#### 第8章 MIMO

- 8.1 MIMO 和 空时复用
  - 8.1.1 MIMO
  - 8.1.2 空时复用
- 8.2 MIMO系统模型
- 8.3 MIMO信道矩阵分解
  - 8.3.1 问题引入
  - 8.3.2 解决方法
  - 附: 奇异值分解
- 8.4 MIMO系统容量
  - 8.4.1 MIMO系统容量
  - 8.4.2 功率分配问题

# 第8章 MIMO

多入多出系统 Multiple Input Multiple Output Systems, MIMO

### 8.1 MIMO 和 空时复用

#### 8.1.1 MIMO

"多入多出" 指 发射端和接收端各有多个天线阵元

### 8.1.2 空时复用

空分复用(Spatial Multiplexing): 收-发天线间存在 有大量的信道链路,系统允许在多条数据链路上实现 并行传输,从而提高传输速率;

可以将原始高速数据拆分为多个低速数据流,并行传输,在同等发射功率的条件下提高数据传输速率

根据香农公式可知,单信道系统的频谱效率(单位带宽的信道容量):

对于MIMO系统,可以基于空分复用构造出多个并行信道,假设:

- (1) 信道之间独立同分布
- (2) 信道之间有相同的增益、信噪比等

则 MIMO系统的频谱效率:

设  $\gamma_i$ 为第i个信道的信噪比, $\gamma$ 为MIMO输出总信噪比

则有 
$$\gamma = N\gamma_i$$

$$\widetilde{C} = \sum_{i=1}^{N} \log_2 \left(1 + \gamma_i 
ight) = N \log_2 \left(1 + rac{\gamma}{N} 
ight) = egin{cases} rac{\gamma}{\ln 2}, \ \gamma \nearrow \\ \dots, \ \gamma \nearrow \end{cases}$$

可见:

- (1) MIMO系统在低信噪比情况下与单信道系统的频谱效率差不多
- (2) MIMO系统在高SNR条件下更有效

### 8.2 MIMO系统模型

(word图)

假设:

- 1. 每条信道:
  - 1. 准静态
  - 2. 平坦衰落
  - 3. 独立同分布
    - 1. 均值为0 即  $E[x_i]=0$
    - 2. 功率相同 即  $E[x_i^2]$  相同,记为P,即每个符号的平均功率
- 2. 噪声 为 空时白噪声,即 在空间和时间上都独立同分布

则有:

$$egin{pmatrix} egin{pmatrix} y_1 \ y_2 \ \dots \ y_r \end{pmatrix}_{r imes 1} &= egin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1t} \ dots & \ddots & dots \ h_{r1} & \cdots & h_{rt} \end{pmatrix}_{r imes t} egin{pmatrix} x_1 \ x_2 \ \dots \ x_t \end{pmatrix}_{t imes 1} + egin{pmatrix} n_1 \ n_2 \ \dots \ n_r \end{pmatrix}_{r imes 1} \ oldsymbol{y} &= oldsymbol{H} oldsymbol{x} + oldsymbol{n} \end{pmatrix}_{t imes 1}$$

对于线性接收机,有:

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{y}$$

现在希望求出公式中的 $oldsymbol{c}^T$ 

第一种情况: r=t

$$oldsymbol{x} = oldsymbol{H}^{-1}oldsymbol{y} - oldsymbol{H}^{-1}oldsymbol{n}$$
取 $oldsymbol{\hat{x}} = oldsymbol{H}^{-1}oldsymbol{y}$ 則 $oldsymbol{c}^T = oldsymbol{H}^{-1}$ 

第二种情况 (实际中常常是) : r>t

- 1. 迫零 (ZF) 接收机
  - 1. 推导:

希望 
$$\min_{m{x}} \|m{y} - m{H}m{x}\|^2$$
 由  $\frac{d}{dx} \|m{y} - m{H}m{x}\|^2 = 0$  可得  $\hat{m{x}} = \left(m{H}^Tm{H}\right)^{-1}m{H}^Tm{y}$ 

### 其中 $(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^T$ 即 $\boldsymbol{H}$ 的伪逆矩阵

2. 不足:

3. 误码率性能: 相当于 M=r-t+1 根天线进行MRC的接收分集系统

2. 线性最小均方误差 (LMMSE) 接收机

希望 
$$\min_{oldsymbol{c}} E\left[\|oldsymbol{c}^Toldsymbol{y} - oldsymbol{x}\|^2
ight] = \min_{oldsymbol{c}} E\left[\|oldsymbol{\varepsilon}\|^2
ight]$$

