发射端和接收端之间的多径传播 - 时延拓展 - 信道的相干带宽 - 平坦衰落/频率选择性衰落

多普勒分支

1. 多普勒频移

发射端和接收端的相对运动 导致传播路程差 进而导致相位变化：

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\Delta l}{\lambda} = \frac{2\pi v\Delta t \cos\theta}{\lambda}$$

其中 θ 是 接收台行进方向 转到 接收台指向发送台 的夹角

相位变化对时间求导得到频率变化

$$f_d = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \frac{1}{2\pi} = \frac{v \cos\theta}{\lambda}$$

2. 相干时间

在相干时间间隔内，信道冲激响应近似不变，两个到达的信号具有很强的幅度相关性（？）

如果符号周期大于信道相干时间，则符号传输过程中信道冲激响应可能发生改变，导致接收信号失真
计算：

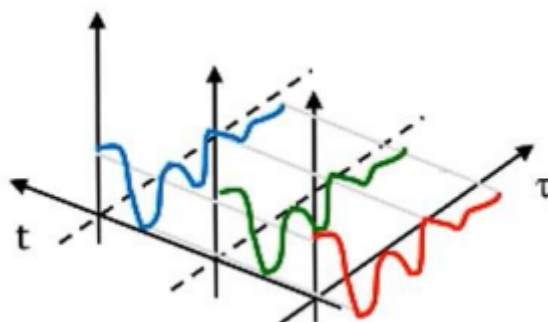
$$T_C \approx \begin{cases} \frac{1}{(f_d)_{\max}} \\ \frac{9}{16\pi} \cdot \frac{1}{(f_d)_{\max}} \quad (\text{时间相关函数} > 0.5 \text{ 的时间段长度}) \\ \sqrt{\frac{9}{16\pi}} \cdot \frac{1}{(f_d)_{\max}} \approx 0.423 \cdot \frac{1}{(f_d)_{\max}} \end{cases}$$

多径分支

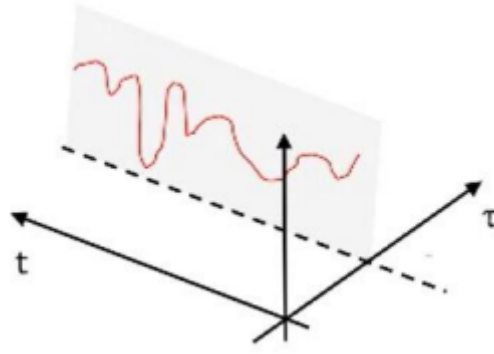
1. 时间域 t 和 时延域 τ

可以分别研究：

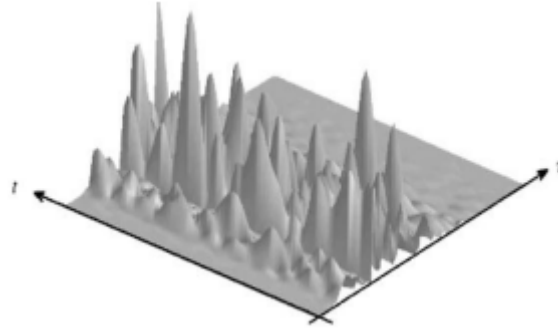
1. 线性时不变单径信道
2. 线性时不变多径信道



3. 线性时变单径信道



4. 线性时变多径信道



2. 线性多径信道模型

(1) 时变

基带信号: $u(t)$

发射信号: $s(t) = \text{Re} \{ u(t) e^{j2\pi f_c t} \}$

假设 视距时延 τ_0 、多径时延 τ_n 、多径路径数量 N 都是时间 t 的函数

接收信号 视距分量: $r_1(t) = \text{Re} \{ u(t - \tau_0(t)) \cdot \alpha_0(t) \cdot e^{j2\pi(f_c + f_{0,D})(t - \tau_0(t))} \} + n(t)$

接收信号 多径分量: $r_2(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{N(t)} u(t - \tau_n(t)) \cdot \alpha_n(t) \cdot e^{j2\pi(f_c + f_{n,D})(t - \tau_n(t))} \right\} + n(t)$

