第9章 MCM 和 OFDM
- 9.1 问题引入
- 9.2 基本原理
- 9.3 模拟多载波调制系统
    - 9.3.1 通用
    - 9.3.2 频谱不重叠
        - 1. 实现
        - 2. 接收机
    - 9.3.3 OFDM
        - 1. OFDM
        - 2. OFDM的优势
        - 3. OFDM的接收机
        - 4. OFDM的问题
        - 5. 子载波衰落的抑制
- 9.4 数字OFDM系统
    - 9.4.1 对发射机的初步改进（引入IDFT）
        - 1. 第一个推导
        - 2. 第二个推导
        - 3. 综合上面两个推导
        - 4. 初步改进后的发射机结构
    - 9.4.2 对发射机的进一步改进（引入CP）
        - 1. 问题引入
        - 2. 解决：循环前缀
        - 3. 发射机 和 接收机结构
        - 4. 代价
    - 9.4.3 另外要求
    - 9.4.4 OFDM系统结构总结
- 9.5 峰均功率比
    - 9.5.1 单载波系统
    - 9.5.2 OFDM系统
- 9.6 OFDM系统中的频率偏移
- 9.7 IEEE 802.11a标准
- 9.8 FDM / FDMA / OFDM / OFDMA

第9章 MCM 和 OFDM

多载波调制 Multi-Carrier Modulation

正交频分复用 Orthogonal Frequency Division Multiplexing

关系：OFDM 是 MCM 的一种实现方式

9.1 问题引入

如何提高信息传输速率（比特速率）？

1. 在 每个符号的持续时间不变 的情况下，提高 每个符号携带的比特数，即 采用更高阶的调制技术

   引起的问题：SNR（星座图上的符号点更近，相同信号功率时误码率更高）
2. 在 每个符号携带的比特数不变 的情况下，降低 每个符号的持续时间，即 增加信号的传输带宽

   引起的问题：ISI（符号周期缩短，短于信道时延扩展时，就会引起ISI，即 上一个信号的影响还未消减，下一个信号已经到来）

   > 时域上：ISI
   >
   > 频域上：频率选择性衰落

   （虽然均衡器能够消除ISI，但是：线性均衡器性能差；非线性均衡器复杂度高）

新方案 即 多载波调制 MCM：

将高速比特率分为多个子比特流，再调制到相互正交的子载波上进行传输，使得每个子信道带宽小于信道的相干带宽，进而每个子信道都经历平坦衰落

> 子载波相互正交：
>
> 1. 时域上：
> 2. 频域上：

> 在一个符号周期 T 内，不同子载波之间的内积为0，即 互不干扰

9.2 基本原理

由前面所说 “使得每个子信道的带宽小于信道的相干带宽”，若均分，则有：

$$\text{子信道带宽 } B_N = \frac{\text{总信号带宽 } B}{N} \leq \text{相干带宽 } B_c$$

可知：

$$\text{对于带限信号：}\begin{cases} T_N = \frac{1}{R_N} = \frac{1}{B_N} \\ \\ T = \frac{1}{R} = \frac{1}{B} \end{cases}$$

$$\text{即 } T_N \geq \frac{1}{B_c} \approx \sigma_\tau \text{ 方均根时延扩展}$$

结论：理论上，MCM系统并不改变系统的数据速率

9.3 模拟多载波调制系统

9.3.1 通用

第k个子载波：

$$s_k(t) = X_k g(t) \cos(2\pi f_k t + \phi_k),\ k = 0, 1, \ldots, (N-1)$$

$$\text{其中}\begin{cases} X_k \text{ 为 经过调制后得到的复数符号} \\ \\ f_k \text{ 为 第}k\text{个子载波频率} \end{cases}$$

合并后得到：

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k(t) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k g(t) \cos(2\pi f_k t + \phi_k)$$