推导法1: 矩阵求导

推导法2: 正交性:

令 误差和接收信号正交,则:

$$E\left[oldsymbol{arepsilon}oldsymbol{y}^{T}
ight] = E\left[oldsymbol{c}^{T}oldsymbol{y}^{T} - oldsymbol{x}oldsymbol{y}^{T}
ight] = 0$$

$$\Rightarrow oldsymbol{c}^{T} = E\left[oldsymbol{x}oldsymbol{y}^{T}
ight]\left\{E\left[oldsymbol{y}oldsymbol{y}^{T}
ight]
ight\}^{-1} = oldsymbol{R}_{xy}oldsymbol{R}_{yy}^{-1}$$

$$(0)$$
  $m{R}_{xx}$   $m{R}_{xx} = E\left[m{x}m{x}^T
ight]$  因为  $egin{cases} E\left[x_ix_i
ight] = E\left[x_i^2
ight] = P \ E\left[x_ix_j
ight] = 0 \; (独立) \end{cases}$  所以  $m{R}_{xx} = E\left[m{x}m{x}^T
ight] = Pm{I}_t$ 

$$egin{aligned} m{R}_{xy} &= E\left[m{x}m{y}^T
ight] = E\left[m{x}(m{H}m{x} + m{n})^T
ight] = E\left[m{x}m{x}^Tm{H}^T
ight] + E\left[m{x}m{n}^T
ight] \ m{H}$$
是 $egin{aligned} m{ text{disc}} &\Rightarrow E\left[m{x}m{x}^Tm{H}^T
ight] = E\left[m{x}m{x}^T
ight]m{H}^T = Pm{H}^T \ m{ text{disc}} & \Rightarrow E\left[m{x}m{n}^T
ight] = 0 \end{aligned}$ 

$$oldsymbol{R}_{xy} = E\left[oldsymbol{x}oldsymbol{y}^T
ight] = Poldsymbol{H}^T$$

$$(2) \mathbf{R}_{yy}$$

$$\mathbf{R}_{yy} = E \left[ \mathbf{y} \mathbf{y}^T \right] = \mathbf{H} E \left[ \mathbf{x} \mathbf{x}^T \right] \mathbf{H}^T + \mathbf{H} E \left[ \mathbf{x} \mathbf{n}^T \right] + E \left[ \mathbf{x} \mathbf{n}^T \right] \mathbf{H}^{-1} + E \left[ \mathbf{n} \mathbf{n}^T \right]$$

$$= \mathbf{H} \left( P \mathbf{I}^T \right) \mathbf{H}^T + 0 + 0 + \sigma_n^2 \mathbf{I}_r$$

$$= P \mathbf{H} \mathbf{H}^T + \sigma_n^2 \mathbf{I}_r$$

所以有: 
$$oldsymbol{c}^T = oldsymbol{R}_{xy} oldsymbol{R}_{yy}^{-1} = P oldsymbol{H}^T ig( P oldsymbol{H} oldsymbol{H}^T + \sigma_n^2 oldsymbol{I}_r ig)^{-1}$$
  
也可等价转换为  $oldsymbol{c}^T = ig( P oldsymbol{H}^T oldsymbol{H} + \sigma_n^2 oldsymbol{I}_t ig)^{-1} P oldsymbol{H}^T$ 

则 
$$\hat{\boldsymbol{x}}_{LMMSE} = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{y} = P \boldsymbol{H}^T \left( P \boldsymbol{H} \boldsymbol{H}^T + \sigma_n^2 \boldsymbol{I}_r \right)^{-1} \boldsymbol{y} = \left( P \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{H} + \sigma_n^2 \boldsymbol{I}_t \right)^{-1} P \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{y}$$

$$\approx \begin{cases} \left( P \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{H} \right)^{-1} P \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{y} = \left( \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{H} \right)^{-1} \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{y} \; (\gamma \text{很大时,接近} Z F \text{接收机,可能会放大噪声}) \\ \left( \sigma_n^2 \boldsymbol{I}_t \right)^{-1} P \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{y} = \frac{P}{\sigma_n^2} \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{y} \; (\gamma \text{很小时,倾向于抑制噪声}) \end{cases}$$

## 8.3 MIMO信道矩阵分解

### 8.3.1 问题引入

根据上面所说的模型:

$$y = Hx + n$$

可知,对于接收端的每个  $y_i$  ,都与发射端的每个  $x_i$  都有关

但是我们希望将信道解耦,即 使发射端和接收端呈现  $x_i \leftrightarrow y_i$  的——对应关系

问题可等效为:希望信道矩阵 H 为对角阵

### 8.3.2 解决方法

(注:下标为0的指原本的数据,下标为1的指处理后的数据)