若不考虑噪声, 则接收信号:

$$\begin{aligned} r(t) &= \text{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{N(t)} u(t - \tau_n(t)) \cdot \alpha_n(t) \cdot e^{j2\pi(f_c + f_{n,D})(t - \tau_n(t))} \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ e^{j2\pi f_c t} \sum_{n=0}^{N(t)} u(t - \tau_n(t)) \cdot \alpha_n(t) \cdot e^{j2\pi[f_c(-\tau_n(t)) + f_{n,D}(t - \tau_n(t))]} \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ e^{j2\pi f_c t} \sum_{n=0}^{N(t)} u(t - \tau_n(t)) \cdot \alpha_n(t) \cdot e^{j\phi_n(t)} \right\} \end{aligned}$$

其中 $\phi_n(t) = 2\pi [f_c(-\tau_n(t)) + f_{n,D}(t - \tau_n(t))]$

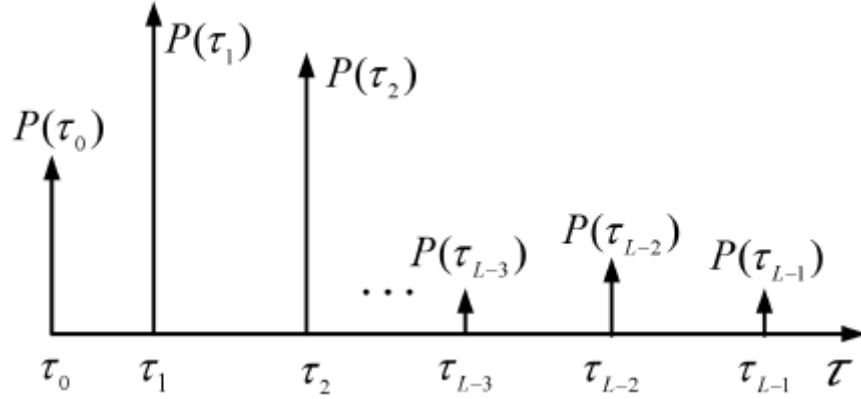
$$h(t, \tau) = \sum_{n=0}^{N(t)} \delta(\tau - \tau_n(t)) \alpha_n(t) e^{j\phi_n(t)}$$

(2) 时不变

$$h(\tau) = \sum_{n=0}^N \delta(\tau - \tau_n) \alpha_n e^{j\phi_n}$$

3. 时延拓展

(假设：线性时不变多径信道)



其中：

$$P(\tau_i) = |h(\tau_i)|^2 = |\delta(\tau - \tau_i) \alpha_i|^2 = \delta(\tau - \tau_i) |\alpha_i|^2$$

如图可知，最大时延拓展为：

$$\tau_{\max} = \tau_{L-1} - \tau_0$$

但是，对于某些时延很大的分量，如果其强度很弱，则可以忽略不计

——考虑引入时延分量的强度作为权重，得到 功率延迟分布 Power Delay Profile, PDP：

$$\begin{aligned} \text{(第 } i \text{ 个时延分量的权重)} \quad PDP = f(\tau_i) &= \frac{|\alpha_i|^2}{\sum_{k=0}^N |\alpha_k|^2} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N) \\ \Rightarrow \begin{cases} \text{一阶矩/均值 } \bar{\tau} = \sum_{i=0}^N [f(\tau_i) \cdot \tau_i] \\ \text{二阶矩/标准差 } \sigma_\tau = \begin{cases} \text{法1: } \sqrt{\sum_{i=0}^N f(\tau_i) (\tau_i - \bar{\tau})^2} \\ \text{法2: } \sqrt{\overline{\tau^2} - (\bar{\tau})^2} \quad \text{其中 } \overline{\tau^2} = \sum_{i=0}^N \left(\frac{|\alpha_i|^2}{\sum_{n=0}^N |\alpha_n|^2} \cdot \tau_i^2 \right) \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

其中的 $\bar{\tau}$ 即为平均附加延迟， σ_τ 即为 RMS（方均根）时延拓展

当多径分量数很大时，离散求和改为连续积分：

$$PDP = f(\tau) = \frac{|h(\tau)|^2}{\int |h(\tau)|^2 d\tau}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{一阶矩/均值 } \bar{\tau} = \int_0^{\infty} f(\tau) \cdot \tau d\tau \\ \text{二阶矩/标准差 } \sigma_{\tau} = \begin{cases} \text{法1: } \sqrt{\int f(\tau)(\tau - \bar{\tau})^2 d\tau} \\ \text{法2: } \sqrt{\overline{\tau^2} - (\bar{\tau})^2} \quad \text{其中 } \overline{\tau^2} = \int \left(\frac{|h(\tau)|^2}{\int |h(\tau)|^2 d\tau} \cdot \tau^2 \right) d\tau \end{cases} \end{cases}$$