对于 升余弦滚降脉冲成形滤波器：

$$B_N = \frac{1 + \beta + \varepsilon}{T_N}$$

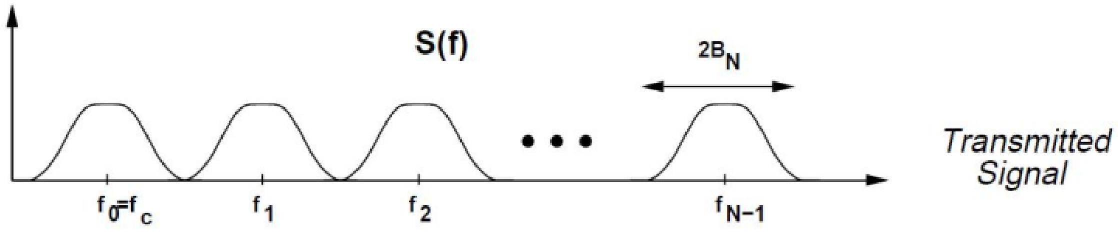
$$\text{其中}\begin{cases} \beta \text{ 为 升余弦滚降系数} \\ \\ \frac{\varepsilon}{T_N} \text{ 为 成形脉冲时间受限而增加的带宽} \end{cases}$$

9.3.2 频谱不重叠

1. 实现

为保证子载波正交，则令子载波间频谱不重叠：

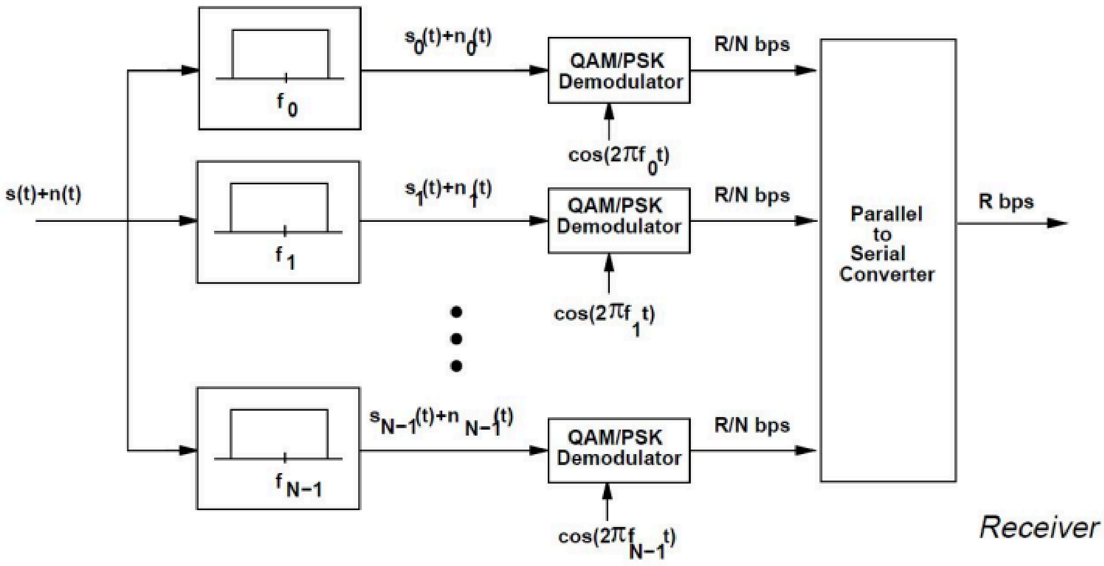
$$\Delta f = f_k - f_{k-1} \geq B_N$$



可以发现，频谱利用率未达极限

2. 接收机

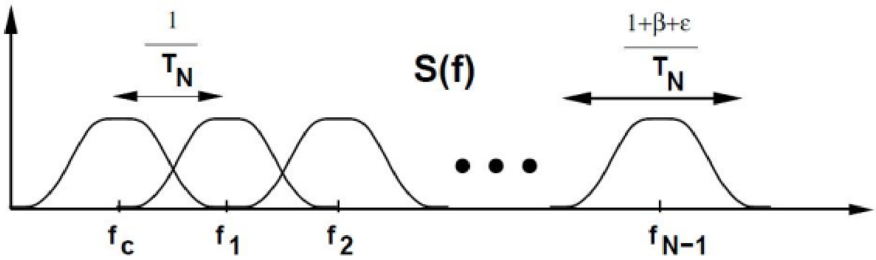
（使用滤波器）



9.3.3 OFDM

1. OFDM

在保证子载波正交的前提下，允许子载波间频谱重叠：



如图，此时达到极限情况

此时有：

1. 子载波频率间隔：

$$\Delta f=\frac{1}{T_N}<\frac{1+\beta+\varepsilon}{T_N}=B_N$$

2. 子载波：

$$\text{在 } t\in[0,T_N]\text{ 内，对于任意子载波初相位 }\{\phi_i\}\text{，有：}$$

$$\text{子载波}\left\{\cos\left[2\pi\left(f_0+\frac{i}{T_N}\right)t+\phi_i\right],\ i=0,1,2,\dots\right\}\text{ 近似为一组正交基：}$$

$$\frac{1}{T_N}\int_{\tau}^{\tau+T_N}\Psi_k(t)\Psi_l(t)dt=\begin{cases}1,\ k=l\\ \\ 0,\ k\neq l\end{cases}$$

