

第9章 MCM 和 OFDM

- 9.1 问题引入
- 9.2 基本原理
- 9.3 模拟多载波调制系统
 - 9.3.1 通用
 - 9.3.2 频谱不重叠
 - 1. 实现
 - 2. 接收机
 - 9.3.3 OFDM
 - 1. OFDM
 - 2. OFDM的优势
 - 3. OFDM的接收机
 - 4. OFDM的问题
 - 5. 子载波衰落的抑制
- 9.4 数字OFDM系统
 - 9.4.1 对发射机的初步改进（引入IDFT）
 - 1. 第一个推导
 - 2. 第二个推导
 - 3. 综合上面两个推导
 - 4. 初步改进后的发射机结构
 - 9.4.2 对发射机的进一步改进（引入CP）
 - 1. 问题引入
 - 2. 解决：循环前缀
 - 3. 发射机 和 接收机结构
 - 4. 代价
 - 9.4.3 另外要求
 - 9.4.4 OFDM系统结构总结
- 9.5 峰均功率比
 - 9.5.1 单载波系统
 - 9.5.2 OFDM系统
- 9.6 OFDM系统中的频率偏移
- 9.7 IEEE 802.11a标准
- 9.8 FDM / FDMA / OFDM / OFDMA

第9章 MCM 和 OFDM

多载波调制 Multi-Carrier Modulation

正交频分复用 Orthogonal Frequency Division Multiplexing

关系：OFDM 是 MCM 的一种实现方式

9.1 问题引入

如何提高信息传输速率（比特速率）？

1. 在 每个符号的持续时间不变 的情况下，提高 每个符号携带的比特数，即 采用更高阶的调制技术
引起的问题：SNR（星座图上的符号点更近，相同信号功率时误码率更高）
 2. 在 每个符号携带的比特数不变 的情况下，降低 每个符号的持续时间，即 增加信号的传输带宽
引起的问题：ISI（符号周期缩短，短于信道时延扩展时，就会引起ISI，即 上一个信号的影响还未消减，下一个信号已经到来）
- 时域上：ISI

频域上：频率选择性衰落

（虽然均衡器能够消除ISI，但是：线性均衡器性能差；非线性均衡器复杂度高）

新方案 即 多载波调制 MCM：

将高速比特率分为多个子比特流，再调制到相互正交的子载波上进行传输，使得每个子信道带宽小于信道的相干带宽，进而每个子信道都经历平坦衰落

子载波相互正交：

1. 时域上：
2. 频域上：

在一个符号周期 T 内，不同子载波之间的内积为0，即 互不干扰

9.2 基本原理

由前面所说“使得每个子信道的带宽小于信道的相干带宽”，若均分，则有：

$$\text{子信道带宽 } B_N = \frac{\text{总信号带宽 } B}{N} \leq \text{相干带宽 } B_c$$

可知：

$$\text{对于带限信号: } \begin{cases} T_N = \frac{1}{R_N} = \frac{1}{B_N} \\ T = \frac{1}{R} = \frac{1}{B} \end{cases}$$
$$\text{即 } T_N \geq \frac{1}{B_c} \approx \sigma_\tau \text{ 方均根时延扩展}$$

结论：理论上，MCM系统并不改变系统的数据速率

9.3 模拟多载波调制系统

9.3.1 通用

第 k 个子载波：

$$s_k(t) = X_k g(t) \cos(2\pi f_k t + \phi_k), \quad k = 0, 1, \dots, (N-1)$$

$$\text{其中 } \begin{cases} X_k \text{ 为 经过调制后得到的复数符号} \\ f_k \text{ 为 第 } k \text{ 个子载波频率} \end{cases}$$

合并后得到：

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k(t) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k g(t) \cos(2\pi f_k t + \phi_k)$$