常见信道的PDP：单边指数分布（如瑞利信道）

$$f(\tau) = \frac{1}{\bar{\tau}} e^{-\frac{\tau}{\bar{\tau}}} \quad (\tau \geq 0)$$

$$\text{其中 } \bar{\tau} = \int_0^{+\infty} f(\tau) \cdot \tau d\tau$$

$$\text{则其 均方根时延扩展: } \sigma_{\tau} = \sqrt{\int f(\tau)(\tau - \bar{\tau})^2 d\tau} = \bar{\tau}$$

4. 相干带宽

通过 信道相干带宽 的 频谱分量 以 几乎相同的增益和线性相位 通过（很强的幅度相关性）

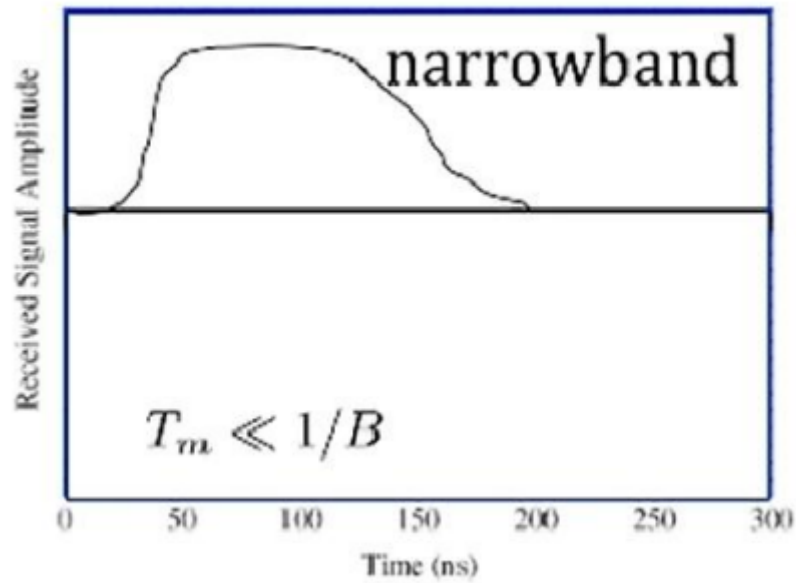
计算：

$$\begin{cases} \rho = 0.9 \Rightarrow B_c \approx \frac{1}{50\sigma_{\tau}} \\ \rho = 0.5 \Rightarrow B_c \approx \frac{1}{5\sigma_{\tau}} \end{cases}$$

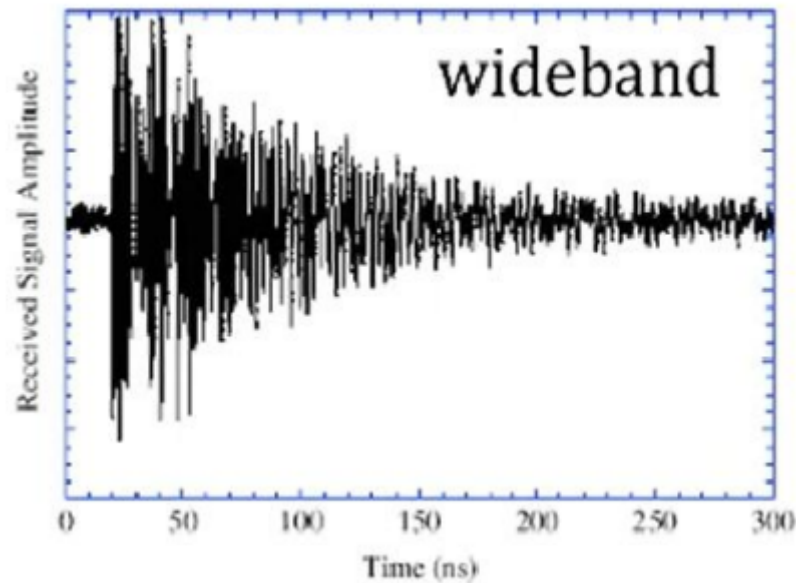
若 信号的符号带宽 小于 信道的相干带宽，则信号经历 平坦衰落

若 信号的符号带宽 大于 信道的相干带宽，则信号经历 频率选择性衰落

信号的符号带宽 小于 信道的相干带宽（窄带）—— 信号的符号周期 大于 信道的时延拓展，在时域上表现为 信号的多个时延分量无法区分（重叠），可以近似认为所有的多径分量同时到达



