第8章 MIMO

多入多出系统 Multiple Input Multiple Output Systems, MIMO

8.1 MIMO 和 空时复用

8.1.1 MIMO

“多入多出” 指 发射端和接收端各有多个天线阵元

8.1.2 空时复用

空分复用（Spatial Multiplexing）：收-发天线间存在 有大量的信道链路，系统允许在多条数据链路上实现 并行传输，从而提高传输速率；

可以将原始高速数据拆分为多个低速数据流，并行传 输，在同等发射功率的条件下提高数据传输速率

根据香农公式可知，单信道系统的频谱效率（单位带宽的信道容量）：

$$\widetilde{C} = \log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) \overset{\gamma=\frac{S}{N}}{=} \begin{cases} \frac{\gamma}{\ln 2}，\gamma小 \\ \\ \log_2(\gamma)，\gamma大 \end{cases}$$

对于MIMO系统，可以基于空分复用构造出多个并行信道，假设：

（1）信道之间独立同分布

（2）信道之间有相同的增益、信噪比等

则 MIMO系统的频谱效率：

$$设\ \gamma_i为第i个信道的信噪比，\gamma为MIMO输出总信噪比$$

$$则有\ \gamma = N\gamma_i$$

$$\widetilde{C}=\sum_{i=1}^{N}\log_2\left(1+\gamma_i\right)=N\log_2\left(1+\frac{\gamma}{N}\right)=\begin{cases}\frac{\gamma}{\ln 2}，\gamma小\\ \\ \dots，\gamma大\end{cases}$$

可见：

（1）MIMO系统在低信噪比情况下与单信道系统的频谱效率差不多

（2）MIMO系统在高SNR条件下更有效

8.2 MIMO系统模型

（word图）

假设：

1. 每条信道：
    1. 准静态
    2. 平坦衰落
    3. 独立同分布
        1. 均值为0 即 $E[x_i]=0$
        2. 功率相同 即 $E[x_i^2]$ 相同，记为P，即每个符号的平均功率
2. 噪声 为 空时白噪声，即 在空间和时间上都独立同分布

则有：

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\cdots\\y_r\end{pmatrix}_{r\times1}=\begin{pmatrix}h_{11}&\cdots&h_{1t}\\\vdots&\ddots&\vdots\\h_{r1}&\cdots&h_{rt}\end{pmatrix}_{r\times t}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_t\end{pmatrix}_{t\times1}+\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\\cdots\\n_r\end{pmatrix}_{r\times1}$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}$$

对于线性接收机，有：

$$\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y}$$

现在希望求出公式中的 $\boldsymbol{c}^T$

第一种情况：$r=t$

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{n}$$

$$取\ \hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{y}\ 则\ \boldsymbol{c}^T=\boldsymbol{H}^{-1}$$

第二种情况（实际中常常是）：$r>t$

1. 迫零（ZF）接收机
    1. 推导：

$$希望\ \min_{\boldsymbol{x}}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\|^2$$

$$由\ \frac{d}{dx}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\|^2=0\ 可得\ \hat{\boldsymbol{x}}=\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{y}$$

其中 $\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T$ 即 $\boldsymbol{H}$的伪逆矩阵

2. 不足：

3. 误码率性能：相当于 M=r-t+1 根天线进行MRC的接收分集系统

2. 线性最小均方误差（LMMSE）接收机

希望 $\min_{\boldsymbol{c}} E\left[\|\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|^2\right]=\min_{\boldsymbol{c}} E\left[\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2\right]$

推导法1：矩阵求导

推导法2：正交性：

令 误差和接收信号正交，则：

$$E\left[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\right]=E\left[\left(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\right)\boldsymbol{y}^T\right]=E\left[\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^T-\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T\right]=0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{c}^T=E\left[\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T\right]\left\{E\left[\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^T\right]\right\}^{-1}=\boldsymbol{R}_{xy}\boldsymbol{R}_{yy}^{-1}$$

（0）$\boldsymbol{R}_{xx}$

$$\boldsymbol{R}_{xx}=E\left[\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\right]$$

$$\text{因为}\begin{cases}E\left[x_ix_i\right]=E\left[x_i^2\right]=P\\ \\ E\left[x_ix_j\right]=0\text{（独立）}\end{cases}$$

$$\text{所以 }\boldsymbol{R}_{xx}=E\left[\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\right]=P\boldsymbol{I}_t$$

（1）$\boldsymbol{R}_{xy}$

$$\boldsymbol{R}_{xy}=E\left[\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T\right]=E\left[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n})^T\right]=E\left[\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}^T\right]+E\left[\boldsymbol{x}\boldsymbol{n}^T\right]$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{H}\text{是}\begin{cases}\text{确定矩阵}\\ \text{(或)}\\ \text{已知的、与}\boldsymbol{x}\text{独立的随机矩阵}\end{cases} & \Rightarrow E\left[\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}^T\right]=E\left[\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\right]\boldsymbol{H}^T=P\boldsymbol{H}^T\\ \\ E\left[\boldsymbol{x}\boldsymbol{n}^T\right]=0\end{cases}$$

$$\boldsymbol{R}_{xy}=E\left[\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T\right]=P\boldsymbol{H}^T$$

