

第8章 MIMO

8.1 MIMO 和 空时复用

8.1.1 MIMO

8.1.2 空时复用

8.2 MIMO系统模型

8.3 MIMO信道矩阵分解

8.3.1 问题引入

8.3.2 解决方法

附：奇异值分解

8.4 MIMO系统容量

8.4.1 MIMO系统容量

8.4.2 功率分配问题

第8章 MIMO

多入多出系统 Multiple Input Multiple Output Systems, MIMO

8.1 MIMO 和 空时复用

8.1.1 MIMO

“多入多出”指 发射端和接收端各有多个天线阵元

8.1.2 空时复用

空分复用（Spatial Multiplexing）：收-发天线间存在 有大量的信道链路，系统允许在多条数据链路上实现 并行传输，从而提高传输速率；

可以将原始高速数据拆分为多个低速数据流，并行传 输，在同等发射功率的条件下提高数据传输速率

根据香农公式可知，单信道系统的频谱效率（单位带宽的信道容量）：

$$\tilde{C} = \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \stackrel{\gamma = \frac{S}{N}}{=} \begin{cases} \frac{\gamma}{\ln 2}, & \gamma \text{ 小} \\ \log_2(\gamma), & \gamma \text{ 大} \end{cases}$$

对于MIMO系统，可以基于空分复用构造出多个并行信道，假设：

- (1) 信道之间独立同分布
- (2) 信道之间有相同的增益、信噪比等

则 MIMO系统的频谱效率：

设 γ_i 为第 i 个信道的信噪比， γ 为 *MIMO* 输出总信噪比

则有 $\gamma = N\gamma_i$

$$\tilde{C} = \sum_{i=1}^N \log_2(1 + \gamma_i) = N \log_2 \left(1 + \frac{\gamma}{N} \right) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\ln 2}, & \gamma_{\text{小}} \\ \dots, & \gamma_{\text{大}} \end{cases}$$

可见：

- (1) MIMO系统在低信噪比情况下与单信道系统的频谱效率差不多
- (2) MIMO系统在高SNR条件下更有效

8.2 MIMO系统模型

(word图)

假设：

1. 每条信道：

1. 准静态
2. 平坦衰落
3. 独立同分布

1. 均值为0 即 $E[x_i] = 0$

2. 功率相同 即 $E[x_i^2]$ 相同，记为P，即每个符号的平均功率

2. 噪声为 空时白噪声，即在空间和时间上都独立同分布

则有：

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_r \end{pmatrix}_{r \times 1} = \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{r1} & \dots & h_{rt} \end{pmatrix}_{r \times t} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_t \end{pmatrix}_{t \times 1} + \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \dots \\ n_r \end{pmatrix}_{r \times 1}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}$$

对于线性接收机，有：

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{c}^T \mathbf{y}$$

现在希望求出公式中的 \mathbf{c}^T

第一种情况： $r = t$

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{y} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{n}$$

$$\text{取 } \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{y} \text{ 则 } \mathbf{c}^T = \mathbf{H}^{-1}$$

第二种情况（实际中常常是）： $r > t$

1. 迫零 (ZF) 接收机

1. 推导：

$$\text{希望 } \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2$$

$$\text{由 } \frac{d}{dx} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 = 0 \text{ 可得 } \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y}$$

其中 $(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T$ 即 \mathbf{H} 的伪逆矩阵

2. 不足:

3. 误码率性能: 相当于 $M=r-t+1$ 根天线进行MRC的接收分集系统

2. 线性最小均方误差 (LMMSE) 接收机

$$\text{希望 } \min_{\mathbf{c}} E [\|\mathbf{c}^T \mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2] = \min_{\mathbf{c}} E [\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2]$$

推导法1: 矩阵求导

推导法2: 正交性:

令 误差和接收信号正交, 则:

$$\begin{aligned} E [\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{y}^T] &= E [(\mathbf{c}^T \mathbf{y} - \mathbf{x}) \mathbf{y}^T] = E [\mathbf{c}^T \mathbf{y} \mathbf{y}^T - \mathbf{x} \mathbf{y}^T] = 0 \\ \Rightarrow \mathbf{c}^T &= E [\mathbf{x} \mathbf{y}^T] \{E [\mathbf{y} \mathbf{y}^T]\}^{-1} = \mathbf{R}_{xy} \mathbf{R}_{yy}^{-1} \end{aligned}$$

(0) \mathbf{R}_{xx}

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xx} &= E [\mathbf{x} \mathbf{x}^T] \\ \text{因为 } \begin{cases} E [x_i x_i] = E [x_i^2] = P \\ E [x_i x_j] = 0 \text{ (独立)} \end{cases} \\ \text{所以 } \mathbf{R}_{xx} &= E [\mathbf{x} \mathbf{x}^T] = P \mathbf{I}_t \end{aligned}$$

(1) \mathbf{R}_{xy}

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xy} &= E [\mathbf{x} \mathbf{y}^T] = E [\mathbf{x} (\mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{n})^T] = E [\mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{H}^T] + E [\mathbf{x} \mathbf{n}^T] \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H} \text{ 是 } \begin{cases} \text{确定矩阵} \\ \text{(或)} \\ \text{已知的、与 } \mathbf{x} \text{ 独立的随机矩阵} \end{cases} \\ E [\mathbf{x} \mathbf{n}^T] = 0 \end{array} \right. \Rightarrow E [\mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{H}^T] = E [\mathbf{x} \mathbf{x}^T] \mathbf{H}^T = P \mathbf{H}^T \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_{xy} = E [\mathbf{x} \mathbf{y}^T] = P \mathbf{H}^T$$

(2) \mathbf{R}_{yy}

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yy} &= E [\mathbf{y} \mathbf{y}^T] = \mathbf{H} E [\mathbf{x} \mathbf{x}^T] \mathbf{H}^T + \mathbf{H} E [\mathbf{x} \mathbf{n}^T] + E [\mathbf{x} \mathbf{n}^T] \mathbf{H}^T + E [\mathbf{n} \mathbf{n}^T] \\ &= \mathbf{H} (P \mathbf{I}^T) \mathbf{H}^T + 0 + 0 + \sigma_n^2 \mathbf{I}_r \\ &= P \mathbf{H} \mathbf{H}^T + \sigma_n^2 \mathbf{I}_r \end{aligned}$$

$$\text{所以有: } \mathbf{c}^T = \mathbf{R}_{xy} \mathbf{R}_{yy}^{-1} = P \mathbf{H}^T (P \mathbf{H} \mathbf{H}^T + \sigma_n^2 \mathbf{I}_r)^{-1}$$

$$\text{也可等价转换为 } \mathbf{c}^T = (P \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \sigma_n^2 \mathbf{I}_t)^{-1} P \mathbf{H}^T$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \hat{\mathbf{x}}_{LMMSE} &= \mathbf{c}^T \mathbf{y} = \mathbf{P} \mathbf{H}^T (\mathbf{P} \mathbf{H} \mathbf{H}^T + \sigma_n^2 \mathbf{I}_r)^{-1} \mathbf{y} = (\mathbf{P} \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \sigma_n^2 \mathbf{I}_t)^{-1} \mathbf{P} \mathbf{H}^T \mathbf{y} \\ &\approx \begin{cases} (\mathbf{P} \mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{P} \mathbf{H}^T \mathbf{y} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y} \quad (\gamma \text{很大时, 接近ZF接收机, 可能会放大噪声}) \\ (\sigma_n^2 \mathbf{I}_t)^{-1} \mathbf{P} \mathbf{H}^T \mathbf{y} = \frac{P}{\sigma_n^2} \mathbf{H}^T \mathbf{y} \quad (\gamma \text{很小时, 倾向于抑制噪声}) \end{cases} \end{aligned}$$