信号的符号带宽 大于 信道的相干带宽（宽带）—— 信号的符号周期 小于 信道的时延拓展，在时域上表现为 信号的多个时延分量可以区分（无重叠）



5. 窄带衰落信道模型 / 平坦衰落信道模型（时不变）

（假设：线性时不变多径信道）

（1）瑞利信道模型

（不存在LOS分量）

推导：

由前可知，线性时不变多径信道 的 冲激响应：

$$h(\tau) = \sum_{n=0}^N \delta(\tau - \tau_n) \alpha_n e^{j\phi_n}$$

对于窄带模型，近似认为所有时延分量同时到达：

$$h(\tau) = \sum_{n=0}^N \alpha_n e^{j\phi_n}$$

$$\text{衰落系数: } \beta = \sum_{i=0}^N a_i e^{j\phi_i} = \sum_{i=0}^N (a_i \cos \phi_i + j \sin \phi_i) = \sum_{i=0}^N [(\beta_I)_i + j(\beta_Q)_i]$$

$$\text{记 } \beta = a e^{j\phi} = \beta_I + j\beta_Q$$

$$\text{若: } \begin{cases} \text{多径数 } N \text{ 很大} \\ \text{不存在直达径分量} \end{cases}$$

因为 $(\beta_I)_i$ 和 $(\beta_Q)_i$ 都是独立同分布

$$\text{则 } \begin{cases} \beta_I, \beta_Q \sim N(0, \sigma^2) \\ \beta_I, \beta_Q \text{ 相互独立} \end{cases}$$

(... 推导 ...)

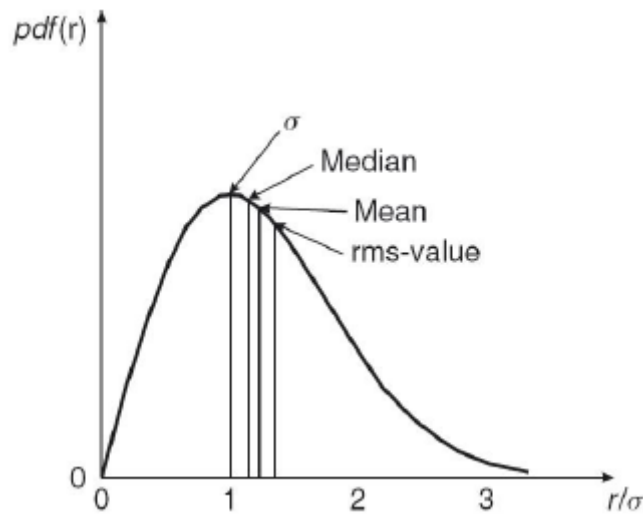
$$\text{则 } \begin{cases} a \sim \text{Rayleigh}(\sigma^2) \text{ 即 } f_A(a) = \begin{cases} \frac{a}{\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} & (0 \leq a < \infty) \\ 0 & (a < 0) \end{cases} \\ \phi \sim U(-\pi, \pi) \text{ 即 } f_\Phi(\phi) = \frac{1}{2\pi} \quad (-\pi < \phi < \pi) \\ a, \phi \text{ 相互独立} \end{cases}$$

其中 σ^2 是 β_I, β_Q 的方差

注意:

1. 瑞利分布在实际测量中非常准确
2. 在瑞利衰落中不存在视距分量，因此是最差场景的结果
3. 仅仅依赖于单一参数 σ
4. 计算其他参数，如中断率、功率分布等非常方便

统计特性



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{均值 } \bar{a} = \int_0^{\infty} a f_A(a) da = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \\ \text{均方值 } \overline{a^2} = \int_0^{\infty} a^2 f_A(a) da = 2\sigma^2 \int_0^{\infty} m e^{-m} dm = 2\sigma^2 \\ \text{均方根 } a_{rms} = \sqrt{\overline{a^2}} = \sqrt{2}\sigma \\ \text{方差 } D = \overline{a^2} - (\bar{a})^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2 \approx 0.429\sigma^2 \\ \text{中值 } a_{50} = \sqrt{2 \ln 2} \sigma \approx 1.18\sigma \\ \max \{f_A(a)\} \text{ 在 } a = \sigma \text{ 处} \end{array} \right.$$