对于 升余弦滚降脉冲成形滤波器：

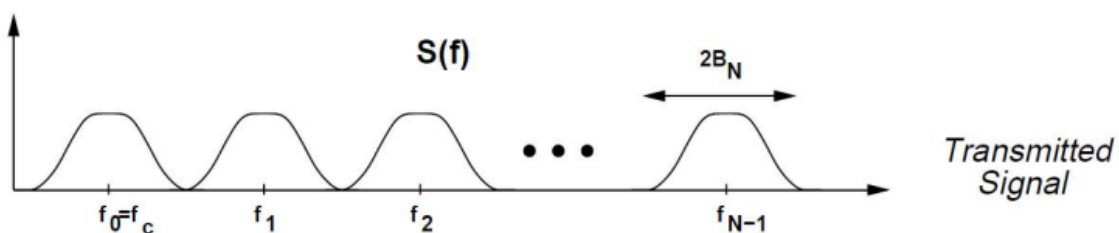
$$B_N = \frac{1 + \beta + \varepsilon}{T_N}$$
$$\text{其中 } \begin{cases} \beta \text{ 为 升余弦滚降系数} \\ \frac{\varepsilon}{T_N} \text{ 为 成形脉冲时间受限而增加的带宽} \end{cases}$$

9.3.2 频谱不重叠

1. 实现

为保证子载波正交，则令子载波间频谱不重叠：

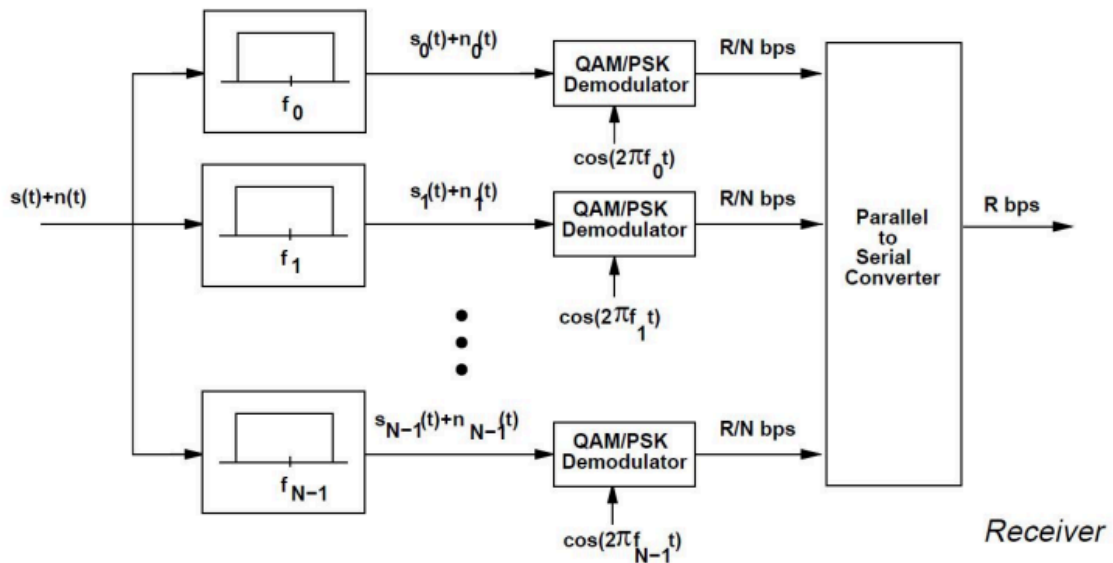
$$\Delta f = f_k - f_{k-1} \geq B_N$$



可以发现，频谱利用率未达极限

2. 接收机

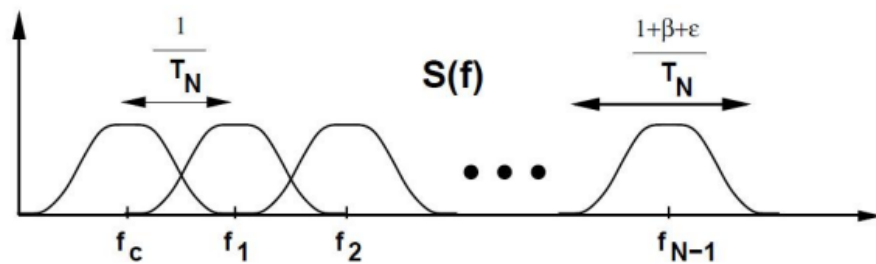
(使用滤波器)



9.3.3 OFDM

1. OFDM

在保证子载波正交的前提下，允许子载波间频谱重叠：



如图，此时达到极限情况

此时有：

1. 子载波频率间隔：

$$\Delta f = \frac{1}{T_N} < \frac{1+\beta+\epsilon}{T_N} = B_N$$

2. 子载波：

在 $t \in [0, T_N]$ 内，对于任意子载波初相位 $\{\phi_i\}$ ，有：

子载波 $\left\{ \cos \left[2\pi \left(f_0 + \frac{i}{T_N} \right) t + \phi_i \right], i = 0, 1, 2, \dots \right\}$ 近似为一组正交基：

$$\frac{1}{T_N} \int_{\tau}^{\tau+T_N} \Psi_k(t) \Psi_l(t) dt = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