8.3 MIMO信道矩阵分解

8.3.1 问题引入

根据上面所说的模型：

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{n}$$

可知，对于接收端的每个 y_i ，都与发射端的每个 x_i 都有关

但是我们将信道解耦，即使发射端和接收端呈现 $x_i \leftrightarrow y_i$ 的一一对应关系

问题可等效为：希望信道矩阵 \mathbf{H} 为对角阵

8.3.2 解决方法

(注：下标为0的指原本的数据，下标为1的指处理后的数据)

将原信道矩阵 \mathbf{H}_0 进行奇异值分解 (SVD)：

$$(\mathbf{H}_0)_{r \times t} = \mathbf{U}_{r \times r} \mathbf{\Sigma}_{r \times t} \mathbf{V}_{t \times t}^H$$

其中 $\mathbf{\Sigma}_{r \times t}$ 即 有对角阵性质的新信道矩阵 $(\mathbf{H}_1)_{r \times t}$

代入MIMO信道模型中，有：

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{H}_0 \mathbf{x}_0 + \mathbf{n}_0 = \mathbf{U} \mathbf{H}_1 \mathbf{V}^H \mathbf{x}_0 + \mathbf{n}_0$$

对应操作：

1. 发射机：预编码

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{V} \mathbf{x}_0$$

2. 接收机：接收成形

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{U}^H \mathbf{y}_0$$

可得：

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{H}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{n}_1$$

其中噪声：

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{U}^H \mathbf{n}_0$$

$$\text{则 } E[\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_1^H] = E[\mathbf{U}^H \mathbf{n}_0 \mathbf{n}_0^H \mathbf{U}] = \sigma_n^2 \mathbf{I}_t$$

附：奇异值分解

适用：任何形状的矩阵

步骤：

1. 求奇异值对角阵 Σ (\mathbf{H} 的奇异值是 $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ 的特征值 $\Rightarrow \det(\mathbf{H}^T \mathbf{H} - \lambda \mathbf{I}) = 0$)
2. 求右奇异矩阵 \mathbf{V} (其列向量是 $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ 的单位特征向量 $\Rightarrow (\mathbf{H}^T \mathbf{H} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{v}_i = 0$)
3. 求左奇异矩阵 \mathbf{U} ($\mathbf{H} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T \Rightarrow$ 列向量 $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{H} \mathbf{v}_i$)

8.4 MIMO系统容量

8.4.1 MIMO系统容量

利用香农公式：

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right)$$

可知：第*i*条信道，单位带宽的信息容量：

$$c = \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) = \log_2 \left(1 + \frac{\sigma_i^2 P_i}{\sigma_n^2} \right) \text{ bit} / (s \cdot \text{Hz})$$

其中的 σ_i 即为 信道矩阵 \mathbf{H} 的第*i*个奇异值

MIMO系统容量：

$$c_{sys} = \sum_{i=1}^t \log_2 \left(1 + \frac{\sigma_i^2 P_i}{\sigma_n^2} \right) \text{ bit} / (s \cdot \text{Hz})$$

8.4.2 功率分配问题

问题：当发射总功率不超过 P 时，如何在各个信道上分配功率，才能使得 MIMO 系统容量最大？

$$\begin{aligned} \max c_{sys} &= \sum_{i=1}^t \log_2 \left(1 + \frac{\sigma_i^2 P_i}{\sigma_n^2} \right) \\ s.t. \quad &\sum_{i=1}^t P_i \leq P \end{aligned}$$

解：利用拉格朗日乘子法：

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^t \log_2 \left(1 + \frac{\sigma_i^2 P_i}{\sigma_n^2} \right) + \lambda \left(P - \sum_{i=1}^t P_i \right) \\ \text{令 } \frac{d}{dP_i} f &= 0 \text{ 可得 } P_i = \frac{1}{\lambda} - \frac{\sigma_n^2}{\sigma_i^2} \end{aligned}$$

注水算法：

$$P_i = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} - \frac{\sigma_n^2}{\sigma_i^2}, & \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\sigma_n^2}{\sigma_i^2} > 0 \right) \\ 0, & \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\sigma_n^2}{\sigma_i^2} \leq 0 \right) \end{cases}$$

注：

1. 信噪比越小，分配功率越大；
2. 若信噪比大于一定门限，则放弃该信道