功率分布

假设 小尺度衰落前的信号功率 为 P_0

则 小尺度衰落后的接收信号功率 $P_r = a^2 P_0$ 即 $a = \sqrt{\frac{P_r}{P_0}}$

$$f_{P_r}(p) = \frac{\sqrt{\frac{p}{P_0}}}{\sigma^2} e^{-\frac{p}{2\sigma^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{P_0} \frac{1}{2\sqrt{p}}} = \frac{1}{2\sigma^2 \cdot P_0} e^{-\frac{p}{2\sigma^2 \cdot P_0}} = \frac{1}{\bar{P}} e^{-\frac{p}{\bar{P}}}$$

其中 $\bar{P} = 2\sigma^2 \cdot P_0$ 为 基于瑞利信道的平均接收功率

接收功率 P_r 服从指数分布

中断率

$$\left\{ \begin{array}{l} Pr[a \leq a_{\min}] = \int_0^{a_{\min}} f_A(a) da = 1 - e^{-\frac{a_{\min}^2}{2\sigma^2}} \text{ 当 } a_{\min} \text{ 较小时 } \approx \frac{a_{\min}^2}{2\sigma^2} \\ Pr[P_r < P_{\min}] = \int_0^{P_{\min}} \frac{1}{\bar{P}} e^{-\frac{p}{\bar{P}}} dp = 1 - e^{-\frac{P_{\min}}{\bar{P}}} \end{array} \right.$$

若 保证不超过 x 的中断率 (功率式)

$$\text{则 } 1 - e^{-\frac{P_{\min}}{\bar{P}}} < x \text{ 即 } FM = \frac{\bar{P}}{P_{\min}} > \frac{1}{\ln \frac{1}{1-x}} \stackrel{\text{当 } x \text{ 较小时}}{\approx} \frac{1}{x}$$

(注：当同时考虑大尺度衰落和小尺度衰落的衰落余量时，总衰落余量线性相乘、分贝相加)

(2) 莱斯信道模型

(存在一个固定的LOS分量)

包络 (个人感觉：小尺度衰落造成的幅度损耗) 服从莱斯分布：

$$f(a) = \frac{a}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2 + A^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{Ar}{\sigma^2}\right) \quad (z \geq 0, A \geq 0)$$

$$\begin{cases} A \text{ 为 LOS分量的衰减} \\ 2\sigma^2 \text{ 为 非LOS分量的衰减的均值} \\ I_0 \text{ 为 修正的零阶贝塞尔函数} \end{cases}$$

$$\text{平均衰减 } \bar{P}_r = \int_0^\infty a^2 f(a) da = A^2 + 2\sigma^2$$

$$\text{莱斯系数 } K = \frac{A^2}{2\sigma^2}$$

$$\begin{cases} K \rightarrow 0 \text{ 则 莱斯分布回退为瑞利分布} \\ K \text{ 足够大 则 莱斯分布可近似为 } N(A, \sigma^2) \\ \left(\text{注：当 } x \gg 1 \text{ 时, } I_0(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x \right) \end{cases}$$

(3) Nakagami信道模型 *

6. 窄带衰落信道模型 (时变)

(假设：线性时变多径信道)

对于信道的时变特性，通常使用衰落系数的自相关函数来分析：(相同 Δt 下，自相关函数值小，则变化越快 即 变化越剧烈)

$$\text{设 } \beta(t) \text{ 为信道增益, 则有 } A_\beta(t, t + \Delta t) = E[\beta(t)\beta^*(t + \Delta t)]$$

假设信道是广义平稳的，则有

广义平稳随机过程：随机过程的一阶矩、二阶矩不随时间t发生变化

已知 信道增益的自相关函数 和 信道增益的功率谱密度 构成一对傅里叶变换对

$$A_\beta(\Delta t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} S_\beta(f)$$