3. 信道总带宽：

$$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\alpha+\epsilon}{T_N} + (N-1) \cdot \frac{1}{T_N} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\alpha+\epsilon}{T_N} = \frac{N+\alpha+\epsilon}{T_N} \approx \frac{N}{T_N} \text{ 即原带宽}$$

2. OFDM的优势

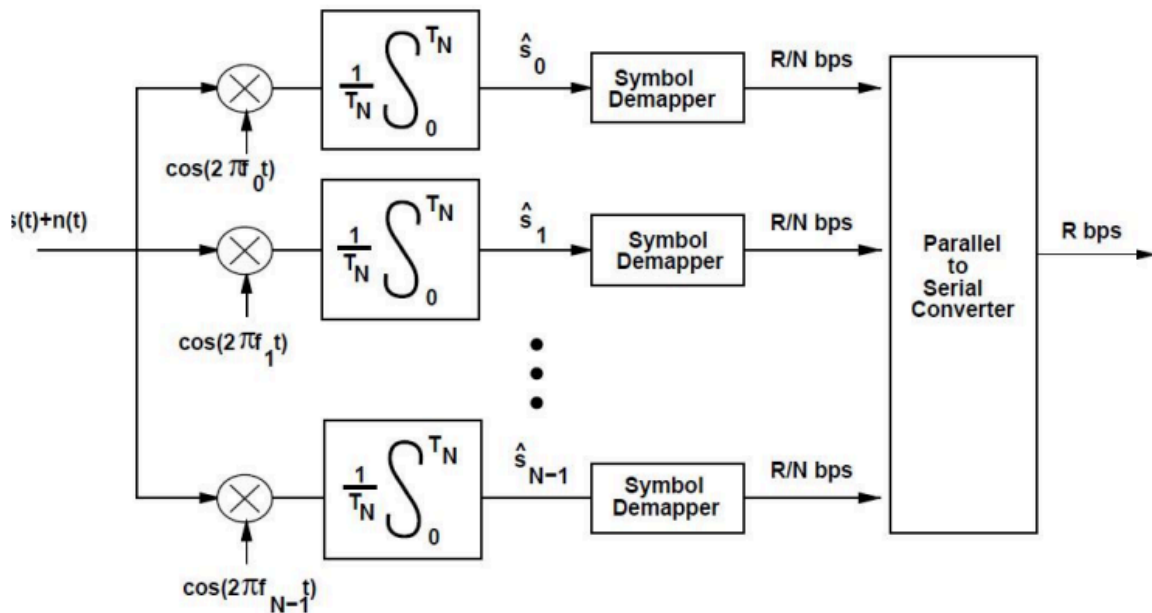
1. 子载波频谱之间不需要保护间隔，提高频谱利用率（相比于单载波调制方法，频谱效率可以近似提升一倍）
2. 不同子载波上可以采用不同的调制方式，灵活性大（增益大的子载波则采用高阶的调制方式）
3. 通过将高速数据流分成多个并行低速子数据流，增大了符号持续时间，抗ISI能力增强

$$T_N = NT_s$$

4.

3. OFDM的接收机

(相关接收)



4. OFDM的问题

1. 正交子载波容易受到定时偏差、频率偏差和多普勒频移的影响，处理不好会大大降低系统性能。（每个子载波带宽减小，较小的频偏就会导致较大的子载波间干扰（Inter-Carrier Interference, ICI））
2. 多个子载波信号叠加，有时加强，有时削弱，造成OFDM有较大的峰均功率比（Peak-to-Average Power Ratio, PAPR）（子载波个数越多即 N 越大，PAPR 越大）

5. 子载波衰落的抑制

1. 时频域交织编码：将数据比特编成码字，在时、频域上进行交织，通过子信道传送，使得码字中的各个比特经历独立的衰落
2. 频域均衡 / 预编码：（？）
3. 自适应加载：针对各子信道增益的不同，赋予不同的数据速率和发送功率