3. 信道总带宽：

$$B=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\alpha+\varepsilon}{T_N}+(N-1)\cdot\frac{1}{T_N}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\alpha+\varepsilon}{T_N}=\frac{N+\alpha+\varepsilon}{T_N}\approx\frac{N}{T_N}\text{即原带宽}$$

2. OFDM的优势

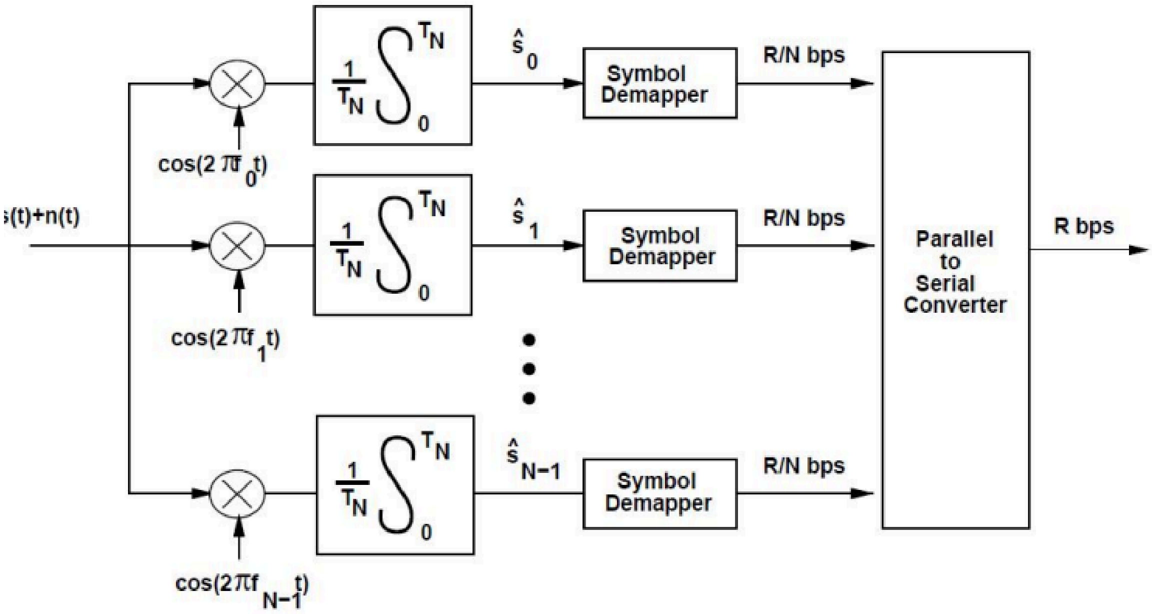
1. 子载波频谱之间不需要保护间隔，提高频谱利用率（相比于单载波调制方法，频谱效率可以近似提升一倍）
2. 不同子载波上可以采用不同的调制方式，灵活性大（增益大的子载波则采用高阶的调制方式）
3. 通过将高速数据流分成多个并行低速子数据流 ，增大了符号持续时间，抗ISI能力增强

$$T_N = NT_s$$

4.

3. OFDM的接收机

（相关接收）



4. OFDM的问题

1. 正交子载波容 易受到定时偏差、频率偏差和多普勒频移的影响，处理不好会大 大降低系统性能。（每个子载波带宽减小，较小的频偏就会导致较大的子载波间干扰 （Inter-Carrier Interference, ICI））
2. 多个子载波信号叠加，有时加强，有时削弱，造成OFDM有较大的峰 均功率比（Peak-to-Average Power Ratio，PAPR）（子载波个数越多 即 N越大，PAPR越大）

5. 子载波衰落的抑制

1. 时频域交织编码：将数据比特编成码字，在时、频域上进 行交织，通过子信道传送，使得码字中的各个比特经历独 立的衰落
2. 频域均衡 / 预编码：（？）
3. 自适应加载：针对各子信道增益的不同，赋予不同的数据 速率和发送功率