所以可以先求信道增益的功率谱密度（频域），然后做傅里叶逆变换得到信道增益的自相关函数

信道增益的功率谱密度可以等价转换为多普勒谱

$$S_{\beta}(f) = S_{\beta}(f_d) \begin{cases} \text{功率谱密度 } S_{\beta}(f) \text{ 横轴为频率 } f, \text{ 中心为载频 } f_c \\ \text{多普勒谱 } S_{\beta}(f_d) \text{ 横轴为多普勒频移 } f_d, \text{ 中心为 } 0 \end{cases}$$

又知：

$$f_d = \frac{v \cos \theta}{\lambda} = (f_d)_{\max} \cos \theta, \theta \in [0, \pi]$$

则有：

$$S_{\beta}(f_d) = S_{\beta}(\theta)$$

$$\text{设第 } i \text{ 条路径} \begin{cases} \text{以 } \theta_i \text{ 到达的概率 } p_i \\ \text{在 } \theta_i \text{ 方向上的天线增益 } G_i \end{cases} \quad \text{则 } S_{\beta}(\theta) = \bar{P}_r \times \sum_i p_i G_i$$

Clarke 模型（均匀散射环境）

假设：不存在LOS分量 + 信号从各个方向到达的概率相同（均匀散射）+ 各个方向的天线增益相同

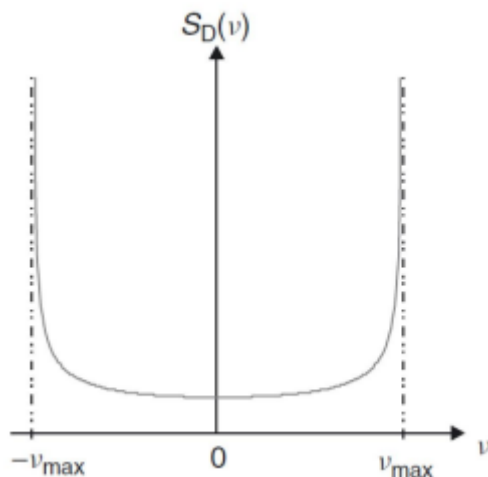
则：

$$\begin{cases} p(\theta) = p(-\theta) = \frac{1}{2\pi} \\ G(\theta) = G(-\theta) = G_0 \end{cases} \Rightarrow S_{\beta}(\theta) = \bar{P}_r \cdot \frac{G_0}{\pi}$$

（对于垂直 $\frac{\lambda}{4}$ 天线，则 $G_0 = 1.5$ ）

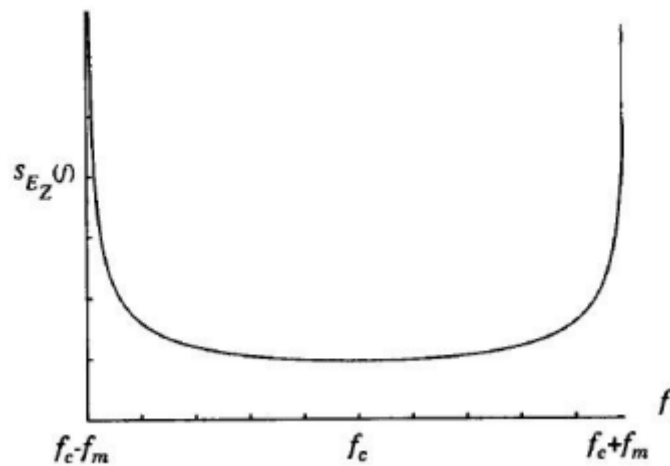
由 功率-到达角谱 推导 功率-多普勒频偏谱（Jakes谱）：

$$S_{\beta}(f_d) = S_{\beta}(\theta) \left| \frac{d\theta}{df_d} \right| = \begin{cases} \bar{P}_r \cdot \frac{1.5}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{(f_d^{\max})^2 - f_d^2}}, & -f_d^{\max} < f_d < f_d^{\max} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