9.4 数字OFDM系统

9.4.1 对发射机的初步改进（引入IDFT）

1. 第一个推导

$$\text{射频信号 } D(t) = \text{Re} \left[\sum_{k=0}^{N-1} d(k) e^{j2\pi \left(f_0 + \frac{k}{T_N}\right)t} \right] = \text{Re} \left[\left(\sum_{k=0}^{N-1} d(k) e^{j2\pi \frac{k}{T_N}t} \right) e^{j2\pi f_0 t} \right]$$

$$\text{可知 等效基带信号 } D_L(t) = \sum_{k=0}^{N-1} d(k) e^{j2\pi \frac{k}{T_N}t}$$

$$\text{在 } T_N \text{ 上进行 } N \text{ 点采样 } D_L(n) = D_L(t)|_{t=n \cdot \frac{T_N}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} d(k) e^{j\frac{2\pi kn}{N}}$$

即对 $\{d(k)\}$ 进行 $IDFT / IFFT$

2. 第二个推导

用循环卷积矩阵形式来表达信道模型:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}_c \mathbf{x}$$

可以证明: 任意循环矩阵 \mathbf{H}_c , 都可以被傅里叶变换矩阵 \mathbf{Q} 对角化:

$$\mathbf{H}_c = \mathbf{Q}^H \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}$$

$$\text{其中} \begin{cases} \mathbf{Q} \text{ 是 傅里叶变换矩阵} \\ \mathbf{\Lambda} = \text{diag} [H_0, \dots, H_{N-1}] \text{ 即 信道响应 } h(n) \text{ 的 } N \text{ 点 } DFT \end{cases}$$

证明:

$$\mathbf{H}_c = \begin{bmatrix} h_0 & h_{N-1} & \cdots & h_1 \\ h_1 & h_0 & \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1} & h_{N-2} & \cdots & h_0 \end{bmatrix}_{N \times N} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_0 \end{bmatrix}_{N \times N} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & h_1 \\ h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{N \times N} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 & h_{N-1} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

$$\text{记 单位循环左移位矩阵 } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

$$\text{以 } N=3 \text{ 为例, 则 } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 可发现 } \mathbf{C}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{则有 } \mathbf{H}_c = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \mathbf{C}^n \text{ (设 } \mathbf{C}^0 = \mathbf{I} \text{)}$$

对 单位循环左移位矩阵 \mathbf{C} 研究:

$$\text{对 } \mathbf{C} \text{ 求特征值和特征向量 } \mathbf{C} \mathbf{x}_k = \lambda \mathbf{x}_k \text{ 可以得到: } \begin{cases} \lambda_k = e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot k} \\ \mathbf{x}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j \frac{2\pi}{N} \cdot k} \\ e^{j \frac{2\pi}{N} \cdot 2k} \\ \vdots \\ e^{j \frac{2\pi}{N} \cdot (N-1)k} \end{bmatrix}, (k=0, 1, \dots, (N-1)) \end{cases}$$

$$\text{即 } \mathbf{C} \cdot [x_0 \ x_1 \ \cdots \ x_{N-1}] = [x_0 \ x_1 \ \cdots \ x_{N-1}] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{N-1} \end{bmatrix}$$

可以发现 $[x_0 \ x_1 \ \cdots \ x_{N-1}] = \mathbf{Q}^H$ 即 傅里叶逆变换矩阵 (酉矩阵形式)

$$\text{即 } \mathbf{C} \mathbf{Q}^H = \mathbf{Q}^H \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{Q}^H \mathbf{P} \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{C}^i = (\mathbf{Q}^H \mathbf{P} \mathbf{Q}) (\mathbf{Q}^H \mathbf{P} \mathbf{Q}) \cdots (\mathbf{Q}^H \mathbf{P} \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^H \mathbf{P}^i \mathbf{Q}$$

其中 \mathbf{P}^i 仍为 对角阵

$$\text{则 } \mathbf{H}_c = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \mathbf{C}^n = \mathbf{Q}^H \left(\sum_{n=0}^{N-1} h_n \mathbf{P}^n \right) \mathbf{Q}$$

$$\text{设 } \mathbf{\Lambda} = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \mathbf{P}^n \text{ 则 } \Lambda_{k,k} = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n} \text{ 即 } h_n \text{ 的 } DFT, \text{ 记为 } H_n$$