9.4 数字OFDM系统

9.4.1 对发射机的初步改进（引入IDFT）

1. 第一个推导

$$\text{射频信号 } D(t)=\mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{N-1} d(k)e^{j2\pi\left(f_0+\frac{k}{T_N}\right)t}\right]=\mathrm{Re}\left[\left(\sum_{k=0}^{N-1} d(k)e^{j2\pi\frac{k}{T_N}t}\right)e^{j2\pi f_0 t}\right]$$

$$\text{可知 等效基带信号 } D_L(t)=\sum_{k=0}^{N-1} d(k)e^{j2\pi\frac{k}{T_N}t}$$

$$\text{在}T_N\text{上进行}N\text{点采样 } D_L(n)=D_L(t)\big|_{t=n\cdot\frac{T_N}{N}}=\sum_{k=0}^{N-1} d(k)e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

$$即\ 对\ \{d(k)\}进行IDFT\ /\ IFFT$$

2. 第二个推导

用 循环卷积矩阵 形式 来表达 信道模型：

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{H}_c\boldsymbol{x}$$

可以证明：任意循环矩阵 $\boldsymbol{H}_c$ ，都可以被傅里叶变换矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 对角化：

$$\boldsymbol{H}_c=\boldsymbol{Q}^H\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}$$

$$其中\begin{cases}\boldsymbol{Q}\text{ 是 傅里叶变换矩阵}\\ \\ \boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}\left[H_0,\ \dots,\ H_{N-1}\right]\text{ 即 信道响应}h(n)的N点DFT\end{cases}$$

> 证明：
>
> $$H_c=\begin{bmatrix}h_0 & h_{N-1} & \cdots & h_1\\ h_1 & h_0 & \cdots & h_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ h_{N-1} & h_{N-2} & \cdots & h_0\end{bmatrix}_{N\times N}=\begin{bmatrix}h_0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & h_0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & h_0\end{bmatrix}_{N\times N}+\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & h_1\\ h_1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}_{N\times N}+\dots+\begin{bmatrix}0 & h_{N-1} & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ h_{N-1} & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}_{N\times N}$$
>
> $$\text{记 单位循环左移位矩阵 }C=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}_{N\times N}$$
>
> $$\text{以 }N=3\text{ 为例，则 }C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\text{，可发现 }C^2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
>
> $$\text{则有 }H_c=\sum_{n=0}^{N-1}h_nC^n\ \left(\text{设 }C^0=I\right)$$
>
> $$\text{对 单位循环左移位矩阵 }C\text{ 研究：}$$
>
> $$对C求特征值和特征向量\ Cx_k=\lambda x_k\text{ 可以得到：}\begin{cases}\lambda_k=e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot k}\\ \\ x_k=\frac{1}{\sqrt{N}}\begin{bmatrix}1\\ e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot k}\\ e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot 2k}\\ \vdots\\ e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot(N-1)k}\end{bmatrix}\end{cases},(k=0,1,\dots,(N-1))$$
>
> $$\text{即 }C\cdot\begin{bmatrix}x_0 & x_1 & \cdots & x_{N-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0 & x_1 & \cdots & x_{N-1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\lambda_0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{N-1}\end{bmatrix}$$
>
> $$\text{可以发现 }\begin{bmatrix}x_0 & x_1 & \cdots & x_{N-1}\end{bmatrix}=Q^H\text{ 即 傅里叶逆变换矩阵（酉矩阵形式）}$$
>
> $$\text{即 }CQ^H=Q^HP\ \Rightarrow\ C=Q^HPQ$$
>
> $$C^i=\left(Q^HPQ\right)\left(Q^HPQ\right)\dots\left(Q^HPQ\right)=Q^HP^iQ$$
>
> $$\text{其中 }P^i\text{ 仍为 对角阵}$$
>
> $$\text{则 }H_c=\sum_{n=0}^{N-1}h_nC^n=Q^H\left(\sum_{n=0}^{N-1}h_nP^n\right)Q$$
>
> $$\text{设 }\mathit{\Lambda}=\sum_{n=0}^{N-1}h_nP^n\text{ 则 }\mathit{\Lambda}_{k,k}=\sum_{n=0}^{N-1}h_ne^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot k\cdot n}\text{ 即 }h_n的DFT\text{，记为 }H_n$$