推导 功率-频率谱（功率谱密度）：

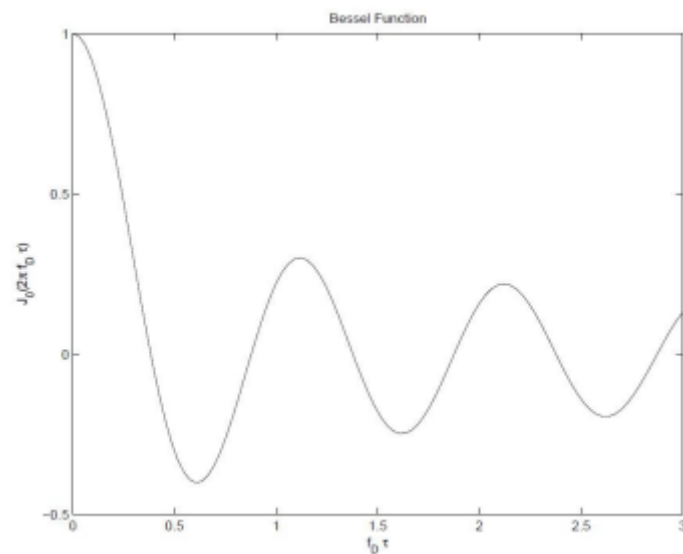
$$S_{\beta}(f) = \begin{cases} \bar{P}_r \cdot \frac{1.5}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{(f_d^{\max})^2 - (f - f_c)^2}}, & f_c - f_d^{\max} < f < f_c + f_d^{\max} \\ 0, & otherwise \end{cases}$$



由 功率谱密度 求 自相关函数:

$$A_{\beta}(\Delta t) = \mathcal{F}^{-1}[S_{\beta}(f)] = \bar{P}_r \cdot J_0(2\pi f_d^{\max} \Delta t)$$

其中 $J_0(\cdot)$ 为 零阶贝塞尔函数



横轴: $f_d^{\max} \Delta t$

纵轴: 自相关函数值

由图可知, 纵轴值为0时, 横轴的值约为0.4

$$f_d^{\max} \Delta t \approx 0.4 \Rightarrow \begin{cases} v \Delta t \approx 0.4 \lambda \text{ 即以 } v \text{ 运动 } 0.4 \lambda \text{ 后不相关} \\ \Delta t \approx \frac{0.4}{f_d^{\max}} = \frac{0.4 \lambda}{v} \text{ 即 相干时间 } T_c \approx \frac{0.4}{f_d^{\max}} = \frac{0.4 \lambda}{v} \end{cases}$$

$$\left(\sqrt{\frac{9}{16\pi}} \approx 0.4 \right)$$

电平通过和衰落统计

电平通过率 N_R ：窄带增益包络 $z(t)$ 从正向穿过某一电平门限 Z 的平均速率（信道变差的频率）

基于Clarke模型假设：

$$\begin{cases} \text{窄带增益包络 } z(t) = |\beta(t)| \\ \text{信道平均增益 } E[z^2(t)] = 2\sigma^2 \end{cases}$$

经过推导，可以得到：

$$N_R = \sqrt{2\pi} \cdot f_d^{\max} \cdot \frac{Z}{\sqrt{2\sigma^2}} e^{-\frac{Z^2}{2\sigma^2}}$$

平均衰落时间 $\bar{\tau}$ ：窄带增益包络 $z(t)$ 低于某一电平门限 Z 的平均时间（信道变差的时长）

经过推导，可以得到：

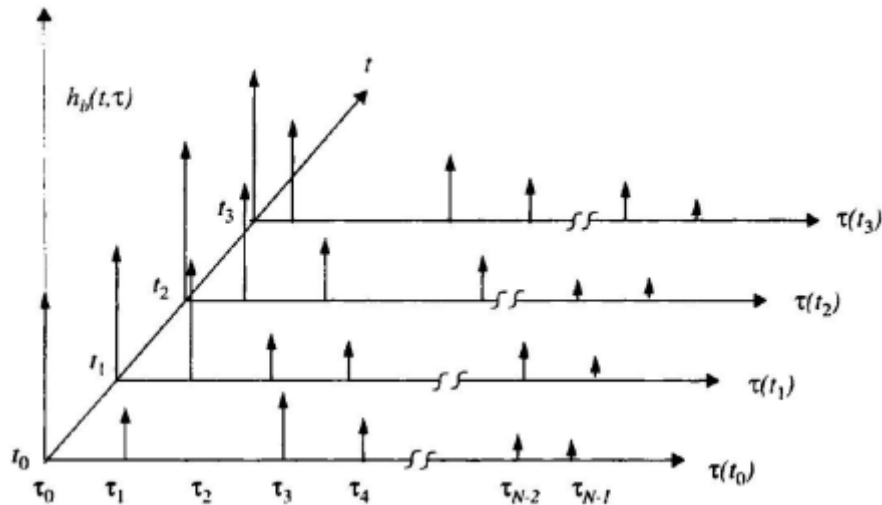
$$\bar{\tau} = \frac{\sigma}{Z f_d^{\max} \sqrt{\pi}} \left[e^{\frac{Z^2}{2\sigma^2}} - 1 \right]$$