得出结论: $H_c = Q^H \Lambda Q$

$$\text{其中} \begin{cases} Q \text{ 为 傅里叶变换矩阵 (酉矩阵形式)} \\ \Lambda = \text{diag}(H_0, H_1, \dots, H_{N-1}) \text{ 为 } h_n \text{ 的 DFT} \end{cases}$$

则有:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}_c \mathbf{x} = \mathbf{Q}^H \Lambda \mathbf{Q} \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{Q} \mathbf{y} = \Lambda \mathbf{Q} \mathbf{x}$$

$$\Rightarrow \mathbf{Y} = \Lambda \mathbf{X} \text{ 其中 } \begin{cases} \mathbf{Y} = \mathbf{Q} \mathbf{y} \\ \mathbf{X} = \mathbf{Q} \mathbf{x} \end{cases}$$

3. 综合上面两个推导

1. 发射端:

1. 比特流 经过 调制 得到 复符号 \mathbf{X}
2. 经过 IFFT 得到 \mathbf{x}

2. 信道:

1. 循环卷积矩阵形式 $\mathbf{y} = \mathbf{H}_c \mathbf{x}$

3. 接收端:

1. 经过 FFT 得到 \mathbf{Y}
2. 由推导知 $\mathbf{Y} = \Lambda \mathbf{X}$ 且 Λ 为对角阵, 所以 \mathbf{Y} 和 \mathbf{X} 中的元素一一对应, 仅需对应除去每个子载波的信道增益即可得到 原来的复符号 \mathbf{X}
3. 经过 解调 得到 原来的比特流

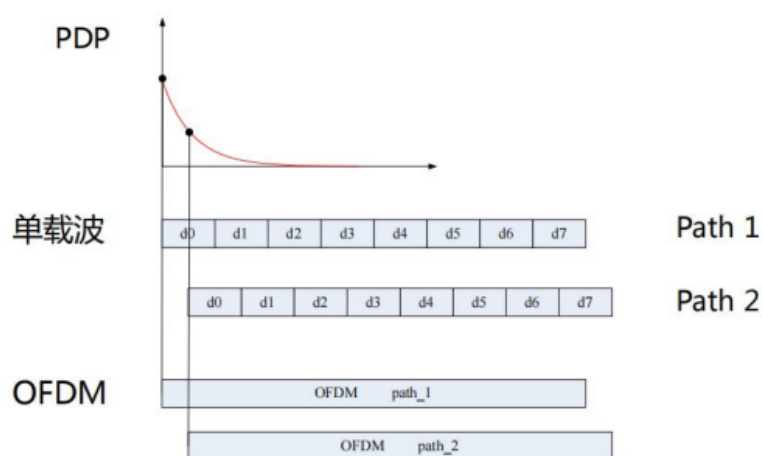
4. 初步改进后的发射机结构

比特流 - 符号调制 - 脉冲成形 - {串转并 - IDFT - 并转串} - DAC - 上变频 (- 信道 -)

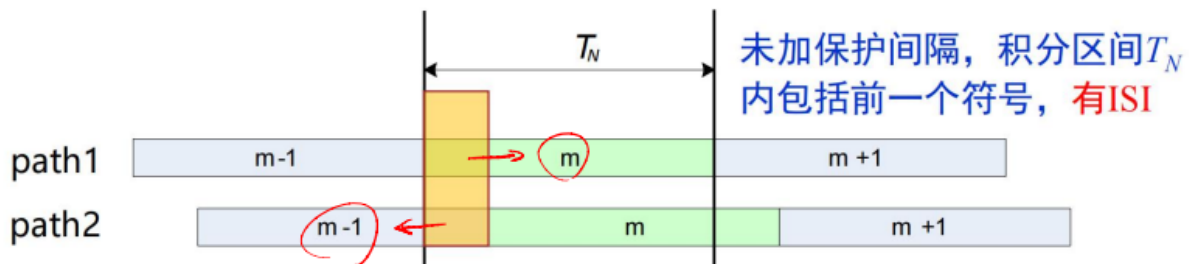
9.4.2 对发射机的进一步改进 (引入CP)

1. 问题引入

观察:



会发现问题: (下图中“积分区间”对应的是模拟接收机, 对于数字接收机应该是FFT的一组)