将原信道矩阵  $H_0$  进行奇异值分解 (SVD):

$$(oldsymbol{H}_0)_{r imes t} = oldsymbol{U}_{r imes r} oldsymbol{\Sigma}_{r imes t} oldsymbol{V}_{t imes t}^H$$

其中  $\Sigma_{r \times t}$  即 有对角阵性质的新信道矩阵  $(\boldsymbol{H}_1)_{r \times t}$ 

代入MIMO信道模型中,有:

$$oldsymbol{y}_0 = oldsymbol{H}_0 oldsymbol{x}_0 + oldsymbol{n}_0 = oldsymbol{U} oldsymbol{H}_1 oldsymbol{V}^H oldsymbol{x}_0 + oldsymbol{n}_0$$

对应操作:

1. 发射机: 预编码

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}_0$$

2. 接收机:接收成形

$$oldsymbol{y}_1 = oldsymbol{U}^H oldsymbol{y}_0$$

可得:

$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{H}_1 \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{n}_1$$

其中噪声:

$$m{n}_1 = m{U}^Hm{n}_0$$
則  $E\left[m{n}_1m{n}_1^H
ight] = E\left[m{U}^Hm{n}_0m{n}_0^Hm{U}
ight] = \sigma_n^2m{I}_t$ 

### 附: 奇异值分解

适用: 任何形状的矩阵

步骤:

1. 求奇异值对角阵  $m \Sigma$  (m H 的奇异值 是  $m H^Tm H$  的特征值  $\Rightarrow \det ig(m H^Tm H - \lambda m Iig) = 0$  )

2. 求右奇异矩阵  $m{V}$  (其列向量是  $m{H}^Tm{H}$  的单位特征向量  $\Rightarrow (m{H}^Tm{H} - \lambda_i m{I})v_i = 0$ )

3. 求左奇异矩阵  $oldsymbol{U}$  (  $oldsymbol{H}=oldsymbol{U}oldsymbol{\Sigma}oldsymbol{V}^T\Rightarrow$  列向量  $u_i=rac{1}{\sigma_i}oldsymbol{H}v_i$ )

### 8.4 MIMO系统容量

### 8.4.1 MIMO系统容量

利用香农公式:

$$C = B \log_2 \left(1 + rac{S}{N}
ight)$$

可知:第i条信道,单位带宽的信息容量:

$$c = \log_2 \left(1 + rac{S}{N}
ight) = \log_2 \left(1 + rac{\sigma_i^2 P_i}{\sigma_n^2}
ight) bit/\left(s \cdot Hz
ight)$$

其中的  $\sigma_i$  即为 信道矩阵 H的第i个奇异值

MIMO系统容量:

$$c_{sys} = \sum_{i=1}^{t} \log_2 \left( 1 + rac{\sigma_i^2 P_i}{\sigma_n^2} 
ight) bit / \left( s \cdot Hz 
ight)$$

### 8.4.2 功率分配问题

问题: 当发射总功率不超过 P 时,如何在各个信道上分配功率,才能使得 MIMO 系统容量最大?

$$egin{aligned} \max \ c_{sys} &= \sum_{i=1}^t \log_2 \left( 1 + rac{\sigma_i^2 P_i}{\sigma_n^2} 
ight) \ s. \, t. \ \sum_{i=1}^t P_i \leq P \end{aligned}$$

解: 利用拉格朗日乘子法:

$$f = \sum_{i=1}^t \log_2 \left( 1 + rac{\sigma_i^2 P_i}{\sigma_n^2} 
ight) + \lambda \left( P - \sum_{i=1}^t P_i 
ight)$$
 令  $rac{d}{dP_i} f = 0$  可得  $P_i = rac{1}{\lambda} - rac{\sigma_n^2}{\sigma_i^2}$ 

注水算法:

$$P_i = egin{cases} rac{1}{\lambda} - rac{\sigma_n^2}{\sigma_i^2}, \; \left(rac{1}{\lambda} - rac{\sigma_n^2}{\sigma_i^2} > 0
ight) \ 0, \; \left(rac{1}{\lambda} - rac{\sigma_n^2}{\sigma_i^2} \leq 0
ight) \end{cases}$$

注:

- 1. 信噪比越小, 分配功率越大;
- 2. 若信噪比大于一定门限,则放弃该信道