7. 宽带衰落模型 / 频率选择性衰落模型

线性时变多径信道：

$$h(t, \tau) = \sum_{n=0}^{N(t)} \delta(\tau - \tau_n(t)) \alpha_n(t) e^{j\phi_n(t)}$$

对于宽带衰落模型，需要综合考虑 时间域 和 时延域



(1) 附加时延段 和 分析带宽

将信道冲激响应的多径时延 τ 离散化为相同的时延段 即 附加时延段 $\Delta\tau$ ，每个时延段宽度由系统的分析带宽决定：

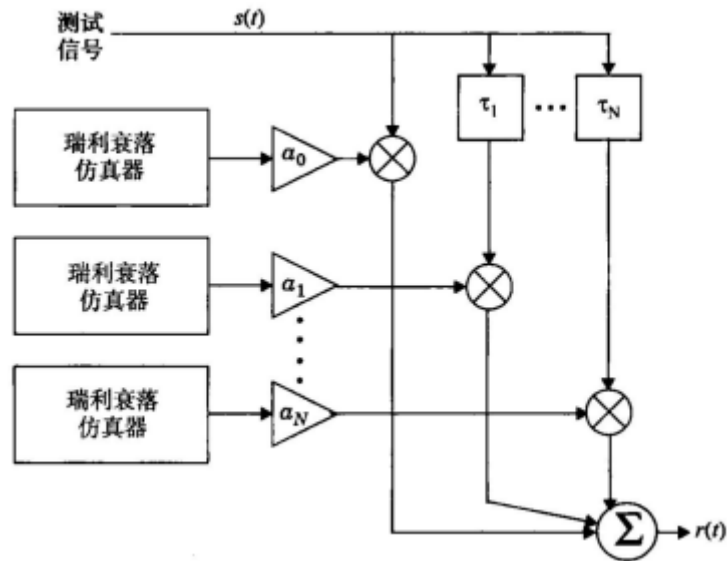
$$B_{sys} = \frac{2}{\Delta\tau}$$

(2) WSS-US假设

一般情况下，线性时变多径宽带信道： $A_h(\tau, \tau + \Delta\tau; t, t + \Delta t) = E[h^*(\tau, t)h(\tau + \Delta\tau, t + \Delta t)]$

$$\begin{cases} WSS假设: A_h(\tau, \tau + \Delta\tau; t, t + \Delta t) = A_h(\tau, \tau + \Delta\tau; \Delta t) \\ US假设: A_h(\tau, \tau + \Delta\tau; \Delta t) = A_h(\tau; \Delta t) \end{cases}$$

(3) 抽头延迟线 (TDL) 模型



(在 WSS-US假设 下)

1. 包含M个时变抽头，抽头间隔 $\Delta\tau < \frac{1}{B}$
2. 信道持续时间超过延迟拓展 $M\Delta\tau > \sigma_\tau$
3. 每一个抽头是一个独立随机过程（瑞利、莱斯）

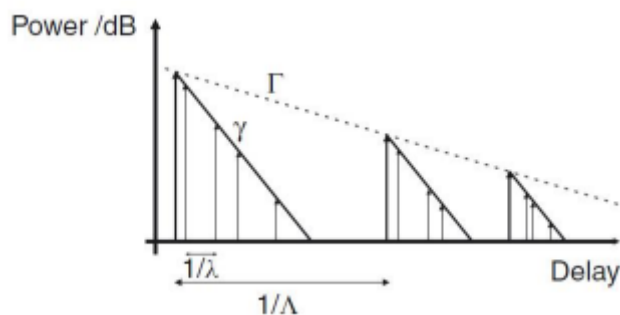
(4) 基于簇-径的宽带信道模型

在许多小尺度衰落信道实际测量中，多径分量的到达可以 往往按照“簇”和“径”区分

Saleh - Valenzuela (S-V) 信道模型

1. 簇的到达服从均值为 Λ 的泊松分布
2. 一个簇内，径的到达服从另一个泊松分布

PDP:



8. 空时信道模型

(...)