即：虽然 时延扩展 已经远小于 符号周期，但是还是存在符号之间的干扰（子载波之间的干扰 ICI）

思考：如何利用子载波的正交性消除？

2. 解决：循环前缀

加入 循环前缀 作为 保护区间：



假设将最后的 N_{cp} 个 T_s 的波形放到此 T_{OFDM} 之前，则：

如果想要消除码间串扰，则需要：

$$N_{cp} \cdot T_s \geq \tau_{\max}$$

此时对于任意一条路径，在考虑的时间区间 T_N 中，都仅仅有第m个符号的采样点

3. 发射机 和 接收机结构

1. 发射机：比特流 - 符号调制 - (不需要 脉冲成形) - {串转并 - IDFT - 添加循环前缀 - 并转串} - DAC - 上变频 (- 信道 -)
2. 接收机：下变频 - 滤波器 - ADC - {串转并 - 移除循环前缀 - FFT - 频域均衡 - 并转串} - (因为没有脉冲成形，所以也没有匹配滤波) - 符号解调 - 比特流

4. 代价

此时虽然 比特率 R_b 不变，但是信息传输速率下降为原来的 $\frac{N}{N+N_{cp}}$

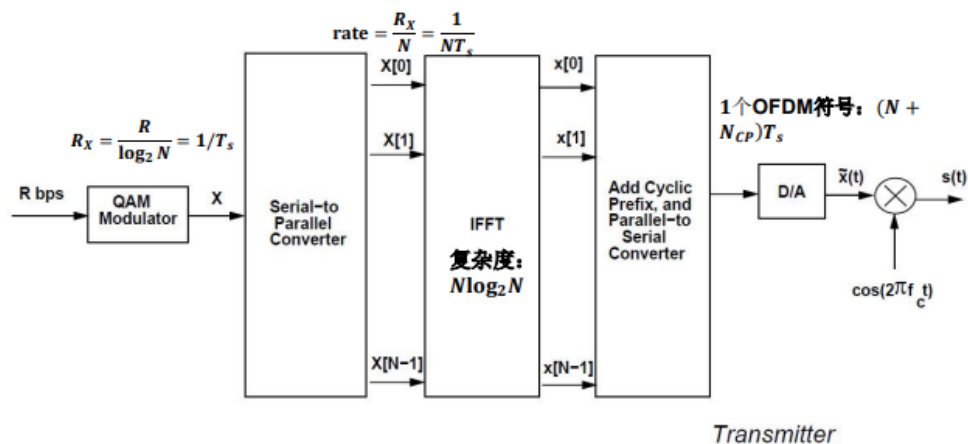
9.4.3 另外要求

信道在单个OFDM符号上保持 慢衰落，即：

$$T_{OFDM} = 0.1T_c$$

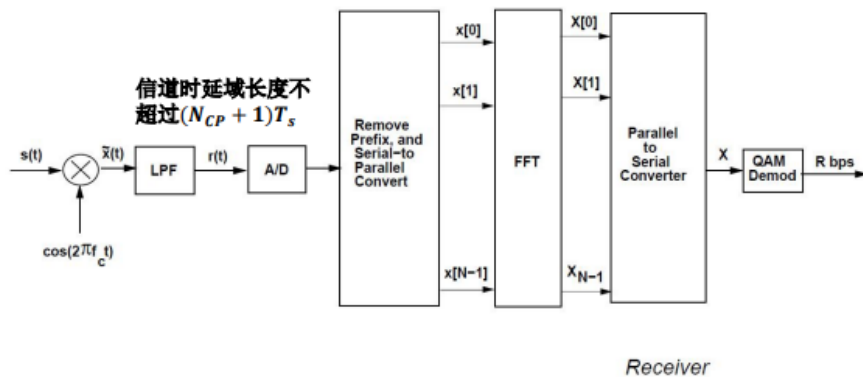
9.4.4 OFDM系统结构总结

1. 发射机：



1. 输入比特流 经过 QAM调制 得到 复符号序列 $X[n]$
2. 按N分组（一般N取2的整数幂）串并转换

3. 经过 IFFT 后得到 $x[n]$
 4. 经过 添加循环前缀、并串转换 得到 $\tilde{x}[n]$
 5. DAC + 上变频到 f_c
2. 接收机：