> $$\text{得出结论：}H_c = Q^H \Lambda Q$$
> $$\text{其中}\begin{cases} Q \text{ 为 傅里叶变换矩阵（酉矩阵形式）} \\ \\ \Lambda = \operatorname{diag}(H_0, H_1, \ldots, H_{N-1}) \text{ 为 } h_n \text{的} DFT \end{cases}$$

则有：

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}_c \boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}^H \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{Q} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{X} \text{ 其中} \begin{cases} \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Q} \boldsymbol{y} \\ \\ \boldsymbol{X} = \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

3. 综合上面两个推导

1. 发射端：
    1. 比特流 经过 调制 得到 复符号 $\boldsymbol{X}$
    2. 经过 IFFT 得到 $\boldsymbol{x}$
2. 信道：
    1. 循环卷积矩阵形式 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}_c \boldsymbol{x}$
3. 接收端：
    1. 经过 FFT 得到 $\boldsymbol{Y}$
    2. 由推导知 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{X}$ 且 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵，所以 $\boldsymbol{Y}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 中的元素一一对应，仅需对应除去每个子载波的信道增益即可得到 原来的复符号 $\boldsymbol{X}$
    3. 经过 解调 得到 原来的比特流

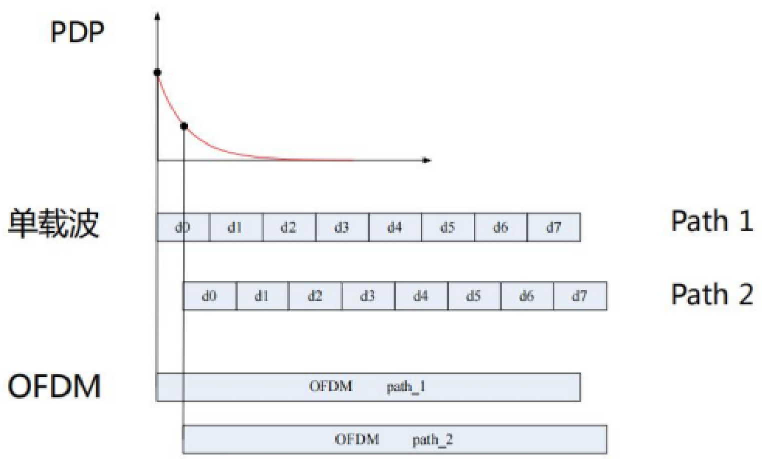
4. 初步改进后的发射机结构

比特流 - 符号调制 - 脉冲成形 - {串转并 - IDFT - 并转串} - DAC - 上变频 （- 信道 - ）

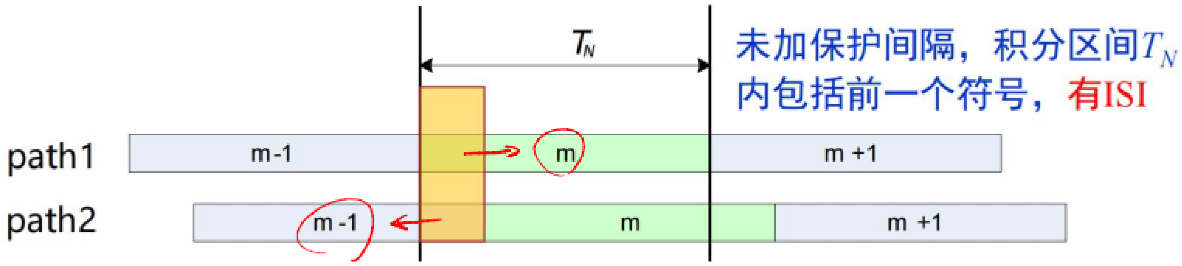
9.4.2 对发射机的进一步改进（引入CP）

1. 问题引入

观察：



会发现问题：（下图中“积分区间”对应的是模拟接收机，对于数字接收机应该是FFT的一组）

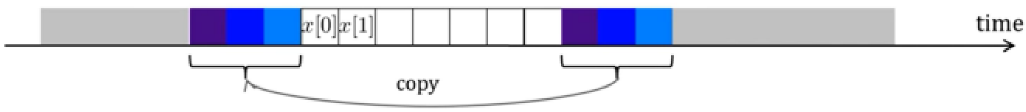


即：虽然 时延扩展 已经远小于 符号周期，但是还是存在符号之间的干扰（子载波之间的干扰 ICI）

思考：如何利用子载波的正交性消除?