（2）$\boldsymbol{R}_{yy}$

$$\boldsymbol{R}_{yy}=E\left[\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^T\right]=\boldsymbol{H}E\left[\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\right]\boldsymbol{H}^T+\boldsymbol{H}E\left[\boldsymbol{x}\boldsymbol{n}^T\right]+E\left[\boldsymbol{x}\boldsymbol{n}^T\right]\boldsymbol{H}^{-1}+E\left[\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^T\right]$$

$$=\boldsymbol{H}\left(P\boldsymbol{I}^T\right)\boldsymbol{H}^T+0+0+\sigma_n^2\boldsymbol{I}_r$$

$$=P\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^T+\sigma_n^2\boldsymbol{I}_r$$

$$\text{所以有：}\boldsymbol{c}^T=\boldsymbol{R}_{xy}\boldsymbol{R}_{yy}^{-1}=P\boldsymbol{H}^T\left(P\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^T+\sigma_n^2\boldsymbol{I}_r\right)^{-1}$$

$$\text{也可等价转换为 }\boldsymbol{c}^T=\left(P\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}+\sigma_n^2\boldsymbol{I}_t\right)^{-1}P\boldsymbol{H}^T$$

$$则\ \hat{\boldsymbol{x}}_{LMMSE}=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y}=P\boldsymbol{H}^T\left(P\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^T+\sigma_n^2\boldsymbol{I}_r\right)^{-1}\boldsymbol{y}=\left(P\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}+\sigma_n^2\boldsymbol{I}_t\right)^{-1}P\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{y}$$

$$\approx\begin{cases}\left(P\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}P\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{y}=\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{y}\ (\gamma\text{很大时，接近}ZF\text{接收机，可能会放大噪声}) \\ \\ \left(\sigma_n^2\boldsymbol{I}_t\right)^{-1}P\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{y}=\frac{P}{\sigma_n^2}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{y}\ (\gamma\text{很小时，倾向于抑制噪声})\end{cases}$$

8.3 MIMO信道矩阵分解

8.3.1 问题引入

根据上面所说的模型：

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}$$

可知，对于接收端的每个 y_i ，都与发射端的每个 x_i 都有关

但是我们希望将信道解耦，即 使发射端和接收端呈现 $x_i\leftrightarrow y_i$ 的一一对应关系

问题可等效为：希望信道矩阵 $\boldsymbol{H}$ 为对角阵

8.3.2 解决方法

（注：下标为0的指原本的数据，下标为1的指处理后的数据）

将原信道矩阵 $\boldsymbol{H_0}$ 进行奇异值分解（SVD）：

$$(\boldsymbol{H}_0)_{r\times t}=\boldsymbol{U}_{r\times r}\boldsymbol{\Sigma}_{r\times t}\boldsymbol{V}_{t\times t}^H$$

$$其中\ \boldsymbol{\Sigma}_{r\times t}\ 即\ 有对角阵性质的新信道矩阵\ (\boldsymbol{H}_1)_{r\times t}$$

代入MIMO信道模型中，有：

$$\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{n}_0=\boldsymbol{U}\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{V}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{n}_0$$

对应操作：

1. 发射机：预编码

$$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}_0$$

2. 接收机：接收成形

$$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{y}_0$$

可得：

$$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{n}_1$$

其中噪声：

$$\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{n}_0$$

$$则\ E\left[\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_1^H\right]=E\left[\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{n}_0\boldsymbol{n}_0^H\boldsymbol{U}\right]=\sigma_n^2\boldsymbol{I}_t$$

附：奇异值分解

适用：任何形状的矩阵

步骤：

1. 求奇异值对角阵 $\boldsymbol{\Sigma}$（$\boldsymbol{H}$ 的奇异值 是 $\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}$ 的特征值 $\Rightarrow \det\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}-\lambda\boldsymbol{I}\right)=0$）
2. 求右奇异矩阵 $\boldsymbol{V}$ （其列向量是 $\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}$ 的单位特征向量 $\Rightarrow (\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}-\lambda_i\boldsymbol{I})v_i=0$）
3. 求左奇异矩阵 $\boldsymbol{U}$ （ $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T \Rightarrow$ 列向量 $u_i=\frac{1}{\sigma_i}\boldsymbol{H}v_i$）

8.4 MIMO系统容量

8.4.1 MIMO系统容量

利用香农公式：

$$C=B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$$

可知：第i条信道，单位带宽的信息容量：

$$c=\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)=\log_2\left(1+\frac{\sigma_i^2P_i}{\sigma_n^2}\right)bit/\left(s\cdot Hz\right)$$

$$\text{其中的 }\sigma_i\text{ 即为 信道矩阵}\boldsymbol{H}\text{的第}\boldsymbol{i}\text{个奇异值}$$

MIMO系统容量：

$$c_{sys}=\sum_{i=1}^{t}\log_2\left(1+\frac{\sigma_i^2P_i}{\sigma_n^2}\right)bit/\left(s\cdot Hz\right)$$

8.4.2 功率分配问题

问题：当发射总功率不超过 P 时，如何在各个信道上分配功率，才能使得 MIMO 系统容量最大？

$$\max\ c_{sys}=\sum_{i=1}^{t}\log_2\left(1+\frac{\sigma_i^2P_i}{\sigma_n^2}\right)$$

$$s.t.\ \sum_{i=1}^{t}P_i\le P$$

解：利用拉格朗日乘子法：

$$f=\sum_{i=1}^{t}\log_2\left(1+\frac{\sigma_i^2P_i}{\sigma_n^2}\right)+\lambda\left(P-\sum_{i=1}^{t}P_i\right)$$

$$\text{令 }\frac{d}{dP_i}f=0\text{ 可得 }P_i=\frac{1}{\lambda}-\frac{\sigma_n^2}{\sigma_i^2}$$

注水算法：

$$P_i = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} - \frac{\sigma_n^2}{\sigma_i^2}, & \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\sigma_n^2}{\sigma_i^2} > 0\right) \\ \\ 0, & \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\sigma_n^2}{\sigma_i^2} \leq 0\right) \end{cases}$$

注：

1. 信噪比越小，分配功率越大；
2. 若信噪比大于一定门限，则放弃该信道