1. 下变频 + 滤波 + ADC, 得到 $y[n] = \tilde{x}[n] * h[n] + \nu[n]$
2. 去除每个 $y[n]$ 的前 N_{CP} 个值 (去掉循环前缀)
3. 按N组串并转换 + FFT, 再除信道增益, 得到 $X[i] = \frac{Y[i]}{H[i]}$
4. 并串转换 + QAM解调, 得到接收比特流

9.5 峰均功率比

峰均功率比 Peak Average Power Ratio, PAPR

峰均功率比影响到功率放大器的效率：

1. **功率放大器的工作特性**：功率放大器通常设计成在最大输出功率下运行，以确保信号的峰值部分不会失真。对于具有较高峰均功率比的信号，放大器需要具备较大的输出功率来处理这些峰值。然而，在许多情况下，这些峰值的信号占据的时间非常短，因此大部分时间功率放大器的输出功率都远低于峰值功率。
2. **增益和线性范围**：功率放大器通常具有有限的线性工作范围。如果信号的峰均功率比较高，放大器可能需要工作在非线性区域，导致效率下降并增加失真。因此，较高的PAPR会使得功率放大器无法在其最优效率范围内工作，从而减少了整体效率。

9.5.1 单载波系统

单载波系统中，PAPR 由以下决定：

1. 调制方法
2. 成形脉冲：
 1. 矩形：0dB
 2. 正弦：3dB

9.5.2 OFDM系统

OFDM系统中：

在发射端，输入功率放大器（PA）的信号为：

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X(i) e^{j2\pi i n / N}$$

当 N 足够大时，由 中心极限定理 可知， $x[n]$ 的实部和虚部都服从 $(0, \sigma^2)$ 的高斯分布

则 $x[n]$ 的：

1. 包络 服从 方差为 σ^2 的瑞利分布
2. 相位 服从 均匀分布

若调制方式以BPSK为例，则假设符号为{-a, a}，则有：

$$\begin{cases} \text{峰值功率 } a^2 \\ \text{平均功率 } \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} E[|X(i)|^2] = \frac{1}{N^2} \cdot N a^2 = \frac{a^2}{N} \end{cases}$$

$$PAPR = \frac{PP}{AP} = N$$

9.6 OFDM系统中的频率偏移

频率偏移：OFDM系统中子载波的频率间隔不理想

造成原因：

1. 振荡器失配
2. 多普勒频移
3. 定时同步误差

结论：

$$\text{频率偏移量 } \varepsilon = \frac{\text{偏移频率 } \Delta f_0}{B_N} \quad (\text{其中 } B_N \text{ 为子载波宽度})$$

$$\text{信干噪比 } SINR = \frac{S}{I + N} = \frac{P|H|^2 \left(\frac{\sin(\pi\varepsilon)}{\pi\varepsilon} \right)^2}{0.822 \cdot P|H|^2 (\sin(\pi\varepsilon))^2 + \sigma_n^2} \stackrel{\varepsilon=0}{=} \frac{P|H|^2}{\sigma_n^2}$$

9.7 IEEE 802.11a标准

IEEE 802.11a标准 基于OFDM技术，用于无线局域网

占用了5GHz开放频段中的300MHz带宽，分成20MHz的信道，每个信道有 N=64 个子载波（48个用于数据传输，12个置零用于降低ICI，4个用于发射导频），循环前缀长度为16：

$$\begin{aligned} \text{每个信道的带宽 } B &= 20MHz \\ \Rightarrow \text{单载波系统中符号周期 } T_s &= \frac{1}{R_s} = \frac{1}{B} = \frac{1}{20MHz} = 0.05us \\ \text{每个信道有 } N &= 64 \text{ 个子载波} \\ \Rightarrow \text{每个子载波的带宽 } B_N &= \frac{B}{N} = \frac{20}{64} = 0.3125MHz = 312.5kHz \\ \text{循环前缀长度 } N_{cp} &= \mu = 16 \\ \Rightarrow \text{能够消除的最大时延扩展 } \tau_m &= N_{cp} T_s = 0.8us \\ \Rightarrow OFDM \text{系统中符号周期 } T_{OFDM} &= (N + N_{cp}) \cdot T_s = 4us \end{aligned}$$

补充：参数 r 为 编码部分中，数据部分所占比特 / 总比特（某些检错码可能会占比特位置）

9.8 FDM / FDMA / OFDM / OFDMA