2. 解决：循环前缀

加入 循环前缀 作为 保护区间：



假设将最后的 N_{cp} 个 T_s 的波形放到此 T_{OFDM} 之前，则：

如果想要消除码间串扰，则需要：

$$N_{cp} \cdot T_s \geq \tau_{\max}$$

此时对于任意一条路径，在考虑的时间区间 T_N 中，都仅仅有第m个符号的采样点

3. 发射机 和 接收机结构

1. 发射机：比特流 - 符号调制 - (不需要 脉冲成形) - {串转并 - IDFT - 添加循环前缀 - 并转串} - DAC - 上变频 （- 信道 - ）
2. 接收机：下变频 - 滤波器 - ADC - {串转并 - 移除循环前缀 - FFT - 频域均衡 - 并转串} - (因为没有脉冲成形，所以也没有匹配滤波) - 符号解调 - 比特流

4. 代价

此时虽然 比特率 R_b 不变，但是信息传输速率下降为原来的 $\frac{N}{N+N_{cp}}$

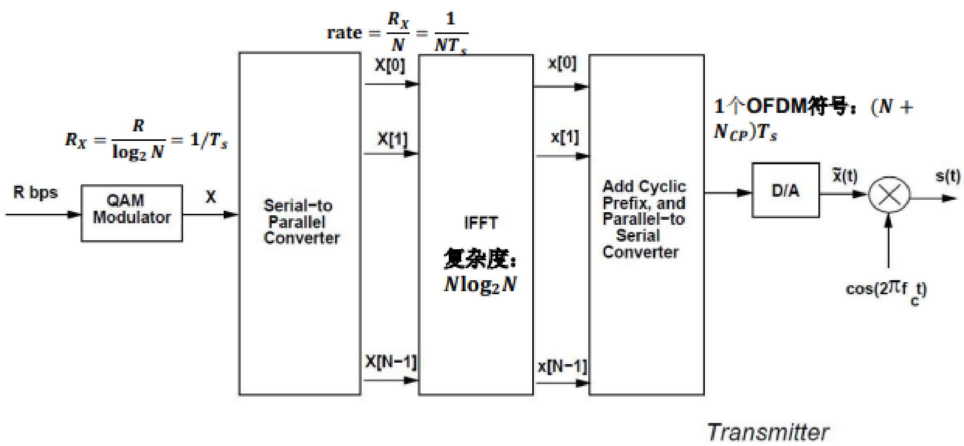
9.4.3 另外要求

信道在单个OFDM符号上保持 慢衰落，即：

$$T_{OFDM} = 0.1T_c$$

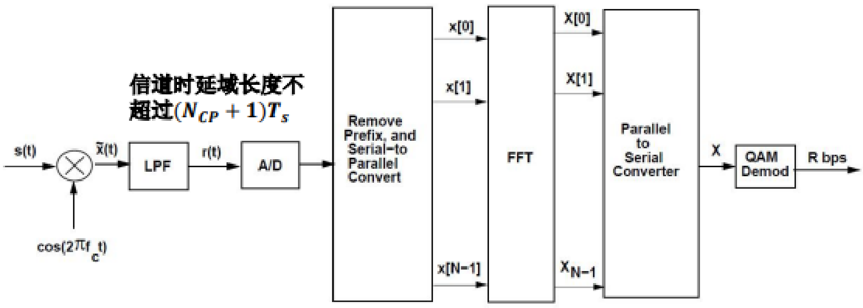
9.4.4 OFDM系统结构总结

1. 发射机：



   1. 输入比特流 经过 QAM调制 得到 复符号序列 $X[n]$

    2. 按N分组（一般N取2的整数幂）串并转换
    3. 经过 IFFT 后得到 $x[n]$
    4. 经过 添加循环前缀、并串转换 得到 $\widetilde{x}[n]$
    5. DAC + 上变频到 f_c
2. 接收机：



Receiver

    1. 下变频 + 滤波 + ADC，得到 $y[n]=\widetilde{x}[n]*h[n]+\nu[n]$
    2. 去除每个 $y[n]$ 的前 N_{CP} 个值（去掉循环前缀）
    3. 按N分组串并转换 + FFT，再除信道增益，得到 $X[i]=\frac{Y[i]}{H[i]}$
    4. 并串转换 + QAM解调，得到接收比特流

9.5 峰均功率比

峰均功率比 Peak Average Power Ratio, PAPR

峰均功率比影响到功率放大器的效率：

1. **功率放大器的工作特性**：功率放大器通常设计成在最大输出功率下运行，以确保信号的峰值部分不会失真。对于具有较高峰均功率比的信号，放大器需要具备较大的输出功率来处理这些峰值。然而，在许多情况下，这些峰值的信号占据的时间非常短，因此大部分时间功率放大器的输出功率都远低于峰值功率。
2. **增益和线性范围**：功率放大器通常具有有限的线性工作范围。如果信号的峰均功率比较高，放大器可能需要工作在非线性区域，导致效率下降并增加失真。因此，较高的PAPR会使得功率放大器无法在其最优效率范围内工作，从而减少了整体效率。

9.5.1 单载波系统

单载波系统中，PAPR 由以下决定：

1. 调制方法
2. 成形脉冲：
    1. 矩形：0dB
    2. 正弦：3dB

9.5.2 OFDM系统

OFDM系统中：

在发射端，输入功率放大器（PA）的信号为：

$$x\left[n\right]=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}X\left(i\right)e^{\frac{j2\pi in}{N}}$$

当 N 足够大时，由 中心极限定理 可知，x[n] 的实部和虚部都服从 $(0,\sigma^2)$ 的高斯分布

则 x[n] 的：

1. 包络 服从 方差为 σ^2 的瑞利分布
2. 相位 服从 均匀分布

若调制方式以BPSK为例，则假设符号为{-a, a}，则有：

$$\begin{cases} \text{峰值功率 } a^2 \\ \\ \text{平均功率 } \frac{1}{N^2}\sum_{i=0}^{N-1} E\left[\left|X\left(i\right)\right|^2\right] = \frac{1}{N^2}\cdot Na^2 = \frac{a^2}{N} \end{cases}$$

$$PAPR = \frac{PP}{AP} = N$$

9.6 OFDM系统中的频率偏移

频率偏移：OFDM系统中子载波的频率间隔不理想

造成原因：

1. 振荡器失配
2. 多普勒频移
3. 定时同步误差

结论：

$$\text{频率偏移量 } \varepsilon = \frac{\text{偏移频率 } \Delta f_0}{B_N} \ (\text{其中 } B_N \text{ 为 子载波宽度})$$

$$\text{信干噪比 } SINR = \frac{S}{I+N} = \frac{P|H|^2\left(\frac{\sin(\pi\varepsilon)}{\pi\varepsilon}\right)^2}{0.822\cdot P|H|^2(\sin\left(\pi\varepsilon\right))^2 + \sigma_n^2} \overset{\varepsilon=0}{=} \frac{P|H|^2}{\sigma_n^2}$$

9.7 IEEE 802.11a标准

IEEE 802.11a标准 基于OFDM技术，用于无线局域网

占用了5GHz开放频段中的300MHz带宽，分成20MHz的信道，每个信道有 N=64 个子载波（48个用于数据传输，12个置零用于降低ICI，4个用于发射导频），循环前缀长度为16：

$$\text{每个信道的带宽 } B = 20MHz$$

$$\Rightarrow \text{ 单载波系统中符号周期 } T_s = \frac{1}{R_s} = \frac{1}{B} = \frac{1}{20MHz} = 0.05us$$

$$\text{每个信道有 } N = 64 \text{ 个子载波}$$

$$\Rightarrow \text{ 每个子载波的带宽 } B_N = \frac{B}{N} = \frac{20}{64} = 0.3125MHz = 312.5kHz$$

$$\text{循环前缀长度 } N_{cp} = \mu = 16$$

$$\Rightarrow \text{ 能够消除的最大时延扩展 } \tau_m = N_{cp}T_s = 0.8us$$

$$\Rightarrow OFDM\text{系统中符号周期 } T_{ODFM} = (N + N_{cp})\cdot T_s = 4us$$

补充：参数 r 为 编码部分中，数据部分所占比特 / 总比特（某些检错码可能会占比特位置）

9.8 FDM / FDMA / OFDM / OFDMA